ANTOLOGIA

CINEMATICA Y DINAMICA

INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

QUINTO CUATRIMESTRE

Periodo
Enero-abril

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- **Disciplina**
- **Honestidad**
- **Equidad**
- **Libertad**

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

OBJETIVO DE LA MATERIA:

Analizar problemas de movimientos uniformes, uniformemente acelerados, movimiento de partículas, cuerpos rígidos y cualesquiera, de puntos intervengan y no intervengan las causas que producen dichos movimientos.

Unidad I

CINEMATICA DEL PUNTO

1.1 Cinemática del punto

1.2 Cinemática de la recta

1.3 Cinemática del punto y de las rectas relacionadas

1.4 Movimiento relatico

1.5 Cinemática del cuerpo rígido

1.6 Centros de masa y movimientos de inercia, de cuerpos rígidos.

1.7 Cinemática de la recta

1.7.1 Definiciones de posición, desplazamiento, velocidad, rapidez y aceleración, angular de la recta.

1.7.2 Obtención de características cinemáticas de rectas que tienen velocidad angular constante.

Unidad II

CINEMATICA DEL PUNTO Y DE LA RECTA RELACIONADOS

2.1 Movimiento angular: definición, diversos casos del mismo. 2.2 Movimientos circulares uniformes y uniformemente acelerados: determinación de características

cinemáticas de puntos que lo realizan, y de las rectas que unen dichos puntos con los centros de las

circunferencias que describen.

2.3 movimiento relativo

2.4 Descripción del caso general de movimiento relativo. Posición absoluta y relativa.

2.5 velocidad absoluta relativa y de arrastre, aceleraciones absolutas, de arrastres y de colisión.

Unidad III

LA DINAMICA DE LA PARTICULA APLICANDO ECUACIONES DE MOVIMIENTO

3.1 el modelo matemático de la segunda ley de newton, para partículas de masa constante, como ecuación de movimiento, ecuaciones escalares en coordenadas rectangulares, para movimientos

3.2 Dinámica del movimiento rectilíneo de la partícula.

3.3 Dinámica del movimiento curvilíneo de la partícula 3.4 Dinámica del movimiento de partículas conectadas.

3.5 Introducción a la dinámica de las vibraciones.

3.6 Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento en la dinámica de la partícula.

3.7 Trabajo realizado de una fuerza cualquiera que actua sobre una partícula.

3.8 Energía cinética de una partícula

3.9 Principios de la conservación de la energía para partículas conectadas.

3.10 Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento lineales para una partícula.

Unidad IV

LA DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO CON MOVIMIENTO PLANO, APLICANDO ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

4.1 Definición de plano de movimiento

4.2 Dinámica de los movimientos de traslación: traslación rectilínea y curvilínea.

4.3 Dinámica de los movimientos de rotación alrededor de un eje fijo.

4.4 Dinámica del movimiento plano general de un cuerpo rígido.

4.5 Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento en las dinámicas del cuerpo rígido.

.

INDICE

UNIDAD I

CINEMATICA DEL PUNTO

1.1 CINEMÁTICA DEL PUNTO

La Cinemática del punto es la parte de la Cinemática que analiza el movimiento de un punto respecto a una referencia dada. Esta referencia no posee ninguna característica especial.

Se denomina posición de un punto en un instante al punto geométrico del espacio que ocupa. Se describe mediante el vector que une el origen del sistema de referencia y el punto, que se denomina vector de posición o radio-vector.

$$\bar{r} = \overline{OP} \qquad [\bar{r}] = L$$

Trayectoria y ley horaria El movimiento del punto tiene dos componentes:

1. La componente geométrica, que es la curva que describe el punto y que se denomina trayectoria.

2. La componente temporal, que es la manera de describirla. Esta última se puede definir de distintas formas, aunque la más conveniente desde el punto de vista teórico es expresar el parámetro longitud de arco en función del tiempo, lo que se denomina ley horaria.

Ecuaciones horarias

Se denominan ecuaciones horarias a las funciones temporales que describen la evolución de las coordenadas que determinan el vector de posición del punto. Cuando se usan, por ejemplo, coordenadas cartesianas éstas son:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

Desde el punto de vista geométrico son una representación paramétrica de la trayectoria con el parámetro privilegiado de la Cinemática, el tiempo. En ellas se contiene la información completa del movimiento.

1.2 CINEMÁTICA DE LA RECTA

MOVIMIENTO SOBRE UNA RECTA.

Como hemos observado, los movimientos reales son muy complejos. En general las distintas partes de un objeto tendrán movimientos diferentes, lo que puede dar lugar a rotaciones o vibraciones internas. En muchos casos esos movimientos internos pueden despreciarse cuando sólo interesa determinar el movimiento promedio del cuerpo En general, cuando las dimensiones del objeto en cuestión son mucho menores que las de su trayectoria, podemos considerar al objeto como un punto matemático. Los objetos de este tipo se denominan partículas. Por ejemplo cuando deseamos describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol podemos despreciar los movimientos internos de la atmósfera y los mares e incluso su movimientos de rotación y tratarlo como un objeto puntual.

¿Cómo podemos describir el movimiento de una partícula que se mueve sobre una recta?

FIG. 1

Una primera descripción es establecer la hora en la cual la partícula pasa por cada uno de los puntos.

	Tiempo	Posición
Día 29/7/89	14 h. 27 m. 30 s.	A
" "	14 h. 27 m. 34 s.	B
" "	14 h. 28 m. 36 s.	C
" "	14 h. 28 m. 38 s.	D

Tabla 1

En esta primera descripción sólo hemos podido asignar un valor numérico al tiempo, mientras que nos hemos limitado a distinguir las distintas posiciones con una letra.

Para asignar valores numéricos es necesario un origen, ya que solo somos capaces de medir intervalos, no posiciones o tiempos absolutos. Como existe un origen convencional de tiempo hemos podido asignar valores numéricos a dichas variables.

Si deseamos hacer lo mismo con el espacio es necesario definir un origen

FIG. 2

Construyamos ahora un sistema coordenado orientando la recta. A cualquier punto de la recta le asignaremos un número x que indique su distancia al origen. El valor x es la posición con respecto a O. Será positivo si el punto sigue a O y negativo si lo precede. Podemos entonces describir el movimiento por donde hemos tomado el origen de tiempos en el instante en que la partícula pasaba por A.

Tiempo	Posición
0 s.	-4 m.
4 s.	8 m.
6 s.	12 m.
8 s.	4 m.

Tabla 2

Si representamos este movimiento gráficamente poniendo en la abscisa los tiempos y en las ordenadas la posición resulta

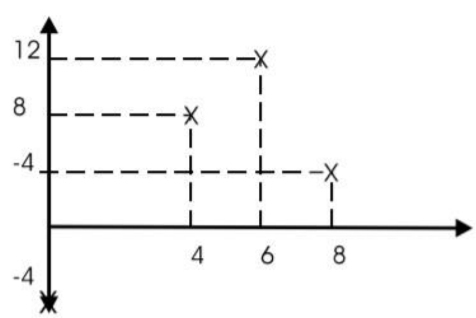


FIG. 3

La descripción que hemos obtenido del movimiento es sin duda incompleta ya que obviamente no nos da información alguna sobre qué posiciones ocupa la partícula para otros valores del tiempo. Nuestra descripción mejora por consiguiente en la medida que disminuyen los intervalos de tiempo para los cuales se determina la posición. Una descripción completa del movimiento en una dimensión consistirá entonces en darse una función x(t) que asigne a cada valor del tiempo la correspondiente posición de la partícula.

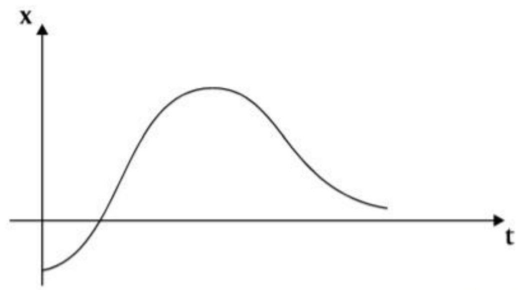


FIG. 4

Toda la información relacionada con el movimiento de la partícula está contenida en la función x(t) llamada ley horaria. Sin embargo aunque la posición en función del tiempo contiene toda la información relevante no la contiene en la forma más útil. La información del velocímetro de un auto es redundante si este último tiene cuenta kilómetros y reloj, pero pocos discutirían su utilidad. Ello se debe a que las leyes de la dinámica involucran los conceptos de aceleración y velocidad y no a la posición directamente.

Pasemos a definir estos conceptos.

Supongamos que una partícula se encuentra en la posición x1 en un instante t 1 y en x2 en el instante t2 .

La variación de la posición de la partícula se denomina desplazamiento.

$$\Delta x = x2 - x1$$

Se define la velocidad media de la partícula vm en el intervalo de tiempo [t2 – t1] , por

$$Vm = \Delta x / \Delta t = x2 - x1 / t2 - t1$$

Consideremos por ejemplo el movimiento definido por la tabla 2 y graficado en la figura 3. Del mismo resulta la siguiente tabla de velocidades medias

Intervalos	v_m
[0 s.,4 s.]	3 m/s
[4 s.,6 s.]	2 m/s
[6 s.,8 s.]	-4 m/s

Tabla 3

y el gráfico

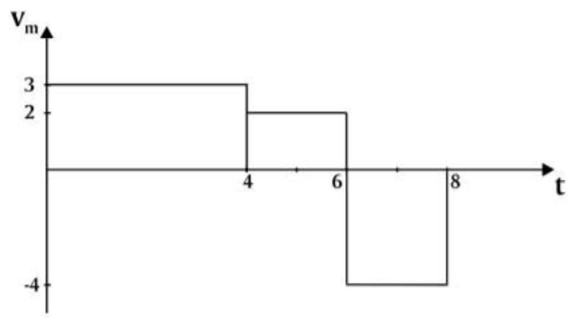


FIG. 5

El desplazamiento y la velocidad pueden ser positivos o negativos, un valor positivo indica un desplazamiento en el sentido del eje de coordenadas y uno negativo en el sentido opuesto. Obsérvese que la velocidad media se puede leer directamente del gráfico del movimiento (fig. 3) calculando la pendiente de la recta que une dos puntos sucesivos en el movimiento.

Si se tiene una descripción del movimiento más detallada que incluya las posiciones para instantes intermedios de tiempo, se podrá construir una tabla de velocidades donde cada velocidad media correspondería a intervalos más pequeños. En el límite tendremos una descripción completa x( )t y una velocidad asociada al instante t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea v(t) es, por consiguiente, la derivada de la posición. Gráficamente estará dada por la pendiente de la curva x(t) en el instante t. Pasemos ahora al cálculo de la aceleración, concepto fundamental que está relacionado directamente con las fuerzas que actúan sobre la partícula, como veremos en capítulos subsiguientes. Cuando la velocidad instantánea de una partícula esté variando con el tiempo, se dice que la partícula se está acelerando.

La aceleración media producida en el intervalo $\Delta t = t2 - t1$ se define como el cociente

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

donde Δ v es la variación de la velocidad instantánea en dicho intervalo. La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo tiende a cero

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Como la velocidad es a su vez la derivada de la posición respecto del tiempo, la aceleración resulta ser la derivada segunda de la posición respecto del tiempo.

Como habíamos señalado al comienzo, una vez determinada la posición en función del tiempo se posee toda la información relevante para la evaluación de cualquier otra magnitud cinemática.

Usualmente el problema más interesante es el problema inverso: dada la aceleración instantánea a( )t , determinar la posición de la partícula en función del tiempo x(t) . En efecto la aceleración es la magnitud que aparece en la ecuación de Newton y por lo tanto cuando las fuerzas dependen explícitamente del tiempo, se puede determinar directamente. Para calcular la posición debemos invertir el proceso anterior pasando de la aceleración a la velocidad y de ésta a la posición.

