UDS

Mi Universidad

LIBRO

Nombre de la materia: *Análisis de sistemas y señales*

Nombre de la Licenciatura: *Ingeniería en sistemas computacionales*

Cuatrimestre: *Cuarto*

Periodo: Septiembre-Diciembre

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Objetivo de la asignatura

Aprender los fundamentos matemáticos que permiten analizar señales y sistemas lineales en los diversos campos de la Ingeniería Eléctrica, mediante diversas técnicas del dominio del tiempo y de la frecuencia.

UNIDAD I

SEÑALES CONTINUAS, DISCRETAS Y DIGITALES

1.1.- Clasificación de señales.
1.2.- Operaciones y transformaciones de las señales.
1.2.1.- Suma y producto de señales.
1.2.2.- Integral y derivada de una señal continúa.
1.2.3.- Sumatoria y diferencia hacia delante y hacia atrás de una señal discreta.
1.2.4.- Escalamiento en la amplitud y en el tiempo.
1.2.5.- Desplazamiento o traslación en el tiempo.
1.2.6.- Trasposición.
1.3.- Señales fundamentales de tiempo continuo y discreto.
1.4.- Sistemas continuos y discretos.
1.5.- Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLI) de sistemas lineales e invariantes.
1.6.- Respuesta de entrada cero (libre) y respuesta de estado cero (forzada).
1.7.- Respuesta transitoria y respuesta permanente.
1.8.- Suma/Integral de convolución.
1.9.- Análisis de sistemas y señales (3/ 6).
1.9.1.- Sistemas discretos de respuesta al impulso de duración finita y de duración infinita.
1.9.2.- La estabilidad entrada/salida en términos de la respuesta al impulso.

UNIDAD II

ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES (SLI), CONTINUOS Y DISCRETOS, MEDIANTE LAS TRANSFORMACIONES DE LAPLACE Y Z

2.1.- Forma general de la ecuación diferencial lineal.
2.2.- La transformada de Laplace: propiedades y transformadas comunes.
2.3.- Función de transferencia de sistemas de tiempo continúo.
2.4.- Forma general de la ecuación en diferencias lineal.
2.5.- Solución de las ecuaciones en diferencias mediante la recurrencia.
2.6.- La transformada Z: propiedades y transformadas comunes.
2.7.- Función de transferencia de sistemas de tiempo discreto.
2.8.- Análisis y solución de sistemas continuos y discretos en el dominio de la frecuencia.
2.9.- La condición de crominancia.
2.10.- Analogía entre vectores y funciones del tiempo.

2.11.- La serie compleja o exponencial de Fourier de señales periódicas continuas.
2.11.1.- Condiciones de simetría.
2.11.2.- El espectro discreto de potencia y la relación de Parseval.
2.11.3.- Convergencia de la serie de Fourier y condiciones de Dirichlet.
2.11.4.- La serie trigonométrica de Fourier (STF).
2.12.- La serie de Fourier de señales periódicas discretas.
2.12.1.- El espectro discreto de frecuencias y la relación de Parseval.

UNIDAD III

LA INTEGRAL DE FOURIER (TF) Y SUS APLICACIONES

3.1.- De la serie de Fourier a la integral de Fourier.
3.1.1.- El espectro continúo.
3.1.2.- Relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.
3.2.- Propiedades y transformadas comunes.
3.2.1.- Propiedad de modulación.
3.2.2.- Propiedad de convolución.
3.3.- La transformada de Fourier de señales periódicas continúas.
3.4.- Respuesta de SCLI a entradas exponenciales complejas y senoidales: respuesta en frecuencia.
3.5.- Fundamentos de muestreo y reconstrucción de señales.

UNIDAD IV

INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO (TFTD)

4.1- La transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD).
4.2.- Relación de la TFTD con la transformada Z.
4.3.- Representación de señales de duración finita.

INDICE

UNIDAD I: SEÑALES CONTINUAS, DISCRETAS Y DIGITALES

Objetivo: Identificar las características más significativas de las señales continuas, discretas y digitales dentro del proceso sistemático.

1.1 CLASIFICACION DE SEÑALES

Señales analógicas

Es un tipo de señal generada por algún tipo de fenómeno electromagnético y que es representable por una función matemática continúa en la que es variable su amplitud y periodo en función del tiempo.

En pocas palabras es una forma de onda continua que pasa a través de un medio de comunicación y se utiliza para comunicarse mediante la voz.

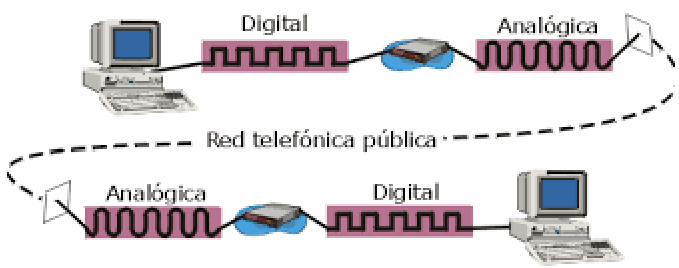
Ejemplos

- Altavoz
- Micrófono
- Volumen
- Frecuencia de sonido

Señales digitales: Es un tipo de señal generada por algún tipo de fenómeno electromagnético en que cada signo que codifica el contenido de la misma puede ser analizado en término de algunas magnitudes que representan valores discretos, en lugar de valores dentro de un cierto rango.

Ejemplos

- pulsos del teléfono.
- Señal de resistencia eléctrica muy pequeña (0)
- señal de resistencia eléctrica muy grande (1)
- PC que se basan en sistema binario (1,0).

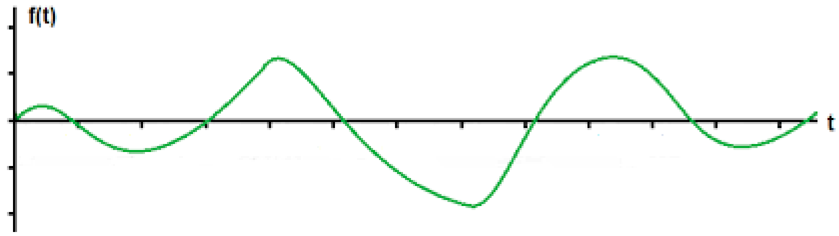


Comunicación a través de módems

Señales eléctricas: Es un tipo de señal generada por algún fenómeno electromagnético, estas señales pueden ser analógicas, si varían de forma continua en el tiempo, o digitales si varían de forma discreta (con valores dados como 0 y 1.

En la mayoría de los casos, las señales (tensiones o corrientes) aplicadas a los circuitos eléctricos pueden encuadrarse dentro de una de las siguientes categorías:

Señales continuas (DC): Se trata de señales de valor medio no nulo con una frecuencia de variación muy lenta, por lo que se pueden considerar como constantes en el tiempo.



Señales alternas (AC): Son señales que cambian de signo periódicamente, de tal forma que su valor medio en una oscilación completa es nulo. El caso más simple es el de una señal sinusoidal.

Señales alternas superpuestas a un valor continuo: Obviamente, se trata de una superposición de los dos casos anteriores. Al valor medio de la señal se le llama componente continua, mientras que la oscilación recibe el nombre de componente de alterna.

Ejemplos

- Baterías.
- Pilas.
- Fuentes de DC.
- Fuentes de PC

Señales ópticas: La comunicación óptica es cualquier forma de comunicación que utiliza la luz, señas, gestos, etc. como medio de transmisión.

Ejemplos

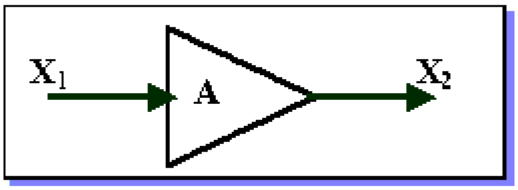
- Las señales de humo
- Banderas de colores
- El reflejo del sol por medio de un espejo
- El código Morse
- Faros marinos

1.2 Operación y transformación de señales
1.2.1 Suma y producto de señales

Escalamiento en Magnitud

Equivale a multiplicar la señal por una constante real.

En la práctica se pueden presentar cuatro casos:



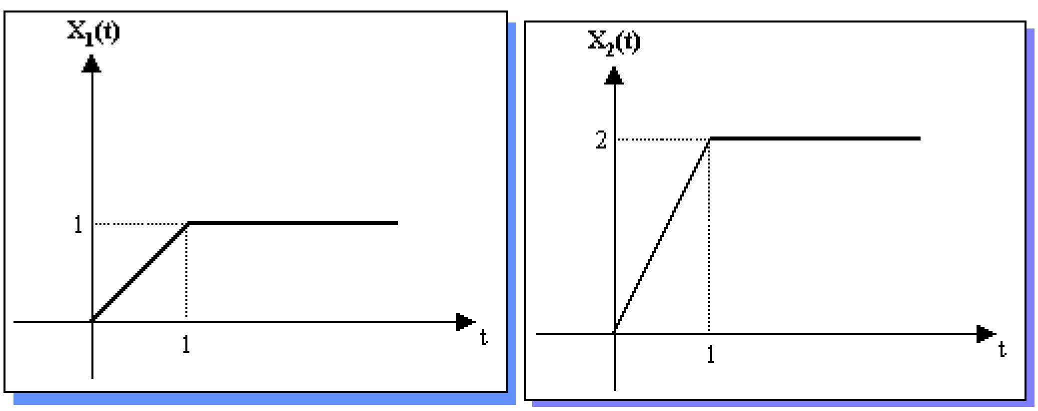
A > 1: Amplificador.

A < 1: Atenuador.

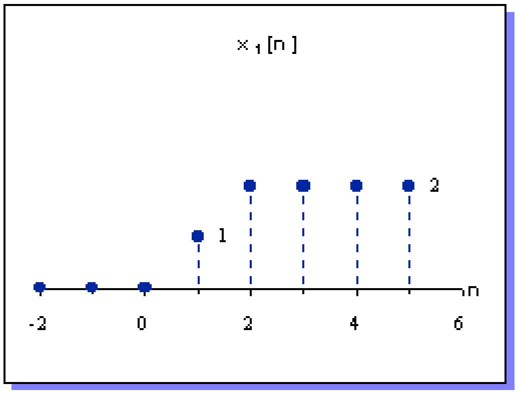
A = 1: Aislador.

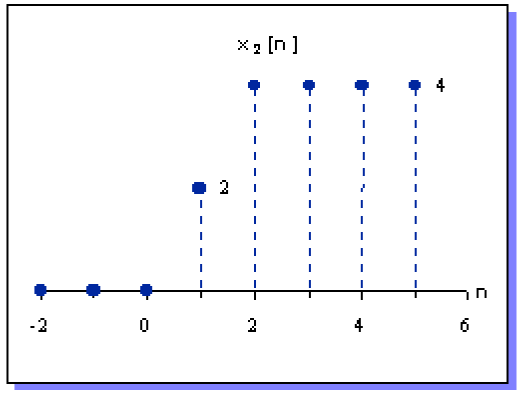
A = -1: Inversor.

Ejemplo: $x_2(t) = 2\ x_1(t)$



Ejemplo: $x_2[n] = 2\ x_1[n]$





Reflexión

Se consigue mediante un cambio de signo en la variable independiente.

Gráficamente equivale a una reflexión sobre el eje vertical (t = 0; n = 0).

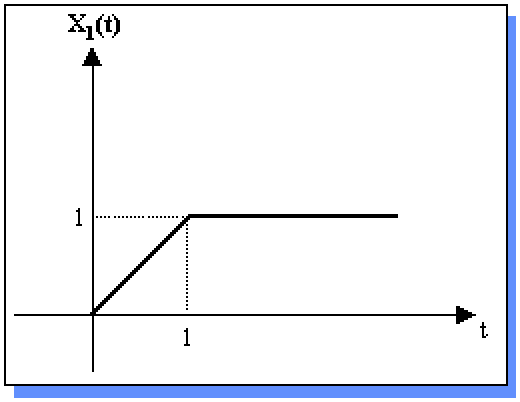
Un ejemplo práctico de la operación (reflexión) sería: Si x (t) es una señal de audio en una grabadora de cinta, x (-t) sería la misma grabación, pero reproducida en sentido contrario (a la misma velocidad).

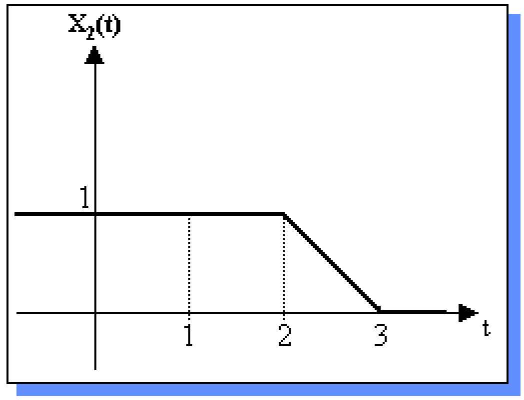
Cuando se tiene la operación de reflexión acompañada de un desplazamiento se debe reflejar la señal y luego se debe desplazar. Estas operaciones no son conmutativas entre sí. Esto es:

$$X(-t+t_0) = X(-(t-t_0))$$

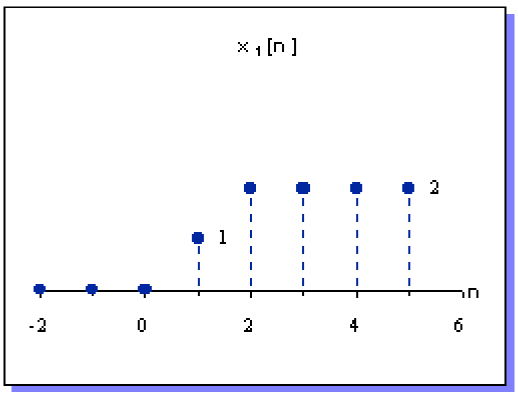
$$X(t) \xRightarrow[]{\text{Reflexión}\; t=-t} X(-t) \xRightarrow[]{\text{Desplazamiento}\; t=t-t_0} X(-(t-t_0))$$

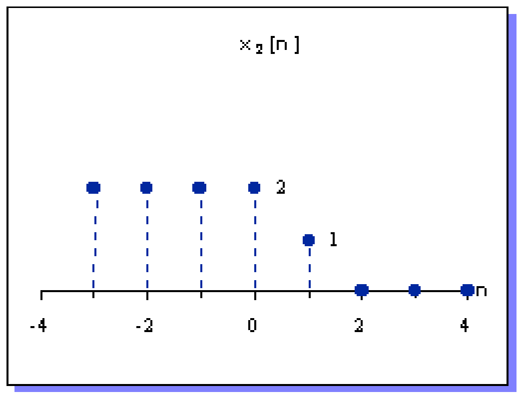
Ejemplo: $x_2(t) = x_1(3 - t)$





Ejemplo: $x_2[n] = x_1[2 - n]$





Convolución de Señales

Esta operación es muy usada en comunicaciones, análisis armónico, etc., permitiendo encontrar fácilmente muchos resultados importantes.

La integral del lado derecho, es decir la integral de convolución, la, podemos interpretar como el área bajo la curva resultante del producto entre x (τ) y h (t - τ).

Para esta integral, se han realizado los siguientes cambios de variable: Para x (t) se hace el cambio de variable independiente, t = τ .

Para h (t) se hace el cambio de variable independiente, t = τ , además se refleja y se desplaza la señal t unidades.

El cálculo de la integral se puede realizar de dos maneras, analíticamente (resolviendo las integrales planteadas) o gráficamente (calculando las áreas respectivas a partir de los gráficos realizados para las señales).

La convolución con δ (t) se calcula valiéndose de la propiedad de separación de la función δ (t), que permite escribir la función x (t) como la suma de infinitos pulso pesados:

$$y(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(\tau)$$

Además, se puede verificar que:

f (t) ¤ δ (t - T) = f (t - T).

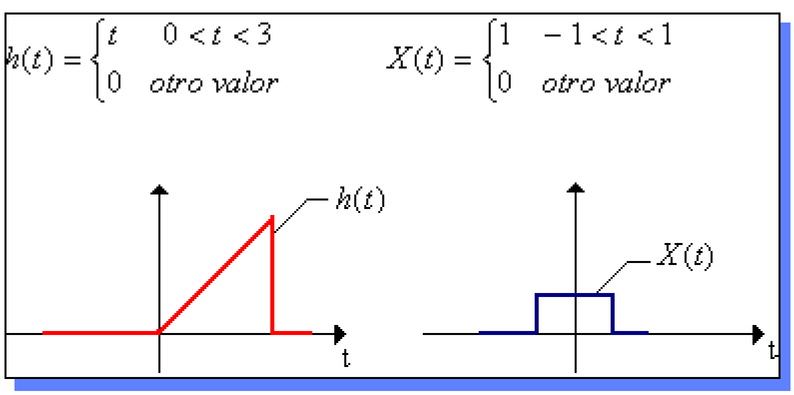
f (t - T_1) ¤ δ (t - T_2) = f (t - T_1 - T_2).

δ (t - T_1) ¤ δ (t - T_2) = δ (t - T_1 - T_2).

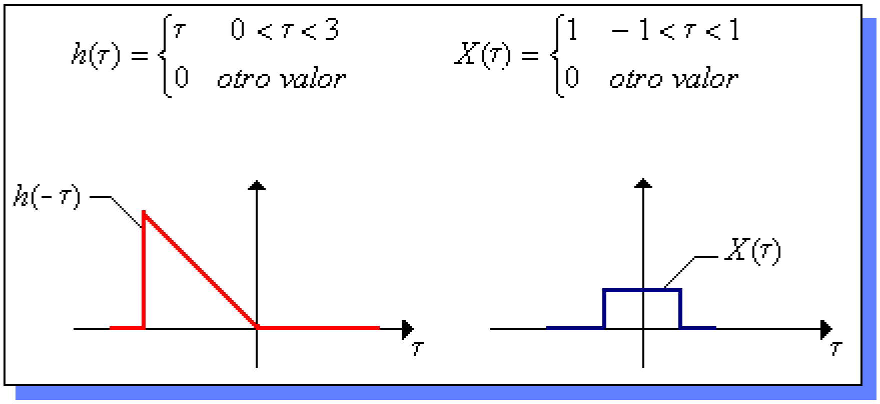
f (t) ¤ [δ (t + T) + δ (t - T) = f (t + T) + f (t - T).

Ejemplo de cálculo:

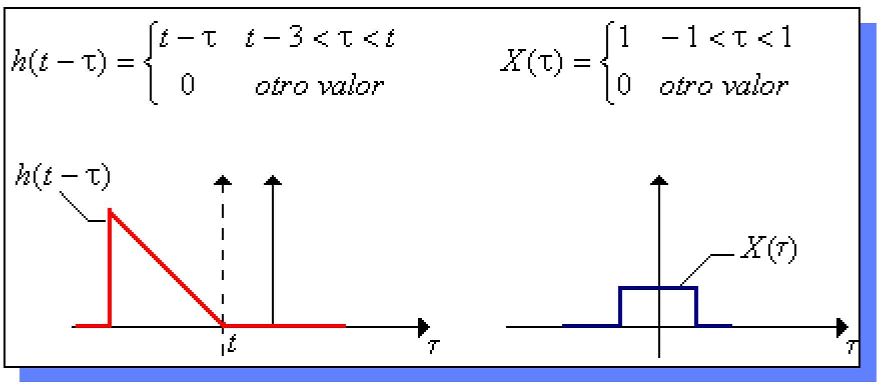
Primero se grafican las señales x (t) y h (t):



Se cambia la variable t por τ y se refleja h (t):

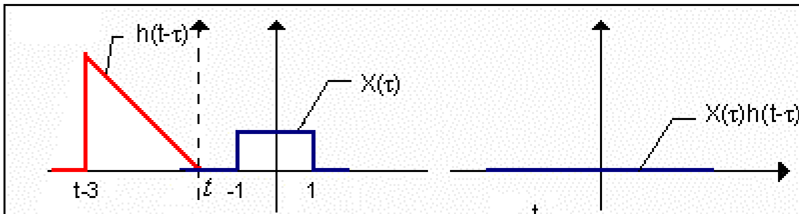


Ahora se desplaza h (- τ), t unidades, consiguiendo h (t - τ), o lo que es lo mismo h (- (τ - t)):



Luego se deben tomar en cuenta los diferentes intervalos de t para los cuales cambia la expresión de x (t) · h (t - τ), resolviendo la integral de convolución para cada intervalo.

