



**Mi Universidad**

**ANTOLOGÍA**

*Estática*

*Ingeniería en Sistemas Computacionales*

*2º Cuatrimestre*

*Enero - Abril*

---

## Marco Estratégico de Referencia

---

### Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes

que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán - Tzitol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

## **Misión**

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## **Visión**

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

## **Valores**

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

## Escudo



El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

## Eslogan

“Mi Universidad”

## ALBORES



Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

---

## Estática

---

### **Objetivo de la materia:**

Al finalizar el curso el alumno será capaz de ubicar en el espacio, la descomposición de la misma, determinar condiciones de equilibrio y su aplicación y conocerá el comportamiento de los elementos de una armadura (métodos de nudos y de secciones), además de cables y sus esfuerzos.

## Contenido.

### **UNIDAD I ESTÁTICA DE PARTÍCULAS**

- 1.1 Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas
- 1.2 Vectores
- 1.3 Adición o suma de vectores
- 1.4 Resultante de varias fuerzas concurrentes
- 1.5 Descomposición de una fuerza en sus componentes
- 1.6 Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios
- 1.7 Adición de fuerzas sumando sus componentes x y y
- 1.8 Equilibrio de una partícula
- 1.9 Primera ley del movimiento de Newton
- 1.10 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio
- 1.11 Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre línea de acción
- 1.12 Adición de fuerzas concurrentes en el espacio

### **UNIDAD II ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS**

- 2.1 Definición de una armadura
- 2.2 Armaduras simples
- 2.3 Análisis de armaduras mediante el método de los nodos
- 2.4 Nodos bajo condiciones especiales de carga
- 2.5 Armaduras en el espacio o espaciales
- 2.6 Análisis de armaduras por el método de secciones
- 2.7 Armaduras formadas por varias armaduras simples
- 2.8 Estructuras que contienen elementos sujetos a fuerzas múltiples
- 2.9 Análisis de un armazón
- 2.10 Armazones que dejan de ser rígidos cuando se separan de sus soportes
- 2.11 Máquinas

### **UNIDAD III ROZAMIENTO O FRICCIÓN**

- 3.1 Introducción
- 3.2 Leyes de la fricción seca. Coeficientes de fricción
- 3.4 Ángulos de fricción
- 3.5 Problemas que involucran fricción seca
- 3.6 Cuñas
- 3.7 Tornillos de rosca cuadrada
- 3.8 Chumaceras. Fricción en ejes
- 3.9 Cojinetes de empuje. Fricción en discos
- 3.10 Fricción en ruedas. Resistencia a la rodadura o rodamiento
- 3.11 Fricción en bandas

### **UNIDAD IV FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA**

- 4.1 Introducción



- 4.2 Segundo momento o momento de inercia de un área
- 4.3 Determinación del momento de inercia de un área por integración
- 4.4 Momento polar de inercia
- 4.5 Radio de giro de un área
- 4.6 Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner
- 4.7 Momentos de inercia de áreas compuestas
- 4.8 Producto de inercia
- 4.9 Ejes principales y momentos principales de inercia
- 4.10 Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia
- 4.11 Momento de inercia de una masa
- 4.12 Teorema de los ejes paralelos
- 4.13 Momentos de inercia de placas delgadas
- 4.14 Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración
- 4.15 Momentos de inercia de cuerpos compuestos

# ÍNDICE (paginado)

## Contenido

Misión.....	4
Visión.....	4
Valores .....	4
Escudo .....	5
Eslogan .....	5
ALBORES.....	6
<b>UNIDAD I ESTÁTICA DE PARTÍCULAS .....</b>	<b>12</b>
1.1 Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas .....	12
1.2 Vectores .....	13
1.3 Adición o suma de vectores.....	15
1.4 Resultante de varias fuerzas concurrentes .....	18
1.5 Descomposición de una fuerza en sus componentes .....	19
1.6 Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios.....	20
1.7 Adición de fuerzas sumando sus componentes x y y.....	23
1.8 Equilibrio de una partícula .....	24
1.9 Primera ley del movimiento de Newton.....	26
1.10 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio .....	26
1.11 Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre línea de acción .....	28
1.12 Adición de fuerzas concurrentes en el espacio .....	29
<b>UNIDAD II ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS .....</b>	<b>31</b>
2.1 Definición de una armadura .....	33
2.2 Armaduras simples .....	35
2.3 Análisis de armaduras mediante el método de los nodos .....	36
2.4 Nodos bajo condiciones especiales de carga .....	40
2.5 Armaduras en el espacio o espaciales .....	42
2.6 Análisis de armaduras por el método de secciones.....	43
2.7 Armaduras formadas por varias armaduras simples .....	45
2.8 Estructuras que contienen elementos sujetos a fuerzas múltiples.....	47
2.9 Análisis de un armazón .....	47
2.10 Armazones que dejan de ser rígidos cuando se separan de sus soportes .....	49
2.11 Máquinas .....	52
<b>UNIDAD III ROZAMIENTO O FRICCIÓN .....</b>	<b>54</b>
3.1 Introducción .....	54
3.2 Leyes de la fricción seca. Coeficientes de fricción .....	55

3.3	Ángulos de fricción .....	58
3.4	Problemas que involucran fricción seca .....	60
3.5	Cuñas .....	63
3.6	Tornillos de rosca cuadrada.....	65
3.7	Chumaceras. Fricción en ejes.....	66
3.8	Cojinetes de empuje. Fricción en discos .....	69
3.9	Fricción en ruedas. Resistencia a la rodadura o rodamiento.....	71
3.10	Fricción en bandas .....	73
<b>UNIDAD IV FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA.....</b>		<b>77</b>
4.1	Introducción .....	77
4.2	Segundo momento o momento de inercia de un área .....	78
4.3	Determinación del momento de inercia de un área por integración .....	80
4.4	Momento polar de inercia.....	82
4.5	Radio de giro de un área .....	83
4.6	Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner.....	84
4.7	Momentos de inercia de áreas compuestas .....	87
4.8	Producto de inercia.....	89
4.9	Ejes principales y momentos principales de inercia .....	90
4.10	Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia.....	95
4.11	Momento de inercia de una masa.....	97
4.12	Teorema de los ejes paralelos.....	99
4.13	Momentos de inercia de placas delgadas .....	101
4.14	Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración.....	104
4.15	Momentos de inercia de cuerpos compuestos.....	104

## UNIDAD I ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. Primero se aprenderá a sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza equivalente sola es la resultante de las fuerzas varias que actúan sobre la partícula. Después se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de equilibrio y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula.

El uso de la palabra partícula no significa que este capítulo se limite al estudio de pequeños corpúsculos. Quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectará en la solución de los problemas tratados en este capítulo, y que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. Puesto que tal suposición se verifica en muchas aplicaciones prácticas, se podrán resolver un buen número de problemas de ingeniería.

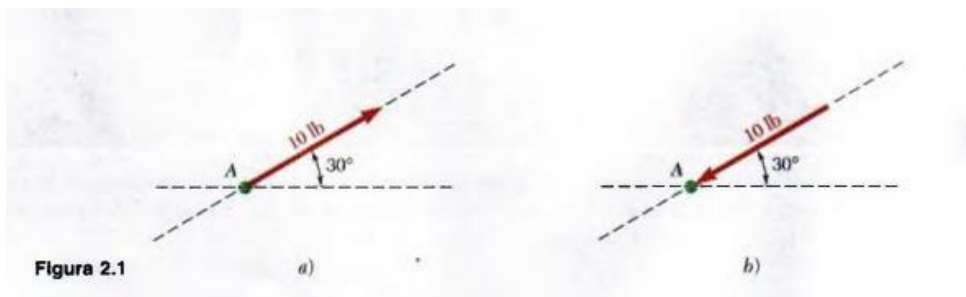
La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas obtenidas en un mismo plano y la segunda al análisis de las fuerzas en el espacio tridimensional.

### 1.1 Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su punto de aplicación, magnitud o módulo y dirección. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. Por tanto, cada fuerza considerada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud o módulo y dirección.

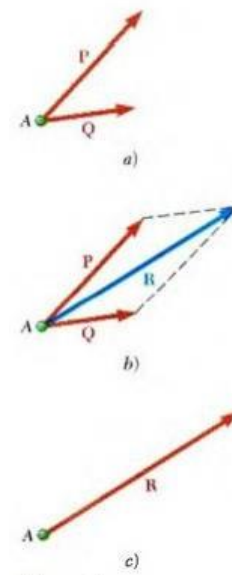
La magnitud o módulo de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Como se indicó en el capítulo 1, las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. La dirección de una fuerza se define por la línea de acción y el sentido de la fuerza. La línea de acción es la línea

recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (figura 2.1).



La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1a y b, que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción, pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas P y Q que actúan sobre una partícula A (figura 2.2a) pueden sustituirse por una sola fuerza R que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2b). A esta fuerza se le llama resultante de las fuerzas P y Q y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2b. construyendo un paralelogramo con P y Q como lados. La diagonal que pasa por A representa la resultante. Esto se conoce como la ley del paralelogramo para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse ni derivarse de manera matemática.



## 1.2 Vectores

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una

de 4 lb y otra de 3 lb), suman una fuerza de 5 lb y no una de 7 lb. Las fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y momentos son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por vectores, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como volumen, masa o energía se representan por números ordinarios o escalares.

Los vectores se definen como expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas ( $\mathbf{P}$ ). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo ( $\mathbf{P}$ ) o subrayando la

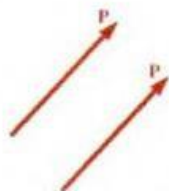


Figura 2.4



Figura 2.5

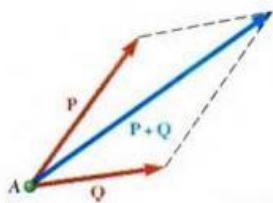


Figura 2.6

letra ( $\mathbf{P}$ ). La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector  $\mathbf{P}$  se representa como  $P$ .

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector fijo o ligado, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como libres. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítulo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o resbalar a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores deslizantes.

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son iguales, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4);

los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El vector negativo de un vector  $P$  se define como aquel que tiene la misma magnitud que  $P$  y una dirección opuesta a la de  $P$  (figura 2.5); el negativo del vector  $P$  se representa por  $-P$ . A los vectores  $P$  y  $-P$  se les llama vectores iguales y opuestos. Se tiene

$$P + (-P) = 0$$

### 1.3 Adición o suma de vectores

En la sección anterior se vio que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores  $P$  y  $Q$  se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto  $A$  y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a  $P$  y a  $Q$  (figura 2.6).

La diagonal que pasa por  $A$  representa la suma vectorial de  $P$  y  $Q$ , y se representa por  $P + Q$ . El hecho de que el signo  $+$  se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector  $P + Q$  no es, en general, igual a la suma  $l_P + l_Q$  de las magnitudes de los vectores  $P$  y  $Q$ .

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores  $P$  y  $Q$  no depende del orden en que  $P$  y  $Q$  se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es conmutativa, y se escribe

$$P + Q = Q + P \quad (2.1)$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado regla del triángulo se obtiene como sigue: considérese la figura 2.6, donde la suma de los vectores  $P$  y  $Q$  ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a  $Q$  es igual a  $Q$  en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (figura 2.1a). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse colocando  $P$  y  $Q$  de punta a cola y uniendo la cola de  $P$  con la punta de  $Q$ . En la figura 2.7b se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

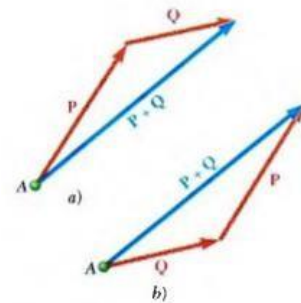


Figura 2.7

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector  $P - Q$  que representa la diferencia de los vectores  $P$  y  $Q$  se obtiene agregándole a  $P$  el vector negativo  $-Q$  (figura 2.8). Se escribe

2.4. Adición o suma de vectores 19

$$P - Q = P + (-Q) \quad (2.2)$$

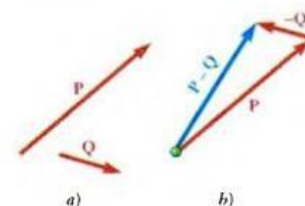


Figura 2.8

Aquí se debe observar otra vez que, aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la suma de tres o más vectores. La suma de tres vectores  $P$ ,  $Q$  y  $S$  se obtendrá por definición, sumando primero los vectores  $P$  y  $Q$  y agregando el vector  $S$  al vector  $P + Q$ . De manera que b)

Figura 2.7

a) b)

Figura 2.8

$$P + Q + S = (P + Q) + S \quad (2.3)$$



En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

Si los vectores dados son coplanares, es decir, si están contenidos en el mismo plano,

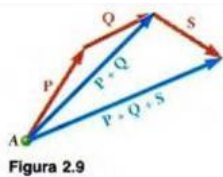


Figura 2.9

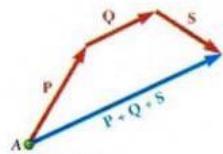


Figura 2.10

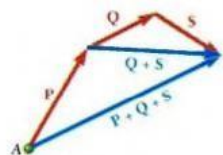


Figura 2.11

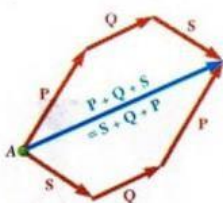


Figura 2.12



Figura 2.13

su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores P, Q y S se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma  $P + Q$  de los vectores P y Q; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores  $P + Q$  y S.

Sin embargo, la determinación del vector  $P + Q$  pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último.

Esta se conoce como la regla del polígono para la adición de vectores.

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, como se muestra en la figura 2.11, los vectores Q y S se hubieran reemplazado por la suma de  $Q + S$ . Entonces se puede escribir

$$P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S) \quad (2.4)$$

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es asociativa. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$\begin{aligned} P + Q + S &= (P + Q) + S = S + (P + Q) \\ &= S + (Q + P) = S + Q + P \quad (2.5) \end{aligned}$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa (figura 2.12).

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma  $P + P$  como  $2P$ , a la suma  $P + P + P$  como  $3P$ , y en general a la suma de  $n$  vectores  $P$  iguales como el producto  $nP$ , se definirá el producto  $nP$  de un entero positivo  $n$  y un vector  $P$ , como un vector que tiene la misma dirección que  $P$  y magnitud  $n|P|$  (léase  $n$  veces  $P$ ). Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada en la sección 2.3, se define el producto  $kP$  de un escalar  $k$  y un vector  $P$  como un vector que tiene la misma dirección y sentido que  $P$  (si  $k$  es positivo), o la misma dirección, pero sentido opuesto al de  $P$  (si  $k$  es negativo) y una magnitud igual al producto de  $P$  y el valor absoluto de  $k$  (figura 2.13).

## 1.4 Resultante de varias fuerzas concurrentes

Considérese una partícula  $A$  sujeta a varias fuerzas coplanarias, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14a). Como todas estas fuerzas pasan por  $A$ , se dice

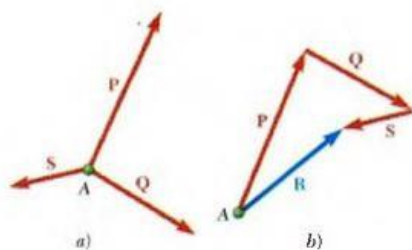


Figura 2.14

que son concurrentes. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre  $A$  pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.14//). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector  $R$  obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la

partícula  $A$  que las fuerzas dadas. Como se indicó antes, no importa el orden en el que se sumen los vectores  $P$ ,  $Q$  y  $S$  que representan las fuerzas sobre la partícula.

## 1.5 Descomposición de una fuerza en sus componentes

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza  $F$  que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama componentes de la fuerza original  $F$ , y al proceso de sustituirlas en lugar de  $F$  se le llama descomposición de la fuerza  $F$  en sus componentes.

En este sentido, para cada fuerza  $F$  existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de dos componentes  $P$  y  $Q$  son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere.

Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza  $F$  puede descomponerse en sus componentes es ilimitado (figura 2.15).

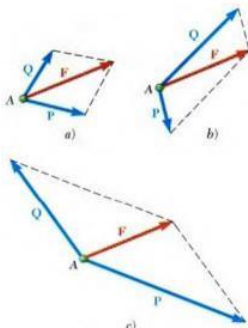


Figura 2.15

Dos casos son de especial interés:

1. *Una de las dos componentes,  $P$ , se conoce.* La segunda componente,  $Q$ , se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de  $P$  a la punta de  $F$  (figura 2.16); la magnitud, la dirección y el sentido de  $Q$  se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que  $Q$  se ha determinado, ambas componentes  $P$  y  $Q$  deben aplicarse en  $A$ .

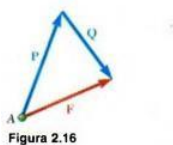


Figura 2.16

2. *Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes.* La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de  $F$ , paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.17).

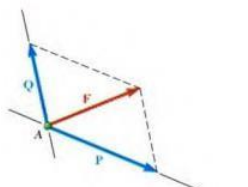


Figura 2.17

De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas  $P$  y  $Q$ , que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

Pueden encontrarse muchos otros casos; por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible

(véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.

## 1.6 Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.18, la fuerza  $F$  se ha descompuesto en una componente  $F_x$  a lo largo del eje  $x$  y una componente  $F_y$  a lo largo del eje  $y$ . El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un rectángulo, y las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  se llaman componentes rectangulares.

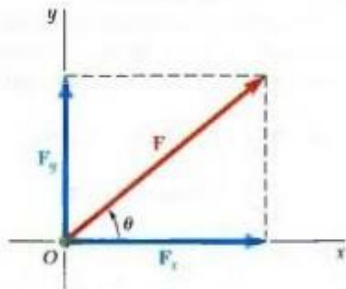


Figura 2.18

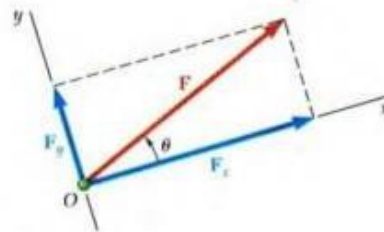


Figura 2.19

Los ejes  $x$  y  $y$  suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.18; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.19. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.18 y 2.19 son paralelas a los ejes  $x$  y  $y$  y en lugar de perpendiculares a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes oblicuas, como se vio en la sección 2.6.

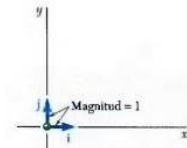


Figura 2.20

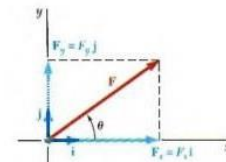


Figura 2.21

En este punto se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos  $x$  y  $y$ . A estos vectores se les llama vectores unitarios y se representan por  $i$  y  $j$ , respectivamente (figura 2.20). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.4, se observa que las componentes rectangulares  $F_x$  y  $F_y$  de una fuerza  $F$  pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios  $i$  y  $j$  por escalares apropiados (figura 2.21). Se escribe

$$F = F_x i + F_y j$$

(2.6)

(2.7)

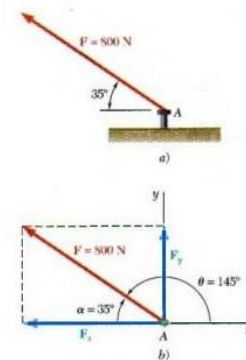


Figura 2.22

Mientras que los escalares  $F_x$  y  $F_y$  pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de  $F$ ,  $F_x$  y  $F_y$ , sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$ . Los escalares  $F_x$  y  $F_y$  se llaman componentes escalares de la fuerza  $F$ , mientras que las componentes reales de la fuerza  $F_x$  y  $F_y$  son las componentes vectoriales de  $F$ . Sin embargo, cuando no existe alguna posibilidad de confusión, a los vectores  $i$  y  $j$  y a las componentes escalares de  $F$  puede llamárseles simplemente componentes de  $F$ . Se observa que la componente escalar  $F_x$  es positiva cuando la componente vectorial  $F_x$  tiene el mismo sentido que el vector unitario  $i$  (es decir, el mismo sentido que el eje  $x$  positivo) y es

negativa cuando  $F_v$  tiene el sentido opuesto. Una conclusión semejante puede obtenerse observando el signo de la componente escalar  $F_x$ .

Si se representa con  $F$  la magnitud de la fuerza  $F$  y con  $\theta$  el ángulo entre  $F$  y el eje  $x$ , medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje  $x$  positivo (figura 2.2.1), se pueden expresar las componentes escalares de  $F$  como sigue:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángulo  $\theta$  entre  $0$  y  $360^\circ$  y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares  $F_x$  y  $F_y$ .

Ejemplo 1. Una fuerza de  $800 \text{ N}$  se ejerce sobre un perno  $A$  como se muestra en la figura 2.22a. Determinése las componentes horizontal y vertical de la fuerza. Para obtener el signo correcto de las componentes escalares  $F_x$  y  $F_y$ , el valor  $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$  debe sustituirse por  $90^\circ$  en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de  $F_x$  y  $F_y$  (figura 2.22b) y usar las funciones trigonométricas del ángulo  $\alpha = 35^\circ$ . Por consiguiente se puede escribir

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N} \quad F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

Las componentes vectoriales de  $F$  son entonces  $F_x = -(655 \text{ N})i$   $F_y = +(459 \text{ N})j$  y  $F$  se puede escribir en la forma

$$F = -(655 \text{ N})i + (459 \text{ N})j$$

## 1.7 Adición de fuerzas sumando sus componentes x y y

En la sección 2.2 se estudió que las fuerzas deben sumarse de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron en las secciones 2.4 y 2.5 otros dos métodos más directos aplicables a la solución gráfica de los problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la adición de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo de fuerzas usado para definir la resultante de dos Tuerzas podría usarse para obtener una solución trigonométrica.

Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que define a la fuerza resultante. En este caso puede obtenerse una solución analítica del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares. Considere, por ejemplo, las tres fuerzas P, Q y S que actúan sobre una articula A (figura 2.25«). Su resultante R está definida por la relación

$$R = P + Q + S \quad (2.11)$$

Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x i + R_y j &= P_x i + P_y j + Q_x i + Q_y j + S_x i + S_y j \\ &= (P_x + Q_x + S_x)i + (P_y + Q_y + S_y)j \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

o, en forma breve,

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y \quad (2.13)$$

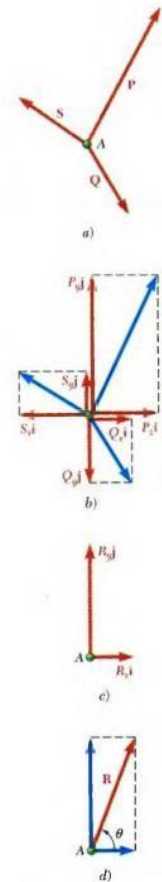


Figura 2.25

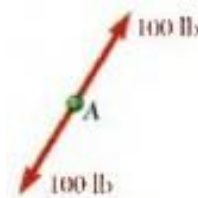
Por tanto, se puede concluir que las componentes escalares  $R_x$  y  $R_y$  de la resultante  $R$  de varias fuerzas que actúan sobre una partícula se obtienen separando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.

En la práctica, la determinación de la resultante  $R$  se realiza en tres etapas, como se ilustra en la figura 2.25. Primero, las fuerzas mostradas en la figura 2.25a se descomponen en sus componentes  $x$  y  $y$  (figura 2.25b). ("on la suma de estas componentes  $x$  y  $y$  de  $R$  (figura 2.25c). Finalmente, la resultante  $R = R_x +$  se determina aplicando la ley del paralelogramo (figura 2.25d). El procedimiento que se acaba de describir se realiza con más eficiencia si los cálculos se tabulan.

Aunque éste es el único método analítico práctico para la adición de tres o más fuerzas, con frecuencia también se le prefiere sobre la solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.

## 1.8 Equilibrio de una partícula

En las secciones anteriores se expusieron los métodos utilizados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque no ha ocurrido en ninguno de los problemas examinados hasta ahora, es posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto neto de las fuerzas dadas es cero, y se dice que la partícula está en equilibrio. Entonces se tiene la siguiente definición: si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.



**Figura 2.26**

Una partícula sometida a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción, pero sentidos opuestos. Entonces la resultante de las dos fuerzas es cero. En la figura 2.26 se ilustra este caso.

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.27, donde aparecen cuatro fuerzas que actúan sobre  $A$ . En la figura 2.28, la resultante de las fuerzas dadas se



determina por la regla del polígono. Empezando en el punto O con  $F_x$  y acomodando las fuerzas punta a cola, se encuentra que la punta de  $F_4$  coincide con el punto de partida O, así que la resultante  $R$  del sistema de fuerzas dado es cero y la partícula está en equilibrio.

El polígono cerrado de la figura 2.28 proporciona una expresión gráfica del equilibrio de A. Para expresar en forma algebraica las condiciones del equilibrio de una partícula se escribe

$$\sum F = 0 \quad (2.14)$$

Descomponiendo cada fuerza  $F$  en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\sum (F_x i + F_y j) = 0 \quad \text{o} \quad (\sum F_x) i + (\sum F_y) j = 0$$

Se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

Regresando a la partícula mostrada en la figura 2.27, se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\sum F_x = 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \sin 30^\circ - (400 \text{ lb}) \sin 30^\circ$$

$$= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0$$

$$\sum F_y = 173.2 \text{ lb}$$

$$- 173.2 \text{ lb}$$

$$(200 \text{ lb}) \cos 30^\circ + (400 \text{ lb}) \cos 30^\circ$$

$$173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0$$

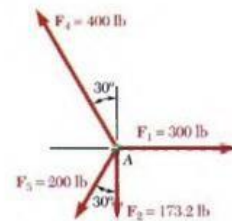


Figura 2.27

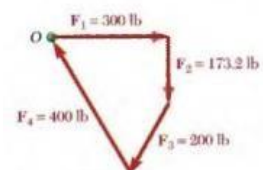


Figura 2.28

## 1.9 Primera ley del movimiento de Newton

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

*Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).*

De esta ley y de la definición de equilibrio expuesta en la sección 2.9, se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

## 1.10 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio

En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se deriva de una situación física real. Un esquema que muestra las condiciones físicas del problema se conoce como diagrama espacial.

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Un gran número de problemas que tratan de estructuras pueden reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula. Esto se hace escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestra a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como diagrama de cuerpo libre.

Por ejemplo, considérese el embalaje de madera de 75 kg mostrado en el diagrama espacial de la figura 2.29a. Éste descansaba entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de un camión que lo quitará de ahí. El embalaje está soportado por un cable vertical unido en A a dos cuerdas que pasan sobre poleas fijas a los edificios en B y C. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y AC.

Para resolver el problema debe trazarse un diagrama de cuerpo libre que muestre a la partícula en equilibrio. Puesto que se analizan las tensiones en las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de estas tensiones y si es posible a ambas. El punto A parece ser un buen cuerpo libre para este problema. El diagrama de cuerpo libre del punto A se muestra en la figura 2.29b. Ésta muestra al punto A y las fuerzas ejercidas sobre A por el cable vertical y las dos cuerdas.

La fuerza ejercida por el cable está dirigida hacia abajo y es igual al peso  $W$  del contenedor. De acuerdo con la ecuación (1.4), se escribe 2.11. Problemas relacionados con el equilibrio 07 de una partícula. Diagramas de cuerpo libre  $w (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$  y se indica este valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda AB y en la cuerda AC, se representan con  $T_{ah}$  y  $T_{ac}$  y se dibujan hacia fuera de A en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. No se incluyen otros detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto A está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan de punta a cola. Este triángulo de fuerzas ha sido dibujado en la figura 2.29c. Los vectores  $T_{AH}$  y  $T_{AC}$  de las tensiones en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala, o pueden encontrarse mediante la trigonometría. Si se escoge el último método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$T_a = 736 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

b) Diagrama de cuerpo libi

Figura 2.29

736 N

) Triángulo de fuerzas

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{T_a}$$

$$T_{ab} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en equilibrio bajo tres fuerzas, el problema siempre puede resolverse dibujando un triángulo de fuerzas.

Cuando una partícula está en equilibrio bajo más de tres fuerzas, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deben resolver las ecuaciones de equilibrio dadas en la sección 2.9:

Estas ecuaciones pueden resolverse para no más de dos incógnitas; en forma semejante, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, 2) las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida. También se encuentran problemas que requieren la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse problemas 2.59 a 2.63).

## 1.11 Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre línea de acción

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza  $F$  está definida por las coordenadas de dos puntos  $M(x_1, y_1, z_1)$  y  $N(x_2, y_2, z_2)$ , localizadas sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector  $MN$  que une

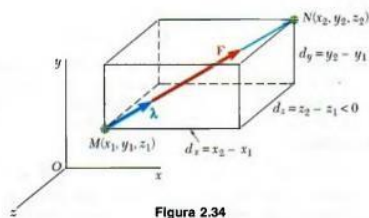


Figura 2.34

a Ai y N y tiene el mismo sentido que F. Si se representan sus componentes escalares por dx, dy y dz, respectivamente, se escribe

$$MN = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \quad (2.26)$$

El vector unitario X a lo largo de la línea de acción de F (es decir a lo largo de la línea MN) puede obtenerse al dividir el vector MN entre su magnitud MN. Se sustituye para MN de (2.26) y se observa que MN es igual a la distancia d de M a N, se escribe

$$\mathbf{X} = \frac{1}{d} (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Es importante recordar que F es igual al producto de F y X, por lo que se tiene  $F = F \mathbf{X} = F \frac{1}{d} (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = \frac{F}{d} (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k})$  (2.28) de la cual se sigue que las componentes de F son, respectivamente,  $F_x = \frac{F}{d} dx$ ,  $F_y = \frac{F}{d} dy$ ,  $F_z = \frac{F}{d} dz$  (2.29) Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de las fuerzas F de magnitud F cuando la línea de acción de F está definida por dos puntos M y N. Restando las coordenadas de M de las de N se determinan primero las componentes del vector MN y la distancia d de M a N:  $dx = x_2 - x_1$ ,  $dy = y_2 - y_1$ ,  $dz = z_2 - z_1$ ,  $d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  Sustituyendo los valores para F y para dx, dy, dz, y d en las relaciones (2.29), se obtienen las componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  de la fuerza. Los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  que forman F con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir  $\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$ ,  $\cos \beta = \frac{F_y}{F}$ ,  $\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$  (2.30) y determinar los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  directamente de las componentes y la magnitud del vector MN.

## 1.12 Adición de fuerzas concurrentes en el espacio

La resultante R de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.8 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$R = 2 F$$

se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x i + R_y j + R_z k = 2(F_x i + F_y j + F_z k)$$

$$= (2F_x i + 2F_y j + 2F_z k)$$

de la cual se desprende que

$$R_x = 2F_x \quad R_y = 2F_y \quad R_z = 2F_z \quad (2.31)$$

La magnitud de la resultante y los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por el método de la sección 2.12.

Se escribe

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

Donde

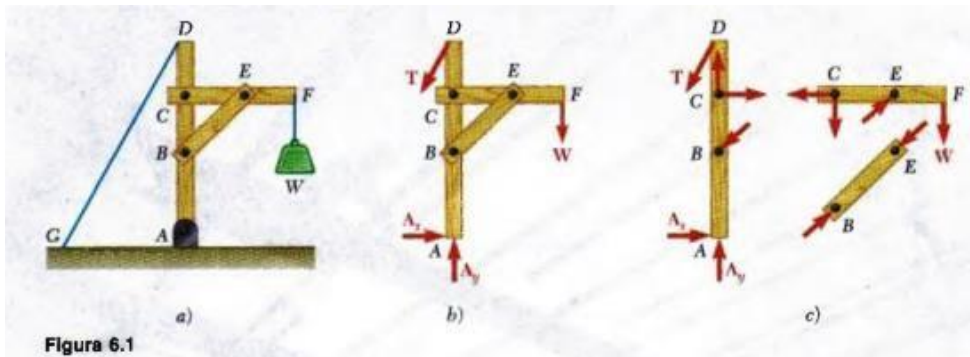
$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$

## UNIDAD II ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Los problemas considerados en los capítulos anteriores estuvieron relacionados con el equilibrio de un solo cuerpo rígido y todas las fuerzas involucradas eran externas a este último. A continuación, se estudian problemas que tratan sobre el equilibrio de estructuras formadas por varias partes que están conectadas entre sí. Estos problemas, además de determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, implican calcular las fuerzas que mantienen unidas a las diversas partes que la constituyen. Desde el punto de vista de la estructura como un todo, estas fuerzas son fuerzas internas. Por ejemplo, considérese la grúa mostrada en la figura 6.1a, la cual soporta una carga  $W$ . La grúa consta de tres vigas  $AD$ ,  $CF$  y  $BE$  que están conectadas por medio de pernos sin fricción; la grúa está apoyada por un perno en  $A$  y un cable  $DG$ . La figura 6.1 b representa el diagrama de cuerpo libre de la grúa. Las fuerzas externas que se muestran en el diagrama incluyen al peso  $W$ , a las dos componentes  $A^*$  y  $A$ , y de la reacción en  $A$  y a la fuerza  $T$  ejercida por el cable en  $D$ . Las fuerzas internas que mantienen unidas las diversas partes de la grúa no aparecen en el diagrama. Sin embargo, si se desarma la grúa y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen, las fuerzas que mantienen unidas a las tres vigas también estarán representadas puesto que dichas fuerzas son externas desde el punto de vista de cada una de las partes que forman la grúa (figura 6.1c).

Se debe señalar que la fuerza ejercida en  $B$  por el elemento  $BE$  sobre el elemento  $AD$  se ha representado como igual y opuesta a la fuerza ejercida en ese mismo punto por el elemento  $AD$  sobre el elemento  $BE$ ; la fuerza ejercida en  $E$  por el elemento  $BE$  sobre el elemento  $CF$  se muestra igual y opuesta a la fuerza ejercida por el elemento  $CF$  sobre el elemento  $BE$  y las componentes de la fuerza ejercida en  $C$  por el elemento  $CF$  sobre el elemento  $AD$  se presentan iguales y opuestas a las componentes de la fuerza ejercida por el elemento  $AD$  sobre el elemento  $CF$ . Lo anterior está sujeto a la tercera ley de Newton, la cual establece que las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. Como se señaló en el capítulo 1, esta ley, que está basada en la evidencia experimental, es uno de los seis principios fundamentales

de la mecánica elemental y su aplicación es esencial para la solución de problemas que involucran a cuerpos que están conectados entre sí.



En este capítulo se considerarán tres categorías amplias de estructuras de ingeniería.

1. *Armaduras*, las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son elementos sujetos a (los fuerzas, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento.
2. *Armazones*, los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, como en el caso de la grúa de la figura 6.1, los armazones siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas, esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.
3. *Máquinas*, las cuales están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas, son estructuras que contienen partes en movimiento. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.



## 2.1 Definición de una armadura

La armadura es uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería. Esta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. En la figura 6.2a se muestra una armadura típica. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos.



Fotografía 6.1 En la foto se muestra una conexión con juntas de pasador sobre el acceso al puente de la Bahía de San Francisco y Oakland.

Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura 6.2a no existe un elemento AB, en su lugar existen dos elementos distintos AD y DB. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

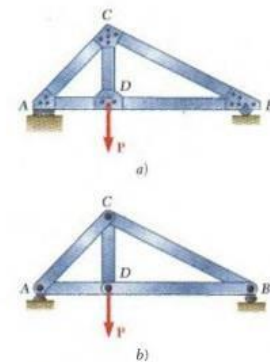


Figura 6.2

Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmite la carga a los nodos (figura 6.3).

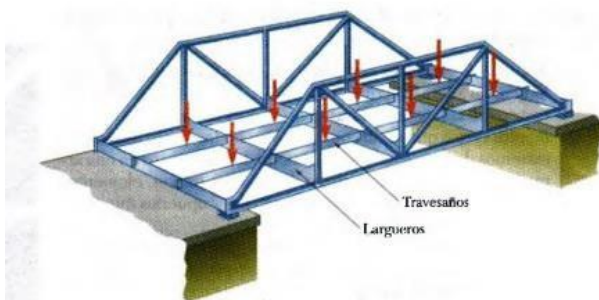


Figura 6.3

Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos, aplicándose la mitad del peso de cada elemento a cada uno de los nodos a los que éste se conecta. A pesar de que en realidad los elementos están unidos entre sí por medio de conexiones remachadas o soldadas, es común suponer que los elementos están conectados por medio de pernos; por tanto, las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos del elemento se reducen a una sola fuerza y no existe un par. De esta forma se supone que las únicas fuerzas que actúan sobre un elemento de la armadura son una sola fuerza en cada uno de los extremos del elemento. Entonces, cada elemento puede tratarse como sometido a la acción de dos fuerzas, mientras que la armadura, como un todo, puede considerarse como un grupo de pernos y elementos sujetos a dos fuerzas (figura 6.2b). Sobre un elemento individual pueden actuar fuerzas, como las que se muestran en cualquiera de los croquis de la figura 6.4. En la figura 6.4a las fuerzas tienden a estirar al elemento y éste está en tensión; en la figura 6.4b las fuerzas tienden a comprimir al elemento y el mismo está en compresión. En la figura 6.5 se muestran algunas armaduras típicas.

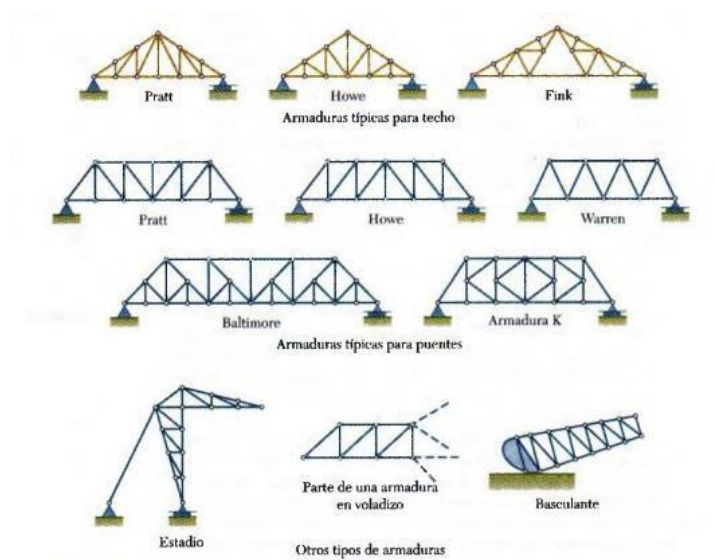
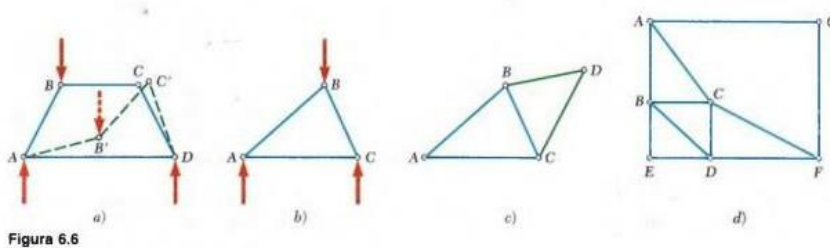


Figura 6.5

## 2.2 Armaduras simples

Considere la armadura mostrada en la figura 6.6a, la cual está constituida por cuatro elementos conectados por medio de pernos en A, B, C y D. Si se aplica una carga en B, la armadura se deformará hasta perder por completo su forma original. Por el contrario, la armadura de la figura 6.6b, la cual está constituida por tres elementos conectados por medio de pernos en A, B y C, sólo se deformará ligeramente bajo la acción de una carga aplicada en B. La única deformación posible para esta armadura es la que involucra pequeños cambios en la longitud de sus elementos. Por tanto, se dice que la armadura de la figura 6.6b es una armadura rígida, aquí el término rígida se ha empleado para indicar que la armadura no se colapsará.



Como se muestra en la figura 6.6c, se puede obtener una armadura rígida más grande agregando dos elementos BD y CD a la armadura triangular básica de la figura 6.6b. Este procedimiento se puede repetir tantas veces como se desee y la armadura resultante será rígida si cada vez que se agregan dos nuevos elementos, éstos se unen a dos nodos ya existentes y además se conectan entre sí en un nuevo nodo.\* Una armadura que se puede construir de esta forma recibe el nombre de armadura simple.

Se debe señalar que una armadura simple no está hecha necesariamente a partir de triángulos. Por ejemplo, la armadura de la figura 6.6d es una armadura simple que fue construida a partir del triángulo ABC y se agregaron sucesivamente los nodos D, E, F y G. Por otra parte, las armaduras rígidas no siempre son armaduras simples, incluso cuando parecen estar hechas de triángulos. Por ejemplo, las armaduras de Fink y Baltimore mostradas en la figura 6.5, no son armaduras simples, puesto que no pueden construirse a partir de un solo triángulo en la forma descrita en el párrafo anterior. Todas las demás armaduras que se muestran en la figura

6.5 son armaduras simples, lo cual se puede verificar fácilmente. (Para la armadura K se debe comenzar con uno de los triángulos centrales.)

En la figura 6.6 se observa que la armadura triangular básica de la figura 6.6b tiene tres elementos y tres nodos. La armadura de la figura 6.6c tiene dos elementos y un nodo adicionales, esto es, cinco elementos y cuatro nodos en total. Si se tiene presente que cada vez que se agregan dos nuevos elementos el número de nodos se incrementa en uno, se encuentra que en una armadura simple el número total de elementos es  $m = 2n - 3$ , donde  $n$  es el número total de nodos.

## 2.3 Análisis de armaduras mediante el método de los nodos

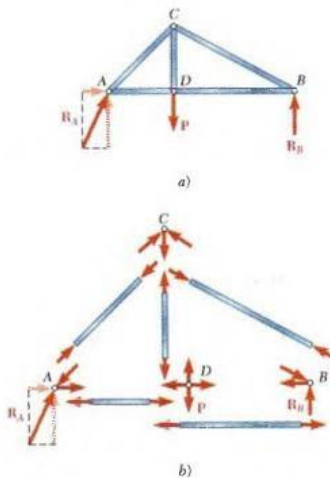


Figura 6.7



**Fotografía 6.3** Las armaduras para techo, como las que se muestran en la foto, requieren apoyo sólo en los extremos. Gracias a esto es posible realizar construcciones con grandes áreas libres de obstáculos en el piso.

En la sección 6.2 se vio que una armadura puede ser considerada como un grupo de pernos y elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. Por tanto, la armadura de la figura 6.2, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.7a, se puede desarmar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada perno y para cada elemento (figura 6.7b). Cada elemento está sometido a la acción de dos fuerzas, una en cada uno de sus extremos; estas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Además, la tercera ley de Newton indica que las fuerzas de acción y reacción entre un elemento y un perno son iguales y opuestas. Por tanto, las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los cuales se conecta deben estar dirigidos a lo largo de ese elemento y deben ser iguales y opuestas. Con frecuencia se hace referencia a la magnitud común de las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los que se conecta como la fuerza en el elemento bajo consideración, a pesar de que esta cantidad en realidad es un escalar. Como las líneas de acción de

todas las fuerzas internas en una armadura son conocidas, el análisis de una armadura se reduce a calcular las fuerzas en los elementos que la constituyen y a determinar si cada uno de dichos elementos está en tensión o en compresión.

