UDS

ANTOLOGIA

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

SEGUNDO CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Objetivo de la materia:

El alumno manejará los elementos principales del Cálculo Diferencial e Integral lo que fomenta su capacidad de razonamiento lógico, un importante desarrollo de su capacidad de abstracción y espíritu crítico para la modelación, resolución e interpretación de resultados de problemas relacionados con fenómenos cambiantes, de modo que pueda continuar posteriormente los cursos de Matemáticas a nivel licenciatura.

Criterios de evaluación:

No	Concepto	Porcentaje
1	Actividad en plataforma	**30%**
a)	Primera Actividad	15%
b)	Segunda Actividad	15%
2	Actividades áulicas o practicas	**20%**
3	Examen	**50%**
	Total de Criterios de evaluación	**100%**

INDICE

UNIDAD III: LA DERIVADA PARA MEDIR LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

UNIDAD IV. LA INTEGRAL

UNIDAD I. LAS FUNCIONES PARA MODELAR PROBLEMAS DE LA REALIDAD

1.1. Análisis gráfico y analítico: modelo matemático de la evaporación de una presa.

El significado de modelo matemático:

Un modelo formal para una cierta teoría matemática es un conjunto sobre el que se han definido igualmente un conjunto de relaciones unarias, binarias y trinarías, que satisface las proposiciones derivadas del conjunto de axiomas de la teoría. La rama de la matemática que se encarga de estudiar sistemáticamente las propiedades de los modelos es la teoría de modelos. Es importante considerar los elementos que compondrán un modelo matemático:

Números reales, estimación y lógica

El cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Pero, ¿cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder, comenzamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los enteros y los números racionales: Los números más sencillos de todos son los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, …

Con ellos podemos *contar* nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si incluimos a sus negativos y al cero, obtenemos los enteros: …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, Á

Cuando *medimos* longitud, peso o voltaje, los enteros son inadecuados. Están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión. Esto nos lleva a considerar cocientes (razones) de enteros, (observar la imagen 1) números tales como:

$$\frac{3}{4}, \frac{-78}{8}, \frac{21}{5}, \frac{16}{2}, y \frac{-17}{1}$$

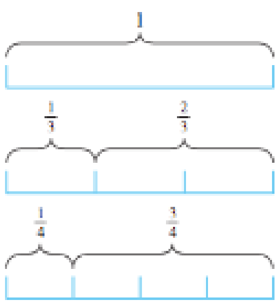


Imagen 2

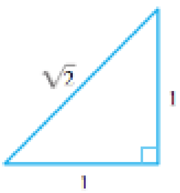


Imagen 1

Observe que incluimos 16/2 y -17/1, aunque normalmente los escribiríamos como 8 y -17, ya que son iguales a aquéllos por el significado ordinario de la división. No incluimos $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$ porque es imposible dar significado a estos símbolos . Recuerde siempre que la división entre 0 nunca está permitida.

Los números que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros con n≠0 son llamados números racionales.

¿Los números racionales sirven para medir todas las longitudes? **No**.

Este hecho sorprendente fue descubierto por los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. Ellos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ (véase la figura 3), $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional (no racional). Así, también lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}\ \sqrt[3]{7}$, π, y una gran cantidad de números más.

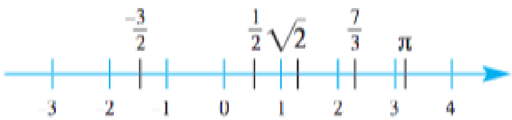


Imagen 3

Considere todos los números (racionales e irracionales) que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero. A éstos les llamamos números reales.

Los números reales pueden verse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta horizontal. Allí miden la distancia, a la derecha o izquierda (la distancia dirigida), de un punto fijo llamado origen y marcado con 0 (véase la figura 3).

Aunque quizá no podamos mostrar todas las etiquetas, cada punto tiene un número real único que lo etiqueta. Este número se denomina coordenada del punto, y la recta coordenada resultante es llamada recta real. La figura 4 sugiere las relaciones entre las series de números analizadas hasta ahora.

UDS

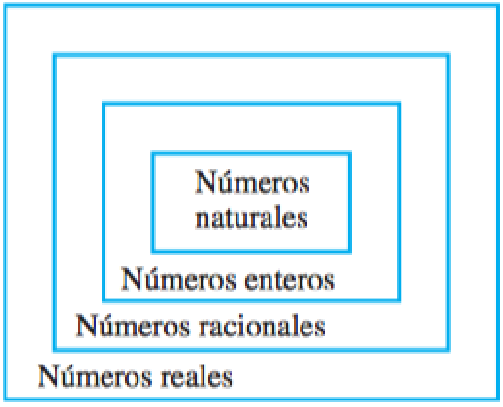


Imagen 4

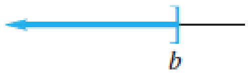
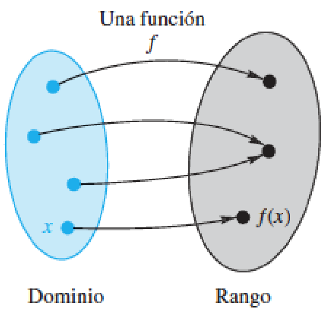
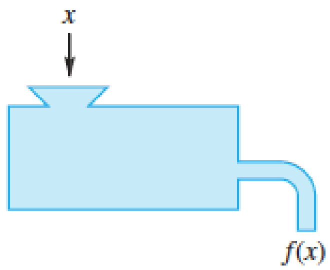
Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

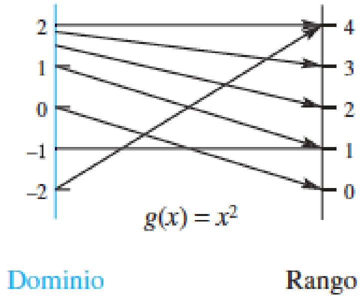
Imagen 5 (La tabla indica la amplia variedad de posibilidades de una notación.)

1.2. Dominio y rango.

A) Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado dominio— un solo valor $f(x)$ o también puede llamársele $g(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina rango de la función.







B) Dominio de una función

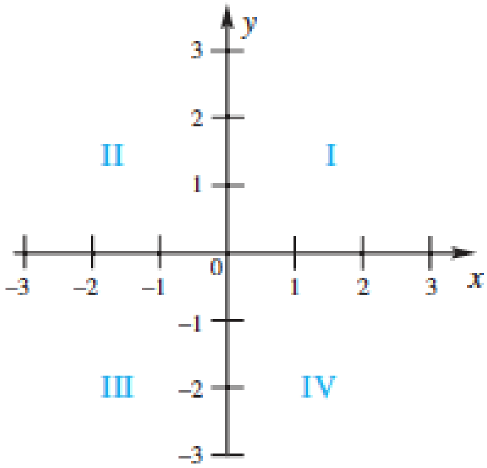
Es el conjunto de números que cumplen la sustitución (tabulación) de una regla de correspondencia *f(x)=y*; este conjunto llamado dominio está ubicado en el eje "*x*" (ordenadas). Se expresa de la siguiente forma: D*omf* o D*f*

C) Rango de una función

Es el conjunto de números que dependen de la sustitución (tabulación) de los valores que puede tomar "x", es decir, del dominio. Este conjunto de números es llamado "rango" y está ubicado en eje "y" (abcisas). Se expresa de la siguiente forma: R*anf* o R*f*

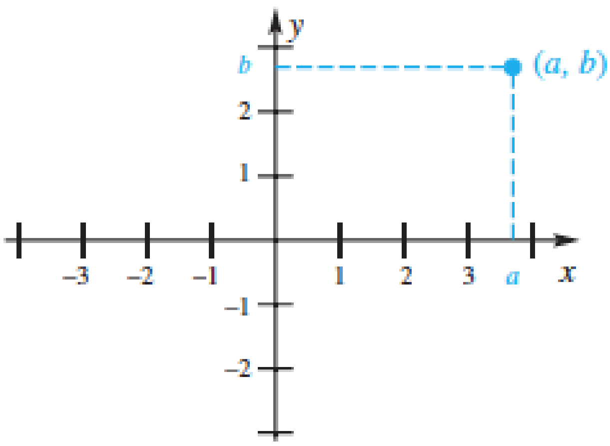
Plano Cartesiano

Las dos rectas que lo forman se denominan ejes coordenados, su intersección se etiqueta con O (o mayúscula) y se denomina origen. Por convención, la recta horizontal se llama eje x y la recta vertical se llama eje y. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que llevan las marcas I, II, III y IV.



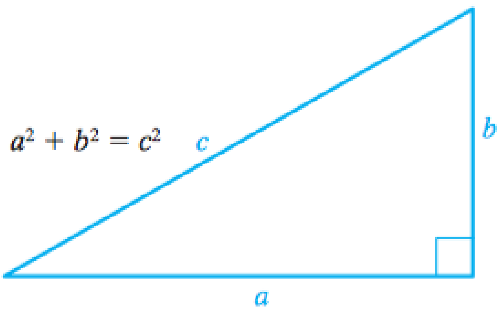
Ahora, cada punto P en el plano puede asignarse a una pareja de números, llamados coordenadas cartesianas. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P intersectan los ejes x y y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas (a, b).

Llamamos a (a, b) un par ordenado de números debido a que es importante saber cuál número está primero. El primer número, a, es la coordenada x (o abscisa); el segundo número, b, es la coordenada y (u ordenada).



La fórmula de la distancia

Con coordenadas a la mano, podemos introducir una fórmula sencilla para la distancia entre cualesquiera de dos puntos en el plano. Tiene como base el Teorema de Pitágoras, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa, entonces: $a^2 + b^2 = c^2$



Teorema de Pitágoras

Ahora considérese cualesquiera dos puntos P y Q, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Junto con R, el punto de coordenadas (x_2, y_1), P y Q son los vértices de un triángulo rectángulo. Las longitudes de PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente. Cuando aplicamos el Teorema de Pitágoras y tomamos la raíz cuadrada principal de ambos lados, obtenemos la expresión siguiente para la fórmula de la distancia.

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Encuentre la distancia entre:

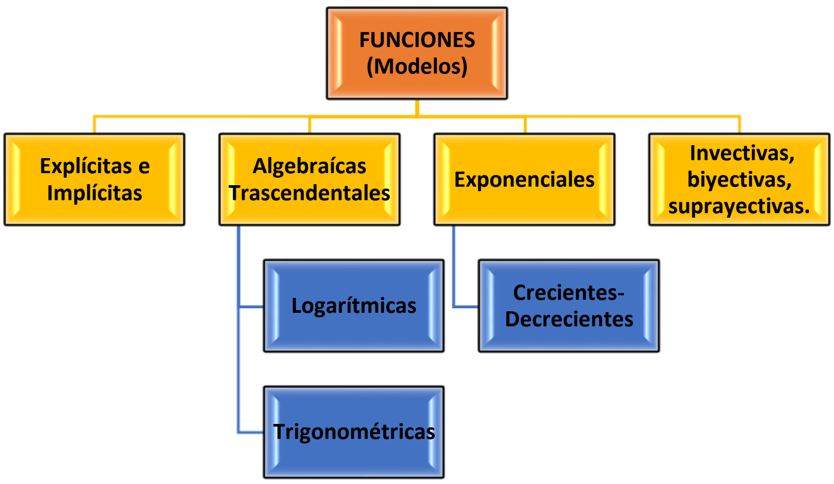
(a) $P(-2,3)$ y $Q(4,-1)$ (b) $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ y $Q(\pi,\pi)$

SOLUCIÓN

(a) $d(P,Q) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \approx 7.21$

(b) $d(P,Q) = \sqrt{(\pi-\sqrt{2})^2 + (\pi-\sqrt{3})^2} \approx \sqrt{4.971} \approx 2.23$

1.3. Clasificación.



1.3.1. Implícitas explícitas.

Funciones explícitas

Una función es explícita viene dada como $y = f(x)$, es decir, la variable dependiente *"y", (ye)* se encuentra despejada.

Ejemplo: **y = 7x - 3**

Funciones implícitas

Una función es **implícita** si viene dada de la forma $f(x, y) = 0$, es decir, si la función se expone como una expresión algebraica igualada a 0.

Ejemplo: **y - 7x + 3 = 0**

1.3.2. Algebraicas trascendentes.

Se llama *función trascendente*, aquella cuya variable y contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Ejemplos de funciones trascendentes son las siguientes:

Función exponencial

Se llama función exponencial de base a aquella cuya forma genérica es $f(x) = a^x$, siendo a un número positivo distinto de 1. Por su propia definición, toda función exponencial tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

La función exponencial puede considerarse como la inversa de la función logarítmica por cuanto se cumple que:

$$a^x = b \Longleftrightarrow \log_a b = x.$$

Propiedades de las funciones exponenciales:

Para toda función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, se cumplen las siguientes propiedades generales:

- La función aplicada al valor cero es siempre igual a 1: $f(0) = a^0 = 1$.
- La función exponencial de 1 es siempre igual a la base: $f(1) = a^1 = a$.

- La función exponencial de una suma de valores es igual al producto de la aplicación de dicha función aplicada a cada valor por separado.

  $f\ (x + x) = a^{x+x?} = a^{x} \times a^{x?} = f\ (x) \times f\ (x)$.

- La función exponencial de una resta es igual al cociente de su aplicación al minuendo dividida por la función del sustraendo:

  $f\ (x - x) = a^{x-x?} = a^{x}/a^{x?} = f\ (x)/f\ (x)$.

Función logarítmica

Como la exponencial, la función logarítmica se utiliza con asiduidad en los cálculos y desarrollos de las matemáticas, las ciencias naturales y las ciencias sociales. Entre otros fines, se usa ampliamente para comprimir la escala de medida de magnitudes cuyo crecimiento, demasiado rápido, dificulta su representación visual o la sistematización del fenómeno que representa.

Definición de función logarítmica

Una función logarítmica es aquella que genéricamente se expresa como $f\ (x) == \log_a x$, siendo a la base de esta función, que ha de ser positiva y distinta de 1.

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial dado que:

$\log_a x = b$ □ $a^b = x$.

Entonces, se emplean los antilogaritmos para simplificar la ecuación hasta $f\ (x) = g\ (x)$, que se resuelve por los métodos habituales.

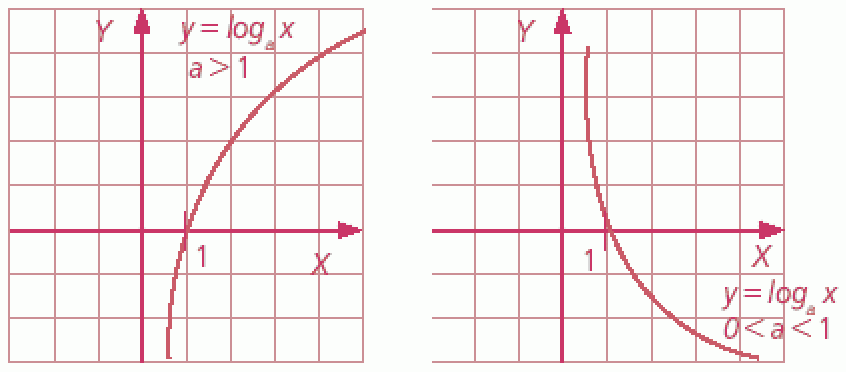
También puede operarse en la ecuación logarítmica para obtener una ecuación equivalente del tipo: $\log_a f\ (x) = m$ de donde se obtiene que $f\ (x) = a^m$, que sí se puede resolver de la forma habitual.

Cuando en un sistema aparecen una o varias ecuaciones logarítmicas, se denomina sistema de ecuaciones logarítmicas. En el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden producir tres casos distintos:

- Un sistema formado por una ecuación polinómica y una logarítmica.
- Un sistema constituido por dos ecuaciones logarítmicas.
- Un sistema compuesto por una ecuación polinómica y una ecuación exponencial.

En cada caso, se utilizan los métodos habituales de resolución de sistemas de ecuaciones, teniendo siempre presente que estas ecuaciones han de transformarse en otras equivalentes, donde la incógnita no aparezca en el argumento o la base del logaritmo, ni en el exponente de la función exponencial.

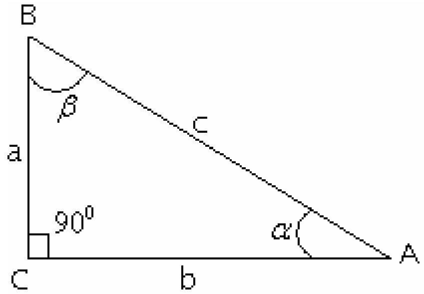
Forma de las funciones logarítmicas según el valor de la base.



