



# ANTOLOGIA

# ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

*INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES*  
*3° CUATRIMESTRE*

---

## Marco Estratégico de Referencia

---

### ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzitol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzitol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

## MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

## VALORES

- Disciplina
- Honestidad

- Equidad
- Libertad

## ESCUDO



El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

## ESLOGAN

“Mi Universidad”

## ALBORES



Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

---

## Electricidad y magnetismo

---

### Objetivo de la materia:

El estudiante conocerá las leyes que explican los campos eléctricos y magnéticos, así como sus aplicaciones básicas.

### UNIDAD I ELECTROSTÁTICA

- I.1 Campos eléctricos
  - I.1.1 La carga eléctrica y sus propiedades.
- I.2 Aislantes, conductores y semiconductores.
- I.3 Ley Coulomb.
- I.4 Campo eléctrico.
- I.5 Campo eléctrico de una distribución continua de carga.
- I.6 Líneas de campo eléctrico.
- I.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme.
- I.8 Ley de Gauss.
  - I.8.1 Flujo eléctrico.
  - I.8.2 Ley de Gauss.
- I.9 Aplicaciones de la ley de Gauss a aisladores cargados.
- I.10 Conductores en equilibrio electrostático
  - I.11 Potencial eléctrico.
    - I.12 Diferencia de potencial y potencial eléctrico.
      - I.12.1 Potencial eléctrico y energía potencial debida a cargas puntuales.
      - I.12.2 Potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua.
      - I.12.3 Potencial de un conductor cargado.

### UNIDAD II ELECTRODINÁMICA

- 2.1 Corriente y resistencia.
  - 2.1.1 La batería
  - 2.1.2 Corriente eléctrica.
- 2.2 Resistencia y la ley de Ohm.
- 2.3 Resistividad de conductores diferentes.
- 2.4 Superconductores
- 2.5 Modelo de conducción eléctrica.
- 2.6 Energía eléctrica y potencia.
- 2.7 Circuitos de corriente directa.
- 2.8 Fuerza electromotriz
- 2.9 Resistencias en serie y en paralelo
- 2.10 Reglas de Kirchhoff
  - 2.11 Circuitos RC

## **UNIDAD III CAMPOS MAGNÉTICOS**

- 3.1 Campos magnéticos
  - 3.1.1 Introducción
- 3.2 Definición y propiedades de un campo magnético.
- 3.3 Fuerza magnética sobre un conductor que lleva una corriente eléctrica.
- 3.4 Momento sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme.
- 3.5 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético.
- 3.6 Fuentes de campo magnético.
  - 3.6.1 Ley de Biot-Savart.
- 3.7 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos.
- 3.8 Ley de ampere.
- 3.9 El campo magnético de un solenoide.
- 3.10 Campo magnético a lo largo del eje de un solenoide.
  - 3.11 Flujo magnético.
- 3.12 Ley de Gauss del magnetismo.
- 3.13 Corriente de desplazamiento y generalización de la ley de Ampère.
- 3.14 Magnetismo en la materia.
- 3.15 Campo magnético de la Tierra.

## **UNIDAD IV INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

- 4.1 Ley de inducción de Faraday.
- 4.2 Fem de movimiento.
- 4.3 Ley de Lenz
- 4.4 Fem inducidas y campos eléctricos.
- 4.5 Generadores y motores.
- 4.6 Autoinductancia.
- 4.7 Circuitos RL.
- 4.8 Energía en un campo magnético.
- 4.9 Inductancia mutua
- 4.10 Oscilaciones de un circuito LC
  - 4.11 Circuitos RLC

## Índice

<b>UNIDAD I. ELECTROSTÁTICA.....</b>	<b>10</b>
1.1 Campos eléctricos.....	10
1.1.1 La carga eléctrica y sus propiedades.....	10
1.2 Aislantes, conductores y semiconductores.....	13
1.3 Ley Coulomb.....	14
1.4 Campo eléctrico.....	15
1.5 Campo eléctrico de una distribución continua de carga.....	16
1.6 Líneas de campo eléctrico.....	17
1.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme.....	20
1.8 Ley de Gauss.....	21
1.9 Flujo eléctrico.....	21
1.10 Ley de Gauss.....	23
1.11 Aplicaciones de la ley de Gauss a aisladores cargados.....	24
1.12 Potencial eléctrico.....	26
<b>UNIDAD II ELECTRODINÁMICA.....</b>	<b>33</b>
2.1 Corriente y resistencia.....	33
2.1.1 La batería.....	33
2.1.2 Corriente eléctrica.....	35
2.2 Resistencia y la ley de Ohm.....	36
2.4 Superconductores.....	38
2.5 Modelo de conducción eléctrica.....	39
2.6 Energía eléctrica y potencia.....	41
2.7 Circuitos de corriente directa.....	43
2.10 Reglas de Kirchhoff.....	46
2.11 Circuitos RC.....	47
<b>UNIDAD III CAMPOS MAGNÉTICOS.....</b>	<b>49</b>
3.1 Campos magnéticos.....	49
3.1.1 Introducción.....	50
3.2 Definición y propiedades de un campo magnético.....	51
3.4 Momento sobre una espiral de corriente en un campo magnético uniforme.....	55
3.5 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético.....	57

3.6 Fuentes de campo magnético.....	58
3.6.1 Ley de Biot-Savart.....	59
3.7 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos.....	60
3.8 Ley de ampere.....	61
3.9 El campo magnético de un solenoide.....	62
3.10 Campo magnético a lo largo del eje de un solenoide.....	64
3.11 Flujo magnético.....	65
3.12 Ley de Gauss del magnetismo.....	66
3.13 Corriente de desplazamiento y generalización de la ley de Ampère.....	67
3.14 Magnetismo en la materia.....	69
3.15 Campo magnético de la Tierra.....	69
UNIDAD IV INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA.....	72
4.1 Ley de inducción de Faraday.....	72
4.2 Fem de movimiento.....	74
4.3 Ley de Lenz.....	76
4.4 Fem inducidas y campos eléctricos.....	78
4.5 Generadores y motores.....	79
4.6 Autoinductancia.....	80
4.7 Circuitos RL.....	82
4.8 Energía en un campo magnético.....	84
4.9 Inductancia mutua.....	85
4.10 Oscilaciones de un circuito LC.....	87
4.11 Circuitos RLC.....	87

## UNIDAD I. ELECTROSTÁTICA

### I.1 Campos eléctricos

La fuerza electromagnética entre partículas cargadas es una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Este capítulo principia con la descripción de algunas de las propiedades básicas de las fuerzas electrostáticas. A continuación, se analiza la ley de Coulomb, que es la ley fundamental de la fuerza entre cualesquiera dos partículas cargadas. Después, se introduce el concepto de campo eléctrico asociado con una distribución de carga y se describe su efecto sobre otras partículas cargadas. Se analiza el método para calcular campos eléctricos de una distribución de carga dada, a partir de la ley de Coulomb, y se dan varios ejemplos. Más adelante se analiza el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme. El capítulo concluye con una descripción breve del osciloscopio.

#### I.1.1 La carga eléctrica y sus propiedades.

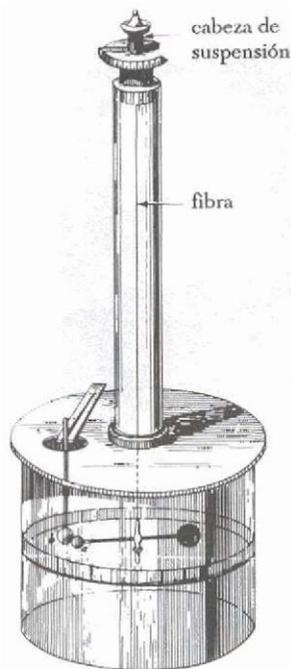
Es posible llevar a cabo cierto número de experimentos para demostrar la existencia de las fuerzas y cargas eléctricas. Por ejemplo, si frotamos un peine contra nuestro pelo, se observará que aquél atraerá pedacitos de papel. A menudo la fuerza de atracción es lo suficientemente fuerte como para mantener suspendidos los pedacitos de papel. El mismo efecto ocurre al frotar otros materiales, tales como el vidrio o el caucho.

Charles Coulomb, el gran Físico francés por quien después la unidad de carga eléctrica fue llamada coulomb, nació en Angoulême en 1736. Estudió en la École du Génie en Mézieres, graduándose en 1761 como ingeniero militar con el rango de teniente. Coulomb sirvió en las Indias occidentales durante nueve años, donde supervisó la construcción de la fortificación de Martinique.

En 1774, Coulomb es corresponsal de la Academia de la Ciencia en París. Allí comparte el primer premio de la Academia por su artículo sobre el compás magnético (brújula) y también recibe el primer premio por su trabajo clásico sobre la fricción, estudio que no fue superado en 150 años. Durante los siguientes 25 años, presentó 25 artículos a la Academia sobre electricidad, magnetismo, torsión y aplicaciones de la balanza de torsión, así como también algunos cientos de reportes a comités sobre proyectos de ingeniería y civiles.

Coulomb aprovechó totalmente los diversos puestos que tuvo durante su vida. Por ejemplo, su experiencia como ingeniero le permitió investigar sobre los esfuerzos en materiales y determinar las fuerzas que afectan a objetos sobre vigas, contribuyendo con esto al campo de la mecánica estructural. También ayudó al campo de la ergonomía. Sus investigaciones contribuyeron al entendimiento de las formas en las cuales las personas y

los animales pueden realizar más trabajo e influyó grandemente las posteriores investigaciones de Gaspard Coriolis (1792-1843).



La mayor contribución de Coulomb a la ciencia fue en el campo de la electrostática y el magnetismo, en el cual hizo uso de la balanza de torsión que él mismo diseñó. El artículo que describe esta invención también tiene un diseño para una brújula usando el principio de torsión en una suspensión. Su siguiente artículo proporcionó la prueba de la ley del inverso del cuadrado para la fuerza electrostática entre cargas.

Coulomb murió en 1806, cinco años después de ser nombrado presidente del Instituto de Francia (anteriormente, la Academia de la Ciencia de París). Sus investigaciones sobre electricidad y magnetismo llevaron esta área de la física fuera de la tradicional filosofía natural y la convirtieron en ciencia exacta.

Otro experimento sencillo es frotar un globo inflado contra una tela de lana. El globo puede adherirse a una pared o al techo de una habitación durante varias horas. Cuando los materiales se comportan de esa manera se dice que están electrizados o que se han cargado eléctricamente. Podemos electrificar con facilidad nuestro cuerpo frotando vigorosamente nuestros zapatos contra una alfombra de lana. La carga de nuestro cuerpo se puede eliminar tocando (y asustando) a un amigo. En ciertas condiciones una chispa visible se puede observar cuando una persona toca a otra, y sentirse un pequeño toque. (Experimentos como éstos se realizan mejor en un día seco ya que una cantidad excesiva de humedad puede producir una fuga de carga del cuerpo electrificado hacia la tierra, a través de diversas trayectorias.)

En una sucesión sistemática de experimentos un tanto simples, se encuentra que existen dos tipos de cargas eléctricas a las cuales Benjamín Franklin (1706-1790) les dio el nombre de positiva y negativa. Para demostrar este hecho, considérese que se frota una barra dura de caucho contra una piel y a continuación se suspende de un hilo no metálico. Cuando una barra de vidrio frotada con una tela de seda se acerca a la barra de caucho, ésta será atraída hacia la barra de vidrio. Por otro lado, si dos barras de caucho cargadas (o bien dos barras de vidrio cargadas) se aproximan una a la otra, la fuerza entre ellas será de repulsión. Esta observación demuestra que el caucho y el vidrio se encuentran en dos estados de electrificación diferente. Con base en estas observaciones, podemos concluir que cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen. Usando la convención sugerida por Franklin, la carga eléctrica en la barra de vidrio se llama positiva y la carga de barra de caucho se llama negativa. Por lo tanto, cualquier cuerpo cargado que es atraído por una barra de caucho cargada (o repelido por una barra de vidrio cargada) debe tener una carga positiva. Inversamente, cualquier cuerpo cargado que es repelido por una barra de caucho cargada (o atraído por una barra de vidrio cargada) debe tener carga negativa.

Otro aspecto importante del modelo de Franklin de la electricidad es la implicación de que la carga eléctrica siempre se conserva. Esto es, citándose frota un cuerpo contra otro no se crea carga en el proceso. El estado de electrificación se debe a la transferencia de carga de un cuerpo otro. Por lo tanto, in cuerpo gana cierta cantidad de carga negativa mientras que el otro gana la misma cantidad de carga positiva. Por ejemplo, cuando una barra de vidrio es frotada con seda, ésta obtiene una carga negativa que es igual en magnitud a la carga positiva de la barra de vidrio. Por los conocimientos sobre la estructura atómica sabemos que son los electrones negativamente cargados es que se transfieren del vidrio a la seda en el proceso de frotamiento. Del mismo modo, cuando se frota el caucho contra la piel, se transfieren electrones de la piel al caucho, dando a éste una carga neta negativa y a aquélla una carga positiva. Esto es consecuente con el hecho de que la materia neutra no cargada contiene tantas cargas positivas (protones en el núcleo) como cargas negativas (electrones):

En 1909, Robert Millikan (1886-1953) demostró que la carga eléctrica siempre se presenta como algún múltiplo entero de alguna unidad fundamental de carga  $e$ . En términos modernos, se dice que la carga  $q$  está cuantizada, esto es, la carga eléctrica existe como paquetes discretos. Entonces, podemos escribir  $q = Ne$ , donde  $N$  es algún entero. Otros experimentos en el mismo periodo demostraron que el electrón tiene una carga de  $-e$  y que el protón una carga igual y opuesta de  $+e$ . Algunas partículas elementales, como el neutrón, no tienen carga. Un átomo neutro debe contener el mismo número de protones que de electrones.

Las fuerzas eléctricas entre objetos cargados fueron medidas por Coulomb utilizando la balanza de torsión, diseñada por él. Por medio de este aparato, Coulomb confirmó que la fuerza eléctrica entre dos pequeñas esferas cargadas es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia que las separa, es decir,  $F \propto 1/r^2$ . El principio de operación de la balanza de torsión es el mismo que el del aparato usado por Cavendish para medir la constante de gravitación, reemplazando masas por esferas cargadas. La fuerza eléctrica entre las esferas cargadas produce una torsión en la fibra de suspensión. Como el momento de una fuerza de restitución de la fibra es proporcional al ángulo que describe al girar, una medida de este ángulo proporciona una medida cuantitativa de la fuerza eléctrica de atracción o repulsión. Si las esferas se cargan por frotamiento, la fuerza eléctrica entre las esferas es muy grande comparada con la atracción gravitacional; por lo que se desprecia la fuerza gravitacional.

Por lo visto hasta ahora en nuestra discusión, se concluye que la carga eléctrica tiene las importantes propiedades siguientes:

- 1. Existen dos clases de cargas en la naturaleza, con la propiedad de que cargas diferentes se atraen y cargas iguales se repelen.**
- 2. La fuerza entre cargas varía con el inverso del cuadrado de la distancia que las separa.**
- 3. La carga se conserva.**

#### 4. La carga está cuantizada.

### 1.2 Aislantes, conductores y semiconductores.

Es conveniente clasificar las sustancias en términos de su capacitancia para conducir carga eléctrica.

**Los conductores son los materiales en los cuales las cargas eléctricas se mueven con bastante libertad, en tanto que son aisladores los que no transportan la carga con facilidad.**

Materiales como el vidrio, caucho y la lucita están dentro de la categoría de aisladores. Cuando estos materiales son cargados por frotamiento, sólo el área que se frota se carga y ésta no se mueve hacia otras regiones del material.

En contraste, materiales como el cobre, el aluminio y la plata son buenos conductores. Cuando estos materiales se cargan en alguna pequeña región, la carga rápidamente se distribuye sobre toda la superficie del conductor. Si se sostiene una barra de cobre con la mano y se frota con lana o cualquier piel, la barra no atraerá a un pequeño pedazo de papel. Esto podría sugerir que no se puede cargar un metal. Por otro lado, si se sostiene la barra de cobre con un mango de lucita y después se frota, la barra permanecerá cargada y atraerá al trozo de papel. Esto se puede explicar al observar que, en el primer caso, la carga eléctrica producida por frotamiento pasa con facilidad del cobre a nuestra mano y, finalmente, hacia la tierra. En el segundo caso, el mango aislador de lucita evita el flujo de la carga hacia la tierra.

Los semiconductores constituyen una tercera clase de materiales, y sus propiedades eléctricas se encuentran entre las correspondientes a los aislantes y los conductores. El silicio y el germanio son ejemplos bien conocidos de semiconductores que se utilizan con frecuencia en la fabricación de una variedad de dispositivos electrónicos. Las propiedades eléctricas de los semiconductores pueden ser cambiadas en varios órdenes de magnitud, agregando cantidades controladas de átomos extraños a los materiales.

Cuando un conductor se conecta a tierra por medio de un alambre conductor o de un tubo de cobre, se dice que está aterrizado. La tierra puede considerarse como un sumidero infinito hacia el cual los electrones pueden emigrar con facilidad. Con esto en mente, se puede comprender cómo cargar un conductor por un proceso conocido como inducción.

Para entender la inducción, considere que una barra de caucho cargada negativamente se acerca a una esfera conductora neutra (no cargada) aislada de la tierra. Es decir, no existe trayectoria conductora hacia la tierra. La región de la esfera más cercana a la barra cargada negativamente obtendrá un exceso de cargas positivas, mientras que la región de la esfera

más lejana de barra obtendrá un exceso de carga negativa. (Es decir, los electrones en la parte de la esfera cercana a la barra emigrarán al lado opuesto de la esfera). Si el mismo experimento se realiza con un alambre conductor conectado a tierra, algunos electrones serán repelidos hacia la tierra. Si el alambre a tierra se quita, la esfera conductora contendrá un exceso de carga positiva inducida. Finalmente, cuando se retira la barra de caucho de la vecindad de la esfera, la carga positiva inducida permanece en la esfera no aterrizada. Nótese que la carga remanente en la esfera está distribuida uniformemente en la superficie de la esfera debido a la presencia de las fuerzas repulsivas entre cargas semejantes. En el proceso, la barra de caucho no pierde su carga negativa.

Entonces, se puede observar que para cargar un objeto por inducción no se requiere contacto con el cuerpo inductor de la carga. Esto contrasta con la carga de un objeto por frotamiento (es decir, carga por conducción), la cual sí requiere del contacto entre los dos cuerpos.

Un proceso similar al que se realiza para cargar por inducción un conductor se utiliza para los aislantes. En la mayoría de los átomos y moléculas neutros, el centro de carga positivas coincide con el centro de cargas negativas. Sin embargo, en presencia de un objeto cargado, estos centros pueden ser desviados ligeramente, resultando más positiva la carga de un lado de la molécula que del otro. Este efecto, conocido como polarización. Así, este reacomodo de cargas en cada una de las moléculas produce una carga inducida en la superficie del aislador. Con estas ideas, podríamos intentar explicar por qué un peine que ha sido frotado contra el pelo podrá atraer trozos de papel neutro, o por qué un globo que ha sido frotado en la ropa se puede adherir a una pared neutra.

### 1.3 Ley Coulomb.

En 1785, Coulomb estableció la ley fundamental de la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas estacionarias. Los experimentos muestran que la fuerza eléctrica tiene las siguientes propiedades: 1) La fuerza es inversamente proporcional al inverso del cuadrado de la distancia de separación  $r$  entre las dos partículas, medida a lo largo de la línea recta que las une. 2) La fuerza es proporcional al producto de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  de las dos partículas. 3) La fuerza es atractiva si las cargas son de signos opuestos, y repulsiva si las cargas son del mismo signo. A partir de estas observaciones podemos expresar la fuerza eléctrica entre las dos cargas como:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

donde  $K$  es una constante conocida como constante de- Coulomb. En sus experimentos, Coulomb pudo demostrar que el exponente de  $r$  era 2, con sólo un pequeño porcentaje de incertidumbre. Los experimentos modernos han demostrado que el exponente es 2 con una precisión de algunas partes en 10<sup>9</sup>.

La constante  $k$  en la ecuación tiene un valor que depende de la elección de las unidades. La unidad de carga en el SI de unidades es el coulomb (C). El coulomb se define en términos de la unidad de corriente llamada amperio (A), donde la corriente es igual a la rapidez del flujo de carga. (El amperio será definido en el capítulo 27.) Cuando la corriente en un alambre es de  $I$  A, la cantidad de carga que fluye en un determinado punto del alambre en  $t$  s es  $It$  C. La constante de coulomb  $k$  en el SI de unidades tiene un valor de:

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

Para simplificar los cálculos, se usará el valor aproximado:

$$k \cong 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

La unidad más pequeña de carga conocida en la naturaleza es la que tiene un electrón o un protón. La carga de un electrón o de un protón tiene una magnitud de  $1.6 \times 10^{-19}$  C. Por lo tanto, 1 C de carga es igual a la carga de  $6.3 \times 10^{18}$  electrones (esto es,  $1/e$ ). Se puede comparar esto con el número de electrones libres que se encuentran en  $1 \text{ cm}^3$  de cobre, que es del orden de  $10^{23}$ . Nótese que 1 C es una cantidad importante de carga. En experimentos electrostáticos típicos, en los cuales se carga una barra de caucho o de vidrio por frotamiento, la carga neta que se obtiene es del orden de  $10^{-6}$  C ( $= 1 \mu\text{C}$ ). En otras palabras, sólo una pequeña fracción de la carga total disponible se transfiere entre el material de la barra y el material con que se frota.

Cuando se aplica la ley de la fuerza de Coulomb, debe recordarse que la fuerza es una cantidad vectorial y debe tratarse como tal. Además nótese que la ley de Coulomb sólo se aplica a cargas puntuales o partículas. La fuerza eléctrica  $F_{21}$  debida a  $q_1$ , escrita como  $F_{21}$ , puede ser expresada en forma vectorial

$$F_{21} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

## 1.4 Campo eléctrico.

El campo gravitacional  $g$  en un punto en el espacio se definió en el capítulo 14 como la fuerza gravitacional  $F$  que actúa sobre una masa de prueba  $m_0$  dividida por la masa de prueba. Es decir,  $g = F/m_0$ . De manera similar, un campo eléctrico en un punto dado del espacio puede ser definido en términos de la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga de prueba  $q_0$  colocada en ese punto. Siendo más preciso:

**el vector campo eléctrico  $E$  en un punto en el espacio está definido como la fuerza eléctrica  $F$  que actúa sobre una carga de prueba positiva colocada en ese punto y dividida por la magnitud de la carga de prueba  $q_0$ :**

$$E \equiv \frac{F}{q_0}$$

Nótese que  $E$  es el campo externo a la carga de prueba—no es el campo producido por la carga de prueba—. El vector  $E$  tiene como unidades en el SI, newton por coulomb (N/C). La dirección de  $E$  es la dirección de  $F$  ya que asumimos que  $F$  actúa sobre una carga de prueba positiva. Así, podemos decir que un campo eléctrico existe en un punto si una carga de prueba en reposo situada en ese punto experimenta una fuerza eléctrica. Una vez que se conoce el campo eléctrico en algún punto, es posible calcular, a partir de la ecuación 23.7, la fuerza sobre cualquier partícula cargada que se coloque en ese punto. Es más, se puede decir que existe el campo eléctrico en un punto (incluso en el espacio vacío) sin importar si está localizada o no una carga de prueba en otro punto.

Al aplicar la ecuación, debe suponerse que la carga de prueba  $q$ , es lo suficientemente pequeña de modo que no perturbe la distribución de carga que produce el campo eléctrico. Por ejemplo, si coloca una carga de prueba  $q$  de tamaño imperceptible cerca de una esfera metálica cargada uniformemente, la carga de la esfera metálica, la cual produce el campo eléctrico, permanecerá uniformemente distribuida. Es más, la fuerza  $F$  sobre la carga de prueba no tendrá la misma magnitud en los puntos A, B y C, (que están equidistantes de la esfera). Si la carga de prueba es lo suficientemente grande, se modificará la distribución de carga de la esfera metálica y la razón de la fuerza a la carga de prueba, en el punto A, será diferente:  $F/Q = kE$ . Es decir, en virtud de esta redistribución de carga sobre la esfera metálica, el campo eléctrico producido por ella en el punto A en la figura 23.9b debe ser diferente al del punto B. Además, la redistribución de carga cambiará cuando la carga de prueba se mueva de A a B o C.

Considérese una carga puntual  $q$  ubicada a una distancia  $r$  de una carga de prueba ( $Q$ ). Según la ley de Coulomb, la fuerza sobre esta carga de prueba es

$$F = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

## 1.5 Campo eléctrico de una distribución continua de carga.

En la sección anterior se mostró la manera de calcular el campo eléctrico de una carga puntual aplicando la ley de Coulomb. Se obtuvo el campo total de un grupo de cargas puntuales tomando la suma vectorial de los campos debidos a cada una de las cargas. Este procedimiento supone que el principio de superposición es aplicable al campo electrostático.