Obviamente dada a( )t la velocidad será una función tal que su derivada es igual a la aceleración: v( )t será por lo tanto una primitiva de a(t) .

$$v(t) = \mathrm{A}(t) + C, \quad \frac{d\mathrm{A}(t)}{dt} = a(t)$$

Por consiguiente, dada la aceleración, la función velocidad queda determinada a menos de una constante. En otras palabras, la aceleración no tiene información suficiente para determinar a la velocidad en forma única. Sin embargo veremos que basta conocer la velocidad en cualquier instante de tiempo para eliminar toda ambigüedad en la función v(t) . Supongamos que en t t = 0 la velocidad es v0

$$v(t_0)=v_0=\mathrm{A}(t_0)+C$$

entonces

$$C=-\mathrm{A}(t_0)+v_0$$

y

$$v(t)=v_0+\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(t_0)$$

lo que determina completamente a v(t) . Recordando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral resulta

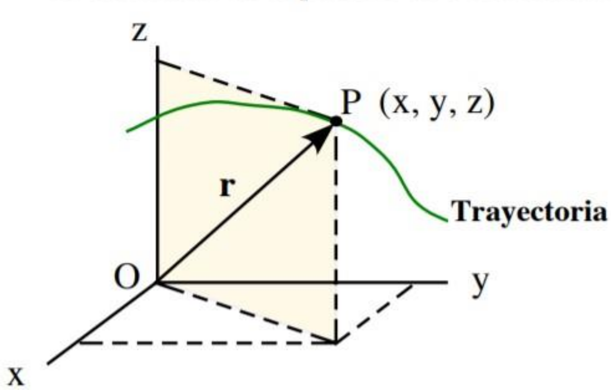
$$\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(t_0)=\int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

y por lo tanto

$$v=v_0+\int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

1.3 CINEMÁTICA DEL PUNTO Y DE LAS RECTAS RELACIONADAS

Supongamos que un punto se mueve en el espacio, de forma que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto P de coordenadas (x, y, z) en ese instante.



Vector de posición de P respecto al sistema de ejes con origen en O:

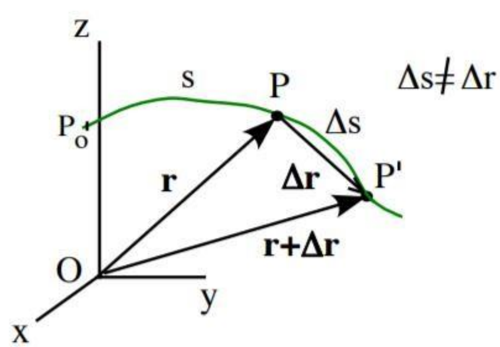
$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Se llama trayectoria a la curva descrita por el punto su movimiento a lo largo del tiempo. Al cabo de un tiempo el punto habrá avanzado a otra posición, P´ :

$$\vec{r} + \overrightarrow{\Delta r} = \left(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z\right)$$

Vector desplazamiento:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{PP'}$$



Velocidad media:

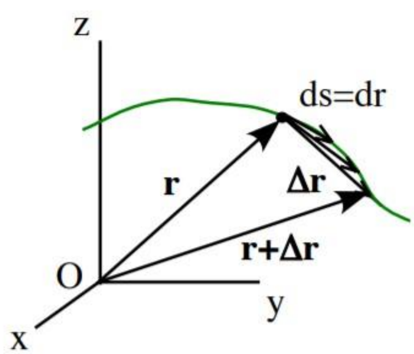
$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria entre dos posiciones no coincide con el módulo del vector desplazamiento $\Delta s \neq \Delta r$

La velocidad media tiene la dirección y sentido de Δr □□□ Si vamos tomando cada vez más pequeños, el se va haciendo más próximo en orientación al tramo de trayectoria. Cuando tiende a 0, el desplazamiento se hace tangente a la trayectoria. Además, su módulo coincide con el desplazamiento a lo largo de la trayectoria: ds=dr

Velocidad de un punto es la variación del vector desplazamiento por unidad de tiempo cuando el intervalo de tiempo tiende a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



La velocidad es tangente a la trayectoria en ese punto

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Es común indicar derivada respecto al tiempo con un punto encima de la variable

$$\vec{v} = \dot{x}\ \vec{i} + \dot{y}\ \vec{j} + \dot{z}\ \vec{k}$$

Al módulo de la velocidad se le llama celeridad:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Velocidad: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad \vec{v} = v\,\vec{e}_t = \dot{s}\,\vec{e}_t$

Siendo et el versor (vector unitario) tangente a la trayectoria en el punto

Aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

Aceleración de un punto: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

Si se conocen las coordenadas en función del tiempo (llamadas ecuaciones horarias) se pueden calcular velocidades y aceleraciones derivando respecto al tiempo. Si se conoce la aceleración en función del tiempo habrá que integrar para hallar velocidad y posición.

1.4 MOVIMIENTO RELATIVO

Las fuerzas que se han estudiado hasta ahora son: las de contacto (que abarcan normal, roce estático, roce dinámico, roce viscoso, tensión), elásticas y gravitacional. Y se podría agregar fuerzas eléctricas, magnéticas, nucleares y unas pocas más.

Se conocen relativamente pocas fuerzas en la naturaleza y de ellas sólo tenemos acceso directo a las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas (se deja afuera las fuerzas nucleares y subnucleares que sólo se pueden observar en laboratorios muy especializados).

Casi todas las fuerzas mencionadas en el primer párrafo son consecuencias de las interacciones electromagnéticas entre las moléculas que componen la materia. Tan sólo la gravitación es una fuerza aparte. Todas las fuerzas de contacto se deben a las fuerzas intermoleculares que ocurren en el contacto. La tensión en una cuerda es una fuerza debida a la cohesión electromagnética entre las moléculas que constituyen la cuerda. La fuerza elástica que ejerce, por ejemplo, un resorte, se debe a estas fuerzas intermoleculares que tratan de mantener el orden en que están las moléculas en el sólido.

No hay más fuerzas en los sistemas de referencias que se denominan inerciales. Sin embargo, la experiencia en un vehículo que aumenta o disminuye fuertemente su velocidad es de una fuerza que no está entre las anteriores. El pasajero también siente una fuerza cuando el vehículo toma una curva a cierta velocidad. Estas fuerzas son propias de los sistemas de referencias no inerciales. Ellas no se deben a fuerzas moleculares o gravitacionales, sino a que nuestro sistema de referencia no tiene una velocidad uniforme. En un sistema de referencia no inercial ya no vale la ley.

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{tot}}_{\text{inercial}}$$

La aceleración definida con respecto a un sistema de referencia no inercial obedece una ley más complicada y este capítulo describe esta nueva ley y sus usos

1.5 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

El cuerpo rígido es un caso especial de un sistema de partículas. Es un cuerpo ideal en el cual las partículas que lo componen no modifican su posición relativa entre ellas, cualquiera sea la fuerza o torque a la que esté sometido. Es decir, ninguna fuerza y/o torque que "actúe" sobre el sólido rígido será capaz de modificar la distancia que guarda cada una de las partículas que componen al sólido con todas las demás. Esta es su característica distintiva.

Comenzaremos por estudiar la cinemática del sólido rígido.

traslación pura

El cuerpo rígido puede tener un movimiento de traslación pura; en este tipo de movimiento, las velocidades de cada una de las partículas que componen al sólido, en cada instante de tiempo, son iguales (tener presente que la velocidad es un vector; esto implica que el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad son iguales para todas las partículas en un instante dado).

En general, el movimiento del sólido será curvilíneo y, por lo tanto, tendrá componentes de aceleración tangencial y normal.

Rotación pura

Si el único movimiento del cuerpo rígido es de rotación alrededor de un eje, decimos que el movimiento es de rotación pura; en este caso, las trayectorias de todas las partículas del sólido son circunferencias concéntricas; la velocidad de cada partícula tendrá la dirección y sentido del versor tangente a la circunferencia en cada instante de tiempo. Asimismo, las velocidades de las distintas partículas que integran el sólido no serán las mismas; la única velocidad común será la velocidad angular del cuerpo.

Movimiento roto-traslatorio

El sólido rígido puede trasladarse y rotar simultáneamente. En esta circunstancia, diremos que el movimiento es roto-traslatorio; es el movimiento más general que puede tener. Un típico ejemplo del movimiento roto-traslatorio lo constituye el movimiento de la Tierra1 : se traslada en una órbita elíptica alrededor del Sol y simultáneamente gira en torno a un eje que pasa por sus polos.

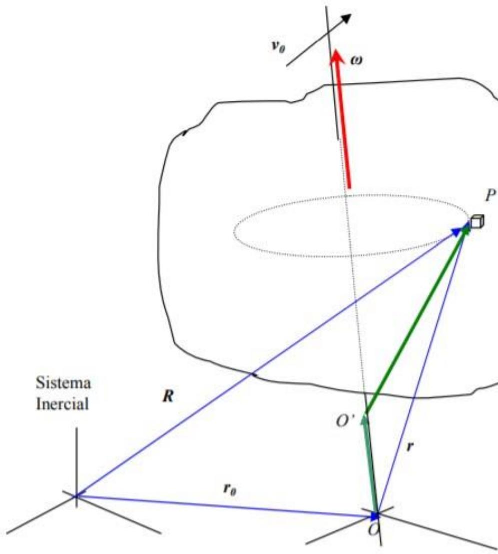
a) Velocidad del movimiento roto-traslatorio

Supongamos que un cuerpo rígido de forma cualquiera esté efectuando, con relación a un observador inercial fijo a su sistema de referencia, un movimiento roto-traslatorio, como indica la figura 1. Desde este sistema de referencia, si R es el vector posición de una partícula del sólido ubicada en el punto P, la velocidad de esa partícula desde el sistema inercial será:

$$\vec{v} = d\vec{R}/dt \, .$$

Tomemos otro sistema de referencia, de origen en el punto O, con uno de sus ejes coincidente, en todo instante de tiempo, con el eje de rotación del sólido. Es evidente que este sistema de referencia se trasladará con velocidad 0 v , que es la velocidad de traslación del eje, velocidad que tendrían todas las partículas del cuerpo rígido si éste sólo tuviera movimiento de traslación. Hacemos R r r = 0 + donde r0 es el vector posición del origen del sistema de referencia móvil y r es el vector posición del punto P desde el sistema móvil. La expresión de la velocidad, desde el sistema del observador inercial, quedará entonces como:

Figura 1



Nótese que, si el eje de rotación del sólido no es uno de los ejes del sistema móvil, siempre se puede “acomodar” el sistema de referencia móvil de forma tal que uno de sus ejes sea el eje de rotación del sólido (por ejemplo, mediante una transformación de coordenadas al nuevo sistema más conveniente).

El punto O del eje de rotación no es un punto “especial”. Si hubiéramos tomado otro punto O’ como origen de coordenadas del sistema que se traslada con velocidad v0, la velocidad del punto P sería la misma:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (OO' + O'P) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge OO' + \vec{\omega} \wedge O'P$$

y como la velocidad angular ω y el vector OO’ son paralelos, o sea su producto vectorial es cero, queda:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \omega \wedge \vec{r} = \vec{v}_0 + \omega \wedge O'P$$

b) Condición de rigidez

Durante el movimiento se debe verificar la condición de rigidez; es decir, que dos puntos cualesquiera del sólido mantengan inalterada, para todo instante de tiempo, la distancia que los separa. Debemos entonces demostrar que la expresión de la velocidad con la que se mueve cada punto del sólido rígido recién obtenida, nos permite verificar la condición de rigidez a cumplir (ver la figura 2 en la que se prescinde del sistema de referencia inercial del observador).

De acuerdo a lo visto será:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_2$$

Restando miembro a miembro queda:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12} \quad ; \qquad 2$$

Multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{r_{12}}$ se obtiene:

$$\vec{r}_{12} \bullet (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{r}_{12} \bullet (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12})$$

El segundo miembro de la ecuación es cero pues el vector que surge de la operación indicada dentro del paréntesis es perpendicular al vector $\boldsymbol{r_{12}}$ y por lo tanto el producto escalar es cero. De aquí

$$\vec{r}_{12} \bullet \vec{v}_2 = \vec{r}_{12} \bullet \vec{v}_1$$

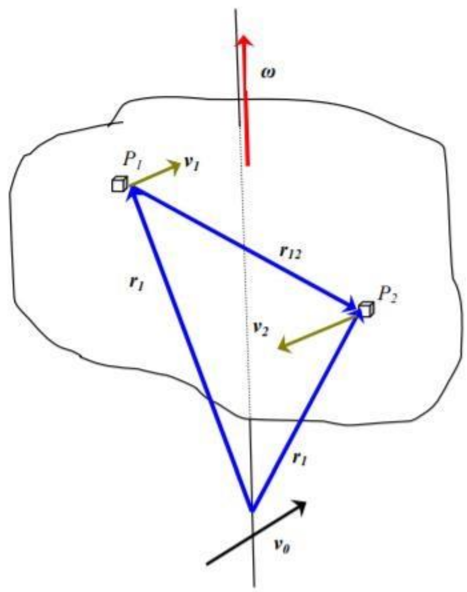


Figura 2

Esta ecuación nos indica que las proyecciones de las velocidades de ambos puntos sobre el vector r12 son iguales y que, en consecuencia, la distancia entre ambos puntos no se modificará con el movimiento.