Funciones trigonométricas

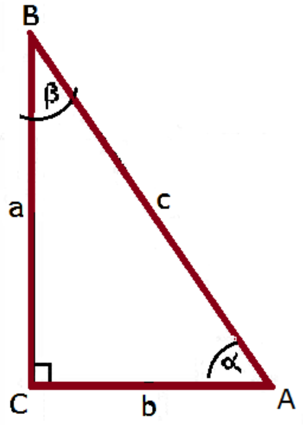
Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

Representación de un *triángulo* y sus funciones *trigonométricas.*



$$\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$$

Tomamos el ángulo α para definir las razones trigonométricas de la siguiente manera:



$$\text{Seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente de } \alpha = \text{cotg } \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Secante de } \alpha = \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante de } \alpha = \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$$

La función seno

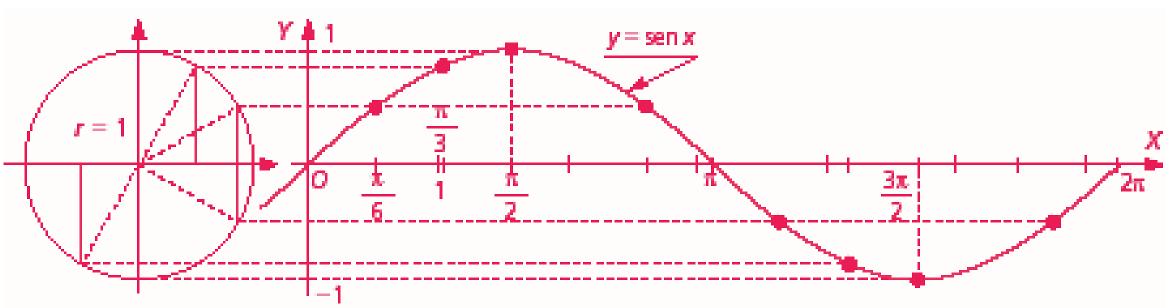
$$\mathbf{sin} \quad \mathbb{R} \to [-\mathbf{1}; \mathbf{1}] \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})$$

Se denomina **función seno**, y se denota por:

$$f\ (x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Su abreviatura será *sen o sin*; a la aplicación de la razón trigonométrica seno a una variable independiente x expresada en radianes. La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

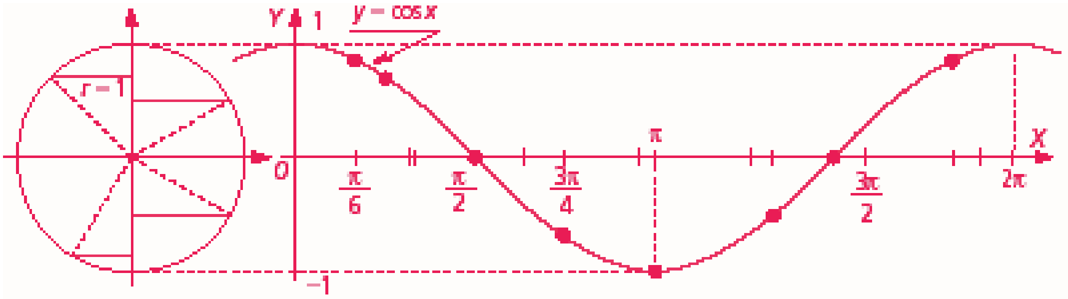


Gráfica de la función seno.

La función **cosecante** puede calcularse como la inversa de la función seno expresada en radianes.

La función coseno

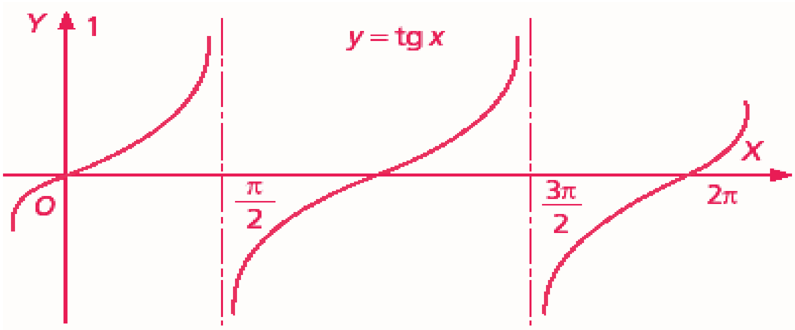
La función coseno, que se denota por $f\ (x) = \ cos\ x$, es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica coseno a una variable independiente x expresada en radianes. Esta función es periódica, acotada y continua, y existe para todo el conjunto de los números reales.



La función **secante** se determina como la inversa de la función coseno para un ángulo dado expresado en radianes.

La función tangente

Se define función tangente de una variable numérica real a la que resulta de aplicar la razón trigonométrica tangente a los distintos valores de dicha variable. Esta función se expresa genéricamente como $f\ (x)$ = $tg\ x$, siendo x la variable independiente expresada en radianes.



La función **cotangente** es la inversa de la tangente, para cualquier ángulo indicado en radianes.

Propiedades de las funciones trigonométricas

Como características importantes y distintivas de las funciones trigonométricas pueden resaltarse las siguientes:

- Las funciones seno, coseno y tangente son de naturaleza periódica, de manera que el periodo de las funciones seno y coseno es 2p y el de la función tangente es p.

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi), \cos x = \cos (x + 2\pi), \text{tg } x = \text{tg } (x + \pi).$$

- Las funciones seno y coseno están definidas para todo el conjunto de los números reales. Ambas son funciones continuas (no así la función tangente).

- Las funciones seno y coseno están acotadas, ya que sus valores están contenidos en el intervalo [-1,1]. La función tangente no está acotada.

- Las funciones seno y tangente son simétricas respecto al origen, ya que $sen\ (-x) = -sen\ x$; $tg\ (-x) = -tg\ x$. En cambio, la función coseno es simétrica respecto al eje Y: $cos\ (-x) = cos\ x$.

Funciones circulares recíprocas

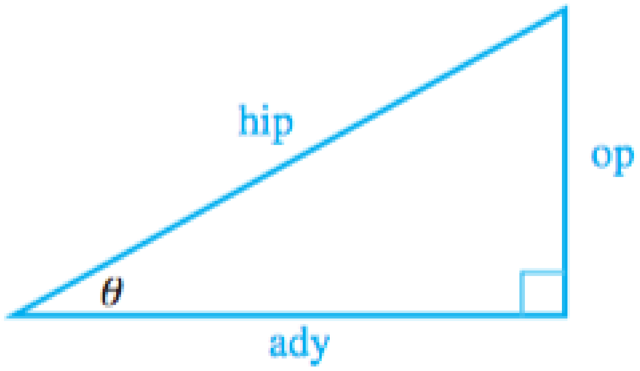
Se llaman funciones circulares recíprocas a las que anulan la acción de las funciones trigonométricas. A cada función trigonométrica le corresponde una función circular recíproca, según la relación siguiente:

- La función recíproca del seno es arco seno, simbolizada por $f\ (x) == arc\ sen\ x$.

- La función recíproca del coseno es arco coseno, expresada por $f\ (x) == arc\ cos\ x$.

- La función recíproca de la tangente es arco tangente, denotada $por\ f\ (x) == arc\ tg\ x$.

La figura siguiente resume las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente. Debe revisarla con cuidado, ya que estos conceptos son necesarios para muchas aplicaciones posteriores en este texto.

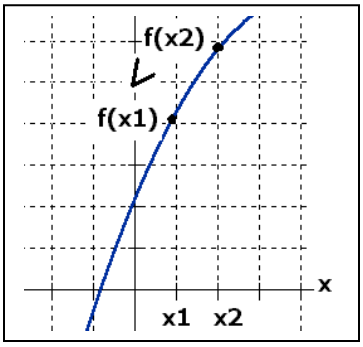


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

1.3.3. Crecientes – decrecientes.

Función creciente

Diremos que una función es creciente cuando a medida que crece el valor de la variable independiente crece el valor de la función.



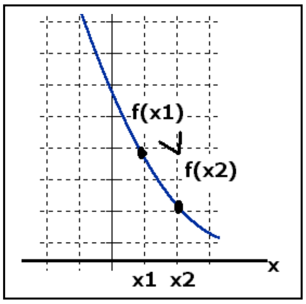
La función es creciente si para todo $x_1 < x_2$ se tiene: $f(x_1) < f(x_2)$

Siempre trabajaremos con funciones derivables, por lo que para analizar en donde una función es creciente estudiaremos su derivada f´.

Cuando una función es creciente todas las rectas tangentes forman ángulos agudos y sus pendientes m son positivas, es decir m=f´>0

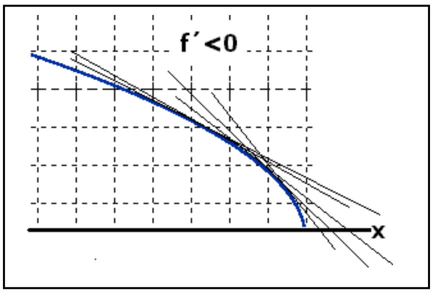
Función Decreciente

Diremos que una función es decreciente cuando a medida que el valor de la variable independiente aumenta el valor de la función disminuye.



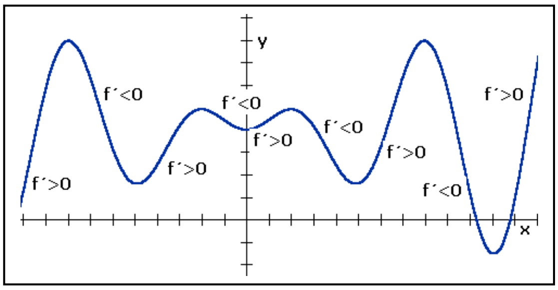
La función es decreciente si para todo $x_1<x_2$ se tiene: $f(x_1)>f(x_2)$

En términos de derivada; Diremos que una función f es decreciente cuando su derivada es negativa, es decir una función es decreciente cuando f´<0.



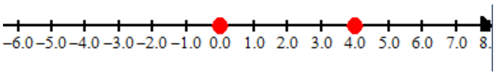
Cuando una función es decreciente todas las rectas tangentes forman ángulos obtusos y sus pendientes m son negativas, es decir m=f´<0.

En la siguiente figura se representa todo lo anterior.



Ejemplo: Hallar los intervalos en donde la función $f(x)=x^5 - 5x^4$ es creciente y en donde es decreciente.

Solución: Hallemos f´: $f´(x)= 5x^4 -20x^3$ Igualemos a cero la derivada: $f´(x)= 5x^4 -20x^3 =0$ Resolvamos esta ecuación: $5x^3 (x-4) =0$

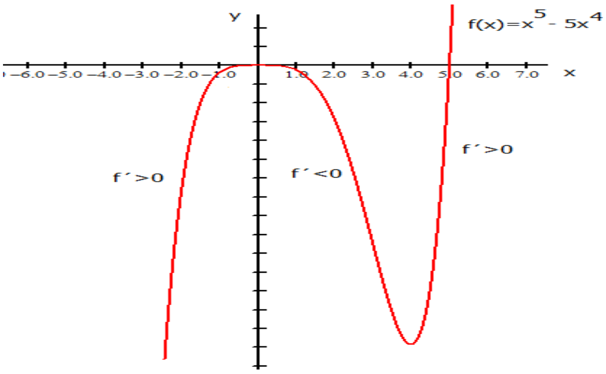


Así tenemos: $5x^3=0$, $x-4=0$, de donde $x=0$, $x=4$

Para saber en qué intervalos la derivada es positiva o negativa, es decir la función creciente o decreciente tomemos valores de prueba.

INTERVALO	K	f´(K)	Signo de f´	Comportamiento de f
(-00 , 0)	-1	f´(-1)=25	+	CRECIENTE
(0 , 4)	3	f´(3)=-135	-	DECRECIENTE
(4,+00)	5	f´(5)=625	+	CRECIENTE

Veamos esto en la siguiente gráfica.



- Ya se ha hablado de que una función es una relación entre dos conjuntos en la que a cada elemento del primer conjunto le corresponde *un único* elemento del segundo conjunto.

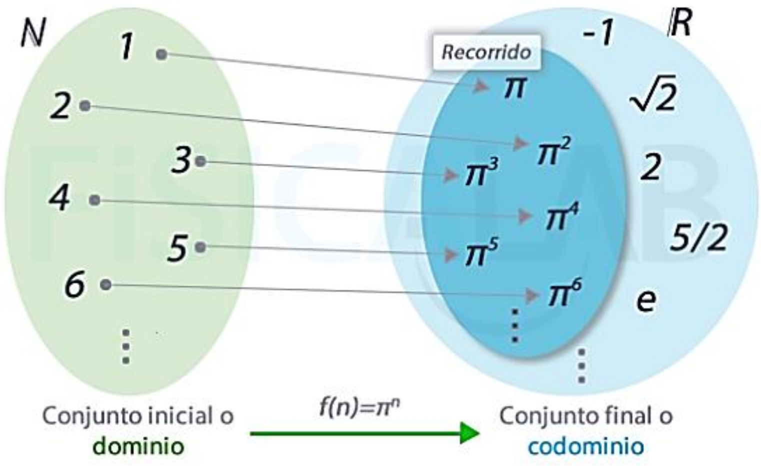
- En la definición formal de función se da el conjunto inicial, denominado dominio, el conjunto final, denominado codominio, y la regla de correspondencia entre ellos. Por ejemplo, en:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto y = f(n) = \pi^n$$

- El dominio es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, el codominio es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, y la regla de correspondencia es $f(n)=\pi^n$.

- El conjunto imagen o recorrido de la función es el subconjunto del codominio formado por los valores que realmente toma la función, una vez se aplica a los elementos del conjunto inicial o dominio. En el caso del ejemplo anterior sería el subconjunto de los reales *y* que se obtienen al aplicar, a cada número natural *n*, $y=\pi^n$.



- **Dominio, codominio y recorrido de una función**

  En la función de nuestro ejemplo, el dominio es el conjunto formado por todos los números naturales. Aunque en ocasiones se confunden, observa la diferencia entre el codominio, formado por todos los reales, y el recorrido, un subconjunto de este cuyos valores cumplen la regla de correspondencia.

- En una **función real de variable real** el dominio y el codominio (y por tanto el recorrido) son subconjuntos de los números reales.

1.3.4. Invectivas, biyectivas, suprayectivas.

Funciones inyectivas

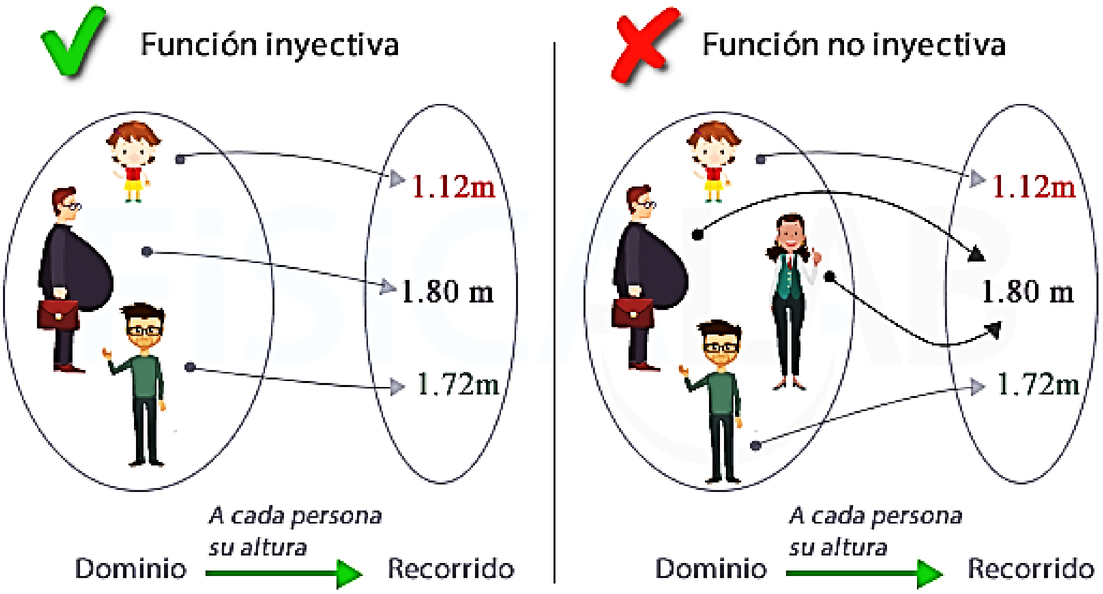
Una función es inyectiva cuando no hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen. Formalmente:

$$\forall a, b \in Domf, si\ f(a) = \ f(b) \Rightarrow a = b$$

Es decir, para cualesquiera dos elementos *a* y *b*, pertenecientes al dominio de la función Dom_f, si sus imágenes *f(a)* y *f(b)* son iguales, los elementos son necesariamente iguales.

Inyectiva vs no inyectiva

A la izquierda, una función que asocia a cada persona su altura. A cada elemento del recorrido llega una sola flecha, por lo que la función es inyectiva. A la derecha, la función también asocia a cada persona su altura. En este caso el dominio es ligeramente distinto, y cuenta con una persona más que, curiosamente, tiene la misma altura que el oficinista despreocupado de su peso (1.80m). Como a ese elemento del recorrido llegan dos flechas, la función ya no es inyectiva.



