UDS

ANTOLOGIA

ÁLGEBRA SUPERIOR

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

1ER CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

ALGEBRA SUPERIOR

Objetivo de la materia:

Que el estudiante desarrolle un lenguaje algebraico a través de experiencias y entornos cotidianos del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico. El estudiante reconocerá y aplicará los conocimientos básicos de: Inducción matemática, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes, números complejos y raíces de polinomios.

Criterios y procedimientos de evaluación y acreditación:

Actividades en la Plataforma Educativa

Primera actividad	15%
Segunda actividad	15%
Actividades Áulicas o Practicas	20%
Examen	50%
Total	100%
Escala de calificaciones	7-10
Mínima aprobatoria	7

INDICE

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN ALGEBRAICA

1.1 Introducción al lenguaje algebraico

El lenguaje numérico expresa la información en Matemáticas a través de números particulares y el lenguaje algebraico expresa la información en Matemáticas mediante letras que representan números en general. Una expresión algebraica es una combinación de números, letras y signos de operación.

Como hemos dicho antes, el lenguaje algebraico sirve para construir expresiones algebraicas, es decir, formulaciones en las que números, símbolos y letras se combinan para expresar una relación lógica y/o formal, en la que algunas cantidades se conocen y otras son desconocidas.

Las expresiones algebraicas, entonces, son cadenas ordenadas de estos signos, en las cuales hallaremos números, letras y operadores aritméticos. Dependiendo de cuáles sean, podemos distinguir entre, por ejemplo:

Incógnitas (que expresan valores desconocidos) o variables (que expresan valores no fijos), siendo estas últimas dependientes o independientes.

Signos aritméticos (que expresan operaciones aritméticas determinadas).

Superíndices o potencias (que suponen multiplicar un número por sí mismo una cantidad de veces determinada).

Raíces o radicales (que suponen dividir un número por sí mismo una cantidad de veces determinada).

Funciones (que expresan una relación de dependencia entre dos valores de dos o más expresiones).

1.2 El principio de inducción matemática

La inducción matemática es un método de demostración que se utiliza cuando se trata de establecer la veracidad de una lista infinita de proposiciones. El método es bastante natural para usarse en una variedad de situaciones en la ciencia de la computación. Algunas aplicaciones tienen un sabor muy matemático, tal como verificar que todo entero positivo satisface ceirta fórmula. Otra utilización frecuente es la de demostrar que un programa de computación o que un algoritmo con ciclos funciona como se espera.

Primer principio de inducción matemática

Consideremos una lista de proposiciones p(1), p(2), p(3), ... con índices en los enteros positivos $\mathbb{Z}+$. Todas las proposiciones p(n) son verdaderas a condición que:

(B) p(1) sea verdadera.
(I) p(n + 1) es verdadera siempre que p(n) lo sea.

nos referimos a (B), es decir al hecho de p(1) es verdadera, como la base de la inducción y nos referimos a (I) como el paso inductivo. En la notación del calculo proposicional (I) equivale decir que:

La implicación $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}+$.

Ejemplo:

Demostrar $\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = 1/2(3n^2 - n)\ \forall n \in \mathbb{Z}+$.

Demostración: La n-ésima proposición p(n) es verdadera, esto es

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = 1/2(3n^2 - n)$$

Notese que:

$p(1) = 1 = 1/2[3(1)^2 - 1)]$ de aqui que $1 = 1$
$p(2) = 1 + 4 = 1/2[3(2)^2 - 2)]$ de aqui que $5 = 5$
$p(3) = 1 + 4 + 7 = 1/2[3(3)^2 - 3)]$ de aqui que $12 = 12$

En particular, p(1) es verdadera por inspección y esto establece la base de la inducción. Ahora supongase que p(n) es verdadera para algún n, esto es:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = 1/2(3n^2 - n)$$

necesitamos demostrar que p(n + 1)

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k - 2) = 1/2[3(n + 1)^2 - (n + 1)]$$

tal como lo establece el paso inductivo.

Utilizando p(n) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k - 2) = \sum_{k=1}^{n} (3k - 2) + [3(k + 1) - 2]= 1/2(3k^2 - k) + (3k + 1)$$

para verificar p(n + 1) necesitamos comprobar que:

$$1/2(3k^2 - k) + (3k + 1) = 1/2[3(k + 1)^2 - (k + 1)]$$

Esto ya es un problema puramente algebraico, para lo cual se trabajara con el lado izquierdo de la igualdad, esto es:

$$1/2(3k^2 - k) + (3k + 1) = 1/2(3k^2 - k + 6k + 2)$$

$$= 1/2(3k^2 + 5k + 2)$$

$$= 1/2(3k + 2)(n + 1)$$

$$= 1/2[3(k + 1) -1](k + 1)$$

$$= 1/2[3(k + 1)^2 - (k + 1)]$$

Entonces p(n + 1) es verdadera siempre que p(n) lo sea. Por el primer principio de inducción matemática se concluye que p(n) es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{Z}+$.

No siempre es necesario el uso del simbolo de sumatoria para aplicar la inducción matemática, puede también utilizarse parte del desarrollo de la misma, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo:
Demostrar por inducción que:

$2 + 4 + ... + 2(n) = n(n + 1)$

Demostración: Nuestra n-ésima proposición p(n) es:

$2 + 4 + ... + 2(n) = n(n + 1)$

y notese que:
p(1) = 2 = 1(2), donde 2 = 2
p(2) = 2 + 4 = 2(3), donde 6 = 6
p(3) = 2 + 4 + 6 = 3(4), donde 12 = 12
p(4) = 2 + 4 + 6+ 8 = 4(5), donde 20 = 20
.
.

Así p(1) asegura 2= 1(1 + 1) y como es verdadera por inspección tal como lo establece la base de la inducción matemática.

Para el paso inductivo, supongamos que p(n) es verdadera para algún n, esto es

$2 + 4 + ... + 2(n) = n(n + 1)$

es verdadera. Ahora queremos probar que para p(n + 1)

$2 + 4 + ... + 2(n) + (2(n + 1) = (n + 1)((n + 1) + 1)$

es decir

$2 + 4 + ... + 2(n) + (2n + 2) = (n + 1)(n + 2)$

tal como lo establece el paso inductivo.

Como p(n) es verdadera por hipótesis, y trabajando con el lado izquierdo de la igualdad, temos que:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + ... + 2(n) + (2n + 2) &= [2 + 4 + ... + 2n] + (2n + 2) \\ &= n(n + 1) + (2n + 2) \\ &= n(n + 1) + 2(n + 1) \\ &= (n + 1)(n + 2) \end{aligned}$$

Entonces $p(n + 1)$ es verdadera siempre que $p(n)$ lo sea. Por el primer principio de inducción matemática se concluye que $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{Z}+$.

1.3 Traducción del lenguaje natural a expresiones algebraicas

Traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico es una acción que inconscientemente hacemos en el día a día, por ejemplo, al deducir los diferentes gastos del día y así como planificar las compras haciendo una suposición de las variaciones de los precios. A pesar de que se omita el formalismo matemático, los cálculos mentales que puedan desarrollarse siguen principios algebraicos muy claros.

Básicamente, esta traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico está estrechamente ligada a nuestros cerebros, incluso desde tiempos antiguos. En los siguientes párrafos aprenderás cómo sacar provecho de estas traducciones, obteniendo una compresión consciente del simple carácter matemático de la cotidianidad, así que continúa leyendo.

Cómo traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico

Sabemos muy bien que en el lenguaje algebraico existen símbolos alfanuméricos y signos operacionales, relacionales y agrupadores, los cuales se ocupan de constituir a las expresiones algebraicas y a las ecuaciones, es decir, a las palabras y oraciones del álgebra.

El monomio, es el término algebraico o expresión algebraica más simple que existe, por lo que, en esencia, es el equivalente a una palabra. Y, el polinomio (y las ecuaciones) es la expresión más compleja, por lo es el equivalente a una oración.

Lo anterior forma parte del cuadro lingüístico del álgebra, el cual, como se pudo leer, es similar al de cualquier idioma. Sin embargo, las claves para traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico se encuentran en las maneras de interpretar las operaciones y relaciones entre expresiones algebraicas con las cantidades que deseamos conocer. A continuación te mostrare algunos ejemplos para aclarar este punto.

Ejemplos de traducciones

Comencemos por lo más simple, con este enunciado: la suma de *c*, *d* y *b*.

Traducir esa oración de lenguaje común a lenguaje algebraico no es nada complicado. Por ello, en lenguaje algebraico ese enunciado queda así:

$$a + b + d$$

Otro ejemplo que demuestra la facilidad para traducir es este: suma del cuadrado de *x*, la raíz cuadrada de *y*, y la quinta potencia de z. La traducción algebraica de esta oración es la siguiente:

$$x^2 + sqrty + z^5$$

Por último, tenemos este ejemplo: los 4 números enteros consecutivos posteriores al número entero *x*. Cuya traducción algebraica es:

$$x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$$

Cómo pudiste comprobar, parece que hasta el propio lenguaje común coopera en las traducciones, por ello, la clave es la interpretación del significado matemático de las palabras comunes. Aunque, estos han sido situaciones muy ideales y poco prácticas. La verdadera emoción y utilidad se da a la hora de resolver los problemas.

Cómo resolver problemas de la cotidianidad haciendo uso del lenguaje algebraico

Lo anterior solo fue un abrebocas, el verdadero meollo de las traducciones se concentra en las resoluciones de problemas prácticos, es decir, aquellos que predominantemente son del tipo comercial o económico, en donde el dinero está en juego.

Partiendo de los principios de las traducciones de lenguaje común a lenguaje algebraico podemos llegar a resolver toda clase de problemas con que nos topemos. Por ello ten siempre en mente, que el truco de todo es interpretar el significado matemático de las palabras comunes. Anteriormente pudiste ver que este significado es lo suficientemente explícito, aunque, no siempre lo será.

Las ecuaciones serán la herramienta primordial para hallar la solución de los problemas prácticos, ya que estas permiten asociar, mediante igualdades, diferentes términos algebraicos según las condiciones dictadas por el problema. Las ecuaciones permiten lograr una correspondencia entre el lenguaje común y el lenguaje algebraico. Así que conociendo las reglas básicas de despeje y simplificación, vamos a resolver los siguientes problemas.

Cabe aclarar que en este artículo solamente trataremos con ecuaciones de primer grado, para evitar cualquier complicación en la explicación.

Ejemplos de problemas junto con sus soluciones

Comencemos con el siguiente problema:

Repartir 310$ entre tres personas de modo que la segunda reciba 20$ menos que la primera y 40$ más que la tercera.

Primeramente, identifiquemos a la primera persona como *x*, a la secunda como *y*, y a la tercera como z. De modo que construyamos la siguiente ecuación:

$$310 = x + y + z$$

Ahora, tomemos en cuenta lo que el enunciado informa, estableciendo las siguientes identidades algebraicas:

1. $y = x - 20$
2. $y = z + 40$

Llegados a este punto hay varias formas de proceder. De todas ellas vamos a invertir las identidades para obtener ecuaciones para *x* y *z*, en función de *y*.

1. $x = y + 20$
2. $z = y - 40$

Con esto hecho, lo que queda por hacer es sustituir en la ecuación principal los valores de *x* y *z* para dejar la ecuación con solamente la incógnita *y*. Así nos quedamos con la siguiente expresión:

$$310 = (y + 20) + y + (y - 40)$$

Simplificando:

$$310 = 3y - 20$$

Despejando:

$$310 + 20 = 3y$$

$$y = \frac{330}{3} = 110$$

De esta forma tenemos que la primera persona recibirá:

$$x = 110 + 20 = 130$$

Y la tercera persona:

$$z = 110 - 40 = 70$$

$$z =$$

1.4 Sucesión aritmética

Una sucesión es un conjunto de cosas (normalmente números) una detrás de otra, en un cierto orden. Las aplicaciones de las sucesiones son incontables. Se utilizan abundantemente para demostrar los teoremas y las propiedades de la topología matemática, y en la muy conocida demostración del número pi.

Definición

Podemos definir una sucesión aritmética de la siguiente manera.

Es una secuencia de números, en la cual la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante d, excepto el primer término que es dado. El valor de la constante d puede ser positivo o negativo.

Ejemplos:
La sucesión: s = 2, 5, 8, 11, 14, 17, $\cdots$ Es un ejemplo claro de una sucesión aritmética, dado que la diferencia entre dos términos consecutivos nos da una constante d de valor 3.

La sucesión: s = -6, -2, 2, 6, 10, 14, $\cdots$ Es un ejemplo claro de una sucesión aritmética, dado que la diferencia entre dos términos consecutivos nos da una constante d de valor 4.

La sucesión: s = -1, 5, 11, 16, 22, 28, $\cdots$ No es un ejemplo de una sucesión aritmética, dado que la diferencia entre el tercer y cuarto término nos da una constante d = 5 diferente al valor de la otra constante con los otros téerminos que es d = 6.

Cuando hablamos de sucesiones aritméticas es importante definir la notación utilizada.

Notación: (Sucesión Aritmética)
Comunmente se denominan los términos de una sucesión de la siguiente manera:

a(1) = primer término de la sucesión
a(2) = segundo término de la sucesión
⋮
a(n) = n-ésimo término de la sucesión
d = Constante o diferencia común

El n-ésimo término de una sucesión aritmética es la regla que determina como se calculan los términos de la misma.

Encontrando el N-ésimo Término

Cuando se habla del N-ésimo Término de una sucesión aritmética nos referimos a la regla o fórmula que rige el patrón que siguen todos los términos de la misma. Para encontrar esta fórmula debemos seguir los siguientes pasos:

Encontrando el N-ésimo Término
1. Determinar el valor de a(1). Es el primer término de la sucesión.

2. Realizar la diferencia d entre dos términos consecutivos en la sucesión, esa diferencia d debe ser igual para cualquier par de términos escogidos.

3. Comprobar el resultado dado, haciendo la respectiva sucesión paso a paso.
Si no tenemos una sucesión, entonces utilizamos la fórmula cuando tenemos un término y la constante o distancia entre dos términos.

La fórmula para el término general de una sucesión aritmética es:

$$a\,n = a\,1 + n - 1\ \cdot d$$

donde a(n) es el término deseado, a(1) es el primer término y d es la constante o diferencia común

Utilicemos los siguientes ejemplos para tener una idea más concreta de como encontrar el N-ésimo Término de una sucesión.

Supongamos que se quiere encontrar el N-ésimo Término de la sucesión: 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , 23 , 26 , ...
Para hacer esto seguimos los pasos anteriores.

Encontrando el N-ésimo Término
1. Para determinar a(1), podemos usar la formula para n=1

$$a\,n = a\,1 + n - 1\ \cdot d \longrightarrow a\,1 = 8 + 1 - 1\ \cdot d \longrightarrow a\,1 = 8$$

podemos determinar a(1) tomando directamente el primer término de la sucesión.

$$a_n = 8 + n - 1 \cdot d$$

2. Encontrar el valor de d:

$$d = a_2 - a_1 \longrightarrow d = 11 - 8 \longrightarrow d = 3$$

$$d = a_4 - a_3 \longrightarrow d = 17 - 14 \longrightarrow d = 3$$

$$d = a_7 - a_6 \longrightarrow d = 26 - 23 \longrightarrow d = 3$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$a_n = 8 + n - 1 \cdot 3$$

3. Verifica:

para $n = 1 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (1 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (0) \cdot 3 \longrightarrow 8$
para $n = 2 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (2 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (1) \cdot 3 \longrightarrow 11$
para $n = 3 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (3 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (2) \cdot 3 \longrightarrow 14$
para $n = 4 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (4 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (3) \cdot 3 \longrightarrow 17$
para $n = 5 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (5 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (4) \cdot 3 \longrightarrow 20$

Asi encontramos el N-ésimo Término de la sucesión provista viene dado por: $a(n) = 8 + (n - 1) \cdot 3$.

Supongamos que se quiere encontrar el N-ésimo Término de la sucesión: -13 , -19 , -25 , -31 , -37 , -43 ,...
Para hacer esto seguimos los pasos anteriores.

Encontrando el N-ésimo Término
1. Para determinar a(1), podemos usar la formula para n=1

$$a_n = a_1 + n - 1 \cdot d \longrightarrow a_1 = -13 + 1 - 1 \cdot d \longrightarrow a_1 = -13$$

podemos determinar a(1) tomando directamente el primer término de la sucesión.

$$a_n = -13 + n - 1 \cdot d$$

2. Encontrar el valor de d:

$$d = a_2 - a_1 \longrightarrow d = (-19) - (-13) \longrightarrow d = -6$$

$$d = a_4 - a_3 \longrightarrow d = (-31) - (-25) \longrightarrow d = -6$$

$$d = a_6 - a_5 \longrightarrow d = (-43) - (-37) \longrightarrow d = -6$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$\boxed{a_n = -13 + n - 1 \cdot (-6)}$$

3. Verifica:

para n = 1 $\longrightarrow$ $-13 + (n - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (1 - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (0) \cdot (-6) \longrightarrow -13$
para n = 2 $\longrightarrow$ $-13 + (n - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (2 - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (1) \cdot (-6) \longrightarrow -19$
para n = 3 $\longrightarrow$ $-13 + (n - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (3 - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (2) \cdot (-6) \longrightarrow -25$
para n = 4 $\longrightarrow$ $-13 + (n - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (4 - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (3) \cdot (-6) \longrightarrow -31$
para n = 5 $\longrightarrow$ $-13 + (n - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (5 - 1) \cdot (-6)$ $\longrightarrow$ $-13 + (4) \cdot (-6) \longrightarrow -37$

Asi encontramos el N-ésimo Término de la sucesión provista viene dado por:$-13 + (n - 1) \cdot (-6)$.

Supongamos que se quiere encontrar el N-ésimo Término de la sucesión: -7 , -1 , 5 , 11 , 17 , 23 ,...
Para hacer esto seguimos los pasos anteriores.

Encontrando el N-ésimo Término
1. Para determinar a(1), podemos usar la formula para n=1

$$\boxed{a_n = a_1 + n - 1 \cdot d \longrightarrow a_1 = -7 + 1 - 1 \cdot d \longrightarrow a_1 = -7}$$

podemos determinar a(1) tomando directamente el primer término de la sucesión.

$$\boxed{a_n = -7 + n - 1 \cdot d}$$

2. Encontrar el valor de d:

$$d = a_2 - a_1 \longrightarrow d = (-1) - (-7) \longrightarrow d = 6$$

$$d = a_4 - a_3 \longrightarrow d = (11) - (5) \longrightarrow d = 6$$

$$d = a_6 - a_5 \longrightarrow d = (23) - (17) \longrightarrow d = 6$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$\boxed{a_n = -7 + n - 1 \cdot (6)}$$

3. Verifica:

para n = 1 $\longrightarrow$ $-7 + (n - 1) \cdot (6)$ $\longrightarrow$ $-7 + (1 - 1) \cdot (6)$ $\longrightarrow$ $-7 + (0) \cdot (6) \longrightarrow -7$
para n = 2 $\longrightarrow$ $-7 + (n - 1) \cdot (6)$ $\longrightarrow$ $-7 + (2 - 1) \cdot (6)$ $\longrightarrow$ $-7 + (1) \cdot (6) \longrightarrow -1$

para n = 3 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (3 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (2) ·(6) ⟶ 5
para n = 4 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (4 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (3) ·(6) ⟶ 11
para n = 5 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (5 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (4) ·(6) ⟶ 17

Asi encontramos el N-ésimo Término de la sucesión provista viene dado por:-7 + (n - 1) ·(6).

La siguiente aplicación interactiva te provee una guia para encontrar el n-ésimo término de sucesiones aritméticas, presiona el siguiente botón para iniciar la misma.

1.5 Sumas y productos

Se puede decir que productos es la multiplicación booleana de variables o sus complementos. Cuando dos o más productos se suman mediante la suma booleana, la expresión se llama suma de productos.

Ejemplos:

AB + ABC
AB' + CD'
A'BC + AB'C' + ABC' + ABC

En una expresión de forma suma de productos, un el complemento no debe extenderse sobre más de una variable, sin embargo, más de una variable puede estar afectada por el complemento. Es decir, el término A'B'C' es valido, pero no el termino(ABC)'.

Producto de sumas

Cuando dos o más términos de suma se multiplican, la expresión resultante recibe el nombre de producto de sumas.

Ejemplos:

(A+B')(A+B+C)

(A' + B + C')(C+D)

(A+B+C)(C'+D')(A+B)

1.6 Variación proporcional directa

Antes necesitamos saber qué es una magnitud. **Una magnitud es aquello que se puede medir.** Por ejemplo, el peso de una persona, el número de albañiles trabajando, el número de plátanos, la cantidad de pienso que come un perro, la distancia entre dos pueblos o la velocidad de un caballo al galopar.

- Todas estas magnitudes se pueden relacionar con otras.

- Se puede relacionar:
- El peso de una persona con la talla de ropa que usa.
- El número de albañiles trabajando con el tiempo que tardan en terminar la obra.
- El número de plátanos con el número de cajas necesarias para colocarlos.
- La distancia entre dos pueblos con el tiempo que se tarda en ir de uno a otro.
- La velocidad de un caballo galopando con el tiempo que tarda el caballo en llegar de un punto a otro.

Hay varios tipos de relaciones. Hoy veremos solo una de ellas: la proporcionalidad directa

Para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que si duplicamos una, la otra se tiene que duplicar, si la triplicamos la otra también y si la reducimos a la mitad la otra también se tiene que reducir. Se puede entender que si aumentamos la cantidad de una, la otra tiene que aumentar también proporcionalmente.

¿Qué relación podemos ver entre el número de plátanos y el número de cajas que necesitamos para guardarlos?

Nº de plátanos	3	6	9	12	15
Nº de cajas	1	2	3	4	5

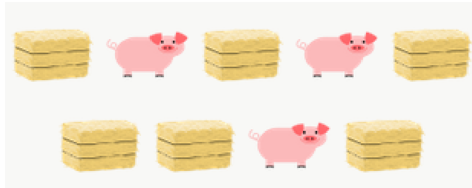
Podréis observar que cuantos más plátanos tenemos más cajas necesitamos, ¿verdad? Estas dos magnitudes mantienen una relación proporcionalmente directa.