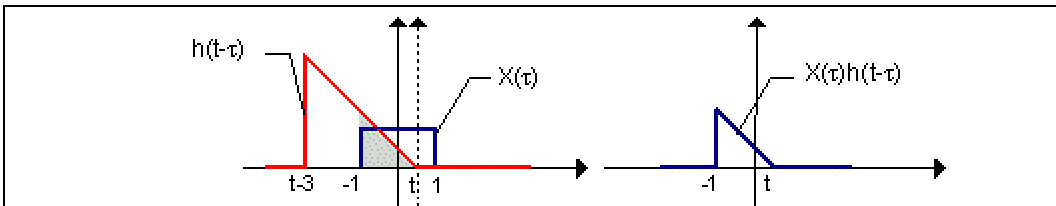
El primer intervalo a considerar sería - ∞< t < -1, en el cual se tiene, para cualquier valor de t:



$$X(\tau)h(t-\tau)=0 \qquad Y(t)=X(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t} X(\tau)h(t-\tau)d\tau=0$$

$$Y(t)=0 \qquad -\infty<t<-1$$

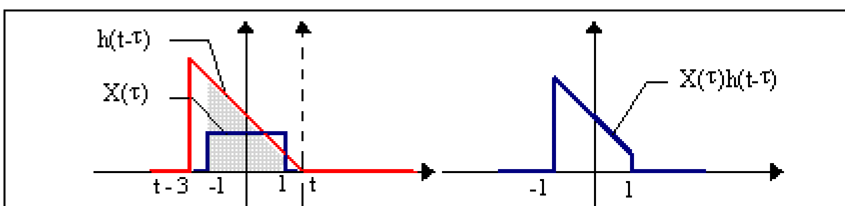
El segundo intervalo a considerar sería - 1 < t < 1, en el cual se tiene, para cualquier valor de t:



$$X(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} t-\tau & -1<\tau<t \\ 0 & otro\ valor \end{cases} \qquad Y(t)=X(t)*h(t)=\int_{-1}^{t}(t-\tau)d\tau=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$$

$$Y(t)=\frac{(t+1)^2}{2} \qquad -1<t<1$$

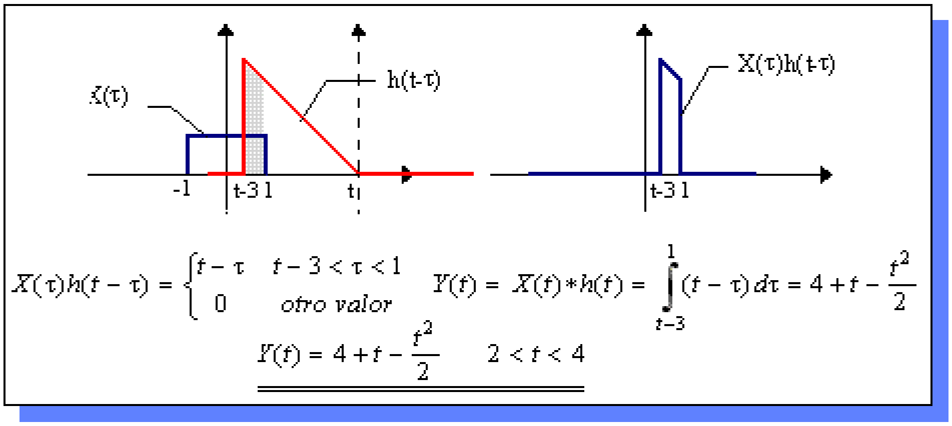
El siguiente intervalo a considerar sería 1 < t < 2, en donde:



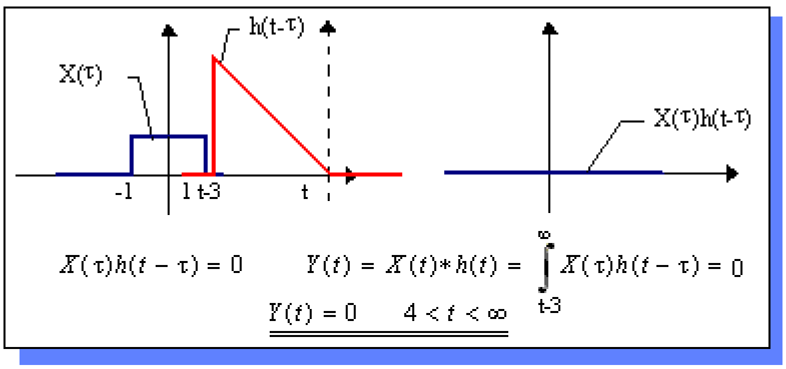
$$X(\tau)h(t-\tau)=\begin{cases} t-\tau & -1<\tau<1 \\ 0 & otro\ valor \end{cases} \qquad Y(t)=X(t)*h(t)=\int_{-1}^{1}(t-\tau)d\tau=2t$$

$$Y(t)=2t \qquad 1<t<2$$

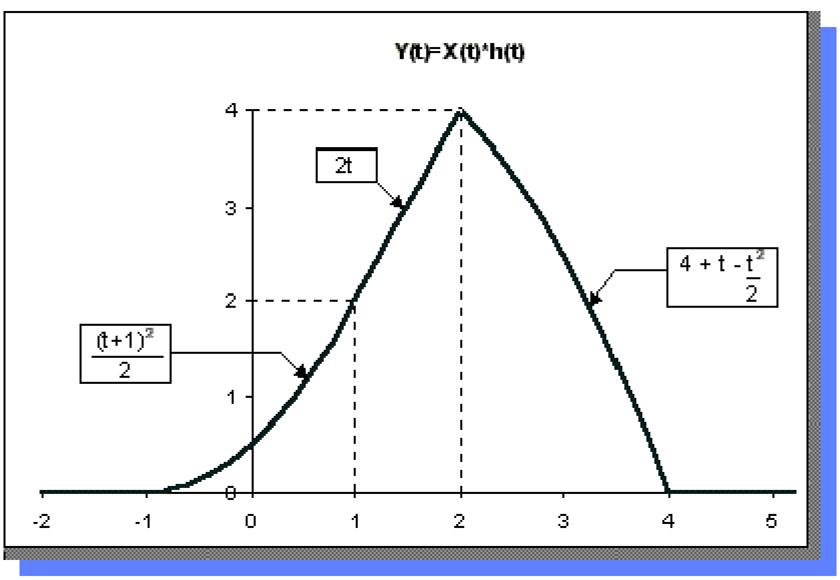
El cuarto intervalo a considerar sería 2 < t < 4, en el cual, para cualquier valor de t:



El último intervalo a considerar sería 4< t <∞, en el cual se obtiene para cualquier valor de t:



Finalmente, resumiendo el resultado de x (t) ¤ h (t) en un gráfico, se obtiene:



1.2.2 Integral y derivada de una señal continúa

Derivación de Señales

Esta operación, muy usada en el modelado de sistemas, la podemos interpretar como la velocidad de cambio de la señal. Gráficamente representa su pendiente.

Para el modelado de muchos sistemas se usan ecuaciones diferenciales, definidas como:

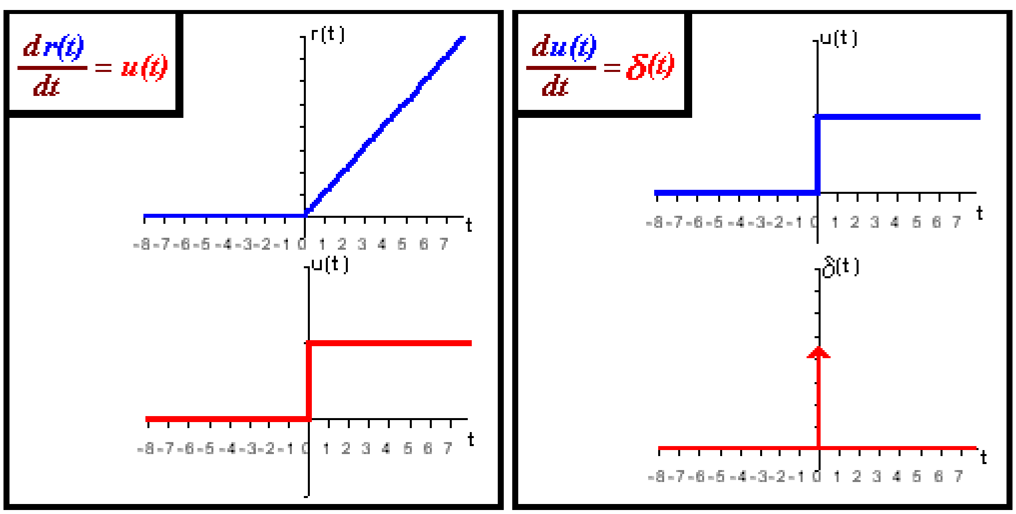
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Algunos ejemplos de su utilización serían:

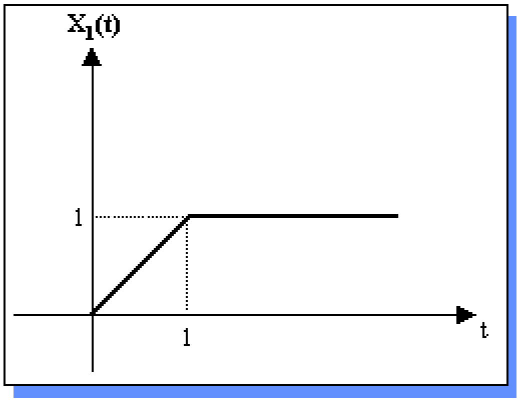
Respuesta de un circuito RC.

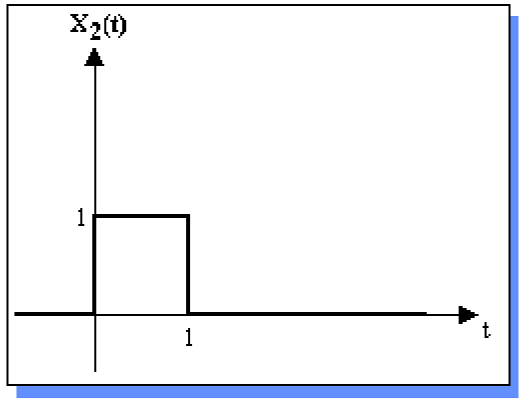
Movimiento de un vehículo sujeto a entradas de aceleración y fuerzas de fricción.

A partir de una expresión para x(t) en función de señales elementales se puede obtener su derivada mediante el uso de las siguientes relaciones:



Ejemplo: $x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$





$x_1(t) = r(t) - r(t-1)$ $\qquad$ $x_2(t) = u(t) - u(t-1)$

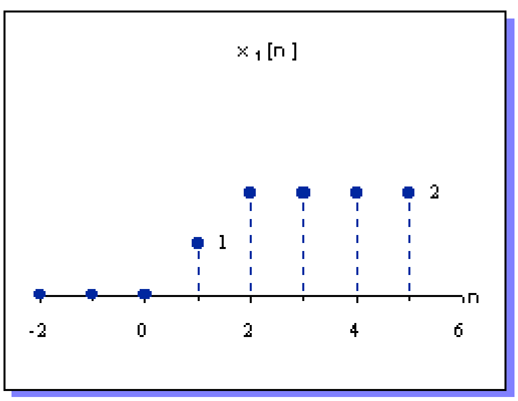
En el caso de los sistemas discretos estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de diferencias, definidas como:

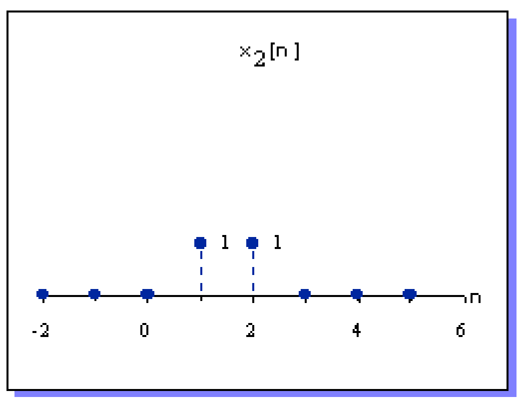
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Igualmente, las señales elementales discretas están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones de diferencias:

$u[n] = r[n] - r[n-1]$ $\quad$ $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

Ejemplo: $\mathbf{x_2[n] = x_1[n] - x_1[n-1]}$

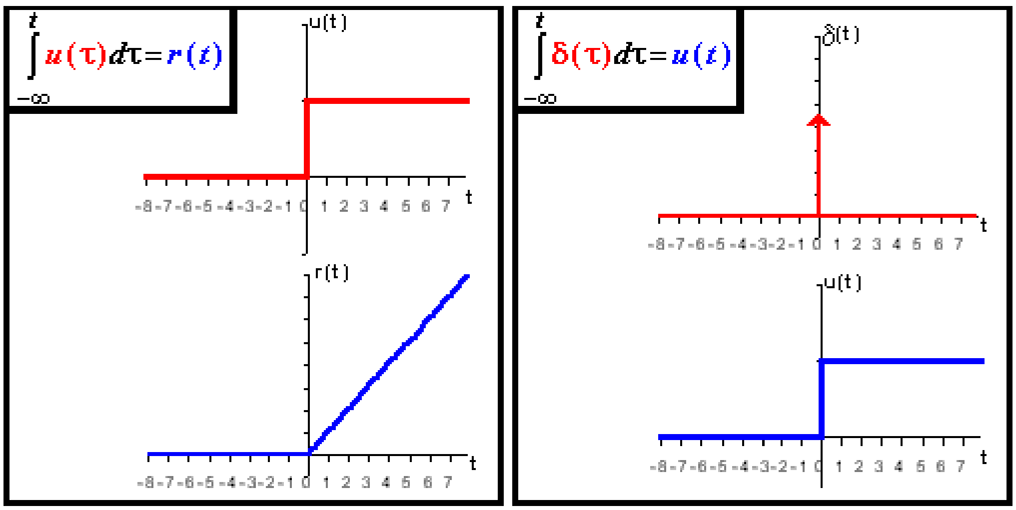




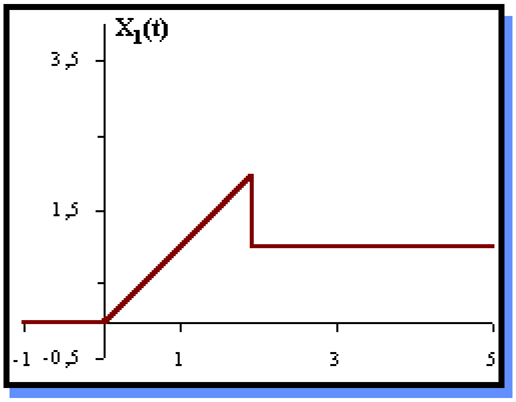
Integración de Señales

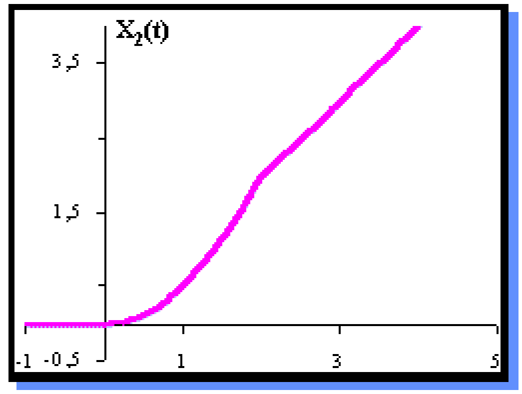
Operación muy usada en comunicaciones, análisis espectral, etc., representando gráficamente el área acumulada bajo la curva que define la señal.

Las señales fundamentales, rampa y escalón, están relacionadas por medio de las siguientes integrales:



Ejemplo: $x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau$





$$x_1(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t<0\\ t & 0<t<2\\ 1 & 2<t<\infty\end{cases}\qquad x_2(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t<0\\ \dfrac{t^2}{2} & 0<t<2\\ t & 2<t<\infty\end{cases}$$

Para las señales discretas, la integración no es más que una sumatoria:

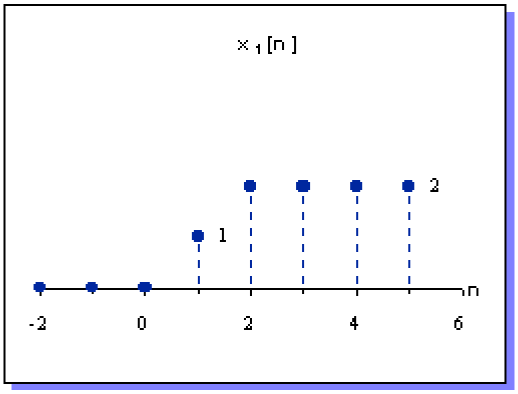
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

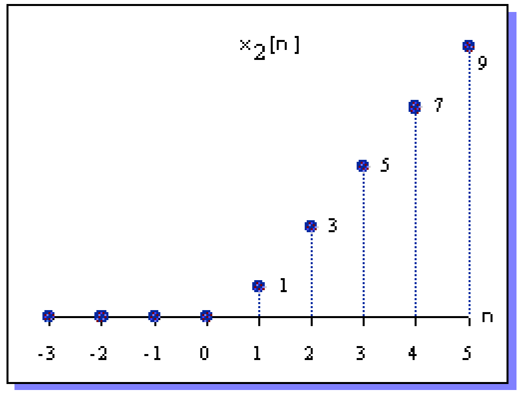
Igualmente, las señales elementales discretas están relacionadas mediante las siguientes sumatorias:

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]\qquad r[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k]$$

Ejemplo:

$$x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]$$





1.2.3 Sumatoria y diferencia hacia adelante y hacia atrás de una señal discreta.

Desplazamiento

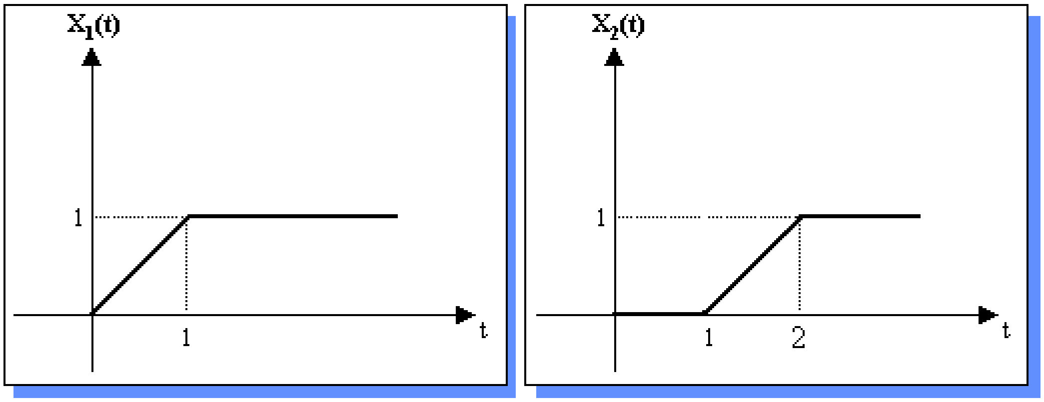
- Equivale físicamente a adelantar o atrasar la señal.
- Gráficamente equivale a desplazar la señal hacia la izquierda (adelanto) o hacia la derecha (atraso).
- El adelanto de una señal no es posible físicamente, pero es muy útil su consideración en el análisis de señales.
- Este tipo de relaciones entre señales se presenta en aplicaciones como:

El sonar, el procesamiento de señales sísmicas y el radar, en las cuales una diferencia en el tiempo de propagación de las señales entre un emisor y varios receptores resulta en un corrimiento en tiempo entre señales medidas en los diferentes receptores.

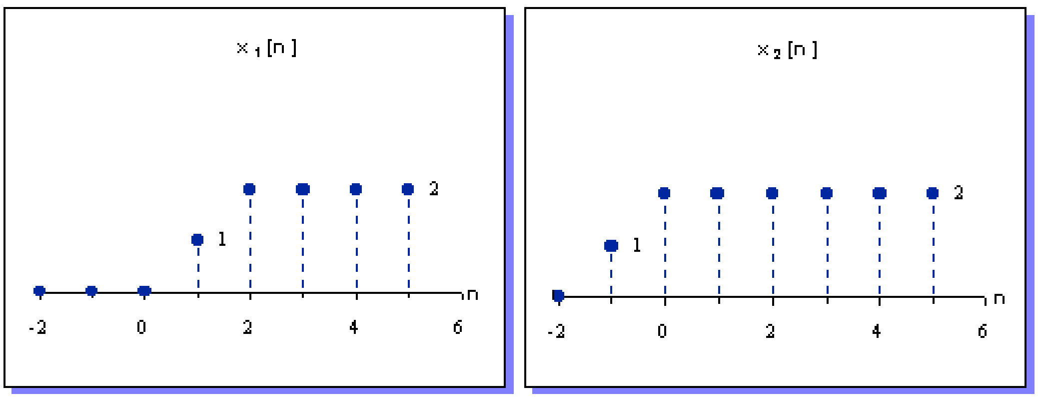
En la práctica se pueden presentar dos casos:

T0 > 0: Adelanto T0 < 0: Atraso

Ejemplo: $x_2(t) = x_1(t - 1)$



Ejemplo: $x_2[n] = x_1[n + 2]$



1.2.4 Escalamiento en la amplitud y en el tiempo.

Escalamiento en Tiempo

Se consigue mediante un escalamiento lineal de la variable independiente.

Gráficamente equivale a ensanchar (a < 1) o encoger (a > 1) la señal.

Si se trata de una señal discreta, esta operación originará la aparición de nuevas muestras iguales a cero (a < 1) o la desaparición de algunas muestras (a > 1), debido a que la variable independiente "n" solo puede tomar valores enteros.

Un ejemplo práctico de la operación (escalamiento en tiempo) sería: Si x(t) es una señal de audio en una grabadora de cinta, x (2 t) sería la misma grabación, pero reproducida al doble de la velocidad) y x (½ t) reproducida a la mitad de la velocidad.

Cuando se tiene la operación de escalamiento en tiempo acompañada de un desplazamiento, primero se debe escalar la señal y luego se debe desplazar. Estas operaciones tampoco son conmutativas entre sí.