Por tanto, si te piden una demostración de que una función no es inyectiva, puedes hallar dos valores distintos del dominio cuyas imágenes sean iguales. Si las encuentras, la función no es inyectiva.

En el caso de funciones reales, para saber si son inyectivas:

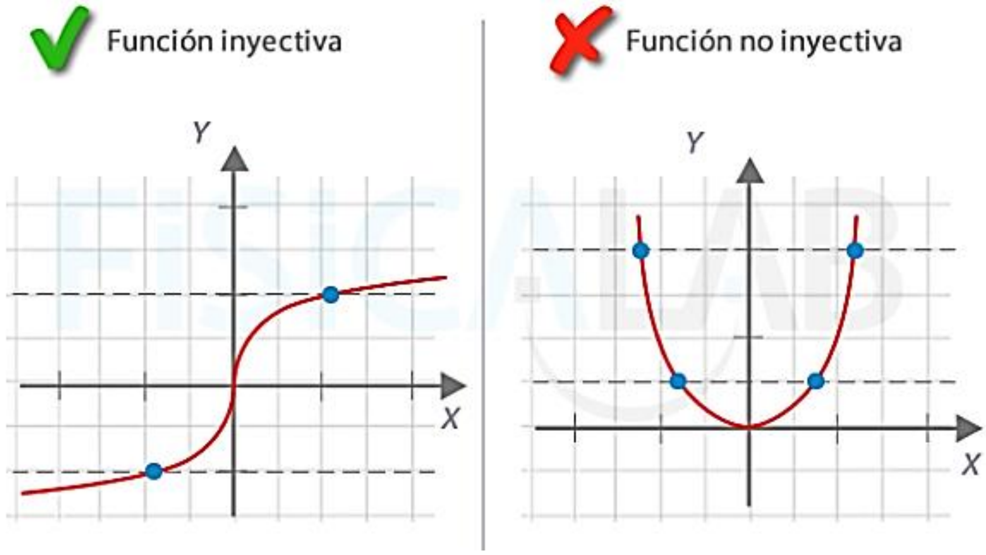
- Cuando están dadas mediante una ecuación, podemos utilizar la propia definición. Así, la función $f(x)=2 \cdot x+1$ es inyectiva, pues:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=2a+1 \\ f(b)=2b+1 \end{array}\right\} \text{Si } f(a)=f(b) \Rightarrow 2a+1=2b+1 \Rightarrow a=b$$

Por otro lado, la función $f(x)=x^2$ no es inyectiva pues:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=a^2 \\ f(b)=b^2 \end{array}\right\} \text{Si } f(a)=f(b) \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$$

Cuando están dadas gráficamente se trata de buscar dos imágenes iguales en la misma. Observa la siguiente ilustración y lo entenderás más claramente:



Gráficas de funciones inyectivas

A la izquierda, una función real inyectiva, frente a una que no lo es, a la derecha. La prueba para determinar si una función real es inyectiva, a partir de su gráfica, consiste en buscar una recta horizontal que pueda cortar a la gráfica en más de un punto. Si la encuentras, como en el caso de la gráfica derecha, la función no es inyectiva. Si no existe ninguna recta así, como en el caso de la izquierda, la función es inyectiva. En cada gráfica se han utilizado dos rectas de prueba.

Ejemplos

F. inyectiva	*F. no inyectiva*
$f(x) = x - 1$	$f(x) = x^2 - x + 2$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$f(x) = x^4 + x$
$f(x) = e^x$	$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 - x + 2 \end{array}$

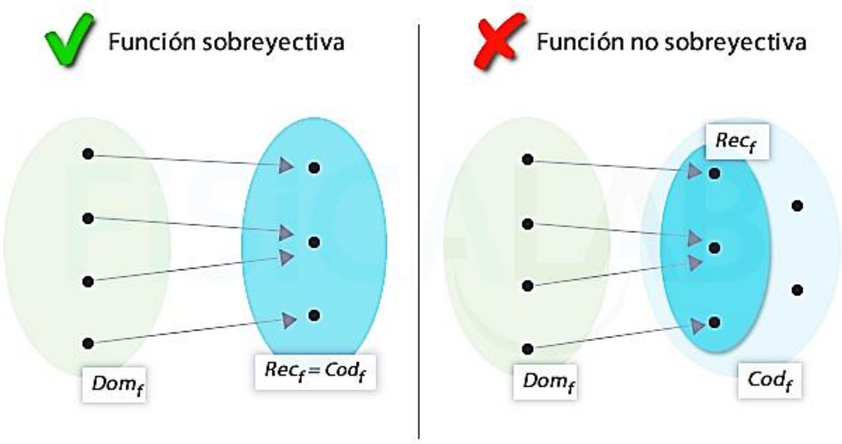
Funciones sobreyectivas

Una función es sobreyectiva, también llamada suprayectiva o exhaustiva, cuando el codominio y el recorrido coinciden. Formalmente:

$$\forall y \in Codf \ \exists x \in Domf \ / \ f(x) = y$$

Es decir, para cualquier elemento "*y*" del codominio existe otro elemento "*x*" del dominio tal que "*y*" es la imagen de "*x*" por *f*.

Las **funciones reales** son sobreyectivas cuando $Rec_f = \mathbb{R}$, ya que, por definición, en ellas $Cod_f = \mathbb{R}$.



Sobreyectiva vs no sobreyectiva

A la izquierda, una función sobreyectiva. Como tal, el codominio y el recorrido coinciden. O, dicho de manera más gráfica, todos los elementos del codominio reciben flechas. A la derecha, una función no sobreyectiva. En este caso hay elementos del codominio que no están incluidos en el recorrido. Observa, además, que ambas funciones son no inyectivas, pues ambas cuentan con elementos en el recorrido que reciben más de una flecha.

Por tanto, si te piden una demostración de que una función real es sobreyectiva, puedes hallar la imagen de dicha función. Si la imagen es el conjunto de los reales, la función es sobreyectiva. En caso contrario, no.

Ejemplos:

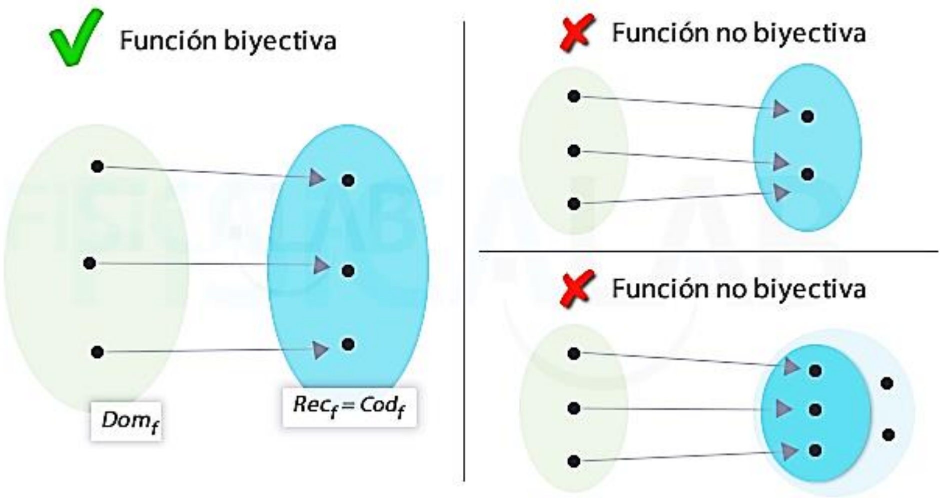
F. sobreyectiva	F. no sobreyectiva
$f(x) = 2 \cdot (x+1)$	$f(x) = \sqrt{3x}$
$f(x) = \tan(x)$	$f(x) = x^2 - 4x + 2$
$f(x) = \ln(x+2)$	$f(x) = \cos(x)$

Funciones biyectivas

Una función es biyectiva, cuando es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. Formalmente:

$$\forall y \in Codf \ \exists! \, x \in Domf \ / f(x) = y$$

Es decir, para cualquier elemento *y* del codominio existe un único elemento *x* del dominio tal que *y* es la imagen de *x* por *f*.



Biyectiva vs no biyectiva

A la izquierda, una función biyectiva. Observa que cada elemento del recorrido recibe una (y solo una) flecha, con lo que *el número de elementos del dominio debe coincidir con el número de elementos del recorrido*. En la ilustración superior derecha, una función que no es inyectiva, y por tanto tampoco biyectiva. En la ilustración inferior derecha, una función que no es sobreyectiva, y por tanto tampoco biyectiva.

F. biyectiva	F. no biyectiva
$f(x)=\sqrt[3]{x+2}$	$f(x)=\sqrt{x+2}$
$f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$	$f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$
$f(x)=\ln(x)$	$f(x)=e^x$

1.4. Operaciones.

A estas alturas de tus estudios, seguro que sabes que puedes combinar dos números cualesquiera, a través de la suma y de la resta, para obtener un número nuevo. De manera análoga también es posible sumar y restar funciones para obtener una función nueva. Por ejemplo:

Funciones	Suma	Resta
1.- $f(x) = x + 2$ 2.- $g(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) + g(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$	$f(x) - g(x) = x + 2 - \dfrac{1}{x}$

Ejemplos:

- Para toda función f y g: Suma (f + g)(x) = f(x) + g(x)
- Diferencia (f -g)(x) = f(x) -g(x)
- Producto (f •g) = f(x)•g(x)
- Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}$;donde g(x) ≠ 0

En este apartado vamos a profundizar en las particularidades de estas operaciones.

1.4.1. Suma.

Se define la suma de dos funciones *f(x)* y *g(x)* como: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Si alguna de las funciones tiene una imagen que no está definida para algún valor de x, la función suma, que es en definitiva la suma de las imágenes, tampoco lo está. Dicho de otra forma, el dominio de la nueva función es:

$$Dom\ (f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Observa que el dominio de la función suma es el conjunto intersección de los dominios de las funciones f y g, de manera que si este fuese el conjunto vacío $\emptyset$, la nueva función carecería de dominio, es decir, no existiría. Esta es una diferencia fundamental con los números reales, dónde la suma de dos números cualesquiera siempre existe.

Propiedades/Composición:

Conmutativa: $f + g = g + f$

Es decir, el orden en que operes es indiferente. Es una propiedad que también se cumple en los números reales: 3+2=2+3 = 5

Asociativa:

$(f+g)+h = f+(g+h)$

Es decir, dadas 3 funciones cualesquiera, se obtiene igual resultado sumando la primera *(f)* y la segunda *(g)*, y a este resultado sumando la tercera *(h)*, que sumado la segunda *(g)* y la tercera *(h)* y al resultado sumar la primera *(f)*. Observa que esta propiedad se cumple también en los números reales: (3+2) +1=3+(2+1) = 6

Puede que no estés muy familiarizado con el concepto de elemento neutro o elemento identidad, por un lado, y el de elemento simétrico de otro. Ambos se definen para una operación determinada (vamos a presentarlos para la suma, en este caso).

Dicho de un modo simple, el elemento neutro o elemento identidad de la suma de funciones es aquel que, al operarlo con cualquier otro elemento, en este caso cualquier otra función, da como resultado la propia función. Como ves, es el elemento que tiene un *efecto neutro* al aplicar con cualquier otro elemento la operación para la cual se define.

Por otro lado, un elemento simétrico de otro es aquel que al operarlo con este da como resultado el *elemento neutro*. Pues bien, hechas estas precisiones nos queda:

Elemento neutro:

$f(x) = 0$

Es decir, el elemento neutro de la suma de funciones, denotado a veces f0 es la función constante f(x)=0, ya que al sumarla con cualquier otra función da como resultado la propia función: g(x)+0=g(x). Siguiendo con nuestras analogías, en el mundo de los números reales, y para la operación suma, el elemento neutro es el número 0.

Elemento simétrico:

$f(x) \Rightarrow -f(x)$

Es decir, dada una función cualquiera f, su función opuesta es el elemento simétrico respecto a la suma de funciones ya que: f(x)+[-f(x)]=0=f0. En el mundo de los números reales, y para la operación suma, el elemento simétrico de cualquier otro es su opuesto: el opuesto del 3 es el -3 porque 3+(3) =0).

Resta

Se define la resta o sustracción de dos funciones f(x) y g(x) como:

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Si alguna de las funciones tiene una imagen que no está definida para algún valor de x, la función resta, que es en definitiva la resta de las imágenes, tampoco lo está. Dicho de otra forma, el dominio de la nueva función es:

$$Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

De igual manera al caso de la suma, la resta puede no estar definida en ciertos casos. De hecho, la resta se puede considerar un caso particular de la suma de funciones:

$$f - g = f + (-g)$$

Cuando se realiza una suma o una resta de funciones y se simplifica la expresión resultante, esta debe ser acompañada de su dominio. De lo contrario, podrías deducir un dominio después de la simplificación que no sería el correcto. Recuerda que dos funciones son iguales cuando las imágenes y el dominio son el mismo.

Ejemplo

Realiza las siguientes operaciones, calcula el dominio de la función resultante y determina el elemento simétrico de cada función para la operación suma:

1. $\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{x+2}{x-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)+g(x) \\ f(x)-g(x) \end{array}$
2. $\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x+2} \\ g(x)=\sqrt{2-x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)+g(x) \\ g(x)-f(x) \end{array}$
3. $\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ g(x)=\ln(-x-2) \end{array} \Rightarrow g(x)+f(x)$
4. $\begin{array}{l} f(x)=\frac{x-1}{x} \\ g(x)=\frac{-x+1}{x} \end{array} \Rightarrow f(x)+g(x)$

Resolución

Apartado 1

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1+x(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-x}$$

$$(f-g)(x)=\frac{1}{x}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{-x^2-x-1}{x^2-x}$$

Los dominios:

$$\begin{array}{l} Dom_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom_g=\mathbb{R}-\{0,\ 1\} \end{array} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{x+2}{x-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\frac{1}{x} \\ -g(x)=-\frac{x+2}{x-1} \end{array}$$

Apartado 2

$$(f+g)(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$$
$$(g-f)(x)=\sqrt{2-x}\ -\ \sqrt{x+2}$$

Los dominios:

$$\begin{array}{l} Dom_f=[-2,\infty) \\ Dom_g=(-\infty,2] \end{array} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\left[-2,2\right]$$

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x+2} \\ g(x)=\sqrt{2-x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\sqrt{x+2} \\ -g(x)=-\sqrt{2-x} \end{array}$$

Apartado 3

$$(f+g)(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1}+\ln(-x-2)$$

Los dominios:

$$\begin{array}{l} Dom_f=[-3/2,\infty) \\ Dom_g=(-\infty,-2) \end{array} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\emptyset$$

Este resultado implica que la función *(f+g)(x)* no existe, al no existir ningún valor que tenga imagen.

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ g(x)=\ln(-x-2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ -g(x)=-\ln(-x-2) \end{array}$$

Apartado 4

$$(f+g)(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{-x+1}{x}=0$$

Los dominios:

$$\begin{array}{l} Dom_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom_g=\mathbb{R}-\{0\} \end{array} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_f\cap Dom_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

Observa que, a la luz de la función suma simplificada, *(f+g)(x)=0*, podríamos concluir que el dominio es $\mathbb{R}$. Sería un error, pues el dominio de la suma es siempre la intersección de los dominios de ambas funciones.

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\frac{x-1}{x} \\ g(x)=\frac{-x+1}{x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\frac{x-1}{x}=\frac{-x+1}{x} \\ -g(x)=-\frac{-x+1}{x}=\frac{x-1}{x} \end{array}$$

1.4.2. Producto y cociente.

Producto

Sea f(x) = $5x^2$

Sea g(x) = 3x – 1

Calcular: (f•g) (x)

Desarrollo: (f•g) (x) = 5 x^2(3x – 1)

= (3x)(5 x^2)-(1)(5 x^2)

= 15 x^3-5 x^2

Cociente

f/g =$\frac{5x^2}{3x-1}$

donde la restricción será x ≠ 1/3

1.4.3. Composición.

Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^3-5x}$$

$$g(x) = 4x^3$$

Vamos a calcular la función f compuesta de g.