Con mucha frecuencia las cargas que interesan están muy próximas entre sí en comparación con las distancias a los puntos que se consideran. En situaciones de este tipo, puede considerarse al sistema de cargas como si fuera continuo. Es decir, si se supone que el sistema de cargas muy próximas es equivalente a una carga total continuamente distribuida a través de un volumen o sobre una superficie.

Para evaluar el campo eléctrico de una distribución continua de carga se aplica el siguiente procedimiento. En primer lugar, se divide la distribución de carga en pequeños

elementos, cada uno de los cuales contiene una pequeña carga  $\Delta q$ . A continuación, se aplica la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico debido a uno de estos elementos en el punto P. Por último, se evalúa el campo total en P debido a la distribución de carga sumando las contribuciones de todos los elementos de carga (esto es, aplicando el principio de superposición).

El campo eléctrico en P debido a un elemento de carga  $\Delta q$  está dado por

$$d\vec{E} = k \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r}$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento al punto P y  $\hat{r}$  es el vector unitario dirigido desde el elemento de carga hacia P. El campo eléctrico total en P debido a todos los elementos en la distribución de carga está aproximadamente dado por

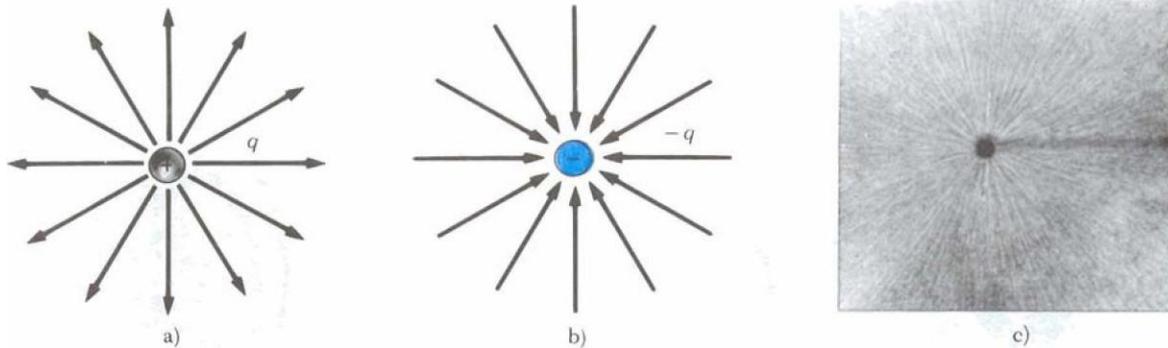
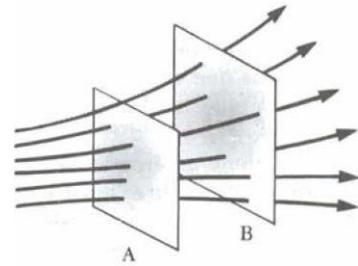
$$\vec{E} = \sum \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

## 1.6 Líneas de campo eléctrico.

Una ayuda conveniente para visualizar los patrones del campo eléctrico es trazar líneas en la misma dirección que el vector de campo eléctrico en varios puntos. Estas líneas se conocen como líneas de campo eléctrico y están relacionadas con el campo eléctrico en alguna región del espacio de la siguiente manera:

- 1 El vector campo eléctrico  $\vec{E}$  es tangente a la línea de campo eléctrico en cada punto.
- 2 El número de líneas por unidad de área que pasan por una superficie perpendicular a las líneas de campo es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en esa región. En consecuencia,  $E$  es grande cuando las líneas están muy próximas entre sí, y es pequeño cuando están separadas.

Estas propiedades se ven en la figura. La densidad de líneas a través de la superficie A es mayor que la densidad de líneas a través de la superficie B. Por lo tanto, el campo eléctrico es más intenso en la superficie A que en la superficie B. Además, el campo que se observa en la figura no es uniforme ya que las líneas en ubicaciones diferentes apuntan hacia direcciones diferentes.



Líneas de campo eléctrico para una carga puntual. a) Para una carga puntual positiva, las líneas son radialmente hacia afuera. b) Para una carga puntual negativa, las líneas son radialmente hacia adentro. Nótese que en la figura sólo se muestran las líneas que están sobre el plano que contiene la carga. c) El área sombreada son pequeñas piezas de fibra suspendida en aceite, las cuales se alinean con el campo eléctrico producido por un pequeño conductor cargado en el centro. (Fotografía cortesía de Harold M. Waage, Princeton University.)

Algunas líneas representativas del campo eléctrico para una partícula puntual positiva se aprecian en la figura a. Obsérvese que en los dibujos bidimensionales sólo se muestran las líneas del campo que están en el plano que contiene a la carga. Las líneas están dirigidas radialmente hacia afuera de la carga en todas direcciones como las espinas de un puerco espín. Dado que la carga de prueba es positiva, al ser colocada en este campo, sería repelida por la carga  $q$ , por lo que las líneas están radialmente dirigidas hacia afuera desde la carga positiva. En forma similar, las líneas de campo eléctrico de una carga negativa puntual están dirigidas hacia la carga. En cualquiera de los casos las líneas siguen la dirección radial y se prolongan al infinito. Nótese que las líneas se juntan más cuando están más cerca de la carga, lo cual indica que la intensidad del campo se incrementa al acercarse a la carga.

Las reglas para trazar las líneas de campo eléctrico de cualquier distribución de carga son las siguientes:

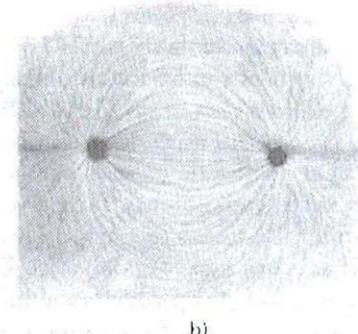
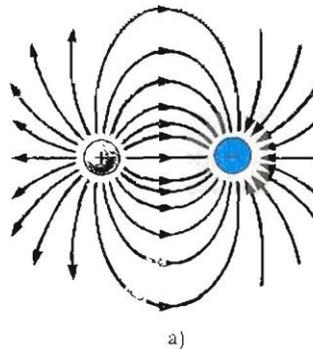
1. Las líneas deben partir de cargas positivas y terminar en las cargas negativas, o bien en el infinito en el caso de un exceso de carga.
2. El número de líneas que partan de la carga positiva o lleguen a la negativa es proporcional a la magnitud de la carga.
3. Dos líneas de campo no pueden cruzarse.

¿Concuerda esta representación del campo eléctrico, en términos de líneas del campo, con la ley de Coulomb? Para responder esta pregunta, consideremos una superficie esférica

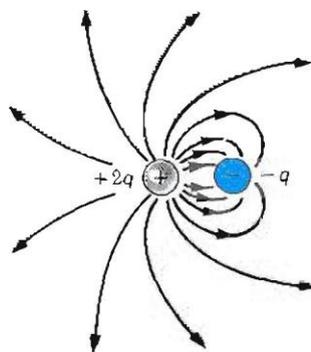
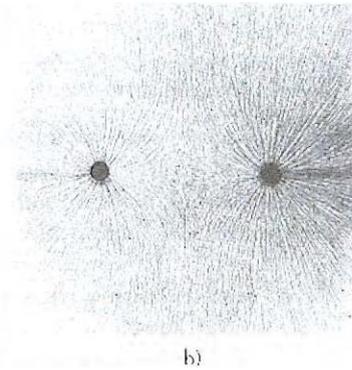
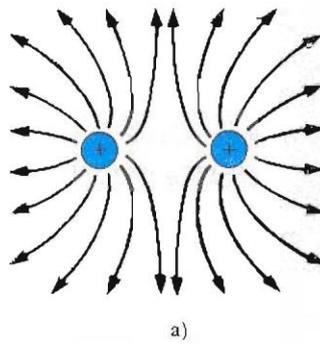
imaginaria de radio  $r$  concéntrica con la carga. Por simetría, se ve que la magnitud del campo eléctrico es la misma en cualquier punto de la superficie de la esfera. El número de líneas  $N$  que emergen de la carga es igual al número que penetra la superficie esférica. Se infiere que el número de líneas por unidad de área en la esfera es  $N/4\pi r^2$  (donde el área de superficie de la esfera es  $4\pi r^2$ ). Siendo  $E$  proporcional al número de líneas por unidad de área, se puede ver que  $E$  varía como  $1/r^2$ . Lo cual es consecuente con el resultado obtenido de la ley de Coulomb, es decir,  $E = kq/r^2$ ,

Es importante hacer notar que las líneas de campo no son objetos materiales. Estas sólo se utilizan para dar una descripción cualitativa del campo eléctrico. Un problema que presenta este modelo es el hecho de que siempre se traza un número finito de líneas desde cada carga, lo que puede hacer pensar que el campo está cuantizado y que sólo actuará en cierta dirección. De hecho, el campo es continuo —existe en todo punto. Otro problema con este modelo es el peligro de adquirir una impresión equivocada al estar usando una representación bidimensional de las líneas de campo para describir una situación tridimensional.

Como la carga está cuantizada, el número de líneas que salen de cualquier objeto material debe ser  $0, \pm C'e, \pm 2 C'e, \dots$ , donde  $C'$  es una constante arbitraria de proporcionalidad (pero fija). Una vez que se elige  $C'$ , el número de líneas no es arbitrario. Por ejemplo, si un objeto 1 tiene una carga  $Q_1$  y un objeto 2 tiene una carga  $Q_2$ , entonces la razón entre los números de líneas es  $N_1/N_2 = Q_1/Q_2$ . Las líneas de campo eléctrico para dos partículas cargadas de igual magnitud, pero de signos opuestos (dipolo eléctrico), se muestran en la figura. En este caso, el número de líneas que empiezan en la carga positiva debe ser igual al número que terminan en la carga negativa. En puntos cercanos a las cargas, las líneas son prácticamente radiales. La alta densidad de las líneas entre las cargas indica una región de campo eléctrico intenso. La naturaleza atractiva de la fuerza entre las cargas también puede verse en la figura.



La figura muestra las líneas de campo eléctrico en la vecindad de dos cargas puntuales positivas e iguales. Nuevamente, las líneas son casi radiales en los puntos cercanos a las cargas. Emergen el mismo número de líneas desde cada carga, ya que éstas tienen magnitudes iguales. A grandes distancias de las cargas el campo es aproximadamente igual al de una sola carga puntual de magnitud  $2q$ . La desviación hacia afuera de las líneas del campo entre las cargas indica la naturaleza repulsiva de la fuerza eléctrica entre cargas del mismo signo.



Finalmente, en la figura se tiene un esquema de las líneas del campo eléctrico asociado con una carga positiva de  $+2q$  y una carga negativa  $-q$ . En este caso, el número de líneas que sale de la carga  $+2q$  es el doble del número de líneas que entran a  $-q$ . Por consiguiente, la mitad restante suponemos que pueden ser localizadas en el infinito. A grandes distancias de las cargas (grande comparada con la distancia que las separa), las líneas de campo eléctrico son equivalentes a las de una simple carga  $+q$ .

## 1.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme.

En esta sección se describe el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme. Como se verá, el movimiento es equivalente al de un proyectil que se mueve en un campo gravitacional uniforme. Cuando una partícula de carga  $q$  se coloca en un campo eléctrico  $E$ , la fuerza eléctrica sobre la carga es  $qE$ . Si ésta es la única fuerza que actúa sobre la carga, entonces la segunda ley de Newton aplicada a la carga produce

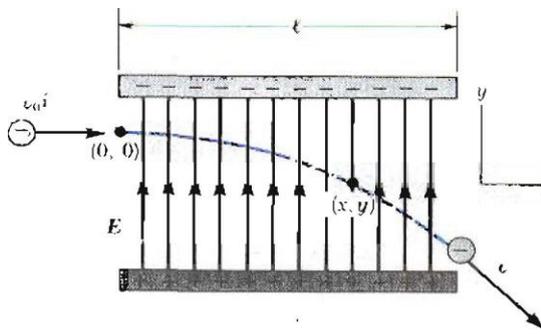
$$F = qE = ma$$

donde  $m$  es la masa de la carga y se supone que la velocidad es pequeña comparada con la de la luz. La aceleración de la partícula estará dada por lo tanto como

$$a = \frac{qE}{m}$$

Si  $E$  es uniforme (es decir, constante en magnitud y dirección), se puede ver que la aceleración es una constante del movimiento. Si la carga es positiva, la aceleración será en

la dirección del campo eléctrico. Si la carga es negativa, la dirección de la aceleración será opuesta a la del campo eléctrico.



El campo eléctrico que existe en la región comprendida entre dos placas metálicas planas con cargas opuestas es aproximadamente uniforme. Suponga que un electrón de carga  $-e$  se proyecta horizontalmente dentro de un campo eléctrico con una velocidad inicial  $v_0\hat{i}$ .

$$a = -\frac{eE}{m} \hat{j}$$

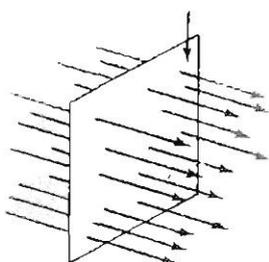
Debido a que el campo eléctrico está en la dirección positiva del eje  $y$ , la aceleración del electrón es la dirección negativa del eje  $y$ . Es decir,

## 1.8 Ley de Gauss.

En el capítulo anterior se mostró cómo calcular el campo eléctrico de una distribución dada de carga mediante la ley de Coulomb. En este capítulo se describe un procedimiento alternativo para calcular campos eléctricos conocido como Ley de Gauss. Su formulación se basa en el hecho de que la fuerza electrostática fundamental entre dos cargas puntuales es una ley inversa del cuadrado. Aun cuando la ley de Gauss es consecuencia de la ley de Coulomb, es mucho más conveniente para cálculos de campos eléctricos de distribuciones de carga altamente simétricas. Además, la ley de Gauss sirve como guía para comprender problemas más complicados.

## 1.9 Flujo eléctrico.

El concepto de líneas de campo fue descrito cualitativamente en el capítulo anterior. Se usará el concepto de flujo eléctrico para dar a esta idea una base cuantitativa. **Flujo eléctrico es la medida del número de líneas de campo que atraviesan cierta superficie.** Cuando la superficie que está siendo atravesada encierra, alguna carga neta, el número total de líneas que pasan a través de tal superficie es proporcional a la carga neta que está en el interior de ella. El número de líneas que se cuentan es independiente de la forma de la superficie que encierra a la carga. Esencialmente, éste es un enunciado de la ley de Gauss que se describe en la siguiente sección.



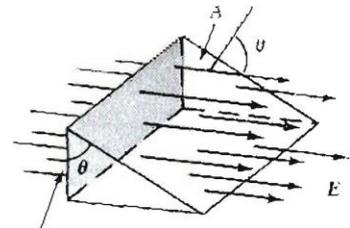
Primero consideremos un campo eléctrico uniforme tanto en magnitud como en dirección, como se muestra en la figura 24.1. Las líneas de campo eléctrico penetran una superficie rectangular de área  $A$ , la cual es perpendicular al campo. Recuérdese que el número de líneas por unidad de área es proporcional a la magnitud del campo eléctrico. Por lo tanto, el número de líneas que penetran la superficie

$$\Phi = EA$$

de área  $A$  es proporcional al producto  $EA$ . El producto de la intensidad del campo eléctrico  $E$  y el área superficial  $A$  perpendicular al campo se conoce como flujo eléctrico, ( $\Phi$ ):

De las unidades pura  $E$  y  $A$  en el SI, se ve que el flujo eléctrico tiene unidades de  $N \cdot m^2/C$ .

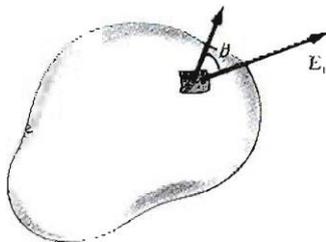
Si la superficie en consideración no es perpendicular al campo, el número de líneas (o el flujo) que pasan a través de ella debe ser menor que el que produce la ecuación 24.1. Esto puede entenderse con facilidad considerándola figura 24.2, donde la normal a la superficie  $A$  forma un ángulo  $\theta$  con el campo eléctrico uniforme. Nótese que el número de líneas que cruza esta área es igual al número que cruza el área proyectada  $A'$ , la cual es perpendicular al campo. A partir de la figura se ve que las dos áreas están relacionadas por  $A' = A \cos \theta$ . Como el flujo a través del área  $A$  es igual al flujo a través de  $A'$ , se concluye que el flujo deseado está dado por



$$\Phi = EA \cos \theta$$

Con base en este resultado, se ve que el flujo que pasa a través de una superficie de área fija tiene un valor máximo  $EA$ , cuando la superficie es perpendicular al campo (o cuando la normal a la superficie es paralela al campo, es decir,  $\theta = 0^\circ$ ); el flujo es cero cuando la superficie es paralela al campo (o cuando la normal a la superficie es perpendicular al campo, es decir,  $\theta = 90^\circ$ ).

En situaciones más generales, el campo eléctrico puede variar sobre la superficie en cuestión. Por lo tanto, la definición de flujo dada por la ecuación tiene significado sobre un pequeño elemento de área. Considérese una superficie general



dividida en un gran número de pequeños elementos, cada uno de área  $AA_i$ . Puede despreciarse la variación del campo eléctrico sobre el elemento, si éste es lo suficientemente pequeño. Es conveniente definir el vector  $AA_i$ ; cuya magnitud representa el área del  $i$ -ésimo elemento y cuya dirección quede definida como siendo perpendicular a la superficie, según se ve en la figura. El flujo eléctrico  $\Delta\Phi_i$  a través de este pequeño elemento está dado por

$$\Delta\Phi_i = E_i \Delta A_i \cos \theta = E_i \cdot \Delta A_i$$

donde se ha utilizado la definición del producto escalar de dos vectores ( $A \cdot B = AB \cos \theta$ ). Sumando la contribución de todos los elementos, se obtiene el flujo total a través de la superficie. Si el área de cada uno de los elementos se hace que tienda a cero, entonces el

$$\Phi = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i = \int_{\text{superficie}} E \cdot dA$$

número de elementos tiende a infinito y la suma se sustituye por una integral. En consecuencia, la definición general de flujo eléctrico es

La ecuación 24.3 es una integral de superficie, la cual debe evaluarse sobre la superficie hipotética en cuestión. En general, el valor de  $\Phi$  depende tanto del patrón del campo como de la superficie especificada.

Generalmente habrá interés en evaluar el flujo que pasa por una superficie cerrada, (Una superficie cerrada se define como una superficie que divide el espacio en una región interna y otra externa, así que uno no puede moverse de una región a la otra sin atravesar la superficie. La superficie de una esfera, por ejemplo, es una superficie cerrada.) Considérese la superficie cerrada de la figura 24.4. Nótese que los vectores  $\mathbf{A}_i$  apuntan en direcciones diferentes para los diversos elementos de la superficie. En cada punto, estos vectores son normales a la superficie y por convención siempre apuntan hacia afuera. En los elementos indicados como  $\textcircled{R}$  y  $\textcircled{C}$ ,  $\mathbf{E}$  está dirigido hacia afuera y  $\theta < 90^\circ$ ; por consiguiente, el elemento de flujo  $d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$  que pasa a través de estos elementos es positivo. Por otra parte, para los elementos como  $\textcircled{L}$  donde las líneas de campo están dirigidas hacia la superficie,  $\theta > 90^\circ$ , por lo que el flujo se vuelve negativo con el elemento. El flujo total o neto que pasa a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que pasan a través de ella (donde por número neto se entiende el número de líneas que salen de la superficie menos el número de líneas que entran a ella).

Si se tienen más líneas salientes que entrantes, el flujo neto es positivo. Si entran más líneas que las que salen de la superficie, el flujo neto es negativo. Si se utiliza el símbolo  $\oint$  para representar una integral sobre una superficie cerrada, se puede escribir el flujo neto  $\Phi_{\text{neto}}$  a través de una superficie cerrada

$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E_n dA$$

donde  $E_n$  representa la componente del campo eléctrico perpendicular, o normal, a la superficie, y el subíndice c denota una superficie cerrada. Evaluar el flujo neto que pasa a través de una superficie cerrada podría ser muy incómodo; sin embargo, si el campo es normal a la superficie en cada punto, y constante en magnitud, el cálculo es directo.

### 1.10 Ley de Gauss.

En esta sección se describe una relación general entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada (conocida también como superficie gaussiana) y la carga neta encerrada por esa superficie. Esta relación, conocida como ley de Gauss, es de fundamental importancia en el estudio de los campos eléctricos.

La ley de Gauss, establece que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada está dada por

$$\Phi_e = \oint E \cdot dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

donde  $q_{int}$  representa la carga neta encerrada en el interior de la superficie gaussiana y  $E$  representa el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie gaussiana. En palabras

**La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga neta que se encuentra dentro de ella, dividida por  $\epsilon_0$ .**

En principio la ley de Gauss se puede utilizar para el cálculo del campo eléctrico de un sistema de partículas o de una distribución continua de carga. Sin embargo, en la práctica, la técnica sólo se utiliza en un número limitado de situaciones donde existe un alto grado de simetría - Como se verá en la siguiente sección, la ley de Gauss puede aplicarse para evaluar el campo eléctrico en distribuciones de carga que tengan simetría esférica, cilíndrica o plana. Si uno elige con cuidado la superficie, gaussiana que rodee a la distribución de carga, la integral en la ecuación se evaluará con facilidad. También podrá notar que, una superficie gaussiana es una superficie matemática y no necesariamente coincide con una superficie física real.

## 1.11 Aplicaciones de la ley de Gauss a aisladores cargados.

En esta sección se presentan algunos ejemplos de cómo utilizar la ley de Gauss para calcular  $E$  en una distribución de carga dada, Es importante reconocer que la ley de Gauss sólo se aplica cuando existe un alto grado de simetría en la distribución de carga, como en el caso de una esfera, cilindros largos y láminas planas uniformemente cargadas. En tales casos, es posible determinar una superficie gaussiana simple sobre la cual se evalúa con facilidad la integral de superficie dada por la ecuación.

**Siempre debe elegirse la superficie de modo que tenga la misma simetría que la correspondiente a la distribución de carga.**

### 1.1 Conductores en equilibrio electrostático.

Un buen conductor eléctrico, como el cobre, contiene cargas (electrones) que no están ligadas a átomo alguno y pueden moverse con libertad dentro del material. Cuando no se tiene movimiento neto de la carga dentro del conductor, éste se encuentra en equilibrio electrostático. Como se verá, un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en cualquier punto del interior del conductor.
2. Cualquier exceso de carga en un conductor aislado debe residir enteramente sobre su superficie.
3. El campo eléctrico precisamente afuera del conductor es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud de  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , donde  $\sigma$  es la carga por unidad de área en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular la carga tiende a acumularse en regiones donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño, es decir, en las puntas.

La primera propiedad puede entenderse si se considera una placa conductora cargada dentro de un campo externo  $E$  (Fig. 24.16). En equilibrio electrostático, el campo eléctrico dentro de un conductor debe ser cero. Si esto no fuera el caso, las cargas libres se podrían acelerar con la acción del campo eléctrico. Antes de aplicar el campo eléctrico externo, los electrones están uniformemente distribuidos a través del conductor. Cuando el campo eléctrico se aplica, los electrones libres aceleran hacia la izquierda, produciendo una carga negativa sobre la superficie de la izquierda (exceso de electrones) y una carga positiva sobre la derecha (de la cual se han eliminado electrones). Estas cargas crean su propio campo eléctrico, el cual se opone al campo eléctrico externo. La densidad de carga superficial aumenta hasta que la magnitud del campo eléctrico debido a estas cargas iguale a la del campo eléctrico externo, dando por resultado un campo neto igual a cero dentro del conductor. En un buen conductor, el tiempo que toma éste en alcanzar el equilibrio es del orden de  $\sim 10^{-19}$  s, lo cual para la mayor parte de los fines prácticos puede ser considerado como instantáneo.

Se puede utilizar la ley de Gauss para verificar la segunda y tercera propiedad de los conductores en equilibrio electrostático. La figura 24.17 muestra un conductor aislado en forma arbitraria. Una superficie gaussiana se traza en el interior del conductor, tan próxima a la superficie como se desee. Como acaba de mostrarse, el campo eléctrico en cualquier punto dentro del conductor es cero cuando está en equilibrio electrostático. Ya que el campo eléctrico también es cero en cualquier punto sobre la superficie gaussiana, se puede ver que el flujo a través de esta superficie es cero. De este resultado y de la ley de Gauss, se concluye que la carga neta dentro de la superficie gaussiana es cero. Debido a que no debe haber carga neta en el interior de la superficie gaussiana (la cual se eligió arbitrariamente cerca de la superficie del conductor), cualquier carga neta en el conductor debe encontrarse en su superficie. La ley de Gauss no dice cómo debe estar distribuido este exceso de carga sobre la superficie. En la sección 25.6 se demostrará la cuarta propiedad de un conductor en equilibrio electrostático.