Como la armadura en su totalidad está en equilibrio, cada perno debe estar en equilibrio. El que un perno esté en equilibrio se expresa dibujando su diagrama de cuerpo libre y escribiendo dos ecuaciones de equilibrio (sección 2.9). Por tanto, si una armadura tiene  $n$  pernos, habrá  $2n$  ecuaciones disponibles, las cuales podrán resolverse para  $2n$  incógnitas. En el caso de una armadura simple, se tiene que  $m = 2n - 3$ , esto es,  $2n = m + 3$ , y el número de incógnitas que se pueden determinar a partir de los diagramas de cuerpo libre de los pernos es  $m + 3$ . Esto significa que las fuerzas en todos los elementos, las dos componentes de la reacción  $R_x$  y la reacción  $R_y$  se determinan considerando los diagramas de cuerpo libre de los pernos.

El hecho de que la armadura como un todo sea un cuerpo rígido que está en equilibrio, se puede utilizar para escribir tres ecuaciones adicionales que involucran a las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.7«. Puesto que estas ecuaciones no contienen ninguna información nueva, son independientes de las ecuaciones asociadas con los diagramas de cuerpo libre de los pernos. Sin embargo, las tres ecuaciones en cuestión se pueden emplear para determinar las componentes de las reacciones en los apoyos. El arreglo de pernos y elementos en una armadura simple es tal que siempre será posible encontrar 1111 nodo que involucre únicamente a dos fuerzas desconocidas. Estas fuerzas se determinan por medio de los métodos de la sección 2.11 y sus valores se transfieren a los nodos adyacentes tratándolos como cantidades conocidas en dichos nodos, este procedimiento se repite hasta determinar todas las fuerzas desconocidas.

Como ejemplo se analiza la armadura de la figura 6.7, en la que se considera sucesivamente el equilibrio de cada perno; se inicia con el nodo en el cual sólo dos fuerzas son desconocidas. En dicha armadura todos los pernos están sujetos a cuando menos tres fuerzas desconocidas. Por tanto, primero se deben determinar las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como cuerpo libre y utilizando las ecuaciones de equilibrio

para un cuerpo rígido. De esta forma,  $R_A$  es vertical y se determinan las magnitudes de  $R_A$  y  $R_B$ .

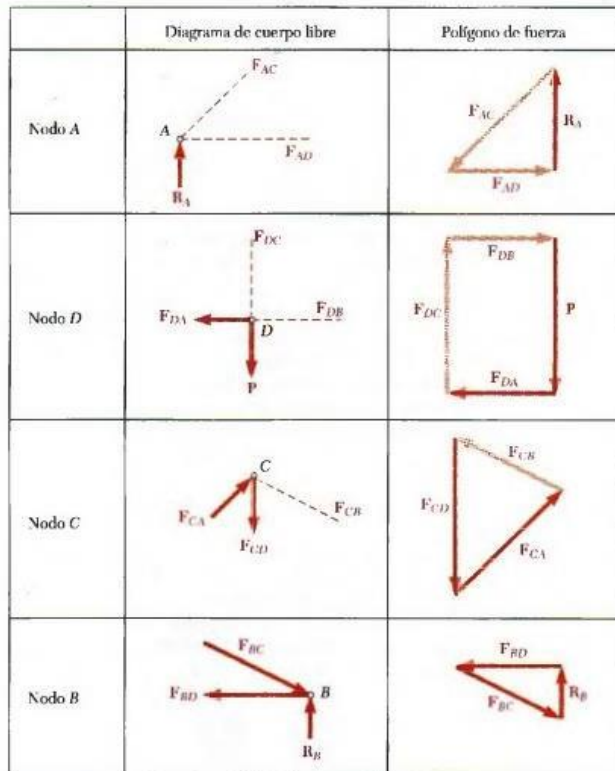


Figura 6.8

Como  $F_{AC}$  está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, esto es, hacia el nodo A, el elemento AC empuja el perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en compresión. Como  $F_{AD}$  está dirigida alejándose del nodo A, el elemento AD jala al perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en tensión.

Ahora se procede a considerar el nodo D en el cual sólo dos fuerzas,  $F_{DC}$  y  $F_{DB}$ , aún son desconocidas. Las otras fuerzas que actúan sobre dicho nodo son la carga  $P$ , la cual es un dato y la fuerza  $F_{DA}$  ejercida sobre el perno por el elemento AD. Como se señaló antes, esta última fuerza es igual y opuesta a la fuerza  $F_{AD}$  ejercida por el mismo elemento sobre el perno A. Como se muestra en la figura 6.8, se puede dibujar el polígono de fuerzas correspondiente al nodo D y determinar las fuerzas  $F_{DC}$  y  $F_{DB}$  a partir de dicho polígono. Sin embargo, cuando están involucradas más de tres fuerzas, es más conveniente resolver las ecuaciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$  para las dos fuerzas desconocidas. Como se encuentra que ambas

Entonces el número de fuerzas desconocidas en el nodo A se reduce a dos y estas fuerzas se pueden determinar considerando el equilibrio del perno A. La reacción  $R_A$  y las fuerzas  $F_{AC}$  y  $F_{AD}$  ejercidas sobre el perno A por los elementos AC y AD, respectivamente, deben formar un triángulo de fuerzas. Primero se dibuja  $R_A$  (figura 6.8); luego si  $F_{AC}$  y  $F_{AD}$  están dirigidas a lo largo de AC y AD, respectivamente, se completa el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de  $F_{AC}$  y  $F_{AD}$ . Las magnitudes  $F_{AC}$  y  $F_{AD}$  representan las fuerzas en los elementos AC y AD. Como

fuerzas se alejan del nodo D, los elementos DC y DB jalan al perno y se concluye que ambos están en tensión.

Después se considera el nodo C, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura

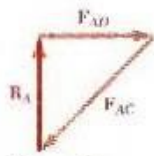


Figura 6.9

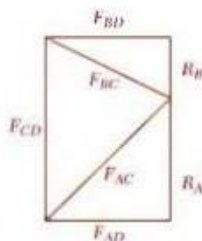


Figura 6.10

6.8. Se observa que tanto  $F_{c-p}$  como  $F_{C/V}$  son conocidas a partir del análisis de los nodos anteriores y que sólo  $F_{;b}$  es desconocida. Como el equilibrio de cada perno proporciona suficiente información para determinar dos incógnitas, se obtiene una comprobación del análisis realizado en este nodo. Se dibuja el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de  $F_{Cb}$ . Como  $F_{Cb}$  está dirigida hacia el nodo C, el elemento CB empuja al perno C y, por tanto, está en compresión. La comprobación se obtiene al verificar que la fuerza  $F_{;b}$  y el elemento CB son paralelos.

En el nodo B todas las fuerzas son conocidas. Puesto que el perno correspondiente está en equilibrio, el triángulo de fuerzas debe cerrar, obteniéndose de esta forma una comprobación adicional del análisis realizado.

Es importante señalar que los polígonos de fuerza mostrados en la figura 6.8 no son únicos. Cada uno de ellos podría reemplazarse por una configuración alterna. Por ejemplo, el triángulo de fuerzas correspondiente al nodo A podría dibujarse como el de la figura 6.9. El triángulo mostrado en la figura 6.8 se obtuvo dibujando las tres fuerzas  $R_A$ ,  $F_{AC}$  y  $f_{ad}$  uniendo la parte terminal de una con la parte inicial de otra, en el orden en el que se encuentran sus líneas de acción, al realizar un desplazamiento en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del nodo A. Los otros polígonos de fuerzas en la figura 6.8 se dibujaron de la misma forma, por ello se pueden reunir en un solo diagrama, como se ilustra en la figura 6.10. Un diagrama de este tipo, conocido como diagrama de Maxwell, facilita en gran medida el análisis gráfico de problemas que involucran armaduras.

## 2.4 Nodos bajo condiciones especiales de carga

Observe la figura 6.11a, en la cual el nodo conecta a cuatro elementos que están ubicados sobre dos líneas rectas que se intersecan. El diagrama de cuerpo libre de la figura 6.11b muestra que el perno A está sujeto a dos pares de fuerzas directamente opuestas. Por tanto, el polígono de fuerzas debe ser un paralelogramo (figura 6.11c) y las fuerzas en elementos opuestos deben ser iguales.

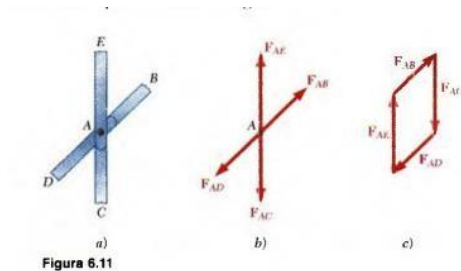


Figura 6.11

A continuación, considere la figura 6.12a, en la cual el nodo mostrado conecta tres elementos y soporta una carga  $P$ . Dos de los elementos se encuentran ubicados sobre la misma línea y la carga  $P$  actúa a lo largo del tercer elemento. El diagrama de cuerpo libre del perno A y el polígono de fuerzas correspondiente serán como se muestran en la figura 6.12b y c, reemplazando a  $F_{AB}$  por la carga  $P$ . Por tanto, las fuerzas en los dos elementos opuestos deben ser iguales y la fuerza en el otro elemento debe ser igual a  $P$ . En la figura 6.12d se muestra un caso de especial interés, en el que no hay una fuerza externa aplicada en el nodo, se tiene que  $P = 0$ , y la fuerza en el elemento AC es igual a cero. Por tanto, se dice que el elemento AC es un elemento de fuerza cero.

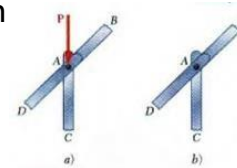


Figura 6.12

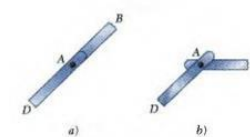


Figura 6.13

Considere ahora un nodo que conecta sólo dos elementos. A partir de la sección 2.9 se sabe que una partícula sobre la que actúan dos fuerzas estará en equilibrio si las dos fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. En el caso del nodo de la figura 6.13a, el cual conecta a dos elementos AB

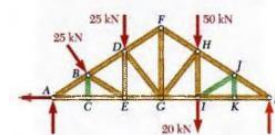


Figura 6.14



y AD que se encuentran sobre la misma línea, las fuerzas en los dos elementos deben ser iguales para que el perno A esté en equilibrio. En el caso del nodo de la figura 6.13/;, el perno A no puede estaren equilibrio a menos que las fuerzas en ambos elementos sean iguales a cero. Por tanto, los elementos conectados como se muestra en la figura 6.13/; deben ser elementos de fuerza cero.

La identificación de los nodos que se encuentran bajo las condiciones especiales de carga mencionadas en los párrafos anteriores, permitirá que el análisis de una armadura se lleve a cabo más rápido. Por ejemplo, considere una armadura tipo Howe cargada, como se muestra en la figura 6.14; todos los elementos representados por líneas en color serán reconocidos como elementos de fuerza cero. El nodo C conecta a tres elementos, dos de los cuales se encuentran sobre la misma línea y no está sujeto a cargas externas; por tanto, el elemento BC es un elemento de fuerza cero. Si se aplica el mismo razonamiento al nodo K, se encuentra que el elemento JK también es un elemento de fuerza cero. Ahora, el nodo J está en la misma situación que los nodos C y K, entonces el elemento IJ debe ser un elemento de fuerza cero. La observación de los nodos C ,J y K revela que las fuerzas en los elementos AC y CE son iguales, las fuerzas en los elementos HJ y JL son también iguales, así como las fuerzas en los elementos IK y KL. Regresando la atención al nodo Z, donde la carga de 20 kN y el elemento III son colineales, se observa que la fuerza en el elemento HI es de 20 kN (tensión) y que las fuerzas en los elementos GI e IK son iguales. De esta manera, se concluye que las fuerzas en los elementos GZ, IK y KL son iguales.

Se debe observar que las condiciones descritas en el párrafo anterior no pueden aplicarse a los nodos B y D de la figura 6.14 y sería erróneo suponer que la fuerza en el elemento DE es de 25 kN o que las fuerzas en los elementos AB y BD son iguales. Las fuerzas en estos elementos y en los restantes se encuentran con el análisis de los nodos A, B, D, E, F, G, H y L en la forma habitual. Por tanto, hasta que se esté familiarizado con las condiciones que permiten aplicar las reglas establecidas en esta sección, se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre de todos los pernos y escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes (o dibujar los polígonos de fuerzas correspondientes) sin importar si los medios considerados se encuentran bajo una de las condiciones especiales de carga que se describieron anteriormente.

Un comentario final en relación con los elementos de fuerza cero: estos elementos no son inútiles. Por ejemplo, a pesar de que los elementos de fuerza cero de la figura 6.14 no soportan ninguna carga bajo las condiciones mostradas, es probable que los mismos elementos podrían soportar alguna si se cambiaran las condiciones de carga. Además, incluso en el caso considerado, estos elementos son necesarios para soportar el peso de la armadura y para mantener a esta última con la forma deseada.

## 2.5 Armaduras en el espacio o espaciales

Cuando varios elementos rectos se unen en sus extremos para formar una configuración tridimensional, la estructura obtenida recibe el nombre de armadura en el espacio o espacial.

En la sección 6.3 se estableció que la mayoría de las armaduras rígidas bidimensionales elementales consistían de tres elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un triángulo; al agregar dos elementos a esta configuración básica y conectándolos en un nuevo nodo, se obtiene una estructura rígida más grande, la cual fue definida como una armadura simple. En forma similar, la armadura rígida básica en el espacio está constituida por seis elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un tetraedro ABCD (figura 6.15a). Si se agregan tres elementos a esta configuración básica, como los elementos AE, BE y CE, uniéndolos a los tres nodos existentes y conectándolos en un nuevo nodo, se puede obtener una estructura rígida más grande, la cual se define como una armadura simple en el espacio (figura 6.15fc). Observe que el tetraedro básico tiene seis elementos y cuatro nodos y que cada vez que se agregan tres elementos el número de nodos se incrementa en uno, se concluye que en una armadura espacial simple el número total de elementos es  $n_i = 3n - 6$ , donde  $n$  es el número total de nodos.

Si una armadura espacial debe tener restricción completa y si las reacciones en sus apoyos deben ser estáticamente determinadas, los apoyos deben consistir en una combinación de bolas, rodillos y rótulas que proporcionen un total de seis reacciones desconocidas (véase

sección 4.9). Estas reacciones desconocidas se determinan al resolver las seis ecuaciones que expresan que la armadura tridimensional está en equilibrio.

A pesar de que los elementos de una armadura en el espacio están unidos por conexiones soldadas o remachadas, se supone que cada nodo consiste en una conexión tipo rótula. Por tanto, no se aplicará ningún par a los elementos de la armadura y cada elemento puede tratarse como un elemento sometido a la acción de dos fuerzas. Las condiciones de equilibrio para cada nodo estarán expresadas por las tres ecuaciones  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum F_z = 0$ . Entonces, en el caso de una armadura simple en el espacio que contiene  $n$  nodos, escribir las condiciones de equilibrio para cada nodo proporcionará un total de  $3n$  ecuaciones. Como  $m = 3n - 6$ , estas ecuaciones serán suficientes para determinar todas las fuerzas desconocidas (las fuerzas en los  $m$  elementos y las seis reacciones en los apoyos). Sin embargo, para evitar la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas, se debe tener cuidado en seleccionar nodos en un orden tal que ninguno involucre más de tres fuerzas desconocidas.

## 2.6 Análisis de armaduras por el método de secciones

El método de los nodos es el más eficiente cuando se deben determinar las fuerzas en todos los elementos de una armadura. Sin embargo, si sólo se desea encontrar la fuerza en un elemento o en un número muy reducido de elementos, el método de secciones es el más eficiente.

Suponga que se desea determinar la fuerza en el elemento BD de la armadura que se muestra en la figura 6.16<7. Para llevar a cabo esta tarea, se debe determinar la fuerza con la cual el elemento BD actúa sobre el nodo B o sobre el nodo D. Si se utilizara el método de los nodos, se seleccionaría al nodo B o al nodo D como el cuerpo libre. Sin embargo, también se selecciona como cuerpo libre a una porción más grande de la armadura, compuesta por varios nodos y elementos, siempre y cuando la fuerza deseada sea una de las fuerzas externas que actúan sobre dicha porción. Además, si se selecciona la porción de la armadura de manera que solamente se tenga un total de tres fuerzas desconocidas actuando sobre la misma, la fuerza deseada se puede obtener al resolver las ecuaciones de equilibrio para la porción de la

armadura en cuestión. En la práctica, la porción de la armadura que debe utilizarse se obtiene pasando una sección a través de tres elementos de la armadura, de los cuales uno debe ser el elemento deseado, esto es, dicha porción se obtiene dibujando una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las dos porciones de la armadura que se obtenga después de que los elementos intersecados han sido removidos puede utilizarse como el cuerpo libre.

En la figura 6.16a se ha pasado la sección  $nn$  a través de los elementos  $BD$ ,  $BE$  y  $CE$  y se ha seleccionado la porción  $ABC$  de la armadura como el cuerpo libre (figura 6.16b);. Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cargas  $P_1$  y que están aplicadas en los puntos  $A$  y  $B$  y las tres fuerzas desconocidas  $F_{BD}$ ,  $F_{BE}$  y  $F_{CE}$ .

Como no se sabe si los elementos removidos estaban en tensión o compresión, de manera arbitraria se dibujaron las tres fuerzas alejándose del cuerpo libre como si los elementos estuvieran en tensión.

El hecho de que el cuerpo rígido  $ABC$  está en equilibrio se puede expresar con tres ecuaciones, las cuales pueden resolverse para encontrar tres fuerzas desconocidas. Si sólo se desea determinar la fuerza  $F_{BD}$ , sólo se necesita escribir una ecuación, siempre y cuando dicha ecuación no contenga a las otras incógnitas. Por tanto, la ecuación  $\sum F_x = 0$  proporciona el valor de la magnitud  $F_{BD}$  de la fuerza  $F_{BD}$  (figura 6.16c);. Un signo positivo en el resultado indicará que la suposición original en relación con el sentido de  $F_{BD}$  fue correcta y que el elemento  $BD$  está en tensión; un signo negativo indicará que la suposición original fue incorrecta y que  $BD$  está en compresión.

Por otra parte, si sólo se desea encontrar la fuerza  $F_{CE}$ , se debe escribir una ecuación que no involucre a  $F_{BD}$  o a  $F_{BE}$ ; en este caso, la ecuación apropiada es  $\sum F_y = 0$ . Un signo positivo para la magnitud  $F_{CE}$  de la fuerza deseada muestra que la suposición hecha fue correcta, esto es, que el elemento está en tensión y un signo negativo indica que la suposición fue incorrecta, esto es, que el elemento está en compresión.

Si sólo se desea encontrar la fuerza  $F_{BE}$ , la ecuación apropiada es  $\sum F_x = 0$ . De nuevo, a partir del signo del resultado se determina si el elemento está en tensión o en compresión.

Cuando se determina únicamente la fuerza de un solo elemento, no se tiene disponible una forma independiente de comprobar los cálculos realizados. Sin embargo, cuando se han determinado todas las fuerzas desconocidas que actúan sobre el cuerpo libre, se pueden verificar los cálculos escribiendo una ecuación adicional. Por ejemplo, si  $F_{bd}$ ,  $F_{ce}$  y  $F_{be}$  se determinan de la manera señalada en los párrafos anteriores, los cálculos pueden comprobarse verificando que  $\sum FV = 0$ .

## 2.7 Armaduras formadas por varias armaduras simples

Considere dos armaduras simples ABC y DEF. Si estas armaduras están conectadas por tres barras BD, BE y CE, como se muestra en la figura 6.17a, entonces formarán en conjunto una armadura rígida ABDF. Las armaduras ABC y DEF también se pueden combinar en una sola armadura rígida uniendo los nodos B y D en un solo nodo B y conectando los nodos C y E por medio de una barra CE (figura 6.17b). La armadura que se obtiene de esta forma se conoce como una armadura Fink. Se debe señalar que las armaduras de la figura 6.17a y b no son armaduras simples; éstas no se pueden construir a partir de una armadura triangular a la que se agregan sucesivamente pares de elementos en la forma descrita en la sección 6.3. Sin embargo, estas armaduras son rígidas, como se verifica al comparar los sistemas de conexiones empleados para mantener juntas las armaduras simples ABC y DEF (tres barras en la figura 6.17a y un perno y una barra en la figura 6.17b) con los sistemas de apoyos presentados en las secciones 4.4 y 4.5. Las armaduras que están hechas a partir de varias armaduras simples conectadas rígidamente se conocen como armaduras compuestas.

En una armadura compuesta, el número de elementos  $m$  y el número de nodos  $n$  están relacionados por la fórmula  $m = 2n - 3$ . Esto puede corroborarse observando que, si una armadura compuesta está apoyada por un perno sin fricción y un rodillo (involucrando así tres reacciones desconocidas), el número total de incógnitas es  $m + 3$  y dicho número debe ser igual al número  $2n$  de ecuaciones que se obtienen al expresar que los  $n$  pernos están en equilibrio; por tanto se concluye que  $m = 2n - 3$ . Las armaduras compuestas que están apoyadas por un perno y un rodillo, o por un sistema equivalente de apoyos, son estáticamente

determinadas, rígidas y completamente restringidas. Esto se refiere a que todas las reacciones desconocidas y las fuerzas en todos los elementos pueden determinarse mediante los métodos de la estática y que la armadura no se colapsará ni se moverá.

Sin embargo, no todas las fuerzas en los elementos se pueden determinar por el método de los nodos, a menos que se resuelva un gran número de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, en el caso de la armadura compuesta de la figura 6.17a, es más eficiente pasar una sección a través de los elementos BD, BE y CE para determinar las fuerzas en los mismos.

Ahora suponga que las armaduras simples ABC y DEF están conectadas por cuatro barras BD, BE, CD y CE (figura 6.18). Ahora, el número de elementos  $m$  es mayor que  $2n - 3$ ; por tanto, resulta una armadura hiperestática y se dice que uno de los cuatro elementos BD, BE, CD, o CE es redundante. Si la armadura está apoyada por un perno en A y por un rodillo en F, el número total de incógnitas es  $m + 3$ .