Es importante saber que el cociente (razón o proporción) entre dos magnitudes directamente proporcionales es siempre constante. En nuestro ejemplo tenemos que la razón es 3.

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$$

Las relaciones de proporcionalidad aparecen con mucha frecuencia en nuestra vida cotidiana.

¿Alguna vez habéis comprado caramelos? ¿Cómo calculabais la cantidad de dinero que teníais que pagar por los caramelos? ¿Qué me podéis decir de estas dos magnitudes, el número de cerdos y el número de fardos de paja que se necesita para alimentarlos?



¿Podríais decir que mantienen una proporcionalidad directa?

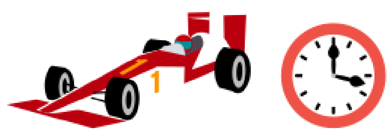
Si quieres aprender a resolver **problemas de proporcionalidad**, revisa este post de problemas de proporcionalidad, tienes varios ejemplos para practicar. Recuerda que el método Smartick se adapta a tu nivel de matemáticas. Regístrate y pruébalo gratis.

1.7 Variación proporcional inversa

Ya vimos en la entrada de proporcionalidad directa que hay relaciones en las que cuanto más crece una de las magnitudes más crece la otra. Pero cuando una magnitud crece y la otra disminuye proporcionalmente, se le llama proporcionalidad Inversa.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Cuanto mayor velocidad lleve el coche de carreras menos tiempo tardará en dar una vuelta al circuito



Imaginemos que dando una vuelta al circuito a 100 km/h, el coche tarda 12 min. En este caso y sabiendo que existe una relación de proporcionalidad inversa podremos decir que si multiplicamos la velocidad por 2 (200 km/h), entonces el tiempo por vuelta quedará dividido entre 2 (6 min).

Si por el contrario, redujera su velocidad a la mitad (100 km/h : 2 = 50 km/h) el tiempo por vuelta sería al doble (12 min x 2 = 24 min)

Si el coche diera su última vuelta en 4 min, ¿qué habría pasado con la velocidad del coche durante esa vuelta?

(12 min : 4 min = 3) Como el tiempo se ha dividido entre 3, la velocidad se tiene que multiplicar por 3 (3 x 100 km/h = 300 km/h). Es decir que la velocidad a la que el coche dio su última vuelta fue 300 km/h.

Con estos ejemplos podemos observar el porqué del nombre INVERSA para este tipo de relación de proporcionalidad. Lo que ocurre con una de las magnitudes ocurre de forma INVERSA con la otra magnitud, cuando una crece la otra disminuye y viceversa.

Ahora, igual que ocurre con la proporcionalidad directa, vamos a hallar la Razón de Proporción.

Para calcular la razón tenemos que multiplicar las cantidades de cada magnitud relacionadas entre sí.

100 km/h x 12 min = 1200

200 km/h x 6 min = 1200

50 km/h x 24 min = 1200

300 km/h x 4 min = 1200

Al ver esto recordamos que **la razón de proporción es una constate**, es decir que es igual para cada par de números que representan las magnitudes relacionadas. En este caso la razón de proporción es 1200

Si quieres en esta entrada puedes aprender a resolver problemas de proporcionalidad.

Recuerda que en Smartick tienes muchos más ejercicios y problemas de proporcionalidad inversa y proporcionalidad directa para practicar.

Si quieres aprender muchas más matemáticas de primaria, adaptadas a tu nivel, regístrate en el método Smartick y pruébalo gratis.

1.8 Teorema del binomio

Esta ley podría ser el primer producto notable, se le conoce como el axioma de la distribución y nos ayudará a demostrar el resto de las propiedades subsiguientes. Como entenderán, todo axioma se anuncia sin demostración por ser una teoría lógica como 1+1 = 2, aquí la formula:

a(b+c)=ab+aca(b+c)=ab+ac

Este axioma puede transformarse en teorema si trabajamos con inducción matemática si por lo menos uno de los factores aa o b+cb+c son números enteros. Pero para los números reales resulta ser imposible, es por ello su aspecto axiomático. Geográficamente se puede representar así:

$$a \underbrace{\overset{a}{\boxed{ab}}\overset{c}{\boxed{ac}}}_{a(b+c)} = \underbrace{\boxed{ab} + \boxed{ac}}_{ab+ac}$$

Ojo, con esta axioma se puede demostrar por inducción la siguiente propiedad generalizada:

a(b1+b2+b3+⋯+bn)=ab1+ab2+ab3+⋯+abna(b1+b2+b3+⋯+bn)=ab1+ab2+ab3+⋯+abn

Ejemplos

Multiplicar 3xy3xy y x+yx+y.

Solución:

3xy(x+y)=3xy·x+3xy·y=3x2y+3xy23xy(x+y)=3xy·x+3xy·y=3x2y+3xy2 o Multiplicar x2x2 y x3+x2+x+1x3+x2+x+1.

Solución:
x2(x3+x2+x+1)=x2·x3+x2·x2+x2·x+x2·1=x5+x4+x3+x2+xx2(x3+x2+x+1)=x2·x3+x

2·x2+x2·x+x2·1=x5+x4+x3+x2+x

Multiplicar abcabc y a2b+b2c+c2aa2b+b2c+c2a:

Solución:
abc(a2b+b2c+c2a)=abc·a2b+abc·b2c+abc·c2a=a3b2c+ab3c+abc3abc(a2b+b2c+c2a)=a
bc·a2b+abc·b2c+abc·c2a=a3b2c+ab3c+abc3

1.9 Binomio al cuadrado

Un binomio es un polinomio de 2 términos no semejantes como a+ba+b, al elevarlo al cuadrado produce un polinomio de 3 términos:

(a+b)2□ □□□□ □ □□□□binomioal

cuadrado=a2+2ab+b2□ □□□□□□□□ □ □□□□□□□trinomio

cuadradoperfecto(a+b)2⏟binomioal cuadrado=a2+2ab+b2⏟trinomio cuadradoperfecto El trinomio de la forma a2+2ab+b2a2+2ab+b2 se le conoce como trinomio cuadrado perfecto. Si encontramos expresiones notables que tienen la forma de del trinomio cuadrado perfecto significa que se puede expresar como la suma de dos términos al cuadrado o simplemente binomio al cuadrado.

Demostración

Su demostración es muy sencilla, veamos:

Expresando (a+b)2(a+b)2 como un producto:

(a+b)2=(a+b)(a+b)(a+b)2=(a+b)(a+b)

Por la ley distributiva m(n+p)=mn+mpm(n+p)=mn+mp:

(a+b)2=a(a+b)+b(a+b)(a+b)2=a(a+b)+b(a+b)

De nuevo la ley distributiva:

a.a+a.b+b.a+b.ba.a+a.b+b.a+b.b

Por la ley conmutativa xy=yxxy=yx:

(a+b)2=a2+ab+ab+b2(a+b)2=a2+ab+ab+b2

Reduciendo términos semejantes, finalmente obtenemos:

(a+b)2=a2+2ab+b2(a+b)2=a2+2ab+b2

También podemos realizar una demostración geométrica, para nuestro caso, el área del cuadrado grande es la suma del área de sus partes como se muestra en la siguiente imagen:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} & a & b \\ \hline a & ab & b^2 \\ \hline b & a^2 & ab \end{array} \end{array} = \boxed{a^2} + \boxed{ab} + \boxed{ab} + \boxed{b^2}$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de la formula del binomio al cuadrado:

o Resolver (m+2)2(m+2)2.

Solución:

(m+2)2=m2+2mn+22=m2+2mn+4(m+2)2=m2+2mn+22=m2+2mn+4 o Resolver (2x+3y)2(2x+3y)2.

Solución:

(2x+3y)2=(2x)2+2(2x)(3y)+(3y)2=4x2+12xy+9y2(2x+3y)2=(2x)2+2(2x)(3y)+(3y)2=4x

2+12xy+9y2 o Resolver (xn+yn)2(xn+yn)2.

Solución:
(xn+yn)2=(xn)2+2(xn)(yn)+(yn)2=x2n+2xnyn+y2n(xn+yn)2=(xn)2+2(xn)(yn)+(yn)2=x

2n+2xnyn+y2n o Resolver (m−3)2(m−3)2.

Solución

(m−3)2=m2–2(m)(3)+32=m2–6m+9(m−3)2=m2–2(m)(3)+32=m2–6m+9 o Resolver (x+1x)2(x+1x)2

(x+1x)2=x2+2(x)(1x)+(1x)2=x2+2+1x2(x+1x)2=x2+2(x)(1x)+(1x)2=x2+2+1x2 También se aplica el proceso inverso, esto solo es posible para aquellos casos donde el trinomio es un trinomio cuadrado perfecto de la forma a2+2ab+b2a2+2ab+b2, por ejemplo:

o x2+2x+1=x2+2(x)(1)+12=(x+1)2x2+2x+1=x2+2(x)(1)+12=(x+1)2 o x2–2x+1=x2–2(x)(1)+12=(x−1)2x2–2x+1=x2–2(x)(1)+12=(x−1)2 o x2–6x+9=x2–2(x)(3)+32=(x−3)2x2–6x+9=x2–2(x)(3)+32=(x−3)2

Identidades de Legendre

Las siguientes identidades son consecuencia del binomio al cuadrado y son útiles si encontramos casos similares donde tengamos que aplicar estas identidades, veamos:

(a+b)2+(a−b)2=2(a2+b2)(a+b)2+(a−b)2=2(a2+b2)

(a+b)2–(a−b)2=4ab(a+b)2–(a−b)2=4ab

(a+b)4–(a−b)4=8ab(a2+b2)(a+b)4–(a−b)4=8ab(a2+b2)

Demostración

Cada una de estas demostraciones son sencillas de desarrollar, para este caso usaremos la identidad del binomio al cuadrado, veamos:

Probando (a+b)2+(a−b)2=2(a2+b2)(a+b)2+(a−b)2=2(a2+b2), tenemos:

(a+b)2+(a−b)2=(a2+2ab+b2)+(a2–

2ab+b2)=2a2+2b2=2(a2+b2)(a+b)2+(a−b)2=(a2+2ab+b2)+(a2–

2ab+b2)=2a2+2b2=2(a2+b2)

Probando (a+b)2–(a−b)2=4ab(a+b)2–(a−b)2=4ab, tenemos:

(a+b)2–(a−b)2=(a2+2ab+b2)−(a2–2ab+b2)=a2+2ab+b2–a2+2ab–b2=4ab(a+b)2–

$(a-b)2=(a2+2ab+b2)-(a2-2ab+b2)=a2+2ab+b2-a2+2ab-b2=4ab$

La identidad 3 se puede reducir rápidamente con el producto notable “diferencia de cuadrados”, pero como aun no lo anunciamos, lo haremos por el binomio al cuadrado. Por la ley de potencias $x4=(x2)2x4=(x2)2$, tenemos:

$(a+b)4-(a-b)4=[(a+b)2]2-[(a-b)2]2=[a2+2ab+b2]2-[a2+2ab+b2]2(a+b)4-$

$(a-b)4=[(a+b)2]2-[(a-b)2]2=[a2+2ab+b2]2-[a2+2ab+b2]2$

Ordenando convenientemente y realizando un cambio de variable donde $n=a2+b2n=a2+b2$ y $m=2abm=2ab$, obtenemos:

$(a+b)4-(a-b)4=[n+m]2-[n-m]2(a+b)4-(a-b)4=[n+m]2-[n-m]2$

Por la segunda identidad de Legendre, se cumple:

$(a+b)4-(a-b)4=4nm(a+b)4-(a-b)4=4nm$

Recordar que $n=a2+b2n=a2+b2$ y $m=2abm=2ab$, finalmente logramos:

$\mathbf{(a+b)4-(a-b)4=4(a2+b2)(2ab)=8ab(a2+b2)(a+b)4-}$
$\mathbf{(a-b)4=4(a2+b2)(2ab)=8ab(a2+b2)}$

1.10 Binomio al cubo

Un **binomio al cubo** (suma) es igual al cubo del primero, **más** el triple del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple del primero por el cuadrado del segundo, **más** el cubo del segundo.

$$\mathbf{(a + b)3 = a3 + 3 \cdot a2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b2 + b3}$$

$$(x + 3)3 = x\,3 + 3 \cdot x2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 32 + 33 =$$

$$= x3 + 9x2 + 27x + 27$$

Binomio de resta al cubo

Un **binomio al cubo** (resta) es igual al cubo del primero, **menos** el triple del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple del primero por el cuadrado del segundo, **menos** el cubo del segundo.

$\mathbf{(a - b)3 = a3 - 3 \cdot a2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b2 - b3}$

$(2x - 3)3 = (2x)3 - 3 \cdot (2x)2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 32 - 33 =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Ejemplos

1

$(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

2

$(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 =$

$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

3

$(2x + 5)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3 =$

$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

1.11 Binomios conjugados

Es la segunda identidad mas conocida después del binomio al cuadrado llamado diferencia de cuadrados, también se le conoce como producto de un binomio por su conjugado y su formula es la siguiente:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Tenga en cuenta que el conjugado de $a+ba+b$ es $a-ba-b$. Esta identidad nos ayuda a demostrar con mayor rapidez las identidades de Legendre, pero el desarrollo se lo dejamos como ejercicio para el lector, veamos su demostración rápida.

Demostración

Su demostración es muy sencilla, usando la identidad de la ley distributiva, tenemos:

$(a+b)(a-b)=(a+b)a-(a+b)b(a+b)(a-b)=(a+b)a-(a+b)b$

Aplicando de nuevo la ley distributiva en $(a+b)a(a+b)a$ y $(a+b)b(a+b)b$, tenemos:
$(a+b)(a-b)=a.a+b.a-a.b-b.b(a+b)(a-b)=a.a+b.a-a.b-b.b$

Aplicando la ley conmutativa $b.a=a.bb.a=a.b$ y eliminando términos, finalmente logramos:

$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

De esta manera queda demostrada la identidad, veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de esta formula:

(m+n)(m−n)=m2–n2(m+n)(m−n)=m2–n2 o (x+a)(x−a)=x2–a2(x+a)(x−a)=x2–a2 o (x−1)(x+1)=x2–12=x2–1(x−1)(x+1)=x2–12=x2–1 o (x−2)(x+2)=x2–22=x2–4(x−2)(x+2)=x2–22=x2–4

(n2+m2)(n2–m2)=(n2)2–(m2)2=n4–m4(n2+m2)(n2–m2)=(n2)2–(m2)2=n4–m4 o (m20+n40)(m20–n40)=(m20)2–(n40)2=m40–n80(m20+n40)(m20–n40)=(m20)2–

(n40)2=m40–n80 o (2x+3y)(2x–3y)=(2x)2–(3y)2=4x2–9y2(2x+3y)(2x–3y)=(2x)2–(3y)2=4x2–9y2 o (5x–7y)(5x+7y)=(5x)2–(7y)2=25x2–49y2(5x–7y)(5x+7y)=(5x)2–(7y)2=25x2–49y2 o (an+bn)(an–bn)=(an)2–(bn)2=a2n–b2n(an+bn)(an–bn)=(an)2–(bn)2=a2n–b2n

$\boxed{x}$ +√$\boxed{y}$)(√$\boxed{x}$ –√$\boxed{y}$)=(√$\boxed{x}$)2–(√ $\boxed{y}$ (√)2=x−y(x+y)(x–y)=(x)2–(y)2=x−y (am+1+bn+3)(am+1–bn+3)=(am+1)2–(bn+3)2=a2(m+1)– b2(n+3)(am+1+bn+3)(am+1–bn+3)=(am+1)2–(bn+3)2=a2(m+1)–b2(n+3)

También podemos realizar el proceso inverso, tan solo tomamos los términos de la diferencia y dividimos sus exponentes a la mitad, luego sumamos los nuevos términos y lo multiplicamos por su conjugado.

m2–n2=(m+n)(m−n)m2–n2=(m+n)(m−n)

m4–n2=(m2+n)(m2–n)m4–n2=(m2+n)(m2–n) o m8–n6=(m4+n3)(m4–n3)m8–n6=(m4+n3)(m4–n3)

m40k–n10k=(m20k+n5k)(m20k–n5k)m40k–n10k=(m20k+n5k)(m20k–n5k) o 4x2–9y2=(2x+3y)(2x–3y)4x2–9y2=(2x+3y)(2x–3y)

1.12 Binomio con término común

Para dos binomios con término en común: el producto de dos binomios con termino común es igual al cuadrado del termino común, mas el termino común por la suma de los términos no comunes, mas el producto de los términos no comunes, matemáticamente se expresa así:

(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab

Para tres binomios con término en común: este producto notable es mas extenso, se trata de la multiplicación de 3 binomios con termino en común, aquí la expresión matemática:

$(x+a)(x+b)(x+c)=x3+x2(a+b+c)+x(ab+bc+ac)+abc(x+a)(x+b)(x+c)=x3+x2(a+b+c)+x(ab+bc+ ac)+abc$

Demostración

La demostración de $(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab$ es sencilla, aplicaremos la ley distributiva para la multiplicación, veamos:

$(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$

Aplicando de nuevo la ley distributiva:

$(x+a)(x+b)=x.x+x.b+a.x+a.b(x+a)(x+b)=x.x+x.b+a.x+a.b$

Operando:

$(x+a)(x+b)=x2+xb+ax+ab(x+a)(x+b)=x2+xb+ax+ab$

Factorizando xx, logramos:

$(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab$

La demostración para la multiplicación de 3 binomios con termino en común es análoga a esta demostración.

Ejemplos

Multiplicar $x-5x-5$ y $x+7x+7$.

Solución:

$(x-5)(x+7)=x2+x(-5+7)+(-5)(7)=x2+2x-$

$35(x-5)(x+7)=x2+x(-5+7)+(-5)(7)=x2+2x-35$ o Multiplicación $x-2x-2$ y $x-3x-3$.

Solución:

$(x-2)(x-3)=x2+x(-2-3)+(-2)(-3)=x2-5x+6(x-2)(x-3)=x2+x(-2-3)+(-2)(-3)=x2-$

$5x+6$

Multiplicación $a+2a+2$ y $a+10a+10$.

Solución:

$(a+2)(a+10)=a2+a(2+10)+2.10=a2+12a+20(a+2)(a+10)=a2+a(2+10)+2.10=a2+12a+2$

0 o Multiplicar $m-5m-5$ y $m-6m-6$.

Solución:

$(m-5)(m-6)=m2+m(-5-6)+(-5)(-6)=m2-$

11m+30(m−5)(m−6)=m2+m(−5−6)+(−5)(−6)=m2–11m+30 o Multiplicar a2+2a2+2 y a2+10a2+10.

Solución:

(a2+2)(a2+10)=(a2)2+a2(2+10)+(2)(10)=a4+12a2+20(a2+2)(a2+10)=(a2)2+a2(2+10)+(2)(10)=a4+12a2+20

UNIDAD II

OPERACIONES Y FRACTORIZACIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

2.1 Suma y resta de polinomios

La resta o sustracción de monomios y polinomios es una operación en la cual se quiere encontrar la diferencia entre el minuendo y el sustraendo. Para reforzar el conocimiento de la resta es importante tener los conceptos básicos en aritmética.

Conoce más sobre: “Aritmética → Resta”. →

Es importante saber la diferencia entre monomios y polinomios para continuar con el tema, por lo tanto, se recomienda conocer los conceptos básicos de álgebra.

Conoce más sobre: “Álgebra”. →

Resta de monomios

A continuación se muestran diferentes ejemplos posibles en la resta de monomios:

De 6b restar 3b. Determinando el minuendo +6b con su signo y posteriormente el sustraendo +3b con el signo de resta será:

$6b - (3b) = 6b - 3b = 3b$

De 18c restar 9a. Determinando el minuendo +18c con su signo y posteriormente el sustraendo +9a con el signo de resta será:

$18c - (9a) = 18c - 9a$

En este caso no es posible simplificar ya que cada término tiene diferente letra.

De –13a2b restar 5a2b. Determinando el minuendo –13a2b con su signo y posteriormente el sustraendo +5a2b con el signo de la resta será:

$-13a2 - (5a2b) = -13a2b - 5a2b = -18a2b$

De –8x2y restar –4ax2. Determinando el minuendo –8x2y con su signo y posteriormente el sustraendo –4ax2 con el signo de la resta será:

$-8x2y - (-4ax2) = -8x2y + 4ax2$

Se recomienda que el primer término sea el positivo, por lo tanto, es posible reacomodar el resultado de la siguiente manera:

$4ax2 - 8x2ys$:

A) 8a – 3a = 5a

B) – 5b – (–7a) = 7a – 5b

8x – 3x2 = 8x – 3x2

4a – 2a = 2a

Resta de polinomios

En la resta de monomios en realidad consiste en cambiar el signo del sustraendo, es recomendable analizar con paréntesis ya que en la resta de polinomios el signo de la resta afecta a todo el sustraendo, por lo tanto, se estaría empleando el mismo método realizado.

De 3x + 4y + 11w restar 2x + 3y + 8w.

3x + 4y + 11w – (2x + 3y + 8w) = 3x + 4y + 11w – 2x – 3y – 8w

El resultado después de agrupar los términos semejantes será:

x + y + 3w

Para una mejor estructuración se recomienda analizar la resta en un acomodo de columna de modo que los términos semejantes estén uno sobre otro.

De 5xy2 + 6y + 8w restar 5xy2 + 3y. Ya que el signo de la resta afecta a todo el polinomio se tendría: – (5xy2 + 3y) = – 5xy2 – 3y

5xy2 + 6y + 8w–(5xy2 + 3y) $\boxed{0 \quad + 3y + 8w}$

Nota: Como se puede observar se emplea suma y resta para la solución de problemas algebraicos.

De 3xy2 – 5x2y – 8x3 restar 5x2y + 8x3 – 3xy2. Ya que el signo de la resta afecta a todo el polinomio se tendría: – (5x2y + 8x3 – 3xy2) = – 5x2y – 8x3 + 3xy2.

