# ANTOLOGIA

# ALGEBRA LINEAL

*INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES*

*SEGUNDO CUATRIMESTRE*

# Marco Estratégico de Referencia

## ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

## MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

## VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

## ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

## ESLOGAN

“Mi Universidad”

## ALBORES


Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

# ALGEBRA LINEAL

## Objetivo de la materia:

El alumno conocerá y comprenderá los conceptos básicos de lógica matemática, álgebra booleana, grafos y algebra lineal para aplicarlos a modelos matemáticos que resuelvan problemas de la mecatrónica.

## Criterios de evaluación:

| No | Concepto | Porcentaje |
|---|---|---|
| 1 | Actividad en plataforma | **30%** |
| a) | Primera Actividad | 15% |
| b) | Segunda Actividad | 15% |
| 2 | Actividades áulicas o practicas | **20%** |
| 3 | Examen | **50%** |
| **Total de Criterios de evaluación** | | **100%** |

# INDICE

# UNIDAD I: LOGICA MATEMATICA Y CONJUNTOS

## 1.1. Proposiciones simples y compuestas.

En lógica y matemática, las proposiciones son sentencias o afirmaciones a las que puede dárseles un valor verdadero o falso, según sea el caso, y que expresan una relación lógica de algún tipo entre un sujeto (S) y un predicado (P). Las proposiciones se relacionan entre sí mediante los juicios, y son la base del sistema deductivo e inductivo de la lógica formal.

Ahora bien, una primera clasificación de las proposiciones ofrece dos tipos fundamentales de proposición, tomando en cuenta su estructura interna:

- Proposiciones simples. O proposiciones atómicas, poseen una formulación sencilla desprovista de negaciones y nexos (conjunciones o disyunciones), por lo que constituyen un único término lógico.
- Proposiciones compuestas. O proposiciones moleculares, poseen dos términos unidos por un nexo, o emplean negaciones dentro de su formulación, resultando en estructuras más complejas.

### Proposiciones simples

Una proposición simple es toda aquella en la que no hay operadores lógicos. O sea, aquellas cuya formulación es, justamente, simple, lineal, sin nexos ni negaciones, sino que expresa un contenido de manera sencilla.

Por ejemplo: “El mundo es redondo”, “Las mujeres son seres humanos”, “Un triángulo tiene tres lados” o “3 x 4 = 12”.

### Proposiciones compuestas

Por el contrario, las proposiciones compuestas son aquellas que contienen algún tipo de operadores lógicos, como negaciones, conjunciones, disyunciones, condicionales, etc. Generalmente poseen más de un término, o sea, están formadas por dos proposiciones simples entre las cuales hay algún tipo de vínculo lógico condicionante.

Por ejemplo: "Hoy no es lunes" (~p), "Ella es abogada y viene de Irlanda" (pˆq), "Llegué tarde porque había mucho tráfico" (p→q), "Comeré tortilla o me iré sin almorzar" (pˇq).

**Otros tipos de proposiciones**

De acuerdo a la lógica aristotélica, existen los siguientes tipos de proposiciones:

- **Universales afirmativas.** Todo S es P (donde S es universal y P es particular). Por ejemplo: "Todos los humanos deben respirar".
- Universales negativas. Ningún S es P (donde S es universal y P es universal). "Ningún humano vive bajo el agua".
- Particulares afirmativas. Algún S es P (donde S es particular y P es particular). "Algunos humanos viven en Egipto".
- Particulares negativas. Algún S no es P (donde S es particular y P es universal). "Algunos humanos no viven en Egipto".

**Valor de verdad de una proposición**

El valor veritativo o valor de verdad de una proposición es un valor que indica en qué medida es verdadera (V) o falsa (F), a veces representado como 1 y 0.

Conociendo este dato podemos saber cuándo una proposición es una contradicción (verdadera y falsa al mismo tiempo), y nos permite trasladar su enunciado a otros sistemas lógico-formales, como al álgebra o al código binario.

Para determinar el valor de verdad de una proposición, debemos expresarla primero en lenguaje simbólico, formularla lógicamente, e introducir los valores de verdadero y falso en cada uno de sus términos, para formar lo que se conoce como una "tabla de la verdad", en la que se expresan las posibilidades del valor de verdad de la proposición.

Esto puede resumirse de la siguiente manera:

| p | q | p ˆ q | p ˇ q | p→q | p↔q | pΔq |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | F |
| V | F | F | V | F | F | V |
| F | V | F | V | V | F | V |
| F | F | F | F | V | V | F |

Los símbolos arriba utilizados significan:

- ˆ (y): conjunción.
- ˇ (o): disyunción.
- → (Si… entonces): condicional.
- ↔ (Si y solo sí): bicondicional
- Δ (o bien… o bien): disyunción exclusiva

Así, por ejemplo, la proposición "Si y solo si me gano la lotería, entonces compraré una casa" se expresaría simbólicamente como: p ("me gano la lotería") ↔ q ("compraré una casa"), ya que, en caso de no ganar la lotería, no podría comprarla. Sus valores de verdad serían:

- Verdadero. En caso de que gane la lotería y compre la casa (p= V q = V), o que no gane la lotería y no compre la casa (p = F q = F).
- Falso. En los casos restantes, o sea, que no gane la lotería, pero igual compre la casa (p = F q = V), o de que gane la lotería y no compre nada (p = V q = F).

## 1.2. Conectivos lógicos.

En la lógica proposicional, las conectivas lógicas se tratan como funciones de verdad. Es decir, como funciones que toman conjuntos de valores de verdad y devuelven valores de verdad. Por ejemplo, la conectiva lógica «no» es una función que, si toma el valor de verdad V, devuelve F, y si toma el valor de verdad F, devuelve V. Por lo tanto, si se aplica la función «no» a una letra que represente una proposición falsa, el resultado será algo verdadero. Si es falso que «está lloviendo», entonces será verdadero que «no está lloviendo».

El significado de las conectivas lógicas no es nada más que su comportamiento como funciones de verdad. Cada conectiva lógica se distingue de las otras por los valores de verdad que devuelve frente a las distintas combinaciones de valores de verdad que puede recibir. Esto quiere decir que el significado de cada conectiva lógica puede ilustrarse mediante una tabla que despliegue los valores de verdad que la función devuelve frente a todas las combinaciones posibles de valores de verdad que puede recibir.

**CONECTORES LÓGICOS**

Son palabras que se representan por símbolos, se utilizan para negar una proposición simple o enlazan proposiciones simples.

| CONECTORES LÓGICOS | EXPRESIÓN EN EL LENGUAJE NATURAL | SÍMBOLO | REPRESENTACIÓN |
|---|---|---|---|
| NEGACIÓN | No es cierto que | $\sim$ | $\sim p$ |
| CONJUNCIÓN | ...y... | $\wedge$ | $p \wedge q$ |
| DISYUNCIÓN INCLUSIVA | ...o... | $\vee$ | $p \vee q$ |
| CONDICIONAL | Si...entonces... | $\rightarrow$ | $p \rightarrow q$ |
| BICONDICIONAL | ...Si sólo si... | $\leftrightarrow$ | $p \leftrightarrow q$ |
| DISYUNCIÓN EXCLUSIVA | o...o... | $\Delta$ | $p \; \Delta \; q$ |

### 1.2.1. Conjunción, disyunción, negación, condicional y bicondicional.

**Conjunción:** En razonamiento formal, una conjunción lógica ( $\wedge$ ) entre dos proposiciones es un conector lógico cuyo valor de la verdad resulta en *cierto* sólo si ambas proposiciones son ciertas, y en *falso* de cualquier otra forma. Existen diferentes contextos dónde se utiliza la conjunción lógica.

En lenguajes formales, la palabra "y" se utiliza en español para simbolizar una conjunción lógica. La noción equivalente en la teoría de conjuntos es la intersección ( $\cap$ ). En algebra Booleana, la conjunción como operador binario entre dos variables se representa con el símbolo de punto medio ( $\cdot$ )

**Disyunción:** En razonamiento formal, una disyunción lógica ( $\vee$ ) (en específico, una disyunción inclusiva) entre dos proposiciones es un conector lógico cuyo valor de la verdad resulta en *falso* sólo si ambas proposiciones son falsas, y en *cierto* de cualquier otra forma. Existen diferentes contextos dónde se utiliza la disyunción lógica.

En lenguajes formales, la palabra "ó" se utiliza en español para simbolizar una disyunción lógica. Se debe distinguir entre el "ó" inclusivo y el "ó" exclusivo, este artículo se refiere al "ó" inclusivo. La noción equivalente en la teoría de conjuntos es la unión ( $\cup$ ). En algebra Booleana, la disyunción como operador binario entre dos variables se representa con el símbolo demás ( + ).

**Condicional:** El condicional material, también conocido como implicación material, condicional funcional de verdad o simplemente condicional, es una constante lógica que conecta dos proposiciones. El condicional material intenta ser la versión formal del condicional en el lenguaje natural, el cual se expresa por medio de palabras como las siguientes:

- Si llueve, entonces voy al cine.
- Voy al cine si llueve.
- Cuando llueve, voy al cine.

Simbólicamente, el condicional material se suele denotar de las siguientes maneras:

$A \to B$

$A \supset B$, y en ocasiones:

$A \Rightarrow B$

Donde A y B son proposiciones cualesquiera. Las variables A y B se conocen respectivamente como el *antecedente* y el *consecuente* del condicional.

**Bicondicional:** En matemáticas y lógica, un bicondicional, (también llamado equivalencia o doble implicación, en ocasiones abreviado como ssi, sii, o syss), es una proposición de la forma «P si y solo si Q» y afirma que la proposición *P* será verdadera exclusivamente cuando *Q* también lo sea, así como también *P* será falsa cuando *Q* lo sea. Otra forma de expresar el bicondicional es decir que *Q* es una condición necesaria y suficiente para *P*

**Negación:** En lógica y matemática, la negación, también llamada complemento lógico, es una operación sobre proposiciones, valores de verdad, o en general, valores semánticos. Intuitivamente, la negación de una proposición es verdadera cuando dicha proposición es falsa, y viceversa. En lógica clásica la negación está normalmente identificada con la función de verdad que cambia su valor de *verdadero* a *falso* y viceversa. En Lógica intuicionista, de acuerdo a la interpretación BHK, la negación de una proposición *p* es la proposición cuyas pruebas son las refutaciones de *p*. En la semántica de Kripke, donde los valores semánticos de las fórmulas son conjuntos de posibles mundos, la negación de *p*, es su complemento.

| Conectiva | Expresión en el lenguaje natural | Ejemplo | Símbolo en este artículo | Símbolos alternativos |
|---|---|---|---|---|
| Negación | no | No está lloviendo. | $\neg$ | $\sim$ |
| Conjunción | y | Está lloviendo y está nublado. | $\wedge$ | & |
| Disyunción | o | Está lloviendo o está soleado. | $\vee$ | |
| Condicional material | si... entonces | Si está soleado, entonces es de día. | $\rightarrow$ | $\supset$ |
| Bicondicional | si y sólo si | Está nublado si y sólo si hay nubes visibles. | $\leftrightarrow$ | $\equiv$ |

## 1.3. Tablas de verdad.

Las tablas de verdad es una estrategia de la lógica simple que permite establecer la validez de varias propuestas en cuanto a cualquier situación, es decir, determina las condiciones necesarias para que sea verdadero un enunciado propuesto, permitiendo clasificarlos en tautológicos (resultan verdaderos durante cualquier situación) contradictorias (son enunciados falsos en la mayoría de los casos) o contingentes (enunciados que no pueden será tantos verdaderos como falsos no existen tendencia a un solo sentido).

La construcción de la tabla está fundamentada en la utilización de una letra para las variables del resultado y las mismas se cumplen se dicen que son verdaderas, en el caso contrario de que no se cumpla se les asigna el apelativo de falsas, por ejemplo: Enunciado: "Si nos mudamos, mi perro se muere"**.** Variables: A: Si se muda**-** B: el perro se muere.

Si se dice que es verdadero a ambas variables se les asigna la letra (V) y representa la positividad del enunciado, si algunas de las variables no se cumplen se les asigna la letra (F) esto no representa la falsedad del enunciado ya que con cumplirse una sola variable se puede designar como verdadero, eso dependerá del enunciado. Cuando ambos valores resultan verdaderos en todas las ocasiones se dice que existe una conjugación en el enunciado, en cambio sí se obtiene dos resultados verdaderos y luego uno verdadero y el otro falso se dice que existe una disyunción.

### 1.3.1. Elaboración de tablas de verdad.

Algoritmo para construir una tabla de verdad de una fórmula en lógica de proposiciones.

1. Escribir la fórmula con un número arriba de cada operador que indique su jerarquía. Se escriben los enteros positivos en orden, donde el número 1 corresponde al operador de mayor jerarquía. Cuando dos operadores tengan la misma jerarquía, se le asigna el número menor al de la izquierda.
2. Construir el árbol sintáctico empezando con la fórmula en la raíz y utilizando en cada caso el operador de menor jerarquía. O sea, del número mayor al menor.
3. Numerar las ramas del árbol en forma secuencial empezando por las hojas hacia la raíz, con la única condición de que una rama se puede numerar hasta que estén numerados los hijos. Para empezar con la numeración de las hojas es buena idea hacerlo en orden alfabético, así todos obtienen los renglones de la tabla en el mismo orden para poder comparar resultados.
4. Escribir los encabezados de la tabla las fórmulas siguiendo la numeración que se le dio a las ramas en el árbol sintáctico.
5. Asignarles a los átomos, las hojas del árbol, todos los posibles valores de verdad de acuerdo al orden establecido. Por supuesto que el orden es arbitrario, pero

como el número de permutaciones es n!, conviene establecer un orden para poder comparar resultados fácilmente.

6. Asignar valor de verdad a cada una de las columnas restantes de acuerdo al operador indicado en el árbol sintáctico utilizando la tabla de verdad. Conviene aprenderse de memoria las tablas de los operadores, al principio pueden tener un resumen con todas las tablas mientras se memorizan.
7. La última columna, correspondiente a la fórmula original, es la que indica los valores de verdad posibles de la fórmula para cada caso.

## Ejemplos

**EJERCICIO 6.07**

Comprobar por tablas de verdad si las siguientes fbfs son o no *simultáneamente satisfacibles*:

$\neg(p \rightarrow q) \qquad p \vee q$

| $p$ | $q$ | $\neg(p \rightarrow q)$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | V | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

Las dos fbfs son *simultáneamente satisfacibles*, ya que son V a la vez en la 2ª interpretación.

**EJERCICIO 6.08**

Comprobar por tablas de verdad si las siguientes fbfs son o no *simultáneamente satisfacibles*:

$\neg(p \rightarrow q) \qquad (\neg q \rightarrow \neg p)$

| $p$ | $q$ | $\neg(p \rightarrow q)$ | $\neg q \rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | V | F |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

Las dos fbfs son *simultáneamente insatisfacibles*, ya que en ninguna de las 4 interpretaciones resultan V a la vez.

**EJERCICIO 6.09**

Comprobar por tablas de verdad si es o no *válido* el siguiente esquema argumentativo:

$$p \to q \models p \vee q \to q$$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $p \vee q$ | $\to q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | V |
| | | | 1ª | 2ª |

El esquema es *válido*, ya que en las tres interpretaciones en que la premisa es V también es V la conclusión.

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $p \to q$ | $r \to s$ | $p \vee r$ | $q \vee \neg s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | V | F | V | F | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | V | V | F | V | V | F |
| V | F | V | F | F | F | V | V |
| V | F | F | V | F | V | V | F |
| V | F | F | F | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | V | F | V | F | V | V |
| F | V | F | V | V | V | F | V |
| F | V | F | F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V | V | V | F |
| F | F | V | F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V | V | F | F |
| F | F | F | F | V | V | F | V |

El esquema es *inválido* ya que hay una interpretación (la 13ª) en la que, siendo V las tres premisas, la conclusión es F.

**EJERCICIO 6.11**

Comprobar por tablas de verdad si las fbfs siguientes son o no *equivalentes*:

$$(p \to q) \to q \;\dashv\models\; p \vee q$$

| $p$ | $q$ | $(p \to q)$ | $\to q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F |
| | | 1ª | 2ª | |

Las dos fbfs son *equivalentes*, ya que tienen el mismo valor en todas las interpretaciones.

## 1.3.2. Tautologías y contradicciones.

En las disciplinas de la lógica y la retórica, se emplea el término tautología para referirse a aquellos enunciados autoevidentes, obvios o redundantes, o sea, que resultan verdaderos desde cualquier posible interpretación, pues se explican y afirman a sí mismos. Por ello, una tautología es un argumento falaz, inválido, vacío.

Este término proviene de las voces griegas *tauto* (“lo mismo”) y *logos* (“palabra” o “saber”), y su formulación lógica a menudo consiste en *A* = *A*, es decir, como algo que es idéntico a sí mismo, y por lo tanto no está realmente proponiendo nada. Esto generalmente ocurre en las proposiciones que incluyen la conclusión en sus premisas, como “se es lo que se es” o “lo vi con mis propios ojos”. En retórica, los pleonasmos son casos de tautología.

La forma lógica más simple de descubrir una tautología es a través de la formulación de tablas de la verdad: aquellos casos que sean verdaderos sin importar cuáles sean los valores expresados, serán necesariamente tautológicos.

### Ejemplos de tautología

Son ejemplos de tautología los siguientes enunciados:

- Un hombre es un hombre.
- Corrí la distancia con mis propios pies.
- Todo lo que está de más, sobra.
- Las cosas cayeron hacia abajo.
- Subí hacia arriba de la escalera.
- El frío es causado por el descenso de la temperatura.