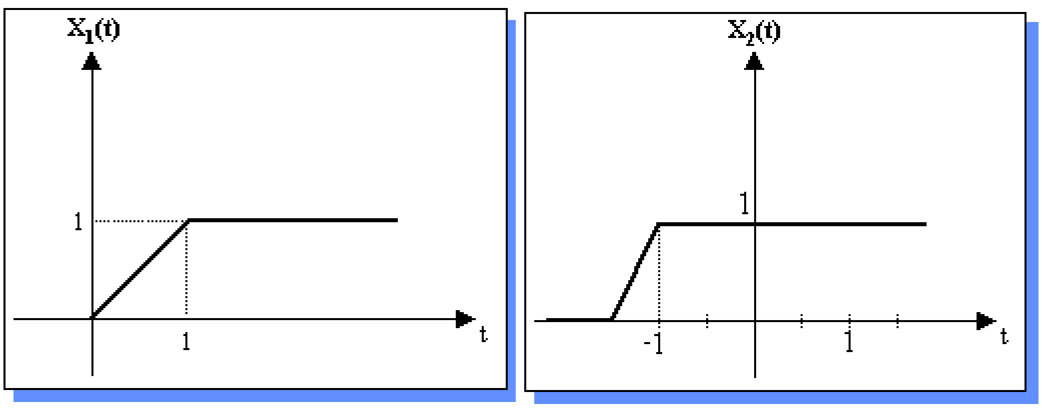
Cuando se desee escalar en tiempo y desplazar una señal, se debe proceder de la siguiente manera.

$$X(at - t_0) = X(a(t - t_0/a))$$

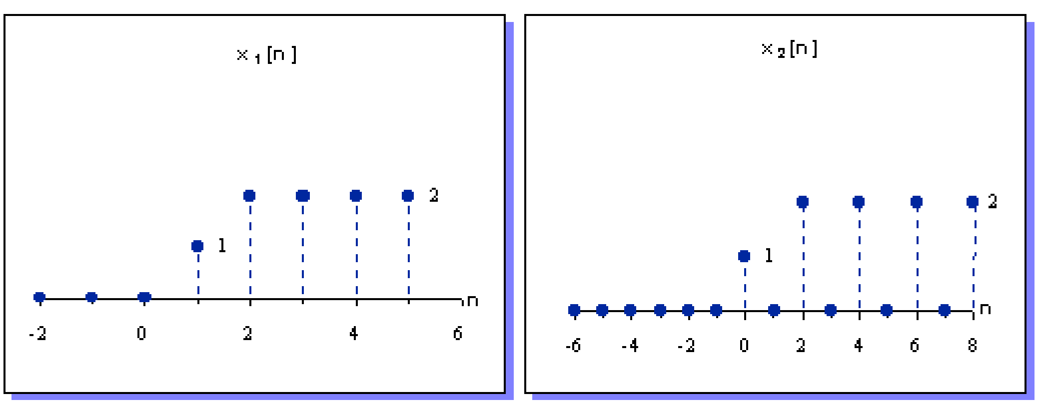
Desplazamiento

$$X(t) \xrightarrow{t = at} X(at) \xrightarrow{t = t - t_0/a} X(a(t - t_0/a))$$

Ejemplo: $x_2(t) = x_1(2t + 3)$



Ejemplo: $x_2[n] = x_1[½ n + 1]$

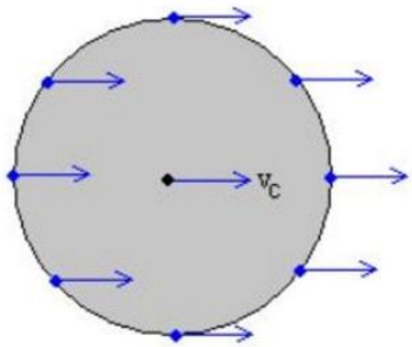


1.2.5 Desplazamiento o traslación en el tiempo.

Movimiento de traslación

Todos los puntos del sólido se mueven en trayectorias paralelas. La velocidad de un punto del sólido es la misma que la velocidad del centro de masas.

Gráficamente se representa de la siguiente manera:



Traslación

Movimiento de traslación pura

Se presenta un movimiento de traslación pura cuando el cuerpo cambia de posición sin cambiar su orientación, es decir, todos los puntos del cuerpo sufren el mismo desplazamiento a medida que transcurre el tiempo. De acuerdo con la figura, la partícula A y el centro de masa C.M., han tenido el mismo desplazamiento; esta es la razón por la cual, cuando se analiza el movimiento de traslación, es suficiente considerar el movimiento del centro de masa del cuerpo. Es posible demostrar que el centro de masa, en lo que a traslación se refiere, se comporta como si toda la masa estuviera concentrada en dicho punto y como si todas las fuerzas externas actuaran sobre él.

Ejemplo:

Calcule la magnitud del de la cantidad de movimiento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula, si la manecilla tiene una longitud de 15,0 cm y una masa de 6,00 g. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor del extremo.

Solución

El periodo de un segundero es un minuto, por lo que el momento angular es igual a:

$$L = I\omega = \frac{M}{3} l^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$= \left(\frac{6,0 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{3} \right) (15,0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 \frac{2\pi}{60,0\ \text{s}} = 4,71 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

1.2.6 Transposición.

Una de las dificultades que presenta la síntesis de controladores por transposición es la selección del método de transposición adecuado en cada caso. El objetivo de la transposición es el de determinar un controlador digital para el cual el comportamiento del control digital se aproxime lo más posible al comportamiento del control analógico. Es imposible obtener un comportamiento idéntico debido al efecto del muestreo y de la cuantificación. El control digital obtenido será en el mejor de los casos equivalente al control analógico, pero en ningún caso mejor.

Existen varias técnicas de transposición bien conocidas. Cada una de ellas presenta sus ventajas e inconvenientes y por tanto se adaptan más o menos a cada problema en particular, ninguna de ellas puede considerarse mejor que las otras de forma general. Podemos citar entre los métodos existentes a los siguientes:

- Transposición por muestreo — bloqueo de orden cero.
- Transposición por aproximación bilineal.
- Transposición por aproximación de Euler.
- Transposición por conservación de polos y ceros.
- Transposición por muestreo — bloqueo de orden uno (argumento ’foh’ de la función c2d de Matlab).

Transposición por muestreo — bloqueo de orden cero

Este método de transposición consiste simplemente en reemplazar el controlador continuo por un sistema digital compuesto de un controlador continuo al cual precede un muestreo y un bloqueo de orden cero. La función de transferencia del controlador digital equivalente se obtiene calculando la transformada en Z del controlador analógico precedido de un bloqueo de orden cero (con Matlab función**:** Cz = c2d (C, Te,'zoh')).

Algunas propiedades de la Transposición por muestreo — bloqueo de orden cero son:

- Los polos del controlador C (z) se ubican en z=e TePi donde Pi son los polos del controlador analógico C(s). Se dice que se conservan los polos.
- Si el controlador C(s) es estable, entonces el controlador C (z) obtenido también será estable. Se debe sin embargo tener presente que no existe ninguna garantía en cuanto al sistema en lazo cerrado.
- Los ceros del controlador no se conservan. Si C(s) no posee ceros, entonces C (z) puede presentar ceros o viceversa.
- La ganancia estática del controlador se conserva.

Con este método de transposición la salida del controlador digital es igual a la salida del controlador analógico en los instantes de muestreo, y este valor se mantiene durante todo el período de muestreo. La salida digital presentará siempre un retraso respecto a la señal analógica.

Transposición por aproximación bilineal

La transposición por muestreo — bloqueo de orden cero es con frecuencia muy brusca. Se requiere por lo tanto de algunos métodos más complejos, con frecuencia basados en aproximaciones de las ecuaciones diferenciales que rigen los sistemas continuos. El método de transposición por aproximación bilineal se basa en la aproximación de la integración de funciones con el método de los trapecios.

Si denotamos a $I(t)$ como la integral de la señal $x(t)$. Con esta aproximación tendremos lo siguiente:

$$I(kT_e) = I((k-1)T_e) + \frac{T_e}{2}(x(kT_e) + x((k-1)T_e))$$

Utilizando la transformada en Z, obtenemos:

$$I(z) = \frac{Te}{2}\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}X(z)$$

Sabiendo que para los sistemas continuos la integración es equivalente a una multiplicación por $1/s$ en el dominio de la frecuencia, se quiere hacer una aproximación de $1/s$ con la función de transferencia digital: $\frac{Te}{2}\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}$. Esto es equivalente a hacer el cambio de variable:

$$s \rightarrow \frac{2}{Te}\frac{(z-1)}{(z+1)}$$

En la función de transferencia a transponer o lo que es equivalente imponer la igualdad $z = \frac{2+Tes}{2-Tes}$.

Efecto en dominio de la frecuencia.

A diferencia de la transposición por muestreo — bloqueo de orden cero, la transformación bilineal no introduce retraso. El comportamiento de la fase será mejor en términos globales. En cuanto a la amplitud, se observa que el filtrado introduce una distorsión muy importante para frecuencias cercanas a la frecuencia de Nyquist.

Efecto sobre un control integral o derivativo.

La amplificación de las frecuencias cercanas a la frecuencia de Nyquist conduce a la amplificación de los ruidos a alta frecuencia, lo que no es para nada deseable, y menos aún para una acción de control derivativa. Por el contrario, el efecto sobre el integrador es beneficioso, debido a que las frecuencias altas se atenúan.

Corrección de la distorsión.

Para corregir la distorsión que introduce la aproximación bilineal, se puede añadir un término de deformación previa "prewarping", el cual permite corregir la distorsión para una frecuencia específica w0. Para ello modificamos el cambio de variable como sigue:

$$s \rightarrow \frac{\frac{\omega_0 T_e}{2}}{\tan\frac{\omega_0 T_e}{2}} \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

El comportamiento del controlador digital se vuelve en este caso casi idéntico al del controlador analógico, pero solo a la frecuencia específica w0.

1.3 Señales fundamentales de tiempo continuo y discreto.

Una señal continua o una señal continua en el tiempo es una variable cantidad (una señal), cuyo dominio, que es a menudo el tiempo, es un proceso continuo (por ejemplo, un conectado intervalo de los números reales). Es decir, el dominio de la función es un conjunto no numerable. La función en sí no tiene que ser continua. Para el contrario, un tiempo discreto de

En muchas disciplinas, la convención es que una señal continua debe tener siempre un valor finito, lo que hace más sentido en el caso de señales físicas.

Cualquier señal analógica es continua por la naturaleza. Señales de tiempo discreto, que se utilizan en el procesamiento de señal digital, pueden ser obtenidas por muestreo y cuantificación de señales continuas.

Señal continua también puede definirse más de una variable independiente que no sea el tiempo. Otra variable independiente muy común es el espacio y es particularmente útil en el procesamiento de imágenes, donde se utilizan dos dimensiones espaciales.

Señales discretas

El otro tipo básico de señales, para el cual la variable independiente (tiempo) es discreta, es decir que están definidas para un conjunto de valores discretos de su variable independiente.

Ejemplos:

- Los valores semanales del índice bursátil "Dow Jones".
- Los valores de Ingresos Promedios de la población según su nivel de instrucción.

Notación:

Para nombrar este tipo de señales se usan letras minúsculas y el símbolo "n" para denotar la variable de tiempo discreto.

La variable independiente, además, se encerrará entre corchetes "[.]"

Señales continuas

Uno de los dos tipos básicos de señales, para las cuales la variable independiente es continua, es decir son señales que están definidas para un intervalo continuo de valores de su variable independiente.

Ejemplos:

- Una Señal de voz como una función del tiempo.
- Presión atmosférica como una función de la altura.

Notación:

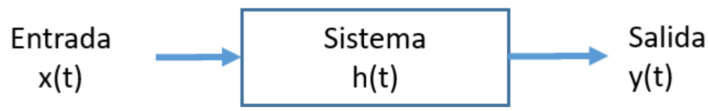
Para nombrar este tipo de señales se usan letras minúsculas y el símbolo "t" para denotar la variable de tiempo continuo.

La variable independiente, además, se encerrará entre paréntesis "(.)"

1.4.- Sistemas continuos y discretos.

Sistemas continuos

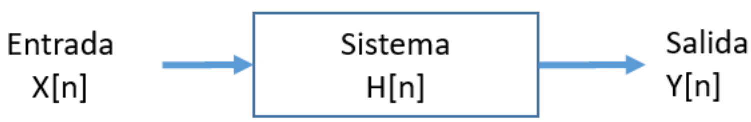
En un sistema continuo las señales continuas de entrada son transformadas en señales continuas de salida. X (t) ----- y(t)



Sistema Discreto

Cuando las entradas de tiempo discreto se transforman en salidas de tiempo discreto, al sistema se denomina «sistema discreto».

Simbólicamente se representa como: $x[n] \rightarrow y[n]$



1.5.- Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLI) de sistemas lineales e invariantes.

En procesamiento de señales, un **sistema LTI** (Linear Time-Invariant) o sistema lineal e invariante en el tiempo, es aquel que, como su propio nombre indica, permanece invariante en el tiempo.

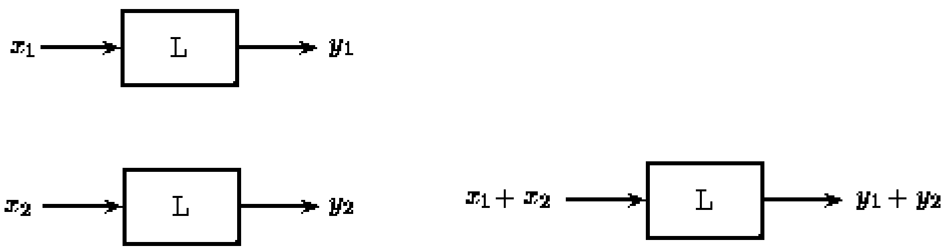
Linealidad

Un sistema es *lineal* (L) si satisface el *principio de superposición*, que engloba las propiedades de proporcionalidad o escalado y aditividad. Que sea proporcional significa que cuando la entrada de un sistema es multiplicada por un factor, la salida del sistema también será multiplicada por el mismo factor. Por otro lado, que un sistema sea aditivo significa que, si la entrada es el resultado de la suma de dos entradas, la salida será la resultante de la suma de las salidas que producirían cada una de esas entradas individualmente.

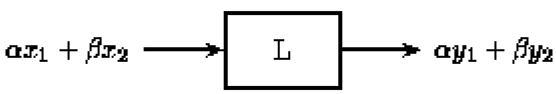
Propiedad de proporcionalidad

Si

Propiedad de aditividad



Principio de linealidad o de superposición proporcional



Matemáticamente, si $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... $y_n(t)$ son las salidas del sistema para las entradas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... $x_n(t)$ y a_1, a_2, ... a_n son constantes complejas, el sistema es lineal si:

$$\sum_k a_k x_k(t) \rightarrow \sum_k a_k y_k(t)$$

En un sistema lineal, si la entrada es nula, la salida también ha de serlo. Un sistema incrementalmente lineal es aquel que, sin verificar la última condición, responde linealmente a los cambios en la entrada.

Por ejemplo, $y(t) = 2x(t) + 2$ no es lineal puesto que $y(t) \neq 0$ para $x(t) = 0$, pero sí es incrementalmente lineal.

Invariabilidad

Un sistema es *invariante* con el tiempo si y solo si su comportamiento y sus características son fijas. Esto significa que los parámetros del sistema no van cambiando a través del tiempo y que por lo tanto, una misma entrada nos dará el mismo resultado en cualquier momento (ya sea ahora o después).

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathrm{TI}} \longrightarrow y(t) \qquad x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{\mathrm{TI}} \longrightarrow y(t-t_0)$$

Matemáticamente, un sistema es invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal en la entrada $x(t\text{-}t_0)$ ocasiona un desplazamiento temporal en la salida $y(t\text{-}t_0)$.

$$\text{Si } x(t) \rightarrow y(t), \text{ entonces } x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

LTI (sistema lineal e invariante en el tiempo)

La combinación mediante el principio de superposición de ambas propiedades confiere a los sistemas la característica LTI.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathrm{LTI}} \longrightarrow y(t) \qquad \alpha x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{\mathrm{LTI}} \longrightarrow \alpha y(t-t_0)$$

Principio de Superposición con LTI

$$\alpha x_1(t-t_1) + \beta x_2(t-t_2) \longrightarrow \boxed{\mathrm{LTI}} \longrightarrow \alpha y_1(t-t_1) + \beta y_2(t-t_2)$$

Una característica muy importante y útil de este tipo de sistemas reside en que se puede calcular la salida del mismo ante cualquier señal mediante la convolución, es decir, descomponiendo la entrada en un tren de impulsos que serán multiplicados por la respuesta al impulso del sistema y sumados.

1.6.- Respuesta de entrada cero (libre) y respuesta de estado cero (forzada).

Si la respuesta libre (respuesta natural u homogéneos) tiende a cero (circuito estrictamente estable), en régimen permanente sólo queda la componente forzada. La respuesta forzada a una excitación sinusoidal (o salida en régimen permanente sinusoidal en circuitos estrictamente estables) es la sinusoide de la entrada amplificada y desfasada, como se puede ver en la Figura 1:

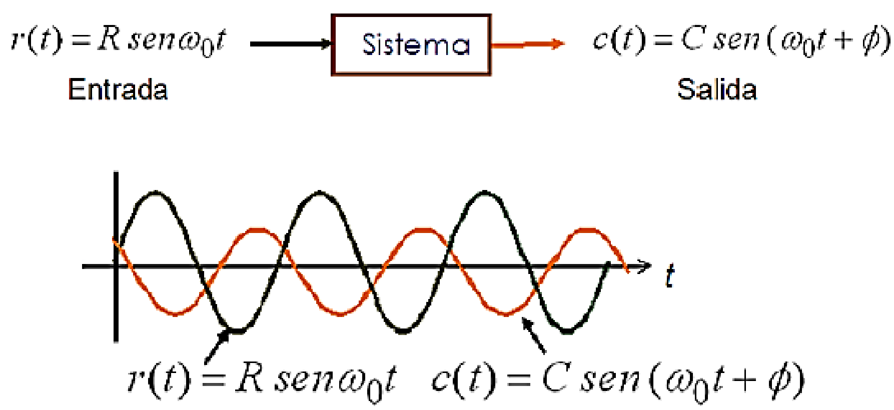


Figura 1

Suponga un sistema con función de transferencia $\boldsymbol{H_{(s)}}$, entrada $\boldsymbol{X_{(s)}}$ y salida $\boldsymbol{Y_{(s)}}$, representado mediante el diagrama de bloques de la Figura 2:

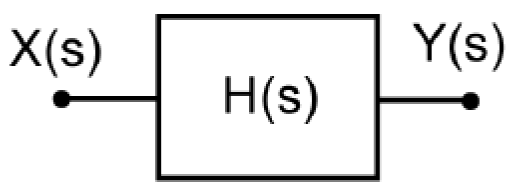


Figura 2

De la Figura 2 sabemos que:

$$\frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = H_{(s)} \quad (1)$$

Entonces, ¿Cuál será entonces la respuesta *forzada* a una excitación exponencial? Razonamos de la siguiente manera analítica:

$$x_{(t)}\ debe\ ser\ de\ la\ forma \quad \rightarrow \quad x_{(t)} = ke^{s_o t}u_{(t)}$$

Por tanto:

$$X_{(s)} = \frac{k}{s - s_o}$$

Utilizando la ecuación (1) entonces:

$$Y_{(s)} = H_{(s)}X_{(s)} = H_{(s)}\left(\frac{k}{s - s_o}\right)$$

Utilizando la técnica de expansión en fracciones simples vemos que:

$$Y(s) = H(s)\cdot\frac{k}{s - s_0} = \underbrace{\frac{A_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{A_n}{s - p_n}}_{\text{Respuesta Libre}} + \overbrace{\frac{A_0}{s - s_0}}^{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{forzada}}}$$

Vemos en la ecuación anterior que la respuesta forzada $\boldsymbol{Y_{f(s)}}$ es:

$$Y_{f(s)} = \frac{A_o}{s - s_o} \quad \rightarrow \quad A_o = H_{(s_o)}\left(\frac{k}{s - s_o}\right)(s - s_o) = kH_{(s_o)}$$

Al hacer la anti transformada de la respuesta forzada $\boldsymbol{Y_{f(s)}}$, obtenemos que $\boldsymbol{y_{f(t)}}$ es:

$$y_{f(t)} = kH_{(s_o)}e^{s_o t}u_{(t)} \quad (2)$$

La ecuación (2) confirma que la respuesta forzada a una excitación sinusoidal es la sinusoide de la entrada amplificada en $H_{(so)}$ (la función de transferencia evaluada en s_o).

1.7.- Respuesta transitoria y respuesta permanente.

La respuesta en el tiempo de un sistema de control se divide normalmente en dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable.