–5x2y – 8x3 + 3xy2–(5x2y + 8x3 – 3xy2) $\boxed{–10x2y \ – 16x3 + 6xy2}$

Para comprobar el resultado es el mismo método que la resta en aritmética, la diferencia (resultado) con el sustraendo debe dar el minuendo, por lo tanto, se hace una suma:

–10x2y – 16x3 + 6xy2 5x2y + 8x3 – 3xy2 $\boxed{–5x2y \quad – 8x3 + 3xy2}$

2.2 Multiplicación de monomios y polinomios

Monomios

Esta expresión matemática es la que se compone nada más que por un sólo término que se conoce como coeficiente. Entre las letras existen operaciones que son la potencia de exponentes y el producto. Como ejemplos de monomios tenemos 4x3 y5, -x, 7,8y8w9 .

Elementos del monomio

El Coeficiente: este es el número por el cual se multiplican las variables.

La Parte Literal: Esta parte se constituye por cada letra junto a su exponente.

El grado: Este es el resultado que se obtiene al sumar los exponentes ya sea de las variables o de las letras.

Ejemplo: Dado el monomio 6 x 2 Entonces se puede decir que el 6 es el coeficiente, la X es la parte literal y el 2 es el grado.

Multiplicación de monomios paso a paso

Lo primero que hay que tener en cuenta es la ley de los signos, una vez se tenga esto claro entonces hay que multiplicar los signos de cada término independiente o monomio.

Ahora se procede a multiplicar cada uno de los valores de los coeficientes que existan en los monomios.

A este resultado hay que atribuirle el literal. Si son de la misma base se le atribuye el literal encontrado en cada monomio pero si son de bases diferentes hay que anotarlos en orden alfabético.

Ahora es el momento de agregar cada exponente que se encuentra en los literales que tienen la misma base y este mismo resultado será el exponente del literal del resultado que corresponde.

Ejemplos:

Monomio por monomio

3x3 . 4x2 = (3.4) x3+2 = 12x5

6x2 y . -3x2 y = (6.-3) x2+2 y1+1 = -18x4 y2

2x3 . 5×73z = (2.5) x3+1 y3z = 10x4y3z

Monomio por polinomio

$3x2 \,.\, (5x - 4x3 + 3) =$

$(3x2 \,.\, 5x) + (3x2 \,.\, -4x3) + (3x2 + 3) =$

$(3.5)x2+1 + (3.-4)x2+3 + (3.3)x2 =$

$(15)x3 + (-12)x5 +(9)x2 =$

$15x3 - 12x5 + 9x2$

El resultado final sería: $15x3 - 12x5 + 9x2$

Polinomios

Es una expresión matemática que está formada por una cantidad finita de variables, constantes o puede que se presente con una sola variable que puede tener algún exponente o no. Con los polinomios se pueden hacer diferentes operaciones matemáticas y hay que tener especial cuidado con los signos y con todos los pasos que hay que realizar en orden al momento de resolver algún problema que contenga polinomios ya que, de hacer alguno incorrecto, el resultado también será incorrecto. Los polinomios tienen varios factores que lo componen entre los que está el término que es cada sumando, el coeficiente que son los elementos numéricos que se multiplican por las variables, el término independiente que se describe como que no tiene variable y el grado que es el exponente de mayor valor. Es decir que dado el polinomio $4x3 - x + 3$, vemos que el exponente es el 3, las variables son las X y los constantes el 3 y el 4.

Multiplicación de polinomios

Esta operación matemática consiste en encontrar el resultado que existe entre una expresión matemática como un monomio, un polinomio o un término independiente y un polinomio. Dentro de las reglas o pasos que se deben seguir para resolver una multiplicación de polinomios está de primer lugar el elegir y ordenar cada término de las expresiones de forma descendente, luego hay que proceder a multiplicar los coeficientes de cada término y sumar cada exponente , para finalizar y si hay términos que resulten semejantes, se reduce la expresión a fin de lograr una lo más pequeña que se pueda.

Ejemplos:

Polinomio por término independiente

$3 \,.\, (2\times4 + x3 + 2\times5 + 5) =$

$(3 \,.\, 2x4) + (3.\, x3) + (3.2x2) + (3.\, 5)= (3 \,.\, 2)x4 + (3.\, 1)\, x3 + (3.2)x2 + (3.\, 5)=$ El resultado es:

$6x4 + 3x3 + 6x2 + 15$

☐ $2 \,.\, (3x - 4 + 2x2 - x3)=$

3x – 4 + 2x2 – x3 → 2x2 – x3+3x – 4

2 . (2x2 – x3+3x – 4)=

(2 . 2x2) + (2. – x3) + (2.3x) + (2.-4)=

(2 . 2)x2 + (2.-1) x3 + (2.3)x + (-8)=

4x2 + (-2) x3 + 6x -8 =

4x2 -2x3 + 6x -8

El resultado es:

4x2 -2x3 + 6x -8

Polinomio por polinomio

(3x2 + x) . (8x3 + 2x2 + x – 4) =

(3x2. 8x3) + (3x2.2x2) + (3x2.x) + (3x2.– 4) + (x .8x3) + (x.2x2) + (x.x) + (x. – 4)=

(3.8)x2+3 + (3.2)x2+2 + (3.1)x2+1 + (3.– 4)x2 + (1.8)x3+1 + (1.2x)2+1 + (1.1)x1+1 + (1. – 4)x =

(24)x5 + (6)x4 + (3)x3 + (-12)x2 + (8)x4 + (2x)3 + (2)x2 + (– 4)x =

24x5 + 6x4 + 3x3 -12x2 + 8x4 + 2x3 + 2x2 – 4x =

24x5 +(6x4 + 8x4) + (3x3+ 2x3) + (-12x2 + 2x2) – 4x =

24x5 + (14x4) + (5x3) + (-10x2) – 4x =

24x5 + (14x4) + (5x3) + (-10x2) – 4x =

24x5 + 14x4 + 5x3 -10x2 – 4x

El resultado es:

24x5 + 14x4 + 5x3 -10x2 – 4x

2.3 División de monomios y polinomios

Como ya sabemos, todos los componentes de un monomio se están multiplicando entre sí, o dicho de otra forma, los términos están formados por factores. Para dividir dos términos, tenemos que aplicar las propiedades de las potencias, más concretamente la propiedad de división de potencias, que indica que cuando los potencias tienen la misma base, se mantiene la base y se restan sus exponentes.

UDS

Ejemplo de Cómo Dividir Monomios

Veamos un ejemplo y lo resolveremos paso a paso:

$$\frac{6x^3y^2z}{2xy^2z^2} =$$

Empezamos dividiendo los números. Para ello podemos factorizarlos previamente o directamente indicar el resultado:

$$\frac{2.3}{2} = 3$$

Y lo añadimos en el resultado:

$$\frac{2.3x^3y^2z}{2xy^2z^2} = \frac{3}{\quad}$$

Seguimos con la variable x. Lo resolvemos a parte para seguir mejor el procedimiento.

Se mantiene la base y se restan los exponentes:

$$\frac{x^3}{x} = x^{(3-1)} = x^2$$

Que lo añadimos al resultado:

$$\frac{2.3x^3y^2z}{2xy^2z^2} = \frac{3x^2}{\quad}$$

1. -24 entre 8

Solución – Juan Beltrán:

$$-24 \div 8 = \frac{-24}{8}$$

$-$: signo del dividendo

$+$: signo del divisor

$-$ por $+$ da $-$: según la ley de los signos

$$\frac{24}{8} = 3$$

Por lo tanto:

$$\frac{-24}{8} = -3.$$

2. -63 entre -7

Solución – Juan Beltrán:

$$-63 \div (-7) = \frac{-63}{-7}$$

$-$: signo del dividendo

$-$: signo del divisor

$-$ por $-$ da $+$: según la ley de los signos

$\frac{63}{7} = 9$ {repasa las tablas}

Por lo tanto:

$$\frac{-63}{-7} = 9.$$

3. $-5a^2$ entre $-a$

Solución – Juan Beltrán:

$$-5a^2 \div (-a) = \frac{-5a^2}{-a}$$

$-$: signo del dividendo

$-$: signo del divisor

$-$ por $-$ da $+$: según la ley de los signos

$\frac{5}{1} = 5$ y $\frac{a^2}{a} = a^{2-1} = a^1 = a$

Por lo tanto:

$$\frac{-5a^2}{-a} = 5a.$$

4. $14a^3b^4$ entre $-2ab^2$

Solución – Juan Beltrán:

$$14a^3b^4 \div (-2ab^2) = \frac{14a^3b^4}{-2ab^2}$$

$+$: signo del dividendo

$-$: signo del divisor

$+$ por $-$ da $-$: según la ley de los signos

$\frac{14}{2} = 7$

$\frac{a^3b^4}{ab^2} = a^{3-1}b^{4-2} = a^2b^2$

Por lo tanto:

$$\frac{14a^3b^4}{-2ab^2} = -7a^2b^2.$$

5. $-a^3b^4c$ entre a^3b^4

Solución – Juan Beltrán:

$$-a^3b^4c \div a^3b^4 = \frac{-a^3b^4c}{a^3b^4}$$

$-$: signo del dividendo

$+$: signo del divisor

$-$ por $+$ da $-$: según la ley de los signos

$\frac{a^3b^4c}{a^3b^4} = a^{3-3}b^{4-4}c = a^0b^0c = 1\times1\times c = c$ {por definición todo número real elevado a la 0 da 1}

Por lo tanto:

$$\frac{-a^3b^4c}{a^3b^4} = -c.$$

6. $-a^2b$ entre $-ab$

Solución – Juan Beltrán:

$$-a^2b \div (-ab) = \frac{-a^2b}{-ab}$$

$-$: signo del dividendo

$-$: signo del divisor

$-$ por $-$ da $+$: según la ley de los signos

$\frac{a^2b}{ab} = a^{2-1}b^{1-1} = a^1b^0 = a\times1 = a$ {por definición todo número real elevado a la 0 da 1}

Por lo tanto:

$$\frac{-a^2b}{-ab} = a.$$

7. $54x^2y^2z^3$ entre $-6xy^2z^3$

Solución – Juan Beltrán:

$$54x^2y^2z^3 \div (-6xy^2z^3) = \frac{54x^2y^2z^3}{-6xy^2z^3}$$

$+$: signo del dividendo

$-$: signo del divisor

$+$ por $-$ da $-$: según la ley de los signos

$\frac{54}{6} = 9$ {repasa las tablas de multiplicar}

$$\frac{x^2y^2z^3}{xy^2z^3} = \frac{x^2\cancel{y^2}\cancel{z^3}}{x\cancel{y^2}\cancel{z^3}} = x^{2-1} = x^1 = x$$

{se pueden cancelar los factores comunes (misma letra y elevada al mismo exponente) en numerador y denominador}

Por lo tanto:

$$\frac{54x^2y^2z^3}{-6xy^2z^3} = -9x.$$

Cuando dividimos un polinomio por un número, el resultado es otro polinomio que cumple las siguientes características:

El polinomio resultante es del mismo grado que el polinomio que fue dividido.

Sus coeficientes resultan de dividir cada uno de los coeficientes del polinomio entre el número. Se dejan las mismas partes literales.

Ejemplos:

$$\frac{2x^3-4x^2+6x-2}{2}=$$

$$\frac{2x^3}{2}-\frac{4x^2}{2}+\frac{6x}{2}-\frac{2}{2}=$$

$$x^3-2x^2+3x-1$$

$$\frac{6x^3-3x^2+9x-4}{3}=$$

$$\frac{6x^3}{3}-\frac{3x^2}{3}+\frac{9x}{3}-\frac{4}{3}=$$

$$2x^3-x^2+3x-\frac{4}{3}$$

En la división de un polinomio por un monomio se divide cada uno de los monomios que forman el polinomio por el monomio, hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor.

Ejemplos:

$$\frac{2x^4-4x^3+8x^2-12x}{2x}=$$

$$\frac{2x^4}{2x}-\frac{4x^3}{2x}+\frac{8x^2}{2x}-\frac{12x}{2x}=$$

$$x^3-2x^2+4x-6$$

$$\frac{2x^6-4x^4+x^2}{2x^2}=$$

$$\frac{2x^6}{2x^2}-\frac{4x^4}{2x^2}+\frac{x^2}{2x^2}=$$

$$x^4-2x^2+\frac{1}{2}$$

Para explicar la división de polinomios nos valdremos de un ejemplo práctico con los polinomios:

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan, es decir, en esta caso dejamos el espacio para el elemento de cuarto grado y otro espacio para el elemento de segundo grado.

$$x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \qquad \textit{dividido por} \qquad x^2 - 2x + 1$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3$$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

Es decir : $(x^3)(x^2 - 2x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-x^5 + 2x^4 - x^3$$

$$\begin{array}{llll|l}
x^5 & & +2x^3 & -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & x^3 \\
 & 2x^4 & +x^3 & -x-8 &
\end{array}$$

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$(2x^2)(x^2 - 2x + 1) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-2x^4 + 4x^3 - 2x^2$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad + 2x^3 \quad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 \\
\quad 2x^4 + x^3 \quad - x - 8 & \\
\quad \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 &
\end{array}$$

Procedemos igual que antes.

$$\frac{5x^3}{x^2} = 5x$$

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$(5x)(x^2 - 2x + 1) = 5x^3 - 10x^2 + 5x$$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-5x^3 + 10x^2 - 5x$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad + 2x^3 \quad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x \\
\quad 2x^4 + x^3 \quad - x - 8 & \\
\quad \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 & \\
\qquad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\qquad \qquad 8x^2 - 6x - 8 &
\end{array}$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$$\frac{8x^2}{x^2} = 8$$

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$(8)(x^2 - 2x + 1) = 8x^2 - 16x + 8$$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-8x^2 + 16x - 8$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad\quad + 2x^3 \quad\quad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
\quad\quad 2x^4 + x^3 & \\
\quad \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\quad\quad\quad 5x^3 - 2x^2 - x & \\
\quad\quad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\quad\quad\quad\quad 8x^2 - 6x - 8 & \\
\quad\quad\quad \underline{-8x^2 + 16x - 8} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 10x - 16 &
\end{array}$$

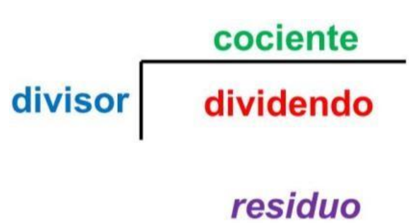
La división concluye aquí, ya que $10x - 16$ tiene menor grado que el divisor.

Cociente o resultado de la división: $x^3 + 2x^2 + 5x + 8$

Resto o residuo: $10x - 16$

2.4 Algoritmo de la división

Para dividir polinomios, es necesario recordar la ley de los signos, la de los coeficientes para la multiplicación; asimismo el algoritmo, que comúnmente utilizas para dividir aritméticamente.



División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, debe seguir los siguientes pasos:

Aplicar la propiedad distributiva para escribir cada término del numerador entre el monomio.

Simplificar las fracciones aplicando propiedades de fracciones y exponentes.

Ejemplos

1. Dividir $\frac{8x^3+4x^2+6x}{2x}$

Solución

Paso 1. Aplicar la propiedad distributiva

$$\frac{8x^3}{2x}+\frac{4x^2}{2x}+\frac{6x}{2x}$$

Paso 2 Simplificar cada fracción

$$\frac{8x^3}{2x}+\frac{4x^2}{2x}+\frac{6x}{2x}=4x^2+\ 2x+3$$

Por lo tanto, la respuesta es: 4 x2 +2x+3

División entre polinomios

Consideremos estos dos polinomios:

D(x)= x4–2x3–11x2+30x–20 ⇒ Dividendo d(x) =x2+3x–2 ⇒ Divisor

Para realizar la división de D(x) entre d(x) se procede del modo siguiente:

Se colocan los polinomios igual que en la división de números y ordenados de forma creciente.

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \;\underline{\big|\; x^2 + 3x - 2}$$

Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor. El resultado se pone en el cociente.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & \underline{x^2 + 3x - 2} \\ & x^2 \end{array}$$

Se multiplica el cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo:

(x2+3x–2) . x2= x4+3x3–2x2

Como hay que restar x4+3x3+2x2 del dividendo, le sumamos el opuesto: –(x4+3x3–2x2) = –x4–3x3+2x2

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 \\ \hline
\quad -5x^3 - 9x^2 &
\end{array}
$$

Se baja el término siguiente, 30x , y se divide, como en el apartado 2, el primer monomio del dividendo ($-5x^3$) por el primer monomio del divisor (x^2) −5x3 ÷ x2= −5x y se coloca -5x en el cociente.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x \\ \hline
\quad -5x^3 - 9x^2 + 30x &
\end{array}
$$

Se multiplica -5x por el divisor ($x^2 + 3x – 2$) y el producto obtenido se resta del dividendo: (x2+3x–2) .(−5x) = −5x3–15x2+10x

Como hay que restar $-5x^3 – 15x^2 + 10x$ del dividendo, le sumamos el opuesto: - (−5x3–15x2+10x) =5x3+15x2–10x

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \hline
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x \\ \hline
\quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\
\quad 5x^3 + 15x^2 - 10x & \\ \hline
\qquad 6x^2 + 20x &
\end{array}
$$

Se baja el último término, -20, y se divide, como los apartados 2 y 4, el primer monomio del dividendo ($6x^2$) por el primer monomio del divisor (x^2)

$6x^2 \div x^2 = 6$, y se coloca 6 en el cociente.

$$
\begin{array}{rl}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & \big|\ \underline{x^2 + 3x - 2} \\
\underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & \ \ x^2 - 5x + 6 \\
-5x^3 - 9x^2 + 30x \qquad & \\
\underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} \qquad & \\
6x^2 + 20x - 20 &
\end{array}
$$

Se multiplica 6 por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo:

(x2+3x–2) . 6 = 6x2+18x–12; Como hay que restar este polinomio del dividendo, le sumamos el opuesto: −(6x2+18x–12) = – 6x2 –18x +12

$$
\begin{array}{rl}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & \big|\ \underline{x^2 + 3x - 2} \\
\underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & \ \ x^2 - 5x + 6 \\
-5x^3 - 9x^2 + 30x \qquad & \\
\underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} \qquad & \\
6x^2 + 20x - 20 & \\
\underline{-6x^2 - 18x + 12} & \\
2x - 8 &
\end{array}
$$

Como 2x no se puede dividir por x^2, la división se ha terminado. Entonces obtenemos que el polinomio cociente es: c(x) = x2 – 5x + 6; y el polinomio resto es: R(x)=2x–8

Comprobamos que:

D(x) = d(x) . c(x) + R(x)

D(x)=(x2+3x–2) . (x2–5x+6) + (2x–8) = x4 – 2x3 – 11x2 + 30x – 20

Ejemplo 2.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4+5x^3 \qquad -\ 2x\ +3 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-3x^4+9x^3-\ 6x^2 \qquad\qquad & 3x^2+14x+36 \\ \hline
14x^3-\ 6x^2-\ 2x\ +3 & \\
-14x^3+42x^2-28x \quad & \\ \hline
\cancel{36x}^2-30x\ +3 & \\
-\cancel{36x}^2+108x-72 & \\ \hline
78x\ -69 &
\end{array}
$$

2.5 Algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides es un método antiguo y eficiente para calcular el máximo común divisor (MCD). Fue originalmente descrito por Euclides en su obra Elementos. El algoritmo de Euclides extendido es una ligera modificación que permite además expresar al máximo común divisor como una combinación lineal. Este algoritmo tiene aplicaciones en diversas áreas como álgebra, teoría de números y ciencias de la computación, entre otras. Con unas ligeras modificaciones suele ser utilizado en computadoras electrónicas debido a su gran eficiencia.

El algoritmo de Euclides es un procedimiento para calcular el M.C.D. de dos números. Los pasos son:

Se divide el número mayor entre el menor.

Si:

La división es exacta, el divisor es el M.C.D.

La división no es exacta, dividimos el divisor entre el resto obtenido y se continúa de esta forma hasta obtener una división exacta, siendo el último divisor el M.C.D.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l} 72 & 16 \\ \cline{2-2} 8 & 4 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}
$$

M.C.D. (72, 16) = 8

Recuerda que el máximo común divisor (MCD) de dos enteros A y B es el entero más grande que divide tanto a A como a B.

El algoritmo de Euclides es una técnica para encontrar rápidamente el MCD de dos enteros.

El algoritmo de Euclides para encontrar MCD (A, B) es como sigue:

Si A = 0 entonces MCD (A, B) = B, ya que el MCD (0, B) = B, y podemos detenernos. o
Si B = 0 entonces MCD (A, B) = A, ya que el MCD (A, 0) = A, y podemos detenernos.

Escribe A en la forma cociente y residuo (A = B .Q + R).

Encuentra MCD (B,R) al usar el algoritmo de Euclides, ya que MCD (A, B)=MCD (B,R)

Ejemplo:

Encuentra el MCD de 270 y 192.

A= 270, B =192.

A ≠0

B ≠ 0

Usa división larga para encontrar que 270/192 = 1 con un residuo de 78. Podemos escribir esto como: 270 = 192 * 1 + 78

Encuentra MCD (192,78), ya que MCD (270,192) = MCD (192,78).

A=192, B=78.

A ≠0

B ≠ 0

Usa división larga para encontrar que 192/78 = 2 con un residuo de 36. Podemos escribir esto como:

192 = 78 * 2 + 36

Encuentra MCD (78,36), ya que MCD (192,78) = MCD (78,36).

A=78, B=36.

A ≠0

B ≠ 0

Usa división larga para encontrar que 78/36 = 2 con un residuo de 6. Podemos escribir esto como:

78 = 36 * 2 + 6

Encuentra MCD (36,6), ya que MCD (78,36) = MCD (36,6).

A=36, B=6.

A ≠0

B ≠ 0

Usa división larga para encontrar que 36/6 = 6 con un residuo de 0. Podemos escribir esto como:

36 = 6 * 6 + 0

Encuentra MCD (6,0), ya que MCD (36,6) = MCD (6,0).

A=6, B=0.

A ≠0

B =0,

MCD (6,0) = 6.

Así que hemos mostrado:

MCD (270,192) = MCD (192,78) = MCD (78,36) = MCD (36,6) = MCD (6,0) = 6.

MCD (270,192) = 6.

2.6 Factorización por factor común

a factorización por término común está ligada a una de las propiedades de los números reales, llamada propiedad distributiva, esta propiedad dice que para cuales quiera a, b y c en los números reales, se cumple que ac + bc = c(a + b)

En este caso decimos que la factorización de ac + bc es c(a + b)

Ejemplo: Considere la suma 5·8 + 5·9.