Y en términos lógicos, un ejemplo de tautología es la expresión: $(p \wedge q) \rightarrow p$, cuya tabla de la verdad sería la siguiente:

| p | q | p ^ q | (p ^ q) → p |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

**Contradicción y contingencia**

Además de la tautología, a menudo se habla en lógica de la contradicción y la contingencia, de la siguiente manera:

**Contradicción**. Al contrario de las tautologías, que son ciertas en cualquier formulación posible, las contradicciones son falsas sean cuales sean los valores de sus premisas, ya que en su estructura argumental se niega la conclusión que se desea obtener. Un ejemplo de ello sería el enunciado "caímos hacia las alturas", o el enunciado lógico p ^ p' cuando p nunca es igual a p'.

**Contingencia**. En este caso, hablamos de fórmulas cuyo valor verdadero o falso no dependerá del valor de sus premisas, de modo que no será ni verdadera ni falsa. O lo que es lo mismo: una contingencia es un enunciado que es verdadero en al menos un mundo posible y falso en otro, de modo que siempre dependerá del caso que sea. Un ejemplo expresado en términos lógicos es el enunciado siguiente: $(p \leftrightarrow q) \vee [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$.

## 1.3.3. Reglas de inferencia.

Las reglas de inferencia son construcciones de un sistema que permiten determinar información nueva a partir de la información ya existente.

Las reglas de inferencia se modelan como implicaciones, donde el antecedente de la implicación está compuesto de una conjunción de proposiciones llamadas premisas y el consecuente se llama conclusión. Su aplicación a un conjunto de premisas para llegar a una conclusión se llama argumento y consideramos que es válido si la conclusión es necesariamente verdadera cuando las premisas son verdaderas. Esta condición se cumple cuando la implicación es una tautología.

## Reglas de inferencia más comunes

| Regla de inferencia | Implicación | Nombre |
|---|---|---|
| $\alpha$<br>$\beta$<br>$\therefore \alpha \wedge \beta$ | $((\alpha) \wedge (\beta)) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$ | Introducción de la conjunción (IC) |
| $\alpha$<br>$\therefore \alpha \vee \beta$ | $\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$ | Introducción de la disyunción (ID) |
| $\alpha \wedge \beta$<br>$\therefore \alpha$ | $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$ | Eliminación de la conjunción (EC) |
| $\alpha \Rightarrow \beta$<br>$\alpha$<br>$\therefore \beta$ | $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$ | *Modus ponens* (MP) |
| $\alpha \Rightarrow \beta$<br>$\neg\beta$<br>$\therefore \neg\alpha$ | $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha$ | *Modus tollens* (MT) |
| $\alpha \vee \beta$<br>$\neg\alpha$<br>$\therefore \beta$ | $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \Rightarrow \beta$ | Silogismo disyuntivo (SD) |
| $\alpha \Rightarrow \beta$<br>$\beta \Rightarrow \gamma$<br>$\therefore \alpha \Rightarrow \gamma$ | $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$ | Silogismo hipotético (SH) |
| $\alpha \Rightarrow \gamma$<br>$\beta \Rightarrow \delta$<br>$\alpha \vee \beta$<br>$\therefore \gamma \vee \delta$ | $((\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \delta) \wedge (\alpha \vee \beta)) \Rightarrow (\gamma \vee \delta)$ | Dilema constructivo (DC) |
| $\alpha \Rightarrow \gamma$<br>$\beta \Rightarrow \delta$<br>$\neg\gamma \vee \neg\delta$<br>$\therefore \neg\alpha \vee \neg\beta$ | $((\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \delta) \wedge (\neg\gamma \vee \neg\delta)) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ | Dilema destructivo (DD) |
| $\alpha \wedge \beta$<br>$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$<br>$\therefore \gamma$ | $((\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma))) \Rightarrow \gamma$ | Demostración condicional |
| $\alpha \Rightarrow \gamma$<br>$\beta \Rightarrow \gamma$<br>$\therefore (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$ | $((\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma)$ | Demostración por casos |
| $\alpha \Rightarrow \beta$<br>$\therefore \alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$ | $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ | Absorción (A) |

## 1.4. Conjuntos y subconjuntos.

Lo primero que debemos saber es qué es un conjunto. Podemos definirlo como una colección de objetos, a los que llamamos elementos, que tienen alguna característica común.

Los conjuntos pueden tener elementos de cualquier tipo: números, letras, objetos, personas… Por ejemplo, este conjunto contiene frutas:


**Clasificación de conjuntos**

Los conjuntos pueden clasificarse en función de su número de elementos, en:

**Finito**

Si tiene una colección que se pueda contar, aunque sea difícil. Por ejemplo, el conjunto de frutas incluye todos los tipos de fruta que hay en el mundo. Aunque sea difícil, se podrían contar todos los tipos de fruta del mundo, por lo que es finito.

## Infinito

Si tiene una colección que no se pueda terminar de contar nunca. Por ejemplo, el conjunto de todos los números pares, que son infinitos, es un conjunto infinito.

Relaciones entre conjuntos

En función de sus relaciones entre ellos, los conjuntos pueden ser:

## Conjuntos disjuntos

Son aquellos que no tienen ningún elemento en común.

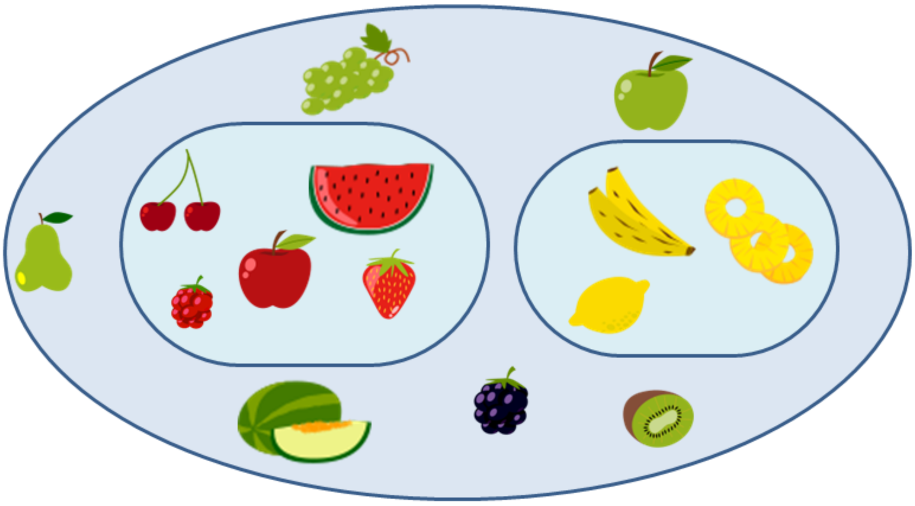
Por ejemplo, los conjuntos de frutas y de animales son disjuntos, porque no hay ninguna fruta que sea un animal, ni ningún animal que sea una fruta:


## Conjuntos subconjuntos

Se da cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen al otro.

Por ejemplo, el conjunto de frutas rojas y el conjunto de frutas amarillas son subconjuntos del conjunto de frutas, puesto que todas las frutas rojas son frutas, y todas las frutas amarillas son frutas también:

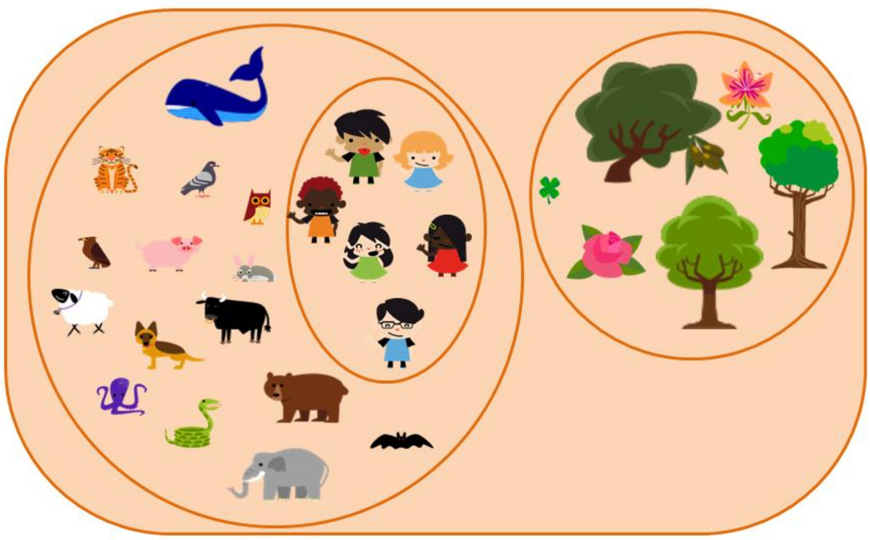
**SUBCONJUNTOS:**



El conjunto de los seres vivos es muy grande: tiene muchos subconjuntos, por ejemplo:

- Las plantas son un subconjunto de los seres vivos
- Los animales son un subconjunto de los seres vivos
- Los seres humanos son un subconjunto de los animales

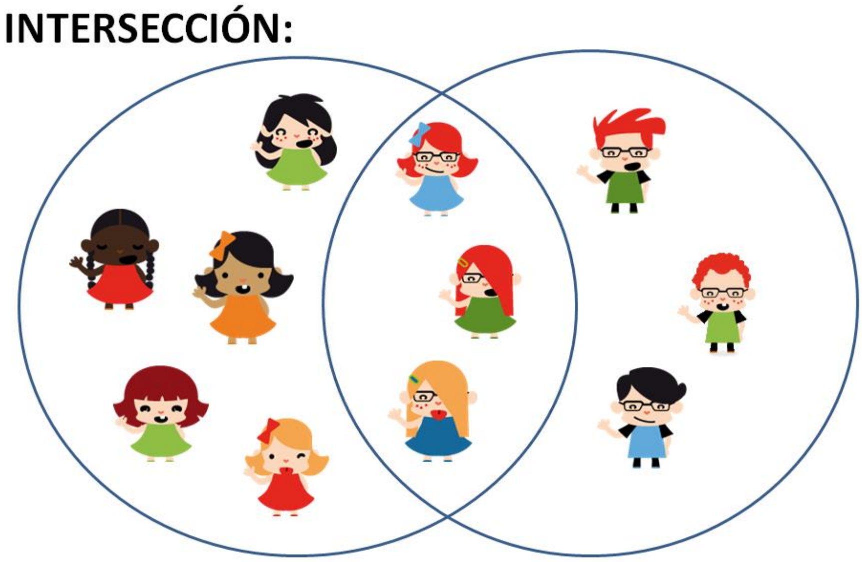
**SUBCONJUNTOS:**



**Conjunto intersección**

A veces, varios conjuntos son distintos, pero comparten algunos elementos comunes. Entonces se define una zona de intersección entre ambos, que contiene todos estos elementos comunes.

Por ejemplo, tenemos un conjunto de niñas, y otro conjunto de personas con gafas. Como hay niñas que tienen gafas, forman parte de la intersección de los dos conjuntos:




## 1.5. Conjuntos finitos e infinitos, conjunto vacío, subconjunto y conjunto universal.

### Conjuntos finitos

Los conjuntos finitos son aquellos cuya cardinalidad, o número de elementos de contiene, es igual a un número natural.

Un conjunto finito, en otras palabras, es aquel que posee un número de elementos que pueden contarse. Siendo lo opuesto a un conjunto infinito, donde los elementos son incontables.

Una manera más formal de expresar que un conjunto es finito es que los elementos de ese conjunto, al que llamaremos M, pueden emparejarse con los elementos del conjunto

{1, 2, …, n}, al que denominaremos N. Este es una sucesión de números enteros donde cada elemento es igual al anterior, más la unidad.

Así, se pueden emparejar uno a uno los elementos de M y N (lo que se conoce como correspondencia biunívoca), sin dejar fuera ningún elemento de los dos conjuntos.

**Ejemplos de conjunto finitos**

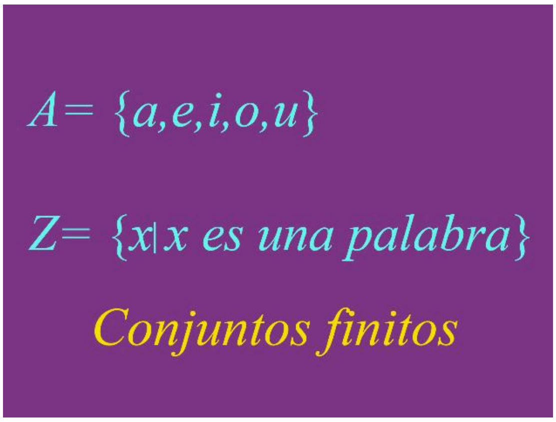
Algunos ejemplos de conjuntos finitos serían los planteados a continuación:

- Los números enteros impares mayores a 13 y menores a 29: {15, 17, 19, 21, 23, 25, 27}
- Los océanos de la tierra: Atlántico, Pacífico, Indico, Ártico, Antártico
- La lista de los veinte alumnos que pertenecen a un salón de clases.

**Propiedades de los conjuntos finitos**

Entre las principales propiedades de los conjuntos finitos, se encuentran las que se exponen a continuación:

- La unión de dos o más conjuntos finitos da como resultado un conjunto finito.
- La intersección (los elementos en común) de un conjunto finito con uno o más conjuntos es finita.
- El subconjunto de un conjunto finito también es finito.
- El subconjunto C de un conjunto finito M se caracteriza por tener una cantidad menor de elementos que M. Es decir, se cumple que: Si $C \subsetneq M$ y $|M| = n$, entonces $|C| < n$ (El símbolo $\subsetneq$ significa que C es un subconjunto propio de M. Es decir, que todos los elementos de C están contenidos en M, pero existe, al menos, un elemento de M que no está en C).
- El conjunto potencia de un conjunto finito M, que comprende todos los subconjuntos que pueden formarse con los elementos del conjunto M (incluyendo el conjunto vacío o ∅), es finito y posee $2^n$ elementos, siendo n el número de elementos de M. Por ejemplo, si tenemos: {1, 3, 41}. El conjunto potencia sería: {∅, {1,3}, {1,41}, {3,41}, {1}, {3}, {41}, {1,3,41}}




**Conjunto infinito**

Los conjuntos infinitos son aquellos que contienen una cantidad ilimitada de elementos. Es decir, aquellos que se extienden de forma indefinida.

En otras palabras, un conjunto infinito es lo opuesto a un conjunto finito, que es aquel que posee una cantidad limitada o acotada de elementos.

Cabe precisar que el hecho de que un conjunto sea infinito no significa que no sea numerable. Para entender este punto, veamos el ejemplo del conjunto de números naturales enteros, que es infinito, pero es numerable, pues es posible identificar el elemento 1, 2, 3, etc.

Desde otro punto de vista, un conjunto M es infinito cuando no puede emparejarse con otro conjunto {1, 2, …, n}, al que denominaremos N. Este último es una sucesión de números enteros donde cada elemento es igual al anterior, más la unidad.

De manera más formal, se dice que no existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto M y el conjunto N, siendo este último finito. Además, cabe señalar que M y N no son equipotentes. Es decir, para cada elemento de M no existe un elemento de N.

Ejemplos de conjuntos infinitos

**Algunos ejemplos de conjuntos infinitos son los siguientes:**

- La cantidad de granos de arena en una playa.
- Los números impares enteros mayores a 13.
- Las gotas de agua que contiene el mar.

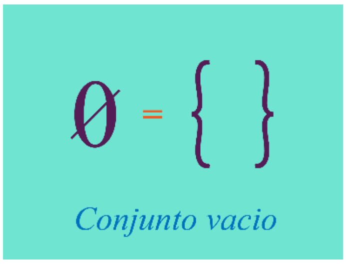
**Propiedades de conjuntos infinitos**

Las propiedades de los conjuntos infinitos son las siguientes:

- La unión de los conjuntos A y B es un conjunto infinito, siempre y cuando uno de esos conjuntos, A o B, es infinito.
- Cualquier conjunto que tenga como subconjunto un conjunto infinito, también es un conjunto infinito.
- El conjunto potencia de un conjunto infinito es, a su vez, infinito. En este sentido, debemos recordar que el conjunto potencia de un conjunto M comprende todos los subconjuntos que pueden formarse con los elementos de dicho conjunto, incluyendo el conjunto nulo o ∅. Por ejemplo, si tenemos: {7, 13, 58} El conjunto potencia sería: {∅, {7,13}, {7,58}, {13,58}, {7}, {13}, {58}, {7,13,58}}

**Conjunto vacío**

Consideremos la existencia de un conjunto que no tiene elementos, este es llamado conjunto vacío. Para representar dicho conjunto usamos el reconocido símbolo del vacío, como se muestra en la imagen de abajo:




También, haciendo uso de la descripción por extensión, representamos el conjunto vacío por medio de los corchetes . Como el conjunto vacío no tiene elementos, no podemos ubicar ningún elemento en el interior de los corchetes.