Una conclusión es que la condición de rigidez permite que la cinemática del cuerpo rígido, cuerpo al que podemos suponer como compuesto por un número “infinito” de partículas, se exprese mediante una expresión sencilla para la velocidad: con sólo seis funciones del tiempo (tres para cada una de las componentes de v0 y tres para cada una de las componentes de ω) queda determinada la velocidad de cualquier punto en función del tiempo.

c) Centro instantáneo de rotación (CIR)

Una propiedad importante del movimiento del cuerpo rígido es que todas las partículas que estén alineadas sobre una recta paralela al eje de rotación, tienen iguales velocidades. Esto se puede comprobar a partir de la determinación de las velocidades de las partículas ubicadas en los puntos P y Q, que están sobre una recta paralela al eje de rotación como indica la figura 3.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_Q$$
$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}, \quad \therefore$$
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}\right) =$$
$$= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ}$$
$$\vec{\omega} \text{ es paralelo a } \vec{r}_{PQ}$$
$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ} = 0$$
$$\therefore \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q$$

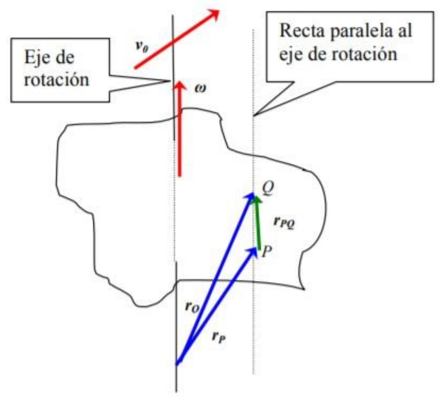


Figura 3

La igualdad de velocidades en las condiciones enunciadas más arriba tiene una consecuencia muy importante. Supongamos un cilindro rígido de radio R que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal (figura 4). Este movimiento se lo puede considerar como una superposición de una traslación del eje con una cierta velocidad v0, con una rotación alrededor del eje con velocidad angular ω. En cada instante de tiempo habrá una única generatriz del cilindro en contacto con el plano, que llamaremos generatriz de contacto.

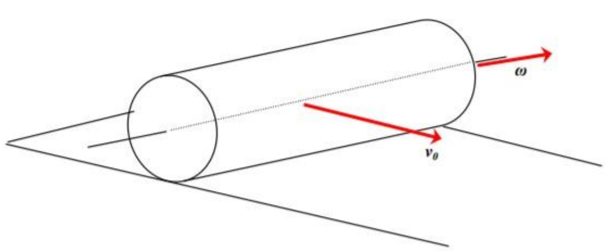


Figura 4

1.6 CENTROS DE MASA Y MOVIMIENTOS DE INERCIA, DE CUERPOS RÍGIDOS.

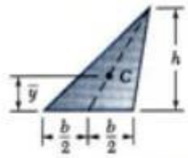
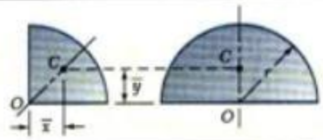
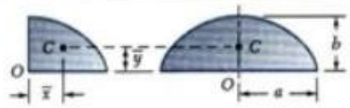
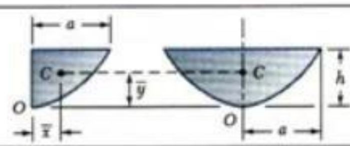
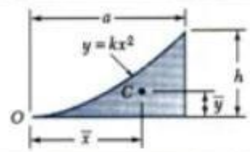
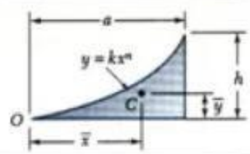
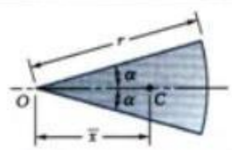
Podemos decir que el centro de masas es el punto donde se concentra la masa de un sólido o sistema material de puntos. Por ejemplo, si tenemos una esfera, podemos aproximar su comportamiento al de un punto localizado en su centro y con una masa igual a su densidad por el volumen.

El centro de masas tiene infinidad de utilidades.

Por ejemplo, las leyes de Newton solo pueden aplicarse a sistemas de puntos materiales. De una forma más práctica, en el diseño de automóviles, es importante que el centro de masas esté en una posición relativamente baja para tener una mayor estabilidad. Mientras que en un turismo normal el centro de masas se encuentra aproximadamente a 1100 mm, en un coche tipo Ferrari, está muy por debajo para conseguir un mejor agarre al terreno.

Para calcular el centro de masas solo es necesario multiplicar la masa de cada punto o elemento, por su distancia al eje dividiéndolo después por el área total para obtener así unidades de longitud. Utilizar esta expresión nos permite determinar, por ejemplo, que el centro de masas de un sistema de dos puntos está en la recta que los une, el de un anillo en su centro, en un rectángulo en el punto donde se cortan las diagonales etc.

A continuación, os presento una tabla con algunos centros de masa importantes:

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

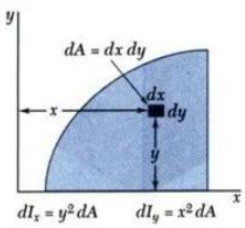
Momentos de Inercia

Inercia es una palabra que utilizamos demasiado a menudo de forma que según la RAE, la inercia es:

1. f. Mec. Propiedad de los cuerpos de no modificar su estado de reposo o movimiento si no es por la acción de una fuerza.

Por ejemplo cuando empujamos algo que se mueve linealmente, solemos decir que tiene mucha inercia. Sin embargo, esto no es del todo correcto puesto que la inercia es, estrictamente hablando, la resistencia a los cambios en la rotación de un objeto.

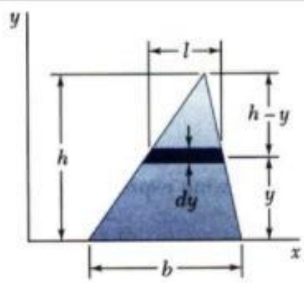
La inercia puede calcularse mediante la el producto masa por distancia al cuadrado, o en caso de tratarse de una densidad constante y para una geometría continua, de la manera siguiente:



- *Second moments* or *moments of inertia* of an area with respect to the x and y axes,

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

Veamos a continuación como calcularlo para un triángulo:



Determine the moment of inertia of a triangle with respect to its base.

SOLUTION:

- A differential strip parallel to the x axis is chosen for dA.

$$dI_x = y^2 dA \qquad dA = l\,dy$$

- For similar triangles,

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}dy$$

- Integrating dI_x from $y = 0$ to $y = h$,

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right)dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad \boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$

La inercia es una propiedad muy importante en dinámica y estática. Por ejemplo, en resistencia de materiales, es un parámetro fundamental pues es necesaria para calcular la tensión en una sección debida a la aplicación de un momento en la estructura.

Debido a que es inversamente proporcional a la tensión que sufre la sección en cuestión, es preferible diseñar estructuras con una alta inercia, minimizando así la solicitación.

Debido a lo anterior, somos capaces de deducir los “extraños” perfiles de algunas vigas. Por ejemplo, el motivo para utilizar vigas con sección de doble T es que, al ser la inercia proporcional a la distancia, normalmente es preferible localizar el material en posiciones con una mayor distancia a la periferia, esto es, lo más alejados posibles del centro de gravedad.

1.7 CINEMÁTICA DE LA RECTA

La cinemática se ocupa de describir el movimiento sin tomar en cuenta sus causas. El movimiento consiste en el cambio de posición de los objetos con el paso del tiempo y para comenzar conviene aclarar cómo se especifica la posición de un objeto. Para eso hace falta referirlo a algún otro, por ejemplo, al observador. Esto requiere dar varios datos como la distancia entre observador y objeto, en que dirección se halla éste, la orientación del objeto en el espacio, etc.

Objeto puntiforme Un punto es el objeto más simple. Como no tiene partes, no tiene sentido hablar de su orientación. Entonces su posición se conoce si se conoce el segmento orientado que va del observador O al objeto A (Fig. 3.1a). Basta pues especificar al vector rOA, o más brevemente, se puede indicar la posición con rA , dando por sobrentendido el observador. Es útil a veces considerar un sistema de coordenadas cartesianas con origen en O. En este caso la posición de A queda determinada por las tres coordenadas xyz AAA , , que son, naturalmente, las componentes del vector rA en el sistema x, y, z:

$$\boldsymbol{r}_A = x_A\hat{\boldsymbol{x}} + y_A\hat{\boldsymbol{y}} + z_A\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (3.1)$$

siendo xˆ, yˆ, zˆ vectores unitarios (versores) en la dirección de los ejes (Fig. 3.1b).

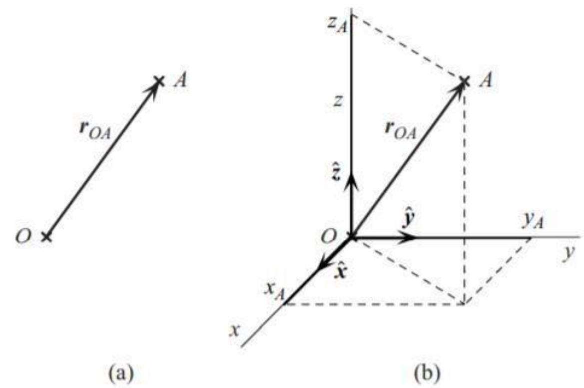


Fig. 3.1. Posición de un objeto puntual: (a) el vector posición, (b) las componentes cartesianas del vector posición.

1.7.1 DEFINICIONES DE POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, RAPIDEZ Y ACELERACIÓN, ANGULAR DE LA RECTA.

VELOCIDAD

La velocidad promedio entre A y B está definida por la ecuación 1

$$\langle v \rangle \equiv \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

Donde Δx es el desplazamiento de la partícula y Δt es el tiempo transcurrido. Por consiguiente, la velocidad promedio durante un cierto intervalo de tiempo es igual al desplazamiento promedio por unidad de tiempo.

ACELERACIÓN

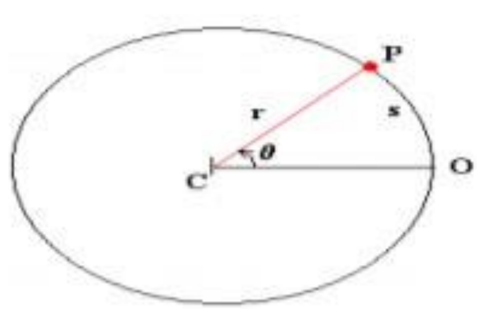
En general, la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo. Si la velocidad permanece constante, se dice que el movimiento es uniforme... La aceleración promedio entre A y B está definida por

$$\langle a \rangle \equiv \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2)$$

Donde Δv es el cambio en la velocidad y, como antes, Δt es el tiempo transcurrido. Luego la aceleración promedio durante un cierto intervalo de tiempo es el cambio en la velocidad por unidad de tiempo durante el intervalo de tiempo.

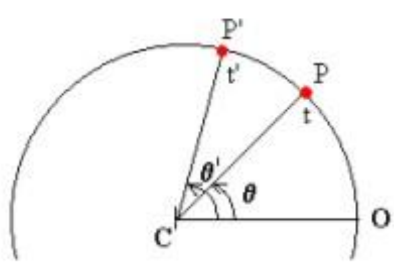
MOVIMIENTO CIRCULAR

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O (representando el eje de giro a partir del cual se realiza el movimiento) de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes. Posición angular (Θ) En el instante t el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo Θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O. El ángulo Θ, es el cociente entre la longitud del arco s y el radio de la circunferencia r, Θ=s/r



VELOCIDAD ANGULAR (Ω)

En el instante t' el móvil se encontrará en la posición P' dada por el ángulo Θ'. El móvil se habrá desplazado ΔΘ=Θ'-Θ en el intervalo de tiempo Δt=t'-t comprendido entre t y t'.