Como primer paso

Planteamos el "cascarón hueco" de f

Si tenemos que:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^3-5x}$$

Entonces su cascarón vacío o hueco será

$$f[g(x)] = \frac{(\quad)^2 + 3}{(\quad)^3 - 5(\quad)}$$

Lo siguiente consiste en «rellenar» a f con g

$$g(x) = \boxed{4x^3} \qquad f[g(x)] = \frac{(4x^3)^2 + 3}{(4x^3)^3 - 5(4x^3)}$$

Ahora resolvemos paréntesis con sus respectivas operaciones:

$$f[g(x)] = \frac{(4x^3)^2 + 3}{(4x^3)^3 - 5(4x^3)} = \frac{16x^6 + 3}{64x^9 - 20x^3}$$

f* compuesta de *g

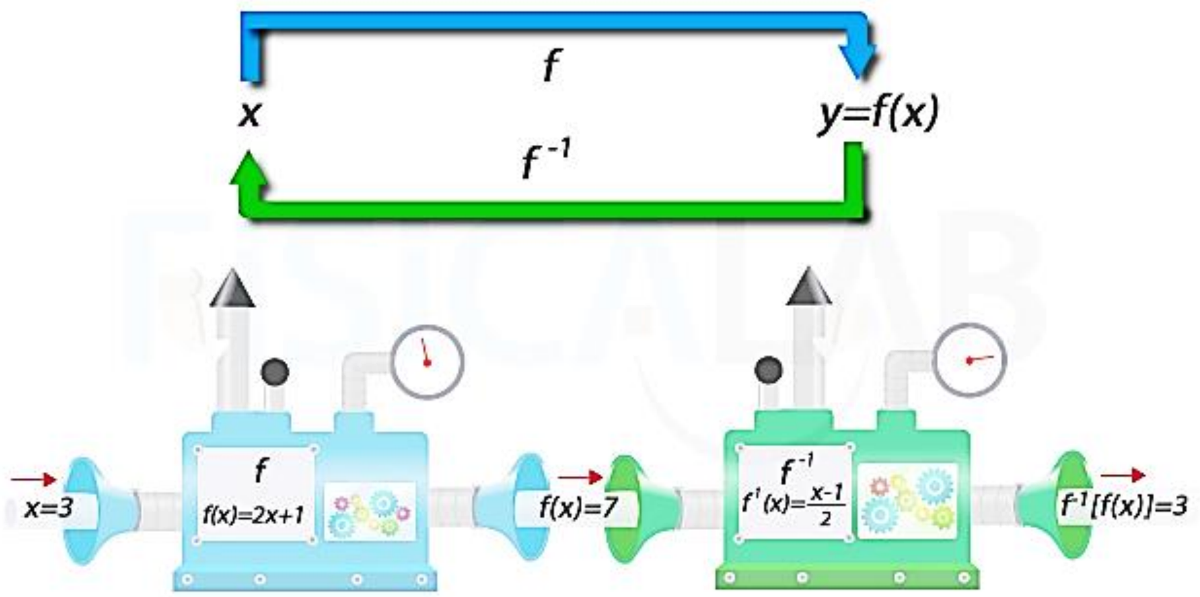
1.4.4. Función inversa.

Dada una función f(x) que asocia a cada elemento x del dominio su imagen f(x) del recorrido, su función inversa o recíproca $f^{-1}(x)$, de existir, es aquella que, aplicada sobre los elementos del recorrido de f(x), les asocia su anti imagen en el dominio de la misma.

Concepto de función inversa

Si la función f transforma valores "x" en valores "y" según y=f(x), su función inversa f^{-1} realiza el camino inverso, "reconvirtiendo" los valores "y" en valores "x".

En la parte inferior de la ilustración se muestra el proceso de manera concreta. Observa que la función f(x)=2x+1, representada por la máquina azul, convierte el valor 3 en 7. A su vez, $f^{-1}(x)=x-12$ convierte el valor 7 de vuelta en el valor 3.



Dada una función inyectiva f(x), se define su función inversa, también conocida como función recíproca, como:

f^{-1}: $Recf \rightarrow Domf$

$y \mapsto x = f^{-1}(y)$

con $f(x) = y$

Donde:

- Rec f: Es el dominio de la función f^{-1}, y a su vez es el recorrido de la función f
- Dom f: Es el recorrido de la función f^{-1}, y a su vez es el dominio de la función f
- y: es un elemento cualquiera del dominio de f^{-1}, y a su vez del recorrido de f
- x: es un elemento cualquiera del recorrido de f^{-1}, y a su vez del dominio de f

UNIDAD II: LA DERIVADA

2.1. Límite de una función.

El **límite de una función** es el valor al que tiende ésta cuando la variable independiente tiende a un valor *a* ($x \to a$) y se escribe:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

En el caso de existir este límite, éste es único (primera de las propiedades de los límites).

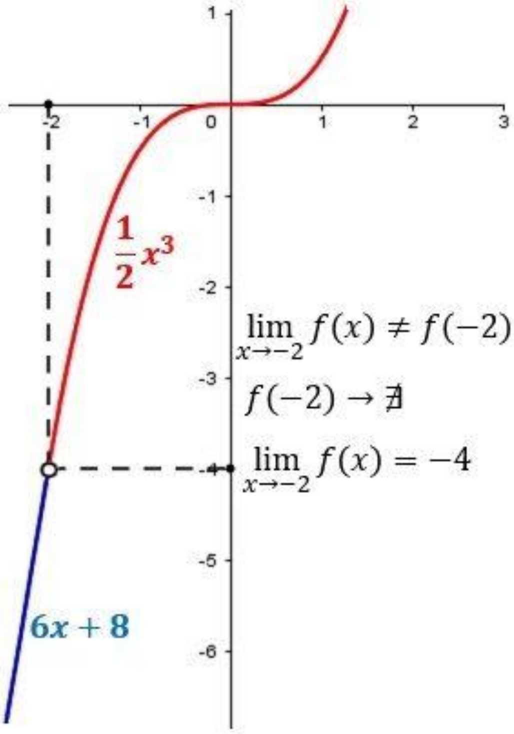
No necesariamente se cumple que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Veamos un ejemplo en la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & si\, x > -2 \\ 6x + 8 & si\, x < -2 \end{cases}$$

En ella existe el límite para $x \to$ -2, pero no existe f (-2):



La condición necesaria y suficiente para que exista el límite es que los límites laterales existan y que estos sean iguales:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

No se busca *f(a)* sino los valores de la función *f(x)* en las proximidades de *a* a su izquierda y a su derecha.

2.2. Idea intuitiva de límite.
2.2.1. Ejemplos gráficos.

Para ver el límite de una función en un punto, partimos de del concepto de límite.

A cualquier punto *a* de la recta real (valor al que tiende *x*), nos podemos acercar, en el caso de la existencia del límite, tanto como queramos, tanto por su izquierda como por su derecha. Son los límites laterales.

Al extremo derecho de la recta real, es decir, a +∞, solamente nos podemos acercar por la izquierda; al extremo izquierdo de la recta real, es decir, a **-**∞, solamente nos podemos acercar por la derecha. Ambos casos son los límites en el infinito.

En un punto de la variable $x \to a$ de una función *f(x)*, podemos comprobar si existe el límite y su valor, dándole valores a la variable cada vez más cercanos a *a*, por la izquierda y por la derecha**.**

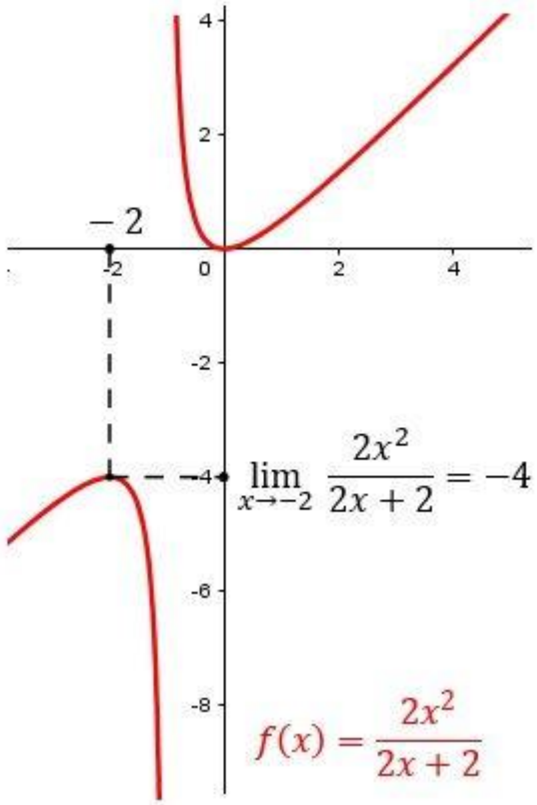
Veamos este límite:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2}{2x+2}$$

Le damos valores cada vez más próximos a -2 por ambos lados, según esta tabla:

	$x \to -2$ $\Rightarrow$		L	$x \to -2$ $\Leftarrow$	
x	-1,9	-1,99	**-2**	-2,01	-2,1
$f(x) = \dfrac{2x^2}{2x+2}$	-4,0111	-4,0001	**-4**	-4,0001	-4,0091

Como se ve en la figura:



Es indiferente que *f(x)* esté definida o no en *a* (en el ejemplo anterior, no está definida en x = -2) ni que el valor *f(a)* coincida con el límite. Lo importante es el valor de la función cuando *x* se acerca más y más a *a* en su entorno.

Para calcular el límite de una función en un punto de su dominio, cuando son del tipo polinómica, racional, exponencial, o en las funciones trigonométricos restringidas en su dominio, es suficiente con sustituir en *x* el valor *a* para el que queremos averiguar el límite.

2.2.2. Ejemplos numéricos.

Calcular el siguiente límite de tipo algebraico.

$$\mathbf{L = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}}$$

Solución del ejercicio

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \frac{(1+0)[1+2(0)][1+3(0)]-1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x+2x^2)(1+3x)-1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+6x+11x^2+6x^3-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(6+11x+6x^2)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} 6+11x+6x^2$$

$$L = 6+(11)(0)+(6)(0)^2 = 6$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta: } \mathbf{L = 6}}$$

Calcular el siguiente límite de tipo algebraico.

$$\boldsymbol{L = \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}}$$

Solución del ejercicio.

$$L = \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36} = \frac{3(4)^2-17(4)+20}{4(4)^2-25(4)+36} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(3x-5)}{(4x-9)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{3x-5}{4x-9}$$

$$L = \frac{3(4)-5}{4(4)-9} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta: } \mathbf{L = 1}}$$

Calcular el siguiente límite de tipo algebraico.

$$\mathbf{L} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)^3 (x^3 - 1)^2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

Solución del ejercicio.

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)^3 - (x^3 - 1)^2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{((1)^2 - 1)^3 - ((1)^3 - 1)^2}{(1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)^3 - (x^3 - 1)^2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 - x^6 + 2x^3 - 1}{(x - 1)(x^2 - 3x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(-1)(3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2)}{(x - 1)(x - 2)(x - 1)}$$

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{(-1)(3x^2 + 4x + 2)(x - 1)(x - 1)}{(x - 1)^2 (x - 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(-1)(3x^2 + 4x + 2)}{x - 2}$$

$$L = \frac{(-1)(3(1)^2 + 4(1) + 2)}{1 - 2} = \frac{(-1)(9)}{-1} = 9$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta}: \mathbf{L = 9}}$$

Calcular el siguiente límite de tipo algebraico.

$$\mathbf{L} = \lim_{x \to a} \frac{x^7 - a^7}{x^3 - a^3}$$

$$L = \lim_{x \to a} \frac{x^7 - a^7}{x^3 - a^3} = \frac{a^7 - a^7}{a^3 - a^3} = \frac{0}{0}$$

$$\mathrm{L} = \lim_{x \to a} \frac{x^7 - a^7}{x^3 - a^3} = \frac{(x - a)(x^6 + x^5 a + x^4 a^2 + x^3 a^3 + x^2 a^4 + x a^5 + a^6)}{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^6 + x^5 a + x^4 a^2 + x^3 a^3 + x^2 a^4 + x a^5 + a^6}{x^2 + xa + a^2}$$

$$\mathrm{L} = \frac{(a)^6 + (a)^5 a + (a)^4 a^2 + (a)^3 a^3 + (a)^2 a^4 + (a) a^5 + a^6}{(a)^2 + (a) a + a^2} =$$

$$= \frac{7a^6}{3a^2} = \frac{7}{3} a^4$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta}: \mathbf{L = \frac{7}{3} a^4}}$$

2.3. Teoremas de límites. Determinación de las condiciones límite de la capacidad de la presa.

Las propiedades de los límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina álgebra de los límites.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones definidas en un mismo intervalo en donde está el valor *a* del límite y *k* una constante.

- **Unicidad del límite**: cuando el límite existe, el límite es único.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

- **Propiedad de la suma**: el límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Propiedad de la resta**: el límite de la resta es la resta de los límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Propiedad del producto**: el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Propiedad de la función constante**: el límite de una función constante es esta misma constante.

$$\text{lím}_{x \to a} k = k$$

- **Propiedad del factor constante**: en un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.

$$\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

- **Propiedad del cociente**: el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \;;$$

$$\text{siempre que } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

- **Propiedad de la función potencial**: el límite de una función potencial es la potencia del límite de la base elevado al exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

- **Propiedad de la función exponencial**: el límite de una función exponencial es la potencia de la base elevada al límite de la función exponente:

$$\lim_{x\to a}\left[k^{g(x)}\right] = k^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la función potencial exponencial**: el límite de una función potencial exponencial, es la potencia de los límites de las dos funciones:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la raíz**: el límite de una raíz, es la raíz del límite:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\text{si el índice } n \text{ es par, debe ser } \lim_{x\to a} f(x) > 0$$

- **Propiedad de la función logarítmica**: El límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

$$\lim_{x\to a}[log_k f(x)] = log_k\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

2.3.1. De forma determinada e indeterminada.

Limites determinados

Se llama limite determinado al que se puede determinar valuando la función reemplazando la x por el valor al que tiende.

Teorema principal de los límites

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c.

Entonces:

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
6. $\lim_{x \to c} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} f(x). \lim_{x \to c} g(x)$
7. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par

Ejemplos **Calcular los límites**

1. $\lim_{x \to 3} (8) = 8$
2. $\lim_{x \to -1} (x) = -1$
3. $\lim_{x \to 2} (x + 3) = \lim_{x \to 2} (x) + \lim_{x \to 2} (3) = 2 + 3 = 5$
4. $\lim_{x \to 5} (3x) = 3 \lim_{x \to 5} (x) = 3(5) = 15$

Limites indeterminados

En el estudio de los límites de funciones racionales, debemos tener cuidado con las indeterminaciones que se nos presenten y tener conocimiento de álgebra, como por ejemplo, la factorización, potenciación, entre otras. No existe una regla para resolver un límite, sin embargo, lo primero que haremos al enfrentar un problema será evaluarlo, luego buscar la forma de simplificarlo y volverlo a evaluar con el fin de obtener su valor final. Veamos algunos ejercicios:

Ejercicio 1: Calcular el valor del siguiente límite $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

Primero lo evaluamos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Nos encontramos con una indeterminación, para poder solucionar este límite debemos factorizar el numerador de la expresión:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1$$

Simplificada la expresión volvemos a evaluar el límite:

$$\lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Ejercicio 2: Calcular el valor del siguiente límite $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

Primero lo evaluamos:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{5^2 - 2(5) - 15}{5 - 5}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{0}{0} = indeterminado$$

Factorizamos el numerador de la expresión:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 3)}{x - 5}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 3)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} x + 3$$

Simplificada la expresión volvemos a evaluar el límite:

$$\lim_{x \to 5} x + 3 = 5 + 3 = 8$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = 8$$

2.3.2. Cuando la variable independiente tiende a infinito.

La indeterminación ∞ / ∞ se puede resolver dividiendo el numerador y el denominador por el mayor grado de la variable.