Es posible aplicar la ley de Gauss para referirse al campo eléctrico precisamente en el exterior de la superficie del conductor cargado en equilibrio con la carga distribuida sobre el conductor. Para esto es conveniente trazar una superficie gaussiana con la forma de un

$$\Phi_e = \oint E_n dA = E_n A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

cilindro pequeño con las caras extremas paralelas a la superficie. Parte del cilindro está justamente fuera del conductor y parte está en el interior. No hay flujo a través de la cara en el interior del cilindro ya que  $E = 0$  en el interior del conductor. Además, el campo eléctrico es normal a la superficie. Si  $E$  tiene una componente tangencial, las cargas libres podrían moverse sobre la superficie creando corrientes superficiales, y el conductor no estaría en equilibrio electrostático. No hay flujo a través de la cara cilíndrica de la superficie gaussiana debido a que  $E$  es tangente a esta superficie. Por lo tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es  $E \cdot A$ , donde  $E$ , es el campo eléctrico precisamente afuera del conductor. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie obtenemos

Se ha aplicado el hecho de que la carga dentro de la superficie gaussiana  $q_{enc} = \sigma A$ , donde  $A$  es el área de la cara del cilindro y  $\sigma$  es la carga por unidad de área (local). Si se despeja  $E$  se obtiene

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

## 1.12 Potencial eléctrico.

El concepto de energía se introdujo por primera vez en el capítulo 8, en relación con las fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y la fuerza elástica de un resorte. Aplicando la ley de la conservación de la energía, a menudo puede evitarse tener que trabajar directamente con las fuerzas para resolver diversos problemas mecánicos. En este capítulo se verá que el concepto también es muy valioso en el estudio de la electricidad. Como la fuerza electrostática dada por la ley de Coulomb es conservativa, es posible describir de manera conveniente los fenómenos electrostáticos en términos de una energía potencial eléctrica. Esta idea permite definir una cantidad escalar llamada potencial eléctrico. Debido a que el potencial es una función escalar de la posición, ofrece una manera más sencilla de describir los fenómenos electrostáticos que la que presenta el campo eléctrico. En capítulos posteriores se verá que el concepto de potencial eléctrico tiene un gran valor práctico. De hecho, el voltaje medido entre dos puntos cualesquiera de un circuito eléctrico es simplemente la diferencia de potencial eléctrico entre los puntos.

## 1.12 Diferencia de potencial y potencial eléctrico.

Como la fuerza electrostática, dada por la ley de Coulomb, tiene la misma forma que la ley de gravitación universal, se deduce que la fuerza electrostática también es conservativa. Por consiguiente es posible definir una función de energía potencial asociada con tal fuerza.

Cuando se coloca una carga de prueba  $q_0$  en un campo electrostático  $E$ , la fuerza eléctrica sobre la carga de prueba es  $q_0E$ . La fuerza  $q_0E$  es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre  $q_0$  por las diversas cargas que producen el campo  $E$ . Se deduce así que la fuerza  $q_0E$  es conservativa, ya que cada una de las fuerzas gobernadas por la ley de Coulomb es conservativa. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica  $q_0E$  sobre la carga de prueba, en un desplazamiento infinitesimal  $ds$ , está dado por

$$dW = F \cdot ds = q_0 E \cdot ds$$

Por definición, el trabajo efectuado por una fuerza conservativa es igual al valor negativo del cambio en la energía potencial  $dU$ ; por consiguiente, se ve que

$$dU = -q_0 E \cdot ds$$

Para un desplazamiento finito de la carga de prueba entre los puntos A y B, el cambio en la energía potencial está dado por

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B E \cdot ds$$

La integral en la ecuación se considera a lo largo de la trayectoria por la cual se mueve  $q_0$ , desde A a B y se llama integral de línea o integral de trayectoria. Como la fuerza  $q_0E$  es conservativa, esta integral no depende de la trayectoria tomada entre A y B.

**La diferencia de potencial  $V_B - V_A$ , entre los puntos A y B se define como el cambio de energía potencial dividido entre la carga de prueba  $q_0$**

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B E \cdot ds$$

No debe confundirse la diferencia de potencial con la energía potencial. La diferencia de potencial es proporcional a la energía potencial, y por la ecuación se ve que se relaciona por medio de  $\Delta U = q_0 \Delta V$ . Como la energía potencial es escalar, también el potencial eléctrico es escalar. Observe que el cambio de energía potencial de la carga es el valor negativo del trabajo realizado por la fuerza eléctrica. De donde se ve que:

**La diferencia de potencial  $V_B - V_A$  es igual al trabajo por unidad de carga que debe realizar un agente externo para mover la carga de prueba de A hasta B, sin que cambie la energía cinética.**

1.12.1 Potencial eléctrico y energía potencial debida a cargas puntuales.

Considérese una carga puntual positiva aislada  $q$  como en la figura. Se recordará que una carga puntual produce un campo eléctrico que es radial hacia afuera de la carga. Para calcular el potencial eléctrico a una distancia  $r$  de la carga, primero se comenzará con la expresión general para la diferencia de potencial dada por

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

En virtud de que el campo eléctrico debido a una carga puntual está dado por  $E \sim kq/r^2$  donde  $\hat{r}$  es un vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto del campo, la cantidad  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  puede expresarse como

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{s}$$

El producto punto  $\hat{r} \cdot d\mathbf{s} \sim ds \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\hat{r}$  y  $d\mathbf{s}$  como en la figura 25.5. Sin embargo, nótese que  $ds \cos \theta$  es la proyección de  $d\mathbf{s}$  sobre  $\hat{r}$ , así que  $ds \cos \theta = dr$ . Es decir, cualquier desplazamiento  $d\mathbf{s}$  produce un cambio  $dr$  en la magnitud de  $r$ . Con estas sustituciones, se encuentra que  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (kq/r^2) dr$ , así la expresión para la diferencia de potencial viene a estar dada por

$$V_B - V_A = - \int_{r_A}^{r_B} E_r dr = -kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[ \frac{kq}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = kq \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

La integral  $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  es independiente de la trayectoria entre A y B, como debe ser. (Se tenía la conclusión que el campo eléctrico debido a una carga puntual es un campo conservativo, por analogía con el campo gravitacional de una masa puntual.) Además, la ecuación 25.11 expresa el importante resultado de que la diferencia de potencial entre dos puntos A y B depende solamente de las coordenadas radiales  $r_A$  y  $r_B$ . Es costumbre elegir el potencial de referencia para cero en  $r_A = \infty$ . (Lo que es natural ya que  $V \propto 1/r$  y como  $r_A \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow 0$ .) Con esta elección, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia  $r$  de la carga está dado por

$$V = k \frac{q}{r}$$

De aquí se puede observar que  $V$  es constante sobre una superficie esférica de radio  $r$ . Por lo que podemos concluir que las superficies equipotenciales (superficies en las que el potencial es constante) son superficies esféricas concéntricas con la carga.

V permanece constante) para una carga puntual aislada, constan en una familia de esferas concéntricas con la carga, como se muestra en la figura.

Obsérvese que las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de Fuerza eléctrica, como fue el caso para un campo eléctrico uniforme.

El potencial eléctrico de dos a más cargas puntuales se obtiene aplicando el principio de superposición. Es decir, el potencial total en un punto dado P debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales debidos a cada carga individual. Para un grupo de cargas, se puede escribir el potencial total en P en la forma

$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

donde nuevamente se toma el potencial cero en el infinito y  $r_i$  es la distancia del punto P a la carga  $q_i$ . Nótese que la suma de la ecuación es una suma algebraica de escalares y no una suma vectorial (la cual se utilizó para calcular el campo eléctrico de un grupo de cargas). Por lo tanto, es mucho más fácil evaluar V que evaluar E.

Ahora consideremos la energía potencial de interacción de un sistema de partículas cargadas. Si  $V_j$  es el potencial eléctrico debido a la carga en el punto P, entonces el trabajo requerido para traer una segunda carga,  $q_2$ , desde el infinito hasta el punto P sin aceleración está dado por  $q_2 V_1$ . Por definición, el trabajo es igual a la energía potencial U del sistema de dos partículas cuando las partículas están separadas por una distancia  $r_{12}$ .

Por lo tanto se puede expresar la energía potencial como

$$U = q_2 V_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Nótese que, si las cargas son del mismo signo, U es positiva. Esto es congruente con el hecho de que cargas iguales se repelen, por lo que el trabajo deberá realizarse sobre el sistema para traer a las cargas más cerca una de la otra. Recíprocamente, si las cargas son de signos opuestos, la fuerza es de atracción y U es negativa. Esto significa que debe hacerse trabajo negativo para acercar cargas de signos opuestos una a la otra.

Si existen más de dos partículas cargadas en un sistema, la energía potencial total puede obtenerse por el cálculo de U para todos los pares de cargas y sumar los términos algebraicamente. Como ejemplo, la energía potencial total de las tres cargas que se muestran en la figura está dada por

$$U = k \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Físicamente, se puede interpretar esto como sigue: Imagínese que  $q_1$  se coloca en la posición que aparece en la figura, pero  $q_2$  y  $q_3$  están en el infinito. El trabajo requerido para

traer a  $q_2$  desde el infinito a la posición cercana a  $q_1$  es  $kq_1q_2/r^2$ , la cual es el primer término en la ecuación. Los otros dos términos en la ecuación representan el trabajo requerido para traer desde el infinito a  $q_1$  hasta la posición cercana a  $q_1$  y  $q_2$ . (Podría demostrarse que el resultado es independiente del orden en el cual las cargas fueron transportadas).

### 1.12.2 Potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua.

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua puede calcularse en dos formas. Si la distribución de carga es conocida, se puede comenzar con la ecuación para el potencial para una carga puntual. Entonces se considera el potencial debido a un pequeño elemento de carga  $dq$  considerando este elemento como una carga puntual. El potencial  $dV$  en un punto  $P$  debido al elemento de carga  $dq$  está dado por

$$dV = k \frac{dq}{r}$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento de carga hasta el punto  $P$ . Para obtener el potencial total en  $P$ , se integra la ecuación 2.5.16 para incluir las contribuciones de todos los elementos de la distribución de carga. Ya que cada elemento está, en general, a una distancia diferente de  $P$  y siendo  $k$  una constante, se puede expresar  $V$  como

$$V = k \int \frac{dq}{r}$$

En efecto, se ha reemplazado la su materia de la ecuación por una integral. Nótese que esta expresión para  $V$  utiliza una elección particular de referencia: el potencial se considera cero para el punto  $P$  localizado infinitamente lejos de la distribución de carga.

El segundo método para calcular el potencial de una distribución de carga continua se hace utilizando la ecuación 25.4. Este procedimiento se utiliza cuando el campo eléctrico es conocido por medio de otras consideraciones, tal como la ley de Gauss. Si la distribución de carga es altamente simétrica, primero se evalúa  $E$  en el punto  $P$  utilizando la ley de Gauss y entonces se sustituye el valor obtenido dentro de la ecuación para determinar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera. Entonces se elige  $V$  igual a cero en un punto conveniente.

### 1.12.3 Potencial de un conductor cargado.

En el capítulo anterior se encontró que cuando un conductor sólido en equilibrio tiene una carga neta, ésta se baila en la superficie exterior del conductor. Además, se demostró que el campo eléctrico precisamente afuera de la superficie del conductor en

equilibrio es perpendicular a esa superficie, en tanto que el campo dentro del conductor es cero. Si el campo eléctrico tiene una componente paralela a la superficie, esto ocasionaría que las cargas se movieran, creando una corriente y una situación de no equilibrio.

Ahora se demostrará que todo punto del conductor cargado en equilibrio está al mismo potencial. Consideremos dos puntos A y B sobre la superficie de un conductor cargado, como se muestra en la figura 25.17. A lo largo de la superficie en cualquier trayectoria que una estos puntos, E siempre será perpendicular al desplazamiento  $ds$ ; por lo tanto,  $E \cdot ds = 0$ . Utilizando este resultado y la ecuación 25.4, se puede concluir que la diferencia de potencial entre A y B es necesariamente cero. Es decir,

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

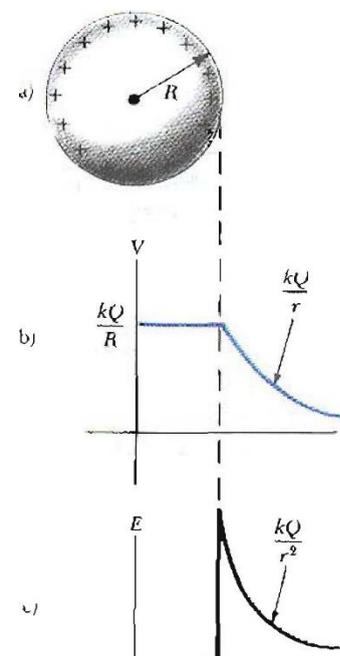
Este resultado se aplica a cualesquiera dos puntos sobre la superficie. Por lo tanto, V es constante en toda la superficie de un conductor cargado en equilibrio. Es decir,

**la superficie de cualquier conductor cargado en equilibrio es una superficie equipotencial. Además, siendo el campo eléctrico cero en el interior del conductor, se concluye que el potencial es constante en cualquier parte del interior del conductor e igual al valor que tiene en la superficie.**

Así, no se realiza trabajo para mover una carga de prueba desde el interior de un conductor cargado hasta su superficie. (Nótese que el potencial no es cero en el interior del conductor, aun cuando el campo eléctrico es cero.)

Por ejemplo, considere una esfera metálica sólida de radio R y carga total positiva Q, como se muestra en la figura a. El campo eléctrico fuera de la esfera cargada está dado por  $kQ/r^2$  y apunta radialmente hacia afuera. Siguiendo el ejemplo, se ve que el potencial en el interior y en la superficie de la esfera deben estar dados por  $kQ/R$  relativos al infinito. El potencial afuera de la esfera está dado por  $kQ/r$ . La figura b es la gráfica del potencial como función de r, y la figura c muestra la variación del campo eléctrico con r.

Cuando una carga neta se coloca sobre un conductor esférico, la densidad de carga superficial es uniforme, como se indica en la figura a. Sin embargo, si el conductor no es esférico, como en la figura, la densidad de carga superficial es mayor donde el radio de curvatura es pequeño y convexo, y menor donde el radio de curvatura es grande y cóncavo. Ya que el campo eléctrico precisamente afuera del conductor es proporcional a la densidad de carga superficial  $\sigma$ , se ve que el campo eléctrico es grande



cerca de los puntos que tienen un radio de curvatura convexo pequeño y alcanza valores muy altos en las partes puntiagudas.

La figura muestra las líneas del campo eléctrico alrededor de dos conductores esféricos, uno con carga neta  $Q$  y otro con carga neta cero. En este caso, la densidad de carga superficial no está uniformemente distribuida en los conductores. La esfera más grande (a la derecha) con carga neta igual a cero, tiene cargas negativas inducidas en el lado que está frente a la esfera cargada, y tiene cargas positivas en el lado opuesto a aquella. Las líneas azules en la figura representan los bordes de una superficie equipotencial para esta configuración de carga. Nuevamente se podrá notar que las líneas de campo son perpendiculares a las superficies conductoras. Además, las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo en las cercanías del conductor y en cualquier punto del espacio.

## UNIDAD II ELECTRODINÁMICA

### 2.1 Corriente y resistencia.

Hasta el momento las discusiones de los fenómenos eléctricos se han enfocado a las cargas en reposo o electrostática. Ahora se considerarán situaciones en las cuales se consideran cargas en movimiento. El término corriente eléctrica o simplemente corriente se utiliza para describir la rapidez de flujo de la carga por alguna región del espacio. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad se refieren a las corrientes eléctricas. Por ejemplo, la batería de una lámpara suministra corriente al filamento de la bombilla (foco) cuando el interruptor se coloca en la posición de encendido. Una gran variedad de aparatos domésticos funciona con corriente alterna. En estos casos comunes, el flujo de carga se lleva a cabo en un conductor, como un alambre de cobre. Sin embargo, es posible que existan corrientes fuera del conductor. Por ejemplo, el haz de electrones en un cinescopio de TV constituye una corriente.

En este capítulo primero se describirá la batería, una fuente de corriente continua, y luego la definición de corriente y densidad de corriente. Se dará una descripción microscópica de la corriente, y se discutirán algunos de los factores que contribuyen a la resistencia al flujo de la carga en conductores. Los mecanismos responsables de la resistencia eléctrica de varios materiales dependen de la composición del material y de la temperatura. Un modelo clásico se utiliza para describir la conducción en un metal, y algunas de las limitaciones del modelo son puntualizadas.

#### 2.1.1 La batería

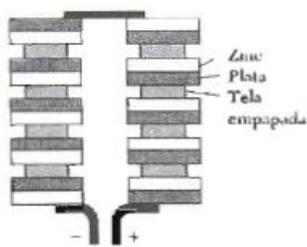
Aun cuando los fenómenos eléctricos eran conocidos antes de 1800, las máquinas eléctricas de esa época se limitaban a dispositivos que producían carga estática y grandes diferencias de potencial por medio de fricción. Tales máquinas eran capaces de producir grandes chispas, pero su valor práctico era bastante limitado.

La batería eléctrica, inventada en 1800 por Alessandro Volta (1745-1827), fue uno de los más importantes descubrimientos prácticos en la ciencia. Este invento representa el fundamento de un amplio espectro de subsecuentes desarrollos en la tecnología eléctrica.

Es interesante describir brevemente algunos de los más importantes eventos que llevaron a Volta a su invento. En 1786, Luigi Galvani (1737-1798) encontró que cuando un anzuelo de cobre era insertado en la columna espinal de una rana, el cual a su vez se colgaba de un barandal de hierro, el músculo del anca se contraía. Galvani observó el mismo efecto cuando utilizó otros metales que no eran similares. Al informar este inusual fenómeno,

propone que la fuente de la carga era el músculo o los nervios de la rana. Por ello, utilizó el término: fuente “electricidad animal”.

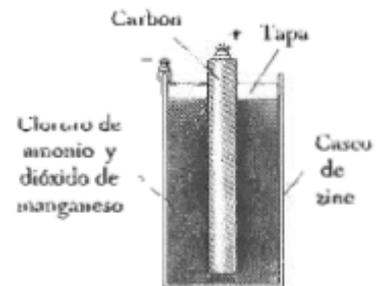
Después de escuchar los resultados de Galvani, Volta procedió a confirmar y ampliar estos experimentos. El propuso entonces la idea de que la fuente de carga no era animal, sino el contacto entre dos metales no similares, como hierro y cobre. Durante sus investigaciones, Volta reconoció que el contacto entre dos metales requiere un conductor acuoso (como el músculo de la rana) para obtener un efecto apreciable. Eventual mente probó este punto al demostrar que el efecto ocurría (aunque débilmente) cuando el músculo de la rana era reemplazado por una sustancia inorgánica. Por otro lado, demostró que ciertos pares de metales producían un mayor efecto que otros.



Volta entonces procedió a inventar una fuente continua de electricidad, la primera batería. Su original dispositivo, llamado pila voltaica, consta de placas alternadas de plata y zinc, como en la figura. Las placas adyacentes eran separadas por una tela empapada de solución salina o de ácido diluido. La estructura de las placas produce una diferencia de potencial continuo entre los dos extremos, con un exceso de carga positiva en el extremo de

plata y un exceso de carga negativa en el extremo de zinc. En efecto, la pila era un convertidor de energía, donde la energía química interna era convertida en energía potencial eléctrica. Aunque esta batería producía un potencial muy pequeño comparado con el producido por las máquinas electrostáticas por fricción, era capaz de dar una gran carga eléctrica, por lo que probó ser de gran importancia práctica. Estas primeras fuentes fueron muy importantes para los experimentos porque producían una diferencia de potencial casi constante.

Existen diferentes tipos de batería de uso cotidiano. Uno de los tipos más común es la pila ordinaria para lámpara. Estas baterías se producen en una variedad de tamaños y formas, pero todas trabajan básicamente de la misma forma. La figura es un diagrama del interior de dicha batería. En esta particular batería, a veces llamada pila seca, el casco de zinc sirve como terminal negativa, mientras que la barra de carbón colocada en el centro sirve de terminal positiva. El espacio entre las dos terminales contiene una pasta ligera de una mezcla de dióxido de manganeso, cloruro de amonio y carbón.



Cuando estos materiales se ensamblan en esta forma, dos reacciones químicas se llevan a cabo; una ocurre en el casco de zinc, y la otra en la placa de dióxido de manganeso que rodea a la barra de carbón. Iones de zinc cargados positivamente ( $Zn^{2+}$ ) salen del casco y entran a la pasta de cloruro de amonio donde se combinan con iones de cloro ( $Cl^{-}$ ). (Los iones de cloro están presentes porque un pequeño porcentaje de cloruro de amonio se disocia, dejando iones de cloro libres en la solución.) A] ser removido del casco cada ion

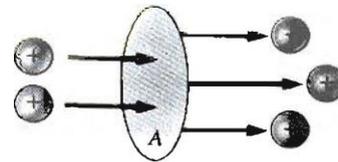
deja dos electrones. Al sumar los iones de zinc que salen del casco, más electrones de zinc se acumulan, dejando el casco de zinc con una carga neta negativa.

Cuando un ion de cloro queda libre de la molécula de cloruro de amonio, la porción remanente de la molécula queda simplemente ionizada. Este ion cargado positivamente se neutraliza por el dióxido de manganeso, el cual proporciona los electrones necesarios. Como resultado de esto, la barra de carbón rodeada por su capa de dióxido de manganeso queda con una carga neta positiva.

Estas reacciones químicas y la separación de las cargas no es ilimitada. El casco de zinc concentrará tal cantidad de carga que los iones de zinc no podrán escapar. Una saturación de carga similar ocurre en la barra de carbón.

### 2.1.2 Corriente eléctrica.

Siempre que cargas eléctricas del mismo signo están en movimiento, se dice que existe una corriente. Para definir la corriente con más precisión, supongamos que las cargas se mueven perpendicularmente aun área superficial  $A$  como en la figura.



Por ejemplo, esta área podría ser la sección transversal de un alambre. La corriente es la rapidez con la cual fluye la carga a través de esta superficie. Si  $Q$  es la cantidad de carga que pasa a través de esta área en un tiempo  $t$ , la corriente promedio,  $I_p$ , es igual a la razón de la carga en el intervalo de tiempo:

$$I_p = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si la rapidez con que fluye la carga varía con el tiempo, la corriente también varía en el tiempo y se define la corriente instantánea,  $I$ , como el límite diferencial de la expresión anterior:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La unidad de corriente en el SI es el ampere (A), donde

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$$

Es decir, 1 A de corriente equivale a que 1 coulomb de carga que pase a través de la superficie en 1 s. En la práctica, con frecuencia se utilizan unidades más pequeñas de corriente, tales como el miliampere (1 mA =  $10^{-3}$  A) y el microampere (1  $\mu$ A =  $10^{-6}$  A).

Cuando las cargas fluyen a través de la superficie en la figura 27.3, pueden ser positivas, negativas o ambas. Por convención se escoge la dirección de la corriente como la

dirección en la cual fluyen las cargas positivas. En un conductor como el cobre, la corriente se debe al movimiento de los electrones cargados negativamente. Por lo tanto, cuando hablamos de corriente en un conductor ordinario, como el alambre de cobre, la dirección de la corriente será opuesta a la dirección del flujo de electrones. Por otro lado, si uno considera un haz de protones cargados positivamente en un acelerador, la corriente está en la dirección del movimiento de los protones. En algunos casos, la corriente es el resultado del flujo de ambas cargas positiva y negativa. Esto ocurre, por ejemplo, en los semiconductores y electrolitos. Es común referirse al movimiento de cargas (positivas o negativas) como el movimiento de portadores de carga. Por ejemplo, los portadores de carga en un metal son electrones.

## 2.2 Resistencia y la ley de Ohm.

Anteriormente, se encontró que no se puede tener un campo eléctrico en el interior de un conductor. Sin embargo, esta afirmación es sólo válida si el conductor está en equilibrio estático. El propósito de esta sección es describir qué sucede cuando las cargas están en movimiento en el conductor.

Las cargas se mueven en un conductor para producir una corriente con la acción de un campo eléctrico que está en el interior del propio conductor. En este caso, puede existir un campo eléctrico en el interior del conductor puesto que se trata de cargas en movimiento, un caso no electrostático. Esto contrasta con la situación en la que el conductor está en equilibrio electrostático (en el que las cargas están en reposo) donde no puede existir campo eléctrico en el interior del conductor.

Considérese un conductor con área de sección transversal  $A$  que lleva una corriente  $I$ . La densidad de corriente  $J$  en el conductor se define como la corriente por unidad de área. Como  $I = nqv_d A$ , la densidad de corriente está dada

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d$$

donde  $J$  tiene unidades en el SI de  $A/m^2$ . Esta expresión es válida sólo si la densidad de corriente es uniforme y la superficie es perpendicular a la dirección de la corriente. En general la densidad de corriente es una cantidad vectorial.