Para el estudio de la respuesta transitoria de un sistema de control, lo más conveniente es contar con la representación prototipo. Es decir, si tenemos el modelo matemático de un sistema, debemos representar dicho sistema mediante un diagrama de bloques donde esté claramente expresada la función de transferencia directa $G_{(s)}$ y una realimentación negativa unitaria como se ilustra en la Figura 1:

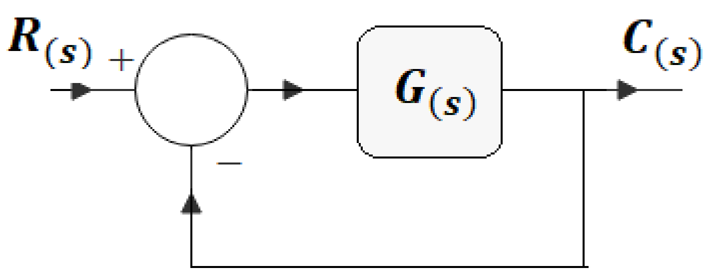


Figura 1. Sistema de control con realimentación unitaria

Ya sabemos que la función de transferencia a lazo cerrado $C_{(s)}/R_{(s)}$ del sistema de control de la Figura 1 se determina mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{G_{(s)}}{1 + G_{(s)}}$$

Denominamos a $\boldsymbol{C_{(s)}/R_{(s)}}$ "modelo prototipo" (o configuración prototipo), cuando tiene la siguiente forma:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (1)$$

Dónde:

$$\omega_n: frecuencia\ natural$$

$$\varsigma: factor\ de\ amortiguamiento\ relativo$$

Entonces, debemos representar el sistema de interés (el que estamos estudiando) con una función de transferencia similar a la forma de la ecuación (1) y de allí obtener los valores para la frecuencia natural $\boldsymbol{\omega_n}$ y el factor de amortiguamiento relativo **ζ.** Con estos dos valores podremos calcular lo que realmente interesa en el análisis de la respuesta transitoria ante una entrada escalón unitario:

1. Sobrepaso máximo ($\boldsymbol{M_p}$)
2. Tiempo de asentamiento ($\boldsymbol{T_s}$)
3. Tiempo de levantamiento ($\boldsymbol{T_r}$)

La fórmula para cada uno de estos parámetros se presenta más adelante. Pero antes, es necesario ofrecer una definición más formal sobre respuesta transitoria.

Definición de respuesta transitoria

Sea *y(t)* la respuesta de un sistema en tiempo continuo, entonces:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

donde $\boldsymbol{y_{t(t)}}$ es la respuesta transitoria, mientras $\boldsymbol{y_{ss(t)}}$ es la respuesta en estado estable.

La respuesta transitoria de un sistema de control es importante ya que tanto su amplitud como su duración deben mantenerse dentro de límites tolerables o prescritos. Está definida como la parte de la respuesta en el tiempo que tiende a cero cuando el tiempo se hace muy grande.

Por lo tanto,

$$\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$$

Respuesta Permanente

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable o también llamada en régimen permanente.

Se entiende por respuesta transitoria a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta permanente se entiende la forma en la cual la salida del sistema se comporta cuando t tiende a infinito.

Es el sistema cuando ya se ha estabilizado.

Por ejemplo, un calefactor posee un régimen transitorio desde el momento en que se conecta, hasta que toma la temperatura de operación (en principio máxima). El comportamiento se 'mide' a partir del régimen, es decir de la temperatura de operación.

Esto se aplica a cualquier tipo de dispositivos, motores que deben operar a una velocidad de régimen, (ejemplo el rotor de un helicóptero), o cualquier otro dispositivo que requiera un determinado período, desde que se lo conecta hasta que adquiere la, velocidad, temperatura, o cualquier otra magnitud, de régimen, (a la cual operará normalmente)

1.8.- Suma/Integral de convolución.

Para sistemas lineales e invariantes en el tiempo, sabemos que podemos representarlos a través de una función de transferencia

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)}$$

Donde U(S) es la transformada de Laplace de la entrada del sistema y Y(S) es la transformada de Laplace de la salida del sistema asumiendo claro condiciones iniciales nulas. Con esto, hemos visto en nuestro curso de análisis de sistemas, que podríamos resolver el sistema expandiendo por fracciones parciales la siguiente ecuación:

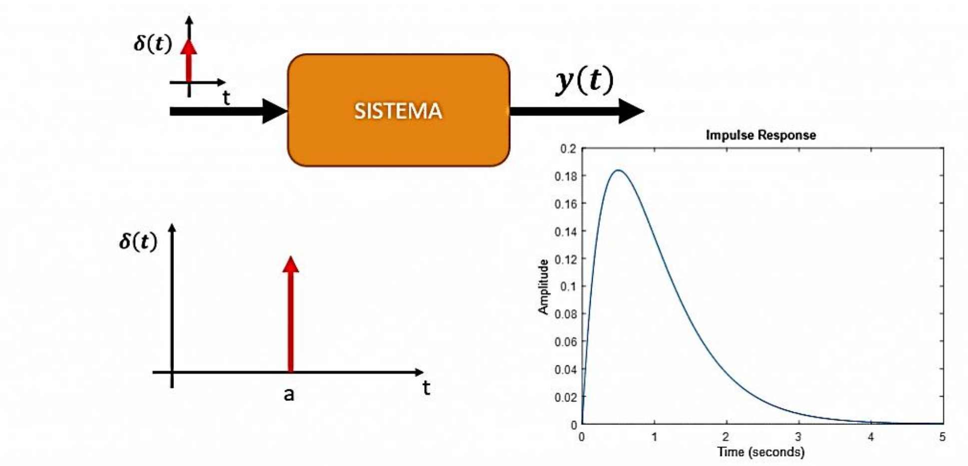
Y(S) = G(S) U(S)

Note que la multiplicación en el dominio complejo **s** es equivalente a la convolución en el dominio temporal, por lo tanto, la transformada inversa de la ecuación anterior viene dado por la siguiente integral de convolución (que viene dado de la convolución de Laplace):

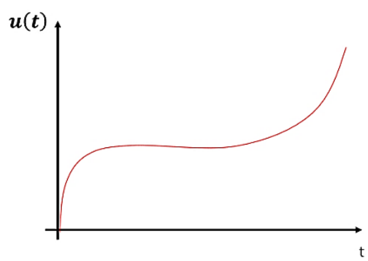
$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = G(s)U(s)$$

Interpretación de la Integral de Convolución

La integral de convolución junto con **la respuesta al impulso** vista en la entrada anterior, nos permite encontrar la respuesta de un sistema dinámico ante cualquier tipo de entrada.



Básicamente la convolución calcula la salida del sistema dividiendo la señal de entrada en pequeñas contribuciones en el tiempo, lo que no es más que pequeños pulsos separados en el tiempo multiplicados por la magnitud de la entrada u(t).



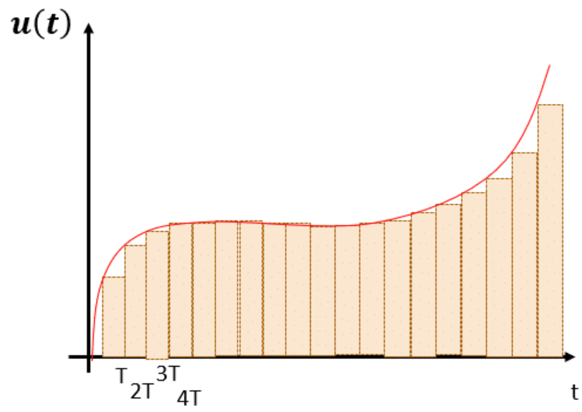
Recordando que la función pulso viene dado por:

$$P(t)\begin{cases} 1/T & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Normalizando el pulso unitario

$$TP(t)\begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Aproximando una señal de entrada cualquiera de estos pequeños pulsos, se tiene que:



$$TP(t)u(0)$$

$$TP(t-T)u(1)$$

$$TP(t-2T)u(2)$$

$$TP(t-3T)u(3)$$

Y así sucesivamente…

Donde la función global de entrada

$$u^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} TP(t - kT)u(kT)$$

Con esto la salida del sistema viene dado por la suma de las contribuciones individuales de cada pulso.

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Tg(t - kT)u(kT)$$

Si aplicamos el concepto del impulso, donde tenemos el limite del impulso tendiendo para cero, podríamos expresar el sumatório como una integral

$$\underset{T \to 0}{Lim}\ y^*(t)$$

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

1.9.- Análisis de sistemas y señales

1.9.1.- Sistemas discretos de respuesta al impulso de duración finita y de duración infinita.

FIR es un acrónimo en inglés para ***Finiste Impulse Response*** o ***Respuesta finita al impulso***. Se trata de un tipo de filtros digitales cuya respuesta a una señal impulso como entrada tendrá un número finito de términos no nulos.

Expresión Matemática de los filtros FIR

Para obtener la salida solo se basan en entradas actuales y anteriores. Su expresión en el dominio n es:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_{n-k}$$

En la expresión anterior es el orden del filtro. es el número de términos no nulos y el número de coeficientes del filtro. Los coeficientes son .

La salida también puede expresarse como la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso .

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k}$$

Aplicando la transformada Z a la expresión anterior:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} = h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_{N-1} z^{-(N-1)}$$

1.9.2.- La estabilidad entrada/salida en términos de la respuesta al impulso.

Los sistemas dinámicos son proyectados para realizar determinado tipo de tareas o para procesar una determinada señal.

Pero debemos entender que, si un sistema dinámico no es estable, este no podrá desempeñar su función cuando una determinada señal de entrada es aplicada al sistema. Por lo tanto, en la práctica un sistema dinámico debe operar siempre en una región de estabilidad.

Esta definición de estabilidad se realiza con base en la representación matemática usada:

- Estabilidad Entrada-Sálida
- Estabilidad Interna.

Estabilidad BIBO

Una entrada ***u(t)*** limitada implica en que la salida ***y(t)*** es limitada (bounded-input bounded-output BIBO estable)

El análisis de estabilidad BIBO puede ser analizado utilizando la respuesta al impulso

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

donde ***g(t)*** es la respuesta al impulso del sistema.

Teorema

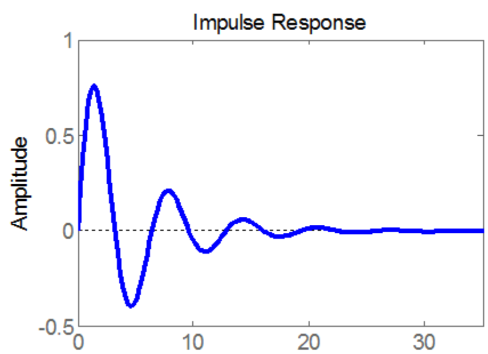
Un sistema SISO es BIBO estable si y solamente si *g(t)* es absolutamente integrable en el intervalo de:

$$[0, \infty)$$

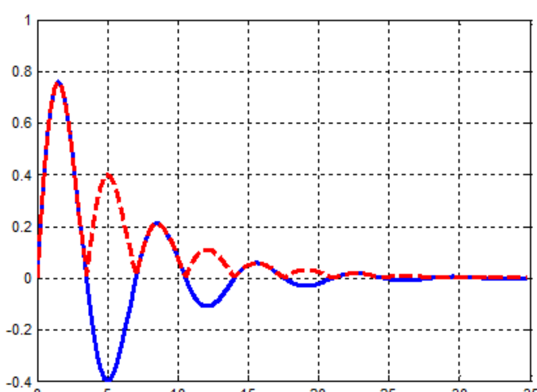
O sea:

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \leq M < \infty$$

Supongamos que la siguiente figura representa la respuesta del impulso del sistema:



Basta integrar desde **cero** a **t** del módulo del sistema



Al integrar, se puede apreciar que el sistema evidentemente es un sistema estable, pues el area de la curva es un área finita y limitada. Esto nos dice que, de forma general, un sistema con una entrada impulso debe de tender para cero en el tiempo.

Si el sistema no va para cero al momento de hacer la integral va a dar ilimitada.

EJEMPLO *Sistema BIBO*

Considere el siguiente sistema Lineal.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -0.1 & 4 \end{bmatrix} x(t)$$

Resolviendo:

$$y(t) = \begin{bmatrix} -0.1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{-5(t-\tau)} 3u(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

Para una entrada ***u(t)=1*** se obtiene que

$$y(t) = -0.05e^{-2t}(e^{2t} - 1) + 2.4e^{-5t}(e^{5t} - 1)$$

Sistema estable, pues con una entrada limitada se tiene una salida limitada.

EJEMPLO 2

Considere el siguiente sistema Lineal.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -0.1 & 4 \end{bmatrix} x(t)$$

Resolviendo

$$y(t) = \begin{bmatrix} -0.1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{5(t-\tau)} 0 u(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

Para ***u(t) = 1*** se obtiene que:

$$y(t) = -0.05 e^{-2t} (e^{2t} - 1)$$

Este sistema es estable a pesar de que tenga un auto valor positivo. El estado de *x2* va para infinito, solo que ese estado no aparece en la salida**.** En este caso se va a apreciar la DIFERENCIA que existe entre el concepto de estabilidad ENTRADA-SALIDA y el concepto de Estabilidad Interna.

Una de las ventajas de representar un sistema por variables de estado es que podemos tener todos los modos dinámicos del sistema inclusive aquellos que no tienen influencia en la salida.

RECURSOS EXTRA

Integral de Convolucion

https://www.youtube.com/watch?v=NyaBxJJ0bgY&feature=youtu.be

Estabilidad de sistemas lineales de control

https://www.youtube.com/watch?v=ILPHEkTdfCo&feature=youtu.be

Derivación de la función impulso

https://www.youtube.com/watch?v=w0JrhOOf-nI

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

CUADRO SINÓPTICO

Realice un cuadro sinóptico de la unidad número uno; véase manual básico de actividades en plataforma UDS.

UNIDAD II: ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES (SLI), CONTINUOS Y DISCRETOS, MEDIANTE LAS TRANSFORMACIONES DE LAPLACE Y Z

Objetivo: Analizar los sistemas lineales e invariantes continuos y discretos, mediante las transformaciones de Laplace y z.

2.1.- Forma general de la ecuación diferencial lineal.

En matemáticas, una ecuación diferencial lineal es aquella ecuación diferencial cuyas soluciones pueden obtenerse mediante combinaciones lineales de otras soluciones. Estas últimas pueden ser ordinarias (EDOs) o en derivadas parciales (EDPs). Las soluciones a las ecuaciones diferenciales lineales cuando son homogéneas forman un espacio vectorial, a diferencia de las ecuaciones diferenciales no lineales.

Una ecuación diferencial de primer orden es lineal si puede escribirse en la forma. Donde g(t) y r(t) son funciones arbitrarias de t.

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot y + r(t)$$

Un ejemplo puede ser, donde g(t) = t 2 y r(t) = cos(t).

$$\frac{dy}{dt} = t^2 \cdot y + cos(t)$$

A veces es necesaria alguna operación previa para determinar si una ecuación es de tipo lineal.

Por ejemplo:

$$ty + 2 = \frac{dy}{dt} - 3y$$

Y puede reescribirse como:

$$\frac{dy}{dt} = (t+3)y + 2.$$

Algunas ecuaciones caen en varias categorías simultáneamente. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 8$$

Es lineal con g(t) = −2, r(t) = 8. La ecuación también es separable por ser una ecuación autónoma.

La palabra lineal en el nombre de la ecuación se refiere al hecho de que la variable dependiente y aparece en la ecuación elevada solo a la primera potencia. La ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

No es lineal ya que no puede ser reescrita en la forma

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot y + r(t).$$

Otros ejemplos de ecuaciones lineales son:

$$\frac{dP}{dt} = e^{2t} P - \sin(t)$$

$$\frac{dw}{dt} = \sin(t) \cdot w$$

2.2.- La transformada de Laplace: propiedades y transformadas comunes.

La transformada de Laplace es un operador LINEAL muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales. Laplace demostró cómo transformar las ecuaciones lineales NO HOMOGENEAS en ecuaciones algebraicas que pueden resolverse por medios algebraicos.

Denotamos al operador de Laplace por L, y como operador, actúa sobre una función f y devuelve otra función L[f]

La transformada de Laplace de una función f(t), 0 ≤ t ≤ ∞ es una función L[f] de una variable real s dada por:

$$(F(s) =)\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau f(t)e^{-st}dt$$

Está definida para todos ∈ R donde la integral tenga sentido.

Ejemplo: Si f(t) = c. Se puede calcular la transformada de Laplace.

Las transformadas más comunes son:

$$(PVI) = \begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[c](s) = \int_0^\infty ce^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty} ce^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty} c\left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_0^\tau =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} c\left[\frac{-1}{s}e^{-s\tau} + \frac{1}{s}e^{-s0}\right] = 0 + \frac{c}{s} = \frac{c}{s},\ s > 0$$

$observa\ que\ si\ s > 0,\ entonces\ \lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau s} = 0$

Las transformadas más comunes son:

Transformada de una derivada Supongamos que “Y´0(t)” es continua para” t ≥ 0” y que para toda “s > s0” (para algún s0) se verifica que “e −sτ y (τ) → 0 si τ → ∞”. Entonces se tiene

$$\mathcal{L}[y'](s) = -y(0) + s\mathcal{L}[y](s)$$

que:

Nota 1. Para que la transformada sea útil, debe ser posible recuperar f(t) de L[f](s). El operador con que haremos esto es lineal, se denota por L −1 y se denomina transformada de Laplace inversa

Problemas de valor inicial y transformadas:

Consideremos el problema de valor inicial:

$$(PVI) = \begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Con “a” constante y “f” una función continua a trozos en “[0, +∞)”

Supongamos que “L [y 0]”,” L[y]” y “L[f]” están definidas en un INTERVALO COMUN´ s > s0. Para resolver la ecuación hacemos lo siguiente:

1. Aplicamos L a cada miembro de la Ecuación diferencial (usamos que el operador de Laplace es lineal) Resultando:

   $$s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + a\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s)$$

2. Si el “lim→∞ e −sτ y (τ) = 0” entonces usamos la fórmula de la derivada, de manera que la ecuación anterior resulta:
3. La ecuación anterior, es una ecuación algebraica. Despejando” L[y](s)”, resulta:

   $$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y(0)}{s+a} + \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s+a}$$

   $$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y(0)}{s+a} + \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s+a}$$

El método de la transformada para resolver un PVI de segundo orden:

Usando lo anterior, resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados, obtenemos:

Despejando, resulta: $\mathcal{L}[y'' - y] = \mathcal{L}[1]$

Luego: $$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

Por medio de la tabla, tenemos que:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{sy(0) + y'(0) + \frac{1}{s}}{s^2 - 1} = \frac{1 + \frac{1}{s}}{s^2 - 1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}, \quad s > 1$$

2.3.- Función de transferencia de sistemas de tiempo continúo.

La Función de Transferencia H(s) es el cociente formado por *Y(s),* la Transformada de Laplace de la salida de un sistema LTI (Causal, Lineal e Invariante en el tiempo), dividida entre *X(s),* la Transformada de Laplace de la entrada a dicho sistema, cuando las condiciones iniciales son iguales a cero en el tiempo *t=0* $^{-:}$

$$\boldsymbol{H}_{(s)} = \frac{\boldsymbol{Y}_{(s)}}{\boldsymbol{X}_{(s)}}$$

Dónde:

1. La Función de Transferencia sólo se expresa como una función de la variable compleja s. Para obtenerla, es necesario que las condiciones iniciales sean nulas. De no serlo, se debe obligar a dichas condiciones a ser cero.

$$Y_{(s)} = \mathcal{L}(y_{(t)})$$

$$X_{(s)} = \mathcal{L}(x_{(t)})$$

2 Conociendo la Función de Transferencia *H(s)* de un sistema, podemos conocer la salida *y(t)* en el dominio del tiempo para cualquier entrada *x(t)*, aplicando los siguientes pasos:

3. La Función de Transferencia es una propiedad intrínseca del sistema, no depende del tipo o naturaleza de la entrada o excitación.

4. La Función de Transferencia no ofrece información sobre las características físicas del sistema. De hecho, sistemas con diferentes estructuras, dimensiones o distribuciones físicas pueden tener la misma Función de Transferencia.

5. La Función de Transferencia es una parte importante del primer paso necesario para el diseño y análisis de sistemas de control: el modelo matemático del sistema.

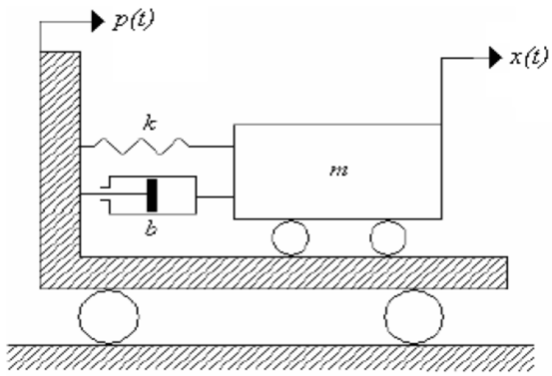
6. La Función de Transferencia *H(s)* de un sistema LTI también se puede definir como la Transformada de Laplace de la Respuesta al Impulso, con todas las condiciones iniciales iguales a cero. Suponiendo que la respuesta del sistema al impulso se denota como *h(t)*, entonces:

$$Y_{(s)} = H_{(s)}X_{(s)}$$

$$y_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}(Y_{(s)})$$

La Función de Transferencia se obtiene a partir de la representación de un sistema LTI por medio de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, el modelo dinámico del sistema. Se hace uso intensivo de la propiedad de La Transformada de Laplace definida como "derivación n-ésima de una función en el dominio del tiempo". Dicha propiedad sirve de fundamento para el método que permite separar algebraicamente la salida de la entrada, y obtener la Función de Transferencia.