Dado que el número 5 aparece en ambos sumandos, la suma se puede reescribir como un producto.

5·8 + 5·9 = 5(8+9)

Del lado izquierdo de la igualdad se tiene 5·8 + 5·9 = 40 + 45 = 85, mientras que por el lado derecho se tiene 5(8+9)=5(17)=85, llegando al mismo resultado.

De manera natural podemos extender esta idea para una cantidad más grande de números reales. Por ejemplo, si $c, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ representan algún número real. Entonces se cumple lo siguiente: $c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$

2.7 Factor común por agrupación de términos

Se llama factor común por agrupación de términos, si los términos de un polinomio pueden reunirse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo.

Cuando pueden reunirse en grupos de igual número de términos se le saca en cada uno de ellos el factor común. Si queda la misma expresión en cada uno de los grupos entre paréntesis, se la saca este grupo como factor común, quedando así una multiplicación de polinomios.

Tratar desde el principio que nos queden iguales los términos de los paréntesis nos hará mas sencillo el resolver estos problemas.

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$$

Agrupo los términos que tienen un factor común:

$$(2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b)$$

Saco el factor común de cada grupo:

$a(2x - y + 5) + b(2x - y + 5)$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales se tiene:

$$(2x - y + 5)(a + b)$$

Que es nuestra respuesta.

Ejemplos:

$$17ax - 17mx + 3ay - 3my + 7az - 7mz = a(17x + 3y + 7z) - m(17x + 3y + 7z)$$
$$= (17x + 3y + 7z)(a - m)$$

$$m(x + 2) - x - 2 + 3(x + 2) = (x + 2)(m + 3) - 1(x + 2) = (x + 2)[(m + 3) - 1]$$
$$= (x + 2)(m + 3 - 1)$$

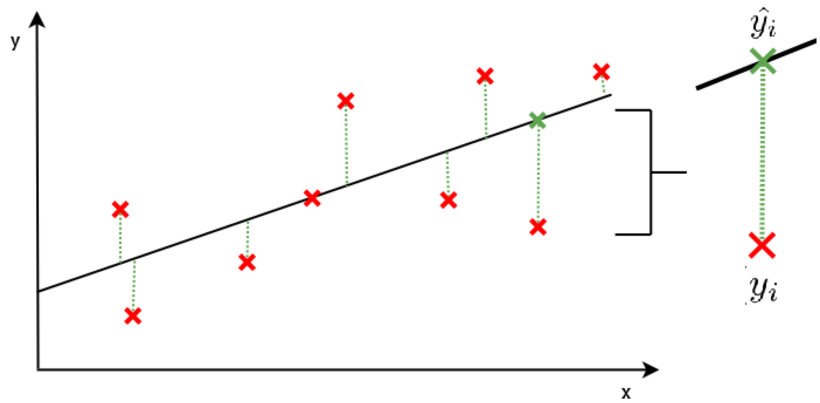
Otra forma de hacerlo:

$$m(x + 2) - x - 2 + 3(x + 2) = m(x + 2) - 1(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(m + 3 - 1)$$

2.8 Determinación de cuadrados

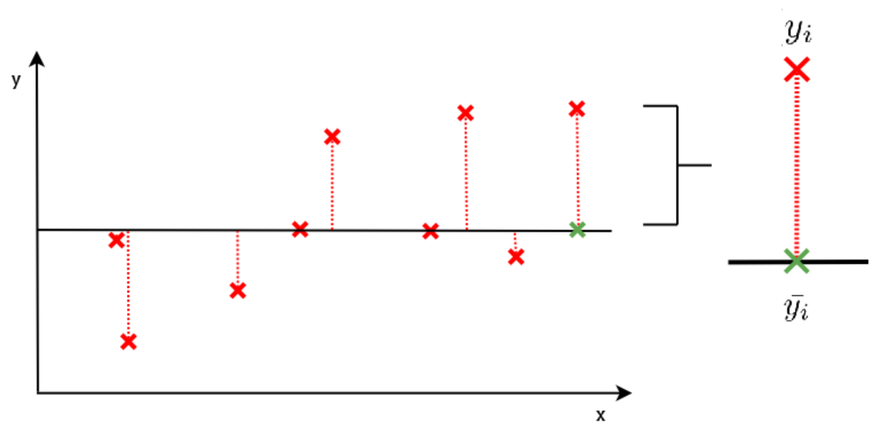
En modelos estadísticos, fundamentales en la implementación de tipos de Machine Learning (por ende, parte de lo que es Big Data), un concepto fundamental para evaluar la bondad de un modelo (qué tan buen modelo es), un indicador de qué tan bueno es su poder predictivo se encuentra en el parámetro R2. Muy utilizado, pero poco comprendido; básicamente se entiende que mientras más se acerque su valor a 1 es bueno, por el contrario mientras más se acerque a 0 es malo.

Aquí intento explicar brevemente su significado con un ejemplo en dos dimensiones, aplicable a otros problemas.



Supongamos un problema de dos dimensiones para el cual existe un modelo de regresión lineal. La diferencia entre el valor predicho y el valor real se le denomina residuo. Para calcular el coeficiente de determinación (R2) es necesario obtener la Suma de los Cuadrados Residuales (SSres). expresado en la fórmula:

$$SS_{res} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$



Para el mismo problema es posible trazar un promedio, la diferencia entre el valor real y el valor del promedio se lleva a la Suma Total de los Cuadrados (SStot), expresado en la fórmula:

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2$$

Para obtener el valor de R2, se necesitan estos dos Sumas de Cuadrados expresados de la siguiente forma:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

Es importante tener en cuenta que para un modelo de regresión siempre es necesario minimizar la diferencia entre el valor predicho y el valor real de la variable dependiente, aquí representado por SSres, para tener un mejor modelo. De esta forma el valor de R2 muestra qué tan buena es la linea del modelo de regresión (lineal) comparada con la linea promedio entre los valores para el que se está calculando.

Al observar la fórmula es posible notar que a medida que SSres aumenta, el valor de R2 disminuye; por el contrario al obtener un bajo valor de SSres (que es lo deseado) el valor de R2 aumenta. El ideal, sería llegar a un SSres con valor cero, lo que generaría un valor de uno para R2. Si bien esto es muy poco probable, lo ideal es acercarse lo más posible a uno.

Valores negativos de R2 son posibles, esta situación se daría en el caso que el modelo fuera menos ajustado que el promedio. De todas formas, para efectos interpretativos en algunas áreas sería recomendable interpretarlo como cero.

2.9 Trinomio de la forma x2+Bb+c

Un polinomio con tres términos se llama trinomio. Normalmente (¡pero no siempre!) los trinomios tienen la forma x2 + bx + c. A simple vista, parecen difíciles de factorizar, pero puedes tomar ventaja de algunos patrones matemáticos interesantes para factorizar incluso los trinomios que más complicados se ven.

Entonces, ¿cómo pasas de 6x2 + 2x – 20 a (2x + 4)(3x −5)? Veamos.

Factorizando Trinomios: x2 + bx + c

Los trinomios de la forma x2 + bx + c normalmente pueden factorizarse como el producto de dos binomios. Recuerda que un binomio es simplemente un polinomio de dos términos. Empecemos observando qué pasa cuando multiplicamos dos binomios, como (x + 2) y (x + 5).

Ejemplo	
Problema Multiplicar (x + 2)(x + 5).	
(x + 2)(x + 5)	Usa el método FOIL para multiplicar los binomios.

	x2 + 5x + 2x +10	Luego combina los términos semejantes 2x y 5x.
Respuesta	x2 + 7x +10	

Factorizar es el reverso de multiplicar. Entonces vayamos en reversa y factoricemos el trinomio x2 + 7x + 10. Los términos individuales x2, 7x, y 10 no comparten factores comunes. Entonces vamos a reescribir x2 + 7x + 10 como x2 + 5x + 2x + 10.

Y, puedes agrupar los pares de factores: (x2 + 5x) + (2x + 10)

Factorizar cada par: x(x + 5) + 2(x + 5)

Luego sacar el factor común x + 5: (x + 5)(x + 2)

A continuación, se muestra el mismo problema en la forma de un ejemplo:

Problema		
	Factorizar x2 + 7x +10.	
	x2 + 5x + 2x +10	Reescribe el término de en medio 7x como 5x + 2x.
	x(x + 5) + 2(x + 5)	Agrupa los pares y saca el factor común *x* del primer par y el factor 2 del segundo par.
	(x + 5)(x + 2)	Saca el factor común (x + 5).
Respuesta	(x + 5)(x + 2)	

¿Cómo sabemos la manera de reescribir el término de en medio? Desafortunadamente, no puedes reescribirlo de una única manera. Si reescribes 7x como 6x + x, este método no funcionará. Afortunadamente, existe una regla para eso.

Factorizando Trinomios de la forma x2 + bx + c

Para factorizar un trinomio de la forma x2 + bx + c, encuentra dos enteros, r y s, cuyo producto sea c y cuya suma sea b.

Reescribe el trinomio como x2 + rx + sx + c y luego agrupa y aplica la propiedad distributiva para factorizar el polinomio. Los factores resultantes serán (x + r) y (x + s).

Por ejemplo, para factorizar x2 + 7x +10, buscas dos números cuya suma sea 7 (el coeficiente del término central) y cuyo producto sea 10 (el último término).

Piensa en pares de factores de 10: 1 y 10, 2 y 5. ¿Alguno de ellos suman 7? Sí, 2 y 5. Entonces puedes reescribir 7x como 2x + 5x, y continuar factorizando como el ejemplo anterior. Observa que también puedes reescribir 7x como 5x + 2x. Ambas forman funcionan.

Factoricemos el trinomio x2 + 5x + 6. En este polinomio, la parte b del término central es 5 y el término c es 6. Una tabla nos ayudará a organizar las posibilidades. A la izquierda, enlista todos los factores posibles del término c, 6; a la derecha encontrarás las sumas.

Factores cuyo producto es 6	Suma de los factores
1 • 6 = 6	1 + 6 = 7
2 • 3 = 6	2 + 3 = 5

Sólo hay dos combinaciones posibles de factores, 1 y 6, y 2 y 3. Puedes ver que 2 + 3 = 5. Entonces 2x + 3x = 5x, que nos da el término central correcto.

Ejemplo		
Problema		
	Factorizar x2 + 5x + 6.	
	x2 + 2x + 3x + 6	Usa los valores de la tabla anterior. Reemplaza el 5x con 2x + 3x.
	(x2 + 2x) + (3x + 6)	Agrupa los pares de términos.
	x(x + 2) + (3x + 6)	Saca el factor x del primer par de términos.
	x(x + 2) + 3(x + 2)	Saca el factor 3 del segundo par de términos.
	(x + 2)(x + 3)	Saca el factor (x + 2).

Respuesta (x + 2)(x + 3)

Observa que si hubieras escrito x2 + 5x + 6 como x2 + 3x + 2x + 6 y agrupado los pares como (x2 + 3x) + (2x + 6); luego factorizado, x(x + 3) + 2(x + 3), y sacado el factor x + 3, la respuesta habría sido (x + 3)(x + 2). Como la multiplicación es conmutativa, el orden de los factores no importa. Entonces esta respuesta también es correcta; son resultados equivalentes.

Finalmente, observemos el trinomio x2 + x – 12. En este trinomio, el término *c* es −12. Entonces busquemos todas las combinaciones de factores cuyo producto sea −12. Luego vemos cuál de estas combinaciones te da el término centra correcto, donde b es 1.

Factores cuyo producto es −12	Suma de los factores
1 • −12 = −12	1 + −12 = −11
2 • −6 = −12	2 + −6 = −4
3 • −4 = −12	3 + −4 = −1
4 • −3 = −12	4 + −3 = 1
6 • −2 = −12	6 + −2 = 4
12 • −1 = −12	12 + −1 = 11

Sólo hay una combinación donde el producto es −12 y la suma es 1, y es cuando r = 4, y s = −3. Usémoslos para factorizar nuestro trinomio original.

Ejemplo	
Problema Factorizar x2 + x – 12	
x2 + 4x + −3x – 12	Reescribe el trinomio usando los valores de la tabla anterior. Usa los valores r = 4 y s = −3.

	$(x2 + 4x) + (-3x - 12)$	Agrupa los pares de términos.
	$x(x + 4) + (-3x - 12)$	Saca el factor x del primer par de términos.
	$x(x + 4) - 3(x + 4)$	Saca el factor −3 del segundo par de términos.
	$(x + 4)(x - 3)$	Saca el factor $(x + 4)$.
Respuesta	$(x + 4)(x - 3)$	

En el ejemplo anterior, también pudiste reescribir $x2 + x - 12$ como $x2 - 3x + 4x - 12$. Luego factorizar $x(x - 3) + 4(x - 3)$, y sacar el factor $(x - 3)$ para obtener $(x - 3)(x + 4)$. Como la multiplicación es conmutativa, esta respuesta es equivalente.

2.10 Trinomio cuadrado perfecto

Los cuadrados perfectos son números que son el resultado de la multiplicación de un número entero con sí mismo o elevado al cuadrado. Por ejemplo 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, y 100 son cuadrados perfectos — provienen de elevar al cuadrado cada número del 1 al 10. Observa que estos cuadrados perfectos también provienen de elevar al cuadrado los números negativos del −1 al −10, como $(-1)(-1) = 1$, $(-2)(-2) = 4$, $(-3)(-3) = 9$, etc.

Un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que resulta de la multiplicación de un binomio por sí mismo o elevado al cuadrado. Por ejemplo, $(x + 3)2 = (x + 3)(x + 3) = x2 + 6x + 9$. El trinomio $x2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Vamos a factorizar este trinomio usando los métodos que ya conocemos.

Ejemplo	
Problema Factorizar x2 + 6x + 9.	
x2 + 3x + 3x + 9	Reescribe 6x como 3x + 3x, como 3 • 3 = 9, el último término, y 3 + 3 = 6, el término central.
(x2 + 3x) + (3x + 9)	Agrupa pares de términos.
x(x + 3) + 3(x + 3)	Saca el factor x del primer par, y el factor 3 del segundo par.
(x + 3)(x + 3) o (x + 3)2	Saca el factor x + 3. (x + 3)(x + 3) también puede escribirse como (x + 3)2.
Respuesta (x + 3)(x + 3) o (x + 3)2	

Observa que en el trinomio x2 + 6x + 9, los términos a y c son cuadrados perfectos, como x2 = x • x, y 9 = 3 • 3. También el término central es dos veces el producto de los términos x y 3, 2(3)x = 6x.

Ahora veamos un ejemplo un poco distinto. El ejemplo anterior muestra cómo (x + 3)2 = x2 + 6x + 9. ¿A qué es igual (x – 3)2? Aplicando lo que sabes sobre multiplicación de binomios, encuentras lo siguiente.

(x – 3)2

(x – 3)(x – 3)

x2 – 3x – 3x + 9

x2 – 6x + 9

Observa: ¡(x + 3)2 = x2 + 6x + 9, y (x – 3)2 = x2 – 6x + 9! Aquí 9 puede escribirse como (−3)2, entonces el término centra es 2(−3)x = −6x. Entonces cuando el signo del término central es negativo, el trinomio puede factorizarse como (a – b)2.

Intentemos con otro ejemplo: 9x2 – 24x + 16. Observa que 9x2 es un cuadrado perfecto, porque(3x)2 = 9x2 y que 16 es un cuadrado perfecto, porque 42 = 16. Sin embargo, el término central, –24x es negativo, entonces intenta 16 = (−4)2. En este caso, el término central es 2(3x)(−4) = −24x. Por lo que el trinomio 9x2 – 24x + 16 es un cuadrado perfecto y se factoriza como (3x – 4)2.

También puedes continuar factorizando usando agrupamiento, como se muestra abajo.

Ejemplo		
Problema		
	Factorizar 9x2 – 24x + 16.	
	9x2 – 12x – 12x + 16	Reescribe −24x como −12x – 12x.
	(9x2 – 12x) + (-12x + 16)	Agrupa pares de términos. (Mantén el signo negativo con el 12.)
	3x(3x – 4) – 4(3x – 4)	Saca el factor 3x del primer grupo, y el factor −4 del segundo grupo.
	(3x – 4)(3x – 4)	Saca el factor (3x – 4).
	o (3x – 4)2	(3x – 4)(3x – 4) también puede escribirse como (3x – 4)2.
Respuesta	(3x – 4)2	

Observa que si sacas el factor 4 en lugar del −4, el factor 3x – 4 habría sido −3x + 4, que es el opuesto de 3x – 4. Al sacar el factor −4, los factores de la agrupación resultan los mismos, ambos 3x – 4. Necesitamos que esto suceda si vamos a sacar un factor común en el siguiente paso.

El patrón para factorizar trinomios cuadrados perfectos nos lleva a la siguiente regla general.

Trinomios Cuadrados Perfectos

Un trinomio de la forma $a2 + 2ab + b2$ puede factorizarse como $(a + b)2$.

Un trinomio de la formaa2 $– 2ab + b2$ puede factorizarse como $(a – b)2$.

Ejemplos:

La forma factorizada de $4x2 + 20x + 25$ es $(2x + 5)2$.

La forma factorizada de $x2 – 10x + 25$ es $(x – 5)2$.

Ahora vamos a factorizar un trinomio usando la regla anterior. Una vez que has determinado que el trinomio es un cuadrado perfecto, el resto es fácil. Observa que en un trinomio cuadrado perfecto el término *c* siempre es positivo.

Ejemplo		
Problema	Factorizar $x2 – 14x + 49$.	
	$x2 – 14x + 49$	Determina si es un trinomio cuadrado perfecto. El primer término es un cuadrado, porque $x2 = x \cdot x$. El último término es un cuadrado porque $7 \cdot 7 = 49$. También $-7 \cdot -7 = 49$. Entonces, $a = x$ y $b = 7$ o -7.
	$-14x = -7x + -7x$	El término medio es $-2ab$ si usamos $b = 7$, porque $-2x(7) = -14x$. Es un trinomio cuadrado perfecto.
	$(x – 7)2$	Factoriza como $(a – b)2$.
Respuesta	$(x – 7)2$	

Puedes, y deberías, multiplicar para comprobar la respuesta. $(x - 7)2 = (x - 7)(x - 7) = x2 - 7x - 7x + 49 = x2 - 14x + 49$.

Factorizar $x2 - 12x + 36$.

A) $(x - 4)(x - 9)$

B) $(x + 6)2$

C) $(x - 6)2$

D) $(x + 6)(x - 6)$

Factorizando una Resta de Cuadrados

La resta de dos cuadrados, $a2 - b2$, también es un producto especial que se factoriza como el producto de dos binomios.

Vamos a factorizar $9x2 - 4$ escribiéndolo como un trinomio, $9x2 + 0x - 4$. Ahora puedes factorizar este trinomio como lo hemos estado haciendo.

$9x2 + 0x - 4$ cumple con el estándar de un trinomio, $ax2 + bx + c$. Ahora factoricemos este trinomio de la misma manera que cualquier otro monomio. Encuentra los factores de ac ($9 \cdot -4 = -36$) cuya suma sea b, en este caso, 0.

Factores de −36	Suma de los factores
$1 \cdot -36 = -36$	$1 + (-36)\ -35$
$2 \cdot -18 = -36$	$2 + (-18) = -16$
$3 \cdot -12 = -36$	$3 + (-12) = -9$
$4 \cdot -9 = -36$	$4 + (-9) = -5$
$6 \cdot -6 = -36$	$6 + (-6) = 0$

9 • −4 = −36	9 + (−4) = 5
…	…

Hay más factores, pero has encontrado el par que tiene como suma 0, e y −6. Puedes usar este factor 9x2 – 4.

Ejemplo		
Problema	Factorizar 9x2 – 4.	
	9x2 + 0x – 4	Reescribe 0x como −6x + 6x.
	9x2 – 6x + 6x – 4	
	(9x2 – 6x) + (6x – 4)	Agrupa los pares.
	3x(3x – 2) + 2(3x – 2)	Saca el factor 3x del primer grupo. Saca el factor 2 del segundo grupo.
	(3x – 2)(3x + 2)	Saca el factor (3x – 2).
Respuesta	(3x – 2)(3x + 2)	

Como la multiplicación es conmutativa, la respuesta también se puede escribir como (3x + 2)(3x – 2).

Puedes comprobar la respuesta multiplicando (3x – 2)(3x + 2) = 9x2 + 6x – 6x – 4

= 9x2 – 4.

Factorizando una Resta de Cuadrados

Un binomio en la forma a2 – b2 puede factorizarse como (a + b)(a – b).

Ejemplo

La forma factorizada de x2 – 100 es (x + 10)(x – 10).

La forma factorizada de 49y2 – 25 es (7y + 5)(7y – 5).

Ahora factoricemos la resta de dos cuadrados usando la regla anterior. Una vez que has determinado que tienes la resta de dos cuadrados, sólo sigue el patrón.

Ejemplo		
Problema	Factorizar 4x2 – 36.	
	4x2 – 36	4x2 = (2x)2, entonces a = 2x 36 = 62, entonces b = 6 Y 4x2 – 36 es la resta de los dos cuadrados.
	(2x + 6)(2x – 6)	Factoriza como (a + b)(a – b).
Respuesta	(2x + 6)(2x – 6)	

Comprueba la respuesta multiplicando: (2x + 6)(2x – 6) = 4x2 – 12x + 12x – 36 = 4x2 – 36.

Observa que no puedes factorizar la suma de dos cuadrados, a2 + b2. Podrías querer factorizar esto como (a + b)2, pero revísalo multiplicando: (a + b)2 = (a + b)(a + b) = a2 + ab + ab + b2 = a2 + 2ab + b2, NO a2 + b2.

2.11 Completar el trinomio cuadrado perfecto

Completar el cuadrado es un método usado para resolver una ecuación cuadrática por el cambio de la forma de la ecuación para que el lado izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto .

Para resolver *ax* 2 + *bx* + *c* = 0 completando el cuadrado:

1. Transforme la ecuación para que el término constante, *c* , esté solo en el lado derecho.
2. Si *a* , el coeficiente principal (el coeficiente del término *x* 2), no es igual a 1, divida ambos lados entre *a* .
3. Sume el cuadrado de la mitad del coeficiente del término *x* , $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación.
4. Factorice el lado izquierdo como el cuadrado de un binomio.