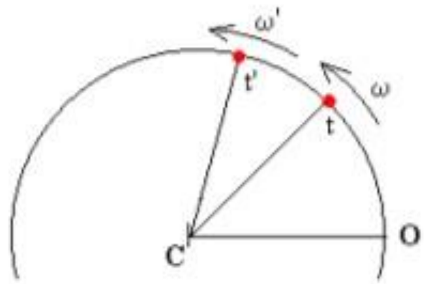
Se denomina velocidad angular media al cociente entre el desplazamiento y el tiempo.

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (4)$$

ACELERACIÓN ANGULAR (α)

Si en el instante t la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t' la velocidad angular del móvil

es ω'. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega=\omega'-\omega$ en el intervalo de tiempo $\Delta t=t'-t$ comprendido entre t y t'.



Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (4)$$

1.7.2 OBTENCIÓN DE CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS DE RECTAS QUE TIENEN VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE.

velocidad angular

Si se desea transformar la velocidad angular (ω r) a la base con movimiento de prececión (Wx y z en la base (i , j , k), habrá que transformar los unitarios k , i y k' a dicha base

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{i}_1 + \dot{\varphi}\vec{k}'_1$$

El unitario k r se encuentra en la base i , j, k , luego para transformarlo a la base i , j , k habrá que utilizar el cambio de base

$$xyz \underset{[A]^t}{\overset{[A]}{\rightleftarrows}} x_1 y_1 z_1$$

$$[A]=\begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de forma que

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

y como en el planteamiento el unitario k r y el 1 k r coinciden, no varía. El unitario 1 i r se encuentra ya en la base i , j , k , por lo que no es necesario ningún tipo de transformación. El unitario 1 k' r se encuentra en la base i' , j' , k' , luego para transformarlo a la base i , j , k habrá que utilizar el cambio de base

$$x_1 y_1 z_1 \underset{[B]^t}{\overset{[B]}{\rightleftarrows}} x'_1 y'_1 z'_1$$

$$[B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad [B]^t=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

de forma que

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

Luego el vector velocidad angular absoluta definida en la base con movimiento de precesión (ωx y z) viene definido por

$$\vec{\omega}=\dot{\psi}\,\vec{k}+\dot{\theta}\,\vec{i}_1+\dot{\varphi}\,\vec{k}'_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{x_1y_1z_1}=\dot{\psi}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}+\dot{\theta}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}+\dot{\varphi}\begin{Bmatrix}0\\-sen\,\theta\\cos\,\theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\\-\dot{\varphi}\,sen\,\theta\\\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\end{Bmatrix}$$

Este vector coincide con el calculado en la base fija (OXYZ) en módulo, dirección y sentido, pero tiene distintas componentes al estar definido en una base distinta.

UNIDAD II

CINEMATICA DEL PUNTO Y DE LA RECTA RELACIONADOS

2.1 MOVIMIENTO ANGULAR: DEFINICIÓN, DIVERSOS CASOS DEL MISMO.

Movimiento angular se refiere al movimiento circular alrededor de una línea imaginaria llamada eje de rotación. Los tres principales ejes pueden ser definidos por el cuerpo entero cuando está erguido. Uno se extiende de la cabeza hasta los pies a lo largo del cuerpo. Los otros dos son horizontales, uno pasa de lado a lado a través del centro del cuerpo y el último pasa desde el frente hasta atrás del cuerpo.

Cuando una parte del cuerpo se mueve alrededor de una articulación, el eje de rotación pasa a través del centro de ésta. En las carreras los ejes de rotación pasan de lado a lado a través de las articulaciones principales de brazos y piernas.

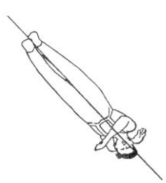
Cuando el cuerpo completo está en rotación, como en una rueda de carro, el eje de rotación es usualmente el punto de contacto con el suelo. En la rueda de carro el cuerpo rota alrededor del pie de enfrente, luego alrededor de la mano de enfrente, luego alrededor de la siguiente mano y finalmente regresa al otro pie. Estos puntos sirven como ejes sucesivos de rotación. En las rodadas frontales, el cuerpo rota alrededor de puntos sucesivos de contacto con el piso durante la rotación, por lo cual el eje es constantemente cambiado. Cuando el cuerpo u objeto se encuentra en el aire, todos los ejes pasan a través del centro de gravedad y todas las partes del cuerpo rotan alrededor de éste (fig. 5). Por ejemplo en un clavado, el eje es una línea vertical que pasa a través del cuerpo desde la cabeza hasta los pies y el cuerpo gira a su alrededor. En un golpe con efecto hacia adelante de una pelota de tenis, ésta rota alrededor del eje que pasa de lado a lado a través de ella. En un pase de futbol americano hecho por un derecho, hay una rotación hacia la derecha alrededor del eje longitudinal que pasa del frente hacia atrás del balón.

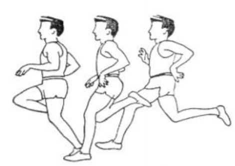
Velocidad angular, se refiere a la velocidad rotacional de un segmento en el cuerpo de un atleta u objeto desarrollando un ángulo de movimiento. La velocidad angular usualmente es medida en grados por segundo, por ejemplo 120º/s.

Momento de rotación (también llamado torca) se refiere a la tendencia de un cuerpo a rotar sobre un eje. El momento de rotación de un cuerpo u objeto es igual al producto de la fuerza aplicada por la distancia perpendicular desde el eje de rotación al punto de la aplicación de la fuerza. Nota: Si la fuerza es aplicada a través del eje de rotación da como resultado movimiento lineal, sin rotación.

Momento de inercia angular es una medida de resistencia al movimiento angular (es el equivalente angular de la masa). Se calcula multiplicando la masa por el cuadrado de la distancia del centro de gravedad de la parte del cuerpo al eje de rotación. Por ejemplo, en la recuperación de la pierna en el "sprint" la distancia del eje será la distancia desde la articulación de la cadera al centro de la masa de cada segmento de la pierna (fig. 6). Cuando los corredores recogen la pierna flexionando la rodilla al máximo, la distancia desde la cadera hasta el segmento más bajo de la pierna puede reducirse a la mitad y este encogimiento disminuye el momento de inercia al cuadrado de la mitad, o sea a una cuarta parte.

Momento angular es la cantidad de movimiento angular. Es la versión angular del momento lineal y es igual al momento de inercia (la versión angular de la masa) por la velocidad angular (la versión angular de velocidad). El momento angular es de particular interés cuando los atletas están rotando libremente en el aire o quieren controlar la rotación en una superficie de baja fricción como por ejemplo el hielo.





Análisis de habilidades

Figura 5

Figura 6

Movimiento angular: principios y aplicaciones. Existen dos principios asociados con el movimiento angular, el principio que trata de la producción del movimiento angular y el relativo a la conservación del momento angular. Estos principios se detallan a continuación:

Principio # 6: El movimiento angular es producido por la aplicación de fuerza, que actúa a una distancia por fuera del eje de rotación, esto es por una torca.

Principio # 7: EL MOMENTO ANGULAR es constante cuando un atleta u objeto está libre en el aire.

Producción del movimiento angular.

El principio 6 se aplica a la producción de movimiento angular o rotación. Los cambios en el movimiento lineal son producidos por la aplicación de una fuerza. De manera similar los cambios en el movimiento angular son producidos por la aplicación de una torca o momento de fuerza. Siempre que una torca es aplicada a una distancia desde el eje de rotación resulta un movimiento angular.

En deportes es necesario que los atletas puedan producir y controlar las rotaciones de su cuerpo entero, de segmentos, de implementos o de proyectiles. Durante estas rotaciones, los atletas cambian uno o más de los siguientes aspectos: el tamaño de la torca neta producida por las contracciones musculares, la dirección neta de esta torca relativa al eje de rotación, la transferencia del momento de las extremidades del cuerpo y el momento de inercia de los segmentos e implementos involucrados.

Rotación del cuerpo entero.

Los atletas rotan cuando fuerzas excéntricas (fuerzas aplicadas fuera del centro de gravedad del atleta no a través de él) son aplicadas a sus cuerpos. Por ejemplo, los clavadistas, cuando están parados al final de la tabla de salto, pueden saltar sin rotación si están derechos, y permitir que la tabla los impulse verticalmente hacia arriba y directamente a través de su centro de gravedad.

Pero si ellos se inclinan hacia adelante mientras se impulsan hacia arriba, pueden crear fuerzas excéntricas y producir una rotación hacia adelante. Si el clavadista requiere dirigir la rotación hacia atrás, tendrá que inclinarse hacia atrás.

Los atletas con frecuencia buscan crear momentos angulares en sus oponentes. Por ejemplo, cuando un liniero taclea a un oponente asiéndolo por un pie, el liniero está aplicando a su oponente una fuerza excéntrica que causa la rotación de todo su cuerpo alrededor del pie asido. Similarmente los luchadores empujan a sus oponentes aplicándoles la fuerza en los hombros, creando una torca que tal vez lo haga rotar hacia la lona.

Rotación de los segmentos del cuerpo o implementos.

Los músculos generan torcas que mueven los segmentos del cuerpo o implementos sobre un eje de rotación dado; por ejemplo, los nadadores que flexionan los hombros y el codo acercando con ello el brazo al cuerpo durante la recuperación, reducen el momento de inercia de su brazo, disminuyen la torca requerida para girar el brazo alrededor del hombro y así disminuyen su gasto de energía. Similarmente los competidores de remo que doblan los brazos y acercan el remo a su cuerpo usan menos energía en la recuperación.

La marcha de corredores minusválidos que tienen una sola pierna, ilustra las adaptaciones necesarias cuando el momento de inercia no puede ser reducido. Las prótesis en las piernas permanecen extendidas durante la recuperación. Los atletas a menudo compensan dando dos saltos sobre la pierna normal mientras la prótesis se recupera y pueden dar un paso largo con esta extremidad. Estas acciones pueden compensar parcialmente la energía que requiere recuperar la extremidad extendida.

Es también importante considerar las diferencias en la resistencia del movimiento angular de las extremidades de los niños de diferentes complexiones y tamaños. Los niños con segmentos más largos o más masivos, tendrán dificultad para reproducir los patrones de movimiento de niños menos pesados o más pequeños, y gastan más energía al desempeñar los mismos movimientos.

2.2 MOVIMIENTOS CIRCULARES UNIFORMES Y UNIFORMEMENTE ACELERADOS: DETERMINACIÓN DE CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS DE PUNTOS QUE LO REALIZAN, Y DE LAS RECTAS QUE UNEN DICHOS PUNTOS CON LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS QUE DESCRIBEN.

Los movimientos de trayectoria curvilínea son muchos más abundantes que los movimientos rectilíneos. El movimiento circular uniforme está presente en multitud de situaciones de la vida cotidiana: las manecillas de un reloj, las aspas de un aerogenerador, las ruedas, el plato de un microondas, las fases de la Luna... En el movimiento circular uniforme (MCU) el móvil describe una trayectoria circular con rapidez constante. Es decir, recorre arcos iguales en tiempos iguales.

Movimiento circular uniforme, m.c.u., es el de un móvil que recorre una trayectoria circular con rapidez constante.