**Subconjunto**

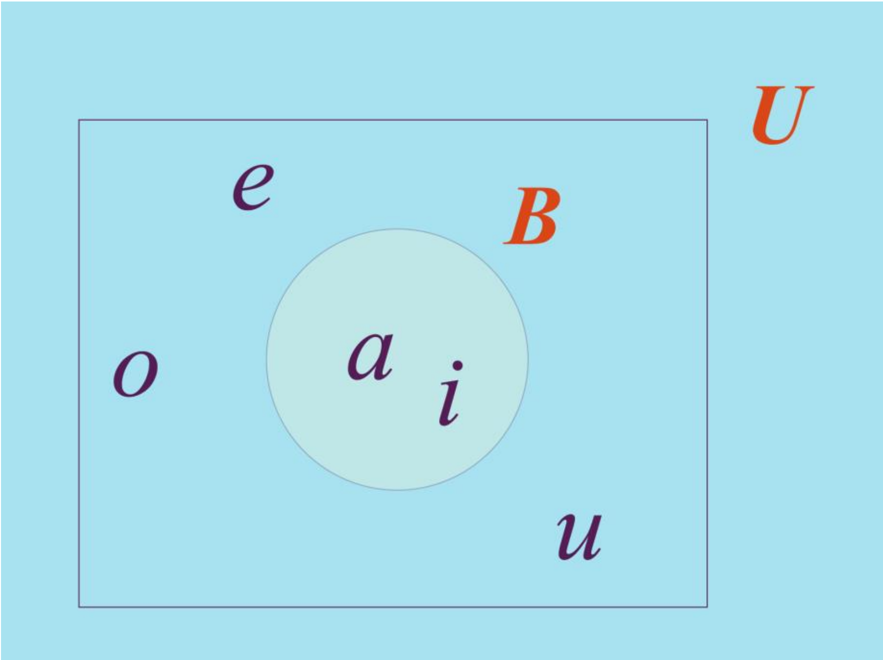
Un conjunto *A* formado algunos de los elementos de otro conjunto *B* es un subconjunto de este último:

Sean A y B dos conjuntos tal que cada elemento de A es también elemento de B. Entonces se dice que:

- A es un subconjunto de B, y se denota A ⊆ B
- B es un superconjunto de A, y se denota B ⊇ A

**Conjunto universal**

Con el ánimo de evitar confusiones, cuando definimos un conjunto debemos especificar de dónde se están tomando los elementos que lo conforman. Esto significa que debe existir una base de la cual tomamos estos elementos, esta base sobre el cual trabajamos es llamada conjunto universal. Usaremos siempre la letra para representar el conjunto universal.

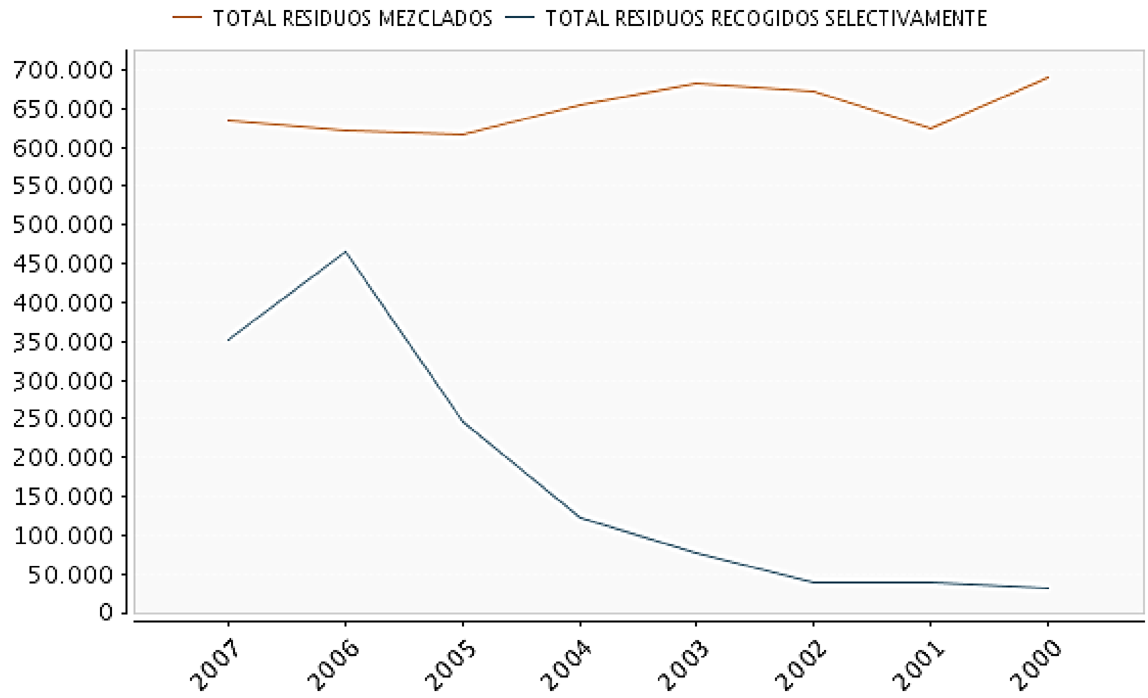



Por ejemplo, si quieres definir B como el conjunto conformado por las vocales a e i, el conjunto universal podría ser el conjunto de las vocales. En la figura anterior se muestra cómo puedes usar los diagramas de Venn para representar la relación entre el conjunto B y su conjunto universal U.

Observa que el conjunto universal puede tener exactamente los elementos de los conjuntos que abarca o más.

## 1.6. Diagramas lineales.

El diagrama de líneas, gráfico lineal, diagrama lineal o gráfico de líneas es la representación gráfica de los datos recogidos mediante una línea que une los diferentes valores obtenidos. Para representar esta línea uniremos los puntos centrales de cada una de las partes superiores de los rectángulos representados en un diagrama de barras.



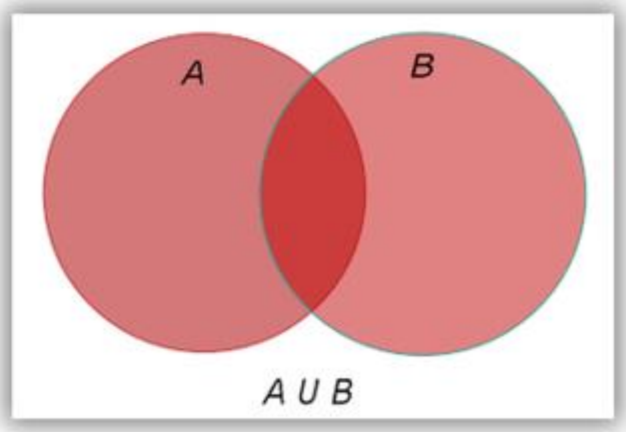

Fuente: Institut d'Estadística de les Illes Balears (IBESTAT) a partir de datos del Instituto Nacional de Estadística (INE)

## 1.7. Operaciones con conjunto.

### Unión de Conjuntos

Se llama *UNIÓN* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos de A o de B, es decir:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$




***Ejemplo:***

Sean $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{b, d, r, s\}$

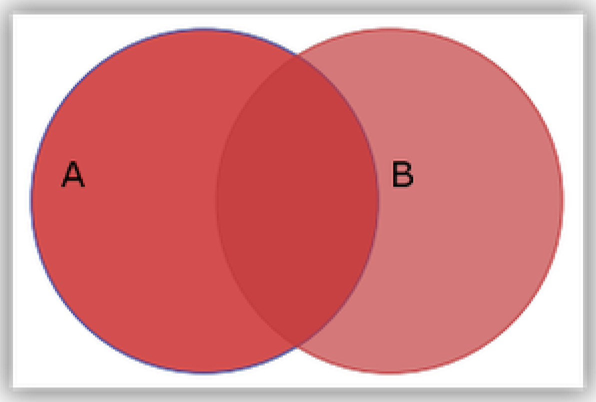
Entonces $A \cup B$ está formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B. Luego,

$$A \cup B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ r,\ s\}$$

## Intersección de conjuntos

Se llama *INTERSECCIÓN* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B, es decir:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$



En la imagen la intersección es la parte obscura de la misma.

***Ejemplo:***

Sean A = {a, b, c, e, f}, B = {b, e, f, r, s} y

C = {a, t, u, v}.

Encuentre:

$A \cap B, A \cap C \; y \; C \cap B$

Como la intersección está formada por los elementos comunes de ambos conjuntos, se tiene que:

$$A \cap B = \{b,\ e,\ f\}$$

$$A \cap C = \{a\}$$

$$C \cap B = \{\ \}$$

Cuando dos conjuntos no tienen elementos en común como B y C en el ejemplo anterior, se denominan ***Conjuntos disjuntos***.

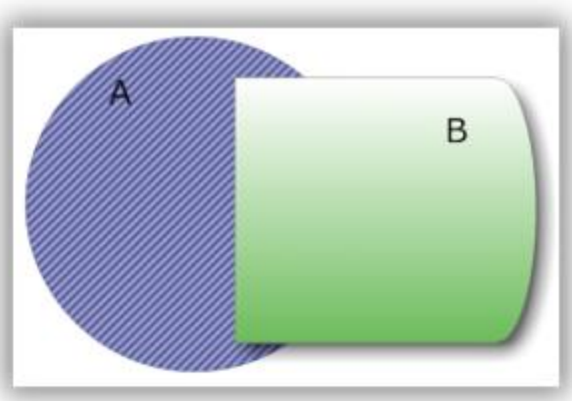
## Diferencia de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se llama *DIFERENCIA* al conjunto:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Luego A-B se llama complemento de B con respecto a A.

A – B




En el diagrama de Venn A-B está representado por la zona rayada.

***Ejemplo:***

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d, e\}$. Entonces:

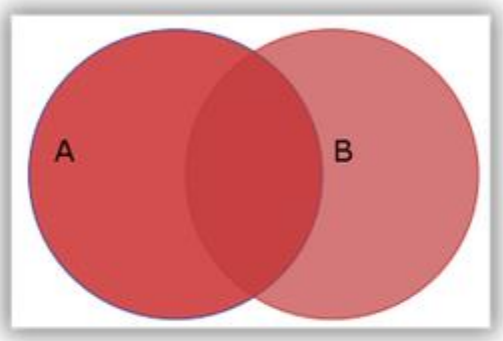
$A - B = \{a\}$ y $B - A = \{d, e\}$.

Asimismo, se llama *DIFERENCIA SIMÉTRICA* entre A y B al conjunto

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \triangle B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$A \triangle B$




En el diagrama de Venn la diferencia simétrica está representada por las regiones menos oscuras. (Lo que no tienen en común).

***Ejemplo:***

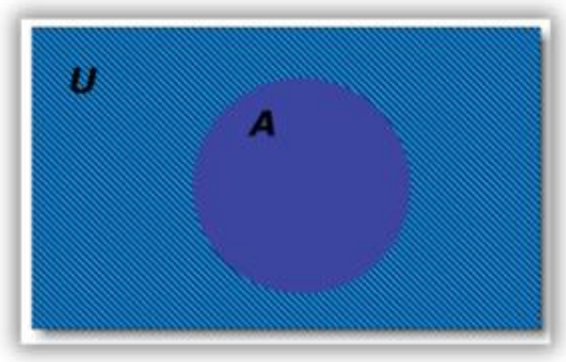
Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, c, e, f, g\}$.

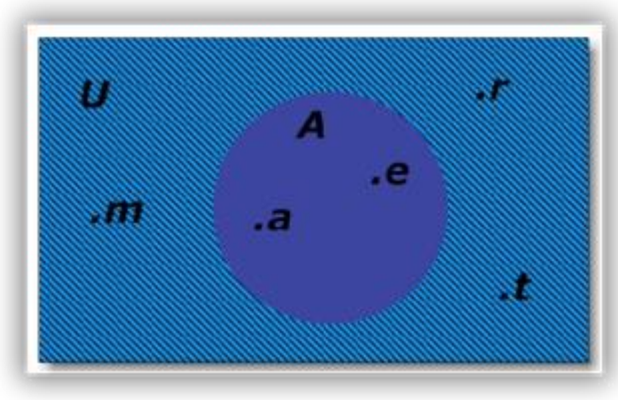
Entonces $A \triangle B = \{b, d, e, f, g\}$

## Complemento de un Conjunto

Si un conjunto A es subconjunto de otro conjunto universal U, al conjunto A ' formado por todos los elementos de U, pero no de A, se llama complemento de A con respecto a U. Simbólicamente se expresa:

$$A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$




***Ejemplos:***

a) Sean *U* = {*m, a, r, t,* e } y *A* = {*a,* e }

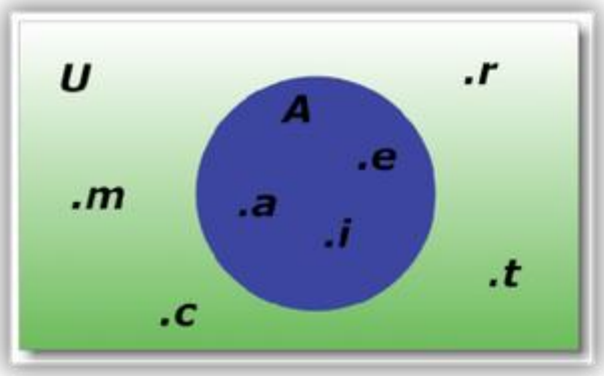
Su complemento de A es: *A'* = {*m, t, r*}

b) Sean *U* = {*letras de la palabra aritmética*} y *A* = { e, *i, a* }

Determinado por extensión tenemos

*U* = {*a, r, i, t, m,* e, *c*} *A* = { e, *i, a* }

Su complemento es: *A'* = {*r, t, m, c*}




En forma gráfica:

## Propiedades de las Operaciones Booleanas

Las llamadas *OPERACIONES BOOLEANAS* (unión e intersección) verifican las siguientes propiedades:

| PROPIEDADES | UNION | INTERSECCION |
|---|---|---|
| 1.- Idempotencia | $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| 2.- Conmutativa | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| 3.- Asociativa | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| 4.- Absorción | $A \cup (A \cap B) = A$ | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| 5.- Distributiva | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 6.- Complementariedad | $A \cup A' = U$ | $A \cap A' = \varnothing$ |

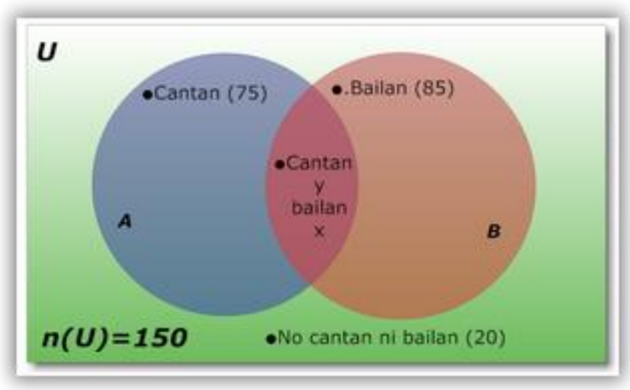
Estas propiedades hacen que partes de U con las operaciones unión e intersección tenga una estructura de álgebra de Boole.

Además de éstas, se verifican también las siguientes propiedades:

$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$ *(elemento nulo).*

$A \cup U = U, A \cap U = A$ *(elemento universal).*

$(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$ *(leyes de Morgan).*




## Problemas con Operaciones con Conjuntos

Mediante diagramas de Venn y las definiciones y aplicación de las distintas operaciones con conjuntos se pueden resolver problemas, que nos preparan en el campo de la lógica formal.

***Ejemplo:***

A una fiesta llegaron 150 personas, de las cuales 75 cantan, 85 bailan, 20 no cantan ni bailan. ¿Cuántas personas cantan y bailan?

***Solución:*** La pregunta lleva implícita una conectiva lógica y, que es parte importante de la definición formal de la operación intersección. Por lo tanto, podemos representar el problema de la siguiente manera:

$n(A)+x+n(B)+20=150$

$n(A)=75-x$

$n(B)=85-x$

*Luego sustituyendo en la ecuación original*

$75-x+x+85-x+20=150$

*Despejando*

$75+85-x+20=150$

$x=75+85+20-150$

$x=3030$

*R./ El número de personas que cantan y bailan es igual a 30.*

**Ejercicios:**

1. *Sean U={a, b, c, d, e, f, g, h, k} A={a, b, c, g} B={d, e, f, g} C={a, c, f} D={f, h, k}.*
   Escriba por extensión

| | | |
|---|---|---|
| a. $A\cup B$ | b. $B\cup C$ | c. $A\cap C$ |
| d. $B\cap D$ | e. $A-B$ | f. $A\triangle B$ |
| g. $A\cup D$ | h. $D\cup B$ | i. $C\cap D$ |
| j. $A\cap D$ | k. $B-C$ | l. $C-B$ |
| m. $C\triangle D$ | n. $A'$ | o. $D'$ |
| p. $A\cup B\cup C$ | q. $A\cap B\cap C$ | r. $A\cap(B\cup C)$ |
| s. $(A\cup B)\cap C$ | t. $A\cup\{\ \}$ | u. $A\cup U$ |
| v. $B\cup B$ | w. $C-D$ | x. $D\triangle C$ |

2. *Sean U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} A={1, 2, 4, 6, 8} B={2, 4, 5, 9}*
   $C=\{x/x\in\mathbb{Z}^{+}\wedge x^{2}\leqslant 16\}$ *D={7, 8}*. Escriba por extensión

| | | |
|---|---|---|
| a. $A\cup B$ | b. $B\cup C$ | c. $A\cap C$ |
| d. $B\cap D$ | e. $A-B$ | f. $A\triangle B$ |
| g. $A\cup C$ | h. $A\cup D$ | i. $A\cap D$ |
| j. $B\cap C$ | k. $C\cap D$ | l. $B-A$ |
| m. $C-D$ | n. $C\triangle D$ | o. $B\triangle C$ |
| p. $A\cup B\cup C$ | q. $A\cap B\cap C$ | r. $A\cap(B\cup C)$ |
| s. $(A\cup B)\cap C$ | t. $A\cup\{\ \}$ | u. $A\cup U$ |

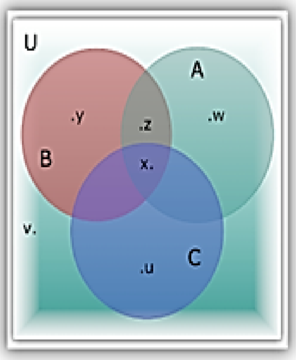
3. De acuerdo al diagrama: Identifique los siguientes casos como verdaderos o falsos

a. ( ) $y \in A \cap B$ b. ( ) $x \in B \cup C$

c. ( ) $w \in B \cap C$ d. ( ) $u \notin C$

e. ( ) $x \in A \cap B \cap C$ f. ( ) $y \in A \cup B \cup C$

g. ( ) $z \in A \cap C$ h. ( ) $v \in B \cap C$




## UNIDAD II: ALGEBRA BOOLEANA

### 2.1. Definición y principio de dualidad

En el área matemática de la teoría del orden, cada conjunto parcialmente ordenado P da lugar a un conjunto parcialmente ordenado dual (también denominado opuesto) que a menudo se denota por Pop o Pd. Este orden dual Pop se define como el conjunto con el orden inverso, es decir, los x ≤ y se mantiene en Pop si y solo si los y ≤ x se mantiene en P. Es fácil ver que esta construcción, que se puede representar dando la vuelta al diagrama de Hasse de P, dará un conjunto parcialmente ordenado. En un sentido más amplio, también se dice que dos conjuntos parcialmente ordenados son duales si son doblemente isomorfos, es decir, si un conjunto parcialmente ordenado es ordenadamente isomorfo al dual del otro.