Como  $m > 2n - 3$ , ahora el número  $m + 3$  de incógnitas es mayor que el número  $2n$  de ecuaciones independientes que se tienen disponibles; en consecuencia, la armadura es estáticamente indeterminada.

Por último, supóngase que las dos armaduras simples ABC y DEF están unidas por un perno, como se muestra en la figura 6.19o. El número de elementos  $m$  es menor que  $2n - 3$ . Si la armadura está apoyada por un perno en A y un rodillo en F, el número total de incógnitas es  $m + 3$ . Como  $m < 2n - 3$ , ahora el número  $m + 3$  de incógnitas es menor que el número  $2n$  de ecuaciones de equilibrio que se deben cumplir; por tanto, la armadura no es rígida y se colapsará bajo su propio peso. Sin embargo, si se usan dos pernos para apoyarla, la armadura se vuelve rígida y no se colapsará (figura 6.19fo). Ahora se observa que el número total de incógnitas es  $m + 4$  y es igual al número  $2n$  de ecuaciones. En términos más generales, si las reacciones en los apoyos involucran  $r$  incógnitas, la condición para que una armadura compuesta sea estáticamente determinada, rígida y por completo restringida es  $rn + r = 2n$ . Sin embargo, aunque esta condición es necesaria, no es suficiente para el equilibrio de una estructura que deja de ser rígida cuando se separa de sus apoyos (véase sección 6.11).

## 2.8 Estructuras que contienen elementos sujetos a fuerzas múltiples

Bajo la denominación de armaduras, bastidores o armazones se consideran estructuras totalmente constituidas por pernos y elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas. Se sabía que las fuerzas que actuaban sobre los elementos estaban dirigidas a lo largo de los mismos.

Ahora se considerarán estructuras en las cuales por lo menos uno de los elementos es un elemento sujeto a la acción de fuerzas múltiples, esto es, un elemento sobre el que actúan tres o más fuerzas. En general, dichas fuerzas no estarán dirigidas a lo largo de los elementos sobre los cuales actúan; su dirección es desconocida y, por tanto, se deben representar por dos componentes desconocidas.

Los armazones y las máquinas son estructuras que contienen elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Los armazones están diseñados para soportar cargas y son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las máquinas están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas; estas pueden o no ser estacionarias y siempre tendrán partes móviles.

## 2.9 Análisis de un armazón

Como un primer ejemplo del análisis de un armazón, se retomará el ejemplo de una grúa que soporta determinada carga  $W$  que ya fue descrito en la sección 6.1 (figura 6.20a). El diagrama de cuerpo libre para la estructura completa se muestra en la figura 6.20b. Este diagrama se puede utilizar para determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura. Primero, al sumar momentos con respecto a  $A$ , se determina la fuerza ejercida por el cable; entonces, si se suman componentes  $x$  y  $y$  se determinan las componentes  $A_x$  y  $A_y$ , de la reacción en el perno  $A$ .

Con el fin de determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes del armazón, éste se debe desensamblar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen (figura 6.20c). Primero se deben considerar los elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. En este armazón, el elemento  $BE$  es el único sobre el que

actúan dos fuerzas. Las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos de este elemento deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Por tanto, dichas fuerzas están dirigidas a lo largo de BE y se representarán, respectivamente, por  $F/j(.$ ; y  $- F BE$ . De modo arbitrario, se supondrá que su sentido es como se muestra en la figura 6.20c; después, el signo obtenido para la magnitud común  $F_{be}$  de estas dos fuerzas confirmará o negará esta suposición.

Enseguida se consideran los elementos sometidos a la acción de varias fuerzas, los elementos sobre los que actúan tres o más fuerzas.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida en B por el elemento BE sobre el elemento AD debe ser igual y opuesta a la fuerza  $F BK$  ejercida por AD sobre BE. En forma similar, la fuerza ejercida en E por el elemento BE sobre el elemento CF debe ser igual y opuesta a la fuerza  $- F BE$  ejercida por CF sobre BE. Por tanto, las fuerzas que el elemento sometido a la acción de dos fuerzas BE ejerce sobre AD y CF son iguales, respectivamente, a  $- F BE$  y  $F /;$ ; estas fuerzas tienen la misma magnitud  $F_{BE}$  y sentidos opuestos y deben estar dirigidas como se muestra en la figura 6.20c.

Dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas están conectados en C. Como no se conocen ni la magnitud ni la dirección de las fuerzas que actúan en C, dichas fuerzas se representarán por sus componentes x y y. Las componentes  $C_x$  y  $C_y$  de la fuerza que actúa sobre el elemento AD serán dirigidas de manera arbitraria hacia la derecha y hacia arriba. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas ejercidas por el elemento CF sobre AD y las fuerzas ejercidas por el elemento AD sobre CF son iguales y opuestas, las componentes de la fuerza que actúa sobre el elemento CF deben estar dirigidas hacia la izquierda y hacia abajo; dichas componentes se representarán, respectivamente, por  $- C_x$  y  $- C_y$ . Si la fuerza  $C^*$  en realidad está dirigida hacia la derecha y la fuerza  $-C_v$  hacia la izquierda se determinará después, a partir del signo de su magnitud común  $C_v$ , un signo positivo indicará que la suposición hecha fue correcta y un signo negativo indicará que la suposición fue incorrecta. Los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples muestran las fuerzas externas que actúan en A, D y F.1



Ahora se pueden determinar las fuerzas internas considerando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de los dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Por ejemplo, seleccionando el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento CF, se escriben las ecuaciones  $\sum M_C = 0$ ,  $\sum F_V = 0$  y  $\sum F_H = 0$ , las cuales proporcionan, respectivamente, los valores de las magnitudes FBE, Cy y Cx. Estos valores se pueden comprobar verificando que el elemento AD también se encuentra en equilibrio.

Se debe señalar que en la figura 6.20 se supuso que los pernos formaban una parte integral de uno de los dos elementos que conectaban dichos pernos y, por tanto, no fue necesario dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Esta suposición siempre se puede utilizar para simplificar el análisis de los armazones y las máquinas. Sin embargo, cuando un perno conecta a tres o más elementos, o cuando un perno conecta a un apoyo y a dos o más elementos o cuando se aplica una carga en un perno debe tomarse una decisión clara con relación al elemento seleccionado al cual se supondrá que pertenece el perno. (Si son elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se debe unir el perno a uno de dichos elementos.) Entonces, deben identificarse las diversas fuerzas ejercidas sobre el perno. Esto se ilustra en el problema resuelto 6.6.

## 2.10 Armazones que dejan de ser rígidos cuando se separan de sus soportes

La grúa analizada en la sección 6.10 estaba construida de manera que podía mantener la misma forma sin la ayuda de sus apoyos; por tanto, se consideró a la grúa como un cuerpo rígido. Sin embargo, muchos armazones o estructuras se colapsarían si se separan de sus apoyos; en consecuencia, dichos armazones no pueden considerarse como cuerpos rígidos. Por ejemplo, considere el armazón mostrado en la figura 6.21a, el cual consta de dos elementos AC y CB que soportan, respectivamente, a las cargas P y Q que actúan en los puntos medios de dichos elementos; los elementos están soportados por pernos en A y B. están conectados por medio de un perno en C. Este armazón no mantendrá su forma si se separa de sus apoyos; por tanto, se debe considerar que está hecho de dos partes rígidas distintas AC y CB.

Las ecuaciones  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M = 0$  (con respecto a cualquier punto dado) expresan las condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido (capítulo 4); por tanto, deben utilizarse en conjunto con los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cuerpos rígidos, es decir, los diagramas de cuerpo libre para los elementos AC y CB (figura 6.21/?).

Como los dos elementos en cuestión están sujetos a la acción de fuerzas múltiples, y se emplean pernos en los apoyos y en la conexión, cada una de las reacciones en A y B y las fuerzas en C se deben representar por medio de dos componentes. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las componentes de la fuerza ejercida por CB sobre AC y las componentes de la fuerza ejercida por AC sobre CB estarán representadas por vectores que tienen la misma magnitud y sentidos opuestos; por tanto, si el primer par de componentes está constituido por  $C_x$  y  $C_y$ , el segundo estará representado por  $-C_x$  y  $-C_y$ . Se observa que actúan cuatro componentes de fuerzas desconocidas sobre el cuerpo libre AC, mientras que sólo pueden emplearse tres ecuaciones independientes para expresar que dicho cuerpo está en equilibrio; de manera similar, cuatro incógnitas están asociadas con el cuerpo libre CB, pero sólo se tienen tres ecuaciones independientes. Sin embargo, sólo están involucradas seis incógnitas diferentes en el análisis de los dos elementos y, en conjunto, están disponibles seis ecuaciones para expresar que ambos elementos están en equilibrio. Escribiendo  $\sum F_x = 0$  para el cuerpo libre AC y  $\sum F_y = 0$  para el cuerpo libre CB, se obtienen dos ecuaciones simultáneas que pueden resolverse para la magnitud común  $C_x$  de las componentes  $C_x$  y  $-C_x$  y para la magnitud común  $C_y$  de las componentes  $C_y$  y  $-C_y$ . Enseguida se escribe  $\sum M = 0$  para cada uno de los dos cuerpos libres con el fin de obtener, sucesivamente, las magnitudes

$A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$  y  $B_y$

Puesto que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC satisfacen las ecuaciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M = 0$  (con respecto a cualquier punto dado) se satisfacen por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC y debido a que dichas ecuaciones también se satisfacen por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CB, ahora se puede observar que las tres ecuaciones de equilibrio también deben cumplirse cuando se consideran simultáneamente las fuerzas que actúan sobre los dos cuerpos libres. Como las fuerzas internas en C se cancelan entre sí, se concluye que las fuerzas externas mostradas en el diagrama de

cuerpo libre para el propio armazón ACB (figura 6.21c-) del en satisfacer las ecuaciones de equilibrio, a pesar de que el armazón en análisis no es un cuerpo rígido. Dichas ecuaciones se utilizan para determinar algunas de las componentes de las reacciones en A y B. Sin embargo, también se concluye que no se pueden determinar por completo las reacciones a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo. Por tanto, es necesario desensamblar el armazón y considerar los diagramas de cuerpo libre de las partes que lo constituyen (figura 6.21 b), aun cuando sólo se deseen determinar las reacciones externas. Lo anterior se debe a que las ecuaciones de equilibrio obtenidas para el cuerpo libre ACB son condiciones necesarias, pero no suficientes, para el equilibrio de una estructura que no es rígida.

El método de solución descrito en el segundo párrafo de la presente sección involucró ecuaciones simultáneas. A continuación, se presenta un método más eficiente, el cual utiliza tanto al cuerpo libre ACB como a los cuerpos libres AC y CB. Si se escribe  $\sum M_A = 0$  y  $\sum M_B = 0$  para el cuerpo libre ACB, se obtienen  $B_x$  y  $A_x$ . Escribiendo  $\sum M_C = 0$ ,  $\sum F_x = 0$

y  $\sum F_y = 0$  para el cuerpo libre AC se obtienen, sucesivamente,  $A_x$ ,  $C_x$  y

$C_y$ . Por último, al escribir  $\sum F_y = 0$  para ACB, se obtiene  $B_x$ .

Se señaló con anterioridad que el análisis del armazón de la figura 6.21 involucra seis componentes de fuerzas desconocidas y seis ecuaciones de equilibrio independientes. (Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo se obtuvieron a partir de las seis ecuaciones originales y, por tanto, no son independientes.) Además, se corroboró que en realidad se podían determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones. Por tanto, el armazón considerado es estáticamente determinado y rígido. En general, para determinar si una estructura es estáticamente determinada y rígida, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen y contar el número de reacciones y de fuerzas internas que están involucradas. También se debe determinar el número de ecuaciones de equilibrio independientes (excluyendo las ecuaciones que expresan el equilibrio de la estructura completa o de grupos de partes componentes que ya se han analizado). Si hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es estáticamente indeterminada. Si hay menos incógnitas que ecuaciones, la estructura no es rígida. Si hay tantas incógnitas como ecuaciones y si se pueden determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones bajo condiciones

generales de carga, la estructura es estáticamente determinada y rígida. Sin embargo, si debido a un arreglo impropio de los elementos y apoyos no se pueden determinar todas las incógnitas ni satisfacer todas las ecuaciones, la estructura es estáticamente indeterminada y no es rígida.

## 2.11 Máquinas

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si éstas son herramientas simples o incluyen mecanismos complicados, su propósito principal es transformar fuerzas de entrada en fuerzas de salida. Por ejemplo, considere unas pinzas de corte que se emplean para cortar un alambre (figura 6.22a). Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas  $P$  y  $-P$  sobre sus mangos, éstas ejercerán dos fuerzas iguales y opuestas  $Q$  y  $-Q$  sobre el alambre (figura 6.22b).

Para determinar la magnitud  $Q$  de las fuerzas de salida cuando se conoce la magnitud  $P$  de las fuerzas de entrada (o a la inversa, para determinar  $P$  cuando se conoce  $Q$ ), se dibuja un diagrama de cuerpo libre de las pinzas por sí solas, mostrando las fuerzas de entrada  $P$  y  $-P$  y las reacciones  $-Q$  y  $Q$  que el alambre ejerce sobre las pinzas (figura 6.23).

Sin embargo, como las pinzas forman una estructura que no es rígida, se debe utilizar una de las partes que la constituyen como un cuerpo libre para poder determinar las fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en la figura 6.24a, si se toman momentos con respecto a  $A$ , se obtiene la relación  $Pa = Qb$ , la cual define a la magnitud de  $Q$  en términos de  $P$  o a la magnitud de  $P$  en términos de  $Q$ . Se puede emplear el mismo diagrama de cuerpo libre para determinar las componentes de la fuerza interna en  $A$ ; de esta forma, se encuentra que  $A_x = 0$  y  $A_f = P + Q$ .

En el caso de máquinas más complejas, es necesario utilizar varios diagramas de cuerpo libre y, posiblemente, se tendrán que resolver ecuaciones simultáneas que involucren fuerzas múltiples internas. Los cuerpos libres se deben seleccionar de manera que incluyan a las fuerzas de entrada y a las reacciones de las fuerzas de salida, y el número total de componentes de fuerzas desconocidas involucradas no debe ser mayor que el número de ecuaciones independientes que están disponibles. Antes de tratar de resolver un problema, es

recomendable conocer si la estructura considerada es determinada o no. Sin embargo, no tiene caso discutir la rigidez de una máquina puesto que ésta incluye partes móviles y, por ende, no debe ser rígida.

## UNIDAD III ROZAMIENTO O FRICCIÓN

### 3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se supuso que las superficies en contacto eran superficies sin fricción o superficies rugosas. Si éstas eran superficies sin fricción, la fuerza que cada una de las superficies ejercía sobre la otra era normal a las superficies y las dos se podían mover de manera libre una respecto a la otra. Si éstas eran superficies rugosas, se supuso que se podían presentar fuerzas tangenciales para impedir el movimiento de una superficie con respecto a la otra.

El anterior fue un punto de vista muy simplificado. En realidad, no existen superficies sin fricción perfectas. Cuando dos superficies están en contacto, siempre se presentan fuerzas tangenciales, llamadas fuerzas de fricción, cuando se trata de mover una de las superficies con respecto a la otra. Por otra parte, estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes. Por tanto, la distinción entre superficies sin fricción y superficies rugosas es una cuestión de grado. Esto se estudiará con más detalle en el presente capítulo, el cual está dedicado al estudio de la fricción y a su aplicación en situaciones de ingeniería comunes.

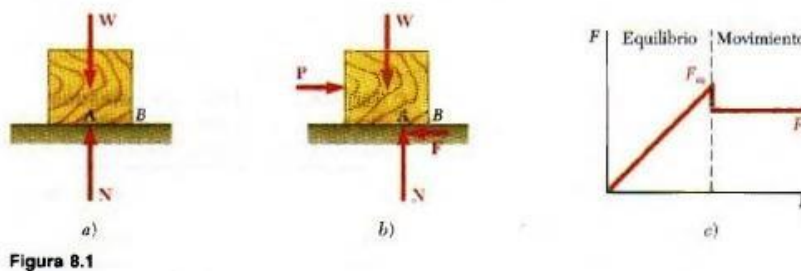
Existen dos tipos de fricción: la fricción seca, que algunas veces es llamada fricción de Coulomb, y la fricción de fluidos. La fricción de fluidos se desarrolla entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades, y es de gran importancia en problemas que involucran el flujo de fluidos a través de tuberías y orificios o cuando se trabaja con cuerpos que están sumergidos en fluidos en movimiento. Además, la fricción en fluidos también es básica en el análisis del movimiento de mecanismos lubricados. Este tipo de problemas se consideran en los libros sobre mecánica de fluidos. El presente estudio está limitado a la fricción seca, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies que no están lubricadas.

En la primera parte del capítulo se analiza el equilibrio de distintos cuerpos rígidos y estructuras de fricción seca en las superficies que están en contacto. Más adelante se estudian ciertas aplicaciones de ingeniería específicas en las cuales la fricción seca juega un papel

importante: cuñas, tornillos de rosca cuadrada, chumaceras, cojinetes de empuje, resistencia a la rodadura y fricción en bandas.

### 3.2 Leyes de la fricción seca. Coeficientes de fricción

Las leyes de la fricción seca se pueden ejemplificar mediante el siguiente experimento. Un bloque de peso  $W$  se coloca sobre una superficie horizontal plana (figura 8.1a). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso  $W$  y la reacción de la superficie. Como el peso no tiene una componente horizontal, la reacción de la superficie tampoco la tiene; por tanto, la reacción es normal a la superficie y está representada por  $N$  en la figura 8.1a. Ahora, suponga que se aplica sobre el bloque una fuerza horizontal  $P$  (figura 8.1b). Si  $P$  es pequeña, el bloque no se moverá; por tanto, debe existir alguna otra fuerza horizontal que equilibre a  $P$ . Esta otra fuerza es la fuerza de fricción estática  $F$ , la cual es en realidad la resultante de diversas fuerzas que actúan sobre toda la superficie de contacto entre el bloque y el plano. No se conoce con exactitud la naturaleza de estas fuerzas, pero generalmente se supone que las mismas se deben a irregularidades de las superficies en contacto y, en cierta medida, a la atracción molecular.



Si se incrementa la fuerza  $P$ , también se incrementa la fuerza de fricción  $F$ , la cual continúa oponiéndose a  $P$  hasta que su magnitud alcanza un cierto valor máximo  $F_m$  (figura 8.1c). Si  $P$  se incrementa aún más, la fuerza de fricción ya no la puede equilibrar y el bloque comienza a deslizarse. En cuanto empieza a moverse el bloque, la magnitud de  $F$  disminuye de  $F_m$  a un valor menor  $F^*$ . Lo anterior se debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se mueven una con respecto a la otra. A partir del momento en que el bloque empieza a moverse, éste continúa

deslizándose con una velocidad que va aumentando mientras que la fuerza de fricción, representada por  $F^*$  y denominada fuerza de fricción cinética, permanece constante.

La evidencia experimental muestra que el máximo valor  $F_m$  de la fuerza de fricción estática es proporcional a la componente normal  $N$  de la reacción de la superficie. Así, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \quad (8.1)$$

donde  $\mu_s$  es una constante llamada coeficiente de fricción estática. De forma similar, la magnitud  $F_k$  de la fuerza de fricción cinética puede expresarse de la siguiente forma:

$$(8.2)$$

donde  $\mu_k$  es una constante denominada coeficiente de fricción cinética.

Los coeficientes de fricción  $\mu_s$  y  $\mu_k$  no dependen del área de las superficies en contacto, sino que dependen en gran medida de la naturaleza de las superficies en contacto. Como dichos coeficientes también dependen de la condición exacta de las superficies, sus valores casi nunca se conocen con una precisión mayor a 5 por ciento.

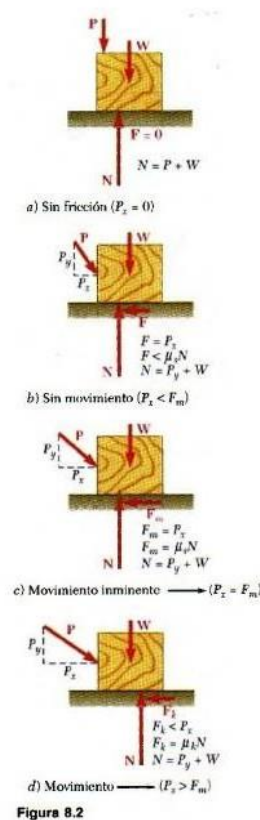
En la tabla 8.1 se presentan valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para distintas superficies secas. Los valores correspondientes de fricción cinética son alrededor de 25 por ciento menores.

Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto con unidades del SI como con las unidades de uso común en Estados Unidos.



**Tabla 8.1. Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas**

Metal sobre metal	0.15-0.60
Metal sobre madera	0.20-0.60
Metal sobre piedra	0.30-0.70
Metal sobre cuero	0.30-0.60
Madera sobre madera	0.25-0.50
Madera sobre cuero	0.25-0.50
Piedra sobre piedra	0.40-0.70
Tierra sobre tierra	0.20-1.00
Hule sobre concreto	0.60-0.90



Con base en la descripción que se expuso en los párrafos anteriores es posible afirmar que pueden ocurrir cuatro situaciones diferentes cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1. Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tienden a moverlo a lo largo de la superficie de contacto; por tanto, no hay fuerza de fricción (figura 8.2a).

2. Las fuerzas aplicadas tienden a mover al cuerpo a lo largo de la superficie de contacto, pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción  $F$  que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que  $F$  ha alcanzado su valor máximo, no se puede utilizar la ecuación  $F_m = \mu_s N$  para determinar la fuerza de fricción (figura 8.2b).

3. Las fuerzas aplicadas hacen que el cuerpo esté a punto de comenzar a deslizarse, en este momento se dice que el movimiento es inminente. La fuerza de fricción  $F$  ha alcanzado su valor máximo  $F_m$ , y, junto con la fuerza normal  $N$ , equilibra las fuerzas aplicadas. Se pueden utilizar tanto las ecuaciones de equilibrio como la ecuación  $F_m = \mu_s N$ . También es necesario señalar

que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 8.2c).