Ejemplo: Hallar la Función de Transferencia **X(s)/P(s)** del siguiente sistema mecánico



Para obtener la ecuación diferencial que describe el comportamiento dinámico de este sistema, aplicamos la Ley de Newton:

$$\sum F = m\frac{dx_{(t)}{}^{2}}{d^{2}t}$$

Suponiendo las condiciones iniciales iguales a cero, y que se trata de un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo (LTI), aplicamos superposición y determinamos las fuerzas que actúan sobre la masa **m,** así obtenemos:

$$-kx_{(t)} - b\frac{dx_{(t)}}{dt} + kp_{(t)} + b\frac{dp_{(t)}}{dt} = m\frac{dx_{(t)}{}^{2}}{d^{2}t}$$

Esta es la ecuación diferencial del sistema, su modelo matemático. Por ser un sistema LTI, los coeficientes de la ecuación son constantes. Se procede ahora a aplicar la Transformada de Laplace a esta ecuación. Sabemos de La Transformada de Laplace que la manera más práctica es actuar sobre cada término de la ecuación por separado:

$$\mathcal{L}(kx_{(t)}) = kx_{(s)}$$

$$\mathcal{L}(b\frac{dx_{(t)}}{dt}) = bsx_{(s)}$$

$$\mathcal{L}(kp_{(t)}) = kp_{(s)}$$

$$\mathcal{L}(b\frac{dp_{(t)}}{dt}) = bsp_{(s)}$$

$$\mathcal{L}(m\frac{dx_{(t)}{}^2}{d^2t}) = ms^2x_{(s)}$$

Así la ecuación del sistema luego de aplicarle Laplace es:

$$-kx_{(s)} - bsx_{(s)} + kp_{(s)} + bsp_{(s)} = ms^2x_{(s)}$$

Que podemos expresar como:

$$(ms^2 + bs + k)x_{(s)} = (bs + k)p_{(s)}$$

Con el fin de despejar y obtener la Función de Transferencia del sistema:

$$\frac{x_{(s)}}{p_{(s)}} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

2.4.- Forma general de la ecuación en diferencias lineal.

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias.

Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \cdots, y_{t+1}, y_t, t) = 0 .$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y que la cumpla. El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de solución general. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes soluciones particulares.

Ecuaciones lineales de primer orden

Definición. Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como:

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t) ,$$

Donde pi(t), i = 1, 2 y q(t) son funciones en la variable discreta t. Si la sucesión q(t) es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de ecuación homogénea asociada. Cuando las funciones p1(t) y p2(t) son constantes, se dice que la ecuación lineal es de coeficientes constantes. Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t)$$

Donde p(t)yt representa el crecimiento de la población en el tiempo t y q(t) el número de individuos que en el tiempo t se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

2.5.- Solución de las ecuaciones en diferencias mediante la recurrencia.

El considerar el tiempo como una variable discreta implica que toma valores enteros t = 0, 1, 2, . . . (también puede tomar valores negativos), donde t representa el número de periodos transcurridos desde el instante inicial. El modelo de cambio de la variable y vendrá descrito por los valores que toma la variable en t, es decir, por una sucesión de valores

$$\{y(0), y(1), \ldots, y(t), \ldots\}$$

Que también se puede representar como

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$$

Llamamos ecuación en diferencias a toda expresión de la forma

$$F(t, y(t), y(t+1), \ldots, y(t+n), \ldots) = 0$$

Una ecuación en diferencias puede ser:

$$y_{t+3} - y_{t+1} = t^2 - 3$$

Llamamos orden de una ecuación en diferencias a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación, es decir, t + n − t = n Ejemplo 5.2.2 yt+3 − yt+1 − 5yt = t es una es una ecuación en diferencias de orden tres, en cambio, yt+3 − yt+1 = t 2 − 3 es una ecuación en diferencias de orden dos.

Llamamos solución de una ecuación en diferencias a toda sucesión {y (0), y (1), . . . , y(t), . . .} que la satisfaga. Ejemplo yt = t es solución de la ecuación yt+2 + yt = 2t + 2 ya que t + 2 + t = 2t + 2.

Llamamos solución general de una ecuación en diferencias al conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, nos proporcionara las distintas soluciones particulares.

yt+1−yt = 3 es una ecuación en diferencias de orden uno cuya solución general es yt = 3t+c. Si consideramos unas condiciones iniciales, por ejemplo, y0 = 2, entonces y0 = 3 · 0 + c = c, por tanto, c = 2 y la solución particular es yp(t) = 3t + 2. Es decir, la solución es la sucesión yp(t) = {2, 5, 8, 11, . . .}

Si tenemos una ecuación en diferencias de primer orden yt = f (t, yt−1) y una condición inicial y0, obtenemos:

$$y_1 = f(1, y_0),\ y_2 = f(2, y_1),\ y_3 = f(3, y_2), \ldots$$

De ahí el nombre de relaciones de recurrencia. Así, si tenemos, por ejemplo, yt+1 = a yt y la condición inicial y0, entonces:

$$y_1 = a\, y_0 \ \Rightarrow\ y_2 = a\, y_1 = a^2\, y_0 \ \Rightarrow\ y_3 = a\, y_2 = a^3\, y_0 \ \Rightarrow\ \ldots \Rightarrow\ y_t = a^t\, y_0$$

En aplicaciones económicas nos interesa fundamentalmente establecer resultados cualitativos sobre las soluciones. Por ejemplo, nos podría interesar el comportamiento de las soluciones cuando t crece mucho o bien ver como variaciones de eventuales parámetros de la ecuación en diferencias afectan a la solución. Desgraciadamente, esto solo es posible para tipos particulares de ecuaciones como son las ecuaciones en diferencias lineales que pasamos a estudiar.

2.6.- La transformada Z: propiedades y transformadas comunes.

Frecuentemente se han empleado métodos de transformación para simplificar el análisis y síntesis de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales o en diferencias. La transformada Z es una regla por la cual unas secuencias de números son convertidas a una función de la variable compleja z. Debido a su estructura básica, la transformada Z posee propiedades que facilitan la solución de ecuaciones en diferencias lineales usando simplemente manipulaciones algebraicas.

PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES

- ✓ **Superposición**

Se compone de las características de:

1. Homogeneidad:

$$\begin{aligned} f(k) &\leftrightarrow F(z) \\ af(k) &\leftrightarrow aF(z) \end{aligned}$$

2. Aditividad:

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$$
$$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$$

3. Entonces:

$$f_1(k) + f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) + F_2(z)$$

Por lo tanto, la propiedad de superposición establece que si:

$$f(k) = af_1(k) + bf_2(k)$$

Transformadas Comunes:

$$Z[f(k)] = Z[af_1(k) + bf_2(k)] = Z[af_1(k)] + Z[bf_2(k)]$$

$$\Delta(z) = Z[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = \delta(0) + \delta(1)z^{-1} + \delta(2)z^{-2} + \ldots$$

$$\therefore \Delta(z) = 1$$

1) Impulso unitario (delta de Kronecker). Definiendo la secuencia impulso unitario δ (k) = 1 para k = 0, su transformada se determina de la siguiente forma:

Definiendo un impulso retrasado m unidades de tiempo discreto y retomando la propiedad de corrimiento hacia la derecha, se obtiene el siguiente par de transformación:

2) Escalón unitario Definido por la siguiente expresión:

(I) k u k = − k = 0, 1, 2, 3, ..., n.

$$f(k) = \delta(k - m)$$

$$F(z) = Z[\delta(k - m)] = z^{-m}$$

La transformada se obtiene de acuerdo con el siguiente desarrollo

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}$$

$$U(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)z^{-k}=u(0)+u(1)z^{-1}+u(2)z^{-2}+\ldots+u(k)z^{-k}+\ldots$$

$$U(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}(z^{-1})^{k}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$\therefore\ U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\qquad \text{en la región } |z|\succ 1$$

$|z|\succ 1$ Es la región de convergencia de la transformada U(z), la cual se enuncia normalmente como:

1) Serie geométrica $f(k)=a^{k}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$

De acuerdo con la definición anterior, la transformada F(z) se determina según el siguiente

$$-1^{k}\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$$

procedimiento, considerando la propiedad de multiplicación por a^k.

Empleando la propiedad mencionada:

$$Z\left[a^{k}f(k)\right]=F(a^{-1}z)$$

Entonces:

$$f(k)=a^{k}\leftrightarrow\frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1}$$

Multiplicando y dividiendo por a se obtiene la transformada de una secuencia geométrica.

Si se trabaja en la región $|z|>|a|$ dentro del plano complejo z , la transformada F(z) de la secuencia geométrica converge.

$$F(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| \succ |a|$$

Cuando la serie infinita F(z) converge en una región del plano z, es posible usar el método de la transformada para resolver problemas de sistemas en el tiempo discreto.

De acuerdo con el valor de $|a|$ en la serie geométrica, se observa que se presentan los siguientes casos:

Si $|a| > 1$ se tiene una serie divergente y $|z| > |a|$

Si $|a| = 1$ se tiene una magnitud unitaria y $|z| > |1|$

Si $|a| < 1$ se tiene una serie convergente a cero y $|z| > |a|$

2) Rampa discreta unitaria $f(k) = k \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$

A continuación, se desarrolla brevemente la obtención de la transformada de una rampa discreta. Multiplicando la ecuación anterior por − z y considerando a = 1, se obtiene finalmente la expresión de la transformada de una rampa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z| \succ 1$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

Para una secuencia geométrica se tiene:

Derivando con respecto a z:

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = \frac{(z-a)-z}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2}$$

ASI PUES: $$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} ka^k z^{-k-1} = -\frac{a}{(z-a)^2}$$

2.7.- Función de transferencia de sistemas de tiempo discreto.

Los métodos de variables de estado para el análisis y diseño de sistemas de tiempo continuo pueden extenderse al análisis y diseño de sistemas de tiempo discreto.

La forma general del modelo de estado para un sistema de tiempo discreto es:

$$x\left((k+1)T\right) = f\left(x(kT), u(kT)\right)$$

$$y(kT) = g\left(x(kT), u(kT)\right)$$

Donde x(kT), u(kT) e y(kT) son los vectores de estado, de entrada y de salida respectivamente.

A partir de estas ecuaciones vemos que, dado el estado inicial x (0) y los valores de las entradas u (0), u(T), u(2T), …, u(kT), se puede deducir unívocamente la evolución del estado x(T), x(2T), …, x((k+1) T) y la evolución de la salida y (0), y(T), …, y(kT). Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, de n-ésimo orden, las ecuaciones se reducen a la forma siguiente:

$$x(k+1) = A\ \ x(k) + B\ \ u(k)$$

$$y(k) = C\ \ x(k) + D\ \ u(k)$$

Siendo:

x(k) el vector de estado, de dimensión nx1

u(k) el vector de entrada, de dimensión mx1

y(k) el vector de entrada, de dimensión px1

A la matriz de dinámica del sistema, de dimensión nxn

B la matriz de entrada del sistema, de dimensión nxm

C la matriz de salida del sistema, de dimensión pxn

D la matriz de salida del sistema, de dimensión pxm

Se observa que la ecuación es un conjunto de ecuaciones en diferencias de primer orden que representan la dinámica del proceso de tiempo discreto y que la ecuación de salida es simplemente una ecuación algebraica.

La convolución proporciona una potente herramienta de trabajo para analizar y diseñar un sistema en el dominio del tiempo. ¿Por qué necesitamos trabajar en el dominio de la frecuencia? Veamos tres razones:

Hay multitud de fenómenos que pueden modelarse matemáticamente mediante una señal senoidal o exponencial como paso previo a su estudio en el dominio de la frecuencia. Incluso cuando una señal no es de esta naturaleza puede analizarse en términos del dominio de la frecuencia. La respuesta de un procesador LTI a una entrada senoidal es muy simple puesto que en régimen permanente el procesador sólo puede modificar la amplitud y la fase, pero nunca la frecuencia. Aplicando el principio de superposición puede obtenerse la respuesta a señales de entrada ciertamente complejas.

Si una señal de entrada x[n] se caracteriza por su espectro en frecuencia, y el procesador LTI por su respuesta en frecuencia, el espectro de la señal de salida y[n] se obtiene mediante una simple multiplicación, lo cual es más fácil que el equivalente en el dominio del tiempo como es la convolución.

El diseño de sistemas y algoritmos DSP a menudo comienza por una serie de especificaciones en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, el diseño del filtro digital de paso bajo, paso bando y rechazo de banda vistos anteriormente.

Veamos una serie de punto de referencia como motivación para comenzar el estudio del análisis en el dominio frecuencial.

1.- La mayoría de las señales digitales que se emplean en la práctica pueden ser analizadas o sintetizadas mediante una serie de señales senoidales y cosenoidales de amplitud y fase apropiadas.

2.- Aproximar la caracterización de una señal mediante un número limitado de componentes senoidales y cosenoidales facilita, sin perder precisión, el análisis y diseño de DSPs.

3.- Si una señal es estrictamente periódica, sus componentes frecuenciales están descritas por términos armónicos. Su espectro tiene un número determinado de líneas. La señal está modelada matemáticamente por una serie de Fourier. La expresión trigonométrica de una serie de Fourier puede ser descrita en forma exponencial, expresando cada término senoidal y cosenoidal por la parte imaginaria y real respectivamente:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

2.8.- Análisis y solución de sistemas continuos y discretos en el dominio de la frecuencia.

En el dominio de la frecuencia compleja s=cr+jw de la transformada de Laplace se realiza el análisis mediante la función de transferencia. Se determina la respuesta en el tiempo, se hace un análisis de estabilidad en el plano complejo s y se determina el lugar geométrico de las raíces para sistemas realimentados, esto para sistemas continuos.

Para sistemas discretos se realiza un análisis similar utilizando la función de transferencia discreta mediante la transformada Z.

En el dominio de la frecuencia real w de la transformada de Fourier se realiza el análisis de:

- ✓ La composición de una función periódica en base a sus armónicas.
- ✓ Análisis del espectro de frecuencia.
- ✓ Análisis de la respuesta de frecuencia.

- ✓ Obtención práctica de los espectros de frecuencia mediante la transformada rápida de Fourier en base a una señal muestreada.

Las aplicaciones de sistemas lineales están orientadas a tiempo y frecuencia. Se utilizan rutinas para procesamiento de señales y programas demostrativos del comportamiento dinámico en tiempo y en frecuencia.

- ✓ Análisis de respuesta temporal en base a la variación de un parámetro.
- ✓ Análisis de la respuesta en frecuencia en base a la variación de un parámetro.
- ✓ Lugar geométrico de las raíces.
- ✓ Manejo de la transformada de Fourier para análisis de datos.
- ✓ Discretización de sistemas.
- ✓ Cambio de modelos.
- ✓ Diagramas de bloque.
- ✓ Utilización del simulink.
- ✓ Modulación de señales.
- ✓ Filtrado de señales

Los sistemas se analizan utilizando la función de transferencia y la respuesta de frecuencia para sistemas continuos y discretos.

Para sistemas continuos el análisis se realiza mediante: transformada de Laplace, transformada de Fourier, transformada rápida de Fourier. Se representa el lugar geométrico de las raíces, análisis en el plano 's1, análisis de estabilidad absoluta y relativa, diagramas de respuesta de frecuencia y el espectro de frecuencia.

Para sistemas discretos el análisis se realiza mediante: transformada Z, series de Fourier, transformada discreta de Fourier. Se representa el lugar geométrico de las raíces, análisis en el plano 'z", análisis de estabilidad absoluta y relativa y el espectro de frecuencia.

2.9.- La condición de crominancia.

La crominancia es el componente de la señal de vídeo que contiene las informaciones del color. Por otra parte, la luminancia de la luz o brillo.

El color está definido por dos magnitudes: la saturación, que nos da la "cantidad" de color, y el matiz (en inglés *hue*) que nos indica "qué color es". Dependiendo del sistema utilizado para la codificación de una imagen estas dos magnitudes toman diferentes formas.

La idea de la transmisión del color en televisión como crominancia y luminancia se debe a Georges Valensi y fue expuesta en 1938. Por aquel tiempo las pruebas realizadas transmitiendo las señales RGB evidenciaban la incompatibilidad con el sistema de televisión monocromática. Para ver y medir la señal de crominancia se utiliza el vectorscopio.

Sistemas de codificación de la crominancia

- ✓ RGB

Si se trabaja con las señales puras RGB, esto solo sucede en la captación, es decir en la cámara o en la generación, y en la *proyección* de la imagen sobre un tubo de rayos cátodicos u otro sistema, aun teniendo la información de color no trabajamos independientemente con él ya que también la información de luz está incluida en ellas.

Componentes

Como hemos visto, una vez separada la luminancia de la información de color obtenemos las componentes del mismo. Estas portan las magnitudes que definen el color, es decir la saturación y el tinte (hue). Los sistemas por componentes trabajan con las tres señales. Cada señal va por su camino y por ello sufre distorsiones diferentes, tanto en amplitud como en tiempos (hay retardos) que complican y alteran el resultado final de la mezcla de ellas para componer la imagen en la pantalla del televisor. Esta forma de trabajar con la señal de TV tuvo una cierta extensión a finales de los años 80 del siglo XX, justo antes de la aparición del vídeo digital SDI.

La señal de vídeo digital SDI mantiene las tres señales arriba indicadas, es decir que en cuanto a la croma es un sistema por componentes, pero dichas señales una vez digitalizadas se multiplexan para realizar la señal final, junto con otras, que se trasporta en SDI. Este es el sistema de instalación de TV utilizado en la actualidad.

Modulación en subportadora

En televisión analógica se crea una sola señal a la que se denomina vídeo compuesto. Esta señal está constituida por la suma de la señal de luminancia (la que porta la información de la

luz) y la de color que va sobre una subportadora doblemente modulada, modulación en cuadratura.
En el sistema PAL y NTSC la modulación es en amplitud y en fase. En amplitud se modula la saturación y en fase el tono, de tal forma que se establece un vector cuyo módulo es la saturación (cantidad de color) y el argumento el tinte (el color que es). En SECAM en una línea se modula en amplitud un componente y en la siguiente la otra.

La frecuencia de la subportadora varia con el sistema de TV, en PAL es de 4,43361825Mhz y en NTSC de 3,579545Mhz (también con más precisión). Hay sistemas mixtos en los cuales la frecuencia de subportadora varia. Esta frecuencia está relacionada con las frecuencias de campo y de línea de cada sistema y son generadas por osciladores locales en el sistema NTSC uno de 15750 khz con un tiempo 24 microsegundo y otro oscilador vertical de 60Hz (59. decimales) Si multiplicamos 525 lines por la frecuencia de cuadros (30cuadros por segundo) el resultado será 15750 y si divide 15750 por 525 lines por cuadros el resultado será (30 cuadros). En SECAM se usan las frecuencias de 4,250MHz y 4,40625 MHz para cada componente de color.
La demoludación de la subportadora de color 3.58Mhz precisa en el receptor de un generador de subportadora enganchado en fase y frecuencia con la señal a demodular Para proporcionar esa sincronía se inserta en la señal de vídeo compuesto una salva de color, normalmente se le llama con la palabra inglesa *burst*, que es una porción de subportadora, unos cuantos ciclos, que se insertan en el pórtico posterior del sincronismo de línea con una amplitud de 300mV. para ponerlo en fase y frecuencia se extrae un pulso llamado sandcastle o también desde el flyback.

2.10.- Analogía entre vectores y funciones del tiempo.

Un vector es una magnitud tal que, para poderla comprender en su totalidad, no sólo es suficiente saber su valor (módulo), sino también una dirección y un sentido.

Es decir, si yo te digo que vivo a 10 km de ti, sólo con ello no sabes dónde vivo, pues he de decirte en qué dirección. La posición es por tanto una magnitud vectorial.

Sin embargo, una magnitud escalar está perfectamente definida por un valor. Por ejemplo, si te informo que he tardado 1minuto en escribir esto, ya sabes todo lo que quería decirte.

El tiempo es por tanto una magnitud escalar, no vectorial, al menos en la física clásica (sin meternos en honduras de la flecha termodinámica ni de la dirección hacia adelante del tiempo).

En física, un vector es un ente matemático como la recta o el plano. Un vector se representa mediante un segmento de recta, orientado dentro del espacio euclidiano tridimensional. El vector tiene 3 elementos: módulo, dirección y sentido. Los vectores nos permiten representar magnitudes físicas vectoriales, como las mencionadas líneas abajo.

En matemáticas se define vector como un elemento de un espacio vectorial. Esta noción es más abstracta y para muchos espacios vectoriales no es posible representar sus vectores mediante el módulo y la dirección. En particular los espacios de dimensión infinita sin producto escalar no son representables de ese modo. Los vectores en un espacio euclídeo se pueden representar geométricamente como segmentos de recta , en el plano (bidimensional), o en el espacio (tridimensional).

Algunos ejemplos de magnitudes físicas que son magnitudes vectoriales: la velocidad con que se desplaza un móvil, ya que no queda definida tan solo por su módulo que es lo que marca el velocímetro, en el caso de un automóvil, sino que se requiere indicar la dirección (hacia donde se dirige), la fuerza que actúa sobre un objeto, ya que su efecto depende además de su magnitud o módulo, de la dirección en la que actúa; también, el desplazamiento de un objeto, pues es necesario definir el punto inicial y final del movimiento.