La importancia de esta simple definición proviene del hecho de que cada definición y teorema de la teoría del orden puede transferirse fácilmente al orden dual. Formalmente, este hecho es definido en el principio de dualidad para conjuntos ordenados:

Si un enunciado dado es válido para todos los conjuntos parcialmente ordenados, entonces su declaración dual, obtenida invirtiendo la dirección de todas las relaciones de orden y mediante la idealización de todas las definiciones teóricas de orden involucradas, también es válida para todos los conjuntos parcialmente ordenados.

Si una declaración o definición es equivalente a su dual, entonces se dice que es auto dimensional. Téngase en cuenta que la consideración de órdenes duales es tan fundamental que a menudo ocurre implícitamente cuando se escribe ≥ para la orden dual de ≤ sin dar ninguna definición previa de este símbolo "nuevo".

Ejercicios de Programación Lineal - Dualidad

Programación Maten ática

Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas

Curso 06/07

1. Dado el problema lineal

Max $x1 + x2 - x3$

s.a $x1 - x2 + 2x3 \geq 1$

$-2x1 + x3 \geq -2$

$x \geq 0$,

se pide que:

a) Calcules un vértice factible inicial aplicando el método Simplex.

b) Encuentres el problema dual, y lo pongas en forma estándar.

c) Determines si este problema dual es factible, acotado u ´optimo.

2. Un agricultor es propietario de 500 Ha. de tierras, adecuadas para cultivar trigo, avena o centeno. Por cada hectárea que cultive, necesita la mano de obra, incurre en los costes y obtiene los beneficios que se indican en la tabla siguiente:

Cosecha Horas-hombre Coste Beneficio

Trigo 6 100 60

Avena 8 150 100

Centeno 10 120 80

Si el agricultor dispone de mano de obra capaz de proporcionar 5000 horas-hombre en el

periodo de cultivo, y de 60000 euros. para gastos de cultivo, se pide que:

a) Encuentres las superficies de cultivo que maximicen los beneficios del agricultor.

b) Plantees el problema dual del anterior.

c) Si el agricultor pudiese contratar 500 horas-hombre de trabajo adicional por 1500 euros, ¿le interesaría hacerlo?

d) La superficie cultivada mínima de trigo para percibir subvenciones es de 100 Ha. Si se perciben subvenciones el beneficio por hectárea para el trigo es de 60 euros, pero si no se perciben dicho beneficio baja a 45 euros por hectárea. Estudia la solución ´optima del problema bajo estas condiciones.

e) ¿Cómo cambia la solución si se reducen (contratando una cosechadora mejor) las horas-hombre necesarias para cultivar una hectárea de centeno a 7?

3. Para el problema lineal

Max $x1 + 2x2 + 2x3$

s.a $x1 + x2 + 2x3 \geq 1$

$x1 - x2 + x3 \leq -2$

$x \geq 0$,

se pide que:

a) Indiques la forma de su problema dual (en forma estándar).

b) Calcules la solución del problema primal a partir del vértice $\bar{x} = 0\ 2\ 0$

c) ¿Cómo es el problema dual (´optimo, no acotado, no factible)? ¿Por qué?

d) Si se añade una nueva variable (no negativa) al problema primal, x4, con coeficiente en la función objetivo −1, y coeficientes en las restricciones 1 y 2 respectivamente, ¿cómo son el problema primal y el problema dual resultantes?

4. Para el problema lineal siguiente:

Max $2x1 + 6x2 + 8x3$

s.a $x1 + x2 + x3 \leq 10$

$-2x1 + x2 \leq 2$

$x3 \leq 5$

$x1 - 2x2 \leq 1$

$x \geq 0$,

Se pide que:

a) Encuentres el problema dual y lo formules en forma estándar.

b) Encuentres los valores ´óptimos de las variables de los problemas primal y dual, sabiendo que en la solución del problema primal las restricciones primeras, segunda y tercera están activas.

c) Si en el problema original se eliminan la primera y cuarta restricciones justifica que el nuevo problema es no acotado.

5. Calcula la solución del siguiente problema lineal:

$\min 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5$

s.a $-2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -3$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 6$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8$

$x \geq 0$,

partiendo del vértice en el que son básicas las variables $x_1$, $x_2$ y $x_4$.

## 2.2.- Teoremas fundamentales.

### ¿Qué es un Teorema?

Un teorema, es toda proposición que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una verdad (tesis) no evidente por sí misma, por lo tanto, deben ser demostradas. El enunciado de un teorema consta de dos partes:

**Hipótesis,** que contiene los datos.

**Tesis**, que es la verdad que se quiere demostrar.

El razonamiento o deducción lógica que se hace para concluir la tesis utilizando la hipótesis se llama demostración.

Existen también los lemas, que son teoremas de menor importancia, cuyo único objetivo es facilitar la demostración de otro teorema más importante.

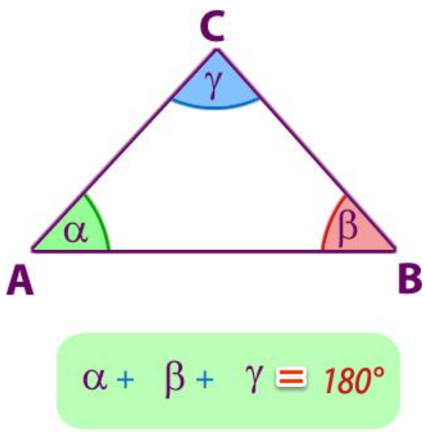
Se llama corolario a toda consecuencia directa de un teorema que se deduce por un razonamiento simple.

Un teorema se llama recíproco de otro cuando la tesis del primero pasa a ser la hipótesis del segundo y la hipótesis del primero se convierte en la tesis del segundo.

## Teoremas fundamentales sobre triángulos

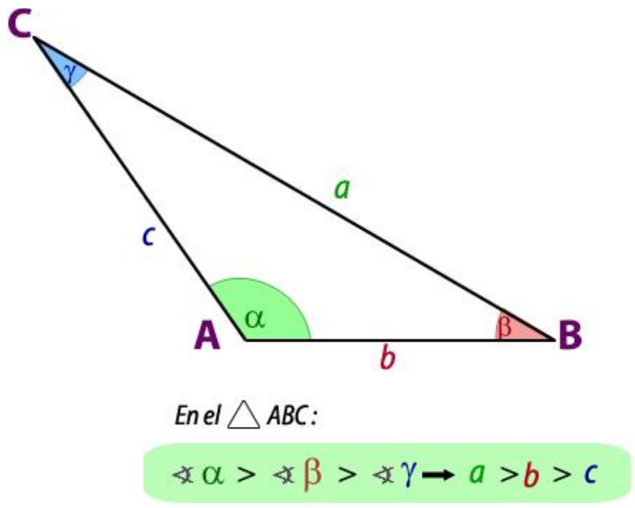
### 1. Teorema de la suma de los ángulos interiores

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°




### 2- Teorema del lado mayor (propiedad de correspondencia)

En un triángulo, al lado de mayor longitud se le opone el ángulo de mayor medida y viceversa.



### 2.3.- Funciones booleanas

Al formular expresiones matemáticas para circuitos lógicos es importante tener conocimiento del álgebra booleana, que define las reglas para expresar y simplificar enunciados lógicos binarios. Una barra sobre un símbolo indica la operación booleana NOT, que corresponde a la inversión de una señal.

Leyes fundamentales

ORA + 0A + 1A + AA + A====A1A1 ANDA • 0A • 1A • AA • A====0AA0 NOTA=A

Leyes conmutativas

$A + B = B + A$
$A \cdot B = B \cdot A$

Leyes asociativas

$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Leyes distributivas

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Otras identidades útiles

$A + (A \cdot B) = A$
$A \cdot (A + B) = A$
$A + (A \cdot B) = A + B$
$(A + B) \cdot (A + B) = A$
$(A + B) \cdot (A + C) = A + (B \cdot C)$
$A + B + (A \cdot B) = A + B$
$(A \cdot B) + (B \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + C$
$(A \cdot B) + (A \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (B \cdot C)$

### Simplificación de funciones booleanas

Al usar los teoremas y leyes booleanas, podemos simplificar las expresiones booleanas, mediante las cuales podemos reducir el número requerido de compuertas lógicas a implementar. Podemos simplificar la función Boolean utilizando dos métodos:

El método algebraico: mediante el uso de identidades (leyes booleanas).

El método gráfico: utilizando el método del Mapa de Karnaugh.

**Ejemplo**

Se va a simplificar la siguiente expresión aplicando las leyes e identidades booleanas mencionadas:

$E = (X \cdot Y \cdot Z) + (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Es posible aplicar la ley asociativa y la ley fundamental de que A · 1 = A:

$E = X \cdot (Y \cdot Z) + 1 \cdot (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Ahora es posible factorizar el termino (Y · Z):

$E = (X + 1) \cdot (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Dado que A + 1 = 1 según las leyes fundamentales por lo tanto X + 1 = 1:

$E = 1 \cdot (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Al realizar la operación tendremos ya simplificada la expresión:

$E = (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Aún podemos simplificar la expresión al factorizar Y:

$E = Y \cdot (Z + X)$

## Modos de representación

Existen distintas formas de representar una función lógica, entre las que podemos destacar las siguientes:

- Algebraica
- Por tabla de verdad
- Numérica
- Gráfica

El uso de una u otra, como veremos, dependerá de las necesidades concretas en cada caso.

Algebraica

Se utiliza cuando se realizan operaciones algebraicas. A continuación, se ofrece un ejemplo con distintas formas en las que se puede expresar algebraicamente una misma función de tres variables.

1. F = [(A + BC')' + ABC]' + AB'C
2. F = A'BC' + AB'C' + AB'C + ABC'
3. F = (A + B + C) (A + B + C') (A + B' + C') (A' + B' + C')
4. F = BC' + AB'
5. F = (A + B) (B' + C')
6. F = [(BC')'(CB)´ (AB')']'
7. F = [(A + B)' + (B' + C')']'

La expresión 1) puede proceder de un problema lógico planteado o del paso de unas especificaciones a lenguaje algebraico. Las formas 2) y 3) reciben el nombre expresiones canónicas: de suma de productos (sum-of-products, SOP, en inglés), la 2), y de productos de sumas (product-of-sums, POS, en inglés), la 3); su característica principal es la aparición de cada una de las variables (A, B y C) en cada uno de los sumandos o productos.

**Por tabla de verdad**

Una tabla de verdad contiene todos los valores posibles de una función lógica dependiendo del valor de sus variables. El número de combinaciones posibles para una función de n variables vendrá dado por $2^n$. Una función lógica puede representarse algebraicamente de distintas formas como acabamos de ver, pero solo tiene una tabla de verdad. La siguiente tabla corresponde a la función lógica del punto anterior.

La forma más cómoda para ver la equivalencia entre una tabla de verdad y una expresión algebraica es cuando esta última se da en su forma canónica. Así, la función canónica de suma de productos (o forma canónica disyuntiva)

F = A'BC' + AB'C' + AB'C + ABC'

nos indica que será 1 cuando lo sea uno de sus sumandos, lo que signifi ca que tendrá por lo tanto cuatro combinaciones que lo serán (010 para A'BC', 100 para AB'C', 101 para AB'C y 110 para ABC') siendo el resto de combinaciones 0. Con la función canónica de producto de sumas (o forma canónica conjuntiva) se puede razonar de forma análoga, pero en este caso observando que la función será 0 cuando lo sea uno de sus productos.

También es fácil obtener la tabla de verdad a partir de la función simplificada, pero no así a la inversa.

**Numérica**

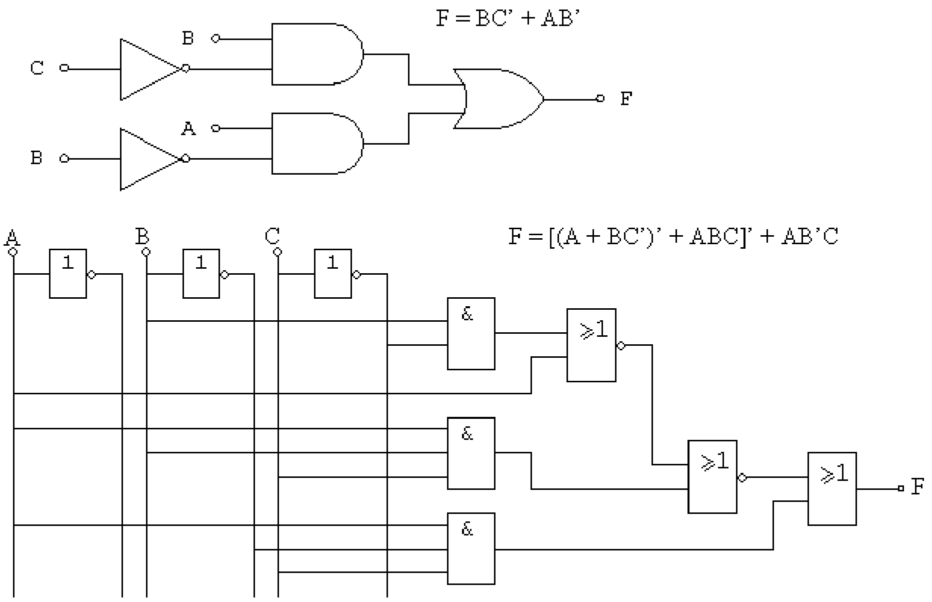
La representación numérica es una forma simplificada de representar las expresiones canónicas. Si consideramos el criterio de sustituir una variable sin negar por un 1 y una negada por un 0, podremos representar el término, ya sea una suma o un producto, por un número decimal equivalente al valor binario de la combinación. Por ejemplo, los siguientes términos canónicos se representarán del siguiente modo (observe que se toma

el orden de A a D como de mayor a menor peso):

La representación numérica correspondiente a la tabla de verdad del punto anterior quedará como: Matemáticamente se demuestra, que para todo término i de una función, se cumple la siguiente ecuación: A modo de ejemplo se puede utilizar esta igualdad para obtener el producto de sumas a partir de la suma de productos del ejemplo anterior:

**Gráfica**

La representación gráfica es la que se utiliza en circuitos y esquemas electrónicos. En la siguiente figura se representan gráficamente dos funciones algebraicas, una con símbolos no normalizados, superior, y la otra con normalizados, inferior (véanse los símbolos de las puertas lógicas)



## Métodos de simplificación

Por simplificación de una función lógica se entiende la obtención de su mínima expresión. A la hora de implementar físicamente una función lógica se suele simplificar para reducir así la complejidad del circuito. A continuación, se indican los modos más usuales de simplificar una función lógica.

## Algebraico

Para la simplificación por este método no sólo bastará con conocer todas las propiedades y teoremas del álgebra de Boole, además se debe desarrollar una cierta habilidad lógico-matemática que se adquiere fundamentalmente con la experiencia. Como ejemplo se simplificará la siguiente función:

F = A’C’ + ABC + BC’ + A’B’C + A’BC

Observando cada uno de los sumandos podemos ver que hay factores comunes en los sumandos 2° con 5° y 4° con 5° que conllevan simplificación:

F = A’C’ + BC’ + BC (A + A’) + A’C (B + B’)

Note que el término 5° se ha tomado dos veces, de acuerdo con la propiedad que dice que A + A = A. Aplicando las propiedades del álgebra de Boole (A + A' = 1 y A. 1 = A), queda F = A’C’ + BC’ + BC + A’C

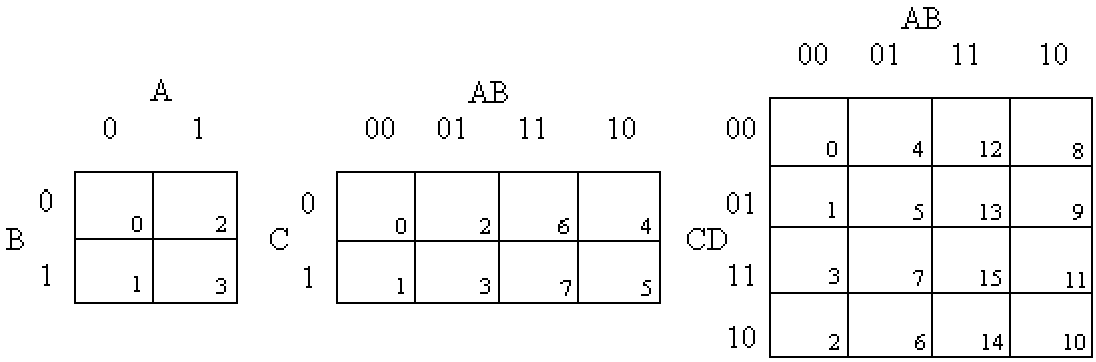
Repitiendo nuevamente el proceso,

F = A’( C’ + C) + B( C’ + C) = A’ + B

No siempre las funciones son tan fáciles de simplificar como la anterior. El método algebraico, por lo general, no resulta cómodo para los no expertos, a los cuales, una vez simplificada una ecuación le pueden quedar serias dudas de haber conseguido la máxima simplificación.