Pueden haber tres casos de este tipo de límites indeterminados:

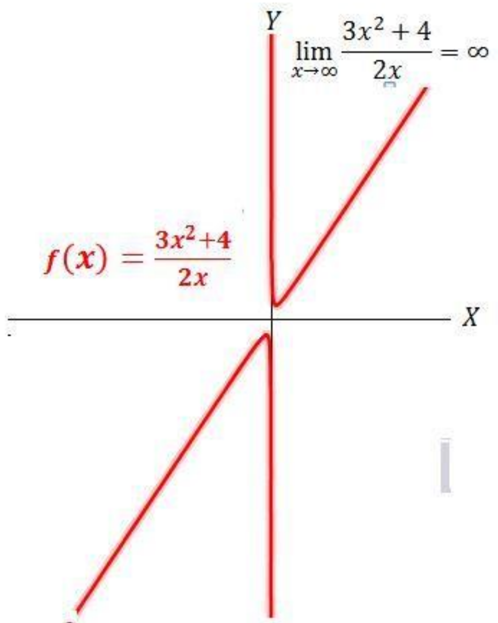
1. Que el mayor grado en el numerador sea mayor que el mayor grado del denominador. En este caso, el límite es o +∞ o -∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ INDET.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}} =$$

$$= \frac{3}{0} = \infty$$

Como se ve en la imagen:

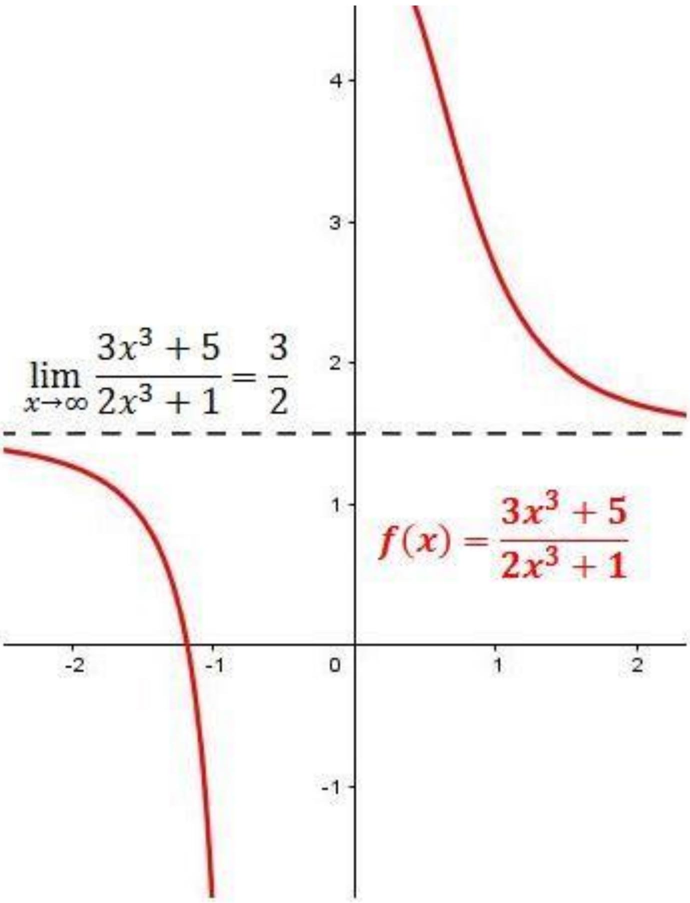


2. Que el mayor grado en el numerador sea igual que el del denominador. La solución es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y del denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+5}{2x^3+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{INDET.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{3}{2}$$

Como se ve en la imagen:



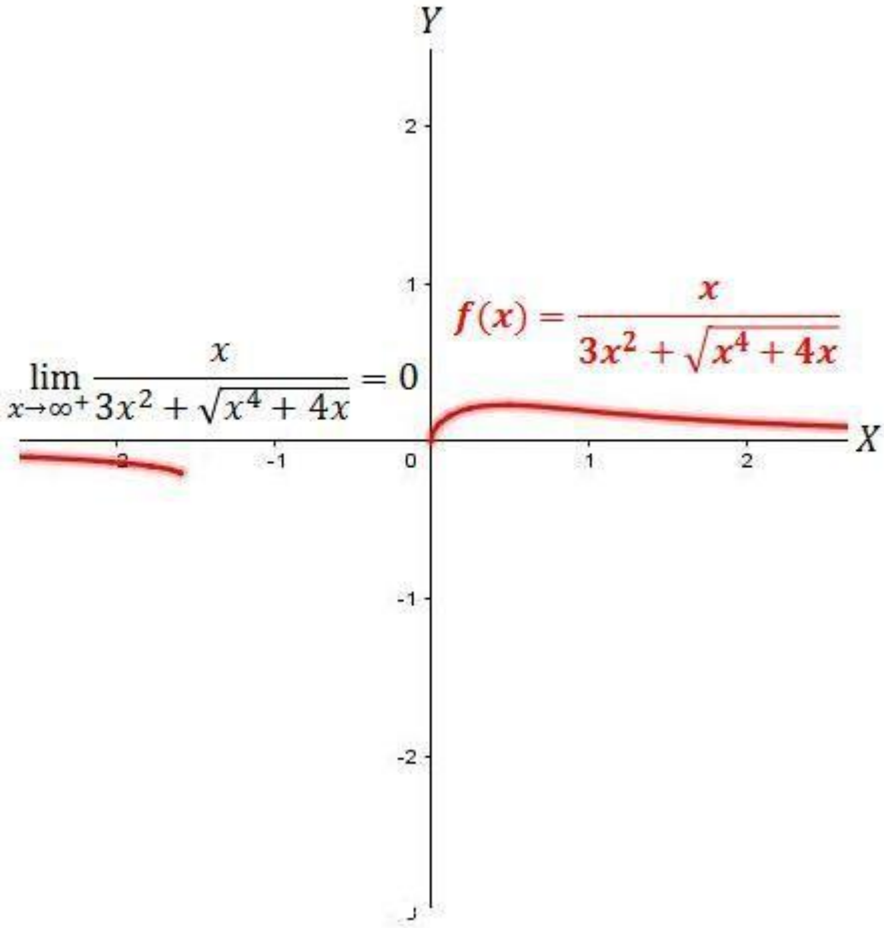
3. El tercer caso es que el mayor grado en el numerador sea menor que el del denominador. En este caso, el límite es cero.

$$\lim_{x\to\infty^+} \frac{x}{3x^2+\sqrt{x^4+4x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty^+} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{4x}{x^4}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{3+\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}} = \frac{0}{3+1} = 0$$

Como se ve en la imagen:



2.3.3. De funciones trigonométricas

Los límites trigonométricos son límites que se calculan sobre funciones trigonométricas. Para resolver límites trigonométricos se debe aplicar un procedimiento previo, ya que suelen dar indeterminaciones.

Además, los límites al infinito de las funciones trigonométricas no existen, porque son funciones periódicas. Es decir, sus gráficas se van repitiendo continuamente de manera periódica sin tender a ningún valor concreto.

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

Remplazando x por el 0 nos da como resultado: $\frac{0}{0}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{sen^2 x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2 x}{x^2}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cosx}{x^2}\right)$$

Remplazando x por el 0 nos da como resultado: $\frac{0}{0}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cosx}{x^2}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{x^2(1+cosx)}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2x}{x^2(1+cosx)}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{sen^2x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+cosx}\right)\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2x}{x^2}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+cosx}\right)$$
$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+cosx}\right)$$

***Calcule el siguiente límite:**

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{4t+\operatorname{sen}(3t)}{t\sec(t)}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}\left(4+\frac{\operatorname{sen}(3t)}{t}\right)}{\cancel{t}\sec(t)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4+\frac{\operatorname{sen}(3t)}{t}}{\sec(t)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4+3}{\sec(t)}$$

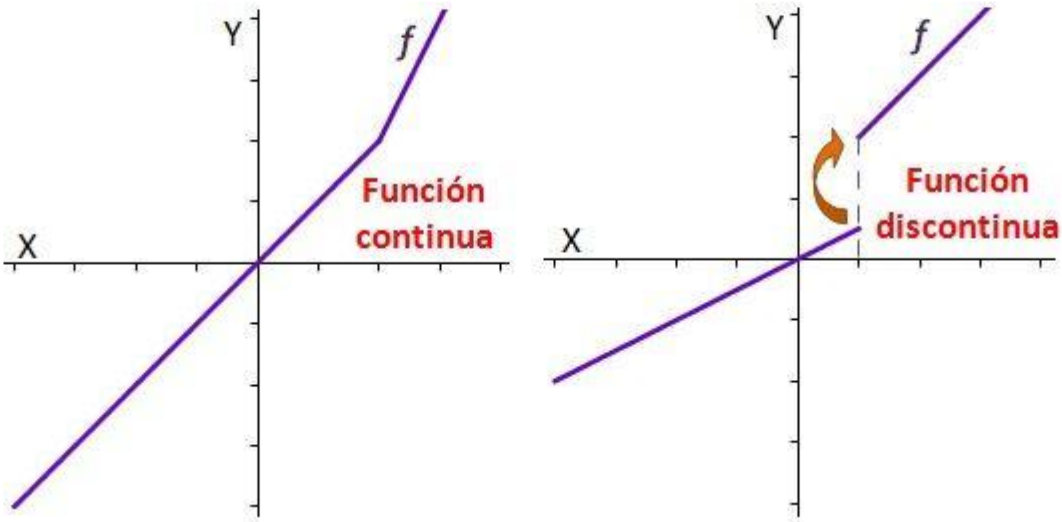
$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{7}{1}}{\frac{1}{\cos(t)}}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{7\cos(t)}{1}=7$$

2.4. Continuidad de una función.

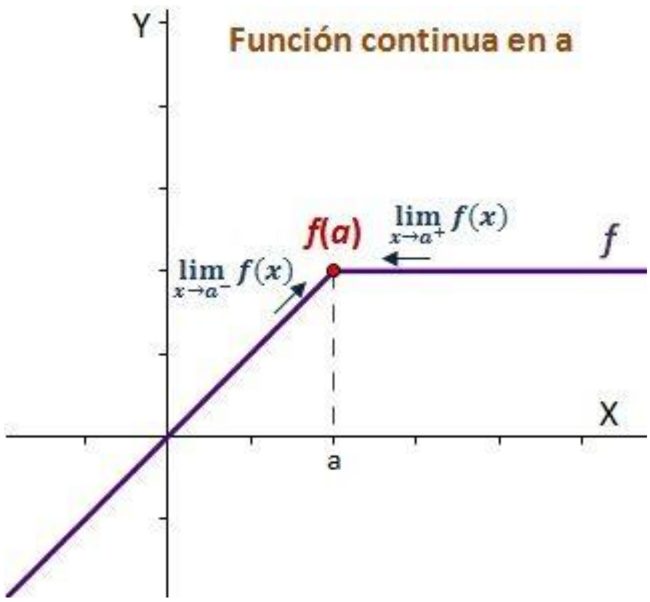
Una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Diríamos que es **continua** si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel.

Se dice que la función es **discontinua** si no es continua, es decir, presenta algún punto en el que existe un salto y la gráfica se *rompe*.



Continuidad en un punto

Una función *f* es **continua en un punto** $x = a$ si cumple las tres condiciones siguientes:



1. La función *f* **existe en *a***, es decir, existe la imagen de *a*.

$$\text{Existe } f(a)$$

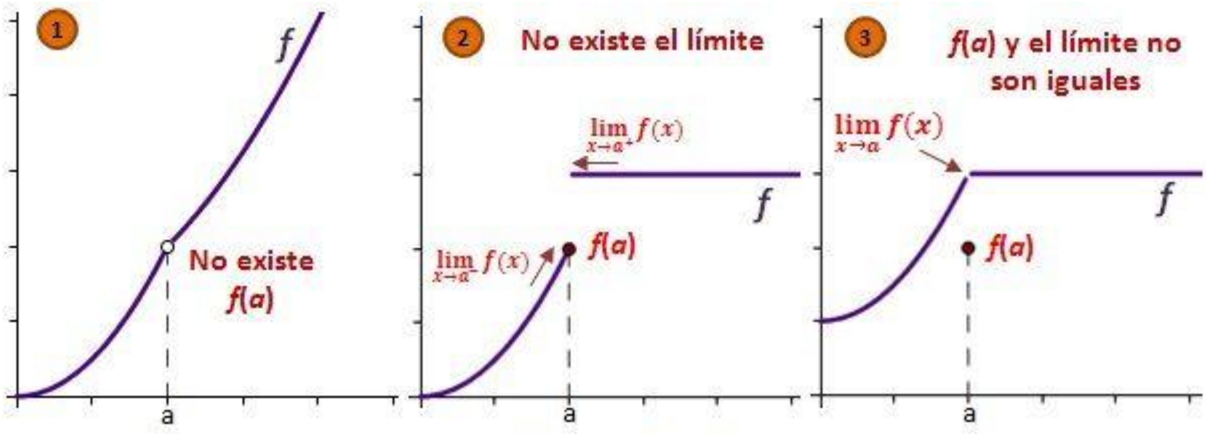
2. **Existe** el **límite** de *f* en el punto *x* = *a*:

$$\text{Existe } \lim_{x\to a} f(x) \text{ , es decir } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

3. La **imagen de *a*** y el **límite** de la función en *a* **coinciden**.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

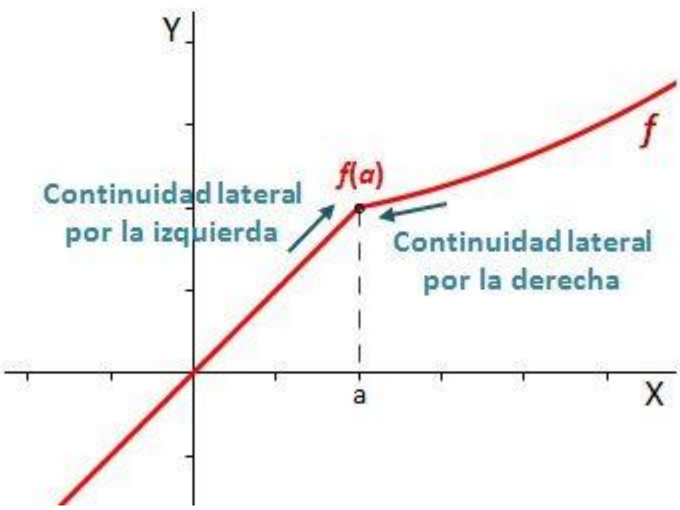
En el caso de que en un punto *x* = *a* no se cumpla alguna de las tres condiciones, se dice que la función es **discontinua** en *a*.



Los tres casos en los que *f* es discontinua en a

Continuidad lateral

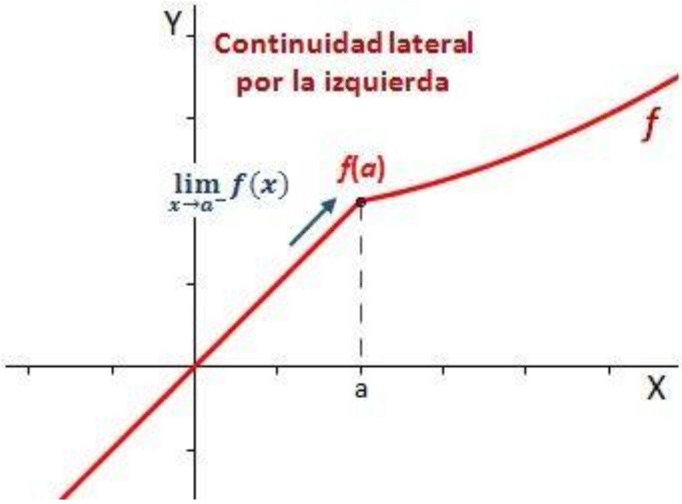
La **continuidad lateral** de una función *f* estudia si ésta es continua en los laterales de un punto *x*=*a*. Por lo tanto, se estudia la continuidad lateral a izquierda o derecha.



- **Continuidad lateral por la izquierda:**
  Una función *f* es continua por la izquierda en *a* si:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

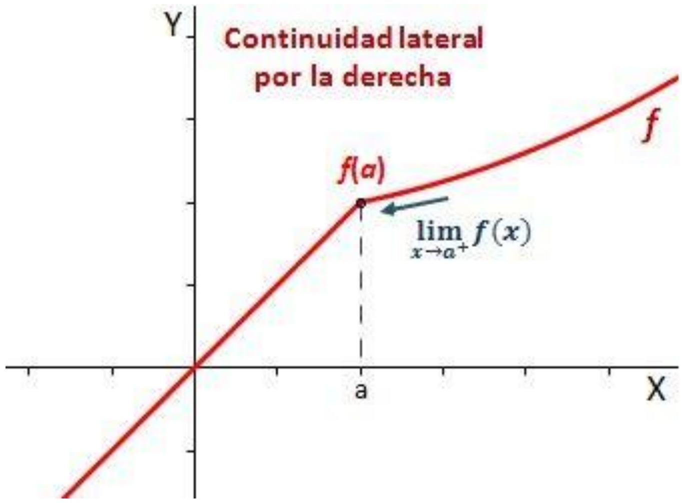
Es decir, si la función se aproxima por el lateral de la izquierda a la imagen de *a*.



- **Continuidad lateral por la derecha:**
  Una función *f* es continua por la derecha en *a* si:

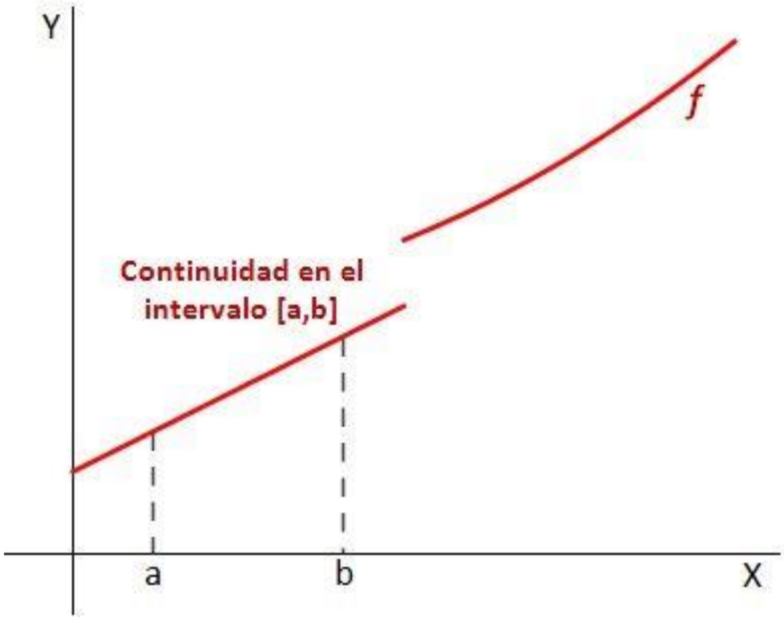
$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Es decir, si la función se aproxima por el lateral de la derecha a la imagen de *a*.