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$$

Con base en la definición, se ve también que la densidad de corriente, como la corriente, está en la dirección del movimiento de las cargas para los portadores de carga positivos y en dirección opuesta a la del movimiento de los portadores de carga negativos.

Una densidad de corriente  $J$  y un campo eléctrico  $E$  se establecen en un conductor cuando una diferencia de potencial se mantiene a través del conductor. Si la diferencia de potencial es constante, la corriente en el conductor será también constante. Con mucha frecuencia, la densidad de corriente en un conductor es proporcional al campo eléctrico en el conductor. Es decir,

$$J = \sigma E$$

donde la constante de proporcionalidad  $\sigma$  se llama la conductividad del conductor. Los materiales cuyo comportamiento se ajusta a la ecuación se dice que siguen la ley de Ohm, nombre que se puso en honor a George Simón Ohm (1787-1854). En forma más específica:

**La ley de Ohm afirma que para muchos materiales (incluyendo la mayor parte de los metales), la razón de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante,  $\sigma$ , la cual es independiente del campo eléctrico que produce la corriente.**

Materiales que obedecen la ley de Ohm, y por tanto demuestran este comportamiento lineal entre  $E$  y  $J$ , se dice que son óhmicos. El comportamiento eléctrico de los muchos materiales es casi lineal con muy pequeños cambios en la corriente. Experimentalmente se encuentra que no todos los materiales tienen esta propiedad. Materiales que no obedecen la ley de Ohm se dicen ser no óhmicos. La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, sino una relación empírica válida sólo para ciertos materiales.

Una forma de la ley de Ohm que se utiliza de modo más directo en las aplicaciones prácticas puede ser obtenida al considerar un segmento de un alambre recto de área en la sección transversal  $A$  y longitud  $l$ , como en la figura. Una diferencia de potencial  $V_a - V_b$  mantenida a través del alambre, crea un campo eléctrico en el alambre y una corriente. Si se supone que el campo eléctrico en el alambre es uniforme, la diferencia de potencial  $V = V_a - V_b$  se relaciona con el campo eléctrico a través de la relación.

### 2.3 Resistividad de conductores diferentes.

La resistividad depende de cierto número de factores, uno de los cuales es la temperatura. Para la mayor parte de los metales, la resistividad se incrementa al aumentar la temperatura. La resistividad de un conductor varía casi lineal con la temperatura sobre un limitado rango de temperaturas de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

donde  $\rho$  es la resistividad a alguna temperatura  $T$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ),  $\rho_0$  es la resistividad a una temperatura de referencia  $T_0$  (usualmente se toma como de  $20^{\circ}\text{C}$ ) y  $\alpha$  se llama coeficiente

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$

de temperatura de la resistividad. De la ecuación se ve que el coeficiente de temperatura de la resistividad puede también ser expresado como

donde  $\Delta \rho = \rho - \rho_0$  es el cambio en la resistividad en un intervalo de temperatura  $\Delta T = T - T_0$ .

La resistividad y el coeficiente de temperatura para varios materiales se dan en la tabla 27.1. Nótese la enorme gama de resistividades, desde valores muy pequeños para buenos conductores, como el cobre y la plata, hasta valores muy grandes para buenos aisladores, como el vidrio y el caucho. Un conductor ideal o perfecto tendría resistividad cero, y un aislante ideal tendría resistividad infinita. Como la resistencia de un conductor es proporcional a la resistividad de acuerdo con la ecuación, la variación de resistencia con la temperatura puede escribirse como

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

## 2.4 Superconductores

Existe una clase de metales y compuestos cuya resistencia virtualmente va hasta cero al llegar a cierta temperatura,  $T_c$ , llamada temperatura crítica. A éstos materiales se les conoce como superconductores. La gráfica de resistencia-temperatura para un superconductor sigue la de un metal normal por arriba de  $T_c$ . Cuando la temperatura es  $T_c$  o menor, la resistividad cae súbitamente hasta cero. Este fenómeno fue descubierto en 1911 por el físico alemán H. Kamerlingh-Onnes cuando trabajaba con mercurio, el cual es superconductor por debajo de 4.2 K. Medidas recientes han demostrado que la resistividad de un superconductor por debajo de la  $T_c$  son menores que  $4 \times 10^{-5} \Omega \cdot m$ , lo cual es unas 10<sup>17</sup> veces más pequeña que la resistividad del cobre y puede ser considerada como cero en la práctica.

Hoy en día existen miles de superconductores conocidos. Metales comunes como aluminio, estaño, plomo, zinc e indio son superconductores. Valor de  $T_c$  es sensible a la composición química, a la presión y a la estructura cristalina. Es interesante hacer notar que el cobre, la plata y el oro, los cuales son excelentes conductores, no muestran superconductividad.

Uno de los hechos que verdaderamente resalta de los superconductores es que cuando una corriente se coloca en ellos, permanecerá sin aplicarle voltaje (ya que  $V = IR = 0$ ). En efecto, se ha podido observar que hay corrientes estacionarias que persisten en una espira superconductora por varios años sin que aparentemente decrezcan!

Uno de los más importantes desarrollos en física que ha creado mucha expectativa en la comunidad científica ha sido el descubrimiento de los superconductores basados en óxidos de cobre de altas temperatura. La conmoción empieza en 1986 con la publicación

de George Bednorz y K. Alex Müller, dos científicos que trabajan para el IBM Zurich Research Laboratory en Suiza, quienes reportaron evidencias de superconductividad a temperaturas cercanas a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre. Bednorz y Müller recibieron el Premio Nobel en 1987 en reconocimiento a su importante descubrimiento. Rápido y en corto plazo, una nueva familia de compuestos fue abierta para la investigación, y la actividad experimental en el campo de superconductores se realiza vigorosamente. A principios de 1987, grupos de la Universidad de Alabama en Huntsville y de la Universidad de Houston anuncian el descubrimiento de superconductividad alrededor de 92 K en óxido de ytrio, bario y cobre (YBCO). Más tarde, en 1987, equipos de científicos de Japón y de Estados Unidos informan superconductividad a 108 K en óxidos de bismuto, estroncio, calcio y cobre. En fechas más recientes, científicos han reportado superconductividad alta a 125 K en óxidos que contienen talio. Hasta este momento, no existe regla alguna que impida tener superconductividad a temperatura ambiente, y la investigación en nuevos materiales superconductores continúa. Estos desarrollos son muy importantes y alentadores tanto por motivos científicos como para la aplicación práctica ya que cada vez se eleva más la temperatura crítica.

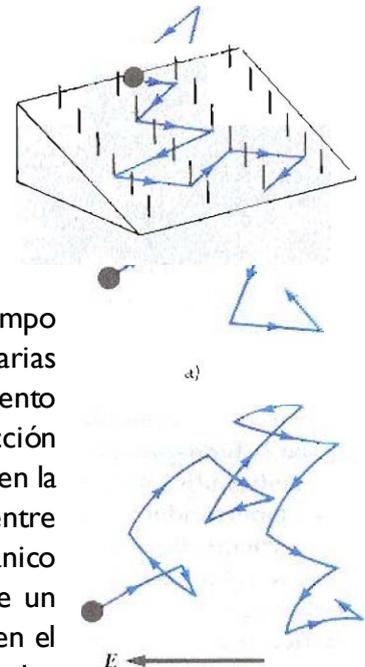
Una importante y útil aplicación de la superconductividad ha sido la construcción de imanes superconductores en los cuales la intensidad del campo magnético es diez veces mayor que la correspondiente a los mejores electroimanes normales. Dichos imanes se están considerando como un medio de almacenar energía. La idea de utilizar superconductores en líneas de potencia para la transmisión de energía eléctrica con excelente rendimiento ha sido también recientemente considerada. Se han construido dispositivos electrónicos modernos que constan de dos películas delgadas superconductoras separadas por un aislante delgado. Estos dispositivos se utilizan en los magnetómetros (aparato para medir un campo eléctrico) y en varios aparatos de microondas.

## 2.5 Modelo de conducción eléctrica.

En esta sección se describirá un modelo clásico de la conducción eléctrica en metales. Este modelo lleva a la ley de Ohm y muestra que la resistividad puede ser relacionada con el movimiento de los electrones en el metal.

Considérese un conductor como un arreglo regular de átomos que contiene electrones libres (algunas veces llamados electrones de conducción). Estos electrones son libres de moverse a través del conductor y en número son aproximadamente igual al número de átomos. En ausencia de un campo eléctrico, los electrones se mueven en direcciones aleatorias a través del conductor con una velocidad promedio del orden de  $10^6$  m/s. (Estas velocidades se pueden calcular en forma apropiada sólo si se utiliza la descripción de la mecánica cuántica). La situación es similar al movimiento de las moléculas de un gas confinado en un envase. De hecho, algunos científicos se refieren a los electrones de conducción en un metal como un gas de electrones. Los electrones de conducción no son totalmente libres ya que están confinados al interior del conductor y sufren frecuentes colisiones con el arreglo de átomos. Estas colisiones son el mecanismo predominante para la resistencia de un metal a temperaturas normales. Obsérvese que no existe corriente a través de un conductor en ausencia de un campo eléctrico ya que la velocidad promedio de los electrones libres es cero. Es decir, en promedio, la misma cantidad de electrones se mueven en una dirección que en la dirección opuesta, y por lo tanto el flujo neto de carga es cero.

La situación se modifica cuando un campo eléctrico se aplica al metal. Además del movimiento aleatorio térmico descrito antes, los electrones libres derivan lentamente en dirección opuesta al campo eléctrico, con una velocidad de deriva  $v_d$ , la cual es mucho más pequeña (del orden de  $10^4$  m/s) que la velocidad promedio entre colisiones (del orden de  $10^6$  m/s). La figura da una descripción del movimiento de los electrones libres en un conductor. En ausencia de un campo eléctrico, no existe desplazamiento neto después de varias colisiones (a). Un campo eléctrico  $E$  modifica el movimiento aleatorio y ocasiona que los electrones deriven en dirección opuesta al campo  $E$  (b). La ligera curvatura de las trayectorias en la figura b es resultado de la aceleración de los electrones entre colisiones, causada por el campo aplicado. Un sistema mecánico análogo a esta situación es una bola rodando hacia abajo de un plano inclinado a través de un arreglo de clavos espaciados en el plano. La bola representa un electrón de conducción, los clavos los defectos en el arreglo del cristal, y la componente de la Fuerza de gravedad a lo largo del plano representa la fuerza eléctrica  $eE$ .



En el modelo, se supone que el exceso de energía adquirido por los electrones en el campo eléctrico se pierde en el conductor en el proceso de las colisiones. La energía dada a los átomos en las colisiones aumenta su energía vibracional, ocasionando que el conductor se caliente. El modelo también supone que el movimiento de un electrón antes de la colisión es independiente de su movimiento después de la colisión.

Ahora se está en posición de obtener una expresión para la velocidad de deriva. Cuando una partícula cargada móvil de masa  $m$  y carga  $q$  está sujeta a un campo eléctrico  $E$ , experimenta una fuerza  $qE$ . Como  $F = ma$ , se concluye que la aceleración de la partícula está dada por

$$a = \frac{qE}{m}$$

Esta aceleración, que sólo actúa un corto tiempo entre las colisiones, permite al electrón que adquiriera una pequeña velocidad de deriva. Si  $t$  es el tiempo que transcurre entre colisiones y  $v_0$  es la velocidad inicial, entonces la velocidad del electrón después de un tiempo  $t$  está dada por

$$v = v_0 + at = v_0 + \frac{qE}{m} t$$

Ahora tómesese el valor promedio de  $v$  sobre todos los posibles valores de tiempos  $t$  y todos los valores de  $v_0$ . Si las velocidades iniciales se supone que están distribuidas aleatoriamente en el espacio, se observa que el valor promedio de  $v_0$  es cero. El término  $(qE/m)t$  es la velocidad añadida por el campo en el extremo de su viaje entre los átomos. Si el electrón comienza con velocidad cero, el valor promedio del segundo término de la ecuación 27.15 es  $(qE/m)\bar{t}$ , donde  $\bar{t}$  es el tiempo promedio entre colisiones. Como la velocidad promedio es igual a la velocidad de deriva, se tiene

$$v_d = \frac{qE}{m} \bar{t}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 27.6, se encuentra que la magnitud de la densidad de corriente está dada por

$$J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m} \bar{t}$$

Comparando esta expresión con la ley de Ohm,  $J = \sigma E$ , se obtiene la siguiente relación para la conductividad y resistividad

$$\sigma = \frac{nq^2\bar{t}}{m} \quad \text{Conductividad}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{nq^2\bar{t}} \quad \text{Resistividad}$$

## 2.6 Energía eléctrica y potencia.

Si una batería se utiliza para establecer una corriente eléctrica en un conductor, existe una transformación continua de energía química almacenada en la batería a energía cinética de los portadores de carga. Esta energía cinética se pierde rápido como resultado de las colisiones de los portadores de carga con el arreglo de iones, ocasionando un

aumento en la temperatura del conductor. Por lo tanto, se ve que la energía química almacenada en la batería es continuamente transformada en energía térmica.

Considérese un circuito simple que consista de una batería cuyas terminales estén conectadas a una resistencia  $R$ , como en la figura 27.15. El símbolo  $\mathcal{H}$  se usa para designar a la batería (o a cualquier otra fuente de corriente directa), y los resistores se designan con el símbolo  $\text{---}\omega\text{---}$ . La terminal positiva de la batería (la placa más larga) está al mayor potencial, mientras que la terminal negativa (la placa más corta) está en el potencial más bajo. Ahora imagínese que se sigue una cantidad de carga positiva  $\Delta Q$  moviéndose alrededor del circuito desde el punto  $a$  a través de la batería y de la resistencia, y de regreso hasta el punto  $a$ . El punto  $a$  es el punto de referencia que está aterrizado (el símbolo de tierra es  $\text{---}\wedge\text{---}$ ) y su potencial se ha tomado como cero. Como la carga se mueve desde  $a$  hasta  $b$  a través de la batería, su energía potencial eléctrica aumenta en una cantidad  $V \Delta Q$  (donde  $V$  es el potencial en  $b$ ) mientras que la energía potencial química en la batería disminuye por la misma cantidad. (Recuérdese del capítulo 25 que  $\Delta U = q \Delta V$ .) Sin embargo, como la carga se mueve desde  $c$  hasta  $d$  a través de la resistencia, pierde esta energía potencial eléctrica por las colisiones con los átomos en la resistencia, lo que produce energía térmica. Obsérvese que si se desprecia la resistencia de los alambres interconectores no existe pérdida en la energía en las trayectorias  $bc$  y  $da$ . Cuando la carga regresa al punto  $a$ , debe tener la misma energía potencial (cero) que tenía al empezar.

La rapidez con la cual la carga  $\Delta Q$  pierde energía potencial cuando pasa a través de la resistencia está dada por

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV$$

donde  $I$  es la corriente en el circuito. Es cierto que la carga vuelve a ganar esta energía

$$P = IV$$

cuando pasa a través de la batería. Como la rapidez con la cual la carga pierde la energía es igual a la potencia perdida en la resistencia, tenemos

En este caso, la potencia se suministra a la resistencia por la batería. Sin embargo, la ecuación anterior puede ser utilizada para determinar la potencia transferida a cualquier dispositivo que lleve una corriente  $I$ , y tenga una diferencia de potencial  $V$  entre sus terminales.

Utilizando la ecuación anterior y el hecho de que  $V = IR$  para una resistencia, se puede expresar la potencia disipada en las formas alternativas:

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Cuando  $I$  está en amperes,  $V$  en volts, y  $R$  en ohms, la unidad de potencia en el SI es el watt (W). La potencia perdida como calor en un conductor de resistencia  $R$  se llama calor joule; sin embargo, es frecuentemente referido como un desperdicio  $PR$ .

Una batería o cualquier dispositivo que produzca energía eléctrica se llama fuerza electromotriz, por lo general referida como fem. (La frase fuerza electromotriz no es muy afortunada, ya que en realidad no describe una fuerza sino, de hecho, se refiere a una diferencia de potencial en volts.) Despreciando la resistencia interna de la batería, la diferencia de potencial entre los puntos a y b es igual a la fem  $\mathcal{E}$  de la batería. Es decir,  $V = V_j - V_b = \mathcal{E}$ , y la corriente en el circuito está dada por  $I = V/R = \mathcal{E}/R$ . Como  $V = \mathcal{E}$ , la potencia suministrada por la fem se puede expresar como  $P = I\mathcal{E}$ , lo cual por supuesto es igual a la potencia perdida  $I^2R$ .

## 2.7 Circuitos de corriente directa.

Este tema se avoca al análisis de algunos circuitos simples cuyos elementos incluyen baterías, resistencias y condensadores en varias combinaciones. El análisis de estos circuitos se simplifica utilizando las reglas de Kirchhoff. Estas reglas se siguen de las leyes de conservación de la energía y de la carga. La mayor parte de los circuitos analizados se supone se encuentran en un estado estacionario. En una sección especial se discutirán los circuitos que tienen resistencias y condensadores, para los cuales la corriente varía con el tiempo. Finalmente, un número de dispositivos eléctricos y técnicas se describirán para mediciones de corriente, de diferencia de potencial, de resistencia y de fems.

## 2.8 Fuerza electromotriz

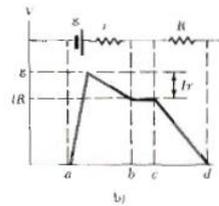
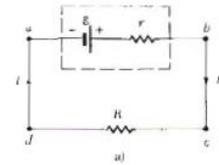
En el capítulo anterior se encontró que una corriente constante puede ser mantenida en un circuito cerrado a través del uso de una fuente de energía, llamada fuerza electromotriz (abreviada fem). Una fuente de fem es cualquier dispositivo (como una batería o generador) que aumenta la energía potencial de las cargas que circulan en el circuito. Se puede pensar en una fuente de fem como una “bomba de carga” que fuerza a los electrones a moverse en dirección opuesta al campo electrostático interno de la fuente. La fem  $\mathcal{E}$  de una fuente describe el trabajo realizado por unidad de carga, y por lo tanto la unidad en el SI de la fem es el volt.



Considérese el circuito de la figura 28.1, el cual consta de una batería conectada a una resistencia. Se supondrá que los alambres de conexión no tienen resistencia. La terminal positiva de la batería está a un potencial más alto que la terminal negativa. Si se despreciara la resistencia interna de la batería, entonces la diferencia de potencial a través de la batería (voltaje de terminales) sería igual a la fem de la batería. Sin embargo, como las baterías reales siempre tienen alguna resistencia interna  $r$ , el voltaje de terminales no es igual a la fem de la batería. El circuito de la figura 28.1 puede ser descrito por el diagrama de circuito de la figura 28.2a. La batería que se encuentra en el rectángulo punteado representa la fuente de

fem,  $\mathcal{E}$ , en serie con la resistencia interna,  $r$ . Ahora imagínesse una carga positiva que se mueve de  $a$  a  $b$  en la figura 28.2a. Como la carga pasa de la terminal negativa a la positiva, su potencial aumenta en  $\mathcal{E}$ . Sin embargo, como se mueve a través de  $r$ , su potencial decrece en  $Ir$ , donde  $I$  es la corriente en el circuito. Por lo tanto, el voltaje en las terminales de la batería,  $V = V_j - V^*$ , está dado por

$$V = \mathcal{E} - Ir$$



De esta expresión obsérvese que la  $\mathcal{E}$  es equivalente al voltaje a circuito abierto, es decir, el voltaje en las terminales cuando la corriente es cero. La figura 28.2b es la representación gráfica de los cambios de potencial en el circuito cuando se recorre en la dirección de las manecillas del reloj. Al inspeccionar la figura 28.2a se ve que el voltaje en las terminales  $V$  debe ser igual a la diferencia de potencial a través de la resistencia externa  $R$ , frecuentemente llamado resistencia de carga. Es decir,  $V = IR$ . Combinando esto con la ecuación 28.1, se ve que

$$\mathcal{E} = IR + Ir$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Despejando la corriente se obtiene

Esto demuestra que la corriente en este circuito simple depende de ambas resistencias, la externa y la interna, de la batería. Si la resistencia de carga  $R$ , es mucho mayor que la resistencia interna  $r$ , puede despreciarse  $r$  en el análisis. En varios circuitos se ignorará esta resistencia interna.

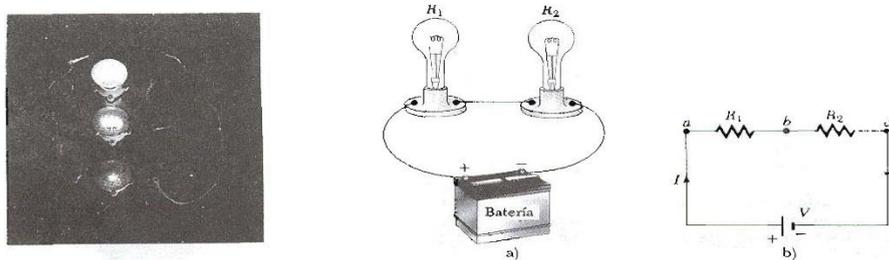
Si se multiplica la ecuación anterior por la corriente  $I$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$$

Esta ecuación dice que la potencia extraída de la fuente de fem,  $I\mathcal{E}$  se convierte en la potencia disipada como calor-joule en la resistencia de carga,  $I^2R$ , más la potencia disipada en la resistencia interna,  $I^2r$ . De nuevo si  $r < R$ , entonces toda la potencia entregada por la batería es transferida a la resistencia de carga.

## 2.9 Resistencias en serie y en paralelo

Cuando dos o más resistencias se conectan juntas de tal forma que sólo tienen un punto en común, se dice que están conectadas en serie. La figura muestra dos resistencias conectadas en serie. Obsérvese que:



Por lo tanto, se pueden reemplazar las dos resistencias en serie por uno solo de resistencia equivalente  $R_{rq}$  cuyo valor es la suma de las resistencias individuales:

La resistencia  $R_{oq}$  es equivalente a la combinación en serie  $R_1 + R_2$  en el sentido de que la corriente en el circuito no cambia cuando  $R_q$  reemplaza a  $R_1 + R_2$ . La resistencia equivalente de tres o más resistencias conectadas en serie es simplemente

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Por lo que, la resistencia equivalente de una conexión en serie de resistencias es siempre mayor que cualquiera de las resistencias individuales.

Obsérvese que, si el filamento de un foco en la figura anterior se rompe o se funde, el circuito no podría ser completado (condición de circuito abierto) y el segundo foco estaría apagado también. Algunas luces navideñas (especialmente las más viejas) están conectadas de este modo, y es una muy mala experiencia tratar de determinar cuál es el foco fundido. Tj na frustrante experiencia como ésta muestra cuán inconveniente sería tener todos los aparatos eléctricos del hogar conectados en serie. En algunos circuitos, se utilizan fusibles en serie con otro elemento del circuito como protección. El conductor en el fusible se diseña para derretirse y abrir el circuito a alguna corriente máxima cuyo valor depende de la naturaleza del circuito. Si el fusible no se utiliza, una corriente excesiva podría dañar un elemento del circuito, sobrecalentar los cables y hasta ocasionar un incendio. En la construcción moderna de casas, los interruptores de circuito se utilizan en lugar de fusibles. Cuando la corriente del circuito excede algún valor (por lo común 15 A), el interruptor de circuito actúa y abre el circuito.

Ahora considérense dos resistencias conectadas en paralelo como se muestra en la figura anterior.

**En este caso, existe la misma diferencia de potencial a través de cada resistencia.**

Sin embargo, la corriente en cada resistencia por lo general no es la misma. Cuando la corriente  $I$  encuentra el punto a (llamado una unión o nodo), se abre en dos partes,  $I_1$  va

a través de  $R_1$  el va a través de  $P_2$ . Si  $R_1$  es mayor que  $R_2$ , entonces  $I_1$  será menor que  $I_2$ . Es decir, la carga tiende a tomar la trayectoria de menor resistencia. Ciertamente, como la carga debe de conservarse, la corriente  $I$  que entra en el punto a debe ser igual a la corriente total que sale de este punto,

$$I = I_1 + I_2$$

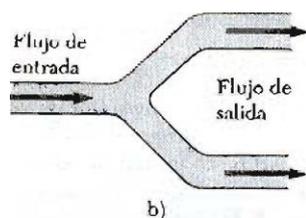
## 2.10 Reglas de Kirchhoff

Como se vio en la sección previa, un circuito simple puede analizarse utilizando la ley de Ohm y las reglas de combinaciones en serie y en paralelo de resistencias. Muchas veces no es posible reducirlo a un circuito de un simple lazo. El procedimiento para analizar un circuito más complejo se simplifica enormemente al utilizar dos sencillas reglas llamadas reglas de Kirchhoff:

1. La suma de las corrientes que entren en una unión debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de la unión. (Una unión es cualquier punto del circuito donde la corriente se puede dividir.)
2. La suma algebraica de los cambios de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier trayectoria cerrada en el circuito debe ser cero.