5. Realice la raíz cuadrada en ambos lados. (Recuerde: (x + q) 2 = r es equivalente a $x+q=\pm\sqrt{r}$.

6. Resuelva para x .

Ejemplo 1:

Resuelva x 2 – 6 x – 3 = 0 completando el cuadrado.

$$\begin{aligned} x^2-6x&=3\\ x^2-6x+(-3)^2&=3+9\\ (x-3)^2&=12\\ x-3&=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}\\ x&=3\pm2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Resuelva: 7 x 2 – 8 x + 3 = 0

$$\begin{aligned} 7x^2-8x&=-3\\ x^2-\frac{8}{7}x&=-\frac{3}{7}\\ x^2-\frac{8}{7}x+\left(-\frac{4}{7}\right)^2&=-\frac{3}{7}+\frac{16}{49}\\ \left(x-\frac{4}{7}\right)^2&=-\frac{5}{49}\\ x-\frac{4}{7}&=\pm\frac{\sqrt{5}}{7}i\\ x&=\frac{4}{7}\pm\frac{\sqrt{5}}{7}i \end{aligned}$$

UNIDAD III

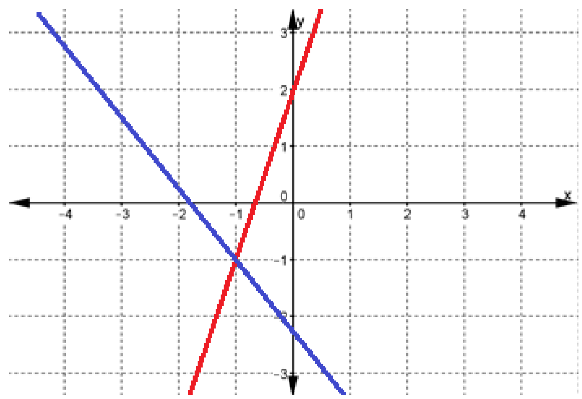
SISTEMA DE ECUACIONES Y MATRICES

3.1 Gráfica de sistema de ecuaciones 2x2

Consiste en graficar las rectas que conforman el sistema de ecuaciones lineales, para determinar las coordenadas (x,y) en donde se cortan dichas rectas.
Al graficarlo se pueden presentar tres casos

Caso 1

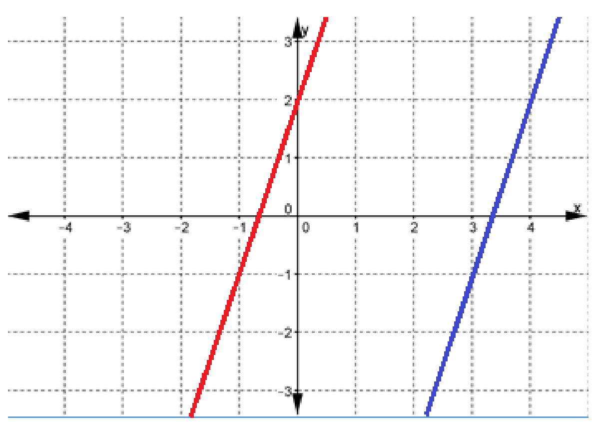
Las rectas se cortan en un solo punto. Esto significa que el sistema tiene única solución, dada por los valores x, y que son coordenadas del punto de corte.



En la figura la solucion grafica del sistema 2x2 esta dada por x=-1, y=-1. Lo cual corresponde a las coordenadas del punto de corte de las dos rectas.

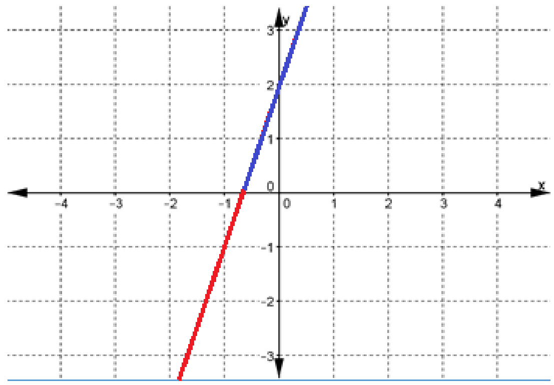
Caso 2

El sistema no tiene solución. Las rectas son paralelas y no se cortan.



Caso 3

Infinitas soluciones. Las rectas son coincidentes por lo tanto se cortan en infinitos puntos.



Ejemplo

Encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$$

Primero, se despeja la incógnita y quedando el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

El segundo paso sería determinar dos puntos que pertenezcan a cada una de las rectas.

En la ecuación y= -3x+4, le asignamos dos valores a x, para determinar el correspondiente valor de y.

Si x=0

Es decir si x toma el valor de cero que valor toma y.

Reemplazamos x=0, en la ecuación y= -3x+4,

$$y = -3(0) + 4$$
$$y = 0 + 4$$
$$y = 4$$

Si x=1

Es decir, si x toma el valor de uno que valor toma y.

Reemplazamos x=2, en la ecuación y= -3x+4,

$$y = -3(2) + 4$$
$$y = -6 + 4$$
$$y = -2$$

Resumimos en una tabla de valores para la ecuación 1

x	0	2
y	4	-2

En la ecuación y =2x-1 le asignamos dos valores a x, para determinar el correspondiente valor de y.

Si x=0

Es decir, si x toma el valor de cero que valor toma y.

Reemplazamos x=0, en la ecuación y =2x-1

$$y = 2(0) - 1$$
$$y = 0 - 1$$
$$y = -1$$

Si x=1

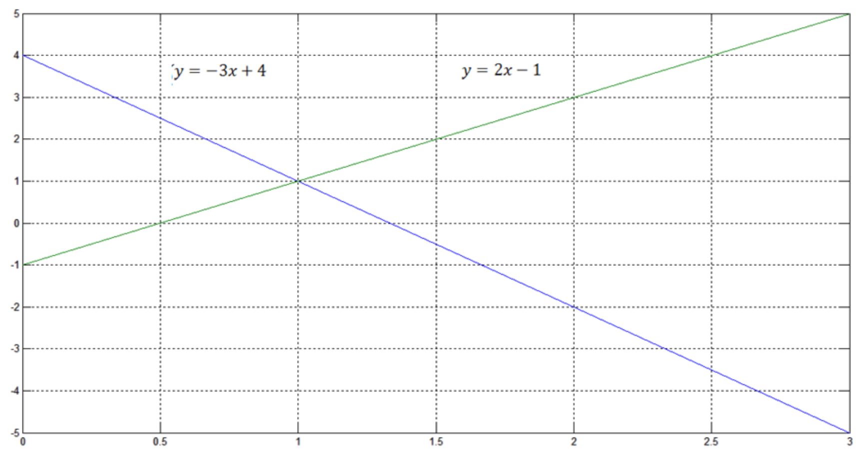
Es decir si x toma el valor de uno que valor toma y.

Reemplazamos x=1, en la ecuación y =2x-1

$$y = 2(1) - 1$$
$$y = 2 - 1$$
$$y = 1$$

Resumimos en una tabla de valores para la ecuación 2

x	0	1
y	-1	1



En la figura podemos identificar que las rectas se intersectan en la coordedana (1,1), por lo tanto el sistema tiene solucion y esta dada por x=1, y=1

3.2 Método por igualación con dos incógnitas

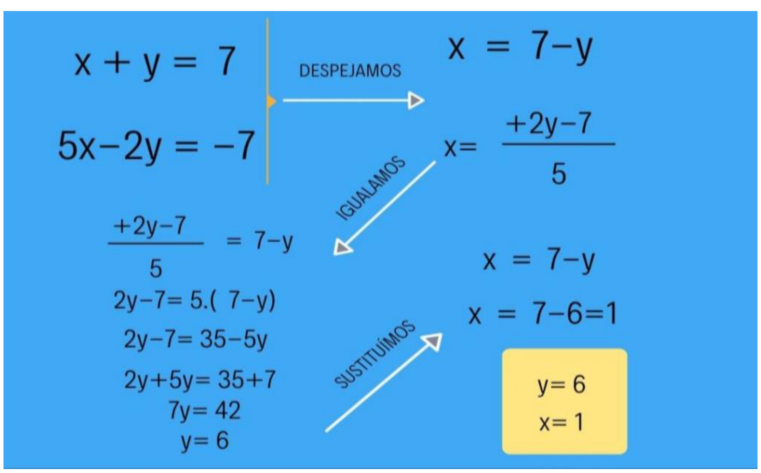
Los sistemas de ecuaciones lineales los podemos clasificar según su número de soluciones:

Compatible determinado: Tiene una única solución, la representación son dos rectas que se cortan en un punto.

Compatible indeterminado: Tiene infinitas soluciones, la representación son dos rectas que coinciden.

Incompatible: No tiene solución, la representación son dos rectas paralelas.

Método de igualación paso a paso



El método de igualación consiste en **despejar la misma incógnita** en las dos ecuaciones y después **igualar los resultados**.

Los pasos a seguir son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, elegimos la incógnita que deseamos despejar. En este caso, empezaré por la «x» y despejo la misma en ambas ecuaciones.

x+y=7; x=7-y

5x-2y=-7; 5x=2y-7

x=(2y-7)/5

Una vez hemos despejado, igualamos:

7-y = (2y-7)/5
5.(7-y) = (2y -7)
35 -5y= +2y -7
42=7y
y=42/7=6

y=6

Por último, sustituimos el valor que hemos calculado despejando la otra incógnita en una de las ecuaciones iniciales.

x=7-y
x=7-6=1

x=1

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

3.3 Método por sustitución de dos incógnitas

Paso 1. Se elige cualquiera de las incógnitas y se despeja en cualquiera de las ecuaciones.

En este caso vamos a despejar la variable x de la Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$
$$\boxed{x = 3 + 2y}$$

Paso 2. Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación

Despejar la variable x

Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$
$$\boxed{x = 3 + 2y}$$

Sustituir en la otra ecuación

Ecuación 1

$$2x + 3y = 20$$

$$2(3 + 2y) + 3y = 20$$

Paso 3. Se resuelve la ecuación resultante del paso anterior para encontrar el valor de una de las incógnitas

$$2(3 + 2y) + 3y = 20$$
$$6 + 4y + 3y = 20$$
$$6 + 7y = 20$$
$$7y = 20 - 6$$
$$7y = 14$$
$$\boxed{y = 2} \qquad y = \frac{14}{7}$$

Paso 4. El valor obtenido se reemplaza en la expresión del primer paso

Reemplazo el valor de y

$$x = 3 + 2y$$
$$\boxed{y = 2}$$
$$x = 3 + 2(2)$$
$$x = 3 + 4$$
$$\boxed{x = 7}$$

Paso 5. Verificación de la solución del sistema.

Nuestra solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 7 \end{array}}$$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en ambas ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x + 3y = 20$	$x - 2y = 3$
$2(7) + 3(2) = 20$	$7 - 2(2) = 3$
$14 + 6 = 20$	$7 - 4 = 3$
$20 = 20$	$3 = 3$

3.4 Método por eliminación con dos incógnitas

Recordemos que los Sistemas de Ecuaciones Lineales 2×2 son aquellos que se componen de dos ecuaciones con dos incógnitas, y existen varios métodos para llegar a su solución en caso de existir: método de igualación, método de sustitución, método gráfico, regla de cramer y por último el que más nos interesa en esta clase, el método de eliminación (reducción)

Vamos a solucionar el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de eliminación (reducción):

$$2x + 3y = 20 \quad \text{Ecuación 1}$$
$$x - 2y = 3 \quad \text{Ecuación 2}$$

El método de eliminación consiste en realizar la sumatoria de ambas ecuación con la finalidad de que alguna de las incógnitas desaparezca en el resultado de dicha operación.

Por lo general, es necesario realizar una serie de pasos pertinentes para que ambas ecuaciones lo permitan.

Paso 1. Se preparan las ecuaciones multiplicándolas por los números que convenga.

Para ello elegimos arbitrariamente cuál incógnita queremos eliminar; en este caso optamos por eliminar a la variable x.

Analicemos: en la Ecuación 1, la variable x viene representada por un 2x. Esto implica que para eliminarla al sumar dicha ecuación con la Ecuación 2, esta última debería tener un -2x con el cual cancelarse o eliminarse.

Por lo tanto es pertinente multiplicar la Ecuación 2 por un factor de -2 de la siguiente manera:

$\boxed{2x} + 3y = 20$ Ecuación 1

$x - 2y = 3$ Ecuación 2

Para convertir x en -2x
debo multiplicarlo por -2

Multiplico la Ecuación 2 por -2

$$x - 2y = 3$$

$$(-2)\ (x - 2y = 3)$$

$-2x + 4y = -6$ Ecuación 2n

Ecuación 2n = Ecuación 2 nueva

Paso 2. Sumamos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

Paso 3. Se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Paso 4. El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

En este caso elegimos reemplazar en la Ecuación 2

$$\boxed{y = 2}$$

Reemplazo en
Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$

$$x - 2(2) = 3$$

$$x - 4 = 3$$

$$x = 3 + 4$$

$$\boxed{x = 7}$$

Paso 5. Verificación de la solución del sistema.

Nuestra solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 7 \end{array}}$$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en ambas ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

Ecuación 1	Ecuación 2
2x + 3y = 20	x - 2y = 3
2(7) + 3(2) = 20	7 - 2(2) = 3
14 + 6 = 20	7 - 4 = 3
20 = 20	3 = 3

Se verifica que la solución del sistema si satisface ambas ecuaciones.

3.5 Método por eliminación de tres incógnitas

El método de Gauss consiste en utilizar el método de reducción de manera que en cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente. Tomando el sistema siguiento, lo vamos a resolver paso por paso usando el método de Gauss

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Ponemos como primera ecuación la que tenga como coeficiente de x: 1 ó -1, en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Hacemos reducción con la 1^a y 2^a ecuación, para eliminar el término en x de la 2^a ecuación. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

$$E_2' = E_2' - 3E_1'$$

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \\ \hline -y + 4z = -2 \end{array}$$

Hacemos lo mismo con la ecuación 1^a y 3^a ecuación, para eliminar el término en x.

$$E_3' = E_3' - 5E_1'$$

$$\begin{array}{r} 5x+3y+4z=2 \\ -5x-5y+5z=-5 \\ \hline -2y+9z=-3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+4z=-2 \\ -2y+9z=-3 \end{array} \right.$$

Tomamos las ecuaciones 2^a y 3^a, trasformadas, para hacer reducción y eliminar el término en y.

$$E_3'' = E_3' - 2E_2'$$

$$\begin{array}{r} -2y+9z=-3 \\ 2y-8z=4 \\ \hline z=1 \end{array}$$

Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

$$\left\{ \begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+4z=-2 \\ z=1 \end{array} \right.$$

Encontramos las soluciones.

$$z=1$$
$$-y+4\cdot 1=-2 \quad \Rightarrow \quad y=6$$
$$x+6-1=1 \quad \Rightarrow \quad x=-4$$

3.6 Regla de Creamer

El método de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Recuerda que un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$\boldsymbol{AX = B}$

Donde:

A es la matriz de coeficientes del sistema.

X es la matriz con las incógnitas.

B es la matriz con los términos independientes de las ecuaciones.

Bajo estas condiciones, la regla de Cramer es la siguiente:

La incógnita xi del sistema AX = b es

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Donde Ai es la matriz A, pero cambiando la columna i de A por la columna de términos independientes, b.

Ejemplo 1.

Véase a continuación el procedimiento que debe seguirse para utilizar la regla de Cramer.

Sea un sistema que cumple las dos condiciones necesarias:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=2 \\ x-z=5 \end{cases}$$

Lo primero será reescribir el sistema mediante la matriz de los coeficientes y calcular su determinante para asegurarnos que es distinto de cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el determinante es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

(efectivamente, distinto de cero).

Definimos ahora los determinantes Δi que resultan de cambiar la columna de la matriz de coeficientes por la columna de términos independientes. Calculemos dichos determinantes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

La regla de Cramer dice que las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

En este caso, pues, $x_1 = \frac{21}{2}$, $x_2 = \frac{-8}{2}$, $x_3 = \frac{-11}{2}$.

EJEMPLO 2.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ -2x + y - 7z = 0 \\ 3x - y + 8z = 2 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema por la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 1 \cdot 8 \\ &\quad +2 \cdot (-7) \cdot 3 \\ &\quad +(-2) \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\quad -1 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad -2 \cdot (-2) \cdot 8 \\ &\quad -3 \cdot (-7) \cdot (-1) = \\ &= -8 \neq 0 \end{aligned}$$

Como el determinante es distinto de 0, la matriz es regular y el sistema tiene una única solución (sistema compatible determinado):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-28}{-8} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{28}{-8} = -\frac{7}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2}$$

Nota: Para calcular la incógnita asociada a la columna n, sustituimos la columna n de la matriz de coeficientes por la columna de términos independientes.

3.7 Matrices y determinantes

¿Cuál es la diferencia entre una matriz y un determinante?

La principal diferencia entre las matrices y los determinantes es que una matriz es una manera de expresar datos o números, en cambio, el determinante de una matriz siempre será el resultado de una operación, es decir, un único número.

Otra manera de diferenciar las matrices y los determinantes es mediante sus respectivas propiedades. Por ejemplo, multiplicar una matriz por un número es equivalente a multiplicar todos los elementos de la matriz por ese número. Por contra, el producto de un determinante por un escalar es igual a multiplicar tan solo una fila o una columna del determinante.

Otra propiedad en la que se diferencian las matrices y los determinantes es en la multiplicación entre sí. Porque en general las matrices no son conmutables, es decir, el resultado del producto entre dos matrices varia dependiendo del orden en el que se multiplican. Por el contrario, el producto entre dos determinantes sí que es conmutativo.

3.8 Concepto de matriz

En matemáticas, una matriz es una tabla de números que sirve para representar datos de manera ordenada.

La principal utilidad de las matrices es representar los datos de los problemas. Por ejemplo, una empresa que vende 3 productos (X, Y, Z) ha realizado un estudio de mercado para saber a qué precio venden estos productos sus principales competidores (M y N) y ha obtenido los siguientes datos:

Pues la información de este problema se puede expresar en forma de matriz:

De esta forma se puede analizar mejor el problema y es más fácil de resolverlo. Para ver cómo calcular la solución de un sistema matricial puedes consultar el link del principio de la página.

En este caso concreto, hemos obtenido una matriz rectangular de 3 filas y 2 columnas. Para abreviar se suele decir que es una matriz de dimensión 3×2.

El determinante de una matriz **es una operación que se aplica a las matrices**, pero únicamente se pueden calcular los determinantes de matrices cuadradas. Por lo tanto, el resultado del determinante de una matriz siempre será un número, no una matriz. Por ejemplo, el determinante de la siguiente matriz es igual a cero (0):

Si quieres saber cómo resolver el determinante de cualquier matriz haz click en el link del principio de la página.

Como puedes ver, los determinantes siempre se expresan con barras verticales, a diferencia de las matrices que normalmente se representan con paréntesis.

3.9 Tipos de matriz

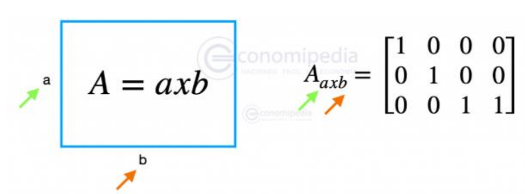
3.9.1 Matrices según su orden

El orden de las matrices puede entenderse fácilmente si lo relacionamos con la fórmula del área del rectángulo. Hablamos de rectángulo y no de cuadrado porque el rectángulo puede convertirse en cuadrado si sus lados son iguales, pero no al revés. Por tanto, haremos el ejemplo asociativo mediante un rectángulo.

El orden de una matriz también se llama dimensión dado que podría describirse como las unidades del espacio que ocupa la matriz.

Si una matriz es cuadrada, veremos que el número de filas coincide con el número de columnas y, por tanto, los dos números multiplicados en el orden serán iguales y la matriz tendrá forma de cuadrado.

Dado un rectángulo cualquiera, su área sería:



El orden de las matrices y las áreas de los rectángulos

El área del rectángulo se calcula mediante la multiplicación de la longitud del segmento **a** por la longitud del segmento **b**. Esa longitud del segmento viene expresada en términos unitarios, es decir, si el segmento **a** tiene una longitud de 3, también podemos decir que tiene una longitud de tres unidades unitarias.

En términos matriciales, esta longitud se puede entender como el número de **filas** que tiene una matriz. Para expresar las **columnas** podemos usar la misma lógica anterior. La longitud del segmento **b**, expresado en unidades unitarias, puede entenderse como el número de columnas que tiene una matriz. La matriz anterior sería a = 3 y b = 4.

$$A_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

Diferencia entre orden y área

La diferencia entre encontrar la dimensión u orden de una matriz y el cálculo del área de un rectángulo es que dejaremos expresada la multiplicación de las filas por las columnas sin calcular el resultado. En otras palabras, en el área del rectángulo calcularíamos el valor de la multiplicación, pero cuando se trata del orden de una matriz, no se calcula dicha multiplicación. Esta condición se puede ver en el subíndice que tiene la matriz:

$$\boxed{A_{axb}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

Ejemplo

Determina el orden de las siguientes matrices:

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & -4 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Las soluciones ordenadas de forma descendiente serían: 3×4, 3×2, 2×5, 2×1.

3.9.2 Matrices según sus elementos

Matriz nula

Una **matriz nula** es una matriz en la que todos sus elementos son 0:

Como puedes ver, esta matriz no es nada compleja. Pero aunque no lo parezca, tiene su utilidad. Puedes ver sus aplicaciones en la página de las propiedades de la matriz nula.

Matriz simétrica

Una **matriz simétrica** es una matriz en la que la diagonal principal es un eje de simetría.

Debido a las propiedades de las matrices simétricas, el resultado de trasponer una matriz simétrica es la propia matriz.

Matriz antisimétrica

Una **matriz antisimétrica** es una matriz en la que la diagonal principal está llena de ceros y, además, es un eje de antisimetría.

En el siguiente enlace puedes ver todas las propiedades y más ejemplos de matrices antisimétricas.

Ahora que has visto los tipos de matrices, seguro que te estás preguntando… ¿y para qué sirve todo esto? Pues una de las principales aplicaciones son las operaciones de matrices, siendo la más importante de ellas la multiplicación, que también puedes ver cómo se hace en la página de matrices multiplicación.