Continuidad en un intervalo

Una función es **continua en un intervalo** [*a*,*b*] si es continua en todos sus puntos. En caso contrario, se dice que la función es discontinua en [*a*,*b*].



Se pueden diferenciar cuatro casos, según si el intervalo es abierto (no incluye *a* y *b*), cerrado (incluye *a* y *b*), abierto por la izquierda (no incluye *a*) o abierto por la derecha (no incluye *b*).

- **Intervalo abierto** (*a*,*b*).
  La función *f* es continua si lo es en todos los puntos interiores del intervalo.

- **Intervalo cerrado** [*a*,*b*]. La función es continua si:
  - *f* es continua en todos los puntos interiores (el intervalo abierto (*a*,*b*)).
  - *f* es continua en *a* por la derecha:

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

  - *f* es continua en *b* por la izquierda:

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

- **Intervalo abierto por la izquierda** (*a*,*b*] (no incluye *a*). La función es continua si:
  - *f* es continua en todos los puntos interiores (el intervalo abierto (*a*,*b*)).
  - *f* es continua en *b* por la izquierda:

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

- **Intervalo abierto por la derecha** [*a*,*b*) (no incluye *b*). La función es continua si:
  - *f* es continua en todos los puntos interiores (el intervalo abierto (*a*,*b*)).
  - *f* es continua en *a* por la derecha:

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

2.5. Condiciones de continuidad.

Una función continua es aquella cuya regla de correspondencia asigna incrementos pequeños en la variable dependiente a pequeños incrementos de los elementos del dominio de dicha función, es decir, , y usando la expresión Δy + y = f(Δx + x), queda donde en este caso, f(x) = y. Ello quiere decir que , y si este último límite existe significa en consecuencia por un teorema de límites (un límite existe si y sólo si los dos límites laterales existen y son iguales) que toda función f(x) que cumpla con es continua en el punto a.

Condición no recíproca

La relación no funciona a la inversa: el que una función sea continua no garantiza su derivabilidad. Es posible que los límites laterales sean equivalentes pero las derivadas laterales no; en este caso la función presenta un punto anguloso en dicho punto.

Un ejemplo puede ser la función valor absoluto (también llamada módulo) en el punto. Dicha función es equivalente a la función partida Para valores infinitamente cercanos a 0, por ambas ramas, el resultado tiende a 0. Y el resultado en el punto 0 es también 0, por lo tanto, es continua. Sin embargo, las derivadas resultan cuando vale 0, las derivadas laterales dan resultados diferentes. Por lo tanto, no existe derivada en el punto, a pesar de que sea continuo.

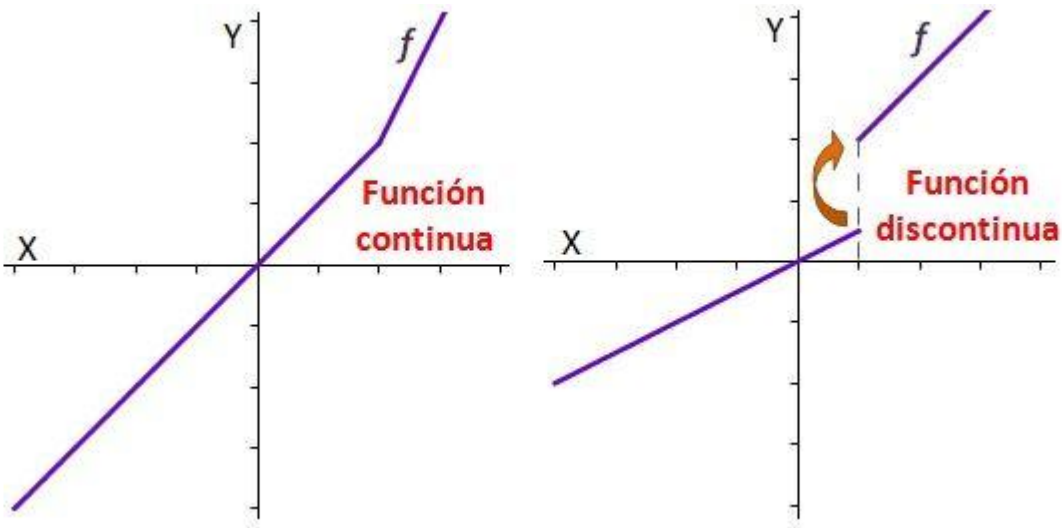
De manera informal, si el gráfico de la función tiene puntas agudas, se interrumpe o tiene saltos, no es derivable.

Una idea intuitiva de función continua se tiene al considerar que su gráfica es continua, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.

2.6. Ejemplos con visualización gráfica.

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Diríamos que es continua si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel.

Se dice que la función es discontinua si no es continua, es decir, presenta algún punto en el que existe un salto y la gráfica se rompe.



2.7. Derivada: determinación de la variación del contenido de la presa.
2.7.1. Interpretación geométrica.

En matemáticas una razón es una comparación o relación mediante una división cuyo resultado se denomina cociente. Una función f(x) relaciona la variable independiente x con la variable dependiente y, es decir, los elementos de dominio con los elementos del contra dominio de la función, en donde un cambio en el valor x induce un cambio en y.

El concepto de razón de cambio se refiere a la modificación de una variable en relación con otra. Un cambio en una variable se puede llamar también incremento, que se simboliza con la letra griega delta (Δ). Por ello, un cambio en la variable x se representa como Δx y el cambio en la función como Δy.

El incremento de x se determina como: $\Delta x = x2 - x1$

La derivada de una función y con respecto a una variable x es el límite del incremento de la función entre el incremento de la variable cuando el incremento de la variable tiende a cero, y se representa así:

$$\textbf{Derivada} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando la razón tiene límite se dice que la función tiene derivada, y así, al proceso de encontrar una derivada se le llama diferenciación.

La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente por una curva, y físicamente como una razón "instantánea" de cambio. El valor de la derivada de una función constante o lineal representa la pendiente de la recta.

El valor de la derivada de una función en cualquier punto de la gráfica de una curva es igual a la pendiente m de la recta tangente a la curva en ese punto dado. Existen varios tipos o formas de notación para representar una derivada.

Sabiendo que $f(x) = y$, las notaciones más comunes para representar la derivada de una función son:

Notación	Derivada
Cauchy	$Df(x)$ o Df
Lagrange	$f'(x)$ o f'
Leibniz	$\frac{df}{dx}$ o $\frac{d}{dx}(f)$

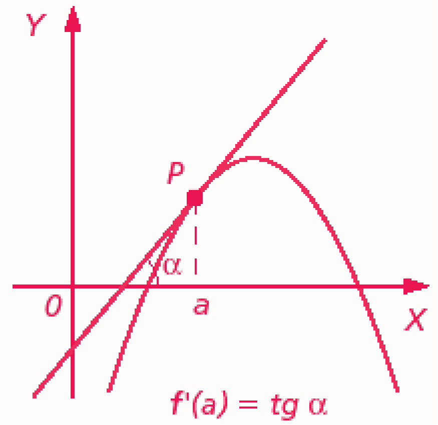
Interpretación geométrica de la derivada

La definición de derivada tiene mucho que ver con el concepto de variación instantánea. Teniendo en cuenta que el cociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

expresa la pendiente de la recta que pasa por (a, f (a)) y (b, f(b)), es lógico pensar que, si "b" y "a" están muy próximos entre sí, separados por un valor h que tiende a cero, esta recta se aproximará a la recta tangente a la función en el punto x = a.

Tal es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.



La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

2.7.2. Reglas de derivación algebraica para suma, producto, cociente y funciones con exponentes.

TIPO DE REGLA	FORMULA
La Regla De La Constante	$\frac{d}{dx}[c] = 0$
La Regla De La Suma	$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
La Regla De La Diferencia	$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$
La Regla De La Producto	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
La Regla De La Cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$
La Regla General de la Potencia	$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$

2.8. Derivada de una función compuesta (regla de la cadena).

La regla de la cadena es una norma de la derivación que nos dice que, teniendo una variable y que depende de u, y si esta depende a la variable x, entonces la razón de cambio de y respecto a x puede estimarse como el producto de la derivada de y con respecto a u por la derivada de u respecto a x.

En términos matemáticos, se puede traducir de esta manera:

$$y = f(u)$$

$$u = f(x)$$

$$y = f\big(f(x)\big)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Para utilizar bien esta regla es importante poder identificar correctamente si una función es compuesta, así como determinar la función exterior e interior.

Por ejemplo, si tenemos $(4x+7)^2$, se trata de una función compuesta donde 4x+7 es la función interna a la que podemos asignar el nombre y, mientras que la función externa es y^2.

Ejemplo de regla de la cadena

$$y = (3x - 11)^2$$

$$u = 3x - 11$$

$$y = u^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u = 2(3x - 11)$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{3(x + h) - 11 - (3x - 11)}{h}$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{3x + 3h - 11 - 3x + 11}{h}$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{3h}{h} = \lim_{h=0} 3 = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2(3x - 11) \times 3 = 6(3x - 11)$$

$$\frac{dy}{dx} = 18x - 66$$

Ahora, un segundo ejemplo con una función trigonométrica:

$$y = cos(2x + 3)$$

$$u = cos(y)$$

$$y = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin u = -\sin(2x + 3)$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2(x + h) + 3 - (2x + 3)}{h}$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2x + 2h + 3 - 2x - 3}{h}$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2h}{h} = \lim_{h=0} 2 = 2$$

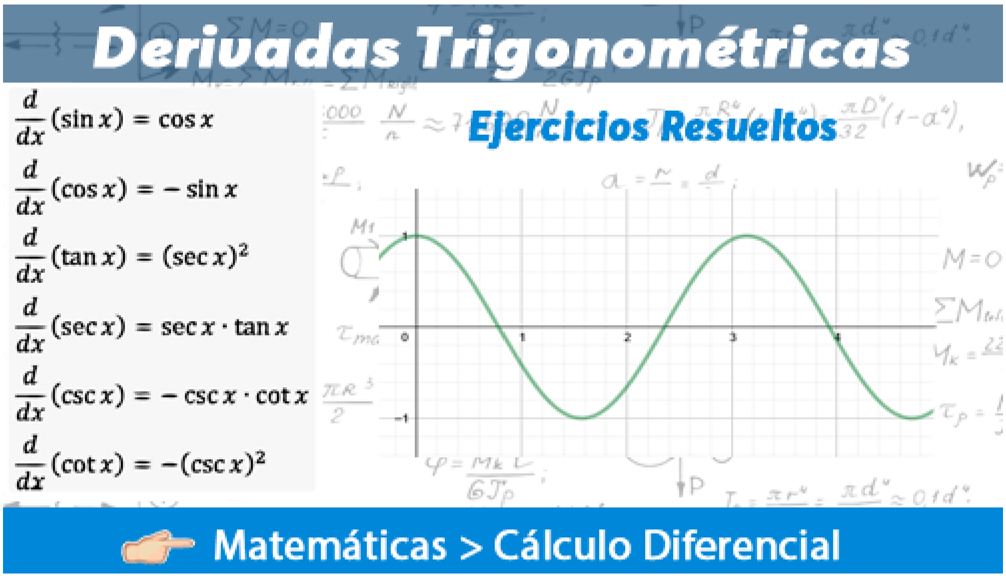
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -\sin(2x + 3) \times 2 = -2\sin(2x + 3)$$

2.9. Derivadas de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Derivadas de funciones trigonométricas

La derivación de las funciones trigonométricas es el proceso matemático de encontrar el ritmo al cual una función trigonométrica cambia respecto de la variable independiente; es decir, la derivada de la función. Las funciones trigonométricas más habituales son las funciones sen(x), cos(x) y tan(x).

Formulas



Ejemplo 1:

$y = sen(8x)$

Solución:

El argumento es 8x, por lo que podemos decir que u=8x , si aplicamos nuestra fórmula para la derivada del seno obtendremos:

$$\frac{dy}{dx} = cos(8x)\frac{d}{dx}(8x)$$

Esto es:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(8x) \cdot 8$$

Ordenando...

Resultado:

$$\frac{dy}{dx} = 8\cos(8x)$$

Ejemplo 2.

$$y = \tan(x^2 + 3x - 2)$$

Solución:

Para este caso tenemos que el argumento es x^2+3x-2 es decir $u = x^2+3x-2$, para ello aplicamos la fórmula de la derivada de la tangente.

$$y' = \sec^2(x^2 + 3x - 2)\frac{d}{dx}(x^2 + 3x - 2)$$

Esto nos daría:

$$y' = \sec^2(x^2 + 3x - 2)\,(2x + 3)$$

Ordenando

Resultado:

$$y' = (2x + 3)\sec^2(x^2 + 3x - 2)$$

Derivadas de funciones logarítmicas

Formulas

$$14)\ \frac{d}{dx}(\ln(v)) = \frac{1}{v}\frac{d}{dx}(v)$$

$$15)\ \frac{d}{dx}(\log_a(v)) = \frac{\log_a(e)}{v}\frac{d}{dx}(v)$$

$$16)\ \frac{d}{dx}(e^v) = e^v\frac{d}{dx}(v)$$

$$17)\ \frac{d}{dx}(a^v) = a^v\ln(a)\frac{d}{dx}(v)$$

$$18)\ \frac{d}{dx}(u^v) = u^v\ln(u)\frac{d}{dx}(v) + vu^{v-1}\frac{d}{dx}(v)$$

Ejemplos

$$f(x) = \ln\left(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x\right)$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\log_4 3x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}} \cdot \frac{3}{3x} \cdot \log_4 e = \frac{\log_4 e}{3x\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}}$$

Derivada de funciones exponenciales

La derivada de la función exponencial es igual a la misma función por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada del exponente.

$$f(x) = 10^{\sqrt{x}}$$

Tenemos una función de la forma a^u, donde

$a = 10$ $\qquad\qquad$ $u = \sqrt{x}$

Necesitamos derivar u, pues lo necesitaremos en la fórmula. Para esto, debemos tener en cuenta que

$$u = x^{\frac{1}{2}}$$

Siguiendo que la derivada de x^n es nx^{n-1}, la derivada del exponente u es

$$u' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fórmula para derivar expresiones del tipo a^u es

$$f'(x) = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

Sustituimos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10$$

UNIDAD III: LA DERIVADA PARA MEDIR LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

3.1. Derivación implícita.

Sea una función $y = 3x^3 + 4x - 2$ donde *y* es función de *x*. Esta ecuación se puede escribir como $2 = 3x^3 + 4x - y$ e incluso como $6x^3 + 8x - 2y = 4$. En este caso se puede decir que, *y* es una función implícita de *x* ya que está definida mediante una ecuación en donde *y*, la variable dependiente, no es dada de manera directa.

Ejemplo 1.

La función $3f(x) - 4x^2 = 0$ está escrita de manera implícita para *x*, variable independiente, y *f(x)*, variable dependiente. Escribir la ecuación de manera no implícita.

$$f(x) = \frac{4x^2}{3}$$

Muchas veces, al tener una ecuación escrita de manera implícita, ésta puede representar una o más funciones.

Ejemplo 2.

Sea $\frac{y}{3} - \frac{x}{y} = 6$, escribir la ecuación de manera no implícita y determinar la o las funciones que describe.

$$\frac{y^2 - 3x}{3y} = 6$$
$$y^2 - 3x = 18y$$
$$y^2 - 18y - 3x = 0$$

Para poder despejar *y* como función de *x*, habría que resolver la fórmula general.

$$y = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(-3x)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 12x}}{2} = \begin{cases} \dfrac{18 + \sqrt{324 + 12x}}{2} \\ \dfrac{18 - \sqrt{324 + 12x}}{2} \end{cases}$$

Este resultado implica que tenemos dos funciones de *x* descritas por la misma ecuación.

En muchos casos, no es sencillo o práctico el despejar *y* para encontrar la o las funciones dadas, por lo tanto, y dado que las funciones existan y sean derivables, se puede resolver la derivada sin necesidad de tener la función expresada en su forma clásica.

Ejemplo 3.

Sea la función $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$, hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

En éste ejemplo, se utilizará la notación $y' = \frac{dy}{dx}$ para simplificar el manejo de la ecuación, así como acostumbrar al lector a diferentes formas de escritura.

Se busca la derivada de la expresión $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$. De la regla de la cadena, se sabe que $\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{dx}\frac{du}{dx}$, lo cual puede expresarse para potencias como $\frac{d}{dx} u^n(x) = u^{n-1}\frac{du}{dx}$. Por lo tanto, $\frac{d}{dx} y^3 = (y^3)' = 3y^2 y'$. En cuanto al segundo término, éste cuenta con un producto de dos funciones, por tal, $(2xy)' = y(2x)' + 2xy' = 2y + 2xy'$.

$$\begin{aligned}
3y^2 y' - 2y - 2xy' &= 3 \\
3y^2 y' - 2xy' &= 3 + 2y \\
y'(3y^2 - 2x) &= 3 + 2y \\
y' &= \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.