La suma algebraica de los cambios de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier trayectoria cerrada en el circuito debe ser cero.

$$I_1 = I_2 + I_3$$



La figura representa una analogía mecánica de esta situación, en la que fluye el agua y no hay fugas. El gasto que sale del tubo es igual al gasto que sale de las dos ramas.

La segunda regla se deduce de la conservación de la energía. Es decir, cualquier carga que se mueve en torno a cualquier circuito cerrado (sale de un punto y llega al mismo punto) debe ganar tanta energía como la que pierde. Su energía puede decrecer en forma de caída de potencial  $-IR$ , a través de una resistencia o bien como resultado de tener una carga en dirección inversa a través de una fuente de fem. En una aplicación práctica de este último caso, la energía eléctrica se convierte en energía química al cargar una batería; de manera similar, la energía eléctrica puede convertirse en energía mecánica al hacer funcionar un motor.

Como una ayuda al aplicar la segunda regla, deben observarse las siguientes indicaciones, las cuales se resumen en la figura 28.10.

1. Si se recorre la resistencia en la dirección de la corriente, el cambio en el potencial a través de la resistencia es  $-IR$  (Fig. 28.10a).
2. Si la resistencia se recorre en dirección opuesta a la corriente, el cambio en el potencial a través de la resistencia es  $+IR$  (Fig. 28.10b).
3. Si una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (de la terminal - a la +), el cambio en el potencial es  $+E$  (Fig. 28.10c).
4. Si una fuente de fem se recorre en la dirección opuesta a la fem (de la terminal + a la -), el cambio en el potencial es  $-E$  (Fig. 28.10d).

Existen limitaciones sobre el número de veces que pueden utilizarse la regla de nodos y la de mallas. La regla de nodos puede utilizarse siempre que sea necesario pero considerando que, al escribir una ecuación, se incluya una corriente que no haya sido utilizada previamente en alguna ecuación de la regla de nodos. En general, el número de veces que puede ser utilizada la regla de nodos es uno menos que el número de uniones (nodos) que tenga el circuito. La regla de malla puede ser utilizada siempre que sea necesario en tanto que un nuevo elemento de circuito (resistencia o batería) o una nueva corriente aparezca en cada nueva ecuación. En general, el número de ecuaciones independientes que se necesiten debe ser al menos igual al número de incógnitas para tener una solución al problema de un circuito particular.

Circuitos complejos con varias mallas y uniones generan un gran número de ecuaciones linealmente independientes que corresponden a un gran número de incógnitas. Tales situaciones deben ser manejadas formalmente utilizando álgebra matricial. Se pueden hacer programas en computadora para determinar los valores de las incógnitas.

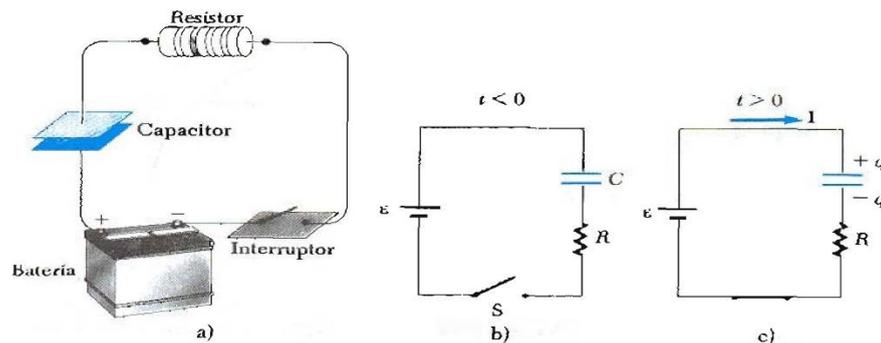
Los siguientes ejemplos muestran el uso de las reglas de Kirchhoff en el análisis de circuitos. En todos los casos, se supone que el circuito ha alcanzado condiciones de estado estacionario, es decir, las corrientes en las diversas ramas son constantes. Si un capacitor se incluye como elemento en una de las ramas, actúa como circuito abierto, es decir, la corriente en la rama que contiene al capacitor será cero en condiciones de estado estacionario.

## 2.11 Circuitos RC

Hasta ahora se han considerado circuitos con corriente constante, o sea los llamados circuitos de estado estacionario. Ahora se estudiarán circuitos que contienen condensadores, en los cuales la corriente puede variar con el tiempo. Cuando una diferencia de potencial se aplica por vez primera a un capacitor, la rapidez con que se carga depende de su capacitancia y de la resistencia del circuito.

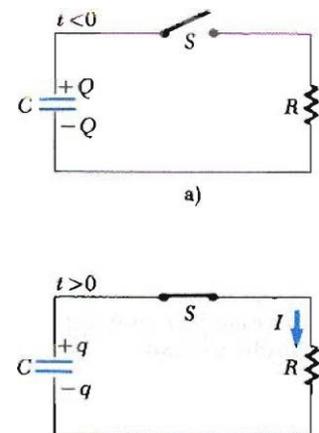
Carga de un capacitor

Considérese el circuito en serie de la figura 28.14. Supóngase que el capacitor está inicialmente descargado. No existe corriente cuando el interruptor  $S$  está abierto (Fig. 28.14b). Si el interruptor se cierra al  $t = 0$ , la carga comenzará a fluir, produciendo una corriente en el circuito, y el capacitor comenzará a cargarse (Fig. 28.14c). Obsérvese que durante el proceso de carga, las cargas no saltan a través de las placas del capacitor ya que el espacio entre las placas representa un circuito abierto. Por el contrario, la carga se trasfiere de una placa a la otra a través de la resistencia, el interruptor y la batería hasta que el capacitor está totalmente cargado. El valor de la carga máxima depende de la fem de la batería. Una vez que se alcanza la carga máxima, la corriente en el circuito es cero.



### Descarga de un capacitor

Ahora considérese el circuito de la figura 28.16, que consta de un capacitor con una carga inicial  $Q$ , una resistencia y un interruptor. Cuando el interruptor está abierto (Fig. 28.16a), existe una diferencia de potencial  $Q/C$  a través del capacitor y una diferencia de potencial cero a través de la resistencia ya que  $I = 0$ . Si el interruptor se cierra al tiempo  $t = 0$ , el capacitor comienza a descargarse a través de la resistencia. En algún tiempo durante la descarga, la corriente en el circuito es  $I$  y la carga en el capacitor es  $q$  (Fig. 28.16b). De la segunda regla de Kirchoff, se ve que la caída de potencial a través de la resistencia,  $IR$ , debe ser igual a la diferencia de potencial a través del capacitor,  $q/C$ :



$$IR = \frac{q}{C}$$

## **UNIDAD III CAMPOS MAGNÉTICOS**

### **3.1 Campos magnéticos**

El comportamiento de los imanes de barra es conocido por todos aquellos que han tomado un curso de ciencias. Los imanes permanentes, que están hechos por lo general de sustancias que contienen hierro, atraen o repelen a otros imanes. Además, al atraer a otros objetos de hierro, éstos pueden ser magnetizados. La lista de aplicaciones tecnológicas importantes del magnetismo es muy amplia. Por ejemplo, grandes electroimanes se utilizan para transportar cuerpos pesados. Los imanes también se utilizan en aparatos de medida,

transformadores, motores, aceleradores de partículas y en bocinas. Las cintas magnéticas se utilizan comúnmente en las grabaciones de sonidos, grabaciones de TV y memorias de computadoras. Intensos campos magnéticos generados por imanes superconductores se utilizan hoy en día como un medio contenedor de los plasmas (calentados a temperaturas del orden de  $10^8$  K) usados en las investigaciones de controladores de reacción nuclear.

### 3.1.1 Introducción

El fenómeno del magnetismo fue conocido por los griegos desde el año 800 a. C. Ellos descubrieron que ciertas piedras, ahora llamadas magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), atraían piezas de hierro. La leyenda adjudica el nombre de magnetita en honor al pastor Magnes, “los clavos de sus zapatos y el casquillo (o punta) de su bastón quedaron fuertemente sujetos a un campo magnético cuando se encontraba pastoreando su rebaño”. En 1269 Pierre de Maricourt, mediante un imán natural esférico, elaboró un mapa de las direcciones tomadas por una aguja al colocarla en diversos puntos de la superficie de la esfera. Encontró que las direcciones formaban líneas que rodeaban a la esfera pasando a través de dos puntos diametralmente opuestos uno del otro, a los cuales les llamó polos del imán. Experimentos subsecuentes demostraron que cualquier imán, sin importar su forma, tiene dos polos, llamados polo norte y polo sur, los cuales presentan fuerzas que actúan entre sí de manera análoga a las cargas eléctricas. Es decir, polos iguales se repelen y polos diferentes se atraen.

En 1600 William Gilbert extendió estos experimentos a una variedad de materiales. Utilizando el hecho de que una aguja magnética (brújula) se orienta en direcciones preferidas, sugiere que la misma Tierra es un gran imán permanente. En 1750, John Michell (1724-1793) usó la balanza de torsión para demostrar que los polos magnéticos ejercen fuerzas de atracción y repulsión entre sí, y que estas fuerzas varían como el inverso del cuadrado de la distancia de separación. Aun cuando la fuerza entre dos polos magnéticos es similar a la fuerza entre dos cargas eléctricas, existe una importante diferencia. Las cargas eléctricas se pueden aislar (lo que se manifiesta en la existencia del protón y el electrón), mientras que los polos magnéticos no se pueden separar. Esto es, los polos magnéticos siempre están en pares. Todos los intentos por detectar un polo aislarlo han fracasado. No importa cuántas veces se divida un imán permanente, cada trozo siempre tendrá un polo norte y un polo sur.

La relación entre el magnetismo y la electricidad fue descubierta en 1819 cuando, en la demostración de una clase, el científico danés Hans Oersted encontró que la corriente eléctrica que circula por un alambre desvía la aguja de una brújula cercana. Poco tiempo después, André Ampère (1775- 1836) obtuvo las leyes cuantitativas de la fuerza magnética entre conductores que llevan corrientes eléctricas. También sugirió qué órbitas de

corriente eléctrica de magnitud molecular son las responsables de todos los fenómenos magnéticos. Esta idea es la base de la teoría moderna del magnetismo.

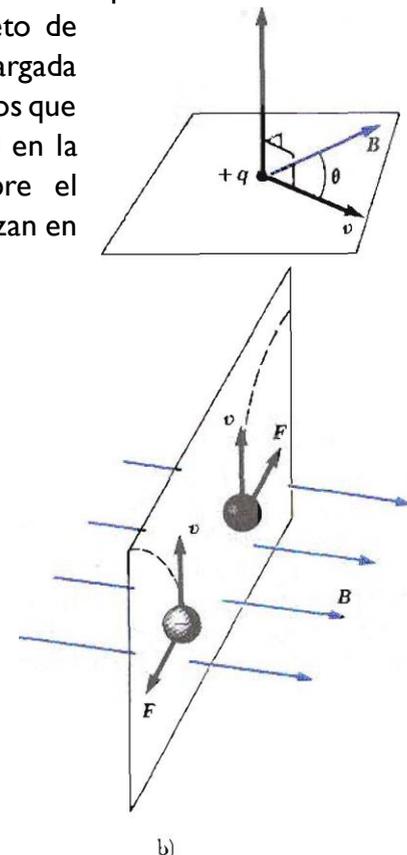
En la década de 1820, se demostraron varias conexiones entre la electricidad y el magnetismo por Faraday e independientemente por Joseph Henry (1797- 1878). Ellos comprobaron que se podía producir una corriente eléctrica en un circuito al mover un imán cercano al circuito o bien variando la corriente de un circuito cercano a] primero. Estas observaciones demuestran que un cambio en el campo magnético produce un campo eléctrico. Años después, el trabajo teórico realizado por Maxwell mostró que un campo eléctrico variable da lugar a un campo magnético.

### 3.2 Definición y propiedades de un campo magnético.

El campo eléctrico  $E$  en un punto del espacio se ha definido como la fuerza por unidad de carga que actúa sobre una carga de prueba colocada en ese punto. Similarmente, el campo gravitacional  $g$  en un punto dado del espacio es la fuerza de gravedad por unidad de masa que actúa sobre una masa de prueba.

Ahora se definirá el vector de campo magnético  $B$  (algunas veces llamado inducción magnética o densidad, de flujo magnético) en un punto dado del espacio en términos de la magnitud de la fuerza que sería ejercida sobre un objeto de prueba apropiado. El objeto de prueba es una partícula cargada que se mueve con velocidad  $v$ . Por el momento, supongamos que no están presentes el campo eléctrico ni el gravitacional en la región de la carga. Los experimentos realizados sobre el movimiento de diversas partículas cargadas que se desplazan en un campo magnético han proporcionado los siguientes resultados:

1. La fuerza magnética es proporcional a la carga  $q$  y la velocidad  $v$  de la partícula.
2. La magnitud y la dirección de la fuerza magnética depende de la velocidad de la partícula y de la magnitud y dirección del campo magnético.
3. Cuando una partícula se mueve en dirección paralela al vector campo magnético, la fuerza magnética  $F$  sobre la carga es cero.
4. Cuando la velocidad hace un ángulo  $Q$  con el campo magnético, la fuerza magnética actúa en una



dirección perpendicular tanto a  $v$  como a  $B$ ; es decir,  $F$  es perpendicular al plano formado por  $v$  y  $B$  (Fig. a).

5. La fuerza magnética sobre una carga positiva tiene sentido opuesto a la fuerza que actúa sobre una carga negativa que se mueva en la misma dirección (Fig. b).

6. Si el vector velocidad hace un ángulo  $\theta$  con el campo magnético, la magnitud de la fuerza magnética es proporcional al  $\sin \theta$ .

Estas observaciones se pueden resumir escribiendo la fuerza magnética en la forma

$$F = qv \times B$$

donde la dirección de la Fuerza magnética está en la dirección de  $v \times B$ , la cual, por definición del producto vectorial, es perpendicular tanto a  $v$  como a  $B$ .

La figura 29,2 da un breve repaso de la regla de la mano derecha para determinar la dirección del producto vectorial  $v \times B$ . Se hace girar el vector  $v$  hacia  $B$  utilizando los cuatro dedos de la mano derecha, con la palma hacia el vector  $B$ . Entonces el pulgar apunta en la dirección de  $v \times B$ . Como  $F \sim qv \times B$ ,  $F$  está en la dirección de  $v \times B$  si la carga  $q$  es positiva (Fig. a) y tiene la dirección opuesta a  $v \times B$  si la carga  $q$  es negativa (Fig. b). La magnitud de la Fuerza magnética tiene un valor

$$F = qvB \sin \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $v$  y  $B$ . De esta expresión, se ve que  $F$  es cero cuando « es paralelo a  $B$  ( $\theta = 0$  o  $\theta = 180^\circ$ ). Sin embargo, la fuerza tiene su valor máximo,  $F = qvB$ , cuando  $v$  es perpendicular a  $B$  ( $\theta = 90^\circ$ ).

Se puede reconocer la ecuación 29.1 como una definición operacional del campo magnético en un punto del espacio. Esto es, el campo magnético es definido en términos de un tipo de fuerza que actúa sobre una carga en movimiento. Existen varias diferencias importantes entre las fuerzas eléctricas y magnéticas:

1. La fuerza eléctrica siempre está en la dirección del campo eléctrico, mientras que la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
2. La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada independientemente de la velocidad de la partícula, mientras que la fuerza magnética actúa sólo cuando las partículas cargadas se encuentran en movimiento.
3. La fuerza eléctrica realiza trabajo al desplazar una partícula cargada, mientras que la fuerza magnética asociada a un campo magnético estacionario no realiza trabajo cuando una partícula se desplaza.

Esta última afirmación es consecuencia del hecho de que cuando una carga se mueve en un campo magnético estacionario, la fuerza magnética es siempre perpendicular al desplazamiento. Es decir,

$$F \cdot ds = (F \cdot v) dt = 0$$

ya que la fuerza magnética es un vector perpendicular a  $v$ . De esta propiedad y del teorema de trabajo y energía, se concluye que la energía cinética de la partícula cargada no puede ser alterada sólo por el campo magnético. En otras palabras

**cuando una carga se mueve con una velocidad  $v$ , el campo magnético aplicado sólo puede alterar la dirección del vector velocidad, pero no puede cambiar la rapidez de la partícula.**

En el SI la unidad de campo magnético es el weber por metro cuadrado ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ), también llamado tesla (T). Esta unidad puede ser relacionada con las unidades fundamentales utilizando la ecuación: una carga de 1 coulomb que se mueve a través de campo magnético de 1 tesla con una velocidad de 1 m/s perpendicular al campo experimenta una fuerza de 1 newton:

$$[B] = T = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

En la práctica, con frecuencia se utiliza la unidad del sistema cgs para el campo magnético, llamada gauss (G). El gauss está relacionado con el tesla a través de la conversión

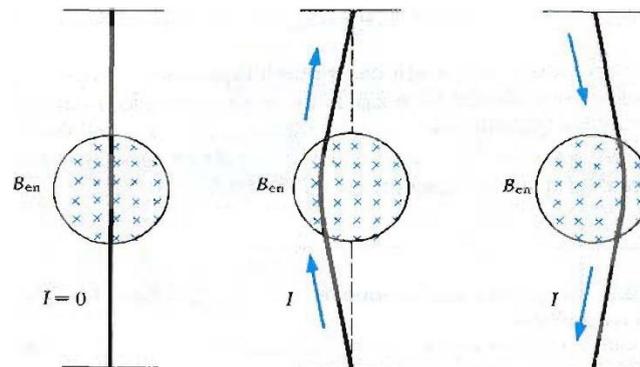
$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$$

Los imanes de laboratorio convencionales pueden producir campos magnéticos tan grandes como unos 25 000 G, o 2.5 T. Se han construido imanes superconductores que pueden generar campos magnéticos mayores a 250 000 G o 25 T. Éstos pueden ser comparados con el campo magnético terrestre cercano a su superficie, el cual es aproximadamente de 0.5 G o  $0.5 \times 10^{-4}$  T.

### 3.3 Fuerza magnética sobre un conductor que lleva una corriente eléctrica.

Si una fuerza se ejerce sobre una partícula cargada cuando se mueve a través de un campo magnético, no debe sorprender que un alambre que lleva una corriente también experimente una fuerza cuando se coloca en un campo magnético. Esto se sigue del hecho de que la corriente representa una colección de varias partículas cargadas en movimiento; por lo tanto, la fuerza resultante sobre el alambre se debe a la suma de las fuerzas individuales sobre las partículas cargadas.

La fuerza sobre un conductor que lleva una corriente puede demostrarse colocando un alambre entre las caras de un imán como en la figura. En esta figura, el campo magnético está dirigido hacia adentro de la página y cubre la región sombreada dentro del círculo. Cuando la corriente sobre el alambre es cero, el alambre permanece vertical como en la figura a. Sin embargo, cuando la corriente se establece en el alambre dirigida hacia arriba como en la figura b, el alambre se curva hacia la izquierda. Si invertimos la corriente, como en la figura c, el alambre se curva hacia la derecha.



Para cuantificar esta exposición considérese un segmento recto del alambre de

$$F = (qv_d \times B)nA\ell$$

longitud  $\ell$  y área de sección transversal  $A$ , llevando una corriente  $I$  en un campo magnético externo  $B$  como en la figura. La fuerza magnética sobre la carga  $q$  que se mueve con una velocidad de deriva está dada por  $qv_d \times B$ . La fuerza sobre el portador de carga se transmite al “grueso” del alambre a través de los choques contra los átomos que forman el alambre. Para determinar la fuerza total que actúa sobre el alambre, se multiplica la fuerza sobre una carga  $qv_d \times B$ , por el número de cargas en el segmento. Como el volumen del segmento es  $A\ell$ , el número de cargas en el segmento es  $nA\ell$ , donde  $n$  es el número de cargas por unidad de volumen. Por lo tanto, la fuerza magnética total sobre un alambre de longitud  $\ell$  es

Esto se puede escribir en forma más conveniente al recordar que, la corriente en un alambre está dada por  $I = nqv_dA$ . Por lo tanto  $F$  puede expresarse como

$$F = I\ell \times B$$

donde  $\ell$  es un vector en la dirección de la corriente  $I$ ; la magnitud de  $\ell$  es igual a la longitud  $\ell$  del segmento. Obsérvese que esta expresión se aplica sólo a segmentos rectos de alambre en un campo magnético externo uniforme. Además, se ha despreciado el campo producido por la propia corriente. (De hecho, el alambre no puede producir una fuerza sobre sí mismo.)

Ahora considérese un alambre de forma arbitraria de sección transversal uniforme en un campo magnético externo. De la ecuación se sigue que la fuerza magnética sobre cualquier pequeño segmento  $ds$  en presencia del campo  $B$  está dada por

$$dF = I ds \times B$$

donde  $dF$  está dirigida hacia afuera de la página para las direcciones asumidas en la figura. Se puede considerar la ecuación como una definición alternativa de  $B$ . Es decir, el campo  $B$  puede definirse en términos de la fuerza medida en un elemento de corriente, donde la fuerza es máxima cuando  $B$  es perpendicular al elemento y cero cuando  $B$  es paralelo al elemento.

Para obtener la fuerza total sobre el alambre, se integra la ecuación sobre la longitud del alambre:

$$F = I \int_a^b ds \times B$$

En esta expresión,  $a$  y  $b$  representan los puntos extremos del alambre. Cuando esta integración se realiza, la magnitud del campo magnético y la dirección del campo respecto al vector  $ds$  (es decir, la orientación del elemento) puede variar en cada punto.

### 3.4 Momento sobre una espiral de corriente en un campo magnético uniforme.

En la sección anterior se mostró cómo una fuerza se ejerce sobre un conductor que lleva una corriente cuando el conductor se encuentra en un campo magnético externo. Tomando esto como punto de partida, se mostrará que un momento se ejerce sobre una espira de corriente situada en un campo magnético. El resultado de este análisis es de gran valor práctico, lo cual se verá cuando se discutan los motores en un próximo capítulo.

Considérese una espira rectangular que lleva una corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme en el plano de la espira, como en la figura 29.9a. Las fuerzas sobre los lados de longitud  $a$  son cero ya que estos alambres son paralelos al campo; por lo tanto,  $ds \times B = 0$  para estos lados. Sin embargo, la magnitud de las fuerzas sobre los lados de longitud  $b$ , está dada por

$$F_1 = F_2 = IbB$$

La dirección de  $F_1$ , la fuerza sobre el lado izquierdo de la espira, es hacia afuera de papel y la de  $F_2$ , la fuerza sobre el lado derecho de la espira, es hacia dentro del papel. Si se ve la espira desde uno de sus extremos, como en la figura 29.9b, pueden apreciarse las fuerzas dirigidas como se muestra. Si se supone que la espira está pivoteada de tal forma que puede girar alrededor del punto O, se ve que estas dos fuerzas producen un momento de una fuerza alrededor de O de tal manera que la espira gira en la dirección de las manecillas del reloj. La magnitud de este momento, es

$$\tau_{\max} = F_1 \frac{a}{2} + F_2 \frac{a}{2} = (IbB) \frac{a}{2} + (IbB) \frac{a}{2} = IabB$$

donde el brazo de palanca alrededor de O es  $a/2$  para cada fuerza. Dado que el área de la espira es  $A = ab$ , el momento puede ser expresado como

$$\tau = IAB$$

Recuérdese que este resultado es válido sólo cuando el campo  $\vec{B}$  es paralelo al plano de la espira. El sentido de rotación es de acuerdo con las manecillas del reloj cuando se ve desde el extremo inferior. Si la corriente fuera en sentido opuesto, las fuerzas serían en sentido opuesto y la tendencia rotacional sería en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ahora supóngase que el campo magnético uniforme hace un ángulo  $\theta$  respecto a una línea perpendicular al plano de la espira, como en la figura 29.10a. Para facilitar la

$$\begin{aligned} \tau &= F_1 \frac{a}{2} \sin \theta + F_2 \frac{a}{2} \sin \theta \\ &= IbB \left( \frac{a}{2} \sin \theta \right) + IbB \left( \frac{a}{2} \sin \theta \right) = IabB \sin \theta \\ &= IAB \sin \theta \end{aligned}$$

comprensión, supóngase que el campo  $\vec{B}$  es perpendicular a los lados de longitud  $b$ . En este caso, las Fuerzas magnéticas  $F_3$  y  $F_4$  sobre los lados de longitud  $a$  se cancelan una a la otra y no producen momento ya que pasan por un origen común. Sin embargo, las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  que actúan sobre los lados de longitud  $b$  forman un par y por lo tanto producen un momento respecto a cualquier punto. Con referencia a la vista lateral que se observa en la figura 29.10b, obsérvese que el brazo de palanca de la fuerza  $F_1$  respecto al punto O es igual a  $(a/2) \sin \theta$ . Del mismo modo, el brazo de palanca de la fuerza  $F_2$  respecto O es  $(a/2) \sin \theta$ . Como  $F_1 = F_2 = IbB$ , el momento neto respecto a O tiene una magnitud dada por

donde  $A = ab$  es el área de la espira. Este resultado muestra que el momento tiene el máximo valor en  $IAB$  cuando el campo es paralelo al plano de la espira ( $\theta = 90^\circ$ ) y es cero cuando el campo es perpendicular al plano de la espira ( $\theta = 0^\circ$ ). Como se ve en la figura

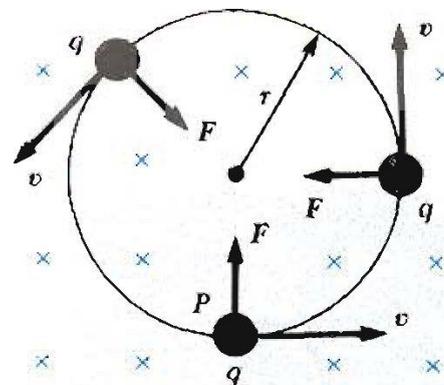
29.10, la espira tiende a girar hacia valores más pequeños de  $\theta$  (es decir, en tal forma que la normal al plano de la espira gire hacia  $B$ ).