Aceleración centrípeta

En un movimiento; la variación del módulo, la dirección o el sentido del vector velocidad, produce una aceleración. En el MCU, la velocidad lineal, al ser un vector tangente a la trayectoria varía su dirección y sentido a lo largo de la misma. Estos cambios en la velocidad inducen una aceleración perpendicular a la trayectoria, an, a la que denominamos aceleración centrípeta, puesto que es un vector dirigido siempre al centro de la circunferencia. Su módulo:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

El módulo de la aceleración centrípeta depende de la rapidez del objeto, v, y del radio de giro R. En función de la velocidad angular:

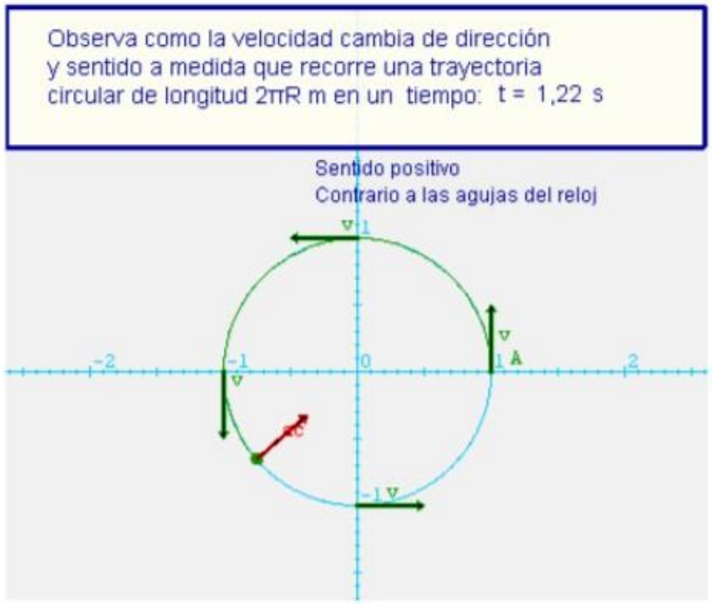
Si $$a_n = \frac{v^2}{R}$$

y $$v = \omega R$$

Entonces:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

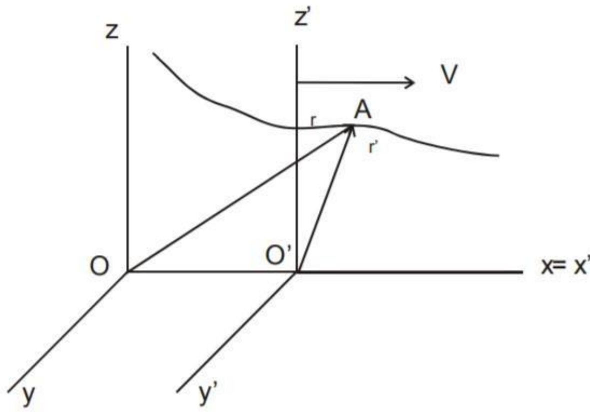
La aceleración centrípeta de la superficie de la Tierra es la responsable de fenómenos bien visibles, como, por ejemplo, el hecho de que el agua de los lavabos se vacíe con un movimiento combinado de caída más rotación, o el sentido de giro de las masas de aire atmosféricas. Así pues, en el hemisferio norte, los vientos o corrientes oceánicas que se desplazan siguiendo un meridiano se desvían acelerando en la dirección de giro (este) si van hacia los polos o al contrario (oeste) si van hacia el ecuador. En el hemisferio sur ocurre lo contrario.



2.3 MOVIMIENTO RELATIVO

El primer punto a tener en cuenta es que los relojes de ambos observadores deben estar sincronizados.

Un sistema de referencia SR es un sistema rÌgido. Se demuestra en Din ·mica AnalÌtica que el movimiento m ·s general de un sistema rÌgido es roto-traslatorio: se puede descomponer en la traslaciÛn del centro de masas, C, y una rotaciÛn respecto de Èste. Tratemos primero el caso en que uno de los SR, Sí(xí,yí,zí), se mueve sobre el eje x respecto de S (x,y,z) con MRU: v=cte. Evidentemente, podrÌa moverse (por ejemplo) sobre una recta ubicada en el plano xy, pero no hay que olvidar que la elecciÛn del SR la hacemos nosotros y, por lo tanto, tenemos la libertad de elegir la forma m ·s simple de describirlo. De cualquier manera, en el Ejemplo 1 veremos tal si



Si para t = 0 ambos orÌgenes coinciden (si no, la generalizaciÛn es inmediata)

$$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{v}_{O'}t = v_{O'}t\mathbf{i}.$$

Si el cuerpo A se mueve sobre una trayectoria arbitraria, su posiciÛn respecto de los sistemas S y Síviene dada por

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$

O lo que es lo Mismo

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{O'}t + \mathbf{r}', \qquad (1)$$

que podemos generalizar, si para t = 0 los orÌgenes no coincide a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_{O'}t + \mathbf{r}'. \qquad (2)$$

Esta relación vectorial, en términos de sus componentes nos da las transformaciones de Galileo (TG)

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x' &=& x - v_{O'}t \\ y' &=& y \\ z' &=& z \\ t' &=& t \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lcl} x &=& x' + v_{O'}t \\ y &=& y' \\ z &=& z' \\ t &=& t' \end{array}}$$

La mecánica clásica presupone que el intervalo de tiempo entre dos sucesos medidos desde S es igual al medido desde Sí. Como corolario de las ecuaciones de Maxwell, resulta que las ecuaciones del electromagnetismo no satisfacen las TG, sino las transformaciones de Lorentz (TL), que veremos en las ˙últimas clases del curso. Fue idea de Poincaré y de Einstein postular que todas las ecuaciones de la Física deben satisfacer las TL, resultando asÌ que las TG son válidas solamente para v << c:

Derivando la ec. 1, tendremos:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}',$$

que debe leerse como: la velocidad "absoluta" (v) es la suma de la velocidad del origen del sistema móvil respecto del Öjo (vO0) m ·s la velocidad relativa (v 0)".

Derivando nuevamente:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}';$$

En este caso, la aceleración es un invariante para este tipo de movimiento relativo entre ambos SR.

Debe quedar claro que el movimiento de A es arbitrario; son los sistemas de referencia los que deben moverse relativamente entre sÌ con MRU, con los relojes debidamente sincroniza.

2.4 DESCRIPCIÓN DEL CASO GENERAL DE MOVIMIENTO RELATIVO. POSICIÓN ABSOLUTA Y RELATIVA.

En Física, dado que los observadores en general están en movimiento unos respecto de otros, es importante determinar cómo hay que expresar las relaciones de las magnitudes en consideración en diferentes sistemas de coordenadas que están, en general, moviéndose uno respecto de otros. Ahora vamos a ver como se relacionan las magnitudes (posición, velocidad y aceleración) expresadas en diferentes sistemas de coordenadas.

El esquema general del problema lo podemos fijar observando el dibujo, que muestra un sistema de referencia que suponemos fijo (X,Y,Z) y otro que se supone en movimiento respecto de él (X',Y',Z').

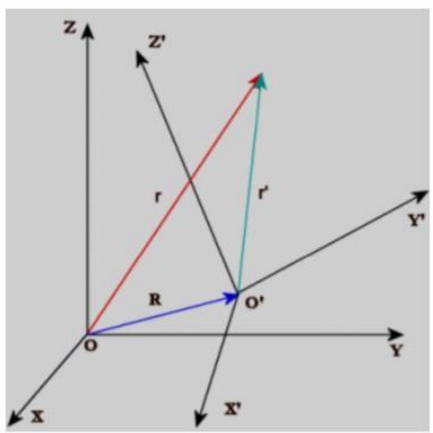


Figura 1 Dos sistemas de coordenadas

De la figura 1 se deduce inmediatamente que:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

Movimiento relativo de traslación uniforme.

Supongamos primero que los sistemas de referencia O y O' se mueven el uno respecto del otro con velocidad constante y de modo que los ejes mantienen continuamente sus orientaciones relativas. Más aún, supongamos que los ejes X y X' son colineales y los ejes Y e Y' y Z y Z' son

paralelos, de tal manera que un sistema de referencia se mueve respecto del otro con una velocidad constante en módulo que denotamos por V.

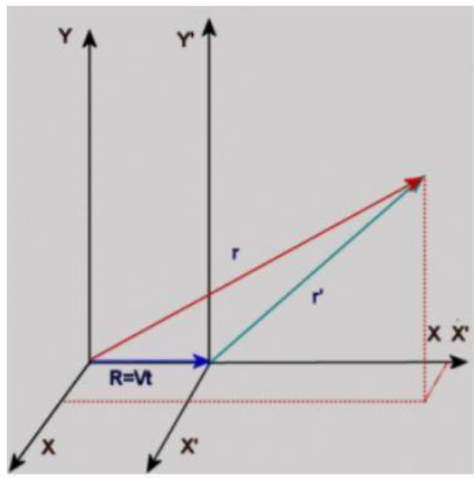


Figura 2. Movimiento relativo de traslación

Si suponemos, por simplicidad que en t=0 los orígenes coincidían tenemos que podemos expresar la relación entre r y r' como

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}'$$

Derivando en r y r’ respecto al tiempo, se obtiene la relación entre las velocidades:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

Movimiento relativo de rotación uniforme. Consideremos ahora dos sistemas de referencia con un origen común que giran con una velocidad angular uno respecto de otro.

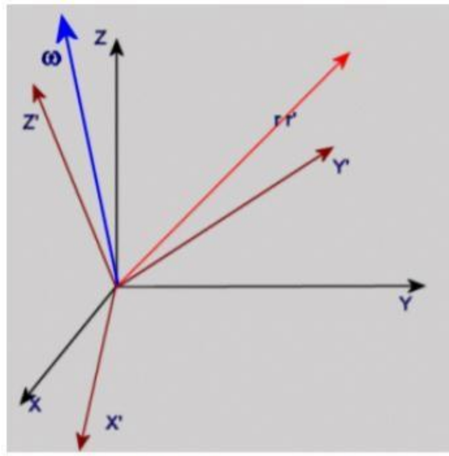


Figura 3. Movimiento de rotación uniforme

Resulta claro del dibujo que la posición de cualquier punto viene descrita por r o r', que resultan ser el mismo vector

$$\vec{r} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

Derivando este vector respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + \underbrace{x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}$$

Es importante notar que al girar los vectores unitarios del sistema en movimiento respecto al otro sistema es preciso contemplar sus derivadas temporales, lo que da origen a los tres últimos términos.

Para evaluar las derivadas de los vectores unitarios, que simplemente irán sin cambiar su tamaño, recordemos que vimos que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} x \vec{r} \quad \text{y por tanto en el sistema móvil} \quad \vec{v'} = \vec{\omega} x \vec{r'}.$$

Esto es válido para todos los vectores. Realizando algunas cuentas y derivaciones se obtiene:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} x \vec{r}$$

2.5 VELOCIDAD ABSOLUTA RELATIVA Y DE ARRASTRE, ACELERACIONES ABSOLUTAS, DE ARRASTRES Y DE COLISIÓN.

Sea un punto O donde se sitúa un S.R. con unos ejes (x,y,z) que van a permanecer fijos (en la práctica no es posible discernir mediante un experimento, entre S.R. que están fijos o aquellos que se mueven con movimiento rectilíneo y uniforme) y otro S.R. con ejes (x',y',z') en O', que se mueven respecto de los ejes en O con velocidad V O´ r fig.1.

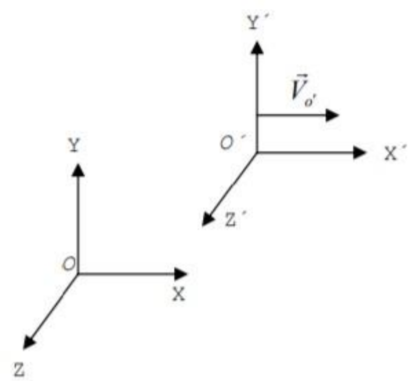


Fig.1

La posición de un móvil P, respecto de los ejes en O, viene definida por el vector de posición r r , mientras que respecto de los ejes móviles en O' viene determinada por r' r . Para relacionar el movimiento de P descrito por observadores situados en O y O' se observa en la fig.2 que se cumple la relación vectorial.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$$

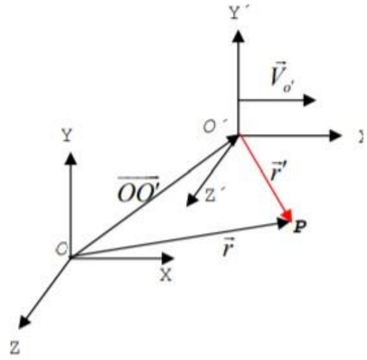


Fig.2

Derivando respecto del tiempo y considerando que éste transcurre por igual para los observadores situados en cada S.R.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \qquad o \ bien, \qquad \vec{v} = \vec{V}_{O'} + \vec{v}' \quad [1]$$

V es la velocidad medida por el observador en reposo, frecuentemente se llama velocidad absoluta.