4. El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora  $F$  es igual a  $F_c$ . y se puede utilizar la ecuación  $F_k = \mu_k N$ . El sentido de  $F^*$ . es opuesto al sentido del movimiento (figura 8.2d).

### 3.3 Ángulos de fricción

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal  $N$  y la fuerza de fricción  $F$  por su resultante  $R$ . Considere un bloque de peso  $W$  que descansa sobre una superficie horizontal plana. Si no se aplica una fuerza horizontal al bloque, la resultante  $R$  se reduce a la fuerza normal  $N$  (figura 8.3a). Sin embargo, si la fuerza aplicada  $P$  tiene una componente horizontal  $P_r$  que tiende a mover el bloque, la fuerza  $R$  tendrá una componente horizontal  $F$  y, por tanto, formará un ángulo  $\phi$  con la normal a la superficie (figura 8.3b). Si se incrementa  $P_r$  hasta que el movimiento se vuelva inminente, el ángulo entre  $R$  y la vertical aumenta y alcanza un valor máximo (figura 8.3c). Este valor recibe el nombre de ángulo de fricción estática y se representa con  $\phi_s$ . Con base en la geometría de la figura 8.3c, se observa que

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \quad (8.3)$$

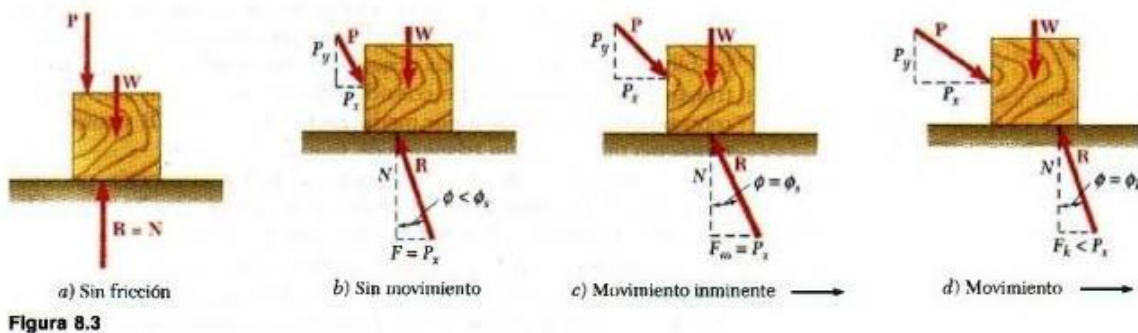
Si en realidad llega a ocurrir el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción decae a un valor menor, el ángulo  $\phi$  entre  $R$  y  $N$  decae a un valor menor, llamado ángulo de fricción cinética (figura 8.3d). Con base en la geometría de la figura 8.3d, se escribe

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k \quad (8.4)$$

Se demostrará con otro ejemplo cómo el ángulo de fricción se puede utilizar con ventaja para el análisis de cierto tipo de problemas. Considérese un bloque que descansa sobre una tabla y que está sujeto a las fuerzas correspondientes a su peso  $W$  y a la reacción  $R$  de la tabla.

Se le puede dar a la tabla cualquier inclinación que se desee. Si la tabla permanece horizontal, la fuerza  $R$  ejercida por la tabla sobre el bloque es perpendicular a la tabla y equilibra al peso  $W$  (figura 8.4a). Si se le da a la tabla un pequeño ángulo de inclinación  $\theta$ , la fuerza  $R$  se desviará de la perpendicular a la tabla por el mismo ángulo  $\theta$  y continuará equilibrando a  $W$  (figura 8.4b); entonces,  $R$  tendrá una componente normal  $N$  de magnitud  $N = W \cos \theta$  y una componente tangencial  $F$  de magnitud  $F = W \sin \theta$ .



Si se continúa incrementando el ángulo de inclinación el movimiento será inminente en poco tiempo. En ese momento, el ángulo entre  $R$  y la normal habrá alcanzado su valor máximo  $\phi_s$  (figura 8.4c:).

El valor del ángulo de inclinación correspondiente al movimiento inminente recibe el nombre de ángulo de reposo. Obviamente, el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción estática ( $\phi_s$ ). Si se incrementa aún más el ángulo de inclinación  $\theta$ , comienza el movimiento y el ángulo entre  $R$  y la normal decae al valor menor ( $\phi_k$ ). La reacción  $R$  ya no es vertical y las fuerzas que actúan sobre el bloque están desequilibradas.

### 3.4 Problemas que involucran fricción seca

En muchas aplicaciones de ingeniería se encuentran problemas que involucran fricción seca. Algunos tratan con situaciones simples como la del bloque que se desliza sobre un plano, que se describió en la sección anterior. Otros involucran situaciones más complicadas como en el problema resuelto 8.3; muchos tratan con la estabilidad de cuerpos rígidos en movimiento acelerado y serán estudiados en la parte de dinámica.

Además, cierto número de máquinas y mecanismos comunes pueden analizarse aplicando las leyes de fricción seca. Estos incluyen cuñas, tornillos, chumaceras, cojinetes de empuje y transmisiones de banda, los cuales serán estudiados en las secciones siguientes.

Los métodos que deben utilizarse para resolver problemas que involucran fricción seca son los mismos que se emplearon en los capítulos anteriores. Si un problema involucra sólo un movimiento de traslación, sin que sea posible una rotación, usualmente se puede tratar al cuerpo bajo consideración como si fuera una partícula y, por tanto, se pueden usar los métodos del capítulo 2. Si el problema involucra una posible rotación, el cuerpo se debe considerar como un cuerpo rígido y se pueden emplear los métodos del capítulo 4. Si la estructura que se estudia está hecha de varias partes, se debe utilizar el principio de acción y reacción como se hizo en el capítulo 6.

Si actúan más de tres fuerzas sobre el cuerpo bajo consideración (incluyendo las reacciones en las superficies de contacto), la reacción en cada superficie será representada por

sus componentes  $N$  y  $F$  y el problema se resolverá con las ecuaciones de equilibrio. Si sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo considerado, puede ser más conveniente representar cada reacción por medio de la fuerza única  $R$  y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas.

La mayoría de los problemas que involucran la fricción pertenecen a uno de los siguientes tres grupos: en el primer grupo de problemas todas las fuerzas aplicadas están dadas y los coeficientes de fricción se conocen; en estos casos, se desea determinar si el cuerpo considerado permanecerá en reposo o se deslizará. La fuerza de fricción  $F$  requerida para mantener el equilibrio es desconocida (su magnitud no es igual a  $\mu_s N$ ) y debe determinarse, junto con la fuerza normal  $N$ , dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5a). Después, se compara el valor encontrado de la magnitud  $F$  de la fuerza de fricción con el valor máximo  $F_m = \mu_s N$ . Si  $F$  es menor o igual que  $F_m$ , el cuerpo permanecerá en reposo. Si el valor de  $F$  encontrado es mayor que  $F_m$  no se puede mantener el equilibrio y ocurre el movimiento; entonces, la magnitud real de la fuerza de fricción es  $F_f = \mu_k N$ .

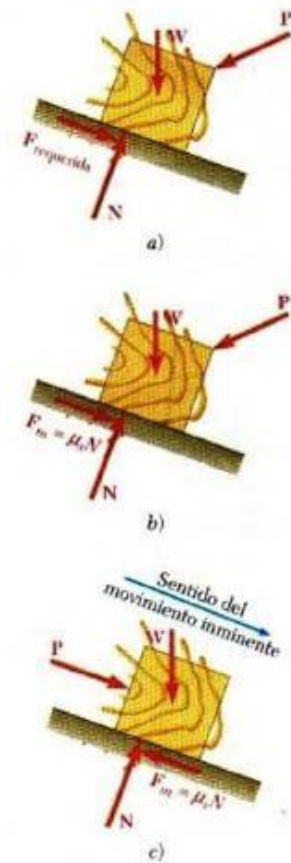


Figura 8.5

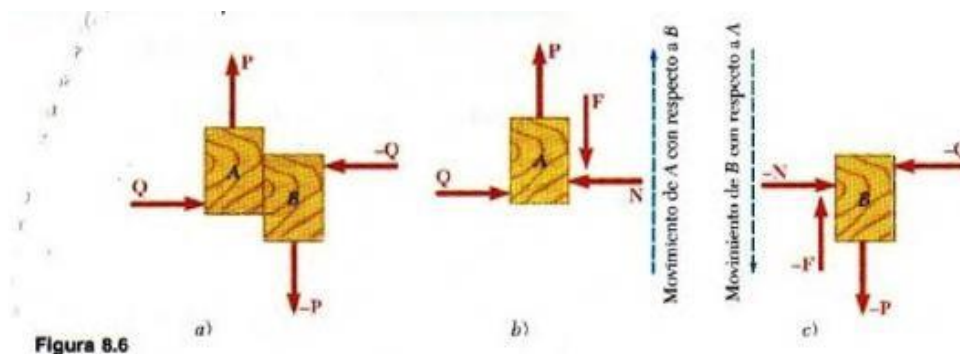
En los problemas del segundo grupo, todas las fuerzas aplicadas están dadas y se sabe que el movimiento es inminente; se desea determinar el valor del coeficiente de fricción estática. Aquí, nuevamente se determina la fuerza de fricción y la fuerza normal dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5b). Como se sabe, el valor encontrado para  $F$  es el valor máximo  $F_m$ , se puede encontrar el coeficiente de fricción al escribir y resolver la ecuación  $F_m = \mu_s N$ .

En los problemas del tercer grupo se proporciona el coeficiente de fricción estática y se sabe que el movimiento en una dirección dada es inminente; se desea determinar la magnitud o la dirección de una de las fuerzas aplicadas. La fuerza de fricción se debe mostrar en el diagrama de cuerpo libre con un sentido opuesto al del movimiento inminente y con una

magnitud  $F_{\mu} = \mu sN$  (figura 8.5c). Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y se puede determinar la fuerza deseada.

Como se señaló antes, cuando sólo están involucradas tres fuerzas puede ser más conveniente representar la reacción de la superficie por medio de una sola fuerza  $R$  y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas. Una solución de este tipo se emplea en el problema resuelto 8.2.

Cuando dos cuerpos  $A$  y  $B$  están en contacto (figura 8.6«), las fuerzas de fricción ejercidas, respectivamente, por  $A$  sobre  $B$  y por  $B$  sobre  $A$  son iguales y opuestas (tercera ley de Newton). Al dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente a uno de los cuerpos es importante incluir la fuerza de fricción apropiada con su sentido correcto. Por tanto, siempre se debe tener presente la siguiente regla: el sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre  $A$  es opuesta al sentido del movimiento (o al del movimiento inminente) de  $A$  visto desde  $B$  (figura 8.6b). El sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre  $B$  se determina en forma similar (figura 8.6c). Observe que el movimiento de  $A$  visto desde  $B$  es un movimiento relativo. Por ejemplo, si el cuerpo  $A$  está fijo y el cuerpo  $B$  está en movimiento, el cuerpo  $A$  tendrá un movimiento relativo con respecto a  $B$ . Además, si tanto  $B$  como  $A$  se están moviendo hacia abajo pero  $B$  se mueve más rápido que  $A$ , se observará que, visto desde  $B$ , el cuerpo  $A$  se mueve hacia arriba.



### 3.5 Cuñas

Las cuñas son máquinas simples que se utilizan para levantar grandes bloques de piedra y otras cargas pesadas. Estas cargas se pueden levantar aplicándole a la cuña una fuerza que es menor que el peso de la carga. Además, debido a la fricción entre las superficies en contacto, una cuña con una forma apropiada permanecerá en su lugar después que ha sido forzada bajo la carga. Por tanto, las cuñas se pueden utilizar para hacer pequeños ajustes en la posición de piezas pesadas de maquinaria.

Considere el bloque A mostrado en la figura 8.7a. Dicho bloque descansa sobre una pared vertical B y debe levantarse un poco forzando una cuña C entre el bloque A y una segunda cuña D. Se desea encontrar el valor mínimo de la fuerza P que debe aplicarse a la cuña C para mover el bloque. Se supondrá que el peso W del bloque es conocido, ya sea en libras o determinado en Newton a partir de la masa del bloque expresada en kilogramos.

Los diagramas de cuerpo libre del bloque A y de la cuña C se han dibujado en la figura 8.7b y c. Las fuerzas que actúan sobre el bloque incluyen su peso y las fuerzas normal y de fricción en las superficies de contacto con la pared B y con la cuña C. Las magnitudes de las fuerzas de fricción  $F_j$  y  $F_2$  son iguales, respectivamente, a  $f_s N_i$  y  $\mu_j N_j$  puesto que debe

iniciarse el movimiento del bloque. Es importante mostrar las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza  $F$ , ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia abajo. Por otra parte, como la cuña  $C$  se mueve hacia la derecha, el movimiento relativo de  $A$  con respecto a  $C$  es hacia la izquierda y la fuerza  $F_2$  ejercida por  $C$  sobre  $A$  debe estar dirigida hacia la derecha.

Ahora, considerando al cuerpo libre  $C$  en la figura 8.7c, se observa que las fuerzas que actúan sobre  $C$  incluyen la fuerza aplicada  $P$  y a las fuerzas normales y de fricción en las superficies de contacto con  $A$  y con  $D$ . El peso de la cuña es pequeño en comparación con las otras fuerzas que están involucradas y, por tanto, puede no tomarse en cuenta.

Las fuerzas ejercidas por  $A$  sobre  $C$  son iguales y opuestas a las fuerzas  $N_2$  y  $F_2$  ejercidas por  $C$  sobre  $A$  y se representan, respectivamente, por  $-N_2$  y  $-F_2$ ; por tanto, la fuerza de fricción  $-F_2$  debe estar dirigida hacia la izquierda. Se puede comprobar que la fuerza  $F_3$  ejercida por  $D$  también está dirigida hacia la izquierda.

El número total de incógnitas involucradas en los dos diagramas del cuerpo libre pueden reducirse a cuatro si las fuerzas de fricción se expresan en términos de las fuerzas normales. Expresar que el bloque  $A$  y la cuña  $C$  están en equilibrio proporcionará cuatro ecuaciones que pueden resolverse para obtener la magnitud de  $P$ . Se debe señalar que en este ejemplo es más conveniente reemplazar cada par de fuerzas normal y de fricción por su resultante. Entonces, cada cuerpo libre está sometido a tres fuerzas y el problema se puede resolver dibujando los triángulos de fuerzas correspondientes (véase problema resuelto 8.4).

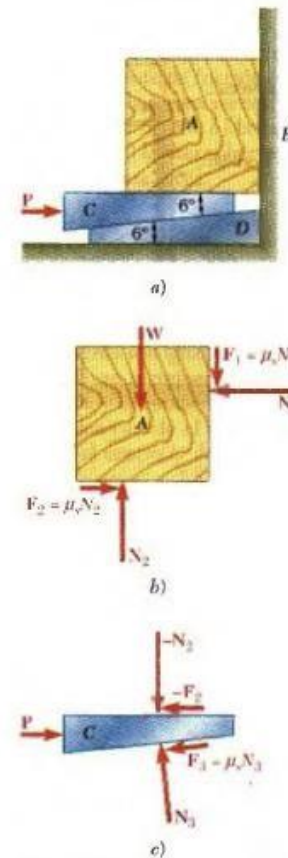


Figura 8.7



### 3.6 Tornillos de rosca cuadrada

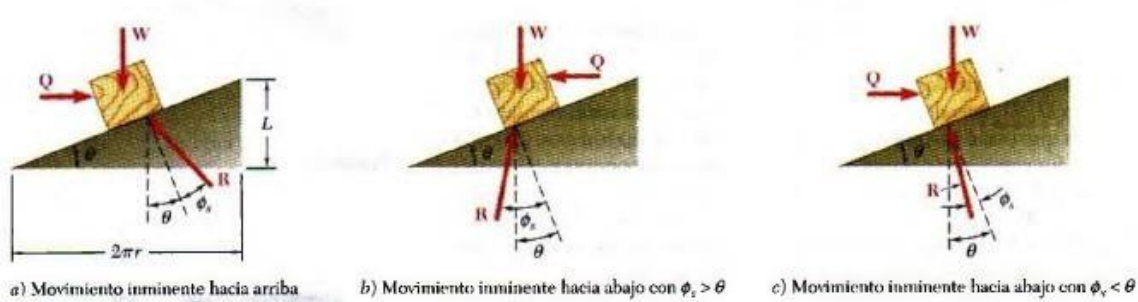
Los tornillos de rosca cuadrada se utilizan en gatos, prensas y otros mecanismos. Su estudio es similar al análisis de un bloque que se desliza a lo largo de un plano inclinado.

En el gato mostrado en la figura 8.8 el tornillo soporta una carga  $W$  y está apoyado en la base del gato. El contacto entre el tornillo y la base ocurre a lo largo de una porción de sus roscas. Si se aplica una fuerza  $P$  sobre el mango, se puede hacer que el tornillo gire y levante a la carga  $W$ .

La rosca de la base ha sido desenvuelta y se muestra como una línea recta en la figura 8.9a. La pendiente correcta de la línea recta se obtuvo al representar de manera horizontal el producto  $2\pi r$ , donde  $r$  es el radio promedio de la rosca y verticalmente el avance  $L$  del tornillo, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta.

El ángulo  $\phi$  que esta línea forma con la horizontal es el ángulo de avance. Como la fuerza de fricción entre dos superficies en contacto no depende del área de contacto, se puede suponer que el área de contacto entre las dos roscas es menor que su valor real y, por tanto, puede representarse al tornillo por medio del bloque que se muestra en la figura 8.9a. Sin embargo, es necesario señalar que en este análisis del gato no se toma en cuenta la fricción entre la corona y el tornillo.

El diagrama de cuerpo libre del bloque debe incluir la carga  $W$ , la reacción  $R$  de la rosca de la base y la fuerza horizontal  $Q$  que tiene el mismo efecto que la fuerza  $P$  ejercida sobre el mango. La fuerza  $Q$  debe tener el mismo momento que  $P$  alrededor del eje del tornillo y, por tanto, su magnitud debe ser  $Q = Pa/r$ . De esta forma, se puede obtener la fuerza  $Q$  y, por consiguiente, la fuerza  $P$  requerida para levantar a la carga  $W$ , a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.9a. El ángulo de fricción se toma igual a  $\phi$  (puesto que se presume que la carga será levantada a través de una serie de golpes pequeños sucesivos. En los mecanismos que proporcionan una rotación continua de un tornillo, puede ser deseable distinguir entre la fuerza requerida para comenzar el movimiento (utilice  $f_s$ ) y la fuerza requerida para mantener el movimiento (utilice  $f_k$ )).



Si el ángulo de fricción  $\phi_s$  es mayor que el ángulo de avance  $\theta$ , se dice que el tornillo es autobloqueante; el tornillo permanecerá en su lugar bajo la acción de la carga. Entonces, para bajar la carga, se debe aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9h. Si  $\phi_s$  es menor que  $\theta$ , el tornillo descenderá bajo la acción de la carga; entonces es necesario aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.96- para mantener el equilibrio.

El avance de un tornillo no se debe confundir con su paso. El avance se definió como la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta; el paso es la distancia medida entre dos roscas consecutivas.

A pesar de que el avance y el paso son iguales en el caso de tornillos de rosca simple, serán diferentes en el caso de tornillos de rosca múltiple, esto es, tornillos que tienen varias roscas independientes. Se puede comprobar fácilmente que para tornillos de rosca doble el avance es el doble del paso; para tornillos de rosca triple, el avance es el triple del paso y así de manera sucesiva.

### 3.7 Chumaceras. Fricción en ejes

Las chumaceras se utilizan para proporcionar soporte lateral a flechas y ejes en rotación. Los cojinetes de empuje, que se estudiarán en la siguiente sección, se usan para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes. Si la chumacera está totalmente lubricada, la resistencia por fricción depende de la velocidad de rotación, del juego entre el eje y la chumacera, y de la viscosidad del lubricante. Como se indicó en la sección 8.1, los problemas de este tipo se estudian en la mecánica de fluidos.

Sin embargo, los métodos de este capítulo pueden aplicarse al estudio de la fricción en ejes cuando la chumacera no está lubricada o sólo se lubrica parcialmente. Entonces, se puede suponer que el eje y la chumacera están en contacto directo a lo largo de una sola línea recta.

Considere dos ruedas, cada una de peso  $W$ , las cuales están montadas rígidamente sobre un eje soportado de manera simétrica por dos chumaceras (figura 8.10a). Si las ruedas giran, se encuentra que, para mantenerlas rotando a una velocidad constante, es necesario aplicarle a cada una un par  $M$ . El diagrama de cuerpo libre de la figura 8.10c representa la proyección de una de las ruedas y de la mitad del eje correspondiente sobre un plano perpendicular al eje. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre incluyen el peso  $W$  de la rueda, el par  $M$  requerido para mantener su movimiento, y una fuerza  $R$  que representa la reacción de la chumacera.

Esta última fuerza es vertical, igual y opuesta a  $W$ , pero no pasa por el centro  $O$  del eje;  $R$  está localizada a la derecha de  $O$  a una distancia tal que su momento respecto a  $O$  equilibra el momento  $M$  del par.

Por tanto, el contacto entre el eje y la chumacera no ocurre en el punto  $A$  más bajo cuando el eje está girando. El contacto ocurre en el punto  $B$  (figura 8.10b) o, mejor dicho, a lo largo de una línea recta que interseca al plano de la figura en el punto  $B$ . Físicamente, esto se explica por el hecho de que, cuando las ruedas se ponen en movimiento, el eje “se eleva” en la chumacera hasta que ocurre un deslizamiento. Después de resbalarse un poco hacia atrás, el eje queda más o menos en la posición mostrada.