## Mapa de Karnaugh

Este método consiste en formar diagramas de $2^n$ cuadros, siendo n el número de variables. Cada cuadro representa una de las diferentes combinaciones posibles y se disponen de tal forma que se puede pasar de un cuadro a otro en las direcciones horizontal o vertical, cambiando únicamente una variable, ya sea en forma negada o directa. Este método se emplea fundamentalmente para simplificar funciones de hasta




cuatro variables. Para un número superior utilizan otros métodos como el numérico. A continuación pueden observarse los diagramas, también llamados mapas de Karnaugh, para dos, tres y cuatro variables.

Es una práctica común numerar cada celda con el número decimal correspondiente al término canónico que albergue, para facilitar el trabajo a la hora de plasmar una función canónica.

Para simplificar una función lógica por el método de Karna3ugh se seguirán los siguientes pasos:

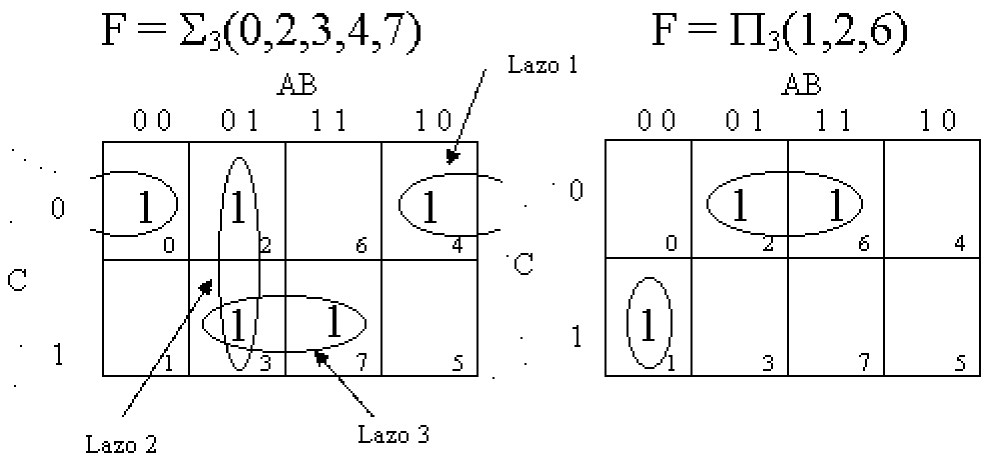
1. Se dibuja el diagrama correspondiente al número de variables de la función a simplificar.
2. Se coloca un 1 en los cuadros correspondientes a los términos canónicos que forman parte de la función.
3. Se agrupan mediante lazos los unos de casillas adyacentes siguiendo estrictamente las siguientes reglas:

1. Dos casillas son adyacentes cuando se diferencian únicamente en el estado de una sola variable.
2. Cada lazo debe contener el mayor número de unos posible, siempre que dicho número sea potencia de dos (1, 2, 4, etc.)
3. Los lazos pueden quedar superpuestos y no importa que haya cuadrículas que pertenezcan a dos o más lazos diferentes.
4. Se debe tratar de conseguir el menor número de lazos con el mayor número de unos posible.

4. La función simplificada tendrá tantos términos como lazos posea el diagrama. Cada término se obtiene eliminando la o las variables que cambien de estado en el mismo lazo.

A modo de ejemplo se realizan dos simplificaciones de una misma función a partir de sus dos formas canónicas:

De acuerdo con los pasos vistos anteriormente, el diagrama de cada función quedará del siguiente modo:




## 2.4.- Formas canónicas o normales.

Consideremos la función lógica

F = A·B +C

cuya tabla de verdad tenemos aquí.

| **A** | **B** | **C** | **F** | **n (ordinal)** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |

Vamos a ver que se puede escribir de dos formas diferentes, a las que vamos a llamar primera y segunda formas canónicas.

Para ello, primero vamos a definir dos conceptos:

- ***Minterm o mini término***: producto de n variables (n, en nuestro ejemplo, es 3), con sus valores negados o no. Por ejemplo un minterm es: $\bar{A} \cdot B \cdot C$.
- ***Maxterm o maxi término***: suma de n variables, con sus correspondientes valores, negados o no. Por ejemplo: $A + \bar{B} + \bar{C}$

Para una función booleana con n variables, hay $2^n$ minitérminos y $2^n$ maxitérminos.

Los minitérminos y maxitérminos acostumbran a etiquetarse según el valor decimal que representan las combinaciones de sus variables (el ordinal que se ha indicado en la tabla).

Así, el término 011 se etiquetaría como {3} (porque es el que tiene el ordinal "3"; observa la última columna de la tabla).

Si es un minitérmino se escribiría m3, y si es un maxitérmino se escribiría M3

## Primera Forma Canónica:

se obtiene haciendo la suma de todos los minitérminos cuyo valor es 1. En nuestro caso, la expresión en primera forma canónica de nuestra función sería:

que también puede escribirse así de fácil:

$$F = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

F = m (2,3,5,6,7)

Leyéndose esto como que "*F es igual a la suma de los minitérminos 2, 3, 5, 6 y 7*".

**Segunda Forma Canónica**:

Se obtiene haciendo el producto de todos los maxitérminos cuyo valor es cero. En nuestro caso, la expresión de la función F como segunda forma canónica sería:

$$F = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C})$$

que también puede escribirse de esta otra forma:

F = M (0,1,4)

Leyéndose esto como que "*F es igual al producto de los maxitérminos 0,1 y 4*".

Ambas expresiones representan a la misma función. Simplemente cambia el modo en que se representan, y siempre nos da una idea de la complementariedad que hay en el álgebra de Boole entre una variable o función y su negación (recuerda las dos leyes de Morgan).

Una muestra de esta complementariedad es, precisamente, que los mini términos que faltan en la primera forma canónica son los maxi términos que aparecen en la segunda.

**2.5.- Cambio de forma de una función booleana.**

Los lógicos combinacionales se resuelven partiendo de la tabla de verdad al establecer esta todas las combinaciones posibles de entrada y salida. Tomando la tabla de verdad, podemos establecer una función lógica de dos formas posibles:

(1) Primera forma canónica o forma canónica disyuntiva (suma de productos o minterms).

(2) Segunda forma canónica o forma canónica conjuntiva (producto de sumas o maxterms).

En la primera forma canónica, SoP (Sum of Products) se obtiene sumando todos los minitérminos que dan salida 1. En un minitérmino se asigna 0 la variable inversa y se asigna 1 la variable directa (Teorema de Shannon).

| $S = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i cuando F(i) = 1$ | $S = \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i\ cuando F(i) = 0$ |
|---|---|
| Primera forma canónica | Segunda forma canónica |

La segunda forma canónica, PoS (Products of Sums), se obtiene de forma dual a la anterior: multiplicando los maxitérminos cuya columna resultado sea 0. El maxitérmino es el dual del minitérmino.

Mirando el siguiente ejemplo:

| | A | B | C | F(A,B,C) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| *Primera forma canónica* |
|---|
| $S=m0+m3+m5+m7$ <br> $S = (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot B \cdot C) + (A \cdot \bar{B} \cdot C) + (A \cdot B \cdot C)$ |
| *Segunda forma canónica* |
| $S=M1 \cdot M2 \cdot M4 \cdot M6$ <br> $S = (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$ |

**2.6.- Algebra de redes eléctricas.**

### 1.7.2 Redes eléctricas

Considérese un modelo simple de circuito eléctrico que consta solo de resistencias (bombillas eléctricas, electrodomésticos, ...) y fuerza electromotriz o baterías. A través de la red (o circuito) fluye la corriente eléctrica en el sentido que indican las flechas. Los nodos representan puntos de la red donde se redirecciona y distribuye la corriente. Los generadores se simbolizan con dos rayas verticales una más corta que la otra. La corriente entra por



la raya corta y sale por la raya larga. El otro símbolo que aparece en la Figura 1.4 es el de las resistencias.

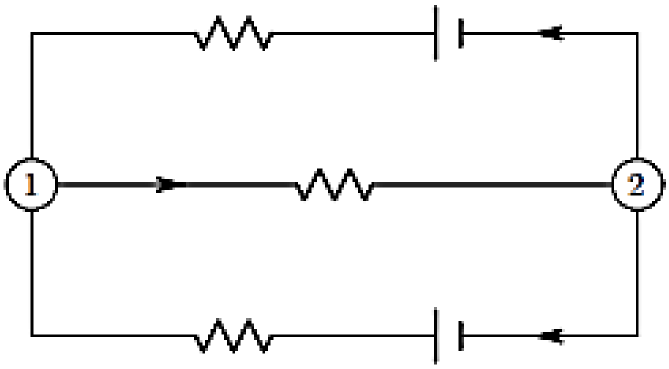



Figura 1.4: Red eléctrica con dos nodos, tres resistencias y dos generadores.

La fuerza electromotriz se mide en voltios, la corriente en amperios y la resistencia en ohmios. El movimiento de la corriente en el circuito se rige por las conocidas leyes de Kirchhoff, a saber: a) La corriente que fluye hacia un nodo es igual a la que sale. b) En una trayectoria cerrada la fuerza electromotriz es igual a la suma de las caídas de voltaje. Una trayectoria cerrada es una parte de la red donde la corriente sale de un nodo y regresa a el. En la figura anterior se tienen dos trayectorias cerradas. una sale del nodo 1 y la otra del nodo 2. La caída de voltaje E a través de una resistencia es el producto RI donde I es la corriente y R es la resistencia. Es decir, E = RI

**Ejemplo 1.18** Considere la red siguiente y determine las corrientes $I_1$, $I_2$ e $I_3$



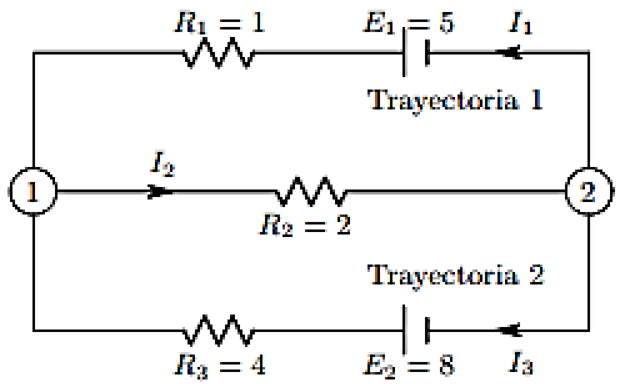



Figura 1.5: Red eléctrica con dos trayectorias.

*Solución*: A partir de la Figura 1.5, vemos que el sistema de ecuaciones es:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 & \text{Nodo 1 o 2} \\ I_1 & +2I_2 & & = & 5 & \text{Trayectoria 1} \\ & +2I_2 & +4I_3 & = & 8 & \text{Trayectoria 2} \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución: $I_1 = 1$ amperio, $I_2 = 2$ amperios e $I_3 = 1$ amperio.

El ejemplo más intuitivo y sencillo es el de redes de carreteras, donde el flujo se refiere a la cantidad de vehículos que circulan por la vía. En el caso de redes que representan flujos supondremos en esta sección que *la cantidad que llega a un nodo es igual a la que sale*:

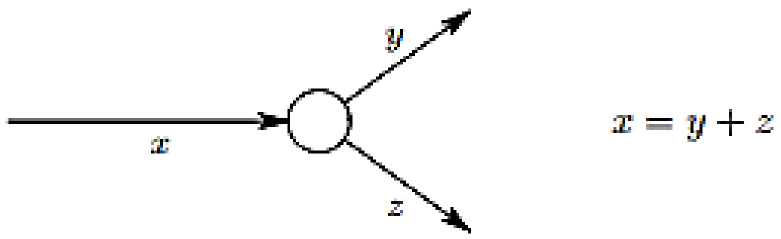



Figura 1.2: Flujo que entra al nodo es igual al que sale.

**Ejemplo 1.17** La siguiente red representa el flujo vehicular por un sector de la ciudad donde, los nodos son las intersecciones y los arcos, las carreteras. Las flechas indican el sentido del movimiento de los vehículos.

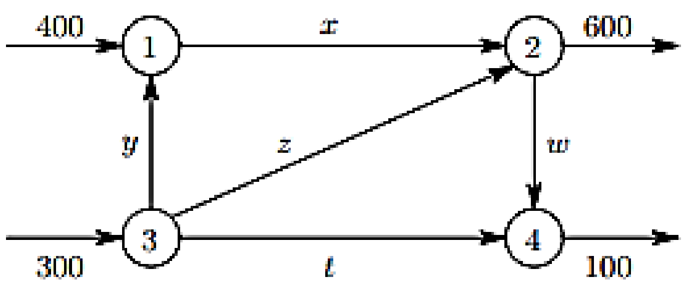



Figura 1.3: Flujo vehicular por un sector de la ciudad.

Las cantidades de vehículos que circulan por la red entre dos nodos consecutivos se indican con las letras $x$, $y$, $z$, $w$ y $t$ las cuales son las variables del problema. En tales condiciones:

i) Formule un sistema de ecuaciones lineales cuya solución aporte todas las opciones posibles de flujo vehicular.

ii) Si el flujo vehicular entre el nodo 1 y 2 es 550 y entre el nodo 2 y 4 es 50, entonces calcule los otros flujos.

i) De acuerdo con la red el sistema es :

$$\begin{cases} x - y = 400 & \text{nodo 1} \\ x + z - w = 600 & \text{nodo 2} \\ + y + z + t = 300 & \text{nodo 3} \\ + w + t = 100 & \text{nodo 4} \end{cases}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & : & 400 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & : & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & : & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & : & 100 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones elementales sobre esta matriz se obtiene la solución: $S = \{(700 - z - t, 300 - z - t, z, 100 - t, t)\,|z, w \in I\!R\}$.

ii) Como $x = 550$ entonces $y = 150$. Además $w = 100 - t = 50$ entonces $t = 50$. Por otra parte $y = 300 - z - t = 300 - z - 50 = 150$ por lo que $z = 100$.

## UNIDAD III: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### 3.1. Definición de matriz.

Una matriz es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados elementos) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con *m* filas y *n* columnas se le denomina matriz *m*-por-*n* (escrito *m*×*n*). Las dimensiones de una matriz siempre se dan con el número de filas primero y el número de columnas después.

Comúnmente se dice que una matriz *m*-por-*n* tiene un orden de m × n ("orden" tiene el significado de tamaño). Dos matrices se dice que son iguales si son del mismo orden y tienen los mismos elementos.

Ejemplo:

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

que es una matriz 4x3. El elemento A [2,3] es el 7

La matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

es una matriz 1×9, o un vector fila con 9 elementos.

## 3.2. Tipos de matrices: cuadradas, filas, columna, diagonal, escalar, triangular, unitaria, transpuesta, simétrica y asimétrica.

### MATRIZ FILA

Una **matriz fila** está constituida por una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

### MATRIZ COLUMNA

La **matriz columna** tiene una sola columna

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ RECTANGULAR

La **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su **dimensión mxn**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ CUADRADA

La **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas.
Los elementos de la forma $\mathbf{a_{ii}}$ constituyen la **diagonal principal**.
La **diagonal secundaria** la forman los elementos con **i+j = n+1**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ ESCALAR

Una **matriz escalar** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD

Una **matriz identidad** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ TRASPUESTA

Dada una matriz A, se llama **matriz traspuesta** de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$(A^t)^t = A$

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

## MATRIZ REGULAR

Una **matriz regular** es una matriz cuadrada que tiene inversa.

## MATRICES NORMALES

Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si AAT = ATA. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

**Sea** $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. **Entonces:**

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que AAT = ATA, la matriz es normal

## MATRICES NORMALES

Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si AAT = ATA. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que AAT = ATA, la matriz es normal

## MATRICES ESCALONADA

Una matriz es escalonada si al principio de cada fila (o columna) un elemento nulo mas que en la fila (o columna) anterior

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por filas

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por columnas

## MATRICES ESCALARES

Una matriz es escalar si es diagonal y además todos los elementos de la diagonal son iguales

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ es una matriz escalar

## MATRIZ NULA

En una **matriz nula** todos los elementos son ceros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

En una **matriz triangular superior** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

En una **matriz triangular inferior** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

## MATRIZ DIAGONAL

En una **matriz diagonal** todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

### MATRIZ SINGULAR

Una **matriz singular** no tiene matriz inversa.

### MATRIZ IDEMPOTENTE

Una matriz, A, es idempotente si:

$\mathbf{A^2 = A}$.

### MATRIZ INVOLUTIVA

Una matriz, A, es involutiva si:

$\mathbf{A^2 = I}$.

### MATRIZ SIMÉTRICA

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = A^t}$.

### MATRIZ ANTISIMÉTRICA O HEMISIMÉTRICA

Una **matriz antisimétrica o hemisimétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = -A^t}$.

### MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz es ortogonal si verifica que:

$\mathbf{A \cdot A^t = I}$.

### 3.3. Operaciones matrices.

**SUMA:**

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\1 & 0 & 0\\1 & 2 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\7 & 5 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+1 & 3+0 & 2+5\\1+7 & 0+5 & 0+0\\1+2 & 2+1 & 2+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\8 & 5 & 0\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

**Propiedades**

-Asociativa

Dadas las matrices m×n A, B y C

(A + B) + C = A + (B + C)

-Conmutativa

Dadas las matrices m×n A y B

A + B = B + A

-Existencia de matriz cero o matriz nula

A + 0 = 0 + A = A

**PRODUCTO POR UN ESCALAR:**

Dada una matriz A y un escalar c, su producto cA se calcula multiplicando el escalar por cada elemento de A

$$2\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\4 & -2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3\\2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\8 & -4 & 12\end{bmatrix}$$

**Propiedades**

Sean A y B matrices y c y d escalares.

- Clausura: Si A es matriz y c es escalar, entonces cA es matriz.
- Asociatividad: (cd)A = c(dA)
- Elemento Neutro: 1 ·A = A
- Distributividad:
  - De escalar: c(A+B) = cA+cB
  - De matriz: (c+d) A = cA+dA

## PRODUCTO DE DOS MATRICES:

El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si *A* es una matriz $m \times n$ y *B* es una matriz $n \times p$, entonces su producto matricial *AB* es la matriz $m \times p$ ($m$ filas, $p$ columnas).