VO′ r es la velocidad de los ejes situados en O', se conoce como velocidad de arrastre.

v′ r es la velocidad del móvil P, medida por el observador en O´. se designa como velocidad relativa.

$$\vec{v}_{absoluta} = \vec{V}_{arrastre} + \vec{v}_{relativa}$$

De la anterior ecuación se deduce, que la velocidad absoluta es igual a la de arrastre más la relativa.

UNIDAD III

LA DINAMICA DE LA PARTICULA APLICANDO ECUACIONES DE MOVIMIENTO

3.1 EL MODELO MATEMÁTICO DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON, PARA PARTÍCULAS DE MASA CONSTANTE, COMO ECUACIÓN DE MOVIMIENTO, ECUACIONES ESCALARES EN COORDENADAS RECTANGULARES, PARA MOVIMIENTOS

El concepto de fuerza es muy intuitivo. Se le reconoce como la causa de que un cuerpo cambie su estado de movimiento al proporcionarle una aceleración. De manera que si un cuerpo se encontraba detenido pasará a moverse y si estaba moviéndose a cierta velocidad constante pasará a moverse más rápido, más lento o a detenerse. Respecto a una definición precisa del concepto de fuerza, Richard Phillips feynman afirma “si insisten en una definición precisa de fuerza, ¡nunca la tendrán! Primero, porque la segunda ley de Newton no es exacta, y segundo, porque para comprender las leyes físicas deben comprender que todas son alguna forma de aproximación”, de acuerdo a lo anterior, trataremos de seguir tratando el concepto de fuerza a nivel intuitivo, desde luego, apoyado en los trabajos de Newton, pero haciendo la aclaración de que las expresiones matemáticas que intentan modelar algún fenómeno físico, no pueden funcionar a la perfección en el ámbito real, pues es muy difícil controlar(o conocer) todas las variables que intervienen en nuestro entorno natural.

Los cuerpos en ausencia de fuerzas son por completo indiferentes al reposo o al movimiento uniforme, tal afirmación podría generar confusión al pensar que un cuerpo que se encuentre detenido o que se mueva a velocidad constante, está en esa condición debido a que no actúa ninguna fuerza sobre él, pero lo cierto es que dos fuerzas pueden actuar sobre un cuerpo y no provocar alteraciones en su estado de movimiento debido a esas fuerzas se balancean entre sí. Es decir, la fuerza neta o resultante que actúa sobre el cuerpo es cero; en consecuencia, no está sometido a ninguna aceleración. Las acciones externas no son necesarias para mantener el movimiento uniforme sino sólo para alterarlo, en virtud de que la cantidad asociada a una fuerza es la aceleración y no la velocidad. De acuerdo con Newton, las fuerzas son causas del cambio de movimiento, mientras que para Aristóteles, las fuerzas son necesarias para mantener el movimiento, es decir, son causas del movimiento.

Para deducir la ley del movimiento a la manera de Newton, se hace necesario establecer el concepto de cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento (P) o momento lineal, es una cantidad vectorial asociada al producto de la masa (m) de un cuerpo con su velocidad, es decir:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

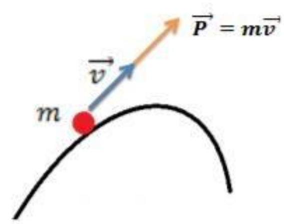


Figura 3-1: Vectores cantidad de movimiento y velocidad de una partícula.

La cantidad de movimiento de un cuerpo es un vector cuya dirección está determinada por su velocidad. Para una apreciación cualitativa de cuanta cantidad de movimiento posee un cuerpo, se le asocia con la capacidad de éste para hacer mover cosas al colisionarse con ellas. Un cuerpo en movimiento puede mover mayor cantidad de cosas a su paso, si se presenta alguno de los siguientes casos:

i. Cuando la masa del cuerpo es mayor respecto a la de sus obstáculos.

ii. Cuando se mueva muy rápido a pesar de que su masa sea similar a la de sus obstáculos.

El efecto de las condiciones anteriores se puede apreciar de una manera más fehaciente cuando se tiene la oportunidad de ser espectador en una carrera automovilística, si por alguna razón un auto se desvía de la pista y colisiona con la barrea de contención que generalmente está conformada por llantas, moverá mayor cantidad de éstas cuanta más rapidez tenga al momento del choque. Ahora, si es una competencia de vehículos de carga, para mover las llantas de la barrera de contención no se requiere que posea gran velocidad pues su masa es mayor en comparación de un automóvil.

Para un sistema aislado de n partículas, es decir un lugar libre de cualquier interacción externa, se tiene que la cantidad de movimiento total será la suma vectorial de las cantidades de movimiento de cada cuerpo y deberá mantenerse constante. Lo anterior significa que el sistema está dotado de un movimiento inercial y por tanto, mantendrá constante, en magnitud y dirección su cantidad de movimiento, en efecto:

$$\vec{P} = \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = constante$$

Donde mi y vi son respectivamente la masa y la velocidad de la i-ésima partícula.

La segunda ley del movimiento es presentada por Newton a partir de la definición de fuerza, "El ritmo de cambio de la cantidad de movimiento (es decir, el momento lineal) de 15 un cuerpo es igual a la fuerza neta aplicada y tiene lugar en la misma dirección", simbólicamente se tiene:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\vec{t}}$$

Se sabe que $\vec{P} = m\vec{v}$, $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} = \vec{a}$ y considerando la masa constante, se sustituye éstas cantidades en la expresión anterior y resulta:

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta\vec{t}} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}}$$

Finalmente:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Esta es la reconocida ley del movimiento de Newton, aunque curiosamente no aparece así formulada en los Principios, esta formulación simplificada de la segunda ley resulto varias décadas después en la obra del matemático Suizo Leonhard Euler.

3.2 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE LA PARTÍCULA.

Se define como momento lineal al producto punto del vector velocidad por la masa.

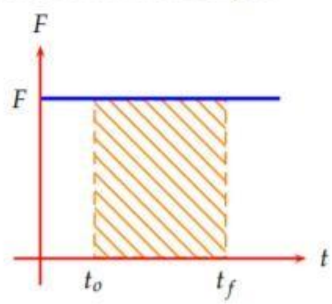
$$m \cdot \vec{v} = \vec{P},$$

vector que mantiene el unitario (dirección) de la velocidad

$$\sum F = m \cdot a$$
$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$\sum F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$
$$\sum F \cdot dt = m \cdot dv$$

$$\int_{t_0}^{t} \sum F \cdot dt = \int_{v_0}^{v} m \cdot dv$$
$$\sum \int_{t_0}^{t} F \cdot dt = \int_{v_0}^{v} m \cdot dv.$$

Si F es constante en relación al tiempo.



$$F \int_{t_0}^{t} dt = m \cdot \int_{v_0}^{v} dv.$$

Área debajo de cualquier curva que sea fuerza vs tiempo es el impulso.

3.3 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CURVILÍNEO DE LA PARTÍCULA

Es el movimiento de una partícula en dos dimensiones describiendo una trayectoria parabólica. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme. También es posible demostrar que puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos, un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical.

3.4 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CONECTADAS.

Newton, retomó el principio de inercia y lo estableció como la primera ley del movimiento en sus Principia: "Cada cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que actúen fuerzas sobre él que obliguen a cambiar de estado". Aunque este enunciado parece muy claro conviene analizarlo a fondo. Como hemos dicho en repetidas oportunidades, para que cualquier enunciado sobre el movimiento de un cuerpo tenga sentido se debe establecer en qué sistema de referencia se cumple. Al respecto conviene recordar el último ejemplo del Capítulo I, lo que en un sistema se veía como movimiento rectilíneo uniforme en el otro sistema que rotaba con respecto al primero se veía como un movimiento según una trayectoria espiral. Por esta razón en las versiones modernas de la primera ley se hace referencia y se establece:

Primera Ley de Newton.

Existen ciertos sistemas de referencia, con respecto a los cuales el movimiento de un objeto libre de fuerzas externas es rectilíneo con velocidad constante. Los sistemas de referencia para los cuales vale la Primera Ley de Newton, también llamada principio de inercia, se llaman sistemas inerciales. En los sistemas inerciales las partículas libres tienen aceleración nula.

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_{oo'}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} = 0$$

Y una partícula libre también posee un movimiento rectilíneo uniforme visto desde S'. Por lo que podemos concluir que si S es inercial también S' lo es. Sin embargo, como ya hemos observado, si S es inercial y S' rota respecto de S, S' no es un sistema inercial, ya que como vimos en el último ejemplo del Capítulo anterior, una partícula libre seguirá una trayectoria curvilínea en S'.

Para determinar si un sistema de referencia es inercial o no se debe recurrir a la experiencia. Debido a su rotación diaria y a su interacción con el Sol y los otros planetas, la Tierra no es un sistema inercial. Sin embargo, en muchos casos estos efectos son despreciables y los sistemas de referencia unidos a nuestros laboratorios terrestres pueden sin gran error ser considerados inerciales.

Los sistemas inerciales son en definitiva sistemas de referencia ideales, todo sistema real presenta desviaciones respecto al comportamiento ideal. Un sistema muy próximo al ideal sería uno situado en el espacio a gran distancia de cualquier objeto celeste para eliminar los efectos gravitacionales y cuyos ejes están orientados apuntando a tres galaxias muy lejanas para evitar los efectos de rotación.

3.5 INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE LAS VIBRACIONES.

Las principales acciones dinámicas que actúan sobre las estructuras son las siguientes:

1. Motores y equipos mecánicos. La actividad de máquinas en las cuales hay rotación de émbolos produce vibraciones sobre los elementos estructurales que las soportan, sean losas o cimientos. El valor y las direcciones de esta acción dependen del tipo de equipo mecánico. Así, algunos producen una carga armónica, como la indicada en la figura 1.2, debido a la rotación de una masa excéntrica. Como resultado de la acción, evidentemente, se tendrán desplazamientos horizontales, verticales y rotacionales en la estructura. Otros equipos consisten de dos masas iguales y excéntricas que rotan en sentidos opuestos, por lo cual se anula la componente horizontal del movimiento. En ambos casos la carga p(t) tiene la forma

$$p(t) = m_r e\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t \qquad (1.9)$$

donde mr es la masa total rotatoria, e es la excentricidad y ÚJ es la frecuencia de la rotación. Finalmente, es importante mencionar que otros equipos se apartan de este esquema y producen acciones en forma de series de pulsos.

2. Terremotos. Los movimientos sísmicos del suelo constituyen una de las acciones dinámicas más severas entre las que actúan sobre las estructuras. En la figura 1.3 se representa un registro del factor determinante de la carga externa p(í),~cual es la aceleración del suelo, que denotaremos como üs. Se observa que la acción carece de ley matemática, por lo que se puede considerar como la realización de un proceso aleatorio.

Como es bien sabido, los sismos se producen por el deslizamiento súbito de sectores de la corteza terrestre a lo largo de las fracturas que ésta presenta en las llamadas fallas geológicas y en las zonas de subducción de placas tectónicas. En la zona donde se produce el deslizamiento (llamada hipocentro) se libera una energía de deformación acumulada durante un largo período de tiempo por causa de la tendencia opuesta de los dos sectores de la corteza. La figura 1.4 ilustra este proceso de acumulación y ruptura, explicado por la teoría del rebote elástico. De esta manera, desde la zona del hipocentro se irradia la energía cinética, en la que se ha transformado la energía de deformación acumulada, en todas las direcciones del espacio. Las ondas atraviesan diversas capas de rocas y suelos, en las cuales sufren complejos fenómenos de reflexión y refracción (figura 1.5) hasta llegar a la superficie terrestre, donde se manifiestan en forma de un movimiento del suelo, cuya aceleración se presenta como un tren de ondas de diferente frecuencia superpuestas de manera errática, como ilustra la figura 1.3. La fuerza que produce esta aceleración en la base se puede deducir fácilmente a partir del esquema mostrado en la figura 1.6. Al comparar este esquema con el de la figura 1.1, se observa que el eje vertical de referencia se ha desplazado hacia la derecha la cantidad us(t). Esto indica que la masa del sistema sufre un desplazamiento total u(t) + u¡¡, por lo que la aceleración total vale ü(t) + üs(t). Por otra parte, la estructura, representada por el resorte de rigidez k sólo sufre un desplazamiento de valor u(t). Por tanto, como no hay fuerzas externas aplicadas, la ecuación de equilibrio es

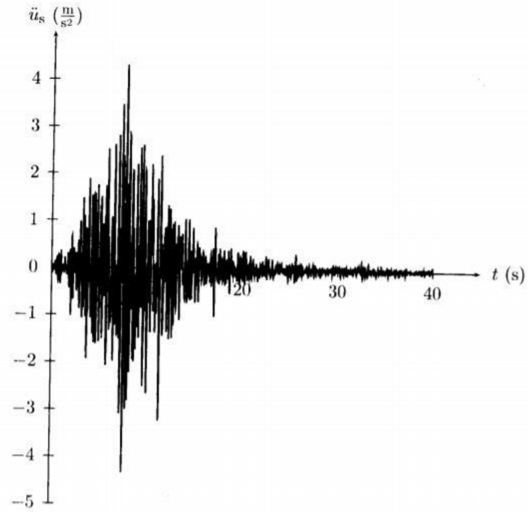


Figura 1.3: Registro del sismo de Loma Prieta (Estación Santa Cruz, componente NS).