3.10 Álgebra de matrices

La matriz unidad de orden n×n es la matriz I de orden n×n en la cual todas las entradas son cero excepto los de la diagonal principal, que son 1. En símbolos:

Iij = 1 si i = j y Iij = 0 si i ≠ j.

Una matriz cero es una matriz O en la cual todas las entradas son cero.

Las operaciones de adición, multiplicación escalar, multiplicación entre matrices se cumplen las siguientes reglas:

A+(B+C) = (A+B)+C	Regla asociativa de adición
A+B = B+A	Regla conmutativa de adición
A+O = O+A = A	Regla unidad de adición

A+(- A) = O = (- A)+A	Regla inversa de adición
c(A+B) = cA+cB	Regla distributiva
(c+d)A = cA+dA	Regla distributiva
1A = A	Unidad escalar
0A = O	Cero escalar
A(BC) = (AB)C	Regla asociativa de multiplicación
AI = IA = A	Regla unidad de multiplicación
A(B+C) = AB + AC	Regla distributiva
(A+B)C = AC + BC	Regla distributiva
OA = AO = O	Multiplicación por matriz cero
(A+B)T = AT + BT	Trasposición de una suma
(cA)T = c(AT)	Trasposición de un producto escalar
(AB)T = BTAT	Trasposición de un producto matriz

La única regla que está notablemente ausente es la de conmutatividad del producto entre matrices. El producto entre matrices no es conmutativo: AB no es igual a BA en general.

3.11 Matrices especiales

La importancia de las matrices en álgebra es conocida y existen numerosos teoremas que las caracterizan o que las emplean como herramienta. Pero además, si trabajamos con **matrices especiales**, esto es, con matrices que cumplen determinadas características, obtenemos otros resultados interesantes o importantes por sus aplicaciones. Veamos un ejemplo:

Dada la matriz regular A de dimensión n x n tiene todos los menores principales no singulares, entonces admite una factorización LU. En este caso, para resolver computacionalmente el sistema Ax=bAx=bse necesitan 23n323n3operaciones en punto flotante, mientras que si usamos la descomposición QR se necesitan 43n343n3Es decir, usando la descomposición LU se requiere la mitad de operaciones respecto la descomposición QR.

En esta sección presentamos los tipos básicos de matrices según su forma (definición y propiedades inmediatas): identidad, diagonal, traspuesta, adjunta, simétrica, antisimétrica, definida positiva, diagonalmente dominante y Hessenberg.

Matriz identidad

Llamamos **matriz identidad** a la matriz cuadrada (mismo número de filas que de columnas) formada por unos en la diagonal y ceros en las demás entradas (posiciones). La representamos por In donde n es la dimensión de la matriz.

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Es el neutro del producto de matrices. Es decir, para toda matriz A de dimensión m x n,

$$A \cdot I_n = A = I_m \cdot A$$

Es **idempotente**, es decir, sus potencias son ella misma

$$(I_n)^k = I_n, \forall k \in \mathbb{N}$$

Es **regular** y su inversa es ella misma.

Es una **matriz permutación**.

Sólo tiene un **autovalor** (valor propio), que es 1, con multiplicidad algebraica la misma que la dimensión de la matriz.

Notaciones habituales:

$$I_n = diag(1, \dots, 1)$$

$$I_n = eye(n)$$

$$I_n = (\delta_{i,j}) \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (\ delta\ de\ Kronecker\ )$$

Matriz diagonal

Todos los elementos son nulos excepto los de la diagonal, esto es, los elementos que tienen el mismo número de fila que de columna.
Una matriz A diagonal de dimensión m x n que tiene por elementos de la diagonal a los elementos del vector v se le denota por

$$A = diag(v, mxn)$$

Ejemplos
$diag\big((1{,}5{,}9), 3x3\big) = diag(\,(1,5,9)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
$diag(\,(1{,}4)\,,\ \ 2x3\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades:

Son un caso particular de las **matrices triangulares**.

La matriz **traspuesta** de una matriz diagonal de dimensión m x n es la matriz diagonal de dimensión n x m con la misma diagonal.

En las matrices cuadradas, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

con lo que son **regulares** si, y sólo si, todos los elementos de la diagonal son distintos de 0. En tal caso,

$$A^{-1} = diag(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$$

Potencias (para las cuadradas)

$$A^k = diag\left(a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k\right),$$
$$\forall k \in \mathbb{N}$$

Producto de matrices diagonales: Sean las matrices A y B diagonales de dimensiones respectivas m x n y n x t, su producto es una matriz diagonal de dimensión m x t

$$A = diag\left((a_1, \dots, a_r), mxn\right)$$
$$B = diag\left((b_1, \dots, b_s), nxt\right)$$
$$\downarrow$$
$$AB = diag\left(\left(a_1 b_1, \dots, a_q b_q\right), mxt\right)$$
$$q = \min\{r, s\}$$
$$r = \min\{m, n\}$$
$$s = \min\{n, t\}$$

Los **autovalores** (valores propios) de las matrices diagonales cuadradas son los elementos de la diagonal.

Matrices triangulares

Distinguimos dos tipos:

triangular superior: todos los elementos por debajo de la diagonal de la matriz son 0, es decir,

$$A = \left(a_{i,j}\right) \qquad a_{i,j} = 0 \ \ si \ \ i > j$$

triangular inferior: todos los elementos por arriba de la diagonal de la matriz son 0, es decir,

$$A = \left(a_{i,j}\right) \qquad a_{i,j} = 0 \ \ si \ \ i < j$$

Ejemplos	
Triangular superior	Triangular inferior
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

Propiedades de las matrices triangulares

La **matriz traspuesta** de una triangular superior es triangular inferior y viceversa.

Si la matriz es cuadrada, su **determinante** es el producto de los elementos de la diagonal

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Por tanto, es **regular** si, y sólo si, los elementos de la diagonal son distintos de 0. En tal caso,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k,k}}$$

La **inversa** de una matriz triangular superior (inferior) es una matriz triangular superior (inferior).

El producto de matrices **triangulares superiores (inferiores)** es una matriz triangular superior (inferior).

Los **autovalores** (valores propios) de una matriz cuadrada triangular son los elementos de la diagonal.

Matriz traspuesta

La matriz **traspuesta** de una matriz A de dimensión m x n es una matriz de dimensión n x m que tiene por columnas a las filas de A. Se denota como AT (o A' si la matriz es real).

$$A = (a_{i,j}) \quad \rightarrow \quad A^T = (a_{j,i})$$

Ejemplos
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

Propiedades de la matriz traspuesta

Traspuesta de la traspuesta

$$(A^T)^T = A$$

Traspuesta de la suma

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

Traspuesta del producto

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Una matriz es igual que su traspuesta si, y sólo si, es **simétrica**

$$A \text{ simétrica } \Leftrightarrow A = A^T$$

El determinante de una matriz **regular** es igual al de su traspuesta

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Matriz adjunta

Sea A una matriz de cuadrada de dimensión n

$$A = (a_{i,j})$$

se define su **matriz adjunta** como

$$Adj(A) = (ad_{i,j}) \qquad ad_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A^{i,j})$$

donde Ai , j es la matriz que resulta al quitar la fila i y columna j a A.
Al elemento ad i , j se le denomina (i , j)- **cofactor** (o **adjunto**) de la matriz A.
Propiedades de la matriz adjunta:

Adjunta de la identidad

$$Adj(I_n) = I_n$$

Adjunta de la **traspuesta**

$$Adj(A^T) = (Adj(A))^T$$

Adjunta del producto

$$Adj(A \cdot B) = Adj(A) \cdot Adj(B)$$

Si A es de dimensión n y k un escalar

$$Adj(k \cdot A) = k^{n-1} Adj(A)$$

Si A es **regular**, su inversa es

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^T}{\det(A)}$$

Esta propiedad se usa con frecuencia para el cálculo de la inversa: ejemplos.

Ejemplo de matriz adjunta
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz simétrica

Una matriz A cuadrada es **simétrica** si es igual a su traspuesta. Es decir,

$$A = (a_{i,j}) \qquad A = A^T \quad \rightarrow \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i,j$$

Ejemplo
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A^T$

Propiedades de las matrices simétricas

La inversa de una matriz simétrica **regular** es simétrica.

La **adjunta** de una simétrica es simétrica.

La suma de simétricas es simétrica. El producto lo es si, y sólo si, también es conmutativo.

Los autovalores (valores propios) de una matriz cuadrada, real y simétrica son reales.

Autovectores (vectores propios) de autovalores distintos de una matriz cuadrada y real son ortogonales.

Una matriz cuadrada y real, A, es simétrica si, y sólo si, es diagonalizablemediante una matriz de paso ortogonal, Q. Es decir,

$QAQ^{-1} = D = diagonal$

Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada A es **antisimétrica** si su traspuesta es igual a su opuesta, es decir, AT = -A.

Matriz definida positiva

Una matriz A de dimensión m x n es **definida positiva** si para todo vector x = (x1 ,…, xn) se cumple

$$x(A^TA)x^T = (x_1, \ldots, x_n)A^TA\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$$

Si la desigualdad se cumple con el signo ≥ , diremos que es **semi** definida positiva.

Matriz (estrictamente) diagonalmente dominante por filas o columnas

Una matriz A de dimensión m x n es **diagonalmente dominante por filas** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik} \,,$$

$$1 \leq i \leq n$$

diremos que los es **por columnas** si

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} a_{kj} \,,$$

$$1 \leq j \leq n$$

Diremos que los son **estrictamente** si la desigualdad se cumple de forma estricta: >.

Matriz Hessenberg

Una matriz cuadrada A de dimensión n > 1 diremos que es **Hessenberg superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal -1 son nulos. Recordamos que la diagonal -k es la diagonal número k por debajo de la diagonal (principal).
Una matriz cuadrada A de dimensión n > 1 diremos que es **Hessenberg inferior** si todos los elementos por arriba de la diagonal -1 son nulos. Recordemos que la diagonal k es la diagonal número k por arriba de la diagonal (principal).

Ejemplos
Hessenberg superior
$H_u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
Hessenberg inferior
$H_l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.12 Determinantes y sus propiedades

En este apartado vamos a ver cuáles son todas las **propiedades de los determinantes**. También te demostramos cada propiedad con un ejemplo para que las entiendas a la perfección. Y, además, encontrarás ejercicios relacionados con las propiedades de los determinantes.

El determinante de una matriz es equivalente al determinante de su matriz traspuesta.

Ejemplo:

Ahora trasponemos la matriz 2×2 y resolvemos el determinante. Fíjate que obtenemos el mismo resultado que antes:

Propiedad 2: Determinante con una fila o columna llena de ceros

Si un determinante tiene una fila o una columna llena de ceros, el determinante da 0.

Ejemplo:

En estos dos ejemplos los determinantes dan como resultado 0. Porque la segunda fila del primer determinante es todo ceros y la tercera columna del segundo determinante también.

Propiedad 3: Determinante con dos filas o columnas iguales

Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales o múltiples, el determinante es igual a cero (0).

Por lo tanto, si existe alguna combinación lineal entre filas o columnas, es decir son linealmente dependientes, el determinante da 0.

Ejemplo:

En este caso el determinante da 0 porque las columnas 2 y 3 son iguales.

Propiedad 4: Cambiar filas o columnas de un determinante

Si se cambian dos filas o dos columnas entre sí, el determinante da el mismo resultado pero cambiado de signo.

Ejemplo:

Ahora cambiamos de orden las columnas 2 y 3 entre sí. Fíjate que el resultado es el mismo pero cambiado de signo:

Propiedad 5: Multiplicar una línea de una determinante por un escalar

Multiplicar todos los elementos de toda una fila o de toda una columna por un número real, es igual a multiplicar el resultado del determinante por dicho número.

Ejemplo:

Ahora cogemos el mismo determinante y multiplicamos toda una fila por 2. Verás que el resultado será el del determinante anterior pero multiplicado por 2, es decir 10:

Propiedad 6: Determinante del producto matricial

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto del determinante de cada matriz por separado.

Ejemplo:

Para demostrar esta propiedad de los determinantes, vamos a calcular de las dos maneras posibles el determinante de la multiplicación de las siguientes dos matrices:

Primero haremos la multiplicación de las dos matrices, y luego calcularemos el determinante de la matriz resultante:

Ahora calculamos el determinante de cada matriz por separado, y luego multiplicamos los resultados:

Como ves, hacer primero el producto matricial y después el determinante da el mismo resultado que hacer primero el determinante de cada matriz y luego la multiplicación de los resultados.

Por otra parte, esta condición no se aplica para las operaciones sumas y restas, es decir, el determinante de la suma (o resta) de dos matrices no da el mismo resultado que sumar (o restar) los determinantes de dos matrices por separad

Propiedad 7: Determinante de la matriz inversa

Si una matriz es invertible, el determinante de su inversa corresponde al inverso del determinante de la matriz original.

Ejemplo:

Vamos a verificar esta propiedad calculando primero la inversa de una matriz y luego resolviendo su determinante. Veremos que el resultado es equivalente a hallar el determinante de la matriz original e invertirlo.

De modo que invertimos la siguiente matriz y calculamos su determinante:

Y ahora resolvemos el determinante de la matriz original y hacemos su inverso:

Como puedes apreciar, los resultados de ambas operaciones son idénticos. Por lo que queda demostrada la propiedad.

Propiedad 8: Sustituir la fila de un determinante

Se puede sustituir la fila de un determinante por la suma (o resta) de la misma fila más (o menos) otra fila multiplicada por un número.

Ejemplo:

Con el siguiente ejemplo vamos a comprobar esta propiedad. Primero vamos a calcular un determinante, luego operaremos en una fila del determinante y volveremos a calcular su resultado. Ya verás como obtenemos el mismo resultado en los dos casos.

Así pues, primero calculamos un determinante 3×3 con la regla de Sarrus:

Ahora **a la fila 2 le sumamos la primera fila multiplicada por 2:**

Y resolvemos el determinante después de haber transformado una de sus filas:

En los dos casos el resultado ha sido -3. Así que queda demostrado que el resultado de un determinante no varia si se sustituye una fila por la suma de la misma fila más otra fila multiplicada por un número.

Propiedad 9: Determinante de una matriz triangular

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo:

Vamos a resolver el determinante de la siguiente matriz triangular a modo de ejemplo:

Propiedad 10: Determinante de una matriz diagonal

El determinante de una matriz diagonal es igual a la multiplicación de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo:

Vamos a sacar el determinante de la siguiente matriz diagonal como ejemplo:

3.13 Matriz inversa

Recordar que si A es una matriz cuadrada de dimensión nxn y es regular (su determinante es distinto de 0), entonces existe una matriz llamada matriz inversa de A, la cual se denota como A−1, tal que:

A−1 es de dimensión nxn

A−1 es el inverso multiplicativo de A por ambos lados, es decir,

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$
$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

Siendo In la matriz identidad de dimensión nxn.

Su determinante es

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Inversa de una matriz por el método de la adjunta

En este método tenemos que aplicar la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^T}{|A|}$$

Es decir, la matriz inversa de A es la matriz transpuesta de la matriz adjunta dividida entre el determinante de A.

Donde:

Adj (A) es la matriz adjunta de A

El exponente T significa trasposición (Matriz traspuesta) | | es el determinante de A.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz, en el caso que el determinante sea nulo la matriz no tendrá inversa.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunta.

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta.

$$\left(A^{*}\right)^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es igual al inverso del valor de su determinante por la matriz traspuesta de la adjunta.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordán

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A-1, seguiremos los siguientes pasos:

Construir una matriz del tipo M = (A | I), es decir, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

Consideremos una matriz 3x3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ampliamos con la matriz identidad de orden 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Utilizando el método Gauss vamos a transformar la mitad izquierda A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa.

F2 - F1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

F3 + F2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

F2 - F3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

F1 + F2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(-1) F2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios: Determina por el método que prefieras la inversa de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{A-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{A-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/8 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{A-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3.14 Representación matricial del sistema de ecuaciones lineales

La representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales es Ax = b donde A es la matriz de coeficientes, x es el vector de las incógnitas (que es la solución del sistema) y b es el vector formado por los términos independientes.

Ejemplo: Escribir una representación matricial del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ A es la matriz de coeficientes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ x es el vector de las incógnitas (solución)

$$b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$ b es el vector de los términos independientes

El sistema se puede escribir como

$$\underset{\textbf{A}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}} \underset{\boldsymbol{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{\textbf{b}}{\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Matriz ampliada

Se llama matriz ampliada (se representa por A*) a la matriz de los coeficientes ampliada con la columna de los términos independientes.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Es frecuente expresar la matriz de los coeficientes (A) y la matriz ampliada (A*) en una única expresión:

$$A|A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es un conjunto de números que satisface todas las ecuaciones del sistema.

Con respecto a las soluciones de los sistemas lineales no homogéneos existen tres posibilidades: que no tengan soluciones, que tenga una solución, o que tenga un número infinito de soluciones.

Para sistemas generales homogéneos x1=0, x2=0, …, xn=0 es siempre una solución que se denomina solución trivial o solución cero. Cualquier solución distinta a la trivial, es decir, en la que al menos una variable tiene un valor distinto de cero se denomina solución no trivial. Por tanto, con respecto a las soluciones de los sistemas lineales homogéneos existen dos posibilidades: que la solución trivial sea la única solución, o que tenga un número infinito de soluciones, además de la trivial.

En general un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales tiene, ya sea:

Una solución única, o un número infinito de soluciones, con lo cual se le denomina sistema consistente.

No tiene soluciones con lo cual se le denomina sistema inconsistente.

Observaciones:

Un sistema homogéneo siempre es consistente, pues siempre tiene solución trivial.

Un sistema homogéneo de m ecuaciones en n incógnitas siempre tiene un número infinito de soluciones si n □ m, es decir, si el número de incógnitas es mayor que

el número de ecuaciones, y se trata de un tipo de solución no trivial.

3.15 Método de Gauss

El método de Gauss-Jordán utiliza operaciones con matrices para resolver sistemas de ecuaciones de n número de variables.

Para aplicar este método solo hay que recordar que cada operación que se realice se aplicara a toda la fila o a toda la columna en su caso.

El objetivo de este método es tratar de convertir la parte de la matriz donde están los coeficientes de las variables en una matriz identidad. Esto se logra mediante simples operaciones de suma, resta y multiplicación.

El procedimiento es el siguiente:

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 \\ 5x - y - z = 4 \end{cases}$$

Procedemos al primer paso para encontrar su solución, anotarlo en su forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Una vez hecho esto podemos empezar a operar con las distintas filas y columnas de la matriz para transformarla en su matriz identidad, teniendo siempre en cuenta la forma de la misma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo primero que debemos hacer es transformar el 2 de la 1ª fila de la matriz original en el 1 de la 1ª fila de la matriz identidad; para hacer esto debemos multiplicar toda la 1ª fila por el inverso de 2, es decir ½.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \text{Fila 1} * \tfrac{1}{2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Luego debemos obtener los dos ceros de la primera columna de la matriz identidad, para lograr esto, buscamos el opuesto de los números que se ubicaron por debajo del 1 de la primera columna, en este caso el opuesto de 3 que será -3 y el opuesto de 5 que será -5.

Una vez hecho esto, se procederá a multiplicar los opuestos de estos números por cada uno de los elementos de la 1ª fila y estos se sumarán a los números de su respectiva columna. Por ej.: en el caso de la 2° fila, se multiplicará a -3 (opuesto de 3) por cada uno de los elementos de la 1° fila y se sumará su resultado con el número que le corresponda en columna de la segunda fila. En el caso de la 3ª fila se multiplicará a -5 (opuesto de 5) por cada uno de los elementos de la 1° fila y se sumará su resultado con el número que le corresponda en columna de la tercera fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ 1^a \text{ fila} * -3 + 2^a \text{ fila} = \\ 1^a \text{ fila} * -5 + 3^a \text{ fila} = \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -13/2 & -11/2 & -9/2 \\ 0 & -17/2 & -7/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

Nuestro siguiente paso es obtener el 1 de la 2ª fila de la matriz identidad, y procedemos de igual forma que antes, es decir multiplicamos toda la fila por el inverso del número que deseamos transformar en 1, en este caso -13/2, cuyo inverso es -2/13

Además, si observamos la tercera fila, nos damos cuenta que todos los elementos poseen el mismo denominador, entonces podemos eliminarlos multiplicando todos los elementos de la 3° fila por 2 (el denominador); si bien este no es un paso necesario para el desarrollo del método, es útil para facilitar cálculos posteriores.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -13/2 & -11/2 & -9/2 \\ 0 & -17/2 & -7/2 & 3/2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ 2^a \text{ fila} * -2/13 = \\ 3^a \text{ fila} * 2 = \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/13 & 9/13 \\ 0 & -17 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora queremos obtener el 0 que se ubica en la 3ª fila, 2ª columna de la matriz identidad, para hacer esto buscamos el opuesto del número que se ubica en la 3ª fila, 2ª columna de la matriz con la cual estamos operando, en este caso -17, cuyo opuesto será 17; lo que hacemos ahora es multiplicar este número por todos los elementos de la 2ª fila y sumar esos resultados con el número que le corresponde en columna de la

3ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/13 & 9/13 \\ 0 & -17 & -7 & 3 \end{array}\right) \quad 2^{a}\text{ fila} * 17 + 3^{a}\text{ fila} = \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/13 & 9/13 \\ 0 & 0 & 96/13 & 192/13 \end{array}\right)$$

A esta altura podemos observar como la matriz con la cual estamos operando empieza a parecerse a la matriz identidad.

Nuestro siguiente paso es obtener el 1 correspondiente a la 3ª fila, 3ª columna de la matriz identidad, ahora bien, aplicamos el mismo procedimiento con el que estábamos trabajando, es decir que vamos a multiplicar toda la 3ª fila por el inverso del número que se encuentre en la posición de la 3ª fila, 3ª columna, en este caso 96/13, cuyo inverso será 13/96.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/13 & 9/13 \\ 0 & 0 & 96/13 & 192/13 \end{array}\right) \quad 3^{a}\text{ fila} * 13/96 = \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/13 & 9/13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Luego debemos obtener los dos ceros de la tercera columna de la matriz identidad, para lograr esto, buscamos el opuesto de los números que se ubicaron por encima del 1 de la 3ª columna de la matriz con la cual estamos operando, en este caso 11/13 y ½ cuyos opuestos serán - 11/13 y -½, respectivamente.