### 3.5 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético.

En la sección anterior se encontró que la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. De esta propiedad se sigue que

**el trabajo realizado por la fuerza magnética es cero ya que el desplazamiento de la carga es siempre perpendicular a la fuerza magnética. Por lo tanto, un campo magnético estático cambia la dirección de la velocidad, pero no afecta la rapidez o la energía cinética de la partícula cargada.**

Considérese el caso especial de una partícula cargada positivamente que se mueve en un campo magnético externo con su vector de velocidad inicial perpendicular al campo. Supóngase que el campo magnético está dirigido hacia adentro de la página (esto se indica por las cruces en la figura 29.13). Las cruces se utilizan para representar la cola de  $B$ , ya que está dirigido hacia adentro de la página. Después se utilizarán los puntos para representar la punta de un vector dirigido hacia afuera de la página. La figura 29.13 muestra que la



**partícula cargada se mueve en un círculo cuyo plano es perpendicular al campo magnético.**

Esto se debe a que la fuerza magnética  $F$  forma ángulos rectos con  $v$  y  $B$  y tiene una magnitud constante igual a  $qvB$ . Como la fuerza  $F$  defleca a la partícula, las direcciones de  $v$  y  $F$  cambian continuamente, como se muestra en la figura. Por lo tanto, la fuerza  $F$  es una fuerza centrípeta, la cual cambia sólo la dirección de  $v$  mientras que la rapidez permanece constante. El sentido de la rotación, como se muestra en la figura, es contrario al de las manecillas del reloj para una carga positiva. Si  $q$  fuera negativa, el sentido de rotación sería al revés, en sentido de las manecillas del reloj. Como la fuerza resultante  $F$  en la dirección radial tiene una magnitud  $qvB$ , se puede igualar ésta a la fuerza centrífuga requerida, la cual es la masa  $m$  multiplicada por la aceleración centrípeta  $v^2/r$ . De la segunda ley de Newton, se encuentra que

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

es decir, el radio de la trayectoria es proporcional al momento lineal de la partícula e inversamente proporcional al campo magnético. La frecuencia angular de rotación de la partícula cargada está dada por

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

El periodo de este movimiento (tiempo para una revolución) es igual a la circunferencia del círculo dividido entre la rapidez de la partícula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Este resultado muestra que la frecuencia angular y el período del movimiento circular no dependen de la rapidez de la partícula o del radio de la órbita. La frecuencia angular  $\omega$  en algunas ocasiones recibe el nombre de frecuencia de ciclotrón ya que las partículas cargadas circulan a esta frecuencia en un acelerador llamado ciclotrón, el cual se verá en la sección.

Si la partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme con su velocidad formando un ángulo arbitrario con  $\mathbf{B}$ , su trayectoria es una hélice. Por ejemplo, si el campo magnético está en la dirección  $x$  como en la figura 29.14, no existe componente de la fuerza en la dirección  $x$  y por lo tanto  $a_x = 0$  y la componente  $x$  de la velocidad,  $v_x$ , permanece constante. Por otro lado, la fuerza magnética  $\mathbf{c}v \times \mathbf{B}$  hace que las componentes  $v_y$  y  $v_z$  cambien en el tiempo, y el movimiento resultante es una hélice que tiene su eje paralelo al campo  $\mathbf{B}$ . La proyección de la trayectoria en el plano  $yz$  (vista a lo largo del eje  $x$ ) es un círculo.

### 3.6 Fuentes de campo magnético.

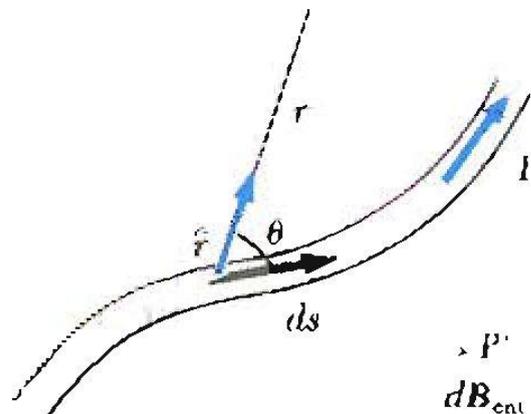
En el capítulo anterior se trataron problemas que implican la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento en un campo magnético. Para completar la descripción de las interacciones magnéticas, en este capítulo se tratará el origen del campo magnético debido a cargas en movimiento o a corrientes eléctricas. Se empezará por demostrar cómo se utiliza la ley de Biot y Savart para calcular el campo magnético producido en un punto por un elemento de corriente. Utilizando este formalismo y el principio de superposición, se calculará el campo magnético debido a una distribución de corriente para varias geometrías. Después, se demostrará cómo se determina la fuerza entre dos conductores que llevan corriente, con lo cual se obtiene la definición del amperio. También se introducirá la ley de Ampère, la cual es muy útil para el cálculo de campos magnéticos en

configuraciones de alta simetría que lleven corrientes constantes. Se aplicará la ley de Ampère para determinar los campos magnéticos para algunas configuraciones de corriente, incluyendo al solenoide.

A este capítulo también le conciernen algunos aspectos de los procesos complejos que ocurren en materiales magnéticos. Todos los efectos magnéticos en la materia pueden ser explicados con base en las espiras de corriente asociadas con los momentos dipolares atómicos. Estos momentos dipolares atómicos pueden deberse tanto al movimiento orbital de los electrones como a una propiedad intrínseca de los electrones llamada espín. La descripción del magnetismo en la materia se basará en el hecho experimental de que la presencia de materia generalmente modifica el campo magnético producido por corrientes. Por ejemplo, cuando un material se coloca dentro de un solenoide que lleva corriente, el campo magnético del material se superpone, es decir, se suma (vectorialmente) al campo que está previamente establecido.

### 3.6.1 Ley de Biot-Savart.

Poco tiempo después del descubrimiento de Oersted en 1820, donde la aguja de la brújula se desviaba a causa de la presencia de un conductor portador de corriente, Jean Baptiste Biot y Félix Savart informaron que un conductor de corriente estable produce fuerzas sobre un imán. De sus resultados experimentales, Biot y Savart fueron capaces de llegar a una expresión de la que se obtiene el campo magnético en un punto dado del espacio en términos de la corriente que produce el campo. La ley de Biot-Savart establece que, si un alambre conduce una corriente constante  $I$ , el campo magnético  $d\mathbf{B}$  en un punto  $P$  debido a un elemento  $ds$  (Fig.) tiene las siguientes propiedades:



1. El vector  $d\mathbf{B}$  es perpendicular tanto a  $ds$  (el cual tiene la dirección de la corriente) como al vector unitario  $\mathbf{r}$  dirigido desde el elemento hasta el punto  $P$ .
2. La magnitud  $d\mathbf{B}$  es inversamente proporcional a  $r^2$ , donde  $r$  es la distancia desde el elemento hasta el punto  $P$ .
3. La magnitud de  $d\mathbf{B}$  es proporcional a la corriente y la longitud  $ds$  del elemento.
4. La magnitud de  $d\mathbf{B}$  es proporcional a  $\sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector  $ds$  y  $\mathbf{r}$ .

La ley de Biot-Savart puede ser resumida en la siguiente forma:

$$dB = k_m \frac{I ds \times \hat{r}}{r^2}$$

donde  $k_m$  es una constante que en el SI de unidades es exactamente  $10^{-7}$  Wb/A m. La constante  $k_m$  es por lo general escrita como  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ , donde  $\mu_0$  es otra constante, llamada permeabilidad del espacio libre. Es decir,

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = k_m = 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

$$\mu_0 = \frac{dB}{I ds \times \hat{r}} \cdot r^2 \quad \text{Wb/A} \cdot \text{m}$$

Por lo que, la ley de Biot-Savart, ecuación 30.1, también puede escribirse como:

### 3.7 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos.

En el capítulo anterior se describió la fuerza magnética que actúa sobre un conductor que lleva corriente cuando el conductor se encuentra en un campo magnético externo. Como una corriente en un conductor crea su propio campo magnético, es fácil entender que dos conductores que lleven corriente ejercerán fuerzas magnéticas uno sobre el otro. Como se verá, dichas fuerzas pueden ser utilizadas como base para la definición del ampere y del coulomb. Considérese dos alambres largos, rectos y paralelos separados una distancia  $a$  y que llevan corrientes  $i_1$  e  $i_2$  en la misma dirección, como se muestra en la figura 30.7. Se puede determinar fácilmente la fuerza sobre uno de los alambres debida al campo magnético producido por el otro alambre. El alambre 2, el cual lleva una corriente  $i_2$ , genera un campo magnético  $B_2$  en la posición del alambre 1. La dirección de  $B_2$  es perpendicular al alambre, como se muestra en la figura 30.7. De acuerdo con la ecuación 29.5, la fuerza magnética sobre una longitud  $\ell$  (del alambre 1 es  $F_1 = i_1 \ell \times B_2$ ). Puesto que  $B_2$  es perpendicular a  $i_1$ , la magnitud de  $F_1$  está dada por  $F_1 = i_1 \ell B_2$ . Como el campo debido al alambre 2 está dado por la ecuación,

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi a}$$

se ve que

$$F_1 = i_1 \ell B_2 = i_1 \ell \left( \frac{\mu_0 i_2}{2\pi a} \right) = \frac{\ell \mu_0 i_1 i_2}{2\pi a}$$

La dirección de  $F_1$  es hacia abajo, hacia el alambre 2, ya que  $i_1 \times B_2$  es hacia abajo. Si se considera el campo sobre el alambre 2 debido al alambre 1, la fuerza  $F_2$  sobre el alambre 2 se encuentra que es igual y opuesta a  $F_1$ . Esto es lo que se esperaba, ya que la tercera ley de Newton de acción-reacción debe cumplirse. Cuando las corrientes están en direcciones opuestas, las fuerzas son inversas y los alambres se repelen uno al otro. Por ello, se determina que:

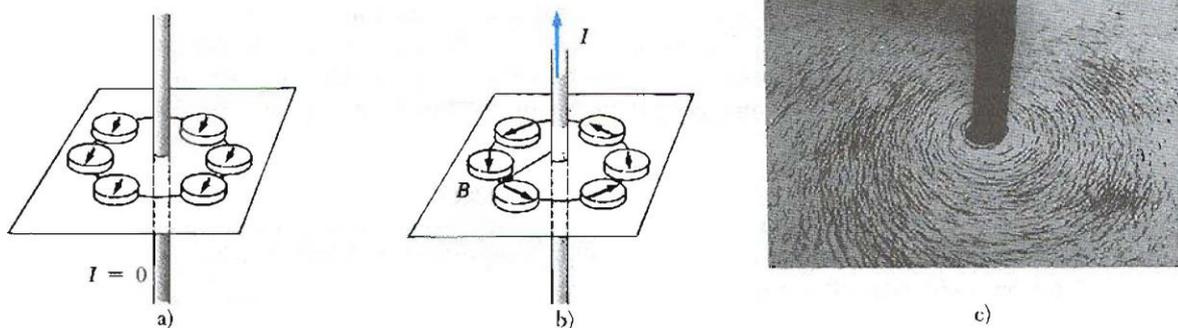
conductores paralelos que lleven corrientes en la misma direcci3n se atraen uno al otro, mientras que conductores paralelos que lleven corrientes en direcciones opuestas se repelen uno al otro.

La fuerza entre dos alambres paralelos que lleven corriente se utiliza para definir el ampere como sigue:

**Si dos largos alambres paralelos separados una distancia de. 1 m llevan la misma corriente y la fuerza por unidad de longitud en cada alambre es de  $2 \times 10^{-7}$  T N/m, entonces la corriente que llevan se define como 1 A.**

### 3.8 Ley de ampere.

Un experimento simple realizado por primera vez por Oersted en 1820 demostr3 claramente el hecho de que un conductor que lleva una corriente produce un campo magn3tico. En este experimento, varias brújulas se colocan en un plano horizontal cercanas a un alambre largo vertical, como en la figura a. Cuando no existe corriente en el alambre, todas las brújulas apuntan en la misma direcci3n (que el campo terrestre) como se esperaría. Sin embargo, cuando el alambre lleva una gran corriente estable, las brújulas necesariamente se desviarán en la direcci3n tangente a un círculo como en la figura b.



Ahora se evaluará el producto  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  y se sumarán estos productos sobre una trayectoria circular centrada en el alambre. A lo largo de esta trayectoria, los vectores  $d\mathbf{s}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos en cada punto (Fig. 30.Sb), así que  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B ds$ . Además,  $B$  es constante en magnitud sobre este círculo y está dado por la ecuaci3n 30.7. Por lo tanto, la suma de los productos  $B ds$  sobre la trayectoria cerrada, la cual es equivalente a la integral de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  está dada por:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

donde  $\oint ds = 2\pi r$  es la circunferencia del círculo.

Este resultado, conocido como ley de Ampère, fue encontrado para el caso especial de una trayectoria circular alrededor del alambre. Sin embargo, el resultado puede aplicarse en el caso general en el que una trayectoria cerrada sea atravesada por una corriente estable. Es decir,

**La ley de Ampère establece que la integral de línea de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente estable total que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada.**

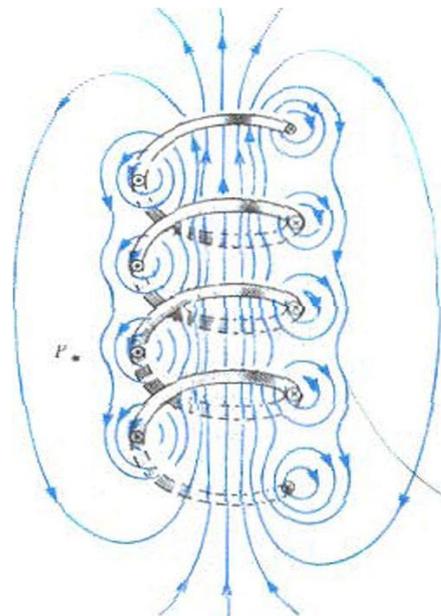
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

La ley de Ampère es válida sólo para corrientes estables. Además, la ley de Ampère se utiliza sólo para el cálculo de campos magnéticos de configuraciones de corriente con un alto grado de simetría, precisamente como la ley de Gauss se utiliza sólo para calcular el campo eléctrico de distribuciones de carga de alta simetría. Los siguientes ejemplos mostrarán algunas configuraciones simétricas donde se utiliza la ley de Ampère.

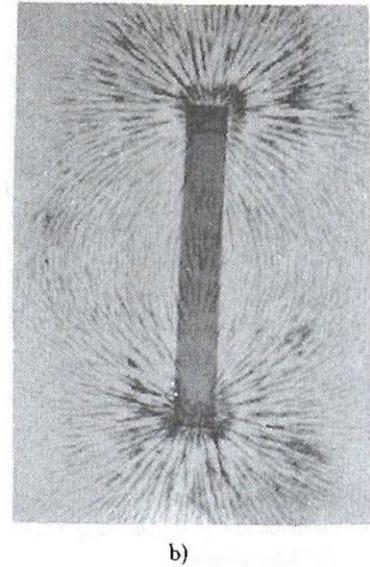
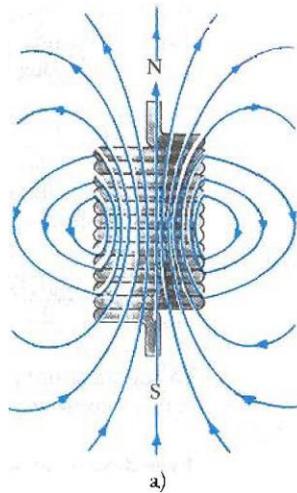
### 3.9 El campo magnético de un solenoide.

Un solenoide es un alambre devanado en la forma de una hélice. Con esta configuración se puede producir un campo magnético razonablemente uniforme dentro de un pequeño volumen de la región interior del solenoide si las espiras adyacentes están estrechamente espaciadas. Cuando se cumple esto, cada espira puede ser considerada como un circuito circular, y el campo magnético total es el vector suma de los campos debidos a todas las espiras.

La figura muestra las líneas del campo magnético de un solenoide devanado en forma estrecha. Obsérvese que las líneas del campo en el interior de la bobina son aproximadamente paralelas, están distribuidas de manera uniforme y muy próximas entre sí. Esto indica que el campo magnético dentro del solenoide es uniforme. Las líneas de campo entre las vueltas tienden a cancelarse unas con otras. El campo en el exterior fuera del solenoide no es uniforme y es débil. El campo en puntos del exterior, tales como P, es débil puesto que el campo debido a un elemento de corriente en las partes superiores tiende a cancelarse con el campo atribuible a elementos de corriente que estén en las partes inferiores.



Si las espiras están muy próximas y el solenoide tiene una longitud finita, las líneas del campo son como se muestran en la figura. En este caso, las líneas divergen en un extremo y convergen en el extremo opuesto. Si se observa cuidadosamente esta distribución del campo en el exterior del solenoide, se encontrará cierta similitud con el campo de una barra magnética. En consecuencia, un extremo del solenoide se comporta como el polo norte de un imán, mientras que el extremo opuesto actúa como polo sur. A medida que aumenta la longitud del solenoide, el campo en su interior viene a ser más y más uniforme. Se produce una aproximación al caso del solenoide ideal cuando las espiras están muy próximas y la longitud del solenoide es grande comparada con el radio. En este caso, el campo exterior del solenoide es débil cuando se compara con el campo en el interior, y el campo interior es uniforme a través de un gran volumen.



Se puede utilizar la ley de Ampere para obtener una expresión para el campo magnético en el interior de un solenoide ideal. Una sección transversal de una parte del solenoide ideal (Fig. 30.16) lleva una corriente  $I$ . Para un solenoide ideal,  $B$  en el interior del solenoide es uniforme y paralelo al eje y  $B$  es cero para el exterior de éste. Considérese una trayectoria rectangular de longitud  $l$  y anchura  $\Delta r$  como se muestra en la figura 30.16. Se puede aplicar la ley de Ampère a esta trayectoria para evaluarla integral de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  sobre cada uno de los cuatro lados del rectángulo. La contribución a lo largo del lado 3 es claramente cero, ya que  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$  en esa región. La contribución de los lados 2 y 4 son ambos cero puesto que  $B$  es perpendicular a  $d\mathbf{s}$  a lo largo de estas trayectorias. El lado 1, cuya

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{trayectoria 1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \int_{\text{trayectoria 1}} ds = B\ell$$

longitud es  $\ell$ , da una contribución  $B\ell$  a la integral ya que  $B$  es uniforme y paralelo a  $d\mathbf{s}$  a lo largo de esta trayectoria. Por lo tanto, la integral sobre la trayectoria rectangular cerrada tiene el valor.

El lado derecho de la ley de Ampère implica la corriente total que pasa a través del área limitada por la trayectoria de Integración. En este caso, la corriente total a través de la trayectoria rectangular es igual al producto de la corriente que pasa por cada espira multiplicada por el número de espiras. Si  $N$  es el número de espiras contenidas en la longitud  $\ell$ , entonces la corriente total a través del área del rectángulo es igual a  $NI$ . Por consiguiente, al aplicarse la ley de Ampère a esta trayectoria se obtiene

donde  $n = N/\ell$  es el número de vueltas por unidad de longitud (no debe confundirse con  $N$ ).

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI$$

Se podría obtener este resultado en una forma más sencilla mediante la reconsideración del campo magnético de una bobina toroidal (Ej. 30.5). Si el radio  $r$  de la bobina toroidal que contiene  $N$  vueltas es muy grande comparado con el radio  $a$  de su sección transversal, entonces una pequeña sección del toroide se aproxima a un solenoide con  $n = N/2\pi r$ . En este límite, se ve que la ecuación 30.18 que se obtuvo para un toroide concuerda con la ecuación 30.20.

La ecuación sólo es válida para puntos lejanos de los extremos de un solenoide muy largo. Como sería de esperarse, el campo cerca de los extremos es menor que el valor dado por la expresión 30.20. En cualquier extremo del solenoide de longitud grande, la magnitud del campo magnético es aproximadamente la mitad del valor del campo en su centro. El campo en puntos axiales arbitrarios se deduce en la sección 30.5.

### 3.10 Campo magnético a lo largo del eje de un solenoide.

Considérese un solenoide de longitud  $C$  y radio  $R$  que consta de  $iV$  vueltas estrechamente espaciadas y que lleva una corriente estable  $I$ . Se determinará una expresión para el campo magnético en un punto axial  $P$  en el interior del solenoide, como se indica en la figura 30.17.

Quizás la forma más simple de obtener el resultado deseado es considerar al solenoide como una distribución de espiras de corriente. El campo en cualquier espira a lo largo del eje se obtiene por la ecuación 30.9. En consecuencia, el campo total en el solenoide es la superposición de los campos de todas las espiras. El número de vueltas en una longitud  $dx$  del solenoide está dado por  $(N/\ell) dx$  por lo tanto la corriente en el ancho

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} I \left( \frac{N}{\ell} \right) dx$$

$dx$  está dado por  $R \sec^2 \theta d\theta$ . Entonces, utilizando la ecuación 30.9, se encuentra que el campo en P debido a esta sección  $dx$  está dado

Esta expresión contiene la variable  $x$ , la cual puede ser expresada en términos de la variable  $\theta$ , definida en la figura. Es decir,  $x = R \tan \theta$ , así que se tiene que  $dx = R \sec^2 \theta d\theta$ . Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior e integrando desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_2$ , se obtiene

Si P está en el punto central del solenoide y si se asume que el solenoide es largo comparado con R, entonces  $\theta_1 \sim 90^\circ$  y  $\theta_2 \sim 90^\circ$ ; por lo que

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)$$

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (1 + 1) = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \mu_0 nI \quad (\text{en el centro})$$

lo cual concuerda con el resultado anterior, ecuación 30.20.

Si P es un punto en el extremo del solenoide largo (por ejemplo, el inferior), entonces  $\theta_1 = 0^\circ$  y  $\theta_2 = 90^\circ$ , y

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (1 + 0) = \frac{1}{2} \mu_0 nI \quad (\text{en los extremos})$$

Esto muestra que el campo en cada extremo de un solenoide se aproxima a la mitad del valor que tiene en el centro cuando la longitud  $\ell$  se aproxima al infinito.

En la figura se muestra la gráfica del campo magnético en los puntos axiales de un solenoide en función de  $x$ . Si la longitud  $\ell$  es grande comparada con R, el campo axial será uniforme en la mayor parte del solenoide y la curva será muy plana, excepto en los puntos cercanos a los extremos. Por otra parte, si  $\ell$  es comparable con R, entonces el campo tendrá un valor ligeramente menor que  $\mu_0 nI$  en la parte central y sólo será uniforme en una pequeña región del solenoide.

### 3.11 Flujo magnético.

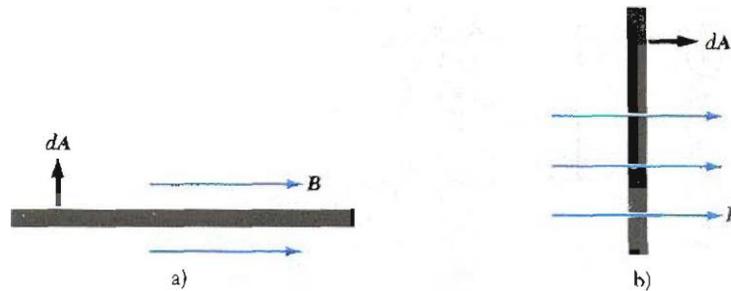
El flujo asociado con un campo magnético se define en forma similar a la que se utilizó para la definición del flujo eléctrico. Considérese un elemento de área  $dA$  sobre una superficie de forma arbitraria, como se ve en la figura 30.19. Si el campo magnético de este elemento es  $B$ , entonces el flujo magnético a través de este elemento es  $B \cdot dA$ , donde  $dA$  es el vector perpendicular a la superficie cuya magnitud es igual a  $dA$ . En consecuencia, el flujo magnético total a través de toda la superficie está dado por

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Considérese el caso especial de un plano de área  $A$  y un campo uniforme  $B$ , el cual hace un ángulo  $\theta$  con el vector  $d\mathbf{A}$ . El flujo magnético a través del plano en este caso está dado por

$$\Phi_m = BA \cos \theta$$

Si el campo magnético está en el plano, como en la figura 30.20a, entonces  $\theta = 90^\circ$  y el flujo es cero. Si el campo es perpendicular al plano como en la figura b, entonces  $\theta = 0^\circ$  y el flujo es  $BA$  (el valor máximo).