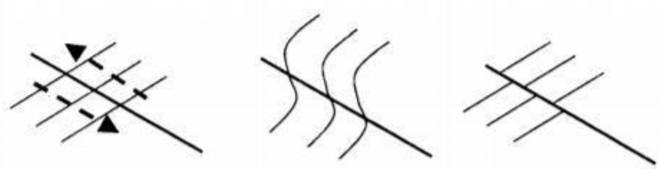


Figura 1.4: Teoría del rebote elástico.

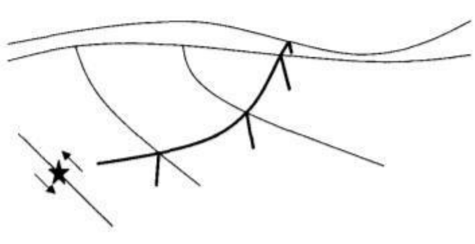


Figura 1.5: Propagación de la energía sísmica.

$$f(t) = -ku(t) = m[\ddot{u}(t) + \ddot{u}_s(t)] \tag{1.10}$$

por lo cual

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_s(t) \tag{1.11}$$

Esto indica que la carga sísmica equivalente es igual a

$$p(t) \equiv -m\ddot{u}_s(t) \tag{1.12}$$

3. Vientos. Los vientos fuertes ejercen una presión dinámica sobre las estructuras, la cual está básicamente determinada por su velocidad v(t). Un ejemplo de la variación temporal de ésta aparece en la figura 1.7, en la que se muestran tres registros obtenidos en diferentes alturas. En general la velocidad media crece con la altura debido a que en esa medida se pierde paulatinamente el efecto de freno que ejercen los obstáculos naturales y urbanos. Después de cierto nivel (que depende de la naturaleza y forma de dichos obstáculos) se puede considerar que la velocidad media ya no depende más de la elevación sobre la tierra. Puede verse que esta acción también es de tipo aleatorio. La fuerza que ejerce el viento está dada por

$$p(t) = \frac{1}{2}c_d \rho a v^2(t) \tag{1.13}$$

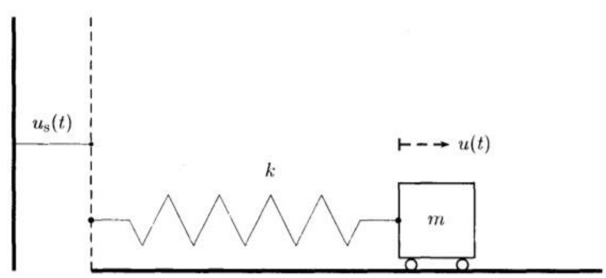


Figura 1.6: Acción sísmica horizontal.

donde p es la densidad del aire, a es el área de la estructura que se encuentra expuesta al empuje del viento (normal a su dirección) y c.á es un coeficiente que depende de los obstáculos mencionados y que, para estructuras especiales, se suele determinar de manera experimental en túneles de viento.

4. Oleaje Esta acción debe ser tenida en consideración por todo tipo de estructuras sometida a empujes del agua en mares y ríos. La fuerza ejercida por el oleaje depende estrechamente de la altura de las olas h(t), la cual tiene una variación con el tiempo como la representada en la figura 1.8.

Otras acciones dinámicas, que deben ser consideradas en casos especiales, son las siguientes:

1. Im,pacto. Problemas de impacto sobre las estructuras surgen principalmente de accidentes, tales como los causados por choque repentino de vehículos contra soportes de edificios, puentes, etc.

2. Paso de vehículos o personas. Esta acción, generalmente débil, puede provocar a largo plazo problemas de fatiga en los materiales estructurales, por lo cual puede considerarse potencialmente nociva.

3. Explosiones. Esta acción se caracteriza, en general, por ser de muy corta duración, en la cual se presentan dos fases claramente diferentes, una de expansión y otra de contracción.

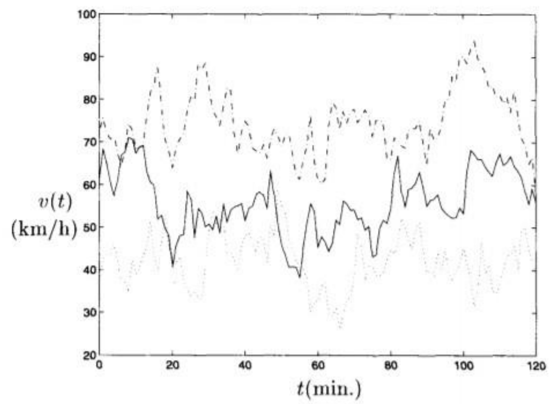


Figura 1.7: Variación temporal del viento a diferentes alturas.

3.6 TRABAJO Y ENERGÍA E IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN LA DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.

$$\int (\Sigma \vec{F}) dt = \Delta \vec{P}$$

Como mencionamos, el lado izquierdo es un proceso: representa la acción de la fuerza total a lo

largo de todo el intervalo de tiempo. Esto motiva la siguiente definición: Dada una fuerza F☐ , un instante inicial ti y un instante final tf, se define el impulso asociado a esa fuerza y a ese intervalo como:

$$\vec{I}_F = \int \vec{F}\, dt \quad \text{(DEFINICIÓN DE IMPULSO)}$$

El impulso es, entonces, un proceso. Se ve también que se trata de un vector. Es muy importante notar que puede calcularse, en principio, el impulso de fuerzas individuales. Volviendo al ejemplo del changuito en el supermercado, si conocemos la fuerza que el cliente hace sobre el changuito en cada instante de tiempo, podemos calcular el impulso de esa fuerza en el intervalo considerado. Lo mismo vale para cualquiera de las otras dos.

Con esta definición, vemos que el lado izquierdo de (10) es el impulso de la fuerza total sobre el objeto de estudio. Por lo tanto, podemos escribir (10) en la forma

$$\vec{I}_{\Sigma \vec{F}} \doteq \Delta \vec{P} \quad \text{(Teorema del Impulso y la Cantidad de Movimiento)}$$

O también

$$\Sigma \vec{I} \doteq \Delta \vec{P} \quad \text{(Teorema del Impulso y la Cantidad de Movimiento)}$$

En la expresión de abajo la suma es sobre los impulsos de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto de estudio. Es buena idea constatar por qué las dos expresiones son equivalentes.

Observemos que el Teorema del Impulso y la Cantidad de Movimiento usa el igual físico. Eso se debe a que lo que hay de fondo sigue siendo la segunda ley de Newton, solo que ahora en vez de referirse a un instante de tiempo se refiere a todo un intervalo.

También se ve clarísimamente cómo se relaciona un proceso (el impulso de la fuerza total) con un cambio de estado (el cambio de la cantidad de movimiento).

3.7 TRABAJO REALIZADO DE UNA FUERZA CUALQUIERA QUE ACTUA SOBRE UNA PARTÍCULA.

Si la fuerza F que actúa sobre una partícula es constante (en magnitud y dirección) el movimiento se realiza en línea recta en la dirección de la fuerza. Si la partícula se desplaza una distancia x por efecto de la fuerza F (figura 5.1), entonces se dice que la fuerza ha realizado trabajo W sobre la partícula de masa m, que en este caso particular se define como:

$$W = F\,x$$

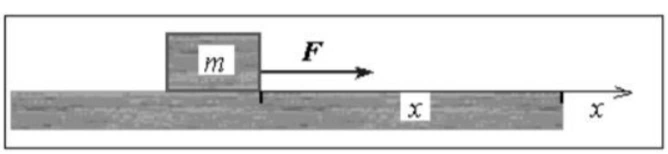


Figura 5.1 Fuerza horizontal constante que realiza un desplazamiento x.

Si la fuerza constante no actúa en la dirección del movimiento, el trabajo que se realiza es debido a la componente x de la fuerza en la dirección paralela al movimiento, como se ve en la figura 5.2a. La componente y de la fuerza, perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo sobre el cuerpo.

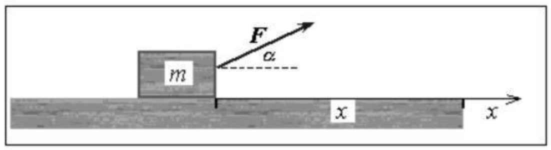


Figura 5.2a Fuerza constante que forma un ángulo α con el desplazamiento x.

Si α es el ángulo medido desde el desplazamiento x hacia la fuerza F, el valor del trabajo W es ahora:

$$W = (F \cos\alpha)x$$

De acuerdo a la ecuación anterior, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

a) si α = 0°, es decir, si la fuerza, como en la figura 5.1, o una componente de la fuerza, es paralela al movimiento, W = (F cos 0) x = F x;

b) si α = 90°, es decir, si la fuerza o una componente de la fuerza es perpendicular al movimiento, W = (F cos90) x = 0, no se realiza trabajo;

c) si la fuerza aplicada sobre el cuerpo no lo mueve, no realiza trabajo ya que el desplazamiento es cero;

d) si 0 < α < 90°, es decir, si la fuerza tiene una componente en la misma dirección del desplazamiento, el trabajo es positivo;

e) si 90° < α < 180°, es decir, si la fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento, el trabajo es negativo.

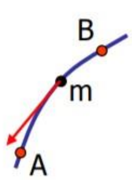
De estas conclusiones se deduce que el trabajo, para una fuerza constante, se puede expresar de la siguiente forma:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

El trabajo es una magnitud física escalar, obtenido del producto escalar de los vectores fuerza y posición. De la expresión anterior, por la definición de producto escalar, queda claro que el trabajo puede ser positivo, negativo o cero. Su unidad de medida en el SI es N m que se llama Joule, símbolo J. Otras fuerzas actúan sobre el cuerpo de masa m (peso, roce, normal, etc.), por lo que la ecuación anterior se refiere sólo al trabajo de la fuerza F en particular; las otras fuerzas también pueden realizar trabajo. En la figura 5.2 las fuerzas peso y normal no realizan trabajo ya que son perpendiculares al desplazamiento y la fuerza de roce realiza trabajo negativo, ya que siempre se opone al desplazamiento. El trabajo total sobre la partícula es la suma escalar de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

3.8 ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA

Supongamos una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza resultante F que la desplaza a lo largo de una trayectoria:



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a} \cdot \vec{v}\,dt = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = \int_A^B m\,\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} m\,\vec{v} \cdot \vec{v}\right]_A^B = \left[\tfrac{1}{2} m\,v^2\right]_A^B = \tfrac{1}{2} m\,v_B^2 - \tfrac{1}{2} m\,v_A^2$$

Se define la energía cinética de la partícula como: (un escalar con las mismas unidades que el trabajo)

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Teorema del trabajo y la energía:

El trabajo total W realizado sobre un objeto para desplazarlo de una posición A a otra B es igual al cambio de la energía cinética del objeto. Es un teorema general que se cumple para todo tipo de fuerzas.

$$W = \Delta E_c = E_c^B - E_c^A$$

(Si $W>0$ la velocidad aumenta y si $W< 0$ la velocidad disminuye.

3.9 PRINCIPIOS DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA PARA PARTÍCULAS CONECTADAS.

Uno de los principios más generales de la física es el principio de la conservación de la energía, el cual define que la energía total (energía cinética + energía potencial gravitacional) de un sistema es constante. En la mayoría de las interacciones químicas y físicas la variación de la masa es tan pequeña que no es detectable, de modo que la energía de la masa en reposo no cambia (se le considera como" pasiva"). La ley se convierte entonces en la clásica ley de la conservación de la energía; la inclusión de la masa en los cálculos solamente es necesaria en el caso de cambios nucleares o de sistemas en que intervengan velocidades muy altas.