Una vez hecho esto, se procederá a multiplicar los opuestos de estos números por cada uno de los elementos de la 3ª fila y estos se sumarán a los números de su respectiva columna. Por ej.: en el caso de la 2° fila, se multiplicará a - 11/13 (opuesto de 11/13) por cada uno de los elementos de la 3° fila y se sumaran sus resultados con el número que le corresponda en columna de la segunda fila. En el caso de la 1ª fila se multiplicará a -½ (opuesto de ½) por cada uno de los elementos de la 3° fila y se sumaran sus resultados con el número que le corresponda en columna de la primera fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/13 & 9/13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 3^{a}\text{ fila} * -1/2 + 1^{a}\text{ fila} = \\ 3^{a}\text{ fila} * -11/13 + 2^{a}\text{ fila} = \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El último paso que debemos realizar es obtener el 0 de la 1ª columna, 2ª fila de la matriz identidad, para hacer esto buscamos el opuesto del número que se ubica en la 1ª columna, 2ª fila de la matriz con la que estamos operando, en este caso es 3/2, cuyo opuesto será -3/2, lo que hacemos ahora es multiplicar este número por todos los elementos de la 2ª fila y sumar esos resultados con el número que le corresponde en columna de la 1ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^{3}/_{2} & 0 & -½ \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad 2^{a}\text{ fila } * -{}^{3}/_{2} + 1^{a}\text{ fila} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como podemos observar hemos llegado al modelo de la matriz identidad que buscábamos, y en la cuarta columna hemos obtenido los valores de las variables, correspondiéndose de este modo: x= 1; y= -1; z= 2

UNIDAD IV

NÚMEROS COMPLEJOS, ECUACIONES Y SUS RAICES

4.1 Concepto y operaciones de números complejos

Los números complejos conforman un grupo de cifras resultantes de la suma entre un número real y uno de tipo imaginario. Un número real, de acuerdo a la definición, es aquel que puede ser expresado por un número entero (4, 15, 26) o decimal (1.25; 38.12; 29.85). En cambio, un número imaginario es aquél cuyo cuadrado es negativo. El concepto de número imaginario fue desarrollado por Leonhard Euler en 1777, cuando le otorgó el nombre de i (de "imaginario").

Unidad imaginaria

La unidad imaginaria es el número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra i.

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

Potencias de la unidad imaginaria

La unidad imaginaria i es definida como la raíz cuadrada de –1. Así, $i^2 = -1$. i^3 puede ser escrito como $(i^2)\, i$, que es igual a $(-1)\, i$ o simplemente $-i$. i^4 puede ser escrito como $(i^2)(i^2)$, que es igual a $(-1)(-1)$ o 1. i^5 puede ser escrito como $(i^4)\, i$, que es igual a $(1)\, i$ o i.

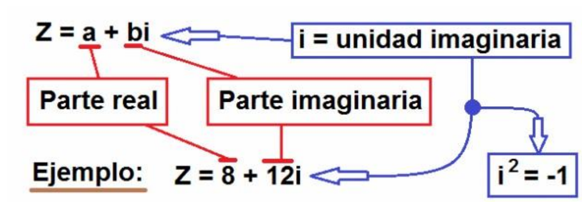
Por lo tanto, el ciclo se repite cada cuatro potencias, como se muestra en la tabla.

Potencias de 10	
$i^1 = i$	$i^0 = 1$
$i^2 = -1$	$i^{-1} = -i$
$i^3 = -i$	$i^{-2} = -1$
$i^4 = 1$	$i^{-3} = i$
$i^5 = i$	$i^{-4} = 1$

i 6 = –1	i -5 = –i
i 7 = –i	i -6 = –1
i 8 = 1	i -7 = i
i 9 = i	i -8 = 1
etc.	etc.

Números complejos en forma binómica

Al número a + bi le llamamos número complejo en forma binómica. El número “a” se llama parte real del número complejo y el número “b” es la parte imaginaria.



Si b = 0 el número complejo se reduce a un número real ya que a + 0i = a.

Si a = 0 el número complejo se reduce a bi, y se dice que es un número imaginario puro.

Operaciones de números complejos (forma binomica)

Suma y resta de números complejos

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$

$(5 + 2\,i) + (-8 + 3\,i) - (4 - 2i) =$

$= (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)\,i = -7 + 7i$

Multiplicación de números complejos

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$

$(5 + 2\,i) \cdot (2 - 3\,i) =$

$=10 - 15i + 4i - 6\,i2\,(-1) = 10 - 11i + 6 = 16 - 11i$

División de números complejos

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{3+2i}{1-2i}=\frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}=\frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2}=\frac{3+8i-4}{1+4}=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

Números complejos en forma polar y trigonométrica

$z=a+bi$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ -------- modulo

$|z| = r$ $\quad$ $\arg(z) = \alpha$ $\quad$ $z = r_\alpha$

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\quad\begin{cases}\dfrac{+b}{+a}=\alpha\\[2mm]\dfrac{b}{-a}=180^{\text{o}}-\alpha\\[2mm]\dfrac{-b}{-a}=180^{\text{o}}+\alpha\\[2mm]\dfrac{-b}{a}=360^{\text{o}}-\alpha\end{cases}$$

$a=r\cdot\cos\alpha$ $\qquad$ $b=r\cdot\operatorname{sen}\alpha$

Binómica	z = a + bi

Polar	$z = r_\alpha$

trigonométrica	z = r (cos α + i sen α)

EJEMPLO:

$z = -1 + \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ -------- Modulo

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^{o}$ --------- Argumento

z = 2120° ----------- Forma polar

z = 2120°

z = 2 · (cos 120° + i sen 120°) -------Forma trigonométrica

$a = 2 \cdot \cos 120^{o} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$b = 2 \cdot \text{sen} 120^{o} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$z = -1 + \sqrt{3}\,i$

Ejercicios (Operaciones con números complejos)

(−3 + 3i) + (7 – 2i) =

(−3 + 3i) – (7 – 2i) =

(3+i) + (1-3i)

(-5+3i) - (6+4i)

(0.5-4i) +(-1.5-i)

(-3.8+2.4i) - (1.3+0.5i)

(-2-2i) (1+3i)

(2+3i) (5-6i)

(2+3i) (-2-3i)

(-1-2i) (-1+2i)

$$\frac{2+4i}{4-2i}$$

$$\frac{1-4i}{3+i}$$

$$\frac{5+i}{-2-i}$$

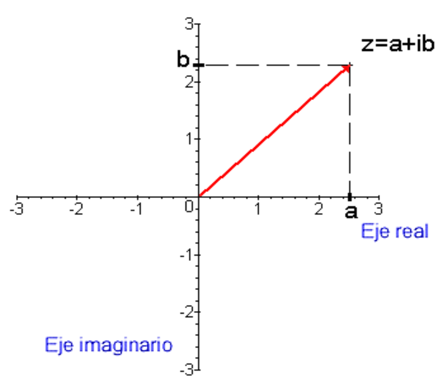
$$\frac{4-2i}{i}$$

4.2 Representación geométrica

Así como los números reales se representan geométricamente por medio de una recta, es posible dar una representación geométrica de los números complejos usando un sistema de coordenadas cartesianas.

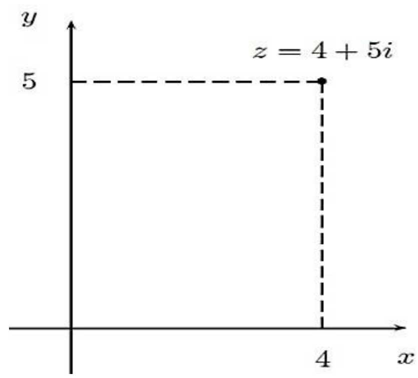
Haremos ahora una identificación entre los números complejos y los puntos del plano. A cada número complejo Z = a + bi, se le asocia el punto del plano, P (a, b).

De esta forma, se obtiene una representación geométrica o Diagrama de Argand de Z, ver la figura:



En esta representación, la componente real de Z se copia sobre el eje X, que será llamado eje real y la componente imaginaria sobre el eje Y, que será llamado eje imaginario. El conjunto de todos estos puntos, será llamado Plano Complejo.

Ejemplo. El complejo Z = 4 + 5i se puede representar en el Plano Complejo, para lo cual ubicamos primero al punto de coordenadas (4, 5). Una vez hecho esto se tendrá la representación de Z, ver la figura siguiente:



Ejercicio. Representa en el plano complejo, el Número complejo W = -6 + 2i

4.3 Los números complejos como un campo

A pesar de la enorme riqueza y utilidad práctica de los Números Reales R existen situaciones que no pueden ser resueltas en este conjunto. Por ejemplo, se sabe que no existe un número real que sea solución de la ecuación x2 + 1 = 0.

Este y otros casos motivan la necesidad de ampliar el campo de los números reales. Específicamente, la ecuación ya mencionada x2 + 1 = 0 permite motivar la definición de la

Unidad Imaginaria: i, como aquel número (no real) que satisface i2 + 1 = 0, o sea, i: = √ −1.

Propiedades Fundamentales

1. A la forma de escritura $z = x + yi$ se le denomina *Forma Binomia* del número complejo z. Este nombre tiene sentido pues también es posible escribir el número complejo z como par ordenado $z = (x, y)$.

2. En el número complejo $z = x + yi$ el número real x se denomina *Parte Real* y el número real y se denomina *Parte Imaginaria*.

3. Dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ se dicen iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

4. La suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ es el número complejo z definido como

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

5. La Multiplicación entre el número real α y el número complejo $z = x + yi$ está dada por

$$\alpha z = (\alpha x) + (\alpha y)i.$$

6. El Inverso Aditivo del número complejo $z = x + yi$ es el número com-

plejo w tal que $z+w=0$, con $0=0+0i$. Se anota

$$w=-z=(-1)\cdot z=(-x)+(-y)i.$$

7. La multiplicación de dos números complejos $z_1=x_1+y_1i$ y $z_2=x_2+y_2i$ es el número complejo z definido como

$$z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

8. Dado el número complejo $z=x+yi$ se define su *Conjugado* como el número complejo $\overline{z}=x-yi$.

9. El Inverso Multiplicativo del número complejo $z=x+yi$ está dado por
$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i.$$
Recuerde que $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1$.

10. El Módulo o Magnitud de un número complejo $z=x+yi$ se define como $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Se puede constatar fácilmente que

$$|z|^2=z\cdot\overline{z}.$$

4.4 Gráfica de ecuaciones cuadrática

Una ecuación cuadrática es una ecuación polinomial de grado 2. La forma estándar de una ecuación cuadrática es

0 = *ax* 2 + *bx* + *c* donde *a, b,* y *c* son todos los números reales y *a* ≠ 0.

Si reemplazamos 0 con *y* , entonces obtenemos una función cuadrática

y = *ax* 2 + *bx* + *c* cuya gráfica será una parábola .

El eje de simetría de esta parábola será la recta $x = -\frac{b}{2a}$. El eje de simetría pasa a través del vértice, y por lo tanto la coordenada en *x* del vértice es $-\frac{b}{2a}$. Sustituya $x = -\frac{b}{2a}$ en la ecuación para encontrar la coordenada en *y* del vértice. Sustituya unos pocos valores de *x* en la ecuación para obtener los valores correspondientes de *y* y grafique los puntos. Únalos y extienda la parábola.

Ejemplo 1:

Grafique la parábola $y = x^2 - 7x + 2$.

Compare la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$ para encontrar los valores de *a* , *b* , y *c* .

Aquí, *a* = 1, *b* = –7, y *c* = 2.

Use los valores de los coeficientes para escribir la ecuación del eje de simetría .

La gráfica de una ecuación cuadrática en la forma *y* = *ax* 2 + *bx* + *c* tiene como su eje de simetría la recta $x = -\frac{b}{2a}$. Así, la ecuación del eje de simetría de la parábola dada es $x = \frac{-(-7)}{2(1)}$ o $x = \frac{7}{2}$.

Sustituya $x = \frac{7}{2}$ en la ecuación para encontrar la coordenada en *y* del vértice.

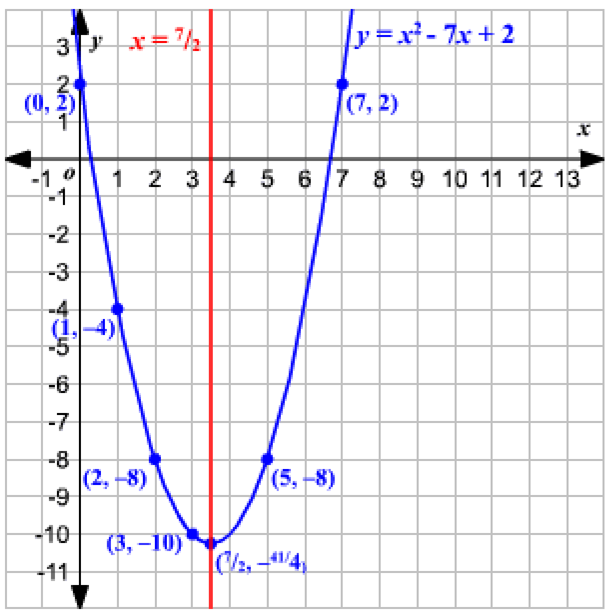
$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 2 \\ &= \frac{49 - 98 + 8}{4} \\ &= -\frac{41}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del vértice son $\left(\frac{7}{2}, -\frac{41}{4}\right)$.

Ahora, sustituya unos pocos valores de *x* en la ecuación para obtener los valores correspondientes de *y* .

x	$y = x^2 - 7x + 2$
0	2
1	–4
2	–8
3	–10
5	–8
7	2

Grafique los puntos y únalos para obtener la parábola.



4.5 Ecuaciones cuadráticas incompletas

Es necesario considerar que en una ecuación de segundo grado o cuadrática puede faltar el término bx o el término independiente c, pero no el término ax^2 pues en ese caso la ecuación ya no sería de segundo grado. A estas ecuaciones se les llama cuadráticas incompletas.

Si falta el término bx, la ecuación es incompleta y tendrá la forma: $ax^2 + c = 0$ Ésta recibe el nombre de cuadrática pura.

Si falta el término independiente c, la ecuación es incompleta y tendrá la forma: $ax^2 + bx = 0$. Se le llama cuadrática mixta.

Naturalmente, el procedimiento para resolverlas tiene que ser diferente, dada la forma distinta de ellas: $ax^2 + c = 0$ y $a^2 + bx = 0$

Así, se tienen ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c =0$

Resuélvase la siguiente ecuación: $3x^2 - 48 = 0$

Como su forma general es $ax^2 + c = 0$, conviene resolver simultáneamente tanto la ecuación como su forma general para obtener, con ello, una fórmula que se aplique a este tipo de ecuaciones.

Tómese en cuenta que es necesario emplear las propiedades de la igualdad y realizar las operaciones indicadas, dejando en el primer miembro al término que contiene a la incógnita (ax^2) y en el segundo miembro al término independiente (c), como se ve a continuación.

Ecuación	Forma general
$3x^2 - 48 = 0$	$ax^2 + c = 0$
$3x^2 - 48 + 48 = 0 + 48$	$ax^2 + c - c = 0 - c$
$3x^2 = 48$	$ax^2 = -c$
$\frac{3x^2}{3} = \frac{48}{3}$	$\frac{ax^2}{a} = -\frac{c}{a}$
$x^2 = 16$	$x^2 = -\frac{c}{a}$
$x = \pm\sqrt{16}$	$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Las dos raíces cuadradas de 16 son :

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$$

Por otra parte, la expresión $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ puede utilizarse como fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas puras.

Ejemplos:

a) $5x^2 - 20 = 0$

$a = 5$

$c = -20$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Sustituyendo:

$$x = \pm \sqrt{-\left[\frac{-20}{5}\right]} = \pm \sqrt{-(-4)} = \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 5(2)^2 - 20 &= 0 \\ 5(4) - 20 &= 0 \\ 20 - 20 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5(-2)^2 - 20 &= 0 \\ 5(4) - 20 &= 0 \\ 20 - 20 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

b) $2x^2 - 18 = 0$

$a = 2$

$c = -18$

Sustituyendo:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Comprobación

$$x = \pm \sqrt{-\left[\frac{-18}{2}\right]} = \pm \sqrt{-(-9)} = \pm \sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 2(3)^2 - 18 &= 0 \\ 2(9) - 18 &= 0 \\ 18 - 18 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2(-3)^2 - 18 &= 0 \\ 2(9) - 18 &= 0 \\ 18 - 18 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Así, hay ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$

Resuélvase la siguiente ecuación $3x^2 - 6x = 0$.

Al observar que su forma general es $ax^2 + bx = 0$, conviene resolver simultáneamente la ecuación y su forma general para obtener una fórmula que pueda ser aplicada al resolver ecuaciones de este tipo, empleando la factorización y una característica muy especial de la multiplicación: Si uno de los factores es cero, el producto es cero.

Ecuación $3x^2 - 6x = 0$

Forma general $ax^2 + bx = 0$

Se toma en cuenta que x es factor común en el primer miembro y se factoriza:

$x\,(3x - 6) = 0$

$x\,(ax + b) = 0$

Luego, se considera que el producto de cualquier número por 0 es 0, lo que significa que uno de los factores (x o 3 x - 6) es 0, o los dos factores equivalen a 0, ya que 0 x 0 = 0. Si x= 0, entonces se expresa x_1 =0.

Si $3x - 6 = 0$ y $ax + b = 0$, se tiene :

$$
\begin{aligned}
3x - 6 + 6 &= 0 + 6 \\
3x &= 6 \\
\frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\
x &= 2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
ax + b - b &= 0 - b \\
ax &= -b \\
\frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\
x &= \frac{-b}{a}
\end{aligned}
$$

Luego, en una cuadrática mixta la incógnita tiene 2 valores, siendo uno de ellos 0, o sea:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= \frac{-b}{a}
\end{aligned}
$$

La expresión $x_2 = \frac{-b}{a}$ se puede aplicar como fórmula para obtener la solución de las cuadráticas mixtas.

Ejemplos:

a) $2x^2 + 10x = 0$

$a = 2 \qquad b = 10$

$x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(10)}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 2(-5)^2 + 10(-5) &= 0 \\ 2(25) + 10(-5) &= 0 \\ 50 - 50 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

b) $4x^2 + 4x = 0$

$a = 4 \quad b = 4$

$x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(4)}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 4(-1)^2 + 4(-1) &= 0 \\ 4(1) + 4(-1) &= 0 \\ 4 - 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Cuando las ecuaciones cuadráticas incompletas se pueden resolver con seguridad y eficiencia, se tiene la posibilidad de dar solución a una gran cantidad de problemas.

Ahora bien, el problema enunciado al inicio de este texto dio origen a la ecuación $x^2 + 3x - 70 = 0$, que es una ecuación cuadrática completa. El procedimiento para resolverla se verá más adelante

4.6 Ecuaciones cuadráticas completas

Recordamos que la forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado es

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde $a \neq 0$, b y c los coeficientes.

Una ecuación cuadrática es **completa** cuando los coeficientes b y c también son distintos de 0.

Discriminante

Llamamos **discriminante**, Δ, de la ecuación *ax 2 + bx + c = 0* a

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El signo del discriminante informa acerca del número de soluciones de la ecuación:

Si Δ es 0, la ecuación tiene **una única solución** (de **multiplicidad** 2)

Si Δ es menor que 0, **no existen soluciones** (reales)

Si Δ es mayor que 0, existen **dos soluciones** (reales) distintas (de multiplicidad 1).

Soluciones

Las **soluciones** (o **raíces**) de la ecuación de segundo grado (en la forma anterior) vienen dadas por la **fórmula cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Vamos a resolver la siguiente ecuación

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Sólo tenemos que aplicar la fórmula:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \\ &= \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3 + 1}{2} = -1 \\ \dfrac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones de la ecuación son $x = -1$ y $x = -2$.

4.7 Fórmula de solución general

Las ecuaciones cuadráticas se usan mucho en la ciencia, los negocios y la ingeniería. Las ecuaciones cuadráticas se usan comúnmente en situaciones donde las cosas se multiplican y ambas dependen de la misma variable. Por ejemplo, cuando trabajamos con el área, si ambas dimensiones se escriben en términos de la misma variable, puedes usar una ecuación cuadrática. Ya que la cantidad de un producto vendido depende del precio, a veces usas una ecuación cuadrática para representar la ganancia como un producto del precio y de la cantidad vendida. Las ecuaciones cuadráticas también se usan cuando se trata con la gravedad, como la trayectoria de una pelota o la forma de los cables en un puente colgante.

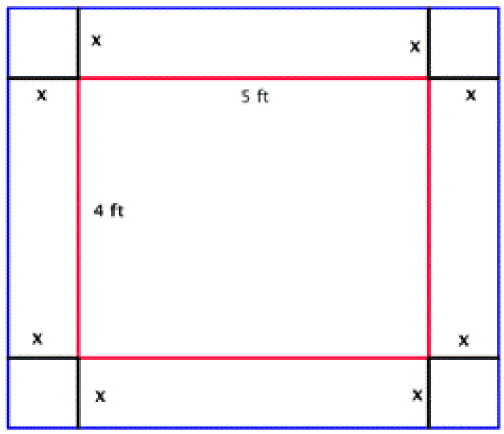
Una aplicación muy común y fácil de entender es la altura de una pelota que se deja caer al suelo desde un edificio. Como la gravedad hará que la pelota se acelere al caer, una ecuación cuadrática puede usarse para estimar su altura y el tiempo que tarda en llegar al suelo. Nota: Esta ecuación no es muy precisa, porque la fricción del aire frena un poco a la pelota. Pero para nuestros propósitos, el error no es importante.