Esta posición es tal que el ángulo entre la reacción  $R$  y la normal a la superficie del cojinete es igual al ángulo de fricción cinética  $\phi^*$ . Por tanto, la distancia desde  $O$  hasta la línea de acción de  $R$  es igual a  $r \sin \phi^*$  donde  $r$  es el radio del eje. Si se escribe que  $\sum M_O = 0$  para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre considerado, se obtiene la magnitud del par  $M$  requerido para vencer la resistencia por fricción de una de las chumaceras:

$$M = Rr \sin \phi^* \quad (8.5)$$

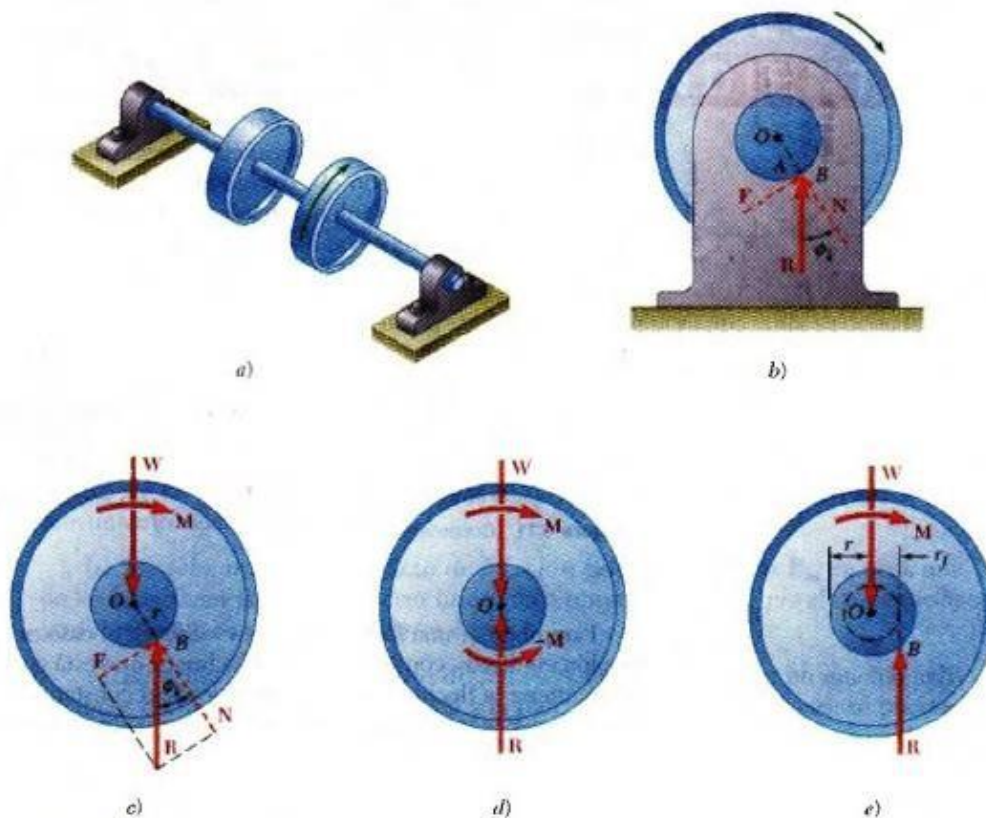


Figura 8.10

Observe que para valores pequeños del ángulo de fricción,  $\sin \phi \approx \phi$  se puede reemplazar por tan esto es, por  $f = k$ , se escribe la fórmula aproximada (8.6)

En la solución de ciertos problemas puede ser más conveniente hacer que la línea de acción de R pase a través de O, como lo hace cuando el eje no está girando. Entonces, se debe agregar a la reacción R un par  $-M$  de la misma magnitud que el par M pero de sentido opuesto (figura 8.10d), dicho par representa la resistencia por fricción de la chumacera.

En caso de que se prefiera una solución gráfica, la línea de acción de R se puede dibujar fácilmente (figura 8.10e) si se observa que ésta debe ser tangente a un círculo que tiene su centro en O y cuyo radio está dado por

$$r_f = r \sin \phi \approx r f \quad (8.7)$$

Dicho círculo recibe el nombre de círculo de fricción del eje y la chumacera y es independiente de las condiciones de carga del eje.

### 3.8 Cojinetes de empuje. Fricción en discos

Para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes que giran se utilizan dos tipos de cojinetes de empuje: 1) cojinetes de tope o frontales y 2) cojinetes de collar o radiales (figura 8.11). En el caso de los cojinetes de collar se desarrollan fuerzas de fricción entre las dos áreas en forma de anillo que están en contacto. En el caso de los cojinetes de tope la fricción ocurre sobre áreas circulares completas o sobre áreas en forma de anillo cuando el extremo de la flecha es hueco. La fricción entre áreas circulares, denominada fricción en discos, también ocurre en otros mecanismos como los embragues de disco.



Figura 8.11 Cojinetes de empuje.

Para obtener una fórmula que sea válida en el caso más general de fricción en discos, considere una flecha hueca que está girando. Un par  $M$  mantiene la flecha girando a una velocidad constante mientras que una fuerza  $P$  la mantiene en contacto con un cojinete fijo (figura 8.12).

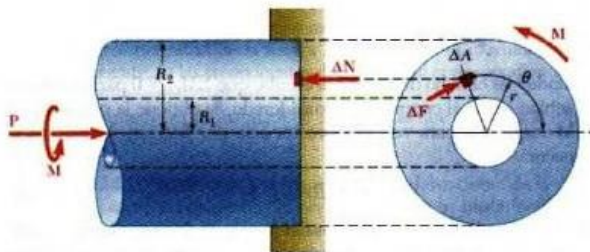


Figura 8.12

El contacto entre la flecha y el cojinete ocurre sobre un área en forma de anillo que tiene un radio interior  $R_i$  y un radio exterior  $R_2$ . Suponiendo que la presión entre las dos superficies en contacto es uniforme, se encuentra que la magnitud de la fuerza normal  $\Delta N$  ejercida sobre un elemento de área  $\Delta A$  está dada por  $\Delta N = P \Delta A / A$ , donde  $A = 7t(R_i - r)$  y que la magnitud de la fuerza de fricción  $\Delta F$  que actúa sobre  $\Delta A$  es  $\Delta F = \mu \Delta N$ . Si se

representa con  $r$  la distancia desde el eje de la flecha hasta el elemento de área  $AA$ , se expresa la magnitud  $AM$  del momento de  $AF$  con respecto al eje de la flecha de la siguiente forma:

$$* w \cdot r \cdot P \cdot A \cdot A$$

$$AM = r \cdot AF = \dots\dots\dots$$

$$7T(\ll - Rf)$$

El equilibrio de la flecha requiere que el momento  $M$  del par aplica- 8 9 Fnción en ruedas. Resistencia a la 445 1 A X X X rnHaHi ira n c n H am io n tn do a ésta sea igual en magnitud a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción  $AF$ . Reemplazando  $AA$  por el elemento infinitesimal  $dA = r \cdot d\theta \cdot dr$  que se utiliza con las coordenadas polares e integrando sobre el área de contacto se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del par  $M$  que se requiere para vencer la resistencia por fricción del cojinete:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3) \, d\theta \\
 M &= \frac{2}{3} \mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

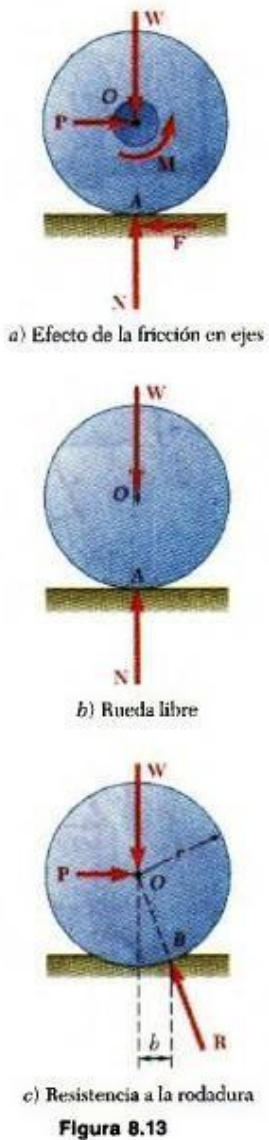
Cuando el contacto ocurre sobre un círculo completo de radio  $R$ , la fórmula (8.8) se reduce a

$$M = \frac{2}{3} \mu_k P R \quad (8.9)$$

Entonces el valor de  $M$  es el mismo que el que se hubiera obtenido si el contacto entre la flecha y el cojinete hubiera ocurrido en un solo punto localizado a una distancia de  $2R/3$  desde el eje de la flecha.

El momento torsional máximo que puede ser transmitido por un embrague de disco sin causar deslizamiento está dado por una fórmula similar a la ecuación (8.9), donde se reemplaza por el coeficiente de fricción estática  $\mu_s$ .

### 3.9 Fricción en ruedas. Resistencia a la rodadura o rodamiento



La rueda es uno de los inventos más importantes de nuestra civilización. Su uso hace que sea posible mover cargas pesadas con un esfuerzo relativamente pequeño. Debido a que el punto de la rueda que está en contacto con el suelo en cualquier instante no tiene un movimiento relativo con respecto del suelo, la rueda elimina las grandes fuerzas de fricción que se presentarían si la carga estuviera en contacto directo con el suelo. Sin embargo, existe cierta resistencia al movimiento de la rueda. Dicha resistencia tiene dos causas distintas: 1) El efecto combinado de la fricción en el eje y de la fricción en el aro y 2) el hecho de que la rueda y el suelo se deforman, ocasionando que el contacto entre la rueda y el suelo ocurra sobre una cierta área en lugar de ocurrir en un solo punto. Para comprender mejor la primera causa de resistencia al movimiento de una rueda, considérese un vagón de ferrocarril que está soportado por ocho ruedas que están montadas en ejes y cojinetes. Se supone que el vagón se está moviendo hacia la derecha a una velocidad constante a lo largo de una vía horizontal recta. El diagrama de cuerpo libre de una de las ruedas se muestra en la figura 8.13a. Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre incluyen la carga  $W$  soportada por la rueda y la reacción normal  $N$  de la vía. Como  $W$  está dibujada a través del centro  $O$  del eje, la resistencia por fricción del cojinete debe representarse con un par

$M$  que tiene un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (véase sección 8.7). Para mantener al cuerpo en equilibrio, se deben agregar dos fuerzas iguales y opuestas  $P$  y  $F$ , las cuales forman un par con un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj que tiene un momento  $-M$ . La fuerza  $F$  es la fuerza de fricción ejercida por la vía sobre la rueda y  $P$  representa la fuerza que debe aplicarse a la rueda para que ésta se mantenga rodando a velocidad constante. Observe que las fuerzas  $P$  y  $F$  no existirían en el caso de que no hubiera

fricción entre la rueda y la vía. Entonces, el par  $M$  que representa la fricción en el eje sería igual a cero; por tanto, la rueda se deslizaría sobre la vía sin girar en su cojinete.

El par  $M$  y las fuerzas  $P$  y  $F$  también se reducen a cero cuando no existe fricción en el eje. Por ejemplo, una rueda que no está sostenida por cojinetes y que rueda libremente a una velocidad constante sobre un piso horizontal (figura 8.13/?) estará sujeta únicamente a dos fuerzas: su propio peso  $W$  y la reacción normal  $N$  del piso. Sin importar cuál sea el valor del coeficiente de fricción entre la rueda y el piso, no actuará una fuerza de fricción sobre la rueda. Por tanto, una rueda que gira libremente sobre una superficie horizontal debería continuar rodando indefinidamente.

Sin embargo, la experiencia indica que la rueda irá disminuyendo su velocidad hasta detenerse. Lo anterior se debe al segundo tipo de resistencia mencionado al principio de esta sección, el cual se conoce como la resistencia a la rodadura. Bajo la acción de la carga  $W$ , tanto la rueda como el piso se deforman ligeramente y ocasiona que el contacto entre la rueda y el piso ocurra sobre cierta área. La evidencia experimental muestra que la resultante de las fuerzas ejercidas por el piso sobre la rueda a lo largo de dicha área es una fuerza  $R$  aplicada en un punto  $B$ , el cual no está localizado directamente por debajo del centro  $O$  de la rueda, sino que se encuentra ligeramente hacia el frente de la rueda (figura 8.13c). Para equilibrar el momento de  $W$  con respecto a  $B$  y para mantener a la rueda rodando a velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza horizontal  $P$  en el centro de la rueda. Si se escribe  $\sum M = 0$ , se obtiene

$$Pr = Wb \quad (8.10)$$

donde  $r$  = radio de la rueda

$b$  = distancia horizontal entre  $O$  y  $B$

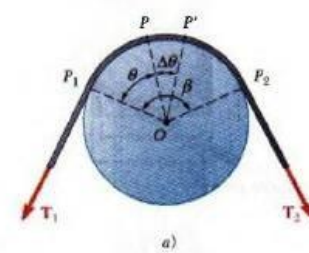
La distancia  $b$  recibe el nombre de coeficiente de resistencia a la rodadura. Es necesario señalar que  $b$  no es un coeficiente adimensional puesto que representa una longitud; por lo general, se expresa a  $b$  en pulgadas o en milímetros. El valor de  $b$  depende de varios parámetros en forma que aún no se ha establecido claramente. Los valores del coeficiente de resistencia a



la rodadura varían desde alrededor de 0.01 in. o 0.25 mm para una rueda de acero en un riel de acero hasta 5.0 in. o 125 mm para la misma rueda sobre un piso blando.

### 3.10 Fricción en bandas

Considere una banda plana que pasa sobre un tambor cilíndrico fijo (figura 8.14a). Se desea determinar la relación que existe entre los valores  $T_1$  y  $T_2$  de la tensión presente en las dos partes de la banda cuando ésta se encuentra a punto de deslizarse hacia la derecha.



Un pequeño elemento  $PP'$  que abarca un ángulo  $\Delta\theta$  se separa de la banda. Si la tensión presente en  $P$  se denota con  $T$  y con  $T + \Delta T$  la tensión en  $P'$  puede trazarse el diagrama de cuerpo libre del elemento de la banda (figura 8.14b). Además de las dos fuerzas de tensión, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la componente normal  $\Delta N$  de la reacción del tambor y la fuerza de fricción  $\Delta F$ . Como se supone que el movimiento es inminente, se tiene  $\Delta F = \mu \Delta N$ .

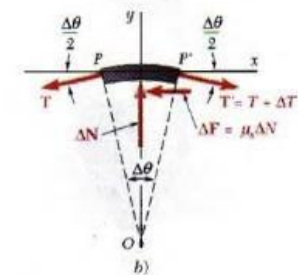


Figura 8.14

Es necesario señalar que si se hace que  $\Delta\theta$  se aproxime a cero, las magnitudes  $\Delta N$  y  $\Delta F$  y la diferencia  $\Delta T$  entre la tensión en  $P$  y la tensión en  $P'$ , también tenderán a cero; sin embargo, el valor  $T$  de la tensión en  $P$  continuará sin alterar. Esta observación ayuda a comprender la selección de notación que se ha hecho.

Al seleccionar los ejes coordenados que se muestran en la figura 8.14b se escriben las ecuaciones de equilibrio para el elemento  $PP'$ :

$$\Sigma F_x = 0: \quad (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu \Delta N = 0 \quad (8.11)$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} - T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0 \quad (8.12)$$

Al resolver la ecuación (8.12) para AN y sustituir la ecuación (8.11), se obtiene la siguiente ecuación después de realizar simplificaciones

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T + \Delta T) \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

Ahora se dividen ambos términos entre A0. En el caso del primer término, esto se hace dividiendo AT entre A6. La división del segundo término se lleva a cabo dividiendo entre 2 los términos que están entre paréntesis y dividiendo al seno entre A6/2. Así se escribe

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \left( T + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Si ahora se hace que A0 se aproxime a 0, el coseno tiende a 1 y, como se señaló anteriormente, AT/2 tiende a cero. Además, de acuerdo con un lema que se deriva en todos los libros de cálculo, el cociente de sen (A0/2) sobre A0/2 tiende a 1. Como el límite de AT/A6 es por definición igual a la derivada dT/dO, se escribe

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \quad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

Ahora se integrarán ambos miembros de la última ecuación desde Pi hasta Po (figura 8.14a). En Pu se tiene que  $\beta = 0$  y que  $T = T_1$ ; en P2 se tiene que  $\beta = \beta$  y que  $T = T_2$ . Así, integrando entre estos Límites, se escribe

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu_s d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s \beta$$

u, observando que el lado izquierdo es igual al logaritmo natural del cociente de T2 y T1,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

Esta relación también se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

Las fórmulas que se han derivado se pueden aplicar tanto a problemas que involucran bandas planas que pasan sobre tambores cilíndricos fijos como a problemas que involucran cuerdas enrolladas alrededor de un poste o de un cabrestante. Además, dichas fórmulas también pueden utilizarse para resolver problemas que involucran frenos de banda.

En este tipo de problemas, el cilindro es el que está a punto de girar mientras que la banda permanece fija. Por otra parte, las fórmulas también pueden aplicarse en problemas que involucran transmisiones de banda.

En estos problemas giran tanto la polea como la banda, entonces, se desea determinar si la banda se deslizará, esto es, si la banda se moverá con respecto a la polea.

Las fórmulas (8.13) y (8.14) sólo deben utilizarse si la banda, la cuerda o el freno están a punto de deslizarse. Se utilizará la fórmula (8.14) si se desea determinar  $T_2$  (o  $T_1$ ; se preferirá la fórmula (8.13) si se desea determinar el valor de  $\mu_s$  o si se desea determinar el ángulo de contacto  $\beta$ . Es necesario señalar que  $T_2$  siempre es mayor que  $T_1$ ; por tanto,  $T_2$  representa la tensión en aquella parte que jala, mientras ( $T_1$ ) es la tensión en aquella parte que resiste. También se debe mencionar que el ángulo de contacto  $\beta$  debe expresarse en radianes. El ángulo  $\beta$  puede ser mayor que  $2\pi$ ; por ejemplo, si una cuerda está enrollada  $n$  veces alrededor de un poste,  $\beta$  será igual a  $2\pi n$ .

Si la banda, la cuerda o el freno están deslizándose, deben utilizarse fórmulas similares a las ecuaciones (8.13) y (8.14) pero que involucren el coeficiente de fricción cinética  $\mu_k$ . Si la

banda, la cuerda o el freno no están deslizándose y tampoco están a punto de deslizarse, no se pueden utilizar las fórmulas mencionadas antes.

Las bandas que se utilizan en las transmisiones por lo general tienen forma en V. En la banda en V que se muestra en la figura 8.15<sup>a</sup> el contacto entre esta y la polea ocurre a lo largo de los lados de la ranura. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda (figura 8.15f y c), se puede obtener la relación que existe entre los valores  $T_1$  y  $T_2$  de la tensión en las dos partes de la banda cuando ésta está a punto de deslizarse. De esta forma se derivan fórmulas similares a las ecuaciones (8.11) y (8.12), pero ahora la magnitud de la fuerza de fricción total que actúa sobre el elemento es igual a  $2 \mu F$ , y la suma de las componentes y de las fuerzas normales es a  $2 N \sin(\alpha/2)$ . Procediendo de la misma forma en la que se hizo antes, se obtiene

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\sin(\alpha/2)} \quad (8.15)$$

o,

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta / \sin(\alpha/2)} \quad (8.16)$$

## UNIDAD IV FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA

### 4.1 Introducción

En el capítulo 5 se analizaron varios sistemas de fuerzas que estaban distribuidas sobre un área o volumen. Los tres tipos principales de fuerzas que se consideraron fueron: 1) los pesos de placas homogéneas de espesor uniforme (secciones 5.3 a la 5.6), 2) las cargas distribuidas que actúan sobre vigas (sección 5.8) y las fuerzas hidrostáticas (sección 5.9) y 3) los pesos de cuerpos tridimensionales homogéneos (secciones 5.10 y 5.11).

En el caso de placas homogéneas, la magnitud  $AW$  del peso de un elemento de una placa fue proporcional al área  $AA$  de dicho elemento. Para las cargas distribuidas que actuaban sobre vigas, la magnitud  $AW$  de cada peso elemental fue representado con un elemento de área  $AA = AW$  bajo la curva de carga; por otra parte, en el caso de fuerzas hidrostáticas que actuaban sobre superficies rectangulares sumergidas, se siguió un procedimiento similar. En el caso de cuerpos tridimensionales homogéneos, la magnitud  $AW$  del peso de un elemento del cuerpo era proporcional al volumen  $AV$  de dicho elemento. Por tanto, en todos los casos que se consideraron en el capítulo 5, las fuerzas distribuidas eran proporcionales a las áreas o a los volúmenes elementales asociados con éstas. Por consiguiente, la resultante de dichas fuerzas se podía obtener con la suma de las áreas o los volúmenes correspondientes y el momento de la resultante con respecto a cualquier eje dado se podía determinar al calcular los primeros momentos de las áreas o de los volúmenes con respecto a dicho eje.

En la primera parte del presente capítulo se estudian fuerzas distribuidas  $AF$  cuyas magnitudes no sólo dependen de los elementos de área  $AA$  sobre los cuales actúan éstas, sino que también dependen de la distancia que hay desde  $A$  hasta algún eje dado. En forma más precisa, se supone que la magnitud de la fuerza por unidad de área  $AF/AA$  varía linealmente con la distancia al eje bajo consideración. Como se señala en la siguiente sección, las fuerzas de este tipo se presentan en el estudio de la flexión de vigas y en problemas que involucran superficies sumergidas que no son rectangulares. Si las fuerzas elementales involucradas están distribuidas sobre un área  $A$  y varían linealmente con la distancia y al eje  $x$ , se demostrará que mientras que la magnitud de su resultante  $R$  depende del primer momento  $Q_x = \int y \, dA$  del

área  $A$ , la ubicación del punto donde se aplica  $R$  depende del segundo momento, o momento de inercia,  $I_x = \int y^2 dA$  de la misma área con respecto al eje  $x$ . Se aprenderá a calcular los momentos de inercia de diversas áreas con respecto a ejes  $x$  y  $y$  dados. Además, en la primera parte de este capítulo se introduce el momento polar de inercia  $J_o = \int r^2 dA$  de un área, donde  $r$  es la distancia desde el elemento de área  $dA$  hasta el punto  $O$ . Para facilitar los cálculos, se establecerá una relación entre el momento de inercia  $I_x$  de un área  $A$  con respecto a un eje  $x$  dado y el momento de inercia  $I_{x'}$  de la misma área con respecto al eje centroidal paralelo  $x'$  (teorema de los ejes paralelos). También se estudiará la transformación de los momentos de inercia de un área dada cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.9 y 9.10).