Características de un vector

Un vector se puede definir por sus coordenadas, si el vector está en el plano xy, se representa:

$$\vec{V} = \boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$$

siendo sus coordenadas:

$$V_x,\ V_y$$

Si consideramos el triángulo formado por los componentes V_x, V_y (como catetos) y V (como hipotenusa): se puede calcular V_x multiplicando V por el **cosα** (siendo **α** el ángulo formado por V_x y V) o multiplicando V por el **senβ** (siendo **β** el ángulo formado por V_y y V). De igual forma se puede calcular V_y multiplicando V por el **senα** o multiplicando V por el **cosβ** (considerando las posiciones de **α** y **β** mencionadas anteriormente).

Siendo el vector la suma vectorial de sus coordenadas:

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y}$$

Si un vector es de tres dimensiones reales, representado sobre los ejes x, y, z, se puede representar:

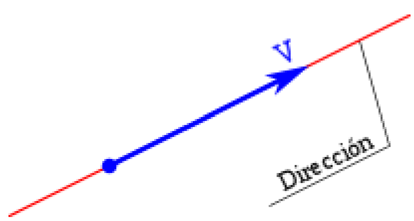
$$\vec{V} = \boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$$

siendo sus coordenadas:

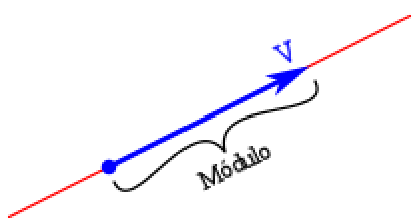
$$V_x,\ V_y,\ V_z$$

Si representamos el vector gráficamente podemos diferenciar los siguientes elementos:

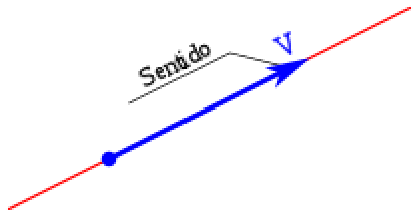
La recta soporte o **dirección**, sobre la que se traza el vector.



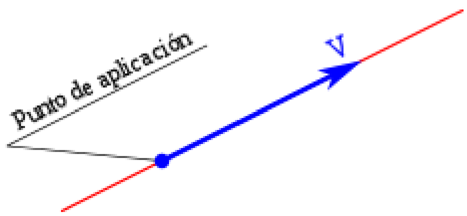
El **módulo** o amplitud con una longitud proporcional al valor del vector.



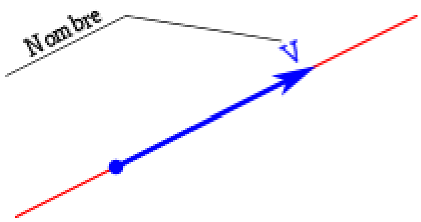
El **sentido**, indicado por la punta de flecha, siendo uno de los dos posibles sobre la recta soporte.



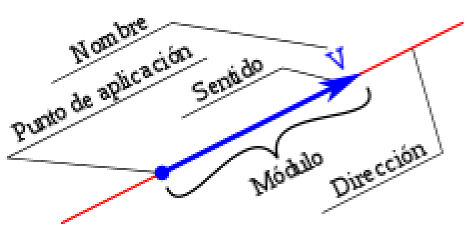
El **punto de aplicación** que corresponde al lugar geométrico al cual corresponde la característica vectorial representado por el vector.



El **nombre** o denominación es la letra, signo o secuencia de signos que define al vector.



Por lo tanto, en un vector podemos diferenciar:



2.11.- La serie compleja o exponencial de Fourier de señales periódicas continuas.

Las transformaciones de la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier convierten las señales en el dominio del tiempo en representaciones en el dominio de la frecuencia (o espectrales). El análisis de

Fourier es esencial para describir ciertos tipos de sistemas y sus propiedades en el dominio de la frecuencia.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). El nombre se debe al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, que desarrolló la teoría cuando estudiaba la ecuación del calor. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicó sus resultados iniciales en 1807 y 1811. Esta área de investigación se llama algunas veces análisis armónico.

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Sus áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo. Refiérase al uso de un analizador de espectros.

Forma compleja

Por la identidad de Euler, las fórmulas geométricas de Fourier también pueden expresarse en su forma compleja:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

Los coeficientes ahora serían:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} \, dt.$$

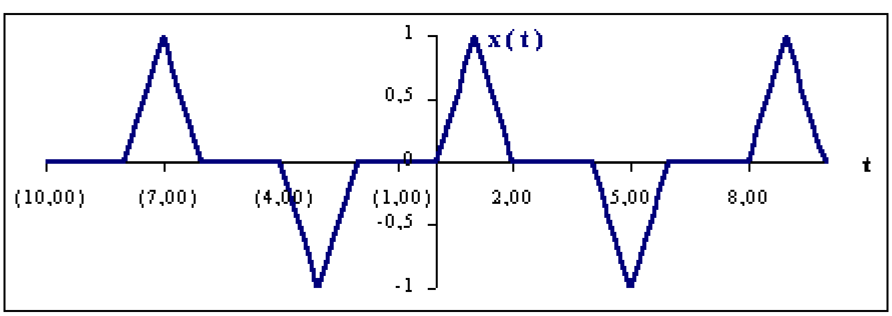
2.11.1.- Condiciones de simetría.

Se le llama así a la correspondencia de posición que existe, o debería existir, entre dos puntos o elementos. Se trata de una característica presente en las diversas construcciones geométricas, sistemas y ecuaciones, además de encontrarse en los seres vivos y entes abstractos. Sin embargo, en un aspecto formal, el objeto simétrico es aquél que, partiendo de cierto problema matemático resuelto y que es aplicado para la creación de un objeto similar, el primero no podrá ser diferenciado del último, puesto que tendrán las mismas características, medidas y constitución.

Simetría de Media Onda

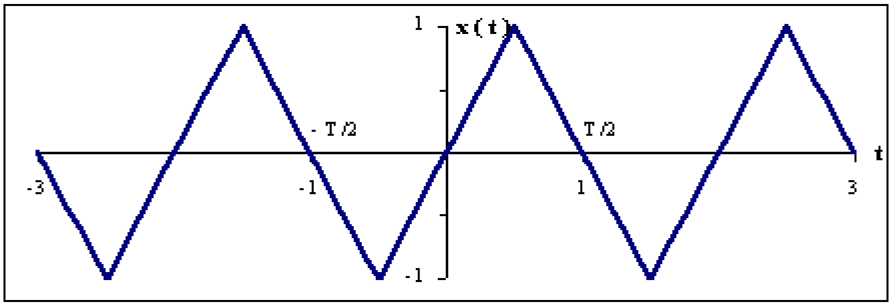
x(t) = - x (t ± T/2)

Tipo de simetría existente en algunas señales periódicas que permite muchas veces la simplificación de diversos cálculos. Gráficamente se verifica al invertir y desplazar medio período (adelante o atrás) la señal y obtener como resultado una señal idéntica a la original. Ejemplo:

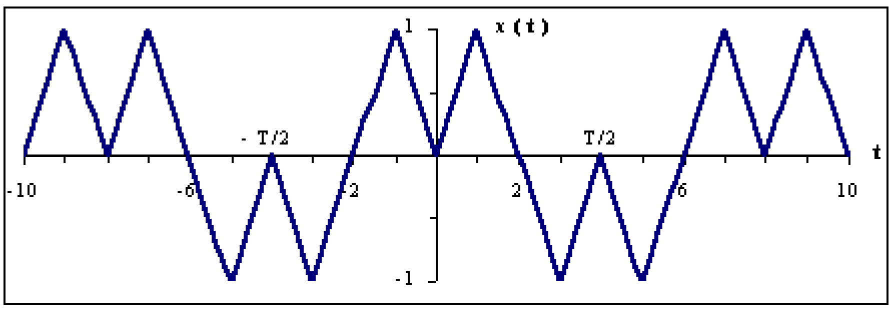


La simetría de Media Onda puede combinarse también con las simetrías Par e Impar, dando como resultado Simetrías de Cuarto de Onda Par e Impar respectivamente.

Ejemplo: Cuarto de Onda Impar:



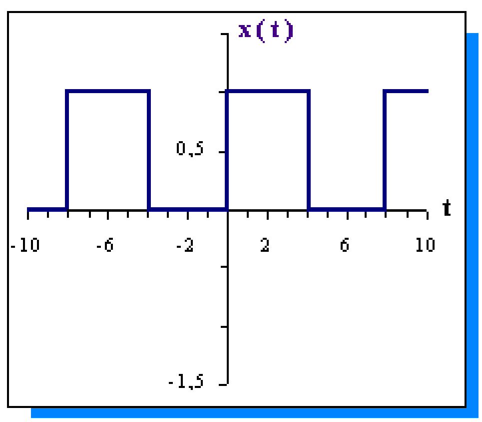
Ejemplo: Cuarto de Onda Par:



Simetrías Escondidas

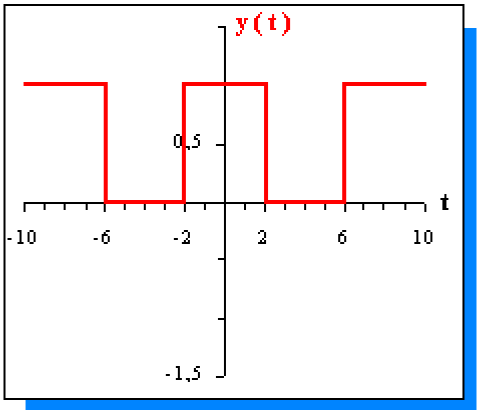
Algunas señales no poseen ningún tipo de simetría, pero si son manipuladas adecuadamente dan origen a señales con simetrías que antes no eran evidentes. Ejemplo:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 4 \\ 0 & 4 < t < 8 \\ x(t) = x(t \pm T) & T = 8 \end{cases}$$

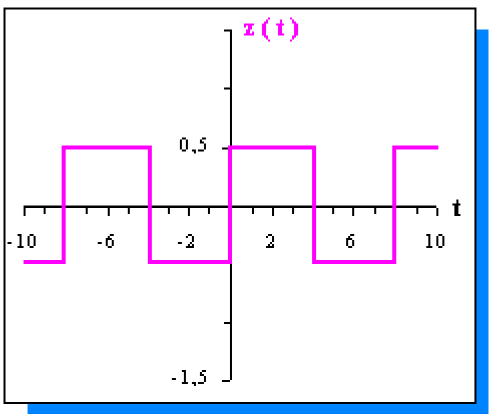


Esta señal, si es desplazada (adelantada), da origen a una señal con Simetría Par:

y (t) = x (t + 2)



Si se le resta 0.5, da origen a una señal con Simetrías Impar y de Media Onda (Cuarto de Onda Impar): z (t) = x (t) - 0.5



2.11.2.- El espectro discreto de potencia y la relación de Parseval.

En matemáticas, la Relación de Parseval demuestra que la Transformada de Fourier es unitaria; es decir, que la suma (o la integral) del cuadrado de una función es igual a la suma (o a la integral) del cuadrado de su transformada. Esta relación procede de un teorema de 1799 sobre series, cuyo creador fue Marc Antoine Parseval. Esta relación se aplicó más tarde a las Series de Fourier.

Aunque la Relación de Parseval se suele usar para indicar la unicidad de cualquier transformada de Fourier, sobre todo en física e ingeniería, la forma generalizada de este teorema es la Relación de Plancherel.

Teorema de Parseval

El valor medio de una señal se define como la media de todos los valores que definen y componen la misma cuya suma representa el área bajo la curva entre un periodo de tiempo que matemáticamente se representa por la ecuación 1. Gráficamente corresponde a un triángulo que contiene el área equivalente a la que tiene la señal bajo su curva como se muestra en la figura 1.

$$Area = \int_0^T f(t)$$

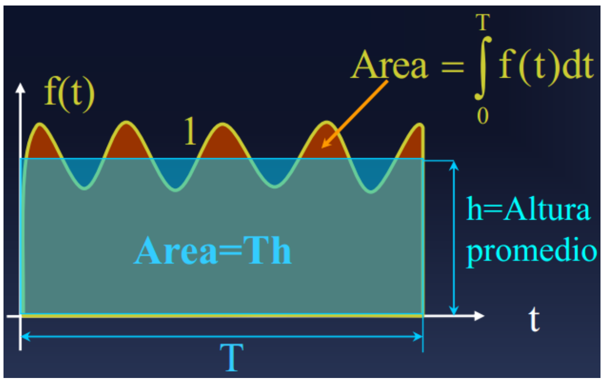


Fig. 1.: Área bajo la curva de señal

En los sistemas de comunicaciones es importante conocer la potencia promedio de las señales lo que es equivalente al valor cuadrático medio en un periodo definido (T) de la señal como lo muestra la ecuación 2, si f(f) corresponde a una señal de corriente o voltaje representa la potencia promedio entregada por la misma a una resistencia de 1Ω. Los límites de integración para una señal periódica corresponden a un periodo de la señal ya que, si se toma n periodos, se aumenta el tiempo n veces y de igual manera pasaría con el área, por lo tanto, se obtendría el mismo resultado.

$$p = \int_{-T/2}^{T/2} \{f(t)\}^2 dt$$

Ecuación 2.

El teorema de Parseval define que la potencia de las señales es equivalente a la suma de la potencia de sus componentes espectrales y se toma dependiendo de si la señal es periódica o no ya que para su análisis se implementa la serie y la transformada de Fourier respectivamente.

Teorema de Parseval para señales periódicas:

Si, por un lado, la serie de Fourier corresponde a la serie trigonométrica o, por el otro, a la exponencial compleja el Teorema de Parseval corresponde a las ecuaciones 3 y 4 respectivamente. En donde se define que la potencia de la señal es equivalente a la suma de la potencia de los componentes espectrales representados por los coeficientes a0, an y bn para el primer caso y Cn para el segundo. El valor cuadrático medio es correspondería al valor cuadrático medio de los componentes espectrales como lo muestra la ecuación 5, donde C0 es el nivel de offset de la señal y Cn la amplitud de la n-ésimo armónico.

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(t)\}^2dt = \frac{1}{4}{a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

Ecuación 3.

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(t)\}^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

Ecuación 4.

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|\frac{C_n}{\sqrt{2}}|^2$$

Teorema de Parseval para señales aperiódicas:

Como se mencionó anteriormente el análisis para este tipo de señales se hace a través de la Transformada de Fourier y de igual manera se aplica que la potencia corresponde a la contenida en cada una de sus armónicos. Es útil hablar del contenido de la Energía como se muestra en la ecuación 5, si f(t) corresponde al voltaje que se entrega a una carga de 1Ω la ecuación expresaría la energía total que entrega a la misma. Para este caso, el teorema de Parseval se plantea a través de la ecuación 8 en donde la energía de la señal se determina por la multiplicación del área bajo la curva que se denomina como espectro de energía de la señal expresada como $|f(w)|^2$ multiplicado por $1/2\pi$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Ecuación 5.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(w)|^2 \, dw$$

2.11.3.- Convergencia de la serie de Fourier y condiciones de Dirichlet.

Las series de Fourier se utilizan, básicamente, para analizar funciones que son periódicas; analizamos su correspondiente Serie de Fourier, que no es más que una descomposición de la función original en una suma infinita de funciones elementales en senos y cosenos que tienen frecuencias múltiplos de la señal inicial. En ingeniería se usan en óptica, acústica, procesamiento de señales (audio, vídeo o simplemente imágenes), estudio de vibraciones y perturbaciones de sistemas, etc…

Definición y algoritmo de cálculo de la Serie de Fourier

Sea $f(x)$ una función de una variable real. Supongamos que dicha función es integrable en un determinado intervalo de longitud T. Se define la serie de Fourier de $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx))$$

donde: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia fundamental .

Se llaman Coeficientes de Fourier a: a_0, a_n, b_n. Hay que tener en cuenta que tanto a_n como b_n hacen referencia a infinitos términos ya que como se ve en la expresión de la Serie de Fourier el sumatorio va desde 1 hasta n.

Parece obvio que una vez conozcamos los coeficientes de Fourier ya estaremos en disposición de poder construir la serie de Fourier de la función $f(x)$.

Notas a tener en cuenta de las Series de Fourier:

- La Serie de Fourier de $f(x)$ converge a $f(x)$ dentro del intervalo de longitud T. Fuera de este intervalo la Serie de Fourier no converge a $f(x)$ y lo que nos queda son periodos de la Serie de Fourier de $f(x)$ que existe dentro de dicho intervalo.
- Si la función $f(x)$ tiene un periodo T igual a la longitud del intervalo donde estamos expandiendo la Serie de Fourier obtendremos que la Serie de Fourier de $f(x)$ converge a la función $f(x)$ en todo su dominio y podemos decir, de forma precisa, que se trata de la Serie de Fourier de $f(x)$ sin tener que especificar ningún intervalo.

Se definen la Sumas Parciales de la Serie de Fourier $f(x)$ en el intervalo T o simplemente la Serie de Fourier de $f(x)$, si la función tiene periodo T, como:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(nwx)\right)$$

Nótese que la diferencia con la expresión inicial es que el sumatorio sólo llega hasta k. Así nos quedará para el caso concreto de $S_2(x)$:

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(1wx) + b_1 \sin(1\omega x) + a_2 \cos(2\omega x)$$

A los dos sumandos $a_1 \cos(1\omega x) + b_1 \sin(1wx)$ se les suele denominador primer armónico. Análogamente a los dos sumandos de subíndice 2 se les llama segundo armónico y así sucesivamente con cada dos sumandos del mismo subíndice.

Convergencia de Fourier

La convergencia de la serie de Fourier involucra tres aspectos distintos y fundamentales:

a) Que existan y puedan hallarse los coeficientes genéricos a_n y b_n
lo cual resulta obvio porque de lo contrario ni solo no habrá convergencia si no que no habrá serie.

b) Que exista la serie, lo cual requiere además de la existencia de los coeficientes, que pueda expresarse la función por una sumatoria infinita de términos.

c) Que la función desarrollada en serie de Fourier pueda, además, aproximarse por un numero finito de términos. Esto significa que pueda despreciarse el resto de los términos, a partir de un valor del índice "n" determinado y sin embargo la función así expresada se aproxime lo suficiente a la original.
Todos estos aspectos que definen si una serie es o no convergente, han sido estudiados y reunidos en las condiciones de Dirichlet, que sirven para establecer analíticamente la convergencia de Fourier.

Condiciones de Dirichlet

Las condiciones que una determinada función f(x) debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos. Para que una función f(x) sea susceptible de ser expandida en series de Fourier debe ser:

- periódica

- univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- La integral $\int_{-T/2}^{T/2} dx\, |f(x)|$ debe ser convergente. Donde [-T/2, T/2] quiere indicar el intervalo de definicion de una funcion con perido T.

2.11.4.- La serie trigonométrica de Fourier (STF).

Las series de Fourier tienen la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

Donde a_n y b_n se denominan coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de la función f(t).

Si ***f(t)*** es una función variable real ***t***, que es integrable en el intervalo $[t_o - T/2, t_o + T/2]$ entonces se puede obtener el desarrollo en serie de Fourier de *f* en ese intervalo. Fuera del intervalo la serie es periódica, con periodo T. Si ***f(t)*** es periódica en toda la recta real, la aproximación por series de Fourier también será válida en todos los valores de ***t***. Luego la serie de Fourier asociada a ***f(t)*** es:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right]$$

Donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt.$$

Otra forma de definir la serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

donde $\omega_n = n\omega$ y $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

siendo:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos \omega_n t dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin \omega_n t dt.$$

A esta forma de la serie de Fourier se le conoce como la serie trigonométrica de Fourier.

2.12.- La serie de Fourier de señales periódicas discretas.

El análisis para la representación de señales periódicas discretas en el dominio de la frecuencia resulta muy similar al empleado para las señales periódicas de tiempo continuo. La diferencia más importante radica en que la representación en serie de Fourier de una señal discreta es una serie finita, en oposición al caso de las señales periódicas continuas que requieren de una serie infinita.

La exponencial compleja discreta, $e^{j(2\square/N)n}$, es periódica con período N. además el conjunto de total de las señales exponenciales complejas discretas que son periódicas con período N está dado por:

$$\Phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n} \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En este conjunto solo hay N señales distintas, esto como consecuencia del hecho de que las exponenciales complejas discretas que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2 son idénticas (a diferencia de las exponenciales complejas de tiempo continuo que son todas diferentes):

$$\Phi_k[n] = \Phi_{k+rN}[n]$$

Definido este conjunto de exponenciales complejas, se puede entonces hallar la representación de Fourier para una señal periódica discreta, con período y frecuencia fundamental, mediante las ecuaciones:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} C_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=<N>} C_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Estas ecuaciones especifican una descomposición de x[n] en una suma de N exponenciales complejas relacionadas armónicamente, de ahí la existencia entonces de N valores para C_k (C_k=C_{k+N}), dando origen a un espectro discreto periódico.