Ejemplo		
Problema	Una pelota se deja caer de un edificio a 200 pies del suelo. Su velocidad inicial es −10 pies por segundo. (El negativo significa que viaja hacia el suelo.) La ecuación h = −16t2 – 10t + 200 puede usarse para modelar la altura de la pelota después de t segundos. ¿cómo cuánto tardará la pelota en llegar al suelo?	
	h = -16t2 – 10t + 200	Cuando la pelota golpea el suelo, su altura es 0. Sustituye 0 por h.
	0 = -16t2 – 10t + 200	
	−16t2 – 10t + 200 = 0	
	$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(-16)(200)}}{2(-16)}$	Esta ecuación es difícil de resolver factorizando o completando el cuadrado, por lo que la resuelves usando la fórmula cuadrática,

		$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. En este caso, la variable es t en lugar de x. a = −16, b = −10 y c = 200.
	$t = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 12800}}{-32}$ $= \dfrac{10 \pm \sqrt{12900}}{-32}$	Simplifica. Ten cuidado con los signos.
	t es aproximadamente −3.86 o 3.24.	Usa una calculadora para encontrar ambas raíces.
		Considera las raíces lógicamente. Una solución, −3.86, no puede usarse como el tiempo porque es un número negativo. La otra solución, 3.24 segundos, debe ser cuando la pelota golpea el suelo.
Respuesta	La pelota golpeará el suelo aproximadamente 3.24 segundos después de haber sido soltada.	

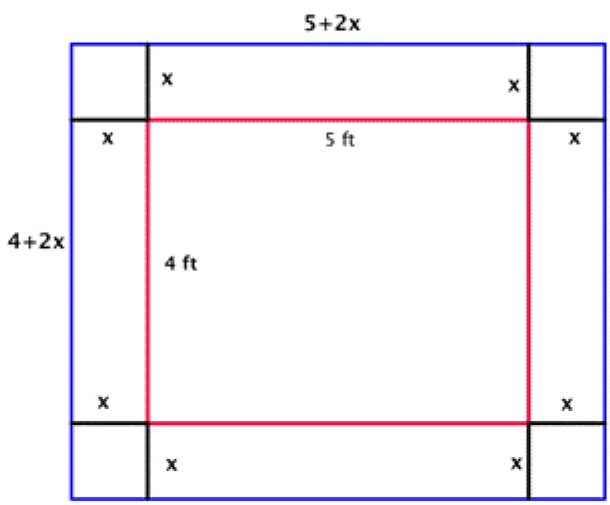
El problema de área siguiente no parece incluir una fórmula cuadrática de ningún tipo y el problema se parece a algo que ya has resuelto muchas veces multiplicando. Pero para resolverlo, necesitarás una ecuación cuadrática.

Ejemplo	
Problema	Bob hizo una colcha que mide 4 ft x 5 ft. Él tiene 10 pies cuadrados de tela que puede usar para añadir un borde alrededor de la colcha. Qué tan ancho debe hacer el borda para usar toda la tela? (El borde debe tener el mismo ancho en los cuatro lados.)



Dibuja el problema, Como no conoces el ancho del borde, usarás la letra x para representarlo.

en el diagrama, la colcha original se indica por el rectángulo rojo. El borde es el área entre las líneas rojas y azules.



Como a cada lado de la colcha original de 4 y 5 se le añade un borde de ancho x, la longitud de la colcha con el borde será de 5 + 2x y el ancho será de 4 + 2x.

(Ambas dimensiones están escritas en términos de la misma variable, ¡y vas a multiplicarlas para sacar el área! Es aquí donde podrías empezar a pensar que se usará una ecuación cuadrática para resolver el problema.)

Área del borde = El área del rectángulo azul menos el área del rectángulo rojo

Sólo estás interesado en el área de los bordes. Escribe la expresión para el área del borde.

Área del borde = $(4 + 2x)(5 + 2x) - (4)(5)$

10 = (4 + 2x)(5 + 2x) – 20

Hay 10 pies cuadrados de tela para el borde, por lo que el área del borde será 10.

10 = 20 + 8x + 10x + 4x2 – 20

Multiplica (4 + 2x)(5 + 2x).

10 = 18x + 4x2

Simplifica.

0 = 18x + 4x2 – 10

o

4x2 + 18x – 10 = 0

Resta 10 de ambos lados para que tengas una ecuación cuadrática en la forma estándar y puedas aplicar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de la ecuación.

2(2x2 + 9x – 5) = 0

$$2\left(2x^2+9x-5\right) = 0$$

$$\frac{2\left(2x^2+9x-5\right)}{2} = \frac{0}{2}$$

$$2x^2+9x-5=0$$

Factoriza el máximo factor común, 2, para que puedas trabajar con una ecuación equivalente más simple, 2x2 + 9x – 5 = 0.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Usa la fórmula cuadrática. En este caso, a = 2, b = 9 y c = −5.

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4(2)(-5)}}{2(2)}$$

$x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4}$	Simplifica.
$x = \frac{-9+11}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$	Encuentra las soluciones, asegurándote de que el ± evalúa ambos valores.
o	
$x = \frac{-9-11}{4} = \frac{-20}{4} = -5$	
Respuesta El ancho del borde debe ser de 0.5 ft.	Ignora la solución x = −5, porque el ancho no puede ser negativo.

4.8 Raíces y teorema De Moivre

El teorema de Moivre aplica procesos fundamentales de álgebra, como las potencias y la extracción de raíces en números complejos. El teorema fue enunciado por el reconocido matemático francés Abraham de Moivre (1730), quien asoció los números complejos con la trigonometría.

Abraham Moivre realizó esta asociación por medio de las expresiones del seno y coseno. Este matemático generó una especie de fórmula a través de la cual es posible elevar un número complejo z a la potencia n, que se trata de un número entero positivo mayor o igual 1.

El teorema de Moivre establece lo siguiente:

Si z = r (cos ∞ + i sen ∞) y n es cualquier entero positivo, entonces: zn = rn (cos n∞ + i sen n∞)

Ejemplo. Sea Z = 2 (cos30° + i sen30°).

Calcule la potencia de orden cinco de este número, es decir, Z5.

$$Z^5 = 2^5(cos(5 \cdot 30^o) + i\ sen(5 \cdot 30^o))$$
$$Z^5 = 32(cos150^o + i\ sen150^o)$$

Ejemplo. Calcular Z^6, donde $Z = 3 + 4\ i$.

Solución. En primer lugar, llevamos Z a la forma polar. Para hallar el módulo hacemos

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por otro lado, el ángulo viene dado por

$$\theta = arctg\ \frac{4}{3} = 53{,}13^o$$

Por lo tanto, tenemos a Z en forma polar

$$Z = 5(cos53{,}13^o + i\ sen53{,}13^o)$$

calculamos ahora Z^6 por intermedio de 2.8

$$Z^6 = 5^6(cos(6 \cdot 53{,}13^o) + i\ sen(6 \cdot 53{,}13^o))$$

$$Z^6 = 15625(cos318{,}78^o + i\ sen318{,}78^o)$$

Finalmente, llevamos este resultado a la forma cartesiana

$$Z^6 = 15625(0{,}7522 - i\ 0{,}6590)$$

$$Z^6 = 11753{,}12 - 10296{,}12\ i$$

Ejercicios

Calcular Z3, donde Z=3+2i

Calcular Z3, donde Z=5-3i

Calcular Z4, donde Z=1 + i

Calcular Z4, donde Z=3-2i

Calcular Z3, donde Z=4-5i

Raíz n-esima de un número complejo

Los pasos para hallar la raíz de un número complejo son los siguientes:

Pasar el número complejo de su forma binomica a su forma polar.

Todo número complejo tiene tantas raíces como el valor de su índice por lo tanto realizar lo siguiente: $\sqrt[n]{r_{\propto}}$ donde el modulo $\sqrt[n]{r}$ y el argumento $\frac{\propto + k * 360°}{n}$

$\propto$ = Argumento

360° = es una constante en la formula n = Índice de la raíz k = 0,1, 2…(n-1)

Ejemplo

Determina las raíces cuartas de -8-√192i

Modulo = $\sqrt{(-8)^2 + \left(-\sqrt{192}\right)^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = \mathbf{16}$

Argumento = $- = \frac{\sqrt{\quad}}{} = 60$

Aplicando las propiedades del argumento visto con anterioridad = 180 + 60 = 240°

Forma Polar $16_{240°}$

dado que el ejercicio solicita raíces cuartas: $r = \sqrt[4]{16} = \mathbf{2}$

Determinar el argumento usando la siguiente fórmula: $\frac{\propto + k*360°}{n}$ dado que son cuatro raíces K tomara los valores 0,1,2,3.

K1 $= \frac{240°+0*360°}{4} = \frac{240}{4} = 60°$

K2 $= \frac{240°+1*360°}{4} = \frac{600}{4} = 150°$ K

3 $= \frac{240°+2*360°}{4} = \frac{960}{4} = 240°$

K4 $= \frac{240°+3*360°}{4} = \frac{1320}{4} = 330°$

Las raíces del ejercicio son:

Ejercicios

Hallar las raíces cuartas de 2 + 2i.

Hallar las raíces cuadradas de 5 + 12 i

Hallar las raíces cuartas de 1 + i

4.9 Regiones en el plano complejo

A continuación, veremos una serie de ejemplos que muestran cómo se puede graficar una región del plano complejo que cumple con ciertas condiciones.

Ejemplo

Hallar la región del plano complejo determinada por: {z ∈ C:|z+2|≤1}

Resolución:

Si $z = x + yi$, resulta:

$$|x + yi + 2| \leq 1$$

$$|(x + 2) + yi\ | \leq 1$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \leq 1$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

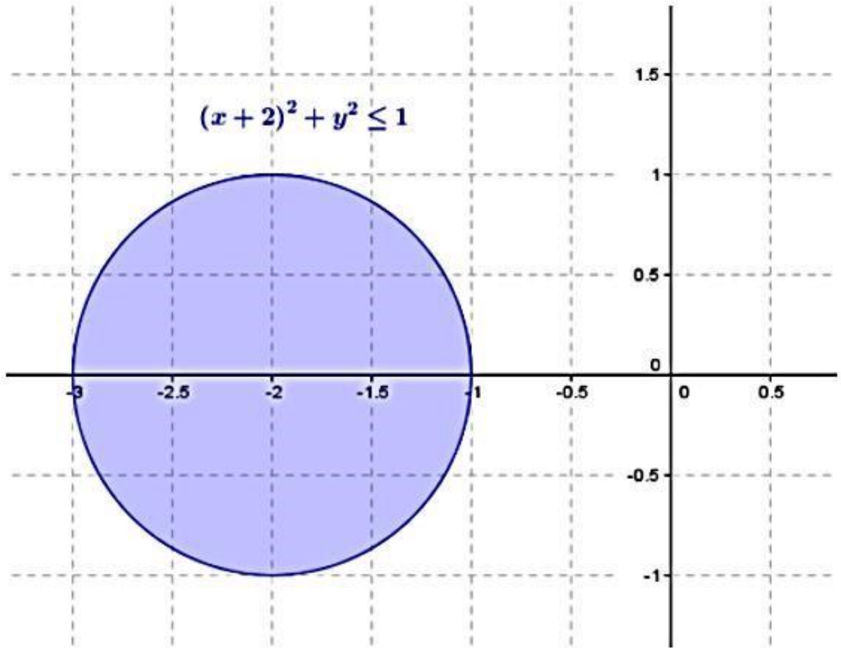
$$(x + 2)^2 + y^2 \leq 1$$

Podemos sustituir el símbolo de $\leq$ por el de $=$ para obtener la frontera o borde de la región:

$$(x + 2)^2 + y^2 = 1$$

Ésta es la ecuación de una circunferencia con centro en $(-2, 0)$ y radio 1.

Veamos una gráfica de la región:



Son todos los puntos que están a distancia menor o igual que 1 del punto (-2,0)

4.10 Teorema fundamental del álgebra

En Matemáticas y más específicamente Álgebra superior, Análisis

Matemático, Geometría y funciones de variables complejas, es un teorema que plantea que todo polinomio no constante de una variable tiene al menos una raíz.

Del presente se deriva que todo polinomio p(x) de una variable no constante tiene la misma cantidad de raíces reales o complejas que su grado n, resultado teórico que es vital para el cálculo matemático.

Carl Friedrch Gauss ha sido uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Contribuyó a muchas ramas de las matemáticas. En 1798, a los 20 años de edad, Gauss demostró el teorema fundamental del Álgebra que dice lo siguiente:

Todo polinomio de grado n tiene n raíces. Es decir que la ecuación

an xn + an-1 xn-1 + an-2 xn-2 + an-3 xn-3 + ... + a3 x3 + a2 x2 + a1 x + a0 = 0

tiene n soluciones. Una forma en la que podemos interpretar este teorema es como sigue, ya que se puede factorizar un polinomio dadas las raíces y hay n raíces para todo polinomio de este grado, entonces:

f(x)=an xn + an-1 xn-1 + an-2 xn-2 + an-3 xn-3 + ... + a3 x3 + a2 x2 + a1 x + a0 = (x - r1)(x - r2)...(x - rn)

donde r1, r2, ..., rn son las raíces de f(x).

4.11 Cálculo de raíces

La raíz de un polinomio es un número tal que hace que el polinomio valga cero. Es decir que, cuando resolvamos un polinomio a cero, las soluciones son las raíces del polinomio.

El grado del polinomio es la cantidad de raíces que tiene. Las raíces que puede tener un polinomio son de tres tipos: raíces positivas, raíces negativas y raíces complejas. Las raíces también se pueden presentar con valores repetidos.

Raíces de un Polinomio de grado 2

Ejemplo:

f(x) = x2 + x - 12 Cuando lo igualamos a cero y lo resolvemos tenemos:

x2 + x - 12 = 0 Igualando a cero.

(x + 4)(x - 3) = 0 Factorizando.

x = - 4 Solución 1 x = 3 Solución 2

Puesto que x1 = - 4 y x2 = 3 son soluciones de f(x) entonces f (-4) = 0 y f (3) = 0.

Decimos entonces que x = - 4 y x = 3 son raíces del polinomio f(x)= x2 + x – 12.

Otra forma de obtener las raíces de un polinomio de grado 2, es decir de la forma ax2 + bx +c, es haciendo uso de la ecuación cuadrática o formula general, de la siguiente manera:

$$x^2+2x-8=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-8)}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

Raíces de un polinomio de grado n.

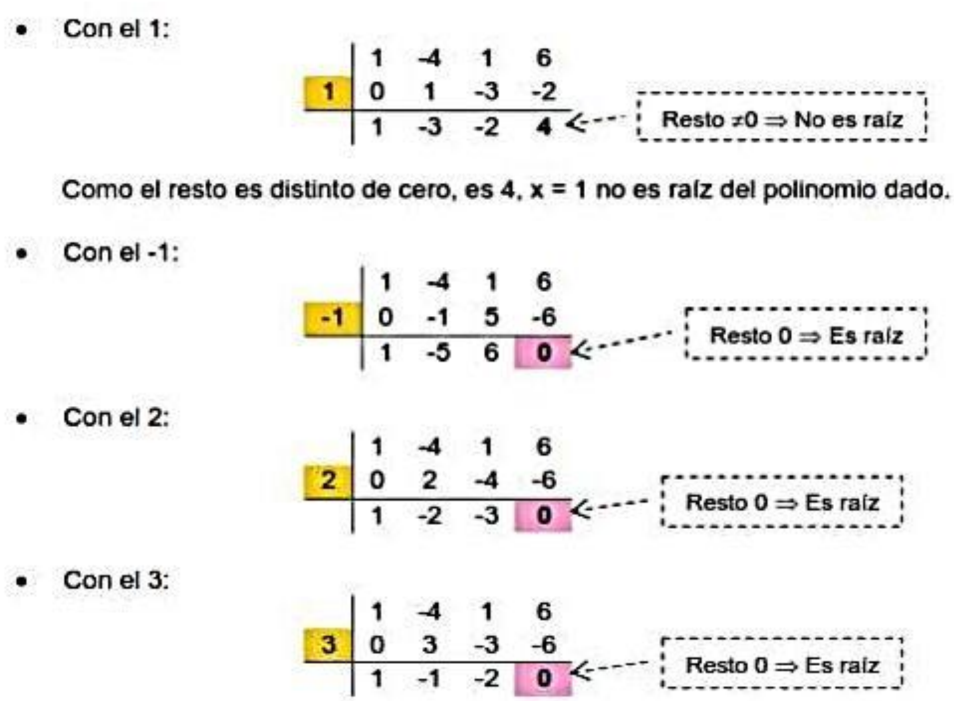
En este caso, la regla de Ruffini será útil para encontrar las raíces enteras del polinomio. Las posibles raíces las buscaremos entre los divisores del término independiente. Iremos probando cada uno de ellos para ver si el resto da 0, en cuyo caso, se tratará de una raíz.

El número candidato a raíz es el que colocaremos a la izquierda al aplicar Ruffini.

Ejemplo: Halla las raíces del siguiente polinomio:

P(x) = x3 – 4x2 + x + 6

x3 – 4x2 + x + 6 = 0. Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del termino independiente 6, que son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$ Empezaremos a comprobar.



Ya no es necesario seguir probando con el resto de los divisores, ya que, un polinomio tiene, como mucho, tantas raíces reales como indica su grado. Como es de grado 3 y hemos encontrado 3 raíces, ya no puede haber más. Por tanto, los ceros de este polinomio son: x = -1, x = 2 y x = 3.

	1	0	-13	0	36
-2	0	-2	4	18	-36
	1	-2	-9	18	0
2	0	2	0	-18	
	1	0	-9	0	
3	0	3	9		
	1	3	0		

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 18: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 9: ±1, ±3, ±9

x4-13x2+36

Los divisores de 36 son: $\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{4}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{9}, \pm\mathbf{12}, \pm\mathbf{18}, \pm\mathbf{36}$

Como es de grado 4 y hemos conseguido 4 raíces, no es necesario buscar más. Los ceros de este polinomio son: x=-2, x=2, x=-3, x=3

x4-5x3+4x2+3x+9

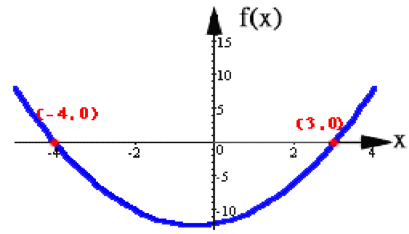
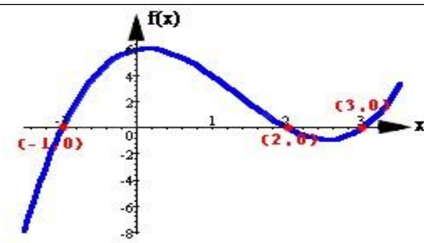
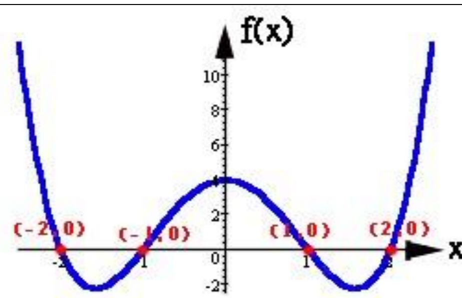
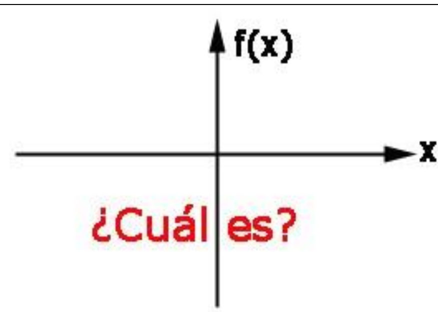
	1	-5	4	3	9
3	0	3	-6	-6	-9
	1	-2	-2	-3	0
3	0	3	3	3	
	1	1	1	0	

Si continuamos probando con 1 y -1, que serían los divisores de 1 (el ultimo termino independiente), no obtendríamos ningún resto 0. Entonces no hay más raíces enteras. Tendríamos que ver si existen otras raíces. Para ello trabajaremos con el ultimo polinomio cociente obtenido, que es de grado 2 y podemos aplicar la fórmula para ecuaciones de segundo grado.

Ultimo Polinomio cociente: C(x) = x2 + x + 1

x2 + x + 1 ----- $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ------- No tiene raíces reales, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto, el polinomio inicial P(x) tiene solo una raíz real, x = 3, que es doble.

EJERCICIOS

Función	Raíces	Gráfica
x2 + x - 12	- 4 y 3	
x3 - 4x2 + x +6	- 1 2 3	
x4 - 5x2 + 4	2 1 1 2	
x3 - 2x2 - 5x + 6	1 - 2 3	

Bibliografía básica y complementaria

Allen, A. (2010). Matemáticas I. México: Pearson educación. Recuperado el 31 de mayo de 2012, de la base de datos de Bibliotechnia de la biblioteca Digital de la UVEG.

Cuéllar, J.A. (2008). Matemáticas I Álgebra (2ª. ed.). México: McGraw-Hill.

De Oteyza, et. al. Temas Selectos de Matemáticas. Prentice Hall, México 1988. F. Ayres Jr., Teoría y problemas de matrices. McGraw-Hill, 1991.
Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E., Álgebra Lineal. México: Publicaciones Cultural, 1986.

F. Granero, Álgebra y geometría analítica. McGraw-Hill, 1992.

Gentile, E. R., Aritmética Elemental. Washington: OEA, 1985

Grossman, S. I., Álgebra Lineal. México: McGraw-Hill, 1996 J. Arvesú y otros, Álgebra lineal y aplicaciones. Síntesis, 1999.
J. de Burgos, Álgebra lineal. McGraw-Hill, 2000.

J. Rojo e I. Martín, Ejercicios y problemas de álgebra. McGraw-Hill, 1994.

J. Rojo, Álgebra lineal. McGraw-Hill, 2001.

J. Flaquer y otros, Curso de álgebra lineal. Ediciones Universidad de Navarra, 1996.

M. Castellet e I. Llerena, Álgebra lineal y geometría. Reverté, 1991.

M. Anzola y otros, Problemas de álgebra. (Especialmente tomos 1, 3, 6, 7) Madrid, 1981.

Martínez, M. A. (1996). Aritmética y Álgebra. México: McGraw-Hill. S. I. Grossman, Álgebra lineal. McGraw-Hill, 1995.
Swokowski, Earl. Algebra Universitaria. CECSA, México 1987.

Wisniewski, P. M., & Gutiérrez, A. L. (2011). Introducción a las matemáticas universitarias. México: McGraw-Hill Interamericana. Recuperado el 22 de junio de 2012, de la base de datos de Bibliotechnia de la e-libro Digital de la UVEG.