En la segunda parte del capítulo se aprenderá cómo determinar los momentos de inercia de varias masas con respecto a un eje dado. Como se verá en la sección 9.11, el momento de inercia de una masa dada con respecto a un eje  $AA'$  se define como  $I = \int r^2 dm$ , donde  $r$  es la distancia desde el eje  $AA'$  hasta el elemento de masa  $dm$ . Los momentos de inercia de masas se encuentran en la dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. Para facilitar el cálculo del momento de inercia de masa, se introducirá el teorema de los ejes paralelos (sección 9.12). Por último, se aprenderá a analizar la transformación de momentos de inercia de masas cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.16 a la 9.18).

## 4.2 Segundo momento o momento de inercia de un área

En la primera parte de este capítulo se estudian fuerzas distribuidas  $AF$  cuyas magnitudes  $AF$  son proporcionales a los elementos de área  $A$  sobre los cuales actúan dichas fuerzas  $y$ , que al mismo tiempo, varían linealmente con la distancia que hay desde  $A$  hasta un eje dado.

Por ejemplo, considérese una viga de sección transversal uniforme, la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga. Se dice que una viga en estas condiciones está en flexión pura y en la mecánica de materiales se demuestra que las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas

magnitudes  $AF = ky$   $A$  varían linealmente con la distancia  $y$  que hay entre el elemento de área  $A$  y un eje que pasa a través del centroide de la sección. Dicho eje, representado por el eje  $x$  en la figura 9.1, se conoce como el eje neutro de la sección. Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas de compresión, mientras que las fuerzas en el otro lado son fuerzas de tensión; sobre el propio eje neutro las fuerzas son iguales a cero.

La magnitud de la resultante  $R$  de las fuerzas elementales  $AF$  que actúan sobre toda la sección es

$$R = \int ky \, dA = k \int y \, dA$$

La última integral obtenida se conoce como el primer momento  $Q_x$  de la sección con respecto al eje  $x$ ; ésta es igual a  $yA$  y, por tanto, es igual a cero puesto que el centroide de la sección está ubicado sobre el eje  $x$ . Por consiguiente, el sistema de fuerzas  $AF$  se reduce a un par. La magnitud  $M$  de dicho par (momento flector) debe ser igual a la suma de los momentos  $AM_x = yAF = ky^2 \, dA$  de las fuerzas elementales. Al integrar sobre toda la sección se obtiene

$$M = \int ky^2 \, dA = k \int y^2 \, dA$$

La última integral se conoce como el segundo momento, o momento de inercia,  $I_x$  de la sección de la viga con respecto al eje  $x$  y se representa con  $I_x$ . Este se obtiene con la multiplicación de cada elemento de área  $dA$  por el cuadrado de su distancia desde el eje  $x$  e integrándolo sobre la sección de la viga. Como cada producto  $y^2 \, dA$  es positivo, sin importar el signo de  $y$ , o cero (si  $y$  es cero), la integral  $I_x$  siempre será positiva.

Otro ejemplo de un segundo momento o momento de inercia de un área lo proporciona el siguiente problema de hidrostática: una compuerta circular vertical utilizada para cerrar el escurridor de un depósito grande está sumergida bajo el agua, como se muestra en la figura 9.2.

¿Cuál es la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la compuerta y cuál es el momento de la resultante con respecto a la línea de intersección del plano de la compuerta y la superficie del agua (eje x)?

Si la compuerta fuera rectangular, la resultante de las fuerzas de presión se podría determinar a partir de la curva de presión, como se hizo en la sección 5.9. Sin embargo, puesto que la compuerta es circular, se debe utilizar un método más general. Representando con  $y$  la profundidad de un elemento de área  $dA$  y con  $\gamma$  el peso específico del agua, la presión en el elemento es  $p = \gamma y$  y la magnitud de la fuerza elemental ejercida sobre  $dA$  es  $dF = p dA = \gamma y dA$ . Por tanto, la magnitud de la resultante de las fuerzas elementales es

$$R = \int \gamma y dA = \gamma \int y dA$$

y se puede obtener calculando el primer momento  $Q_x = \int y dA$  del área de la compuerta con respecto al eje  $x$ . El momento  $M_x$  de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos  $M_x = \int y dF = \int \gamma y^2 dA$  de las fuerzas elementales. Al integrar sobre el área de la compuerta, se tiene que

$$M_x = \int \gamma y^2 dA = \gamma \int y^2 dA$$

Aquí la integral obtenida representa el segundo momento o momento de inercia  $I_x$  del área con respecto al eje  $x$ .

### 4.3 Determinación del momento de inercia de un área por integración

En la sección anterior se definió el segundo momento o momento de inercia de un área  $A$  con respecto al eje  $x$ . Definiendo de forma similar el momento de inercia  $I_y$  del área  $A$  con respecto al eje  $y$ , se escribe (figura 9.3a)



$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (9.1)$$

Estas integrales, conocidas como los momentos rectangulares de inercia del área A, se pueden evaluar con facilidad si se selecciona a dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular  $I_x$ , la tira se selecciona paralela al eje x, de manera que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia y del eje x (figura 9.3b)- entonces, se obtiene el momento de inercia  $dI_x$  de la tira multiplicando su área dA por  $y^2$ . Para calcular  $I_y$ , la tira se selecciona paralela al eje y de forma que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia x del eje y (figura 9.3c); así, el momento de inercia  $dI_y$  de la tira es  $x^2 dA$ .

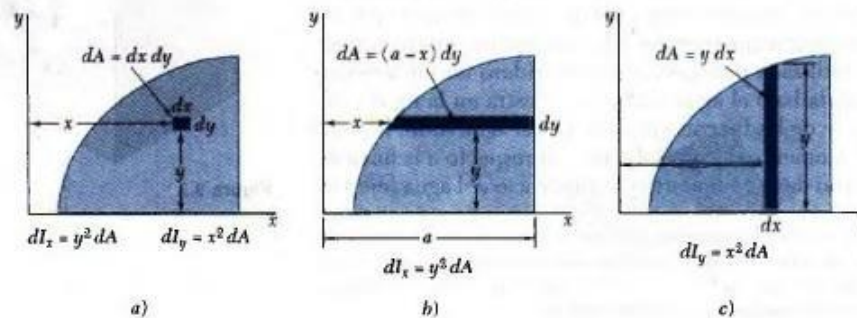


Figura 9.3

Momento de inercia de un área rectangular. Como un ejemplo, se procederá a determinar el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.4). Dividiendo el rectángulo en tiras paralelas al eje x, se obtiene

$$dA = b dy \quad dI_x = y^2 b dy$$

$$I_x = \int_0^h by^2 dy = \frac{1}{3}bh^3 \quad (9.2)$$

Cálculo de  $I_x$  e  $I_y$  con el uso de las mismas tiras elementales. La fórmula que se acaba de derivar se puede utilizar para determinar el momento de inercia  $dI_x$  con respecto al eje x de una tira rectangular que es paralela al eje y, como la tira mostrada en la figura 9.3c. Estableciendo  $h = dx$  y  $h = y$  en la fórmula (9.2), se escribe

$$dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx$$

Por otra parte, se tiene que

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dx$$

Por tanto, se puede utilizar el mismo elemento para calcular los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$  de un área dada (figura 9.5a). Los resultados análogos para el área de la figura 9.3 se muestran en la figura 9.5b.

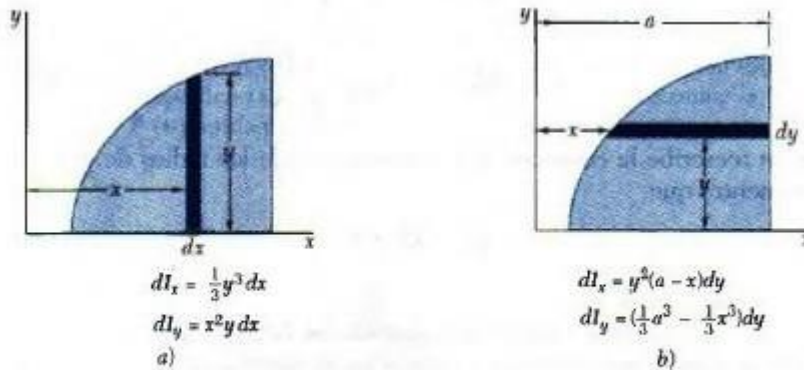


Figura 9.5

#### 4.4 Momento polar de inercia

Una integral muy importante en los problemas relacionados con la torsión de flechas cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es la siguiente

$$J_O = \int r^2 dA \quad (9.3)$$

donde  $r$  es la distancia desde  $O$  hasta el área elemental  $dA$  (figura 9.6). Esta integral es el momento polar de inercia del área  $A$  con respecto a la "polo"  $O$ .

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos rectangulares de inercia  $I_x$  e  $I_y$  del área, si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, si se observa que  $r^2 = x^2 + y^2$ , se puede escribir

$$J_O = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

Esto es,

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

#### 4.5 Radio de giro de un área

Considere un área  $A$  que tiene un momento de inercia  $I_x$  con respecto al eje  $x$  (figura 9.7a). Imagine que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje  $x$  (figura 9.7b). Si el área  $A$ , concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje  $x$ , la tira debe ser colocada a una distancia  $k_x$  desde el eje  $x$ , donde  $k_x$  está definida por la relación

$$I_x = k_x^2 A$$

Al resolver para  $k_x$ , se escribe

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (9.5)$$

Se hace referencia a la distancia  $k_x$  como el radio de giro del área con respecto al eje  $x$ . En forma similar, se pueden definir los radios de giro  $k_y$  y  $k_o$  (figura 9.7c y d); así se escribe

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (9.6)$$

$$J_O = k_O^2 A \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (9.7)$$

Si se reescribe la ecuación (9.4) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (9.8)$$

Ejemplo. Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio de giro  $k_x$  con respecto a su base. Con las fórmulas (9.5) y (9.2), se escribe

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \quad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

En la figura 9.8 se muestra el radio de giro  $k_x$  del rectángulo. El radio de giro no debe confundirse con la ordenada  $y = h/2$  del centroide del área. Mientras  $k_x$  depende del segundo momento o momento de inercia del área la ordenada  $y$  está relacionada con el primer momento del área.

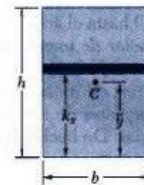


Figura 9.8

## 4.6 Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner

Considere el momento de inercia  $I$  de un área  $A$  con respecto a un eje  $AA'$  (figura 9.9). Si se representa con  $y$  la distancia desde un elemento de área  $dA$  hasta  $AA'$ , se escribe

$$I = \int y^2 dA$$

Ahora, se dibuja a través del centroide  $C$  del área un eje  $BB'$  que es paralelo a  $AA'$ , dicho eje es llamado eje centroidal. Representando con

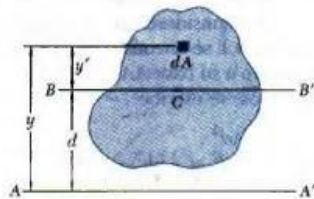


Figura 9.9

y la distancia desde el elemento  $dA$  hasta  $BB'$ , se escribe  $y = y' + d$ , donde  $d$  es la distancia entre los ejes  $AA'$  y  $BB'$ . Sustituyendo por  $y$  en la integral anterior, se escribe

$$\begin{aligned}
 I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\
 &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA
 \end{aligned}$$

La primera integral representa el momento de inercia  $I$  del área con respecto al eje centroidal  $BB'$ . La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a  $BB'$ ; como el centroide  $C$  del área está localizado sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total  $A$ . Por tanto, se tiene

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia  $I$  de un área con respecto a cualquier eje dado  $AA'$  es igual al momento de inercia  $\bar{I}$  del área con respecto a un eje centroidal  $BB'$  que es paralelo a  $AA'$  más el producto del área  $A$  y el cuadrado de la distancia  $d$  entre los dos ejes. Este teorema se conoce como el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner. Sustituyendo  $k^2 A$  por  $I$  y  $\bar{k}^2 A$  por  $\bar{I}$ , el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.10)$$

Se puede utilizar un teorema similar para relacionar el momento polar de inercia  $J_o$  de un área, con respecto a un punto  $O$ , con el momento polar de inercia  $J_c$ , de la misma área con respecto a su centroide  $C$ . Denotando con  $d$  la distancia entre  $O$  y  $C$ , se escribe

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad \text{o} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \quad (9.11)$$

Ejemplo 1. Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia  $I_T$  de un área circular con respecto a una línea tangente al círculo (figura 9.10). En el problema resuelto 9.2 se encontró que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es  $I = j v r^4$ . Por tanto se puede escribir

$$I_T = I + Ad^2 = j r^4 + (7 r^2) r^2 = 7 r^4$$

Ejemplo 2. El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (figura 9.11). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base  $AA'$  es igual a  $\frac{1}{12}bh^3$ . Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$I_{AA'} = I_{BB'} + Ad^2$$

$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

Es necesario resaltar que el producto  $Ad^2$  fue restado del momento de inercia dado, con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se suma cuando se pasa de un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe restarse cuando se pasa a un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación a un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

En la figura 9.11 se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea  $DD'$  (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = I_{BB'} + Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{1}{2}bh \left(\frac{2h}{3}\right)^2$$

Observe que  $I_{DD'}$  no se habría podido obtener directamente a partir de  $I_{AA'}$ . El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

## 4.7 Momentos de inercia de áreas compuestas

Un área compuesta  $A$  que está constituida por varias áreas componentes  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . Como la integral que representa el momento de inercia de  $A$  puede subdividirse en integrales evaluadas sobre  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , el momento de inercia de  $A$  con respecto a un eje dado se obtiene sumando los momentos de las áreas  $A_1, A_2, A_3, \dots$  con respecto al mismo eje. Por tanto, el momento de inercia de un área que consta de varias de las formas comunes mostradas en la figura 9.12, se puede obtener con las fórmulas proporcionadas en dicha figura. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, es posible que se tenga que utilizar el teorema de los ejes paralelos para pasar cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas resueltos 9.4 y 9.5.

En la figura 9.13 se proporcionan las propiedades de las secciones transversales de varias formas (o perfiles) estructurales. Como se señaló en la sección 9.2, el momento de inercia de una sección de una viga con respecto a su eje neutro está relacionado con el cálculo del momento flector en esa sección de la viga. Por tanto, la determinación de los momentos de inercia es un prerrequisito para el análisis y el diseño de elementos estructurales.

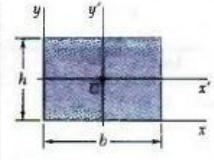
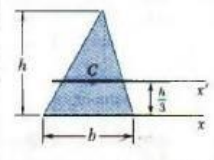
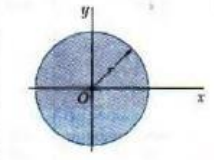
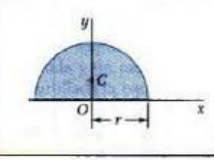
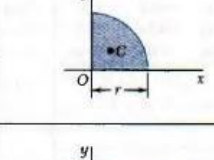
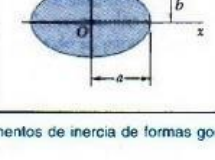
Rectángulo		$\bar{I}_x = \frac{1}{12} bh^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{12} b^3h$ $I_x = \frac{1}{3} bh^3$ $I_y = \frac{1}{3} b^3h$ $J_C = \frac{1}{12} bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_x = \frac{1}{36} bh^3$ $I_x = \frac{1}{12} bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2} \pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4} \pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8} \pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4} \pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4} \pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inercia de formas geométricas comunes.

Es necesario señalar que el radio de giro de un área compuesta no es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes. Para determinar el radio de giro de un área compuesta, es necesario que primero se calcule el momento de inercia del área.



## 4.8 Producto de inercia

La integral

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.12)$$

que se obtiene al multiplicar a cada elemento  $dA$  de un área  $A$  por sus coordenadas  $x$  y  $y$ , e integrando sobre toda el área (figura 9.14), es conocida como el producto de inercia del área  $A$  respecto a los ejes  $x$  y  $y$ . A diferencia de los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$ , el producto de inercia  $I_{xy}$  puede ser positivo, negativo o cero.

Cuando uno o ambos ejes  $x$  y  $y$  son ejes de simetría del área  $A$ , el producto de inercia  $I_{xy}$  es igual a cero. Por ejemplo, considérese la sección en forma de canal que muestra la figura 9.15. Puesto que esta sección es simétrica respecto al eje  $x$ , con cada elemento  $dA$  de coordenadas  $x$  y  $y$  se puede asociar un elemento  $dA'$  de coordenadas  $x$  y  $-y$ . Desde luego, las contribuciones a  $I_{xy}$  de cualquier par de elementos seleccionados de esta forma se cancela y, por tanto, la integral (9.12) se reduce a cero.

Para los productos de inercia, es posible derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido en la sección 9.6 para momentos de inercia. Considere un área  $A$  y un sistema de coordenadas rectangulares  $x$  y  $y$  (figura 9.16). A través del centroide  $C$  del área, cuyas coordenadas son  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , se dibujan dos ejes centroidales  $x'$  y  $y'$  que son paralelos, respectivamente, a los ejes  $x$  y  $y$ . Representando con  $x$  y  $y$  las coordenadas de un elemento de área  $dA$  con respecto a los ejes originales y con  $x'$  y  $y'$  las coordenadas del mismo elemento con respecto a los ejes centroidales, se escribe  $x = x' + \bar{x}$  y  $y = y' + \bar{y}$ . Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (9.12), se obtiene la siguiente expresión para el producto de inercia  $I_{xy}$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy \, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \, dA \\ &= \int x'y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el producto de inercia  $I_{xy}$  del área  $A$  con respecto a los ejes centroidales  $x'$  y  $y'$ . Las dos integrales siguientes representan los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; dichas integrales se reducen a cero puesto que el centroide  $C$  está localizado sobre esos ejes. La última integral es igual al área total  $A$ . Por tanto, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y} A \quad (9.13)$$

#### 4.9 Ejes principales y momentos principales de inercia

Considere el área  $A$  y los ejes coordenados  $x$  y  $y$  (figura 9.17). Suponiendo que los momentos y el producto de inercia

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA \quad (9.14)$$

del área  $A$  son conocidos, se desea determinar los momentos y el producto de inercia  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$  e de  $A$  con respecto a nuevos ejes  $x'$  y  $y'$  que se obtienen rotando los ejes originales alrededor del origen a través de un ángulo  $\theta$ .

Primero se deben señalar las siguientes relaciones entre las coordenadas  $x'$ ,  $y'$  y  $x$ ,  $y$  de un elemento de área  $dA$ :

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Si se sustituye  $y'$  en la expresión para  $I_{x'}$ , se escribe

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int (y')^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA \end{aligned}$$

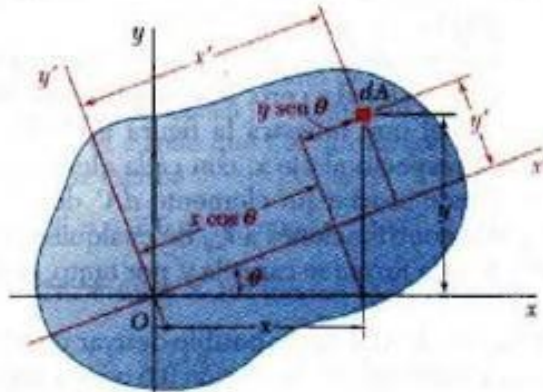


Figura 9.17

Con las relaciones (9.14), se escribe

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta \quad (9.15)$$

En forma similar, se obtienen las siguientes expresiones para  $I_{y'}$  e  $I_{x'y'}$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \quad (9.16)$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (9.17)$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Se pueden escribir las ecuaciones (9.15), (9.16) y (9.17) de la siguiente forma:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Si se suman las ecuaciones (9.18) y la (9.19), se observa que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (9.21)$$

Este resultado pudo haberse anticipado puesto que ambos miembros de la ecuación (9.21) son iguales al momento polar de inercia  $J_O$ . Las ecuaciones (9.18) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se selecciona un conjunto de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa  $I_{x'}$  y ordenada  $I_{x'y'}$  y para cualquier valor dado del parámetro  $\theta$ , todos los puntos que se obtienen de esta forma estarán localizados sobre un círculo. Para establecer esta propiedad, se elimina  $\theta$  de las ecuaciones (9.18) y (9.20); lo anterior se lleva a cabo transponiendo el término  $(I_x + I_y)/2$  en la ecuación (9.18), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (9.18) y (9.20) y sumando las expresiones obtenidas. Así se escribe

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \quad (9.22)$$

Estableciendo

$$I_{\text{prom}} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.23)$$

se escribe la identidad (9.22) de la siguiente forma

$$(I_{x'} - I_{\text{prom}})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \quad (9.24)$$

ésta es la ecuación de un círculo de radio R que tiene su centro en el punto C cuyas coordenadas  $x_c$  e  $y_c$  son  $I_{\text{prom}}$  y 0, respectivamente (figura 9.18a). Se observa que las ecuaciones (9.19) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Además, debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si en lugar de graficar M se hubiera graficado un punto N de coordenadas  $x, y$  (figura 9.18b). Esta propiedad se utilizará en la sección 9.10.