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

**Propiedades**

Si los elementos de la matriz pertenecen a un cuerpo, y puede definirse el producto, el producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa: (AB)C = A(BC).
- Propiedad distributiva por la derecha: (A + B) C = AC + BC.
- Propiedad distributiva por la izquierda: C (A + B) = CA + CB.

En general, el producto de matrices tiene divisores de cero: Si A.B = 0 , No necesariamente A ó B son matrices nulas

El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación: Si A.B = A.C, No necesariamente B=C.

El producto de dos matrices generalmente no es conmutativo, es decir, AB ≠ BA. La división entre matrices, es decir, la operación que podría producir el cociente A / B, no se encuentra definida. Sin embargo, existe el concepto de matriz inversa, sólo aplicable a las matrices invertibles.

Si A es una matriz *m x r* y B es una matriz *r x n*, entonces el producto AB es la matriz *m x n* cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en el renglón "i" y en la columna "j" de AB, considerar solo el renglón "i" de la matriz A y la columna "j" de la matriz B. Multiplicar entre si los elementos correspondientes del renglón y de la columna mencionados y luego sumar los productos restantes.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Como A es una matriz 2 x 3 y B es una matriz 3 x 4, el producto AB es una matriz 2 x 4. Para determinar, por ejemplo, el elemento en el renglón 2 y en la columna 3 de AB, solo se consideran el renglón 2 de A y la columna 3 de B. Luego, como se ilustra a continuación, los elementos correspondientes (en tipo negro) se multiplican entre si y se suman los productos obtenidos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & \mathbf{4} & 3 \\ 0 & -1 & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & 7 & \mathbf{5} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

(2*4) + (6*3) + (0*5) = 26

y así obtenemos el siguiente resultado:

(1*4) + (2*0) + (4*2) = 12

(1*1) + (2*1) + (4*7) = 27

(1*4) + (2*3) + (4*5) = 30

(1*3) + (2*1) + (4*2) = 13

(2*4) + (6*0) + (0*2) = 8

(2*1) + (6*1) + (0*7) = -4

(2*3) + (6*1) + (0*2) = 12

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

**3.4. Definición de determinante.**

El determinante de una matriz cuadrada es un número real cuya definición exacta es bastante complicada. Por ello, definiremos primero el determinante de matrices pequeñas, y estudiaremos métodos y técnicas para calcular determinantes en general. Solamente se puede calcular el determinante a matrices cuadradas.

En cuanto a la notación, a veces el determinante se escribe con la palabra det, y otras veces se indica sustituyendo los paréntesis de la matriz por barras verticales.

El determinante de una matriz determina si los sistemas son singulares o mal condicionados. En otras palabras, sirve para determinar la existencia y la unicidad de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales.

- El determinante de una matriz es un número.
- Un determinante con valor de cero indica que se tiene un sistema singular.
- Un determinante con valor cercano a cero indica que se tiene un sistema mal condicionado.

Un sistema singular es cuando en el sistema de ecuaciones se tiene a más de una ecuación con el mismo valor de la pendiente. Por ejemplo, ecuaciones que representan líneas paralelas o ecuaciones que coinciden en los mismos puntos de traficación.

## 3.5. Calculo de determinantes por menores y cofactores.

### Ejemplo 1.

Obtener los menores $M_{13}$ y $M_{21}$ del determinante $D$ de $3 \times 3$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para $M_{13}$ eliminamos el renglón 1 y la columna 3 para obtener

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

De la misma forma, se elimina el renglón 2 y la columna 1 para tener

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Se llama cofactor del elemento $a_{ik}$ del determinante $D$, al menor $M_{ik}$ con el signo $(-1)^{i+k}$ y se denota $A_{ik}$, esto es

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

**Ejemplo 2.**

Obtenga los cofactores $A_{13}$ y $A_{21}$ del determinante D dado:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la fórmula (1) el cofactor $A_{13}$ está dado por

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = (4)(-3) - (6)(5) = -42$$

Y de la misma forma

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(-1)(7) - (-3)(3)\right] = -2$$

**Expansión por cofactores de un determinante**.

Se puede probar el siguiente

**Teorema**

Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de un renglón (o columna) cualquiera por sus cofactores correspondientes.

Esto es

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (2)$$

es el desarrollo del determinante *D* por el renglón *i*, y similarmente

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \qquad (3)$$

es el desarrollo del determinante *D* por la columna *k*.

Las expresiones (2) y (3) son fórmulas completamente generales, cualquier determinante de cualquier dimensión se puede evaluar usando estas fórmulas.

**Ejemplo 3.**

Desarrollar por cofactores del segundo renglón y calcular el valor del determinante *D*.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para expandir *D*, por cofactores del segundo renglón, calculamos primero los cofactores $A_{21}$, $A_{22}$ y $A_{23}$ de los elementos del segundo renglón.

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = (4)(-2) + (5)(-4) + (2)(0) = -28$$

**Ejemplo 4.**

Desarrollar por cofactores de la primera columna y calcular el valor del determinante *D* del ejemplo 3 para verificar que obtenemos el mismo valor.

Para expandir por cofactores de la primera columna, primero evaluamos los cofactores $A_{11}$, $A_{21}$, $A_{31}$ de los elementos de la primera columna:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 41 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Entonces

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = (2)(41) + (4)(-2) + (6)(-17) = -28$$

**Ejemplo 5.**

Considere la matriz A y calcule su determinante det *A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para evaluar el determinante de *A* usamos la fórmula (2) que permite desarrollar un determinante por cofactores de una columna. Observe que la primera columna de *A* consta de tres ceros y un 2. Desarrollando por la columna (1) se tiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= (2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aún falta evaluar el determinante de 3x3, que desarrollamos por cofactores de la columna 3 porque dos de sus elementos son ceros, entonces

$$\det A = (2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-12)(1+12) = -156$$

**Ejemplo 6.**

El determinante de una matriz triangular.
Considere la matriz *B* triangular, calcule det *B*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces, desarrollando por cofactores de la primera columna, y desarrollando los menores correspondientes de la misma forma, se tiene

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(2)(1)(5) = 30$$

Así que, el determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos en la diagonal principal.

### 3.6. Propiedades de los determinantes.

**1.** El determinante de una matriz $A$ y el de su traspuesta $A^t$ son iguales.

$$\left|A^t\right| = |A|$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad A^t = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \left|A^t\right| = -2$$

**2.** $|A| = 0$ Si:

Posee dos filas (o columnas) iguales.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los elementos de una fila (o una columna) son nulos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los elementos de una fila (o una columna) son combinación lineal de las otras.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$F_3 = F_1 + F_2$$

**3**. Un determinante triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

**4.** Si en un determinante se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), su valor sólo cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2$$

**5.** Si a los elementos de una fila (o una columna) se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Es decir, si una fila (o una columna) la transformamos en una combinación lineal de las demás, el valor del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16 \qquad C_3 = 2C_1 + C_2 + C_3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 16$$

**6.** Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila (o cualquier columna), pero sólo una.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 1 & 2 \\ 1 \cdot 2 & 2 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

**7.** Si todos los elementos de una fila (o columna) están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes en los que las demás filas (o columnas) permanecen invariantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a+b & a+c & a+d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & a & a \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ b & c & d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

**8** $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

### 3.7. Inversa de una matriz: método de la adjunta.

En el álgebra matricial, la división no está definida. La inversión de matrices es la contraparte de la división en álgebra.

La inversa de una matriz está definida como aquella matriz, que multiplicada por la original da por resultado la matriz identidad, se denota como $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

esto se cumple siempre y cuando $\det(A) \neq 0$.

La matriz inversa se obtiene en su forma clásica, de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$$

El procedimiento para obtener la matriz inversa de una matriz $A$ por el método de la adjunta es el siguiente:

- Se calcula el determinante de $A$. Si $\det(A) \neq 0$ entonces tiene matriz inversa (en caso contrario se dice que es una matriz *singular*)
- Se obtiene la transpuesta de $A$, es decir, $A^T$
- Se calcula la matriz de cofactores de $A^T$, dando lugar a la matriz adjunta de $A$, esto es, $Adj(A)$
- Se forma el producto $\frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$

**Ejemplo 1.**

Obtener la matriz inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-4)(-3) - (5)(2) = 12 - 10 = 2$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 4-4 \\ -\frac{15}{2}+\frac{15}{2} & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

**Ejemplo 2: Calcular la inversa de la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**que corresponde a los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales de arriba.**

**Solución:**

Para calcular la inversa debemos seguir los siguientes pasos:

## 1. Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2)(0)(0) + (3)(1)(1) + (5)(0)(0) - (1)(0)(5) - (0)(3)(1) - (2)(0)(1) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Dado que el determinante no es cero, la matriz tiene inversa.

**2. Hallamos la matriz adjunta:** Es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto**.** Esto es,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

Donde:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathbf{det}(\text{matriz resultante al eliminar la fila } i \text{ y columna } j \text{ de la matriz } A).$$

Así

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3. Calculamos la transpuesta de la matriz adjunta:** Si

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4. La matriz inversa es igual a la transpuesta de la matriz adjunta entre el determinante de la matriz original:** Esto es,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{(A^{*T})}{|A|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, hemos obtenido la inversa de la matriz $A$.

**Observación:** Como comentario final, podemos resolver el sistema de ecuaciones lineales previamente planteado haciendo

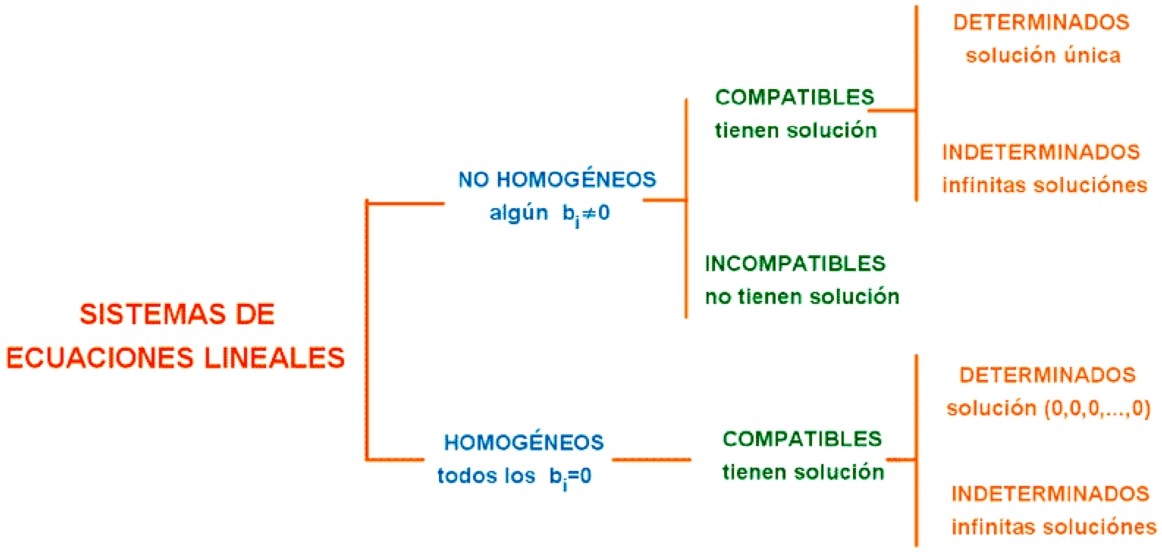
$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ obteniendo que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, la elección de

$$x = \frac{1}{3}, \qquad y = -2 \qquad \text{y} \qquad z = \frac{7}{3}$$

### 3.8. Definición de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y no homogéneo.




Un sistema de ecuaciones es **homogéneo** si todos sus términos independientes son nulos.

Un sistema de ecuaciones **no homogéneo** es aquel que tiene alguno de sus términos independientes no nulos.

### Ejemplos de sistemas homogéneos

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 15y + 4z = 0 \\ -2y - 3z = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = z \\ 2x + 4z = 4y \\ -3y - 5z = 2x \end{cases}$$

### Ejemplos de sistemas no homogéneos

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 2x - 5y + z = 2 \\ x - 2y - 3z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 15y + 4z = 15 \\ -2y - 3z + 13 = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2 = z \\ 2x + 4z = 4y\text{-}1 \\ -4y - 5z = 7x \end{cases}$$

Cuando un sistema de ecuaciones tiene alguna solución se le llama compatible. Si la solución es única, se lo denomina compatible determinado y si tiene infinitas soluciones compatible indeterminado.

Si un sistema de ecuaciones no tiene solución decimos que es un sistema incompatible.

### 3.9. Solución de sistema de ecuaciones lineales

#### Método de sustitución

A través del método de sustitución lo que debemos hacer es despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la siguiente. Lo veremos con más detalle en el siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{array}{lll} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, despejamos una de las incógnitas en la primera ecuación.

x+y=7

x= **7-y**

A continuación, sustituimos en la segunda ecuación el valor correspondiente de la «x».

5x-2y=-7

5.(**7-y**)-2y=7

Ahora, despejamos la «y».

35-5y-2y=-7

35-7y=-7

-7y=-7-35

-7y=-42

y=-42/-7=6

**y=6**

Por último, utilizamos el valor de «y» para hallar el valor de «x».

x= **7-y**

x=7-6=1

**x=1**

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

**Método de reducción.**

Con el método de reducción lo que hacemos es combinar, sumando o restando, nuestras ecuaciones para que desaparezca una de nuestras incógnitas.

Los pasos a seguir son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, necesitamos preparar las dos ecuaciones, si es necesario, multiplicándolas por los números que convenga.

En este caso, queremos reducir la «y» de nuestro sistema, por tanto, multiplicamos la primera ecuación por 2.

2(x+y=7)

5x-2y=-7

Así, el sistema se queda:

$$\left.\begin{array}{lll} 2x & +2y & =14 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

Si nos fijamos, sumando las ecuaciones la y nos desaparece.

$$\begin{array}{lll} 2x & +2y & =14 \\ +5x & -2y & =-7 \\ \hline +7x & 0 & =7 \end{array}$$

Y nos quedaría:

7x=7

x=7/7=1

**x=1**

Por último, sustituimos el valor que hemos calculado despejando la otra incógnita en una de las ecuaciones iniciales.

y= **7-x**

y=7-1=6

**y=6**

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

**Método de igualación.**

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y después igualar los resultados.

Los pasos a seguir son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, elegimos la incógnita que deseamos despejar. En este caso, empezaré por la «x» y despejo la misma en ambas ecuaciones.

x+y=7; x=**7-y**

5x-2y=-7; 5x=2y-7; x=**(2y-7)/5**

Una vez hemos despejado, igualamos:

7-y=(2y-7)/5

5(7-y=(2y-7)/5)

35-5y=2y-7

42=7y

y=42/7=6

**y=6**

Por último, sustituimos el valor que hemos calculado despejando la otra incógnita en una de las ecuaciones iniciales.

x=**7-y**

x=7-6=1

**x=1**

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

Realiza ahora tú mismo los siguientes sistemas de ecuaciones lineales propuestos por los tres métodos:

$$A)\left.\begin{array}{lll} x & -2y & =0 \\ x & -y & =12 \end{array}\right\} \qquad B)\left.\begin{array}{lll} x & +y & =48 \\ x & -3y & =4 \end{array}\right\} \qquad c)\left.\begin{array}{lll} x & .y & =20 \\ 2x & +2y & =18 \end{array}\right\}$$

$$D)\left.\begin{array}{lll} 4x & +y & =8 \\ 2x & -2y & =-6 \end{array}\right\} \qquad E)\left.\begin{array}{lll} 3x & +2y & =6 \\ 2x & -4y & =-12 \end{array}\right\}$$

### 3.10. Método de Gauss.

El Método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineal en otro escalonado.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +3z & =-8 \\ & +y & +3z & =8 \\ & & +z & =2 \end{array}\right\}$$

El sistema transformado en matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +3 & -8 \\ 0 & +1 & +3 & +8 \\ 0 & 0 & +1 & +2 \end{pmatrix}$$

Si te fijas, ya podemos despejar directamente una de las incógnitas. Por tanto, este tipo de sistemas es muy fácil de resolver obteniendo el valor de las incógnitas de abajo hacia arriba. De esta manera, podemos ir sustituyendo los valores obtenidos en las anteriores.

z=2

Sustituimos el valor de "z" en la segunda ecuación y obtenemos el valor de "y":

y+3. (2) = 8;

y=8-6=2

y=+2

Sustituimos el valor de "z" e "y" en la primera ecuación y obtenemos "x":

y=2

x+(2) +3. (2) =-8;

x=-16

Si nuestro sistema no es un sistema escalonado, lo podemos resolver mediante el método de Gauss**.** El método consiste en "hacemos cero", es decir, sometemos a las ecuaciones a transformaciones elementales:

- Multiplicamos por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número.

Para trabajar mejor utilizamos sólo los números (coeficientes y término independiente) y trabajamos con una estructura de matriz.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{cccc} +x & +y & +z & =2 \\ 3x & -2y & -z & =4 \\ -2x & +y & +2z & =2 \end{array}\right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ +3 & -2 & -1 & +4 \\ -2 & +1 & +2 & +2 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

- **Fila uno** multiplicada por -3

  -3. (+1 +1 +1 +2) =-3 -3 -3 -6

**Le sumo la fila 2.**

$$\begin{array}{cccc} -3 & -3 & -3 & -6 \\ +3 & -2 & -1 & +4 \\ \hline 0 & -5 & -4 & -2 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

- **Fila uno** multiplicada por +2.
  +2. (+1 + 1+1 +2) =+2 +2 +2 +4

- **Le sumo la fila 3.**

$$\begin{array}{cccc} +2 & +2 & +2 & +4 \\ -2 & +1 & +2 & +2 \\ \hline 0 & +3 & +4 & +6 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & +3 & +4 & +6 \end{pmatrix}$$

**Segundas transformaciones**, deseamos realizar los ceros de la segunda columna:

Para ello, sólo utilizamos la segunda y tercera fila:

**Fila uno** se mantiene.

**Fila dos** se multiplica por 3.

+3. (0 -5 -4 -2) =+0 -15 -12 -6

Fila tres se multiplica por 5.