Energías Relacionadas con el Principio

Energía cinética:

Trabajo que puede realizar un objeto por su movimiento. Para un objeto de masa m y que se mueve con velocidad v, dicha energía esta dada por:

$$E_c= 1/2mv^2$$

Energía potencial gravitacional:

Trabajo que un objeto puede realizar debido a su posición (altura), la cual esta dada por:

$$E_p = m.g.y$$

Donde g es el valor de la aceleración de la gravedad.

Energía mecánica:

Es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitacional, viene dada por:

Em= Ec+ Ep. (3)

En el caso de un cuerpo que cae desde cierta altura, se sabe que este va perdiendo energía potencial, como el movimiento es de caída libre, ocurrirá también que la energía cinética aumente.

3.10 ECUACIÓN DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEALES PARA UNA PARTÍCULA.

Se llama Impulso del Movimiento a la magnitud vectorial $\vec{I}$ igual al producto de la fuerza aplicada a la

partícula (o bien a la componente tangencial $\vec{F}_t$) por el tiempo en que actúa:

$$\vec{I} = \vec{F}.t$$

Sea:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\,\vec{v}}{dt} \qquad entonces \qquad \vec{F}\,dt = m d\,\vec{v}\,dt$$

Suponiendo que $\vec{F}$ es constante y de la misma dirección que $\vec{v}$, integrando:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v}$$

$$\vec{F}\,(t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad (1)$$

Según la ecuación (1) el impulso $\vec{I}$ es igual a la variación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{I} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$$

<u>*Unidades de Impulso*</u>

Unidad de $\vec{I}$ = Unidad de $\vec{F}$ x Unidad de tiempo

En el SI (MKS).

$$[I] = [N]\,[seg] = \left[kg \frac{m}{seg^2}\right].[seg] = \left[kg \frac{m}{seg}\right]$$

En el sistema CGS:

$$[I] = [dyn]\,.\,[seg] = \left[g \frac{cm}{seg^2}\right].[seg] = \left[g \frac{cm}{seg}\right]$$

<u>*Unidades de Cantidad de Movimiento $\vec{Q}$*</u>

Unidad de $\vec{Q}$ = Unidad de masa x Unidad de velocidad

En el SI (MKS):

$$[\vec{Q}] = [kg].\left[\frac{m}{seg}\right] = \left[kg \frac{m}{seg}\right]$$

En el sistema CGS:

$$[\vec{Q}] = [g] \cdot \left[\frac{cm}{seg}\right]$$

Podemos verificar con este concepto el Principio de Inercia o Primer Principio de Newton en la ecuación (1)

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad ; \quad si$$

$$\vec{F} = 0 \quad es \quad m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 = cte$$

"Si no hay fuerza exterior, el móvil no cambia de velocidad (es un MRU)

3.10 PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

De las leyes de la Dinámica, del Segundo Principio o Ley Fundamental de la Dinámica, se deduce que

solamente las fuerzas pueden modificar la cantidad de movimiento *Q* de un cuerpo:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si $\vec{F} = 0$ $\quad entonces \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = cte \quad y \quad m\vec{v} = cte$

Entonces:

"Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o la resultante de todas las fuerzas (exteriores) que actúan es cero, la cantidad de movimiento del cuerpo permanece constante"

UNIDAD IV

LA DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO CON MOVIMIENTO PLANO, APLICANDO ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

4.1 DEFINICIÓN DE PLANO DE MOVIMIENTO

El estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos esta precedido del estudio de la dinámica de las partículas, esta secuencia no es casual, sino que refleja, de manera correcta, la sucesión de conocimientos que es necesario dominar antes de embarcarse en el estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos. Conviene pues, conectar los conceptos y habilidades aprendidas en la dinámica de las partículas con los objetivos del estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos, de manera que el lector tenga una ´idea clara del porque la dinámica de las partículas juega un papel primordial en el estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos. Iniciemos esta conexión con una definición de un cuerpo rígido.

Definición:

Cuerpo Rígido. Un cuerpo rígido es una agrupación, usualmente continua, de partículas con una propiedad fundamental: La distancia entre dos partículas cualesquiera del cuerpo rígido permanece invariable; es decir, constante.

4.2 DINÁMICA DE LOS MOVIMIENTOS DE TRASLACIÓN: TRASLACIÓN RECTILÍNEA Y CURVILÍNEA.

Traslación. En este tipo de movimiento, todas las líneas del cuerpo conservan su orientación. Puesto que el fenómeno de la rotación está asociado a un cambio en la orientación de las líneas del cuerpo, la traslación puede definirse como un movimiento sin presencia de rotación. Nuevamente, en este caso no se conoce a priori que punto del cuerpo tiene velocidad igual a ~0 o aceleración igual a ~0.

Dependiendo de las trayectorias que siguen las partículas del cuerpo, la traslación puede clasificarse en:

(a) Traslación rectilínea. Cuando todas las partículas del cuerpo siguen una trayectoria a lo largo de una línea recta o líneas rectas paralelas.

(b) Traslación plana. Cuando todas las partículas del cuerpo describen trayectorias contenidas, cada una de ellas, en el mismo plano o planos paralelos. Este tipo de traslación se conoce también como traslación curvilínea, en las que las partículas del cuerpo describen curvas planas “congruentes”, es decir curvas que permiten satisfacer la condición de que todas las líneas del cuerpo conservan su orientación.

(c) Traslación espacial. Cuando todas las partículas del cuerpo describen trayectorias espaciales que no satisfagan los requisitos de los dos casos previos.

En un curso introductorio de dinámica de cuerpos rígidos no se estudian todos los tipos de movimiento de un cuerpo rígido. Frecuentemente, estos cursos introductorios se denominaban dinámica plana de cuerpos rígidos. Indicando, de esa manera, que el caso espacial no se incluye. A continuación, se indican todos los tipos de movimiento que se van a estudiar, de los más sencillos a los más complicados.

1. Traslación. Con todos sus casos especiales, incluyendo aquí por su sencillez el caso espacial.

2. Rotación Alrededor de un Eje Fijo.

3. Movimiento Plano General. Este es el caso más general que se tratar ‘a en este curso.

Como se indicó al inicio de esta sección, el objetivo fundamental de la cinemática de cuerpos rígidos consiste en: Determinar relaciones entre las velocidades y aceleraciones de las diferentes partículas que forman parte de un cuerpo rígido sujeto a los diferentes tipos de movimiento que un cuerpo rígido puede sufrir.

Ahora, podemos ser más específicos. En los casos, como traslación y movimiento plano general, en que no se conoce a priori un punto del cuerpo cuya velocidad o aceleración es igual a ~0, lo más que, por el momento, es posible aspirar es encontrar relaciones entre las velocidades y aceleraciones de las diferentes partículas. Si, como en el caso de rotación alrededor de un eje fijo, se conoce que todos los puntos del eje fijo tienen velocidad y aceleración absolutas igual a ~0, es posible ser más ambiciosos y, en este caso, obtendremos expresiones que nos digan cual es la velocidad y aceleración absolutas de las partículas del cuerpo r´ıgido.

La dinámica, en general, es una disciplina que no requiere de un gran número de definiciones, postulados, técnicas, etc. que sea necesario aprender. En este tema de cinemática de los cuerpos rígidos es importante observar como a partir de exclusivamente:

1. La definición de un cuerpo rígido.

2. La definición del tipo de caso especial del movimiento de un cuerpo rígido.

Es posible encontrar los resultados deseados. Es importante observar el bosque sin perderse en los ´arboles.

4.3 DINÁMICA DE LOS MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO.

Rotación Alrededor de un Eje Fijo.

En este tipo de movimiento no solo un punto del cuerpo permanece fijo sino toda una línea del cuerpo permanece fija. De manera semejante al caso de movimiento esférico, la velocidad y aceleración absolutas de todas las partículas que forman parte del eje son nulas. Puesto que la distancia entre cualquier otra partícula del cuerpo y el punto, del eje fijo, más cercano a la partícula original, es también una distancia entre dos partículas de un cuerpo rígido, entonces esta distancia debe permanecer fija. Por lo tanto, las trayectorias de las partículas del cuerpo son círculos concéntricos cuyos centros están localizados en el eje de rotación.

4.4 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO PLANO GENERAL DE UN CUERPO RÍGIDO.

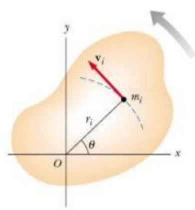
Movimiento Plano General.

En este tipo de movimiento, todas las partículas del cuerpo se mueven en planos paralelos. En este tipo de movimiento no se conoce a priori —es decir, de antemano— que punto del cuerpo tiene velocidad igual a ~0 o aceleración igual a ~0.

4.5 TRABAJO Y ENERGÍA E IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN LAS DINÁMICAS DEL CUERPO RÍGIDO.

En un sólido rígido las distancias relativas de sus puntos se mantienen constantes. Los puntos del sólido rígido se mueven con velocidad angular constante.

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



$$\textbf{Nota 1.}\ \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \,\text{si}\, i = j \\ 0 \,\text{si}\, i \neq j \end{cases} \text{es el símbolo de Kronecker}$$

Energía Cinética:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} \ = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \ = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^{\,2} - (\vec{\omega}.\vec{r}_i)^2) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta}) \omega_\alpha \omega_\beta \qquad E = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta$$

Tensor de inercia:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta})$$

$$(A \times B)(C \times D) \ = \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{iln} C_l D_n =$$
$$(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) A_j B_k C_l D_n \ \ = A.\mathrm{C} B.D - A.\mathrm{D} B.C$$

Momento de Inercia

Rotación alrededor del eje z:

$$E = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

I3

es el momento de inercia respecto al eje z:

$$I_3 = T_{33} = \sum_i m_i d_i^2, d_i = \text{distancia del punto } i \text{ al eje } z$$

BIBIOGRAFIA.

https://www.aero.upm.es/departamentos/fisica/PagWeb/Investigacion/Hedo/DOCENCIA/Ap u ntes/tcpunto.pdf

https://ocw.unican.es/pluginfile.php/1301/course/section/1594/07-Cinematica-punto.pdf

https://www.cec.uchile.cl/cinetica/Mecanica/caps/cap7.pdf

http://materias.fi.uba.ar/6201/MQCinydinCRpdf.pdf

http://www.elrincondelingeniero.com/centro-de-masas-e-inercia/

http://www.lfp.uba.ar/es/notas%20de%20cursos/notasmecanicajuliogratton/03Cinematica.p df https://www.fing.edu.uy/if/cursos/fis1/pmme/informe/nc7.pdf

https://alojamientos.uva.es/guia_docente/uploads/2013/493/46453/1/Documento2.pdf

file:///C:/Users/PC/Downloads/CAPITULO_4_2.pdf

http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_movimiento _circular/impresos/quincena2.pdf http://www.exa.unicen.edu.ar/catedras/fisica1/ApuntesOscar/Fisica%20I_Movimiento%20Rel at ivo.pdf

http://meteo.fisica.edu.uy/Materias/Introduccion_a_la_Meteorologia/a%C3%B1os%20anteri or es/IM_2010/2010_teorico_Introduccion_a_la_Meteorologia/Bolilla5-2010.pdf

http://www.heurema.com/DFQ/DFQ2-IMR/INTRODUCCION%20AL%20MOVIMIENTO%20RELATIVOw1.pdf

http://bdigital.unal.edu.co/7279/1/yamidmosqueramedina.2012.pdf

http://mecclas.fisica.edu.uy/teorico/Cap2.pdf

https://core.ac.uk/download/pdf/16393415.pdf

https://www2.dgeo.udec.cl/juaninzunza/docencia/fisica/cap5.pdf

https://www.ugr.es/~pittau/FISBIO/t3.pdf

https://www.redalyc.org/pdf/849/84934087.pdf

http://www.dicis.ugto.mx/profesores/chema/documentos/Din%C3%A1mica%20II/Cinem%C3% A1tica%20de%20los%20Cuerpos%20R%C3%ADgidos/DinamicaDelCuerpoRigido.pdf

http://www.fis.puc.cl/~jalfaro/fiz0121/clases/solido.pdf