Los dos puntos A y B donde el círculo antes mencionado interseca el eje horizontal (figura 9.18a) son de interés especial: el punto A corresponde al máximo valor del momento de inercia  $I_{x'}$  mientras que el punto B corresponde al mínimo valor para dicha cantidad. Además, ambos puntos corresponden a un valor de cero para el producto de inercia  $I_{x'y'}$ . Por tanto, los valores  $\theta_m$  del parámetro  $\theta$  que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse tomando  $I_{x'y'} = 0$  en la ecuación (9.20). De esta forma se obtiene\*

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Esta ecuación define dos valores de  $2\theta_m$  que están separados  $180^\circ$  y, por tanto, dos valores  $\theta_m$  que están separados  $90^\circ$ . Uno de estos valores corresponde al punto A en la figura 9.18a y también corresponde a un eje a través de O en la figura 9.17 con respecto al cual el momento de inercia del área dada es máximo, el otro valor corresponde al punto B y a un eje a través de O con respecto al cual el momento de inercia del área es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí, se conocen como los ejes principales del área con respecto a O y los valores correspondientes  $I_{\text{máx}}$  e  $I_{\text{mín}}$  del momento de inercia se

llaman momentos principales de inercia del área con respecto a O. Como los dos valores  $I_m$  definidos por la ecuación (9.25) se obtuvieron estableciendo  $J_{xy} = 0$  en la ecuación (9.20), el producto de inercia de un área dada con respecto a sus ejes principales es igual a cero.

A partir de la figura 9.18a se observa que

$$I_{m\acute{a}x} = I_{prom} + R \quad I_{m\acute{m}n} = I_{prom} - R \quad (9.26)$$

Con el uso de los valores para  $I_{prom}$  y  $R$  correspondientes a las fórmulas (9.23), se escribe

$$I_{m\acute{a}x,m\acute{m}n} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.27)$$

A menos que se pueda decidir por inspección cuál de los dos ejes principales corresponde a  $I_{m\acute{a}x}$  y cuál corresponde a  $I_{m\acute{m}n}$ , es necesario sustituir uno de los valores de  $I_m$  en la ecuación (9.18) para poder determinar cuál de los dos corresponde al máximo valor del momento de inercia del área con respecto a O.

Haciendo referencia a la sección 9.8, se observa que si un área posee un eje de simetría a través de un punto O, dicho eje debe ser un eje principal del área con respecto a O. Por otra parte, un eje principal no tiene que ser necesariamente un eje de simetría; sin importar si un área posee o no ejes de simetría, ésta tendrá dos ejes principales de inercia con respecto a cualquier punto O.

Las propiedades que se acaban de establecer son válidas para cualquier punto O localizado dentro o fuera del área dada. Si se selecciona el punto O de manera que coincida con el centroide del área, cualquier eje que pasa a través de O es un eje centroidal; los dos ejes principales de un área con respecto a su centroide reciben el nombre de ejes centroidales principales del área.

## 4.10 Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia

El círculo utilizado en la sección anterior para ilustrar las relaciones que existen entre los momentos y productos de inercia de un área dada respecto a ejes que pasan por un punto fijo  $O$  fue presentado inicialmente por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), y se conoce como círculo de Mohr. Se demostrará que si se conocen los momentos y productos de inercia de un área  $A$  respecto a dos ejes rectangulares  $x$  y  $y$  que pasan por un punto  $O$ , el círculo de Mohr se puede utilizar para determinar gráficamente a) los ejes principales y los momentos principales de inercia del área respecto a  $O$ , b) los momentos y el producto de inercia del área respecto a cualquier otro par de ejes rectangulares  $x'$  y  $y'$  que pasen por  $O$ .

Considere un área dada  $A$  y dos ejes coordenados rectangulares  $x$  y  $y$  (figura 9.19a). Suponiendo que los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$  y el producto de inercia  $I_{xy}$  son conocidos estarán representados en un diagrama al graficar un punto  $X$  de coordenadas  $I_x$  e  $I_{xy}$  y un punto  $Y$  de coordenadas  $I_y$  y  $-I_{xy}$  (figura 9.19b). Si  $I_{xy}$  es positivo, como se supuso en la figura 9.19a, el punto  $X$  estará localizado por encima del eje horizontal, y el punto  $Y$  se ubicará por debajo de dicho eje, como indica la figura 9.19b; Si  $I_{xy}$  es negativo,  $X$  se localizará por debajo del eje horizontal y  $Y$  por encima de ese eje. Uniendo  $X$  y  $Y$  mediante una línea recta, se representa con  $C$  el punto de intersección de la línea  $XY$  con el eje horizontal y se traza un círculo cuyo centro sea  $C$  y su diámetro  $XY$ . Al advertir que la abscisa de  $C$  y el radio del círculo son iguales, respectivamente, a las cantidades  $I_{pr}$  y  $R$  definidas mediante la fórmula (9.23), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para el área dada respecto al punto  $O$ . Por tanto, las abscisas de los puntos  $A$  y  $B$  donde el círculo corta al eje horizontal representan, respectivamente, los momentos principales de inercia  $I_{max}$  e  $I_{min}$  del área.

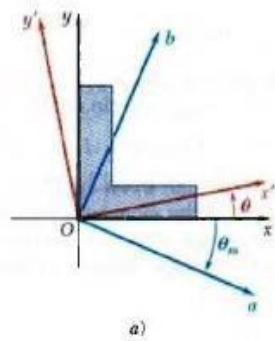
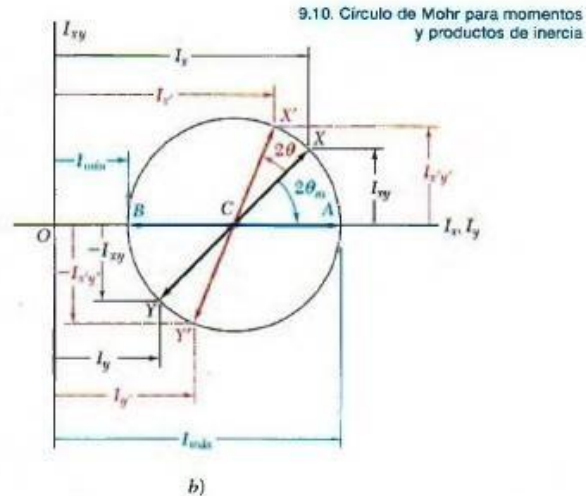


Figura 9.19



También se observa que, puesto que  $\tan(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$ , el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos  $2\theta_m$  que satisfacen la ecuación (9.25); por tanto, el ángulo  $\theta_m$ , que define al eje principal  $Oa$  en la figura 9.19a y corresponde al punto A en la figura 9.19b, es igual a la mitad del ángulo XCA del círculo de Mohr. Además, se observa que si  $I_x > I_y$  e  $I_{xy} > 0$ , como en el caso que se considera aquí, la rotación que lleva a CX hasta CA es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En estas condiciones, el ángulo  $\theta_m$  que se obtiene a partir de la ecuación (9.25), el cual define el eje principal  $Oa$  en la figura 9.19a, es negativo; por tanto, la rotación que lleva a  $Ox$  hasta  $Oa$  también es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 9.19 son los mismos. Si se requiere una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo  $2\theta_m$  para llevar a CX hasta CA en el círculo de Mohr, entonces una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo  $\theta_m$  llevará a  $Ox$  hasta el eje principal correspondiente  $Oa$  en la figura 9.19a.

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo se puede obtener considerando los momentos y el producto de inercia del área A respecto a los ejes rectangulares  $x'$  y  $y'$  (figura 9.19a). Entonces, el punto  $X'$  de coordenadas  $I_{x'}$  e  $-I_{x'y'}$  y el punto  $Y'$  de coordenadas  $I_{y'}$  y  $-I_{x'y'}$  están localizados sobre el círculo de Mohr y el ángulo  $X'CA'$  en la figura 9.19b debe ser igual al doble del ángulo  $x'Oa$  en la figura 9.19a. Puesto que, como se



señaló anteriormente, el ángulo  $XCA$  es igual al doble del ángulo  $xOa$ , se concluye que el ángulo  $XCX'$  en la figura 9.19b es el doble del ángulo  $xOx'$  en la figura 9.19a. El diámetro  $X'Y'$  define a los momentos y al producto de inercia  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$  e  $I_{x'y'}$  del área dada con respecto a los ejes rectangulares  $x'$  y  $y'$  que forman un ángulo  $\phi$  con los ejes  $x$  y  $y$ , se puede obtener rotando a través de un ángulo  $2\phi$  al diámetro  $XY$ , el cual corresponde a los momentos y al producto de inercia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$ . Se observa que la rotación que lleva al diámetro  $XI'$  hasta el diámetro  $X'Y'$  en la figura 9.19b tiene el mismo sentido que la rotación que lleva a los ejes  $x$  y  $y$  hasta los ejes  $x'$  y  $y'$  en la figura 9.19a.

Es necesario señalar que el uso del círculo de Mohr no está limitado a las soluciones gráficas, esto es, a las soluciones basadas en dibujar y medir los distintos parámetros involucrados. Simplemente, al hacer un bosquejo del círculo de Mohr y con la trigonometría se pueden derivar las distintas relaciones que se requieren para la solución numérica de un problema dado (véase problema resuelto 9.8).

#### 4.11 Momento de inercia de una masa

Considere una pequeña masa  $A$  que está montada sobre una barra de masa insignificante, la cual puede rotar libremente alrededor de un eje  $AA'$  (figura 9.20a). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, las cuales se supone que estaban en reposo, comienzan a girar alrededor de  $AA'$ . Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en dinámica. Por ahora sólo se desea indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación dada es proporcional a la masa  $A$  y al cuadrado de la distancia  $r$ . Por tanto, el producto  $r^2 A$  proporciona una medida de la inercia del sistema, esto es, una medida de la resistencia que ofrece el sistema cuando se trata de ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto  $r^2 A$  es llamado el momento de inercia de la masa  $A$  con respecto al eje  $AA'$ .

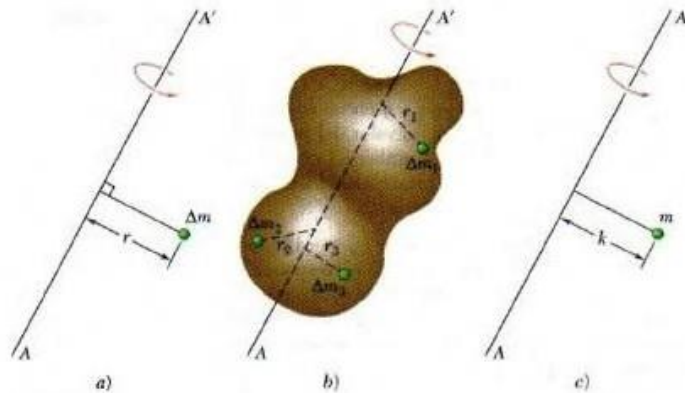


Figura 9.20

Ahora considere un cuerpo de masa  $m$ , el cual se hará girar alrededor de un eje  $AA'$  (figura 9.20a);). Si se divide el cuerpo en elementos de masa  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots$ , se encuentra que la resistencia que ofrece el cuerpo al movimiento de rotación se mide por la suma  $r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots$ . Por tanto, esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje  $AA'$ . Al incrementar el número de elementos se encuentra que, en el límite, el momento de inercia es igual a la integral

$$I = \int r^2 dm \quad (9.28)$$

El *radio de giro*  $k$  del cuerpo con respecto al eje  $AA'$  está definido por la relación

$$I = k^2 m \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (9.29)$$

En este sentido, el radio de giro  $k$  representa la distancia a la cual se debe concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia con respecto a  $AA'$  debe permanecer inalterado (figura 9.20c). Sin importar si la masa  $m$  se conserva en su forma original (figura 9.20b) o si se concentra como se muestra en la figura 9.20c, ésta reaccionará de la misma forma a una rotación o giro con respecto a  $AA'$ .

Si se utilizan las unidades del SI, el radio de giro  $k$  está expresado en metros y la masa está expresada en kilogramos, por tanto, la unidad empleada para el momento de inercia de una masa es  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ . Si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs (esto es en  $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$ ), por tanto, la unidad derivada empleada para el momento de inercia de una masa es  $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ .

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje coordenado puede expresarse en términos de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  del elemento de masa  $dm$  (figura 9.21). Por ejemplo, observe que el cuadrado de la distancia  $r$  desde el elemento  $dm$  hasta el eje  $y$  es igual a  $z^2 + x^2$ , se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje  $y$  como

$$I_y = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$$

Se pueden obtener expresiones similares para los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  y  $z$ . Así se escribe

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \tag{9.30}$$

## 4.12 Teorema de los ejes paralelos

Considere un cuerpo de masa  $m$ . Sea  $Oxyz$  un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está localizado en el punto arbitrario  $O$  y sea  $Gx'y'z'$  un sistema de ejes centroidales paralelo, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad  $G$  del cuerpo y cuyos ejes  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  son paralelos a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente (figura 9.22).

Representando con  $x$ ,  $y$  y  $z$  las coordenadas de  $G$  con respecto a  $Oxyz$ , se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  del elemento  $dm$  con respecto a  $Oxyz$  y las coordenadas  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  de dicho elemento con respecto a los ejes centroidales  $Gx'y'z'$ :

$$x = x' + \bar{x} \quad y = y' + \bar{y} \quad z = z' + \bar{z} \quad (9.31)$$

Con las ecuaciones (9.30) se puede expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje  $x$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en la expresión anterior representa el momento de inercia  $I_{x'}$  del cuerpo con respecto al eje centroidal  $x'$ ; la segunda y la tercera representan, respectivamente, el primer momento del cuerpo con respecto a los planos  $z'x'$  y  $x'y'$ , como ambos planos contienen al punto  $G$ , las dos integrales son iguales a cero; la última integral es igual a la masa total  $m$  del cuerpo. Por tanto, se escribe,

$$I_x = I_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \quad (9.32)$$

y, en forma similar,

$$I_y = I_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad I_z = I_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (9.32')$$

Con base en la figura 9.22 se puede verificar que la suma  $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$  representa el cuadrado de la distancia  $OB$  entre los ejes  $y$  y  $y'$ . En forma análoga,  $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$  y  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$  representan, respectivamente, los cuadrados de la distancia entre los ejes  $x$  y  $x'$  y entre los ejes  $z$  y  $z'$ . Por tanto, representando con  $d$  la distancia entre un eje arbitrario  $AA'$  y un eje centroidal paralelo  $BB'$  (figura 9.23) se puede escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia  $I$  del cuerpo con respecto a  $AA'$  y su momento de inercia  $I$  con respecto a  $BB'$ :

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

Expresando los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.34)$$

donde  $k$  y  $\bar{k}$  representan, respectivamente, los radios de giro del cuerpo con respecto a  $AA'$  y  $BB'$ .

### 4.13 Momentos de inercia de placas delgadas

Considere una placa delgada de espesor uniforme  $f$ , la cual está hecha de material homogéneo de densidad  $\rho$  (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje  $AA'$  contenido en el plano de la placa (figura 9.24-) está dado por

$$I_{AA', \text{ masa}} = \int r^2 dm$$

Como  $dm = \rho t dA$ , se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t \int r^2 dA$$

Pero  $r$  representa la distancia que hay desde el elemento de área  $dA$

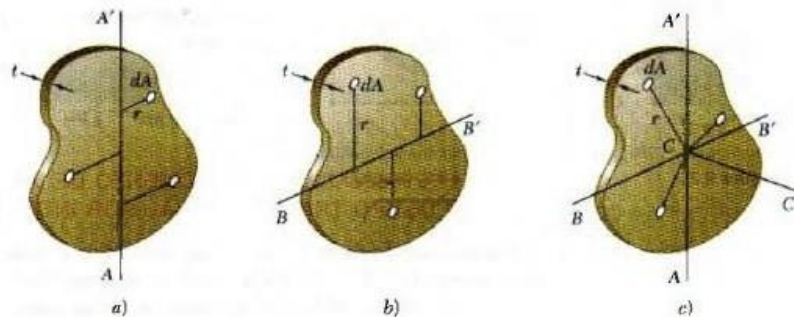


Figura 9.24

hasta el eje  $AA'$ ; por tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a  $AA'$ . Así se tiene que

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} \quad (9.35)$$

En forma similar, para un eje  $BB'$  que está contenido en el plano de la placa y que es perpendicular a  $AA'$  (figura 9.24/;), se tiene que

$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}} \quad (9.36)$$

Ahora, considerando al eje  $CC'$  que es perpendicular a la placa y que pasa a través del punto de intersección  $C$  de  $AA'$  y  $BB'$  (figura 9.24c), se escribe

$$I_{CC', \text{ masa}} = \rho t J_{C, \text{ área}} \quad (9.37)$$

donde  $J_c$  es el momento polar de inercia del área de la placa con respecto al punto  $C$ .

Recordando la relación  $J_c = I_{aa'} + I_{bb'}$  que existe entre el momento polar de inercia y los momentos rectangulares de inercia de un área se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \quad (9.38)$$

*Placa rectangular.* En el caso de una placa rectangular de lados  $a$  y  $b$  (figura 9.25), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a ejes que pasan a través del centro de gravedad de la placa:

$$\begin{aligned} I_{AA', \text{ masa}} &= \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t \left( \frac{1}{12} a^3 b \right) \\ I_{BB', \text{ masa}} &= \rho t I_{BB', \text{ área}} = \rho t \left( \frac{1}{12} a b^3 \right) \end{aligned}$$

Observando que el producto  $pab$  es igual a la masa  $m$  de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada de la forma siguiente:

$$I_{AA'} = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12}mb^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

*Placa circular.* En el caso de una placa circular o disco de radio  $r$  (figura 9.26), se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ \u00e1rea}} = \rho t \left( \frac{1}{4} \pi r^4 \right)$$

Observando que el producto  $\rho t r^2$  es igual a la masa  $m$  de la placa y que  $I_{AA'} = I_{BB'}$ , se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la siguiente forma:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4}mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (9.42)$$

## 4.14 Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral  $I = \int r^2 dm$ . Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad  $\rho$ , el elemento de masa  $dm$  es igual a  $\rho dV$  y se puede escribir  $I = \rho \int r^2 dV$ . Esta integral sólo depende de la forma del cuerpo. Por tanto, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional será necesario llevar a cabo una triple integración o, cuando menos, una doble integración.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración seleccionando como elemento de masa  $dm$  una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución, el elemento de masa será un disco delgado (figura 9.27).

Con la fórmula (9.42), el momento de inercia del disco con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura 9.27. Por otra parte, el momento de inercia del disco con respecto a cada uno de los otros dos ejes coordenados se obtiene con la fórmula (9.41) y el teorema de los ejes paralelos. Integrando las expresiones obtenidas de esta forma, se obtienen los elementos de inercia del cuerpo.

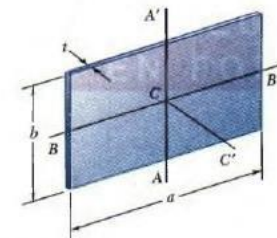


Figura 9.25

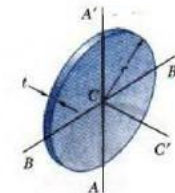
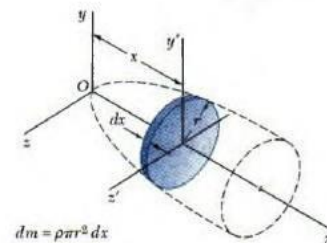


Figura 9.26



$$dm = \rho \pi r^2 dx$$

$$dI_z = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$dI_y = dI_{y'} + x^2 dm = \left( \frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dm$$

$$dI_x = dI_{x'} + x^2 dm = \left( \frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dm$$

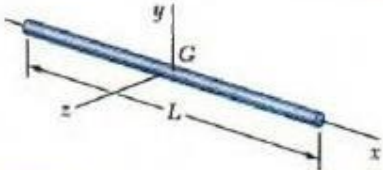
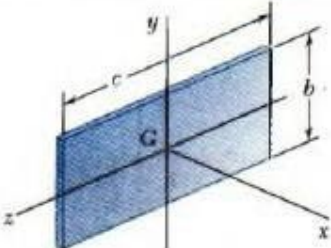
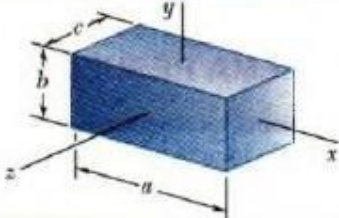
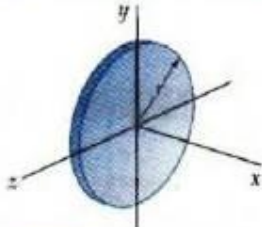
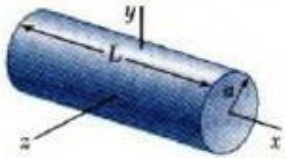
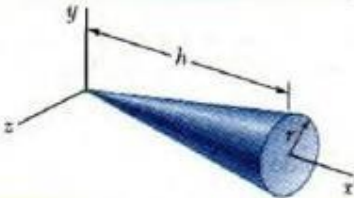
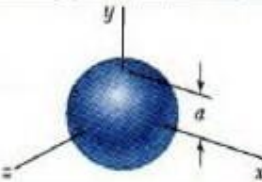
Figura 9.27 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

## 4.15 Momentos de inercia de cuerpos compuestos

En la figura 9.28 se muestran los momentos de inercia de algunas formas comunes. Para un cuerpo que consiste de varias de estas formas simples, se puede obtener el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje dado calculando primero los momentos de



inercia de las partes que lo constituyen con respecto al eje deseado y sumándolos después. Como en el caso de las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto no se puede obtener sumando los radios de giro de las partes que lo constituyen.

Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

**Figura 9.28** Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.

## Bibliografía básica y complementaria:

- Mecánica Vectorial para Ingenieros. (2007) Ferdinand P. Beer. Editorial McGraw - Hill Interamericana. México.