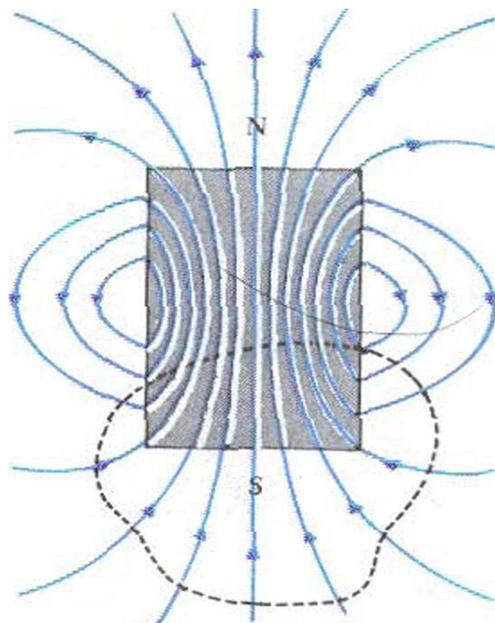


Ya que  $B$  tiene unidades de  $\text{Wb}/\text{m}^2$  o  $\text{T}$ , la unidad del flujo es el weber ( $\text{Wb}$ ), donde  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$ .

### 3.12 Ley de Gauss del magnetismo.

En capítulos anteriores se determinó que el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie que rodee a una carga neta es proporcional a esta carga (ley de Gauss). En otras palabras, el número de líneas de campo eléctrico que salen de la superficie depende sólo de la carga neta dentro de la superficie. Esta propiedad está basada en parte en el hecho de que las líneas de campo eléctrico se originan en las cargas eléctricas.

La situación es completamente diferente para los campos magnéticos, los cuales son continuos y forman trayectorias cerradas. Las líneas del campo magnético debidas a corrientes no tienen punto de inicio ni punto final. Las líneas de campo magnético del imán de barra en la figura muestran esta afirmación. Obsérvese que para cualquier superficie cerrada, el número de líneas



que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de ella, y así el flujo magnético neto es cero. Esto contrasta con el caso de una superficie que rodea a un dipolo eléctrico, donde el flujo eléctrico neto no es cero.

**La ley de Gauss en el magnetismo establece que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero:**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Esta proposición se basa en el hecho experimental de que no han sido detectados polos magnéticos aislados (o monopolos), y quizás no existan. Las únicas fuentes conocidas de campos magnéticos son los dipolos magnéticos (espiras de corriente), aun en los materiales magnéticos. En realidad, todos los efectos magnéticos en la materia pueden explicarse en términos de los momentos magnéticos dipolares (espiras de corriente efectiva) asociados con los electrones y el núcleo. Esto será tratado posteriormente en la sección 30.9.

### 3.13 Corriente de desplazamiento y generalización de la ley de Ampère.

Se ha visto que las cargas en movimiento, o corrientes, producen un campo magnético. Cuando un conductor que transporta una corriente tiene alta simetría, la magnitud del campo puede calcularse utilizando la ley de Ampère, dada por la ecuación 30.15:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

donde la integral de línea se calcula en cualquier trayectoria cerrada a través de la cual pase la corriente de conducción. Si  $Q$  es la carga en el capacitor en cualquier instante, la corriente de conducción se define por

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Se demostró hasta ahora que la ley de Ampère expresada de esta forma es válida sólo si la corriente de conducción es constante en el tiempo. Maxwell reconoció esta limitación y modificó la ley de Ampère para incluir todos los casos posibles.

Este problema puede comprenderse si se considera un capacitor que está cargado como el de la figura 30.24. El argumento que aquí se expone es equivalente al razonamiento original de Maxwell. Cuando la corriente  $I$  cambia con el tiempo (por ejemplo, cuando un

voltaje ac se utiliza como fuente), la carga sobre la placa cambia, pero no pasa corriente de conducción entre las placas. Considérense ahora las dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  que acotan la misma trayectoria  $P$ . La ley establece que la integral de línea  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  alrededor de esta trayectoria debe ser igual a  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria  $P$ .

Cuando se considera que la trayectoria  $P$  limita a la superficie  $S_1$ , el resultado de la integral es  $\mu_0 I$ , ya que la corriente pasa a través de  $S_1$ . Sin embargo, cuando la trayectoria limita a la superficie  $S_2$ , el resultado es cero puesto que la corriente de conducción no pasa a través de  $S_2$ . Por consiguiente, se tiene una situación contradictoria que surge de la discontinuidad de la corriente. Maxwell resolvió este problema al postular un término adicional al lado derecho de la ecuación 30.15, llamado corriente de desplazamiento,  $I_d$ , definido como:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Recuérdese que  $\Phi_e$  es el flujo del campo eléctrico, definido como  $\Phi_e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ .

A medida que se va cargando (o descargando) el capacitor, la variación del campo eléctrico entre las placas puede pensarse como cierto tipo de corriente que forma un puente en la discontinuidad que existe en la corriente de conducción. Cuando esta expresión para la corriente (Ec. 30.26) se añade al lado derecho de la ley de Ampère, se resuelve la dificultad presentada por la figura 30.24. No importa cuál sea la superficie limitada por la trayectoria que se haya seleccionado, alguna combinación de las corrientes de conducción y de desplazamiento pasará a través de ella. Con este nuevo término,  $I_d$ , la ley de Ampère puede expresarse en una forma más general (a veces denominada ley de Ampère-Maxwell) como

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

El significado de esta expresión puede comprenderse si se hace referencia a la figura 30.25. El flujo eléctrico a través de  $S_2$  es  $\Phi_e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA$ , donde  $A$  es el área de las placas y  $E$  es la intensidad del campo eléctrico uniforme entre las placas. Si  $Q$  es la carga sobre las placas en cualquier instante, entonces se encuentra que  $E = Q/\epsilon_0 A$  (Sec. 26.2). Por lo tanto, el flujo a través de  $S_2$  es simplemente

$$\Phi_e = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

En consecuencia, la corriente de desplazamiento  $I_d$  a través de  $S_2$  es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Es decir, ¡la corriente de desplazamiento es precisamente igual a la corriente de conducción  $I$  pasando a través de  $S_1$ !

El punto central de este formalismo es el hecho de **que los campos magnéticos pueden producirse tanto por corrientes de conducción como por campos eléctricos variables.**

### 3.14 Magnetismo en la materia.

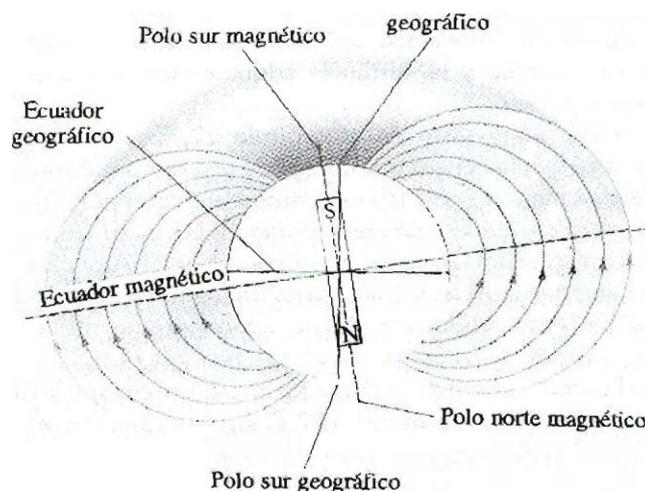
El campo magnético producido por una corriente en una bobina nos ayuda a comprender la causa de que ciertos materiales presenten fuertes propiedades magnéticas. Inicialmente se encontró que una bobina como la que se muestra en la figura 30.26 tiene polos norte y sur. En general, cualquier espira de corriente tiene un campo magnético y su correspondiente momento magnético. En forma similar, los momentos magnéticos en las sustancias magnetizadas están asociados con corrientes atómicas internas. Estas corrientes pueden verse como electrones orbitando alrededor del núcleo y como los protones uno sobre el otro en el interior del núcleo.

Esta sección comenzará con una breve descripción de los momentos magnéticos debidos a los electrones. Como se verá, el momento magnético total de un electrón se debe a la combinación de su movimiento orbital y su propiedad intrínseca llamada espín. Las fuerzas mutuas entre estos dipolos magnéticos y sus interacciones con un campo magnético externo son fundamentalmente importantes en el entendimiento del comportamiento de los materiales magnéticos. Se describirán tres categorías de materiales, paramagnéticos, ferromagnéticos y diamagnéticos. Los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos son aquellos que tienen átomos con momentos magnéticos dipolares permanentes. Los materiales diamagnéticos son aquellos cuyos átomos no tienen momentos magnéticos dipolares permanentes. Para materiales cuyos átomos tienen momentos dipolares permanentes, la contribución diamagnética para el magnetismo es generalmente opacada por los efectos paramagnéticos y ferromagnéticos.

### 3.15 Campo magnético de la Tierra.

Cuando se habló de que un pequeño imán de barra tenía un polo norte y un polo sur, se debería decir que tiende a “buscar el polo norte” y a “buscar el polo sur”. Así se entendería por qué un imán se utiliza como brújula, ya que uno de sus extremos buscará o apuntará hacia el polo norte geográfico de la Tierra. Entonces, se concluye que el polo norte magnético está localizado cerca del polo sur geográfico, y que el polo sur magnético está localizado cerca del polo norte geográfico. En efecto, la configuración del campo magnético terrestre, que se ve en la figura 30.35, es muy parecida a la que se tendría sepultando una barra magnética en el interior de la Tierra.

Si se suspende una brújula tenderá a girar tanto en el plano vertical como en el plano horizontal, y estará horizontal con respecto a la superficie de la Tierra sólo cerca del ecuador. Cuando el dispositivo se mueve hacia el norte, la brújula gira de tal manera que apunta más y más hacia la superficie de la Tierra. Por último, en un punto precisamente al norte de la Bahía Hudson en Canadá, el polo norte de la brújula estará apuntando directo hacia abajo. Esta posición, establecida por primera vez en 1832, se considera como la posición del polo sur magnético de la Tierra. Este sitio está aproximadamente a 1300 millas del polo norte geográfico y varía con el tiempo. De manera similar, el polo norte magnético de la Tierra está separado unas 1200 millas del polo sur geográfico. Así que sólo es aproximadamente correcto decir que una brújula apunta al norte. La diferencia entre el norte verdadero, definido como norte geográfico, y el norte que indica una brújula varía de punto a punto sobre la Tierra, y esta diferencia se conoce como declinación magnética. Por ejemplo, a lo largo de una línea a través de Florida y los Grandes Lagos, la brújula indicaría que el norte verdadero estaría en el estado de Washington, que está alineado  $25^\circ$  al este del verdadero norte.



Aun cuando el patrón del campo magnético terrestre es similar al que tendría una barra de imán en el interior de la Tierra, es fácil entender que la fuente del campo magnético de la Tierra no es una gran masa de material magnetizado permanentemente. La Tierra tiene grandes depósitos de hierro en las profundidades de su superficie, pero las altas temperaturas de la Tierra en su núcleo hacen suponer que el hierro no retiene ninguna magnetización permanente. Si se considera con más detenimiento se verá que la fuente verdadera son las corrientes convectivas de carga en el núcleo de la Tierra.

La circulación de iones o electrones en el líquido interior pudieran producir un campo magnético, tal como una corriente en una espira de alambre produce un campo magnético. Existe también fuerte evidencia de que la intensidad del campo de la Tierra está relacionada con la rapidez de rotación de ésta. Por ejemplo, Júpiter gira tan rápido como la Tierra, y recientes pruebas espaciales indican que el campo magnético de Júpiter es tan intenso como el nuestro. Por otro lado, Venus gira más lento que la Tierra y se ha encontrado que su campo magnético es débil. Continúan las investigaciones sobre las causas del magnetismo de la Tierra.

Existe un interesante punto de vista concerniente al campo magnético de la Tierra. Se ha encontrado que la dirección del campo se ha invertido varias veces durante el último millón de años. Se han encontrado evidencias de esto en el basalto (un tipo de rocas que

contienen hierro) que se obtiene de las rocas que son expulsadas en la actividad volcánica sobre el piso del océano. Cuando la lava se enfría, los sólidos retienen una especie de fotografía de la dirección del campo magnético de la Tierra. Las rocas pueden fecharse por otros medios que proporcionan evidencia de la reversibilidad periódica del campo magnético.

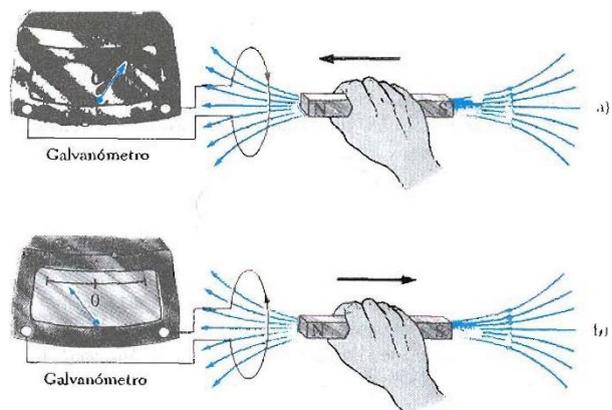
## UNIDAD IV INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

### 4.1 Ley de inducción de Faraday.

Se principiará describiendo dos experimentos sencillos que demuestran que una corriente puede ser producida por un campo magnético cambiante. Primero, considérese una espira de alambre conectada aun galvanómetro como en la figura 31.1. Si un imán se mueve liada la espira, la aguja del galvanómetro se desviará en una dirección, como se muestra en la figura 31.a. Si el imán se mueve alejándose de la espira, la aguja del galvanómetro se desviará en dirección opues-ta, como en la figura 31.b. Si el imán se mantiene estacionario en relación a la espira, no se observará desviación. Finalmente, si el imán permanece estacionario y la espira se mueve acercándola y alejándola del imán, la aguja del galvanómetro también .se doflexará. A partir de estas observaciones, se puede concluir que siempre que exista un movimiento relativo entre el imán ij el circuito de la espira se generará una corriente en el circuito

Estos resultados son muy importantes en vista del hecho de que se crea una corriente en el circuito aun cuando no exista batería en el circuito! Esta corriente se denominó corriente inducida, la cual se produce por una fem inducida.

Ahora se describirá un experimento, realizarlo por primera vez por Faraday, el cual se representa en la figura 31.2, Parte del aparato consta de una bobina conectada a una batería y a un interruptor. Se hará referencia a esta bobina como la bobina primaria y a su correspondiente circuito como circuito primario. La bobina se devana alrededor de un anillo (núcleo) de hierro para intensificar el campo producido por la corriente a través de la bobina. Una segunda bobina a la derecha, también se devana alrededor del anillo de hierro y se conecta a un galvanómetro. Se hará referencia a ésta como bobina secundaria y a su correspon-diente circuito como circuito secundario. No existe batería en el circuito secun-dario y la bobina secundaria no está conectada con la bobina primaria. El único propósito de este circuito es detectar cualquier corriente que pueda ser producida por un cambio en el campo magnético.



La primera impresión que se puede tener es que no debería de detectar ninguna corriente en el circuito secundario. Sin embargo, algo sucede cuando de repente se abre y se cierra el interruptor. En el instante que se cierra el interruptor en el circuito primario,

el galvanómetro en el circuito secundario se desvía en una dirección y luego regresa a cero. Cuando se abre el interruptor, el galvanómetro se desvía en la dirección opuesta y de nuevo regresa a cero. Finalmente, el galvanómetro da una lectura de cero cuando la corriente es estable en el circuito primario.

Como resultado de estas observaciones, Faraday concluyó que una corriente eléctrica puede ser producida por cambios en el campo magnético. Una corriente no puede ser producida por un campo magnético estable. La corriente que se produce en el circuito secundario ocurre sólo en el instante en que el campo magnético a través de la bobina secundaria está cambiando. En efecto, el circuito secundario se comporta como si existiera una fem conectada en un corto instante. Esto se puede enunciar diciendo que:

Estos dos experimentos tienen algo en común. En ambos casos, una fem es inducida en un circuito cuando el flujo magnético a través del circuito cambia con el tiempo. En efecto, un enunciado que puede resumir tales experimentos que implican corrientes y fem inducidas es el siguiente:

**La fem inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez de cambio del flujo magnético a través del circuito.**

Este enunciado, conocido como Ley de inducción de Faraday, puede escribirse como:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

donde  $\Phi_m$  es el flujo magnético que abarca el circuito, el cual puede ser expresado como

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

La integral dada por la ecuación 31.2 debe tomarse sobre el área limitada por el circuito. El significado del signo negativo de la ecuación 31.1 es una consecuencia de la ley de Lenz la cual será descrita en la sección 31.3. Si el circuito consta de una bobina de  $N$  espiras, todas de la misma área, y si el flujo pasa a través de todas las espiras, la fem inducida está dada por

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Supóngase que el flujo magnético es uniforme en un circuito de área  $A$  que está en un plano como el de la figura 31.3. En este caso, el flujo a través del circuito es igual a  $BA \cos \theta$ , entonces la fem inducida puede expresarse como

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} (BA \cos \theta)$$

De esta expresión, se ve que la fem puede ser inducida en el circuito de varias formas: 1) variando la magnitud de B con respecto al tiempo, 2) variando el área del circuito con respecto al tiempo, 3) cambiando el ángulo entre B y la normal al plano con respecto al tiempo y 4) o bien cualquier combinación de éstas.

Los siguientes ejemplos muestran casos donde la fem es inducida en un circuito como resultado de la variación del campo magnético como función del tiempo.

## 4.2 Fem de movimiento.

En los ejemplos 31.1 y 31.2 se consideraron casos en los cuales una fem es producida en un circuito cuando el campo magnético cambia en función del tiempo. En esta sección se describirá lo que se llama fem de movimiento, la cual es la fem producida en un conductor moviéndose a través de un campo magnético.

Primero, considérese un conductor recto de longitud  $C$  moviéndose con velocidad constante a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia dentro de la página como el de la figura 31.5. Para facilitar la comprensión, supóngase que el conductor se mueve perpendicularmente al campo. Los electrones en el conductor experimentarán una fuerza a lo largo del conductor dada por  $F = qv \times B$ . Con la influencia de esta fuerza, los electrones se moverán hacia el extremo inferior acumulándose en ese sitio, dejando una carga neta positiva en el extremo superior. Un campo eléctrico es por lo tanto producido en el interior del conductor debido a la separación de cargas. La carga en los extremos va aumentando hasta que la fuerza magnética  $qvB$  es balanceada por la fuerza eléctrica  $qE$ . En ese momento, las cargas dejan de fluir y la condición de equilibrio requerida es

$$qE = qvB \quad \text{o} \quad E = vB$$

Corno el campo eléctrico es constante, el campo eléctrico en el conductor está relacionado con la diferencia de potencial entre sus extremos de acuerdo con la relación  $V = E\ell$ . Así,

$$V = E\ell = B\ell v$$

donde el extremo superior está a mayor potencial que el extremo inferior. Así, una diferencia de potencial se mantiene mientras exista movimiento a través del campo. Si el movimiento es en sentido contrario, la polaridad de  $V$  también se invierte.

Una situación más interesante ocurre si ahora se considera qué sucede cuando el conductor en movimiento es parte de una trayectoria conductora cerrada. Esta situación es particularmente utilizada para mostrar cómo un cambio en el flujo magnético puede producir una corriente inducida en un circuito cerrado. Considérese un circuito que consta de una barra conductora de longitud  $d$  deslizándose a lo largo de dos rieles conductores paralelos como en la figura 31.6a, Para simplificar, se supone que la barra en movimiento

tiene resistencia cero y que la parte estacionaria del circuito tiene una resistencia  $R$ . Un campo magnético  $B$  uniforme y constante se aplica perpendicularmente al plano del circuito. Cuando la barra se jala hacia la derecha con una velocidad  $v$ , con la influencia de una fuerza aplicada  $F_i$ , las cargas libres de la barra experimenta misma fuerza magnética a lo largo de la longitud de la barra. Esta fuerza, a su vez, produce una corriente inducida ya que las cargas son libres de moverse en el circuito conductor cerrado. En este caso, la rapidez de cambio de flujo magnético a través de la espira y la correspondiente fem inducida a través de la barra en movimiento es proporcional al cambio en área de la espira cuando la barra se mueve a través del campo magnético. Como se ve, la barra se jala hacia la derecha con una velocidad constante, el trabajo realizado por la fuerza aplicada se disipa en forma de calor de Joule en el elemento resistivo del circuito.

Como el área del circuito en cualquier instante es  $\ell x$ , el flujo magnético externo a través del circuito está dado por

$$\Phi_m = B\ell x$$

donde  $x$  es el ancho del circuito, el cual cambia con el tiempo. Utilizando la ley de Faraday, se encuentra que la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell \frac{dx}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -B\ell v$$

Si la resistencia del circuito es  $R$ , la magnitud de la corriente inducida está dada por

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

El diagrama del circuito equivalente para este ejemplo se muestra en la figura 31.6b.

Examínese el sistema utilizando consideraciones de energía. Como no existe una batería real en el circuito, uno se podría preguntar sobre el origen de la corriente inducida y la energía eléctrica del sistema. Se puede dar una explicación a esto si se observa que la fuerza externa realiza trabajo sobre el conductor, por esta razón las cargas se mueven a través de un campo magnético. Esto provoca que las cargas se muevan con cierta velocidad de deriva, y de aquí que se establezca una corriente. Desde el punto de vista de la conservación de la energía, el trabajo realizado por la fuerza aplicada durante el intervalo de tiempo debe ser igual a la energía eléctrica que la fem inducida suministra en ese mismo

periodo. Además, si la barra se mueve con velocidad constante, el trabajo realizado debe ser igual a la energía disipada como calor en la resistencia en este intervalo de tiempo.

Cuando el conductor de longitud  $C$  se mueve a través de un campo magnético uniforme  $B$ , experimenta una fuerza magnética  $F_m$  de magnitud  $IQB$  (Sec. 29.3). La dirección de esta fuerza es opuesta al movimiento de la barra, esto es hacia la izquierda en la figura 31.6a.

Si la barra se mueve con velocidad constante, la fuerza aplicada debe ser igual y en dirección opuesta a la fuerza magnética, es decir, hacia la derecha en la figura 31.6a. Si la fuerza magnética actúa en la dirección del movimiento, ocasionaría que la barra se acelerara, con lo cual su velocidad aumentaría. Este estado de cosas representaría una violación al principio de conservación de la energía. Usando la ecuación 31.6 y el hecho de que  $\mathcal{E} = ICB$ , se encuentra que la potencia disipada por la fuerza aplicada es

$$P = F_{ap} v = (I\ell B)v = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

Esta potencia es igual a la rapidez con la cual la energía se disipa en la resistencia,  $R$ , como era de esperarse. Ésta también es igual a la potencia  $\mathcal{E}I$  suministrada por la fem inducida. Este ejemplo es una clara demostración de la conversión de la energía mecánica en energía eléctrica y finalmente en energía térmica (calentamiento joule).

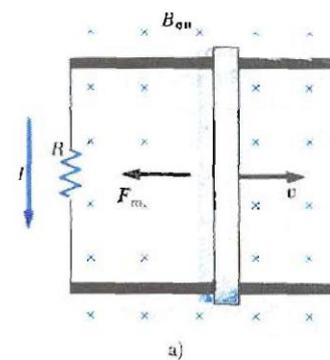
### 4.3 Ley de Lenz

La dirección de la fem inducida y la corriente inducida pueden ser determinadas de la ley de Lenz, la cual puede ser establecida como sigue:

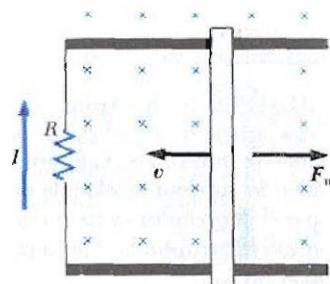
**La polaridad de la fem inducida es tal que ésta tiende a producir una corriente que crea un flujo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético a través del circuito.**

Es decir, la corriente inducida tiende a mantener el (lujo original a través del circuito. La interpretación de este enunciado depende de las circunstancias. Como se verá, esta ley es una consecuencia de la ley de conservación de la energía.