+5. (0 +3 +4 +6) =0 +15 +20 +30

Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -15 & -12 & -6 \\ 0 & +15 & +20 & +30 \\ \hline 0 & 0 & +8 & +24 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & +8 & +24 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 2 \\ & -5y & -4z & = -2 \\ & & +8z & = +24 \end{array}\right\}$$

Siendo la solución:

z=24/8=+3

z=+3

Sustituimos el valor de "z" en la segunda ecuación y obtenemos el valor de "y":

-5y-4.3=-2

-5y=-2+12

y=+10/-5=-2

y=-2

Sustituimos el valor de "z" e "y" en la primera ecuación y obtenemos "x":

x+(-2 )+3=+2

x=+2-3+2

x=+1

### 3.11. Método de Gauss-Jordán.

Consiste en encontrar otro sistema de ecuaciones equivalente, de manera que la matriz ampliada, en la forma (*A*|*B*), mediante operaciones elementales de matrices, se convierta en una matriz escalonada reducida. O, lo que es lo mismo, que la parte de la izquierda, la matriz *A*, o matriz de coeficientes, se transforme en una matriz identidad. El sistema queda resuelto directamente.

Esas operaciones elementales son:

- Intercambiar filas.
- Multiplicar una fila por un número real diferente de cero.
- Obtener una fila al sumarla a otra multiplicada por un número real diferente de cero.

Un paso intermedio es llegar a una matriz escalonada: que proporciona un sistema de ecuaciones lineales equivalente que ofrece una solución a las raíces, retrocediendo de la última ecuación a la primera. Esto es el método de Gauss o eliminación gaussiana.

Recordemos que un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Puede expresarse en forma matricial:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_n \end{pmatrix}}$$

O, abreviadamente:

$$A \cdot X = B$$

La matriz de coeficientes *A* está formada por los coeficientes de las $x_n$ incógnitas (ya se ha dicho que su determinante no es nulo).

La matriz *X* es la matriz columna formada por las $x_i$ incógnitas.

La matriz *B* es la matriz columna formada los *n* términos independientes.

Se muestra la aplicación del método de Gauss-Jordán para resolver un caso particular de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

**Ejercicio:**

Hallar las raíces de este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordán:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=-7 \\ x-y+2z=3 \\ 4x+5y+z=0 \end{array}\right\}$$

**Solución:**

Se construye la matriz ampliada, añadiendo a la matriz de coeficientes de las incógnitas *A*, la matriz vertical de los términos independientes *B*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se intercambian la primera fila y la segunda. (Siempre que sea posible, el primer elemento de la primera fila conviene que sea el 1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -7 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales hacen 0 los siguientes elementos de la primera columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -7 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 9 & -7 & -12 \end{array}\right)$$

Operamos para hacer 0 el último elemento de la segunda columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 9 & -7 & -12 \end{array}\right) F_3 \leftarrow F_3 - \frac{9}{5}F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & \frac{84}{5} \end{array}\right)$$

Hasta aquí serían las transformaciones del método de Gauss o eliminación gaussiana. Pero seguimos transformando hasta llegar a una matriz escalonada reducida, que es el método de Gauss-Jordán.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & \frac{28}{5} & \frac{84}{5} \end{array}\right) F_3 \leftarrow \frac{5}{28}F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) F_2 \leftarrow \frac{F_2}{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) F_2 \leftarrow F_2 + \frac{7}{5}F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Quedan las últimas transformaciones para hacer ceros en el segundo y tercer elemento de la primera fila para llegar a la matriz escalonada reducida que se busca:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad F_1 \rightarrow F_1 - 2F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) F_1 \rightarrow F_1 + F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{array}\right)$$

Con el método de Gauss-Jordán, se ha llegado a una matriz escalonada reducida, donde, a la izquierda está la matriz identidad. La matriz escalonada conseguida se corresponde con este sistema de ecuaciones lineales equivalente:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

Este sistema ofrece directamente las raíces del sistema que se buscan, $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$.

### 3.12. Inversa de una matriz aplicando método de Gauss-Jordán.

Es un método eficiente para matrices 2 x 2 y 3 x 3.
Consiste en construir una matriz aumentada, colocando a la derecha de la matriz original *A* una matriz identidad $I_n$ del mismo orden.

A continuación, se hacen las transformaciones elementales sucesivas con el fin de que la matriz identidad quede ahora a la izquierda. La submatriz de la derecha obtenida será la matriz inversa. Por ejemplo, sea la matriz *A* del que buscamos su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Formamos una matriz aumentada, añadiendo a su derecha la correspondiente matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sucesivas transformaciones en filas se encaminarán a que la matriz identidad quede al final a la izquierda. Las primeras transformaciones buscan que la primera columna tenga un primer elemento 1 seguido de ceros. Luego buscamos que, de la segunda columna, su segundo elemento (perteneciente a la diagonal principal) sea el 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftarrow F_2/3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se sigue transformando, completando con ceros debajo del 1 anterior en la segunda columna. Después, transformamos para que el último elemento de la diagonal principal sea un 1. El proceso final terminará haciendo ahora 0 los elementos que queden por encima de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 5F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow 3F_3/5} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 5F_3/3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right)$$

Y se ha llegado a formar la matriz identidad a la izquierda, quedando a la derecha la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 2F_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 7/5 & -2 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 7/5 & -2 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{2/5} & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1/5} & \mathbf{-1} & \mathbf{3/5} \end{array}\right)$$

La matriz inversa buscada es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 1/5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1/5 & -1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

# UNIDAD IV. ESPACIOS VECTORIALES

## 4.1. Definición de espacio vectorial.

Del latín spatium, el espacio puede ser la extensión que contiene la materia existente, la capacidad de un lugar o la parte que ocupa un objeto sensible.

### Espacio vectorial

Vectorial, por su parte, es lo perteneciente o relativo a los vectores. Este término, de origen latino, refiere al agente que transporta algo de un lugar a otro o a aquello que permite representar una magnitud física y que se define por un módulo y una dirección u orientación.

La noción de espacio vectorial se utiliza para nombrar a la estructura matemática que se crea a partir de un conjunto no vacío y que cumple con diversos requisitos y propiedades iniciales. Esta estructura surge mediante una operación de suma (interna al conjunto) y una operación de producto entre dicho conjunto y un cuerpo.

Es importante tener en cuenta que todo espacio vectorial dispone de una base y que todas las bases de un espacio vectorial, a su vez, presentan la misma cardinalidad.

### Datos históricos y aplicaciones

Espacio vectorial Fue a partir del siglo XVII que los estudiosos comenzaron a caminar hacia la concepción de los espacios vectoriales, con temas tales como las matrices, los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría analítica. Este concepto deriva de la geometría afín (estudio de las propiedades de la geometría que no varían con transformaciones afines, tales como las traslaciones o las lineales no singulares), al introducir coordenadas en el espacio tridimensional o el plano.

Cerca del año 1636, Descartes y Fermat (célebres científicos originarios de Francia) establecieron los fundamentos de la geometría analítica, tomando una ecuación con dos variables y vinculando sus soluciones con la determinación de una curva plana. Para conseguir una solución dentro de los límites de la geometría sin necesidad de recurrir a las coordenadas, el matemático checo Bernard Bolzano presentó un siglo y medio más tarde algunas operaciones sobre planos, líneas y puntos que pueden considerarse antecesores de los vectores.

Sin embargo, recién a finales del siglo XIX, Giuseppe Peano, conocido matemático italiano, realizó la primera formulación moderna y axiomática de los espacios vectoriales. Seguidamente, esta teoría se enriqueció de la rama de las matemáticas conocida con el nombre de análisis funcional, más precisamente de los espacios de funciones. Para poder resolver los problemas de análisis funcional que presentaban el fenómeno conocido como límite de una sucesión o convergencia, se asignó a los espacios vectoriales una topología apropiada, para que fuese posible considerar la continuidad y la proximidad.

Cabe mencionar que los vectores como concepto propiamente dicho nacen con el bipoint de Giusto Bellavitis, un segmento orientado que posee un extremo llamado origen y otro, objetivo. Más tarde, fue tomado en cuenta cuando Argand y Hamilton presentaron los números complejos y este último creó los cuaterniones, además de ser quien concibió la denominación de vector. Laguerre, por su parte, fue responsable de la definición de los sistemas de ecuaciones lineales y de la combinación lineal de vectores.

También en la segunda mitad del siglo XIX, un matemático británico llamado Arthur Cayley presentó la notación matricial, gracias a la cual es posible armonizar y simplificar las aplicaciones lineales. Casi cien años más tarde, se produjo una interacción entre el análisis funcional y el álgebra, principalmente con conceptos tan importantes como los espacios de Hilbert y los de funciones p-integrables.

Entre las aplicaciones de los espacios vectoriales se encuentran ciertas funciones de compresión de sonido e imágenes, que se basan en las series de Fourier y otros métodos, y la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (relacionar una función matemática con diversas variables independientes y las derivadas parciales de la misma respecto de dichas variables). Por otro lado, sirven para el tratamiento de objetos físicos y geométricos, como ser los tensores.

### 4.2. Subespacios vectoriales.

Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y suponga que H es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V. Entonces se dice que H es un sub espacio de V.

Existen múltiples ejemplos de subespacio, sin embargo, en primer lugar, se demostrará un resultado que hace relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es en realidad sub espacio de V

**Teorema de subespacio**

Un subconjunto no vacío de H de un espacio vectorial V es un sub espacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

Reglas de cerradura para ver si un subconjunto no vació es un sub espacio

i) Si x € *H* y y € *H*, entonces x + y € *H.*

ii) Si x € *H,* entonces αx € *H* para todo escalar α.

Es obvio que, si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura se deberán cumplir. De lo contrario, para demostrar que es un espacio vectorial, se deberá demostrar que los axiomas i) a x) de la definición cumplen bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V. Las dos operaciones de cerradura [axiomas i) y iv)] se cumplen por hipótesis, como los vectores en H son también vectores en V, las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa [axiomas *ii*), *v*), *vii*), *viii*), *ix*) y *x*)] se cumplen.

Este teorema demuestra que para probar si *H* es o no es un sub espacio de V, es suficiente verificar que:

x + y y αX están en *H* cuando x y y están en *H* y α es un escalar.

**Propiedades de Sub Espacio Vectorial**

1). El vector cero de *V* está en *H*.2

2). *H* es cerrado bajo la suma de vectores. Esto es, para cada u y v en *H*, la suma u + v está en *H.*

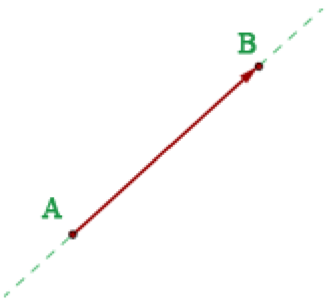
3). *H* es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada u en *H* y cada escalar *c*, el vector *CU* está en *H.*

### 4.3. Condiciones de existencia.

**1** Dirección de un vector: La dirección del vector es la dirección de la recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella.

**2** Sentido de un vector: El sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ es el que va desde el origen $A$ al extremo $B$.

**3** Módulo de un vector:




El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento $AB$, se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
El módulo de un vector es un número siempre positivo o cero.

Módulo de un vector a partir de sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

**Ejemplo**

$\vec{u} = (3, 4)$ $\qquad\qquad$ $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Módulo a partir de las coordenadas de los puntos:

$A(x_1, y_1) \qquad\qquad B(x_2, y_2)$

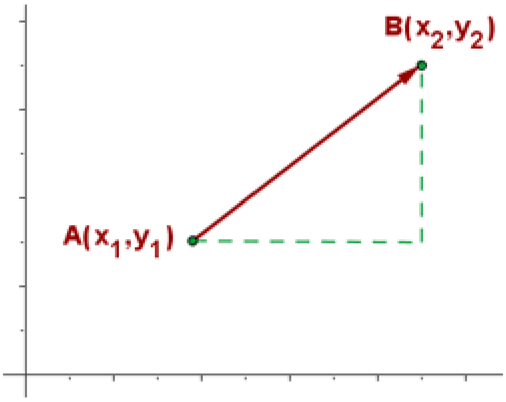
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ejemplo**

$A(2, 1) \qquad\qquad B(-3, 2)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{26}$$

**4** Coordenadas de un vector




Si las coordenadas de los puntos extremos, $A$ y $B$, son:

$A(x_1, y_1) \qquad\qquad A(x_2, y_2)$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

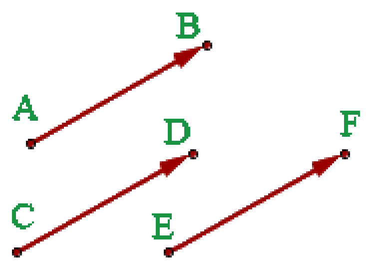
**Ejemplo:**

$A(2,2) \qquad B(5,7)$

$\overrightarrow{AB} = (5-2, 7-2) \qquad \overrightarrow{AB} = (3,5)$

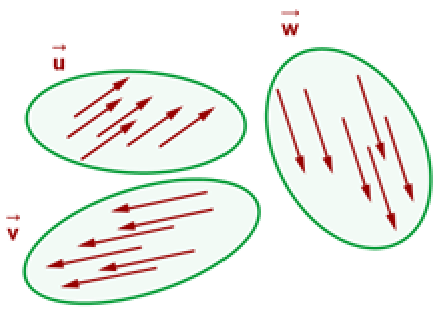
**Clases de vectores**

**1** Vectores equipolentes



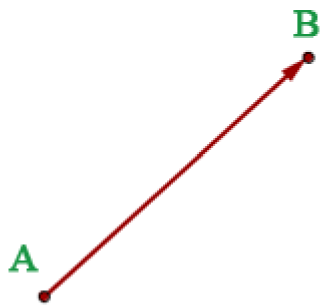

Dos vectores son equipolentes cuando tienen igual módulo, dirección y sentido.

**2** Vectores libres



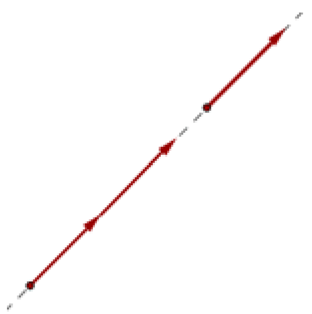

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama vector libre. Cada vector fijo es un representante del vector libre.

**3** Vectores fijos:



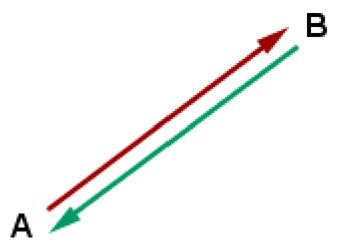

Un vector fijo es un representante del vector libre. Es decir, los vectores fijos tienen el mismo módulo, dirección, sentido y origen.

**4** Vectores ligados



Los vectores ligados son vectores equipolentes que actúan en la misma recta. Es decir, los vectores fijos tienen el mismo módulo, dirección, sentido y se encuentran en la misma recta.

**5** Vectores opuestos

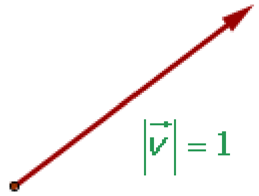



Los vectores opuestos tienen el mismo módulo, dirección, y distinto sentido.

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$$

**6** Vectores unitarios

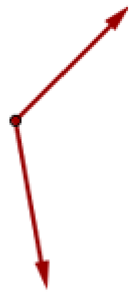



Los vectores unitarios tienen de módulo, la unidad.

Para obtener un vector unitario, de la misma dirección y sentido que el vector dado se divide éste por su módulo.

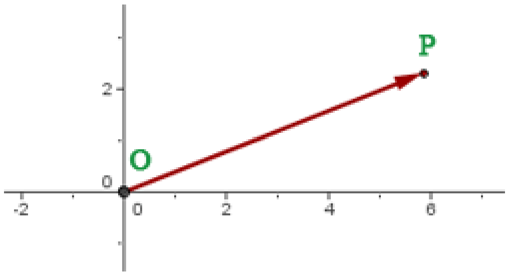
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

**7** Vectores concurrentes



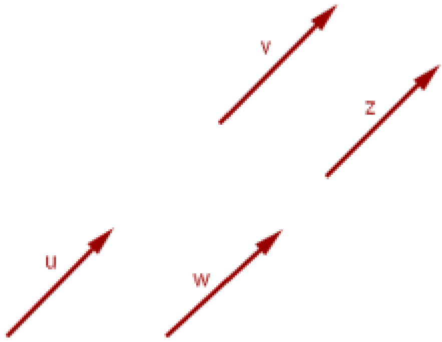
Los vectores concurrentes tienen el mismo origen.

**8** Vectores de posición




El vector $\overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas $O$ con un punto $P$ se llama vector de posición del punto $P$.

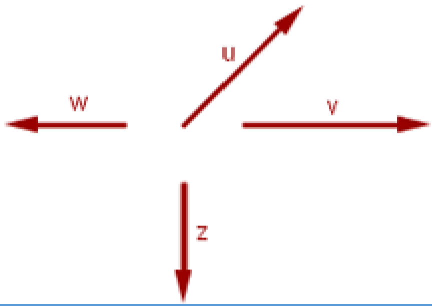
**9** Vectores linealmente dependientes:




Varios vectores libres del plano son linealmente dependientes si existe una combinación lineal de ellos que sea igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes de la combinación lineal.