Encontrar la derivada de *y* suponiendo que la ecuación $(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$ describe una función derivable y que *y=f(x)*.

$$\begin{aligned}
(2y^2 + 3)^3 &= 5x^3 - 3x \\
3(2y^2 + 3)^2(4yy') &= 15x^2 - 3 \\
12yy'(2y^2 + 3)^2 &= 15x^2 - 3 \\
y' &= \frac{15x^2 - 3}{12y(2y^2 + 3)^2}
\end{aligned}$$

3.2. Derivadas de orden superior.
3.2.1. Procedimiento analítico.

Las derivadas de orden superior se obtienen al derivar una función y f(x), tantas veces como lo indique el orden requerido. El proceso de hallar derivadas, una tras otra, se llama derivadas sucesivas.

El orden de las derivadas, se pueden expresar de la siguiente manera:

Derivada	$f(x)$	y	$D_x y$	*Leibniz*
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	dx/dy
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	d^2y/dx^2
Tercera	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	d^3y/dx^3
Cuarta	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	d^4y/dx^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-$*ésima*	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	d^ny/dx^n

Ejemplos:

1. *Hallar* f'', *si* $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Solución:

$$f'(x)=\frac{(x+1)(2x-1)'-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 2-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=3(x+1)^{-2}$$

$$f''(x)=3\cdot -2(x+1)^{-3}(x+1)'$$

$$f''(x)=-6(x+1)^{-3}\cdot 1$$

$$f''(x)=-6(x+1)^{-3}$$

Obtener la tercera derivada de las siguientes funciones: $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 12$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x - 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 12x - 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12$$

Obtener la sexta derivada de la función $y = \frac{5}{x}$

Solución:

$$y = 5x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -5x^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 10x^{-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -30x^{-4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 120x^{-5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = -600x^{-6}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) = 3{,}600x^{-7} = \frac{3{,}600}{x^7}$$

Obtener la quinta derivada de la función $y = sen(2x)$.

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos(2x)$$

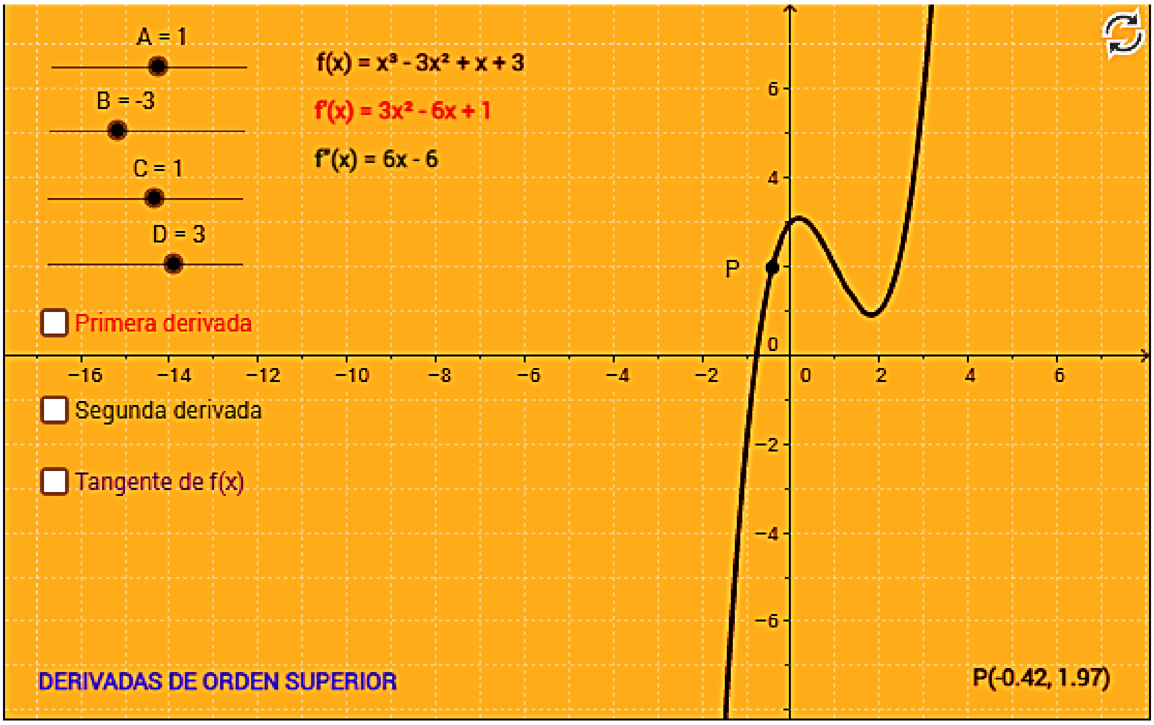
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -4\,sen(2x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -8\cos(2x)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 16\,sen(2x)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 32\cos(2x)$$

3.2.2. Procedimiento gráfico: diferentes condiciones de variación de la presa.



3.3. Gráfica de una función a partir de sus derivadas.

Geométricamente, la derivada de una función f en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto. La pendiente está dada por la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la función con el eje de las abscisas, en ese punto.

La derivada de una función mide la tasa de variación de *f*. Es decir, representa de la noción de la razón de cambio que indica lo rápido que crece o decrece una función en un punto respecto del eje *x* del plano cartesiano.

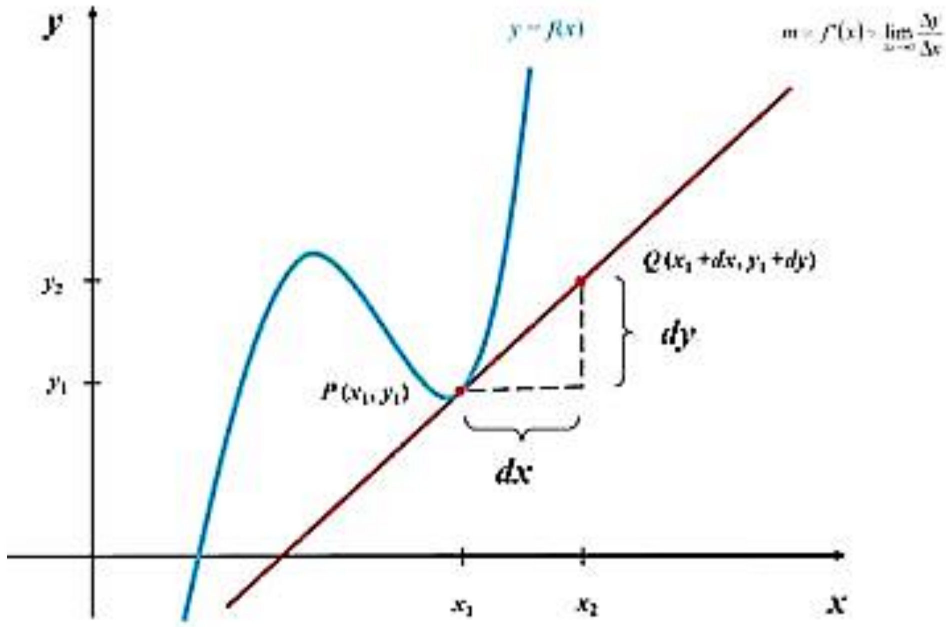
Para cada valor de la pendiente de la tangente de la función *f*, se tiene un valor f'. La gráfica que se forma representa la función derivada.

Si *f* es una función, su función derivada f' es la función cuyo valor $f'(x)$ es la derivada de *f* respecto a *x*. Su dominio es el conjunto de todas las *x* en que existe la derivada $f'(x)$. En otras palabras, f' asocia a cada *x* la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* a *x*, o la razón instantánea de cambio de *f* a *x*.

Entonces la pendiente de la recta tangente es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Gráficamente esto es:



La derivada es la pendiente m de la recta tangente en el punto P

3.4. Estudio de los puntos críticos y concavidad de una función.

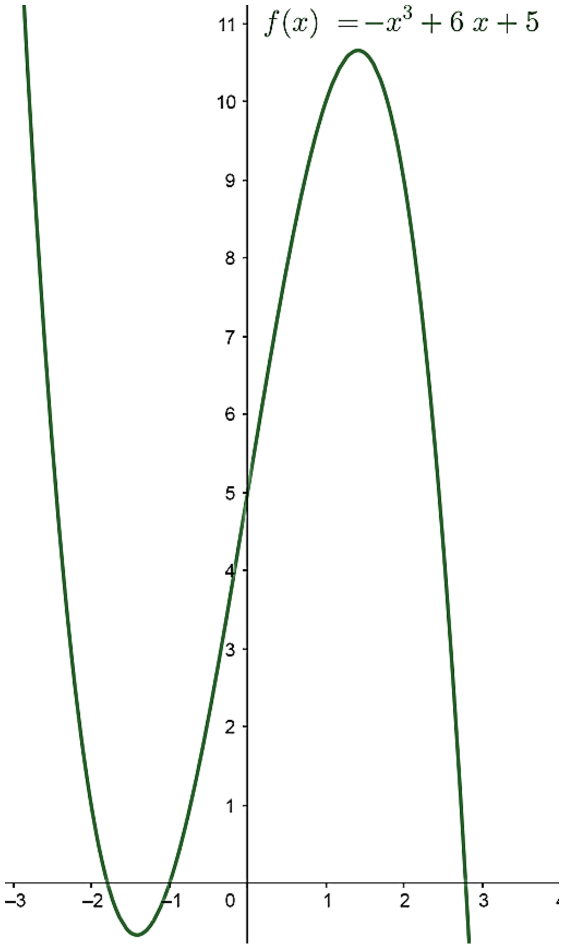
Concavidad de una función

La concavidad es la propiedad con la que cuenta una superficie o una figura geométrica, de manera que su parte central está más hundida que los extremos.

Como mencionamos previamente, si la segunda derivada de una función es menor que 0 en un intervalo del dominio (conjunto de valores que puede tomar x), entonces es cóncava en ese intervalo.

Por ejemplo, una función puede ser cóncava entre [4,9] y convexa en el intervalo [10,16].

Ahora, veamos un caso. Si tenemos la función $f(x) = -x^3+6x+5$, su primera derivada es $f'(x) = -3x^2+6$ y su segunda derivada sería $f(x) = -6x$. Por tanto, la función es cóncava para todo valor de x mayor a 0 (ver imagen inferior donde el gráfico se convierte en una U invertida a partir de valores positivos de x). Por ejemplo, cuando x=3, la segunda derivada es negativa $f(x) = -3×6 = -18$.



3.4.1. Criterio de la primera derivada para determinar los puntos máximos y mínimos.

Además de la proporcionar la monotonía de la función, el criterio de la primera derivada se utiliza para hallar extremos relativos y determinar su tipo (máximo o mínimo).

Si *c* es un punto crítico de *f*, entonces:

- Si *f* es creciente a la izquierda de *c* y decreciente a su derecha, *c* es un **máximo**.
- Si *f* es decreciente a la izquierda de *c* y creciente a su derecha, *c* es un **mínimo**.

- Si la monotonía de *f* es igual a ambos lados de *c*, entonces *c* no es un extremo relativo.

Ejemplo 1

Demostrar que la siguiente función es monótona creciente para *x>4/9*:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3}$$

Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{2x}{3}$$

Calculamos los puntos críticos:

$$\frac{3x^2}{2} - \frac{2x}{3} = 0$$

$$9x^2 - 4x = 0$$

$$x(9x - 4) = 0$$

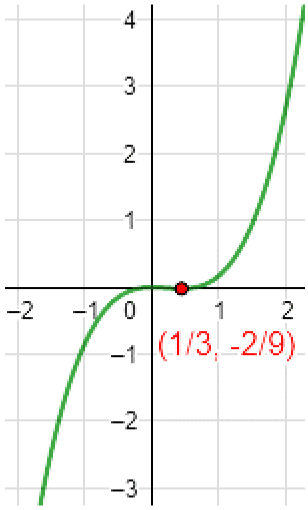
$$x = 0, x = \frac{4}{9}$$

El signo de la derivada se mantiene constante en el intervalo x>4/9. Determinamos su signo calculando la imagen de cualquier punto de dicho intervalo:

$$f'(1) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} > 0$$

Por tanto, la función *f* es monótona creciente en el intervalo (4/9, +∞).

Gráfica:



Ejemplo 2

Hallar los extremos de la siguiente función polinómica:

$$f(x) = 3x^3 - x$$

Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 9x^2 - 1$$

Calculamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 9x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hay dos puntos críticos: *x=1/3* y *x=-1/3*.

Obviamente, el signo de la derivada se mantiene constante en los intervalos (-∞, -1/3), (-1/3, 1/3) y (1/3, +∞), así que podemos evaluar la derivada en cualquier punto de cada intervalo para determinar su signo:

$f'(-1) = 8 > 0$
$f'(0) = -1 < 0$
$f'(1) = 8 > 0$

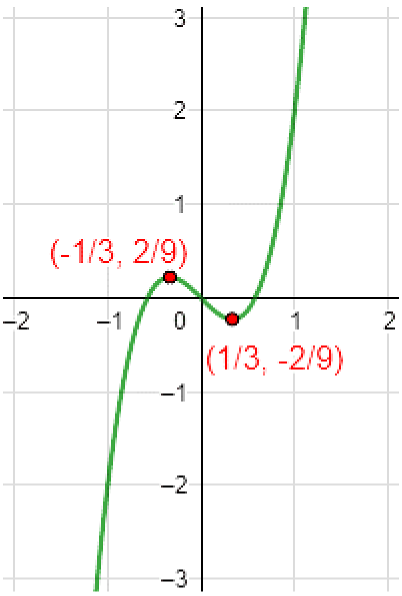
Por tanto,

- La función f es creciente en (-∞, -1/3).
- La función f es decreciente en (-1/3, 1/3)
- La función f es creciente en (1/3, +∞).

Por tanto, deducimos que *x=-1/3* es un máximo y *x=1/3* es un mínimo.

Teniendo en cuenta que los límites de f cuando *x*→±∞ son infinitos, los extremos no son absolutos.

Gráfica:



3.5. Aplicación en el cálculo de problemas de optimización en Economía.

La tendencia que sigue una cotización de una determinada sociedad, suponiendo que la bolsa permanece en servicio los días x de un mes de 30 días, está definida por:

$$C(x) = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$$

1. Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.
2. Determinar los periodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

Solución

$$C(x) = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$$

1. Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

Se deriva la función, se iguala a cero y se calculan sus raíces.

$C'(x) = 0.03x^2 - 0.9x + 2.43 \implies 0 = 0.03x^2 - 0.9x + 2.43 = 0.30(x^2 - 30x + 81)$

$$0 = 0.30(x^2 - 30x + 81) = 0.30(x-3)(x-27) \implies x_1 = 3;\ x_2 = 27$$

Se obtiene la segunda derivada de la función y se evalúan las raíces. Entonces:
Si el valor que se obtiene es positivo, tenemos un mínimo.
Si el valor que se obtiene es negativo, tenemos un máximo.

$$C'' = 0.06x - 0.9$$
$$C''(3) = 0.06(3) - 0.9 = -0.72$$
$$C''(27) = 0.06(27) - 0.9 = 0.72$$

Por tanto, al tercer día de cotizar en la bolsa la sociedad tuvo un máximo de 303.51 y al día veintisiete, un mínimo de 234.39.

2. Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

Se dividen los números del uno al treinta en intervalos $(1,3), (3,27), (27,30)$, considerando las raíces de la primera derivada.

Después se toma un valor de cada intervalo y se evalúan en ésta para conocer los intervalos donde crece o decrece la función:

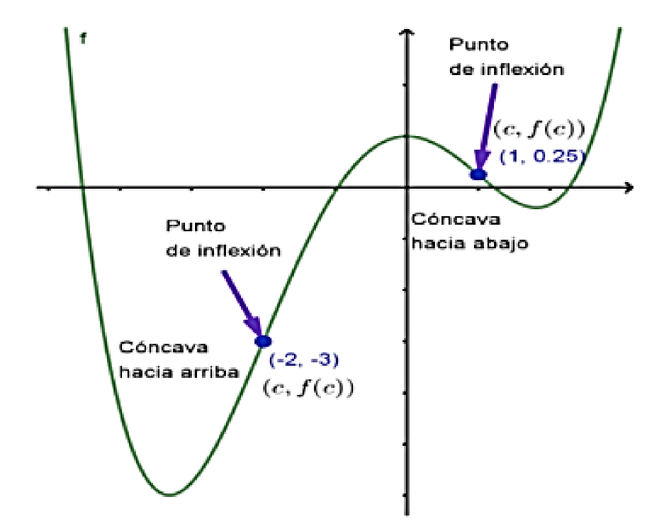
Si el resultado es positivo, la función es creciente en ese intervalo.
Si el resultado es negativo, la función es decreciente en ese intervalo.

$$C'(2) = 0.03(2)^2 - 0.9(2) + 2.43 = 0.75$$
$$C'(10) = 0.03(10)^2 - 0.9(10) + 2.43 = -3.57$$
$$C'(28) = 0.03(28)^2 - 0.9(28) + 2.43 = 0.75$$

Durante los primeros tres días la cotización en la bolsa subió. Después, hasta el día veintisiete, la cotización estuvo a la baja. Posterior a este día comenzó a subir nuevamente.