Para comprender mejor la ley de Lenz regrésese a) ejemplo de la barra que se mueve hacia la derecha sobre dos rieles paralelos en presencia de un campo magnético dirigido perpendicularmente hacia dentro del papel (Fig. 31.9a). Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través del circuito aumenta con el tiempo ya que el área de la espira aumenta. La ley de Lenz dice que la corriente inducida debe ser en la dirección tal que el flujo que produzca se oponga al cambio en el flujo magnético externo. Como el flujo debido al campo externo aumenta hacia dentro del papel, la corriente inducida, si ésta se debe oponer al cambio, debe producir un flujo hacia afuera del papel. ¡Por lo tanto, la corriente inducida debe de circular en dirección contraria a las manecillas del reloj cuando



Ja barra se mueva hacia la derecha para dar un flujo hacia afuera del papel en la región interna del circuito. (Utilícese la regla de la mano derecha para verificar esta dirección.) Por otro lado, si la barra se mueve hacia la izquierda, como en la figura 31.9b, el flujo magnético a través del circuito disminuye con el tiempo. Como el flujo está hacia dentro del papel, la corriente inducida tiene que circular en dirección de las manecillas del reloj para producir un flujo hacia dentro del papel en el interior del circuito. En ambos casos, la corriente inducida tiende a mantener el flujo original a través del circuito.

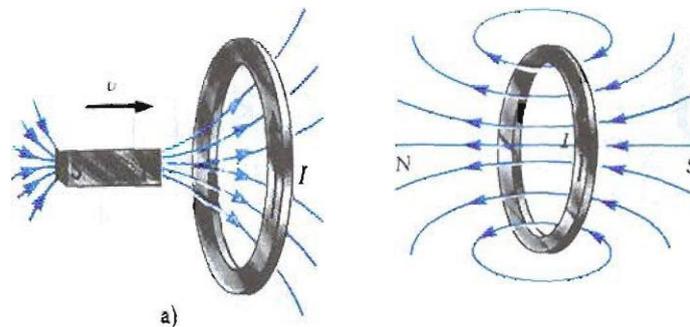


Se verá esta situación desde el punto de vista de consideraciones energéticas. Supóngase que a la barra se le da un ligero empujón hacia la derecha. En el análisis anterior se encontró que este movimiento genera en el circuito una corriente que circulaba en dirección contraria a las manecillas del reloj. Ahora véase qué sucede si se supone que la corriente circula en dirección de las manecillas del reloj. Para una corriente  $I$ , que circula en la dirección de las manecillas del reloj, la dirección de la fuerza magnética sobre una barra que se desliza sería hacia la derecha. Esta fuerza aceleraría a la barra y aumentaría su velocidad. Esto, a su vez, ocasionaría que el área del circuito aumentara más rápido, lo que aumentaría la corriente inducida, con lo cual se incrementaría la fuerza, con lo cual se incrementaría la corriente, con lo cual, . . . En efecto, el sistema adquiriría energía sin necesidad de darle energía. Esto es claramente incongruente con la experiencia y con la ley de la conservación de la energía. Así que se ve uno forzado a concluir que la corriente debe circular en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Considérese otra situación, una en la cual un imán de barra se mueva hacia la derecha introduciéndose en una espira estacionaria, como en la figura 31.10a. Cuando el imán se mueve hacia la derecha introduciéndose en la espira, el flujo magnético a través de la espira aumenta con el tiempo. Para contrarrestar este aumento en el (lujo hacia la

derecha, la corriente inducida produce un flujo hacia la izquierda, como en la figura 31.10b; por lo que la corriente inducida está en la dirección mostrada. Obsérvese que las líneas de campo magnético asociadas con la corriente inducida se oponen al movimiento del imán. Por lo tanto, en la cara izquierda de la espira de corriente está el polo norte y en la cara derecha está el polo sur.

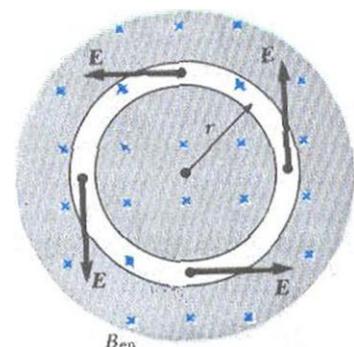
Por otro lado, si el imán se estuviera moviendo hacia la izquierda, su flujo a través de la espira, el cual está hacia la derecha, disminuiría con el tiempo. En estas circunstancias, la corriente inducida en la espira deberá ser en una dirección tal que genere un campo en la espira de izquierda a derecha que permita mantener constante el número de líneas de flujo. Por lo tanto, la corriente inducida en la espira deberá ser opuesta a la mostrada en la figura 31.10b. En este caso, la cara izquierda de la espira sería el polo sur y la cara derecha sería el polo norte.



#### 4.4 Fem inducidas y campos eléctricos.

Se ha visto que un flujo magnético variable induce una fem y una corriente en una espira conductora. Se debe, en consecuencia, concluir que se genera un campo eléctrico en el conductor como resultado del flujo magnético variable. En efecto, la ley de la inducción electromagnética muestra que un campo eléctrico siempre se genera por flujo magnético variable, incluso en el espacio libre donde no existan cargas eléctricas. Sin embargo, el campo eléctrico inducido tiene propiedades que son muy diferentes de aquellas de un campo eléctrico producido por cargas estacionarias.

Este punto se puede mostrar si se considera una espira conductora de radio  $r$  situada en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de la espira, como en la figura 31.13. Si el campo magnético cambia con el tiempo, entonces la ley de Faraday dice que una fem dada por  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$  es inducida en la espira. La corriente inducida que resulta implica la presencia de un campo eléctrico  $E$ , que debe



$$q\mathcal{E} = qE(2\pi r)$$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

ser tangente a la espira puesto que todos los puntos de ella son equivalentes. El trabajo que se realiza para mover una carga de prueba  $q$  una vez alrededor de la espira es igual a  $qS$ . Como la fuerza eléctrica sobre la carga es  $qE$ , el trabajo realizado por esta fuerza para mover la carga una vez alrededor de la espira está dado por  $qE(2\pi r)$ , donde  $2\pi r$  es la circunferencia de la espira. Estas dos expresiones para el trabajo pueden ser igualadas; por lo tanto, se ve que

Utilizando este resultado, la ley de Faraday, y el hecho de que  $\Phi_m = BA - \pi B h \rho k$  para una espira circular, se encuentra que el campo eléctrico inducido puede expresarse como

Si se especifica la variación del campo magnético con el tiempo, entonces se puede calcular fácilmente el campo eléctrico de la ecuación 31.8. El signo negativo indica que el campo eléctrico inducido  $E$  se opone al cambio del campo magnético. Es importante entender que este resultado también es válido en ausencia de conductor. Es decir, una

$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

carga libre colocada en un campo magnético variable también experimentará el mismo campo eléctrico.

La fem para cualquier trayectoria cerrada puede ser expresada como la integral de línea de  $E \cdot ds$  sobre la trayectoria. En casos más generales,  $E$  puede no ser constante y la trayectoria puede no ser un círculo. Por lo que la ley de inducción de Faraday  $\mathcal{E} = -d\Phi_m/dt$  puede escribirse como:

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Es importante reconocer que el campo eléctrico inducido  $E$  que aparece en la ecuación 31.9 no es conservativo, varía con el tiempo y que se genera por la variación de un campo magnético. El campo  $E$  que satisface la ecuación 31.9 no tendría posibilidad de ser un campo electrostático por la siguiente razón. Si el campo fuera electrostático, y por lo tanto conservativo, la integral de línea  $E \cdot ds$  sobre la espira cerrada sería cero, lo que contradice a la ecuación 31.9.

## 4.5 Generadores y motores.

Los generadores y los motores son importantes dispositivos que operan con el principio de la inducción electromagnética. Primero, se tratará el generador de corriente alterna (o generador de AC), un dispositivo que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. En su forma simple, un generador AC consta de una espira de alambre girando por algún medio externo en un campo magnético. En una planta de potencia comercial, la energía requerida para girar la espira puede ser derivada de varias fuentes. Por ejemplo, en una planta hidroeléctrica, la caída de agua dirigida a los alerones de una turbina produce el

movimiento de rotación; en una planta de carbón, el calor producido al quemar el carbón se utiliza para convertir el agua en vapor y éste se dirige nuevamente a los alerones de la turbina. Cuando la espira gira, el flujo magnético a través de ésta cambia con el tiempo, induciendo una fem y una corriente en un circuito externo. Los extremos de la espira se conectan a unos anillos colectores que giran con la espira. Las conexiones al circuito externo se hacen mediante escobillas estacionarias en contacto con los anillos colectores.

Para que la descripción del generador tenga carácter cuantitativo, supóngase que la espira tiene  $N$  vueltas (una situación más práctica), todas de la misma área  $A$ , y supóngase que la espira gira con una velocidad angular constante  $\omega$ . Si  $\theta$  es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano de la espira como en la figura, entonces el flujo magnético a través de la espira en cualquier tiempo  $t$  está dada por

$$\Phi_m = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

donde se ha utilizado la relación entre el desplazamiento angular y la velocidad angular,  $\theta = \omega t$ . (Se ha puesto el reloj de tal forma que  $t = 0$  para  $\theta = 0$ .) Por lo tanto, la fem inducida en el bobina está dada por

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -NAB \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = NAB\omega \sin \omega t$$

Este resultado muestra que la fem varía sinusoidalmente con el tiempo, como la gráfica de la figura 31.15b. De la ecuación 31-10 se ve que la máxima fem tiene un valor lo cual ocurre cuando  $\omega t = 90^\circ$  o  $270^\circ$ . En otras palabras,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$  cuando el campo magnético está en el plano de la bobina y la razón de cambio de flujo con el tiempo es máxima. Además, la fem es cero cuando  $\omega t = 0$  o  $180^\circ$ , es decir, cuando  $B$  es perpendicular al plano de la bobina y la razón de cambio del flujo con el tiempo es cero. La frecuencia para los generadores comerciales en los Estados Unidos y Canadá es de 60 Hz, sin embargo, en algunos países europeos, se utilizan 50 Hz. (Recuérdese que  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la Frecuencia en hertz.)

## 4.6 Autoinductancia.

Considérese un circuito aislado (controlado por un interruptor, una batería y una fem como fuente, como en la figura). Cuando se cierra el interruptor, la corriente no alcanza su valor máximo,  $\mathcal{E}/R$ , instantáneamente. La ley de la inducción electromagnética (ley de Faraday) impide que esto ocurra. Lo que sucede es lo siguiente: al incrementarse la corriente en el tiempo, se genera a través de la espira un flujo magnético que se incrementa en el tiempo. Este aumento en el flujo induce al circuito una fem que se opone al cambio del flujo magnético a través de la espira. Por la ley de Lenz, el campo eléctrico inducido en el alambre tiene sentido opuesto al de la corriente que circula por el circuito, y esta contra

fem produce un incremento gradual en la corriente. Este efecto se llama autoinducción, ya que el finjo variable a través del circuito se produce por el mismo circuito. La fem producida se llama fem autoinducida. Posteriormente, en la sección, se describe un efecto que se le relaciona llamado inducción mutua en el cual se induce en un circuito una fem como resultado de las variaciones del flujo magnético que se producen en otro circuito.

Para dar una descripción cuantitativa de la autoinducción, partiremos de la ley de inducción de Faraday, la cual dice que la fem inducida es igual al negativo de la razón de cambio del flujo magnético en el tiempo. Como el finjo magnético es proporcional al campo magnético, que a su vez es proporcional a la corriente en el circuito, la fem autoinducida siempre será proporcional a la razón de cambio de la corriente en el tiempo. Para una bobina de N espiras muy juntas y de geometría fija (una bobina toroidal o un solenoide ideal) se encuentra que

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

donde L es una constante de proporcionalidad, llamada inductancia del dispositivo, que depende de las características geométricas y físicas del circuito- De esta ecuación, se puede ver que la inductancia de una bobina de N espiras se puede calcular con la ecuación

$$L = \frac{N\Phi_m}{I}$$

donde Se supone que el flujo a través de cada espira es el mismo. Esta ecuación se utilizará para calcular la inductancia de algunas geometrías específicas.

De la ecuación 32.1, también se puede escribir la inductancia como la relación

$$L = - \frac{\mathcal{E}}{dI/dt}$$

Esta ecuación se toma como la definición de la inductancia de cualquier bobina independientemente de su forma, dimensiones o características del materia). Así como la resistencia es una medida de la oposición a la corriente, la inductancia es una medida de la oposición al cambio en la corriente.

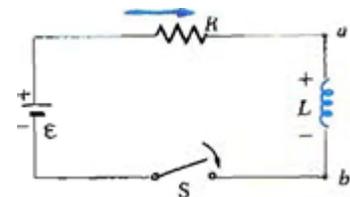
La unidad SI de la inductancia es el henry (H), el cual, de la ecuación 32.3, se puede ver que equivale a 1 volt-segundo por amperio:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

Como se podrá ver, la inductancia de un dispositivo depende únicamente de su geometría. Sin embargo, el cálculo de la inductancia de cualquier dispositivo puede ser muy difícil para geometrías complejas. En los siguientes ejemplos se resuelven algunos casos simples para los cuales la inductancia se determina con facilidad.

## 4.7 Circuitos RL.

Un circuito que contiene una bobina, que puede ser un solenoide, tiene una autoinductancia que impide que la corriente se incremente o decrezca instantáneamente. Todo elemento de un circuito que tenga una inductancia grande se llama inductor. En un circuito, el símbolo para un inductor es . Siempre se supondrá que la autoinductancia de un circuito es despreciable comparada con la del inductor.



Considérese un circuito constituido por una resistencia, un inductor y una batería como se muestra en la figura 32.2. Se considera que la resistencia interna de la batería es despreciable. Supóngase que el interruptor S se cierra en  $t = 0$ . La corriente empezará a crecer, y debido a este aumento, el inductor genera una fem (también se le conoce como contra fem) que se opone al incremento de la corriente. En otras palabras, el inductor actúa como una batería cuya polaridad es opuesta a la de la batería real en el circuito. La contrafem producida por el inductor está dada por

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Ya que la corriente se está incrementando,  $dI/dt$  es positivo; por lo tanto, es negativa. Esto corresponde al hecho de que hay caída de potencial al ir de a hacia b a través del inductor. Por esta razón, el punto a está a un mayor potencial que el punto b, como se muestra en la figura 32.2,

Con esto en mente, se puede aplicar la ecuación de mallas de Kirchhoff a este circuito:

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

donde  $IR$  es la caída de potencial a través de la resistencia. Se debe resolver esta ecuación diferencial y su solución es similar en forma a la de los circuitos RC (Sec. 28.4).

Para obtener la solución matemática de la ecuación 32.6, es conveniente hacer un cambio de variable definiendo  $x = I$ , de tal forma que  $dx = dI$ . Con estas sustituciones, la ecuación 32.6 se puede escribir de la siguiente forma

$$x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} dt$$

Integrando la última expresión se obtiene

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

donde se ha tomado  $-\ln a = \ln \frac{1}{a}$ . Al tomar el antilogaritmo de este resultado, se obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

Como en  $t = 0$ ,  $I = 0$ , se puede ver que  $x_0 = \mathcal{E}/R$ . En consecuencia, la última expresión equivale a

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

que es la solución de la ecuación 32.6.

Esta solución matemática de la ecuación 32.6, que representa la corriente como función del tiempo, también se puede escribir de la siguiente forma:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

donde la constante  $\tau$  es la constante de tiempo del circuito RL:

$$\tau = L/R$$

## 4.8 Energía en un campo magnético.

En la sección anterior se encontró que la fem inducida por un inductor impide a la batería establecer instantáneamente una corriente. Por lo tanto, la batería tiene que realizar un trabajo contra el inductor para generar una corriente. Parte de la energía suministrada por la batería se convierte en calor en la resistencia por el efecto Joule, mientras que la energía restante se almacena en el campo magnético del inductor. Si se multiplica cada término de la ecuación 32.6 por la corriente  $I$  y se ordenan los términos de la expresión, se tiene

$$I\mathcal{E} = I^2R + LI \frac{dI}{dt}$$

Esta ecuación dice que la razón con la cual la batería suministra energía,  $I\mathcal{E}$ , es igual a la suma del calor perdido en la resistencia por efecto Joule,  $I^2R$ , y la razón con la cual se almacena energía en el inductor,  $LI(dI/dt)$ . Por lo tanto, la ecuación 32.12 es una expresión de la conservación de la energía. Si  $U_m$  designa la energía almacenada en el inductor para cualquier tiempo, entonces la razón  $dU_m/dt$  con la cual se almacena energía en el inductor se puede escribir en la forma

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Para encontrar la energía total almacenada en el inductor, se puede escribir esta ecuación como  $dU_m = LI dI$  e integrar:

$$U_m = \int_0^{U_m} dU_m = \int_0^I LI dI$$

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2$$

donde  $L$  es constante y se ha sacado de la integral. La ecuación 32.13 representa la energía almacenada como energía magnética en el campo del inductor cuando la corriente es  $I$ . Nótese que la ecuación es similar en forma a la ecuación de la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor,  $Q^2/2C$ . En cualquier caso, se puede ver que se realiza un trabajo para establecer un campo.

También se puede determinar la energía por unidad de volumen, o densidad de energía, almacenada en un campo magnético. Para facilitar la comprensión, considérese un solenoide cuya inductancia está dada por la ecuación 32.5:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

El campo magnético de un solenoide se obtiene de

$$B = \mu_0 n I$$

Sustituyendo la expresión para  $L$  y  $I = B/\mu_0 n$  en la ecuación 32.13 se tiene

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 A \ell \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} (A \ell)$$

Ya que  $A \ell$  es el volumen del solenoide, la energía almacenada por unidad de volumen en un campo magnético está dada por

$$u_m = \frac{U_m}{A \ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Aunque la ecuación 32.15 se dedujo para el caso específico de un solenoide, ésta es válida para cualquier región del espacio en donde exista un campo magnético. Obsérvese que la ecuación 32.15 es similar en forma a la ecuación de la energía por unidad de volumen almacenada en un campo eléctrico, dado por  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ . En ambos casos, la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo.

## 4.9 Inductancia mutua

Con frecuencia el flujo magnético a través de un circuito varía con el tiempo como consecuencia de las corrientes variables que existen en circuitos cercanos. Esto da origen a una fem inducida mediante un proceso conocido como inducción mutua, llamada así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Consideremos dos bobinas devanadas en forma muy estrecha, como se muestra en la vista de la sección transversal de la figura 32.9. La corriente  $i_1$  en la bobina 1, que tiene  $N_1$  espiras, genera líneas de campo magnético, algunas de ellas atravesarán la bobina 2, que tiene  $N_2$  espiras. El flujo correspondiente a través de la bobina 2 producido por la bobina 1 se representa por  $\Phi_{21}$ . Se define la inductancia mutua  $M_{21}$  de la bobina 2 con respecto a la bobina 1 como la razón de  $\Phi_{21}$  a la corriente

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

$$\Phi_{21} = \frac{M_{21}}{N_2} I_1$$

La inductancia mutua depende de la geometría de los dos circuitos y de sus orientaciones relativas entre sí. Es claro que al incrementarse la separación entre los circuitos, la inductancia mutua decrece ya que el flujo que 'une' a los dos circuitos decrece.

Si la corriente  $I_1$  varía con el tiempo, se puede ver por la ley de Faraday y la ecuación 32.16 que la fem inducida en la bobina 2 por la bobina 1 está dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

De igual forma, si la corriente  $I_2$  varía con el tiempo, la fem inducida en la bobina 1 por la bobina 2 está dada por

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

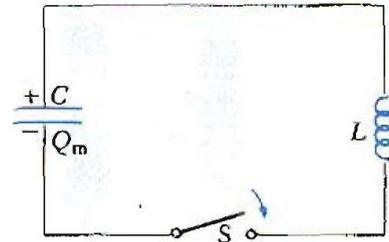
Estos resultados son semejantes en su forma a la expresión de la fem autoinducida  $\mathcal{E} = -L (dI/dt)$ . La fem inducida por inducción mutua en una bobina siempre es proporcional a la razón de cambio de la corriente en la otra bobina. Si las razones con las cuales las corrientes cambian con el tiempo son iguales (esto es, si  $dI_1/dt = dI_2/dt$ ), entonces se encuentra que  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ . Aunque las constantes de proporcionalidad  $M_{12}$  y  $M_{21}$  aparenten ser diferentes, se puede demostrar que son iguales. Entonces haciendo  $M_{12} = M_{21} = M$ , las ecuaciones 32.17 y 32.18 se convierten en

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

La unidad de la inductancia mutua también es el Henry.

## 4.10 Oscilaciones de un circuito LC

Cuando un condensador cargado se conecta en serie con un inductor como se muestra en la figura 32.11 y después se cierra el interruptor, se producirán oscilaciones en la corriente y en la carga del condensador. Si la resistencia del circuito es cero, no existirá disipación de energía por efecto Joule y las oscilaciones continuarán. En esta sección se despreciará la resistencia del circuito.



En el siguiente análisis, se supone que el condensador tiene una carga inicial  $Q_m$  y además el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Es importante hacer una descripción de lo que sucede desde el punto de vista de la conservación de la energía.

Cuando el condensador está completamente cargado, la energía total  $U$  del circuito está almacenada en el campo eléctrico del condensador y es igual a  $Q^2/2C$ . En este instante, la corriente es cero, por lo que no habrá energía almacenada en el inductor. A medida que se va descargando el condensador, la energía almacenada en su campo eléctrico decrece. Al mismo tiempo, la corriente se incrementa almacenándose alguna energía en el campo magnético del inductor. Como se puede ver, la energía se trasfiere del campo eléctrico del condensador al campo magnético del inductor. Cuando el condensador se ha descargado por completo, no almacena más energía. En este momento, la corriente alcanza su valor máximo y toda la energía se ha almacenado en el inductor. El proceso se repite de nuevo pero en la dirección contraria. La energía continúa transfiriéndose entre el inductor y el condensador de forma indefinida y esto corresponde a las oscilaciones de la corriente y la carga.

Una descripción gráfica de la transferencia de energía se muestra en la figura 32.12. El comportamiento del circuito es análogo al de un sistema oscilador compuesto por una masa y un resorte como el estudiado en el capítulo 13. La energía potencial almacenada en el resorte comprimido,  $\frac{1}{2}kx^2$ , es el análogo de la energía potencial almacenada en el condensador,  $Q^2/2C$ . La energía cinética de la masa en movimiento,  $\frac{1}{2}mv^2$ , es el análogo de la energía almacenada en el inductor,  $\frac{1}{2}LI^2$ , que requiere la presencia de cargas en movimiento. En la figura 32.12a, toda la energía está almacenada como energía potencial en el condensador.

## 4.11 Circuitos RLC

Ahora concentremos la atención en un circuito más real, el cual consta de un inductor, un condensador y una resistencia conectados en serie, como se muestra en la

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R$$

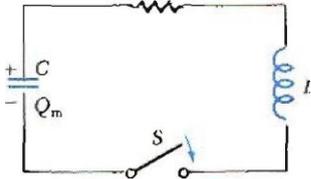
$$LI \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = -I^2R$$


figura 32.16. Supóngase que el condensador tiene una carga inicial  $Q_m$  antes de cerrar el interruptor. Una vez que éste se cierra, se establece una corriente, la energía total almacenada en el circuito en cualquier instante está dada por la ecuación 32.20. Esto es, la energía almacenada en el condensador es  $Q^2/2C$ , y la energía almacenada en los inductores  $\frac{1}{2}LI^2$ . Sin embargo, la energía total ya no es constante, como en el circuito LC, debido a la presencia de la resistencia, el cual disipa energía en forma de calor. Como la razón de energía disipada a través de la resistencia es  $I^2R$ , se tiene donde el signo negativo significa que  $U$  decrece con el tiempo instituyendo este resultado en la derivada respecto al tiempo de la ecuación 32.20 da

Utilizando el hecho de que  $I = dQ/dt$  y  $dI/dt = d^2Q/dt^2$  y dividiendo la ecuación 32.32 por  $I$ , se obtiene

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

## Bibliografía

Electricidad y magnetismo	Raymond A. Serway	McGraw-Hill
Electricidad y magnetismo	Edward M. Purcell	Reverté S. A.
Electricidad y magnetismo	Francisco Gascón Latasa	Pearson

TITULO	LINK	AUTOR
Ley de Coulomb	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=UgRJEdb-Col">https://www.youtube.com/watch?v=UgRJEdb-Col</a>	YouTube
Ley de Gauss	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=3aWFJdqM_Rw">https://www.youtube.com/watch?v=3aWFJdqM_Rw</a>	YouTube
Inducción Electromagnética	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=andu3xbSKyM">https://www.youtube.com/watch?v=andu3xbSKyM</a>	YouTube