Finalmente, para indicar la correspondencia entre una señal periódica x[n] y sus coeficientes C_k se utiliza la siguiente notación:

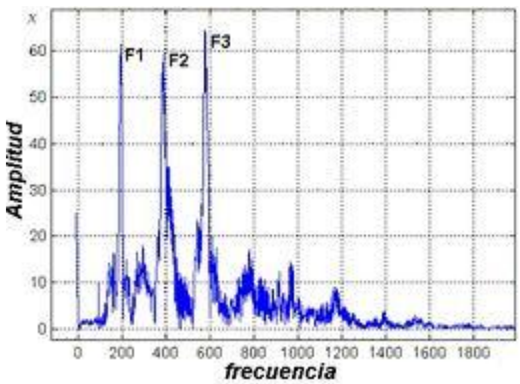
$$x[n] \xleftrightarrow{\Im s} C_k \quad ; \quad X[k] = C_k$$

Para facilitar el cálculo de estos coeficientes se debe aprovechar cualquier simetría presentada por la señal x[n] y una adecuada escogencia del intervalo de n para los N términos a utilizar en la sumatoria respectiva.

2.12.1.- El espectro discreto de frecuencias y la relación de Parseval.

El espectro de frecuencias se caracteriza por la distribución de amplitudes para cada frecuencia de un fenómeno ondulatorio (sonoro, luminoso o electromagnético) que sea superposición de ondas de varias frecuencias. También se llama espectro de frecuencia al gráfico de intensidad frente a frecuencia de una onda particular.

El espectro de frecuencias o descomposición espectral de frecuencias puede aplicarse a cualquier concepto asociado con frecuencia o movimientos ondulatorios como son los colores, las notas musicales, las ondas electromagnéticas de radio o TV e incluso la rotación regular de la tierra.



El espectro de frecuencia de un fenómeno ondulatorio (sonoro, luminoso o electromagnético), superposición de ondas de varias frecuencias, es una medida de la distribución de amplitudes de cada frecuencia. También se llama espectro de frecuencia al gráfico de intensidad frente a frecuencia de una onda particular.

El espectro de frecuencias o descomposición espectral de frecuencias puede aplicarse a cualquier concepto asociado con frecuencia o movimientos ondulatorios, sonoro y electromagnético = Una fuente de luz puede tener muchos colores mezclados en diferentes cantidades (intensidades).

Un prisma transparente, deflecta cada fotón según su frecuencia en un ángulo ligeramente diferente. Eso nos permite ver cada componente de la luz inicial por separado. Un gráfico de la intensidad de cada color deflactado por un prisma que muestre la cantidad de cada color es el espectro de frecuencia de la luz o espectro luminoso. Cuando todas las frecuencias visibles están presentes por igual, el efecto es el "color" blanco, y el espectro de frecuencias es uniforme, lo que se representa por una línea plana. De hecho, cualquier espectro de frecuencia que consista en una línea plana se llama blanco de ahí que hablemos no solo de "color blanco" sino también de "ruido blanco".

El espectro de frecuencias: El espectro de frecuencias se divide en dos grandes partes:

- ✓ Ondas materiales
- ✓ Ondas electromagnéticas.

Ondas Materiales:

Se propagan por vibraciones de la materia (sólida, líquida o gaseosa). Incluyen: Ondas infrasonoras (debajo de los 8Hz).

Ondas sonoras (entre 8 y 30,000Hz). Por ejemplo, voz humana (hasta 4,000Hz), audio (de 20Hz hasta 20,000Hz).

Ondas ultrasonoras (arriba de los 30,000Hz).

Ondas Electromagnéticas:

Son debidas a la vibración de un campo electromagnético, fuera de todo soporte material. Incluyen: Ondas radioeléctricas (o herzianas), que son generadas por una corriente oscilatoria, y que pueden ser miriamétricas o kilométricas (VLF/LF, very low frequency / low frequency, entre 0 y 315KHz), hectométricas (MF, medium frequency, entre 315KHz y 3230KHz), decamétricas (HF, high frequency, entre 3230KHz y 27,500KHz), métricas (VHF, very high frequency, entre 27,500KHz y 322MHz), decimétricas (UHF, ultra high frequency, entre 322MHz y 3300MHz), centimétricas (SHF, entre 3300MHz y 31.8GHz) o milimétricas (WHD, entre 31.8GHz y 400GHz).

Ondas luminosas (luz), originadas de un cuerpo luminoso que transmite su luz, y que pueden ser infrarrojo (longitud de onda entre 0.8 y 300 micras), visible (longitud de onda entre 0.4 y 0.8 micras, y que incluye los colores rojos, anaranjado, amarillo, verde, azul, turquesa y violeta), o ultravioleta (longitud de onda entre 0.02 y 0.4 micras).

Rayos X (longitud de onda hasta 0.001 micras), generados por cuerpos radioactivos. Rayos gamma (longitud de onda entre 0.005 a 0.25 Angstroms), generados por cuerpos radioactivos. Para efectos de telecomunicaciones son importantes las ondas radioeléctricas (comunicación inalámbrica) y las ondas luminosas (comunicación vía fibras ópticas).

RECURSOS EXTRA

serie de Fourier exponencial compleja

https://www.youtube.com/watch?v=9aC-sbRqcNo

Teorema de Parseval y espectro de potencia

https://www.youtube.com/watch?v=eWJCKNSYeR0

Series de Fourier y Condiciones de Dirichlet

http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos2/2008B/S03_C09.pdf

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

SÚPER NOTA

Realice una súper nota de la unidad numero dos; véase manual básico de actividades en plataforma UDS.

UNIDAD III: LA INTEGRAL DE FOURIER (TF) Y SUS APLICACIONES

Objetivo: El alumno podre resolver problemas aplicando la integral de Fourier y comprenderá todas las aplicaciones de la misma en los sistemas y señales.

3.1.- De la serie de Fourier a la integral de Fourier.
3.1.1.- El espectro continúo.

En física un espectro continuo generalmente significa un conjunto de valores alcanzables para cierta cantidad física (como energía o longitud de onda) que se describe mejor como un intervalo de números reales, en oposición a un espectro discreto, un conjunto de valores alcanzables que son discretos en el sentido matemático, donde hay una brecha positiva entre cada valor y el siguiente.

El ejemplo clásico de un espectro continuo, del cual se deriva el nombre, es la parte del espectro de la luz emitida por los átomos excitados de hidrógeno que se debe a que los electrones libres se unen a un ion de hidrógeno y emiten fotones, que se extienden suavemente en un amplio rango de longitudes de onda, en contraste con las líneas discretas debido a que los electrones caen de algún estado cuántico unido a un estado de menor energía.

El espectro continuo, también llamado térmico o de cuerpo negro, es emitido por cualquier objeto que irradie calor (es decir, que tenga una temperatura distinta de cero absoluto = -273 grados Celsius). Cuando su luz es dispersada aparece una banda continua con algo de radiación a todas las longitudes de onda.

3.1.2.- Relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.

Transformadas de Laplace puede ser considerada como un súper-conjunto de CTFT. Como ves, en un ROC si las raíces de la función de transferencia de la mentira en el eje imaginario, es decir, s=σ+jw, σ = 0, como se ha mencionado en comentarios anteriores, el problema de las transformadas de Laplace se reduce a la transformada de Fourier de Tiempo Continuo. Para retroceder un poco, sería bueno saber por qué transformadas de Laplace evolucionado en primer lugar, cuando nos había transformadas de Fourier. Usted ve, la convergencia de la función (señal) es una condición indispensable para una transformada de Fourier de existir (absolutamente summable), pero también hay señales en el mundo físico, donde no es posible tener tal convergente de las señales. Pero dado que su análisis es necesario, podemos hacer que ellos convergen, por la multiplicación de un monótonamente decreciente exponencial e^σ, lo que los hace converger, por su propia naturaleza. Esta nueva σ+jw se le da un nuevo nombre de 's', que a menudo nos sustituto como 'testigos de jehová' para señales sinusoidales de respuesta de las causales de los sistemas LTI. En el s-plane, si la ROC de la transformada de Laplace cubre el eje imaginario, entonces la transformada de Fourier siempre va a existir, ya que la señal que va a converger. Es de estas señales en el eje imaginario que comprenden señales periódicas e^jw = cos wt + j pecado wt (Euler).

De la misma manera, z-transformar es una extensión de la DTFT, en primer lugar, hacer que ellos convergen, segundo, para hacer nuestra vida mucho más fácil. Es fácil lidiar con una z que
con un e^jw (configuración de r, el radio del círculo de la república de china como untiy). La de Laplace y de Fourier son continuas (integral) se transforma de funciones continuas.

La transformada de Laplace se asigna una función f(t) a una función F(s) de la variable compleja s, donde s=σ+jω.

Puesto que la derivada ˙f(t)=df(t)dt mapas a sF(s), la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal es una ecuación algebraica. Por lo tanto, la transformada de Laplace es útil para, entre otras cosas, la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

Si fijamos la parte real de la variable compleja s a cero, σ=0, el resultado es la transformada de Fourier F(jω), que es esencialmente el dominio de la frecuencia, la representación de f(t).

La transformada en Z es esencialmente una versión discreta de la transformada de Laplace y, por lo tanto, puede ser útil en la solución de la diferencia de las ecuaciones, el discreto versión de diferencial de las ecuaciones. La transformada en Z asigna una secuencia f[n] a una función continua F(z) de la variable compleja z=rejΩ.

Si se establece la magnitud de z a la unidad, $r=1$, el resultado es el Tiempo Discreto la transformada de Fourier (DTFT) $F(j\Omega)$, que es esencialmente el dominio de la frecuencia, la representación de $f[n]$.

Además, son más propensos a utilizar una transformada de Fourier que Laplace para señales que no son causales, porque transformadas de Laplace hacer la vida mucho más fácil cuando se utiliza como Unilateral (Una cara) se transforma. Usted podría utilizar por ambos lados, el resultado va a trabajar a ser el mismo con algunas matemáticas de la variación.

La de Laplace y de Fourier son continuas (integral) se transforma de funciones continuas.

La transformada de Laplace se asigna una función $f(t)$ a una función $F(s)$ de la variable compleja s, donde $s=\sigma+j\omega$.

Puesto que la derivada $\dot{f}(t)=df(t)/dt$ mapas a $sF(s)$, la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal es una ecuación algebraica. Por lo tanto, la transformada de Laplace es útil para, entre otras cosas, la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

Si fijamos la parte real de la variable compleja s a cero, $\sigma=0$, el resultado es la transformada de Fourier $F(j\omega)$, que es esencialmente el dominio de la frecuencia, la representación de $f(t)$.

La transformada en Z es esencialmente una versión discreta de la transformada de Laplace y, por lo tanto, puede ser útil en la solución de la diferencia de las ecuaciones, el discreto versión de diferencial de las ecuaciones. La transformada en Z asigna una secuencia $f[n]$ a una función continua $F(z)$ de la variable compleja $z=rej\Omega$.

Si se establece la magnitud de z a la unidad, $r=1$, el resultado es el Tiempo Discreto la transformada de Fourier (DTFT) $F(j\Omega)$, que es esencialmente el dominio de la frecuencia, la representación de $f[n]$.

Diferencias entre la transformada de Laplace y Fourier

1.- La transformada de Laplace rara vez se resuelven mediante integración (si no por medio de tabla y uso de computadora (por ejemplo, matlab) es más común)
2.- La trasformada de Fourier se emplea con señales a periódicas a diferencia de la serie de Fourier.
3.- La transformada de Laplace es de amplia aplicación en el campo de la electrónica y la teoría de circuitos. Por otra parte, la transformada de Fourier, es de amplia aplicación en el análisis de señales, así como diferentes campos de la física (teoría de la difracción, mecánica cuántica.

3.2.- Propiedades y transformadas comunes.

3.2.1.- Propiedad de modulación.

Modulación engloba el conjunto de técnicas que se usan para transportar información sobre una onda portadora, típicamente una onda sinusoidal. Estas técnicas permiten un mejor aprovechamiento del canal de comunicación lo que posibilita transmitir más información de forma simultánea además de mejorar la resistencia contra posibles ruidos e interferencias. Según la American National Standard for Telecommunications, la modulación es el proceso, o el resultado del proceso, de variar una característica de una onda portadora de acuerdo con una señal que transporta información. El propósito de la modulación es sobreponer señales en las ondas portadoras.[12]

Básicamente, la modulación consiste en hacer que un parámetro de la onda portadora cambie de valor de acuerdo con las variaciones de la señal moduladora, que es la información que queremos transmitir

Básicamente, la modulación consiste en hacer que un parámetro de la onda portadora cambie de valor de acuerdo con las variaciones de la señal moduladora, que es la información que queremos transmitir. Esta técnica permite un mejor aprovechamiento del canal de comunicación lo que posibilita transmitir más información en forma simultánea además de mejorar la resistencia contra posibles ruidos e interferencias. Una señal portadora es una onda eléctrica modificada en alguno de sus parámetros por la señal de información (sonido, imagen o datos) y que se transporta por el canal de comunicaciones

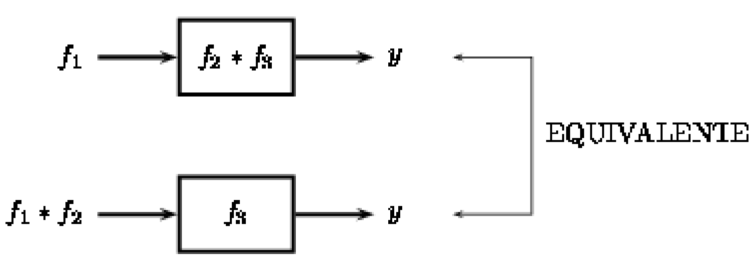
3.2.2.- Propiedad de convolución.

En este módulo veremos varias de las propiedades de convolución que más prevalecen. Nótese que estas propiedades se aplican a ambas convoluciones de tiempo continuo y de tiempo discreto. (Véase los dos módulos anteriores si necesita un repaso de convolución). También para algunas demostraciones de las propiedades, usaremos las integrales de tiempo-continuo, pero podemos probarlas de la misma manera usando las sumatorias de tiempo-discreto.

Asociatividad

Ley Asociativa

$f1(t)*(f2(t)*f3(t)) = (f1(t)*f2(t))*f3(t)$



Implicación gráfica de la propiedad de asociatividad de la convolución.

Conmutatividad

: Ley Conmutativa

$y(t)==f(t)*h(t)h(t)*f(t)$

Para probar la Ecuación, lo único que tenemos que hacer es un pequeño cambio de variable en nuestra integral de convolución (o suma),

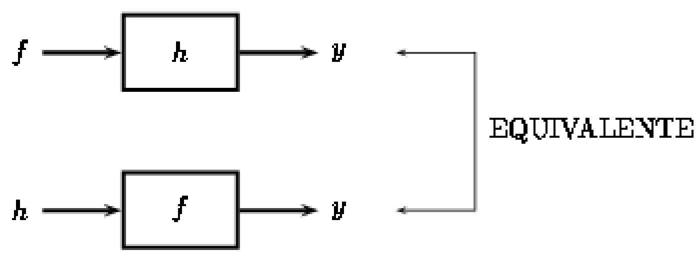
$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$

Dejando $\tau=t-\tau$

, podemos mostrar fácilmente que la convolución es conmutativa:

$y(t)==\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, h(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)\, d\tau$

$f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$



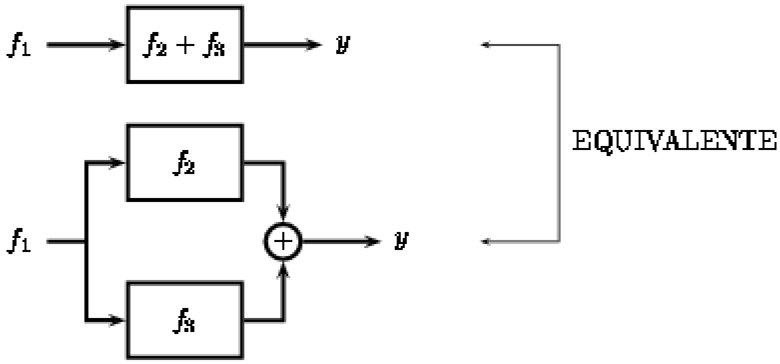
La figura muestra que ambas funciones pueden ser vistas como entradas del sistema mientras lo otro es la respuesta al impulso.

Distribución

Ley Distributiva

$f1(t)*(f2(t)+f3(t))=f1(t)*f2(t)+f1(t)*f3(t)$

La demostración de este teorema puede ser tomada directamente de la definición de convolución y usando la linealidad de la integral.



1. Las propiedades matemáticas de esta operación se corresponden directamente con la forma en que funcionan los circuitos lineales.
2. Propiedades θ Elemento neutro θ Distributividad θ Conmutatividad θ Asociatividad
3. Elemento Neutro. El elemento neutro de la convolución es: ◊La señal impulso, ya que al convolucionar cualquier señal con el impulso se obtiene en la salida la misma señal. En los sistemas cuya respuesta impulsional sea la salida es igual a la entrada.
4. Ejemplo, Para esta demostración, dejaremos que δ(t) sea el impulso unitario localizado en el origen, usando la definición de convolución empezamos con la integral de convolución
5. De la definición del impulso unitario, conocemos que: δ(τ)=0 Siempre que τ≠0. Usamos este hecho para reducir la ecuación anterior y obtener lo siguiente:
6. La integral de δ(τ) solo tendrá un valor cuando τ=0 Por lo tanto esa integral será igual a uno. Donde podemos simplificar la ecuación de nuestro teorema:
7. Ley Distributiva La demostración de este teorema puede ser tomada directamente de la definición de convolución y usando la linealidad de la integral. Ejemplo:
8. Ley Conmutativa. Es conmutativa pues el resultado de la operación es el mismo, cualquiera que sea el orden de los elementos con los que se opera.
9. Se define como la asociación (juntar) de varios números, de forma que su suma de, el mismo resultado que sin asociarse. Ley Asociativa

10. Ejemplo, La señal en la salida del sistema global es: 1. La salida en el primer sistema es 2. Esta señal es aplicada al segundo sistema, cuya salida valdrá:
11. Por otra parte, la respuesta impulsional global se puede calcular aplicando un impulso a la entrada global. La salida del primer sistema cuando la entrada sea un impulso será su respuesta impulsional. Esta señal se aplica al segundo sistema, cuya salida se calcula por medio de la convolución: Por tanto, Esta propiedad se cumple para cualesquiera
12. Desde un punto de vista teórico, en la asociación en cascada de circuitos LIT es indiferente el orden en que se conecten; sin embargo, en la práctica el orden sí importa porque los circuitos no suelen ser lineales y porque tienen distintas limitaciones físicas, Por último

3.3.- La transformada de Fourier de señales periódicas continúas.

Inicialmente el análisis de señales en el dominio de la frecuencia se enfoca hacia las señales periódicas de tiempo continuo. La representación de estas señales, en el dominio de la frecuencia, se logra utilizando para ello el conjunto ortogonal de señales conformado por las senoidales complejas (exponenciales) cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, esto es:

El conjunto de señales $\Phi_k(t) = e^{j\omega_k t}$ *ortogonal en en el intervalo (0,T)*

$$\text{donde}: \ \omega_o = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_k = k\,\omega_o, \quad E_k = T, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

permite representar la señal periódica (periodo T) como :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_o t} \qquad \text{donde}: \quad C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_o t}\, dt$$

Esta serie, conocida como serie exponencial de Fourier, es una forma muy conveniente de representar una señal x(t) en el domino de la frecuencia, ya que mediante sus coeficientes se obtienen:

- Espectro de Amplitud: $|C_k| = f(k_0)$, con simetría par si x(t) es una señal real.

Espectro de Fase: $C_k = g(k_0)$, con simetría impar si x(t) es una señal real.

Finalmente, para indicar la correspondencia entre una señal periódica x(t) y sus coeficientes C_n se utiliza la siguiente notación:

$$x(t) \xleftrightarrow{\Im s} C_k \quad ; \quad X(k) = C_k$$

El cálculo de estos coeficientes se facilita si la señal x(t) es real y posee algún tipo de simetría. En estos casos es aplicable la Serie Trigonométrica de Fourier, cuyos coeficientes son calculados aprovechando estas características de simetría. Para la obtención de la serie trigonométrica de Fourier se hace uso de las relaciones:

$$C_k = |C_k| e^{j\Phi_k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad y \quad e^{\pm j\alpha} = Cos(\alpha) \pm jSen(\alpha)$$

De este modo se obtiene una nueva expresión para la señal x(t):

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k Cos(k\omega_o t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k Sen(k\omega_o t) \;, \; donde:$$

$$\frac{a_o}{2} = C_o = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \;, \; a_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)Cos(k\omega_o t)dt \;, \; b_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)Sen(k\omega_o t)dt$$

Esta serie trigonométrica también se puede escribir en forma condensada:

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k Cos(k\omega_o t + \Phi_k) \;, \; donde:$$

$$\frac{a_o}{2} = C_o = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \;, \; A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \;, \; \Phi_k = Tg^{-1}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Condiciones de Simetría para la Señal X(T)

La existencia de simetría en la señal x(t) permite simplificar el cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier. A continuación, se resumen dichas condiciones de simetría ya las respectivas ecuaciones para el cálculo de los coeficientes.