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + ... + a_n\vec{v_n} = 0$$

**10** Vectores linealmente independientes

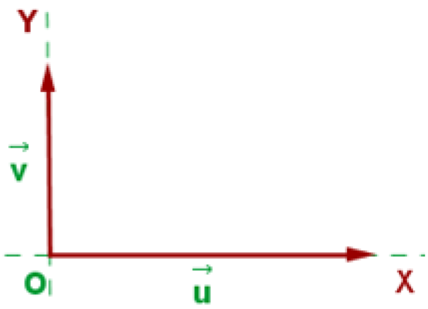


Varios vectores libres son linealmente independientes si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros.

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \ldots + a_n\vec{v_n} = 0$$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

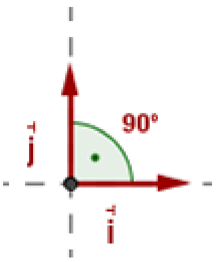
**11** Vectores ortogonales




Dos vectores son ortogonales o perpendiculares si su producto escalar es cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

**12** Vectores ortonormales




Dos vectores son ortonormales si:

**a** Su producto escalar es cero.

**b** Los dos vectores son unitarios.

### 4.4. Independencia lineal.

Varios vectores libres son linealmente independientes si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes, de manera que, si la combinación lineal es igual a cero, entonces cada uno de sus coeficientes es igual a cero

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Los vectores linealmente independientes tienen distinta dirección y sus componentes no son proporcionales.

$n$ vectores en $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes si su determinante es distinto de cero.

**Ejemplo:**

Estudiar si son linealmente dependientes o independientes los vectores $\vec{u} = (2, 3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 3, -1)$

**1.** Calculamos el determinante de los vectores

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

**2.** Como el determinante es igual a cero, concluimos que los vectores son linealmente dependientes.

Sea *V* es un espacio vectorial. Se dice que un vector $\vec{v}$ en *V* es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, también en *V*, si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

Se dice que un conjunto de *n* vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de un espacio vectorial *V* son linealmente dependientes si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todos cero, tales que

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \qquad (1)$$

Observa que la ecuación (1) se cumple siempre si las constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todas cero. Si la única forma en que se cumple la ecuación (1) es ésta, esto es, si

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{sólo si} \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

entonces se dice que los vectores son linealmente independientes.

**Ejemplo 1.**

Considere los vectores $\vec{v}_1 = (2,-1,3)$, y $\vec{v}_2 = (-6,3,-9)$. Al observar las componentes de ambos vectores vemos que $\vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$ o que

$$3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$$

lo que podemos expresar diciendo que el vector cero se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Mas formalmente decimos que el vector cero es una combinación lineal no trivial de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. En el sentido de que los coeficientes de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son diferentes de cero. Por lo tanto estos vectores son dependientes.

**Ejemplo 2.**

Considere ahora los vectores $\vec{x} = (2,-1,3)$ y $\vec{y} = (3,-1,4)$. La combinación lineal

$$a_1\vec{x} + a_2\vec{y} = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + 3a_2 \\ a_1 - a_2 \\ 3a_1 + 4a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

implica que

$$\begin{aligned} 2a_1 + 3a_2 &= 0 \\ a_1 - a_2 &= 0 \\ 3a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}$$

y la única solución a este sistema es $a_1 = a_2 = 0$. Entonces $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son vectores independientes o linealmente independientes.

En el ejemplo 2 se ve que la idea de independencia lineal está relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales. Esta relación se puede establecer así:

Un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de $k$ vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si, y sólo si, el

sistema homogéneo de ecuaciones de $n \times k$

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0} \qquad (2)$$

tiene sólo la solución trivial $\vec{x} = \vec{0}$.

Este sistema de ecuaciones lineal homogéneo (2) tiene solución no trivial si el número de incógnitas k es mayor que el número de ecuaciones $n$, esto es, si k > $n$. Por lo que cualquier conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $k > n$.

**Ejemplo 3.**

El conjunto de vectores $(1,0), (0,1), (2,3)$ de $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente por ser tres vectores en $\mathbb{R}^2$.

La independencia lineal puesta en palabras:

- Un conjunto de vectores (diferentes de cero) de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si y sólo si, algún vector del conjunto es una combinación lineal de los demás. Es decir, si uno de los vectores depende de los demás, el conjunto es dependiente.

- Un conjunto de vectores (diferentes de cero) de un espacio vectorial V es linealmente independiente, si y sólo si, ningún vector del conjunto es una combinación lineal de los demás. Es decir, si ninguno de los vectores depende de los demás, el conjunto es independiente.

- Si un vector es un múltiplo escalar de otro, los vectores son linealmente dependientes.

- Cualquier conjunto de más de $n$ vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.

Finalmente:

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ *n* vectores de $\mathbb{R}^n$, las siguientes condiciones son equivalentes

1. Los vectores son independientes.
2. La matriz *A* que tiene a estos vectores como vectores columna es invertible.
3. *A* se puede reducir a la matriz identidad de $n \times n$. (*A* es equivalente por renglones a $I_n$).
4. La forma escalonada por renglones de *A* tiene n pivotes.
5. $\det A \neq 0$.

**4.5 y 4.6. Vectores y valores propios.**

Sea *T* una aplicación o transformación lineal endomórfica de orden *N*, se dice que el vector *V* no nulo es un vector propio si y sólo se transforma de la manera:

$T(V)= kV$

donde *k* es un valor propio.

Ejemplo

Sea la matriz *A*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

asociada a la aplicación lineal $T:R^3 \text{->} R^3$; obtener los valores propios de *A*.

1ro. Se plantea $|A-kI|=0$ para obtener el polinomio característico:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 3 & 2-k & 1 \\ 2 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-k)\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2-k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que es reducido a:

$-k^3+6k^2+2k-12=0$ (Polinomio característico de *A*)

2do. Se determinan las raíces del polinomio:

$-k^3+2k+6k^2-12=0$

$=-k(k^2-2)+6(k^2-2)$

$(6-k)(k^2-2)=0$

siendo 6 y $\pm\sqrt{2}$ que son valores propios de *A* por ser reales.

3ro. Se calculan los subespacios vectoriales de cada valor propio, sustituyéndolos por *k* en el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 3 & 2-k & 1 \\ 2 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $k=6$ el subespacio vectorial es $\{(a, b, c) \in R^3 \mid a=b=c\}$.

Luego se determina un vector no nulo cualquiera por cada subespacio vectorial que serán vectores propios del correspondiente valor propio. En el caso del valor propio 6 puede un vector propio suyo sería $(1,1,1)$.

**Importancia**

Los valores y vectores propios son clave para la diagonalización de matrices cuadradas, proceso que se hace mediante la resolución del polinomio característico de la matriz cuadrada asociada a la transformación lineal en cuestión, usando por lo general el teorema de Cayley-Hamilton. Una vez encontrada la matriz diagonal semejante, los cálculos de la aplicación lineal se simplifican notablemente a meros productos. Para matrices superiores al orden 3, se obtendrán polinomios que no tendrán un método general de factorización.

### 4.7. Base y dimensión.

Un conjunto de vectores S={v1, v2,…, vn} en un espacio vectorial V se denomina base de V si se cumplen las siguientes condiciones.

* S genera a V.

* S es linealmente independiente

Una base posee 2 características que se acaban de ver, debe tener suficientes valores para generar a V, pero no tantos de modo que uno de ellos pueda escribirse como una combinación lineal de los demás vectores en S. Si un espacio vectorial consta de un número finito de vectores, entonces V es de dimensión finita. En caso contrario, V es de dimensión infinita.

**Base**

En términos generales, una "base" para un espacio vectorial es un conjunto de vectores del espacio, a partir de los cuales se puede obtener cualquier otro vector de dicho espacio, haciendo uso de las operaciones en él definidas.

La base es natural, estándar o canónica si los vectores $v_1, v_2,\ldots, v_n$ forman base para $R^n$.

Si $S=\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V entonces todo vector v en V se puede expresar como:

1. $V = c_1v_1+ c_2v_2+\ldots+ c_nv_n$

2. $V = k_1v_1+ k_2v_2+\ldots+ k_nv_n$

Restar 2-1

$$0 = (c_1- k_1)\, v_1+(c_2- k_2)\, v_2+\ldots+(c_n- k_n)\, v_n$$

Ejemplo:

demostrar si $S = \{v_1, v_2,\ldots, v_3\}$ es base de $R^3$, $v_1 = (1,2,1)$; $v_2 = (2,9,0)$; $v_3 = (3,3,4)$

Proponer vector arbitrario, combinación lineal

$b = c_1v_1+ c_2v_2+ c_3v_3$

$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1,2,1)+ c_2(2,9,0)+ c_3(3,3,4)$

$(b_1, b_2, b_3) = c_1+2c_2+3c_3;2c_1+9c_2+3c_3;\ c_1+4c_3$

$c_1 \ + 2c_2 + 3c_3 = b_1$ det A = [(1*9*4)+(2*3*1)+0]-[(1*9*3)+0+(4*2*2)]

$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = b_2$ = [36+6]-[27+16]

$c_1 \qquad + 4c_3 = b_3$ = -1 Si genera a $R^3$

**4.8.- Bases ortonormales. Proceso de Gram-schimidt.**

Los vectores de una base pueden ser mutuamente perpendiculares, o pueden no serlo. Cuando son mutuamente perpendiculares se dice que es una base ortogonal.

Recuérdese que dos vectores *u* y *v* en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si $u \cdot v = 0$.

Si se tiene un conjunto de tres vectores *u, v* y *w* en $\mathbb{R}^3$, y se quiere verificar que sean un conjunto ortogonal, se necesitan realizar todas las combinaciones de los productos punto:

$$u \cdot v \ , \quad u \cdot w \ , \ v \cdot w$$

**Ejemplo 1.**

Sean los vectores $u = (1, 2, 1)$, $v = (4, 0, -4)$ y $w = (1, -1, 1)$, ¿son un conjunto ortogonal?

Al realizar los productos punto

$$u \cdot v = 0 \quad , \quad u \cdot w = 0 \quad , \quad v \cdot w = 0$$

nos damos cuenta de que todos son iguales a cero, por lo que el conjunto de vectores es ortogonal.

Un conjunto de *n* vectores en $\mathbb{R}^n$ es una base ortogonal si:

- El conjunto es base de $\mathbb{R}^n$ y Es un conjunto ortogonal.

**Ejemplo 2.**

Sean los vectores $u$ = (1, 2, 1), $v$ = (4, 0, -4) y $w$ = (1, -1, 1); queremos determinar si son una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, se forma la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante det$A$ = –24 (diferente de cero) , lo que implica que los vectores son linealmente independientes, y el conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

Realizamos los productos punto y obtenemos que

$$u \cdot v = 0, \quad u \cdot w = 0 \quad \text{y} \quad v \cdot w = 0$$

por lo que el conjunto es ortogonal, entonces, es una base ortogonal.

Un conjunto de $n$ vectores en $\mathbb{R}^n$ es una base orto normal si:

- El conjunto es base de $\mathbb{R}^n$
- Es un conjunto ortogonal y
- Sus vectores son unitarios

## 4.9. Trasformaciones lineales.

Las transformaciones lineales desempeñan un papel muy importante en matemáticas, física, ingeniería, procedimiento de imágenes, gráficas en computadoras y muchas otras áreas de la ciencia y la vida diaria. Las transformaciones lineales son mapeos de importancia fundamental en el álgebra lineal y en sus aplicaciones. Son transformaciones entre espacios vectoriales que conservan la suma vectorial y la multiplicación por escalar.

Las transformaciones lineales son las aplicaciones entre espacios vectoriales, es decir, que su dominio y codominio lo son. Las tranformaciones lineales, también llamadas aplicación lineal, función lineal u operador lineal, son muy importantes y son muy utilizadas en algebra pero debes conocer que para que esta aplicación sea una tranformada lineal debe cumplir con dos condiciones. Por lo tanto para que T: V→W sea una transformación lineal debe cumplir:

T(x+y) =T(x)+T(y) T(kx) = k.T(x)

Al no cumplir cualquiera de estas condiciones no se trata de una transformación lineal, por lo tanto, debes corroborarlas cuando sea necesario.

**4.9.1. Definición de transformación lineal.**

Una transformación lineal es una función o aplicación lineal cuyo dominio y codominio son espacios vectoriales, en lugar de los números reales como es el caso de las funciones en el campo real. Por supuesto esta tiene que cumplir con ciertas propiedades, pero siempre sobre los espacios vectoriales.

A las transformaciones lineales también se les llama operaciones lineares. Una transformación lineal es entonces, una función entre dos espacios vectoriales que preserva las operaciones de espacio vectorial, es decir, el conjunto de llegada (codominio o imagen) de la suma de los 2 vectores del dominio (conjunto de salida) es la suma de las imágenes de cada uno de los vectores y la imagen del producto del vector por el escalar.

La transformación lineal es una definición entre espacios vectoriales, es decir, el objetivo es transformar un espacio vectorial en otro. Para enseñar una transformación lineal usaremos F (v)=W, son los espacios vectoriales que actúan sobre un mismo campo. A las transformaciones lineales las llamaremos aplicación lineal.

Una aplicación entre conjuntos A y B es una regla que permite asignar a cada elemento de A, uno de B.

La aplicación de f del conjunto A en el conjunto B si indica mediante f: AB. El conjunto A se llama conjunto inicial, y el conjunto B final. Si la aplicación f asigna al elemento a E A el elemento b E B , diremos que b es la imagen de a, lo que se denota por f(a)=b. la regla ha de estar inequivocadamente definida, de modo que para todos y cada uno de los elementos de A, este claro que elemento de B es su imagen.

## En síntesis, podemos dar la siguiente definición:

Una función T: V ® W (de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W) se dice una transformación lineal si, para todo a, b Î V, k Î K (K es el cuerpo de escalares) se tiene:

$T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$

$T(k\,\mathbf{a}) = k\,T(\mathbf{a})$

que se puede resumir en $T(a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}) = a\,T(\mathbf{a}) + b\,T(\mathbf{b})$, llamada propiedad delinealidad.

Si T: V --- W es una transformación lineal, el espacio V se llama dominio de T y el espacio W se llama codominio de T.

### 4.9.2. Propiedades de transformaciones linéales: núcleo y recorrido.

- Para toda transformación lineal T: V ----- W, T (-x) = -T (x)
- Para toda transformación lineal T: V ----- W, T (0) = 0 (El que aparece en la izquierda es el vector nulo de V, mientras que el que aparece en el lado derecho es el vector nulo de W. Se puede escribir también $T(0_V) = 0_W$ )
- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, W un espacio vectorial, $\{v_1,\ldots, v_n\}$ una base de V, y $\{z_1,\ldots, z_n\}$ un conjunto cualquiera de vectores de W. Entonces existe una única transformación lineal T: V ® W tal que $T(v_i) = z_i$ ($1 \le i \le n$

### 4.9.3. Transformaciones lineales de Rn a Rm

<u>**Ejercicio**</u>

**Determine si la transformación dada de *V* en *W* es lineal**

$$T : R^3 \rightarrow R^2$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Comprobamos la primera propiedad : $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{v}$

Sea el vector $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $y$ $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{v}$$

$$T\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **La Transformación no es lineal.**

**Ejercicio**

**Determine si la transformación dada de $V$ en $W$ es lineal**

$\boldsymbol{T : R^2 \rightarrow R}$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,y$$

Comprobamos la primera propiedad : $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{v}$

Sea el vector $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ $y$ $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2)$

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{v}$$

$$T\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1+v_1)\,(u_2+v_2) = u_1\,u_2 + v_1\,v_2$$

como

$$u_2\,v_1 + u_1\,v_2 + u_1\,u_2 + v_1\,v_2 \neq u_1\,u_2 + v_1\,v_2$$

$\Rightarrow$ **La Transformación no es lineal.**

**Ejercicio**

**Sea $T$ una transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que**

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad y \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

**Encuentre** $(a)\ T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $y$ $(b)\ T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$

**Aplicamos las propiedades de transformación lineal**

$$(a)\ T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = T\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=T\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+T\left(4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=2\,T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\,T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-14\\4\\26\end{pmatrix}$$

$$(b)\ T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=T\left(-3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=T\left(-3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+T\left(7\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=-3\,T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+7\,T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-31\\-6\\26\end{pmatrix}$$

## Referencias bibliográficas


Anton, Howard (1994): "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Arce, C. (2003). *Algebra lineal.* México: Trillas

Del Valle, J. C. (2012). *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias*. México. Mc Graw-Hill.

Grossman, S. I. (2012). *Álgebra Lineal*. (7a ed). México. Mc Graw-Hill.

Grossman, S. I. (2011). *Matemáticas 4: Algebra Lineal*. México. Mc Graw-Hill.

Kolman,B. (2013). *Álgebra Lineal*. México. Pearson Educación.

Larson, R. (2010). *Fundamentos de Algebra Lineal*. (6ª ed). México. Cengage Learning.

Lay, D. C. (2013). *Álgebra lineal para cursos con enfoque por competencias*. México. Pearson.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal una introducción moderna*. (3ª ed). México. Cengage Learning.


**Recursos en Internet:**


Mathematics resource center, department of mathematics indian institute of technology Bombay, India (2010). *Applets in Linear Algebra.* Consultado en 02,11,2014 en http://www.mathresource.iitb.ac.in/linear%20algebra/appletsla.html.

Meel, David (2010). Conceptual Online Linear Algebra. Consultado en 02,11,2014 en http://personal.bgsu.edu/~meel/Tools/.

Przemyslaw, Bogacki. (2013). *Linear Algebra Toolkit*. Consultado en 02,11,2014 en http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi.

Siebel, Jens (2010). *An Interactive Introduction to Complex Numbers*. Consultado en 02,11,2014 en http://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/47/Siebel/Applet_Basic_Calculations.html.