TIPO DE SIMETRIA EN x(t)	CONDICION	CARACT. DE LA SERIE	a_k	b_k
PAR	$x(t) = x(-t)$	Términos de $Cos(k\omega_0 t)$	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)Cos(k\omega_0 t)dt$	0
IMPAR	$x(t) = -x(-t)$	Términos de $Sen(k\omega_0 t)$	0	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)Sen(k\omega_0 t)dt$
½ ONDA	$x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$	Armónicos Impares	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)Cos(k\omega_0 t)dt$	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)Sen(k\omega_0 t)dt$
¼ ONDA - PAR -	$x(t) = x(-t)$ $x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$	Armónicos Impares de $Cos(k\omega_0 t)$	$\frac{8}{T}\int_0^{T/4} x(t)Cos(k\omega_0 t)dt$	0
¼ ONDA - IMPAR -	$x(t) = -x(-t)$ $x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$	Armónicos Impares de $Sen(k\omega_0 t)$	0	$\frac{8}{T}\int_0^{T/4} x(t)Sen(k\omega_0 t)dt$

3.4.- Respuesta de SCLI a entradas exponenciales complejas y senoidales: respuesta en frecuencia.

Exponenciales Complejas

Se trata de señales fundamentales en el estudio delos sistemas lineales debido a sus características de auto función: "La respuesta de un sistema lineal a una determinada exponencial compleja es esa misma exponencial multiplicada por una constante (en general compleja)".

La propiedad anterior puede ser muy útil si se utiliza adecuadamente. Sise descompusiese cualquier señal como combinación lineal de exponenciales complejas, la respuesta de un sistema lineal a dicha entrada sería una combinación lineal de las mismas exponenciales complejas, pero con distintos coeficientes. Por ello, para caracterizar un sistema lineal bastará con caracterizar su respuesta a las exponenciales complejas. Si se restringe el análisis al caso de sinusoides complejas, la caracterización de la respuesta delos sistemas a sinusoides complejas constituye el objetivo del análisis de Fourier (transformadas y series de Fourier) o análisis en frecuencia. Gran parte de esta práctica va destinada a fijar conceptos del análisis de señales en el dominio de la frecuencia.

Exponenciales complejas continuas: son señales del tipo x(t)=Ceat donde C y a son, en general, números complejos. Dependiendo de cómo sean los valores de a y C tenemos los siguientes tipos de señales:

1) C y a reales: exponenciales reales (función atenuada)

2) a imaginario puro: sinusoide compleja. Si a=jω0, estas señales son periódicas de periodo T0=(2π) /ω0.

Se llaman sinusoides armónicamente relacionadas de periodo fundamental T0 a la familia de sinusoides relacionada por la expresión:

ϕk(t) = ejkω0t; k = 0, ±1, ±2, ...

Como se verá en el siguiente apartado, dichas funciones se emplean como base para desarrollar en serie señales continuas periódicas (series de Fourier).

3) C y a complejos: exponencial compleja, que se compone de una sinusoide compleja multiplicada por una exponencial real:

x(t) = ρ·eαt ·ej (ω0t + ϕ)

Exponenciales complejas discretas: son secuencias del tipo x[t]=Ceβ donde C y βson, en general, números complejos. Dependiendo de cómo sean los valores de βy C tenemos los siguientes tipos de secuencias:

1) C y βreales: exponenciales reales (función atenuada)

2) βimaginario puro: sinusoide compleja. Estas señales tienen dos particularidades que debemos recordar ($\beta=j\Omega 0$):

* La sinusoide es periódica en $\Omega 0$, de periodo 2π(basta con analizar $\Omega 0$

en el intervalo $[0,2\pi)$). La principal consecuencia de esta propiedad es que una sinusoide continúa muestreada no puede ser recuperada a partir de sus muestras si la frecuencia de muestreo es inferior al doble de su frecuencia.

Este fenómeno debe tenerse perfectamente claro, por lo que debe reflexionarse sobre esta propiedad. Algunos ejercicios de la práctica ayudarán a relacionar esta propiedad con el teorema de muestreo.

Las secuencias sinusoidales solamente son periódicas cuando se cumple$\Omega 0/(2\pi) =m/N$, donde N es el periodo y m un número entero (frecuencia racional). En el resto de los casos no existe periodicidad, como ocurría en el caso continuo.

3) C y βcomplejos: exponencial compleja, que se compone de una sinusoide compleja multiplicada por una exponencial real:

$x[n] = \rho \cdot e\alpha n \cdot ej\ (\Omega 0\ n+ \phi)$

Durante el desarrollo de la práctica tendrá oportunidad de visualizar diversas señales de este tipo, tanto continuas como discretas, así como composiciones de las mismas.

3.5.- Fundamentos de muestreo y reconstrucción de señales.

Como se ha mencionado anteriormente, el convertidor (C/D) realiza dos procesos, la operación de muestreo y la conversión a tiempo discreto. Uno de los métodos de muestreo y con versiona tiempo discreto más típicos consiste en realizar un muestreo periódico o uniforme, el cual se basa en la selección de muestras de la señal analógica en un intervalo de tiempo uniforme. Matemáticamente, el procedimiento consiste en sustituir la variable t=n T, donde T es el periodo de muestreo, obteniendo una secuencia de muestras:
$x[n] = xa\ (n\ T),\ n \in Z$

donde la frecuencia de muestreo es fs= 1/T y viene dada en muestras por segundo. También se puede expresar en radianes por segundo, ωs= 2π/T. La diferencia más importante entre la señal analógica y la señal discreta es que la variable independiente de la secuencia es un índice entero donde se ha perdido la dimensión temporal, es decir, se ha producido una normalización temporal. Como veremos, esta relación entre la variable temporal analógica (t) y discreta (n) se transforma en una relación análoga entre el dominio de la frecuencia de tiempo continuo y de tiempo discreto.

En general, la operación de muestreo es no invertible porque se produce perdida de información de la señal, ya que pueden existir varias señales analógicas diferentes que coincidan en los puntos de muestreo, generando la misma señal muestreada. Sin embargo, si imponemos alguna limitación a las señales analógicas, esta ambigüedad puede resolverse y el proceso pasa a ser invertible. Esta limitación viene dada por el teorema del muestreo. Se puede demostrar que el sistema de la siguiente figura es una operación lineal pero no invariante en el tiempo.

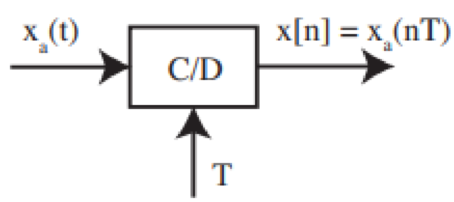


Figura 2.5: Representación de un convertidor C/D ideal.

RECURSOS EXTRA

Relación entre Laplace y Fourier

https://www.youtube.com/watch?v=QlAyIjaldpA

Transformada de Fourier señales periódicas

https://www.youtube.com/watch?v=lKVshFpe6Fc

Propiedades de la convolucion

https://www.youtube.com/watch?v=OU22uW8xSRQ

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

MAPA CONCEPTUAL

Realice un mapa conceptual de la unidad número tres; véase manual básico de actividades en plataforma UDS.

UNIDAD IV: INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO (TFTD).

Objetivo: El estudiante podrá resolver ejercicios aplicando la transformada de Fourier en tiempo discreto, así como la identificación de su relación con la transformada de Z.

4.1- La transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD).

Definición y propiedades.

En la práctica, determinar la salida y separar la parte de estado estable de la respuesta de un sistema puede ser un proceso largo y difícil. Sin embargo, si sólo se requiere la parte de estado estable, suele ser más fácil y directo hacer un análisis senoidal de estado estable en el que la entrada se modela como una superposición de componentes senoidales y cosenoidales estables de diferentes frecuencias.

Recuérdese que este procedimiento se basa en el hecho de que la respuesta de estado estable de un sistema lineal invariante con el tiempo (L.T.I) a una entrada senoidal o cosenoidal es una senoide de la misma frecuencia, pero que difiere en amplitud y fase. Cuando una suma lineal de componentes senoidales y cosenoidales se aplica a un sistema lineal estable, el sistema responde modificando la amplitud y produciendo un desfase de cada componente de entrada de una magnitud que depende de su frecuencia. La superposición lineal de todas las componentes modificadas constituye la salida de estado estable del sistema.

Cuando se trabaja con señales y sistemas de tiempo continuo, la señal de entrada x(t) se representa por su Transformada de Fourier X(jw) y el sistema por su función de respuesta en frecuencia de estado estable H(jw). El producto de X(jw) y H(jw) determinan el espectro de salida: Y(jw)=H(jw) X(jw) el cual, al ser invertido, proporciona la forma de onda de la señal de salida de estado estable y(t).

Ahora bien, se sabe que la función de respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo continuo puede encontrarse directamente aplicando la transforma de Fourier a la respuesta al impulso unitario, h(t)

T F

$h(t)$ <----------> $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt$

La función de respuesta en frecuencia de un sistema digital está relacionada de manera similar a su respuesta a la muestra o impulso unitario h[n] por una transformación formal. Es decir,

T F T D

$h[n]$ <----------> $H(e^{j \cdot \omega \cdot T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot T}$

o bien T F T D

$h[n]$ <---------->   ; W = w T

donde TFTD es la Trasformada de Fourier de tiempo discreto. Más adelante veremos que ambas definiciones son equivalentes, donde T es el periodo de muestreo $f_s = 1/T$.

Puesto que la fase W es igual a Tw (W = w T), a un valor de la fase comprendido entre 0 y p ($0 \le \Omega \le \pi$), donde $\Omega = \alpha \cdot \pi$ $0 \le \alpha \le 1$ le corresponde una frecuencia f deducida por:

$$\Omega = \omega \cdot T$$

teniendo en cuenta que:

$$\Omega = \alpha \cdot \pi; \quad \alpha \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T$$

de donde se obtiene que:

$$f = \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot f_s \cdot \alpha$$

Expresión que la relaciona la frecuencia en cuestión con el periodo o la frecuencia de muestreo y la fase correspondiente.

Respecto de la convergencia de la TFTD debemos hacer las siguientes consideraciones. La integral de Fourier de tiempo continuo siempre converge hacia una función bien definida de la frecuencia cuando se aplica a señales de energía finita.

De manera similar, se puede garantizar que la suma de los términos exponenciales que define al la TFTD de una secuencia será finita para todas las frecuencias restringiendo su aplicación a secuencias aperiódicas que se reducen a cero para valores crecientes de n. Es condición necesaria y suficiente que se verifique la condición

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right| < \infty .$$

Se dice que una secuencia con esta propiedad es absolutamente sumable. Puede demostrarse además que una secuencia absolutamente sumable es por fuerza aperiódica y que posee energía finita, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 < \infty .$$

La función de respuesta en frecuencia definida como $H(e^{j\cdot\omega T})$ o bien $H(\Omega)$ caracteriza la respuesta de estado estable de un sistema de tiempo discreto a una componente de entrada exponencial compleja $v[n] = e^{j\cdot n\cdot\omega T}$ o bien $v[n] = e^{j\cdot n\cdot\Omega}$. En general las funciones $H(e^{j\cdot\omega T})$ y $H(\Omega)$ son complejas que se expresan en forma polar como:

$$H(e^{j\cdot\omega T}) = \left|\mathrm{H}(\mathrm{e}^{j\cdot\omega\mathrm{T}})\right|\cdot e^{j\cdot\phi(\omega)} \quad \text{o} \quad H(\Omega) = \left|\mathrm{H}(\Omega)\right|\cdot e^{j\cdot\phi(\Omega)}$$

En esta sección desarrollaremos la TFTD según la definición:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cdot e^{-j\cdot n\cdot\Omega}$$

Desde un punto de vista práctico la mayoría de las señales digitales no son periódicas. Hay varias formas de enfocar el desarrollo de la Transforma de Fourier de una secuencia digital. Un procedimiento es vía la Transformada de Fourier aplicada a una señal analógica.

Sin embargo, puesto que nuestro estudio está relacionado con los sistemas digitales es preferible efectuar el análisis a partir de aproximaciones en el entorno digital.

Este análisis aplicado a una secuencia periódica se modela como:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-\frac{2\cdot\pi n}{N}\cdot k\cdot j}$$

Aunque la ecuación especifica el periodo entre n=0 y N-1, cualquier otro periodo completo es así mismo válido.

4.2.- Relación de la TFTD con la transformada Z.

Una generalización de la Transformada de Fourier es la transformada Z. Ventajas de la Transformada Z La Transformada de Fourier no converge para todas las secuencias La transformada Z tiene la ventaja de que, en problemas analíticos, el manejo de su notación, expresiones y álgebra es con frecuencia más conveniente El empleo de la transformada Z en señales discretas tiene su equivalente en la transformada de Laplace para señales continuas y cada una de ellas mantiene su relación correspondiente con la transformada de Fourier. El empleo de la transformada Z en señales discretas tiene su equivalente en la transformada de Laplace para señales continuas y cada una de ellas mantiene su relación correspondiente con la transformada de Fourier.

Transformada de Fourier $$x(\Omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}$$

La transformada de la misma secuencia tambien se define como $$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Segun la variable compleja continua z $$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

La correspondencia entre una secuencia y su transformada se denota como: $$x(k) \leftrightarrow X(z)$$

La transformada de Fourier es $X(z)$ simplemente con $z = e^{j\omega}$

La transformada de Fourier es la transformada Z tomando $|Z| = 1$

La transformada de la misma secuencia también se define como Según la variable compleja continua z La correspondencia entre una secuencia y su transformada se denota como: La transformada de Fourier es simplemente con La transformada de Fourier es la transformada Z tomando.

Propiedades de la transformada de Z

La transformada Z posee propiedades que facilitan la solución de ecuaciones en diferencias lineales usando simplemente manipulaciones algebraicas.

a) SUPERPOSICIÓN

Se compone de las características de:

1)Homogeneidad: $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$af(k) \leftrightarrow aF(z)$$

2)Aditividad: $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$

$$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$$

$$f_1(k) + f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) + F_2(z)$$

4.3.- Representación de señales de duración finita.

Una señal continua o señal en el tiempo-continuo es una señal que puede expresarse como una función cuyo dominio se encuentra en el conjunto de los números reales, y normalmente es el tiempo. La función del tiempo no tiene que ser necesariamente una función continua.

La señal es definida sobre un dominio que puede ser o no finito, sobre el cual a cada posible valor del dominio le corresponde un único valor de la señal. La continuidad de la variable del tiempo implica que el valor de la señal puede precisarse para cualquier punto arbitrario del tiempo perteneciente al dominio. Un ejemplo típico de una señal continua: Son las pilas eléctricas

$$f(t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

El mismo ejemplo con duración finita podría ser:

$f(t) = \sin(t), \quad t \in [-\pi, \pi]$ y $\quad f(t) = 0$ para cualquier otro valor de $\quad t$.

El valor de una señal de duración finita (o infinita) puede o no ser finito. Por ejemplo,

$f(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in [0, 1]$ y $\quad f(t) = 0$ para cualquier otro valor de $\quad t$,

es una señal de duración finita pero toma un valor infinito para $t = 0$.

RECURSOS EXTRA

Transformada de Fourier de tiempo discreto

https://www.youtube.com/watch?v=ifZWHOOxhTE

Señales y sistemas: Transformadas

https://www.youtube.com/watch?v=DJ9C8iSE8tk

Señales básicas de tiempo discreto

https://www.youtube.com/watch?v=-4K-oJI7yPs

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

ENSAYO

Realice un ensayo de la unidad número cuatro; véase manual básico de actividades en plataforma UDS.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Articulo. (2019). Sistema LTI. 2019, de Wikipedia Sitio web: https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_LTI

Articulo. (2019). FIR (Finite Impulse Response). 29 de julio de 2019, de Wikipedia Sitio web: https://es.wikipedia.org/wiki/FIR_(Finite_Impulse_Response)

Articulo. (2017). La transformada de Laplace. 2017, de UCLM Sitio web: https://previa.uclm.es/profesorado/raulmmartin/AmpliacionMatematicas/laplace.pdf

Articulo. (2020). Vector. 21 de julio de 2020, de Wikipedia Sitio web: https://es.wikipedia.org/wiki/Vector

Articulo. (2020). Serie de Fourier. 16 de julio de 2020, de Wikipedia Sitio web: https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier

Aguirre L. (2019). Simetría de media Onda. 2019, de UNET.EDU Sitio web: http://www.unet.edu.ve/aula10c/Asenales/Unid01/Sim03.htm

Aguirre L. (2019). Simetrías escondidas. 2019, de UNET.EDU Sitio web: http://www.unet.edu.ve/aula10c/Asenales/Unid01/Sim04.htm

Berical E. (2017). Series de Fourier, continuación. 2017, de Series de Fourier, Sitio Web: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos2/2008B/S03_C09.pdf

Castell E. (2003). La serie de Fourier para señales discretas (SFSD). 2003, de Castell Sitio web: https://www.elconesvida.net/fcastell/aula10c/Asenales/Unid02/perdis.htm

Castell E. (2003). La serie de Fourier (SF). 2003, de Castell Sitio web: https://www.elconesvida.net/fcastell/aula10c/Asenales/Unid02/percon.htm

Cárdenas A. (2012). Señales y su clasificación: analógicas, digitales, eléctricas y ópticas. 25 de octubre de 2012, de Blogspot Sitio web: http://fundamentosdetelecomunicacionesslm.blogspot.com/2012/10/senales-y-su-clasificacion-analogicas.html

Cerviño M. (2019). Variables de estado en sistemas lineales de tiempo discreto. Sitio web: https://catedra.ing.unlp.edu.ar/electrotecnia/controlm/electronica/archivos/apuntes/cap6.pdf

Edison del Rosario. (2017). Sistemas – continuos y discretos. 14 de marzo de 2017, de Blogspot Sitio web: http://blog.espol.edu.ec/telg1001/sistemas-continuos-y-discretos/

Fromm E. (2017). La Transformada Z. Sitio web: http://dctrl.fi-b.unam.mx/ricardo/Transformada%20Z/La%20Transformada%20Z_corregido.pdf

Grajales A. (2020). Series de Fourier. 10 de agosto de 2020, de Física y Mates Sitio web: https://fisicaymates.com/series-de-fourier/

Hernández A. (2015). Derivación de señales. 2015, de Unet.com Sitio web: http://www.unet.edu.ve/aula10c/Asenales/Unid01/cuarto06.htm

Hernández A. (2015). Integración de señales. 2015, de Unet.com Sitio web: http://www.unet.edu.ve/aula10c/Asenales/Unid01/cuarto07.htm

Jurado Inés. (1998). Análisis y aplicación de sistemas lineales utilizando Matlab. 1998, de Tesis de grado. Web: https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/11729/1/T1342pt.1.pdf

Juan Ignacio. (2019). Convergencia Series de Fourier - Condiciones de Dirichlet. 22 junio de 2019, de Scribd Sitio web: https://es.scribd.com/document/414198810/Convergencia-Series-de-Fourier-Condiciones-de-Dirichlet

Jasón. (2013). La relación y la diferencia entre Fourier, Laplace y las transformaciones Z. 25 de octubre de 2013, de Ciencias.com Sitio web: https://www.i-ciencias.com/pregunta/7653/relacion-y-diferencia-entre-la-transformada-de-fourier-laplace-y-z-se-transforma

López C. (2019). Estabilidad Entrada – Salida. 2019, de Sistemas Dinámicos Lineales Sitio web: https://controlautomaticoeducacion.com/sistemas-dinamicos-lineales/5-1-estabilidad-entrada-salida/

Mora, T. (2017). Integral de Convolución. 2017, de Análisis de sistemas Sitio web: https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/integral-de-convolucion/

Martorell J. (2018). La Función de Transferencia. 12 de septiembre de 2018, de Much conection Sitio web: https://dademuch.com/2018/09/12/la-funcion-de-transferencia/

Pinto R. (2019). Ecuaciones y sistemas en diferencias. 2019, de Matema Ujaen Web: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_recursos/archivos/matriciales/sistemas%20dinamicos.pdf

Pablo Turmero. (2018). La transformada Z. 2018, de Monografías Sitio web: https://www.monografias.com/trabajos106/la-transformada-z/la-transformada-z.shtml

Reyes H. (2018). Ecuaciones en diferencias. 2018, de Ecuaciones en diferencias Sitio web: https://personal.us.es/pnadal/Informacion/leccion5ecdiferencias.pdf

Real Academia. (2017). Crominancia. 2017, de Sensagent Sitio web: http://diccionario.sensagent.com/Crominancia/es-es/

Santiago G. (2013). Teorema de Parseval. 8 de abril del 2013, de Blogspot Sitio web: https://teoremaparseval.blogspot.com/2013/04/teorema-de-parseval.html

Teruel F. (2019). Respuesta forzada a una entrada exponencial utilizando el Diagrama de Bode. 2019, de Much Conection Sitio web: https://dademuch.com/2020/06/21/respuesta-forzada-a-una-entrada-exponencial-utilizando-el-diagrama-de-bode/

Teruel F. (2018). Respuesta Transitoria de un Sistema de Control. 2018, de Much Conection Sitio web: https://dademuch.com/2018/03/09/respuesta-transitoria-de-un-sistema-de-control/

Zamora P. (2019). Muestreo y Reconstrucción de Señales. 2019, de Agamenon.ts Sitio web: http://agamenon.tsc.uah.es/Asignaturas/it/tds/apuntes/tds_tema_2_teoria.pdf