3.5.1. Criterio de la segunda derivada para determinar los puntos críticos (máximos, mínimos y de inflexión) y concavidad de una función.

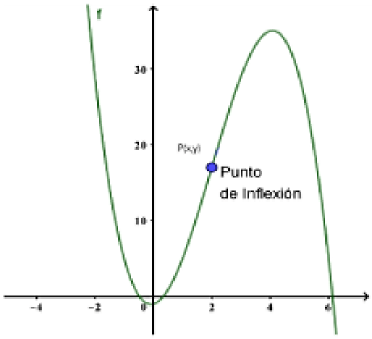
Iniciamos con la idea de que la segunda derivada de una función también proporciona información sobre el comportamiento de dicha función. Para comenzar este estudio empecemos con las siguientes definiciones.

Definiciones	Ilustración
$f(x)$ es cóncava hacia abajo (∩) en $x = a$ si $f''(a) < 0$. $f(x)$ es cóncava hacia arriba (∪) en $x = b$ si $f''(b) > 0$.	

Además, consideramos que:

f(x) tiene un punto de inflexión, es decir, cambio de concavidad en *x* = *d* si cumple con las siguientes condiciones:

1. Que *f»(d) = 0*
2. Que *f»* para un valor un poco menor que *d*, sea positivo (+) o negativo (-).
3. Que *f»* para un valor un poco mayor que *d*, sea negativo (-) o positivo (+).



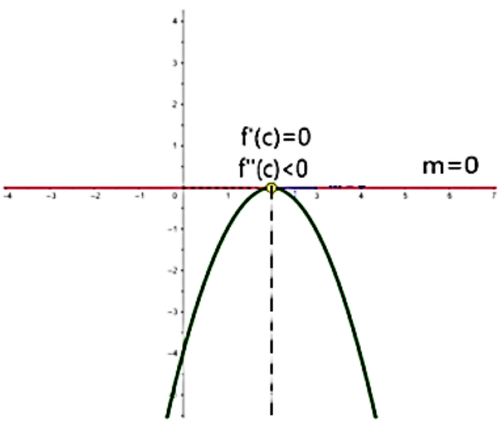
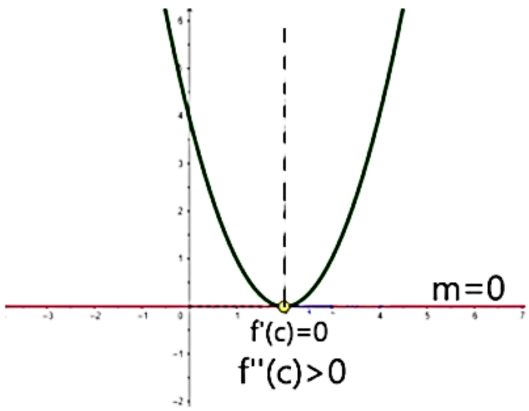
Vamos a utilizar las definiciones anteriores para aplicar el criterio de la segunda derivada para encontrar máximos y mínimos, así como otra definición muy importante para aplicar el criterio.

f(x) tiene un **máximo** en *x* = *c* si cumple con las siguientes condiciones:

1. Que *f'(c) = 0*
2. Que *f»(c) < 0*, entonces en (*c*,*f*(*x*)) es cóncava hacia abajo (∩)

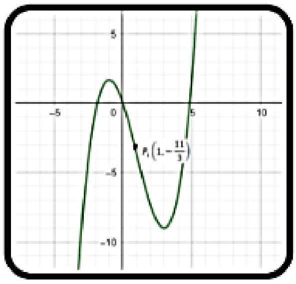
f(x) tiene un **mínimo** en *x* = *c* si cumple con las siguientes condiciones:

1. Que *f'(c) = 0*
2. Que *f»c > 0*, entonces en (*c*,*f*(*x*)) es cóncava hacia arriba (∪).

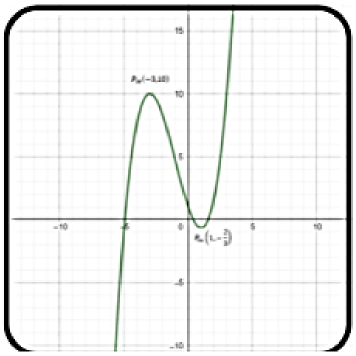
Máximo	mínimo
	
Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Vamos a ver unos ejemplos para aplicar lo que acabamos de estudiar.

Ejemplo 1: En la siguiente función vamos a determinar las concavidades hacia abajo y hacia arriba y las coordenadas de sus puntos de inflexión.

Función	Procedimiento	Resultados
$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$	Paso 1: Derivar $y' = x^2 - 2x - 3$ $y'' = 2x - 2$	
	Paso 2: Hacer $y'' = 0$ para obtener los valores críticos para punto de inflexión. $2x - 2 = 0$ $x = 1$	$x = 1$ Valor crítico para punto de inflexión
	Paso 3: Evaluar si en $x = 1$ existe un punto de inflexión. $y''(0) = 2(0) - 2 = -2$; $f(x)$ es cóncava hacia abajo $y''(2) = 2(2) - 2 = +2$; $f(x)$ es cóncava hacia arriba	En $x = 1$ hay un punto de inflexión
	Paso 4: Calculamos la ordenada del punto de inflexión $y(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 - 3(1)$ $y(1) = -\frac{11}{3}$	Punto de inflexión en: $P_i\left(1, -\frac{11}{3}\right)$
	Paso 5: Tabular, graficar y hacer tabla de resultados  Fuente: https://www.geogebra.org/classic?lang=es	Resultados: $f(x)$: Es $\cap$ $(-\infty, 1)$ Es $\cup$ en $(1, +\infty)$ Tiene un punto de inflexión en $P_i\left(1, -\frac{11}{3}\right)$.

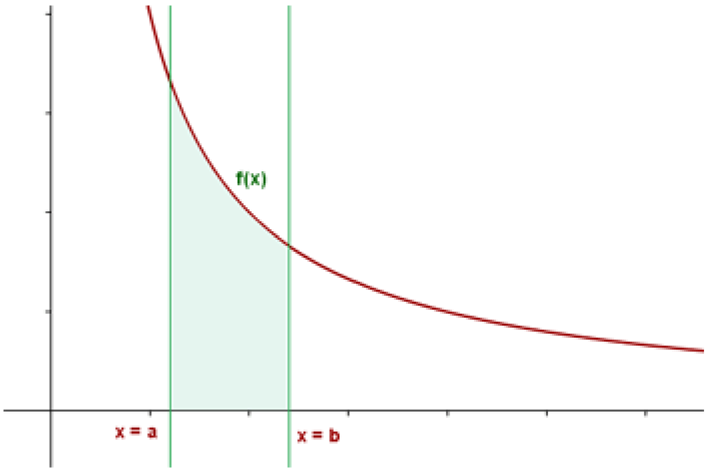
Ejemplo 2: Calcula los máximos y mínimos de la siguiente función aplicando el criterio de la segunda derivada.

Función	Procedimiento	Resultados
$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x +$	Paso 1: Obtener la primera derivada, igualar a cero y obtener los valores críticos para máximo o mínimo. $y' = x^2 + 2x - 3$ $x^2 + 2x - 3 = 0$ $(x + 3)(x - 1) = 0$ $x_1 = -3,\ x_2 = 1$	$x_1 = -3,\ x_2 = 1$ Valores críticos para máximo o mínimo
	Paso 2: hallar la segunda derivada. $y'' = 2x + 2$	
	Paso 3: determinar si hay un máximo o un mínimo en cada valor crítico, aplicando el criterio de la segunda derivada. Para $x_1 = -3$: $y''(-3) = 2(-3) + 2 = -4$; $\cap$ hay un máximo Buscamos la ordenada evaluando en la función: $y(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 1 = 10$ $P_M(-3, 10)$ Para $x_2 = 1$: $y''(1) = 2(1) + 2 = +4$; $\cup$ hay un mínimo Buscamos la ordenada evaluando en la función: $y(1) = \frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 - 3(1) + 1 = -\frac{2}{3}$ $P_m\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$	Hay un máximo en $P_M(-3, 10)$ Hay un mínimo en $P_m\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$
	Paso 4: Tabular, graficar y hacer tabla de resultados 	Resultados $f(x)$: Tiene un máximo en $P_M(-3, 10)$. Tiene un mínimo en $P_m\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$

UNIDAD IV. LA INTEGRAL

4.1. Interpretación geométrica de la integral definida. La integral como un límite.

Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b]$, la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



- La integral definida se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$.
- $\int$ es el signo de integración.
- a es el límite inferior de la integración.
- b es el límite superior de la integración.
- $f(x)$ es el integrando o función a integrar.
- dx es diferencial de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1 El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2 Si los límites que integración coinciden, la integral definida vale cero.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3 Si c es un punto interior del intervalo $[a, b]$, la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4 La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales ·

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5 La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x) = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

La integral definida es un número que no depende de x. Se puede utilizar cualquier letra en lugar de x sin que cambie el valor de la integral.

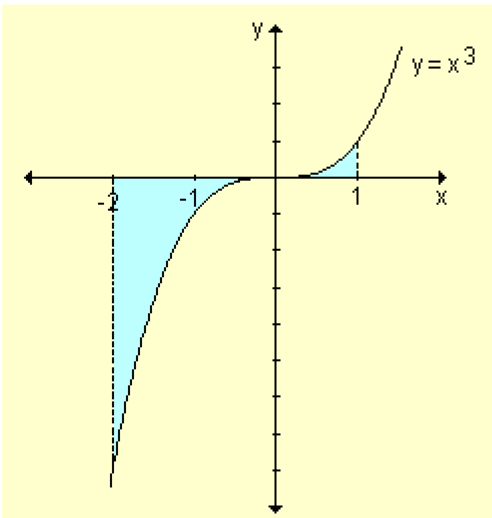
Aunque esta definición básicamente tiene su motivación en el problema de cálculo de áreas, se aplica para muchas otras situaciones. La definición de la integral definida es válida aun cuando f(x) tome valores negativos (es decir cuando la gráfica se encuentre debajo del eje x). Sin embargo, en este caso el número resultante no es el área entre la gráfica y el eje x.

Observación: La suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ que aparece en la definición de integral definida se llama suma de Riemann en honor al matemático alemán Bernahrd Riemann. Su definición incluía además subintervalos de distinta longitud.

Definición de las sumas de Riemann*:* Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a, b] y sea una división (partición) arbitraria de dicho intervalo a = x_0 £ x_1 £ x_2 £ x_3 £ .... £ x_{n-1} £ x_n = b donde D x_i indica la amplitud o longitud del i-ésimo subintervalo. Si t_i es cualquier punto del i-ésimo subintervalo la suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, x_{i-1} l £ t_i £ x_i se *llama suma de Riemann de f* asociada a la partición .

Si bien la integral definida había sido definida y usada con mucha anterioridad a la época de Riemann él generalizó el concepto para poder incluir una clase de funciones más amplia. En la definición de una suma de Riemann, la única restricción sobre la función f es que esté definida en el intervalo [a, b]. (antes suponíamos que f era no negativa debido a que estábamos tratando con el área bajo una curva).

Ejemplo: Halle $\int_{-2}^{1} x^3 dx$



Como f(x) = x^3 es continua en el intervalo [-2, 1] sabemos que es integrable.

Dividimos el intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$ y para el cálculo de la integral consideramos el extremo derecho de cada subintervalo

t_i = $-2+\frac{3i}{n}$.

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{3i}{n}\right)^3\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-8+\frac{36i}{n}-\frac{54i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3}\right)$$

Para el desarrollo de la sumatoria tenemos en cuenta las propiedades siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[-8n + \frac{36}{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\left[-24 + \frac{54}{n}(n+1) - \frac{27}{n^2}(2n^2+3n+1) + \frac{81}{4n^2}(n^2+2n+1)\right]$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\left[-24 + 54 + \frac{54}{n} - 54 - \frac{81}{n} - \frac{27}{n^2} + \frac{81}{4} + \frac{81}{2n} + \frac{81}{4n^2}\right] = -24 + \frac{81}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = -\frac{15}{4}$$

Observación: Esta integral definida es negativa, no representa el área graficada. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o nulas.

4.2. El Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\int F'(x)\, dx = f(x)$$

El **teorema fundamental del cálculo** nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original.

El teorema fundamental del cálculo aclara la relación entre las derivadas y las integrales. La integración realizada en una función puede revertirse por la diferenciación.

Ejemplo:

Hallar la derivada de

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

1. Notamos que $t = x$, por lo que su diferencial $dt = dx$

2. Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

1. Primero cambiamos los límites de integración, ello produce que la integral cambie de signo

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

2. Notamos que $t = x$, por lo que su diferencial $dt = dx$

3. Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

1. Notamos que $t = x^2$, por lo que su diferencial $dt = 2x\,dx$

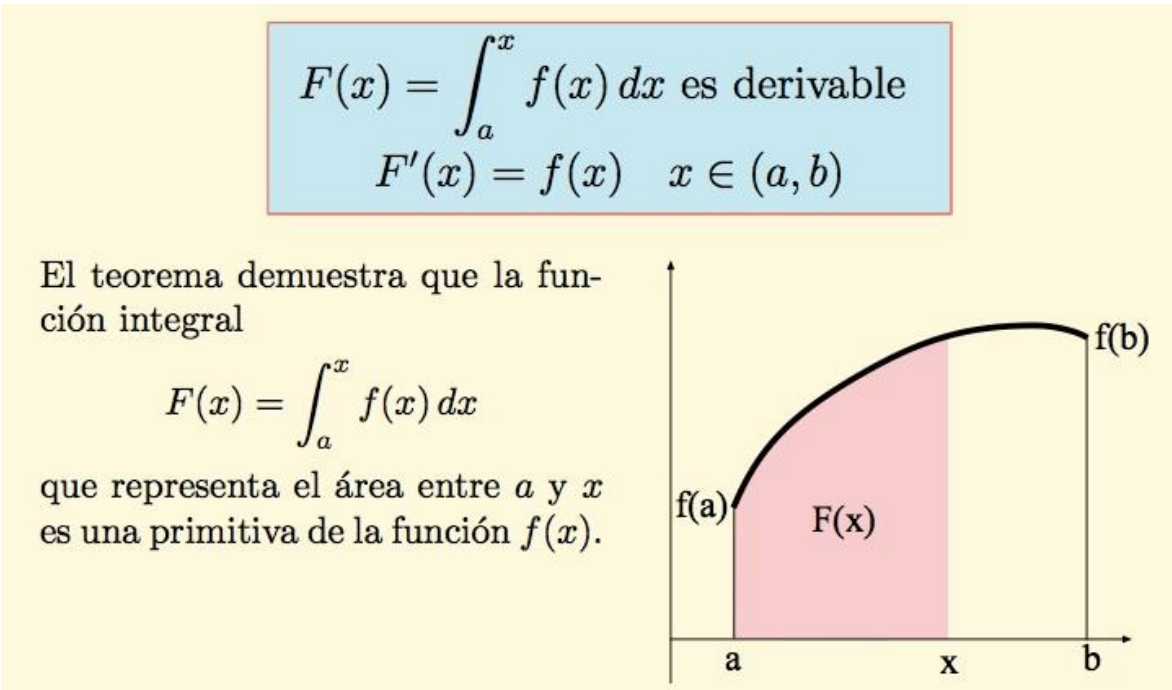
2. Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$F'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$$

El teorema fundamental del cálculo nació para intentar explicar que las derivadas e integrales son procesos mutuamente inversos, con esto se comprende que, si resolvemos una integral y derivamos el resultado, obtendríamos nuevamente la integral original.

El teorema intenta explicarnos que toda función continua posee una anti derivada, además nos muestra cómo construir una a partir de una integral indefinida. Incluso funciones no diferenciables con esquinas, tales como el valor absoluto tienen una anti derivada. Muchas veces el problema es cómo encontrar una anti derivada de una función, es decir, dada una función f(x), encontrar una función F(x) tal que F'(x) = f(x).

Para fines prácticos, el teorema fundamental del cálculo también puede ser utilizado para resolver integrales definidas, sin tener que calcular previamente los límites de las sumas de Riemann.



4.3. Cálculo de integrales definidas por método directo.

Si la variable a integrar es x, las principales fórmulas de integración son:

Algebraicas

$$\int dx = x + C$$

$$\int c\,dx = cx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Logarítmicas

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Exponenciales

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\,dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \csc^2 x\,dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsen}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

Las **integrales inmediatas** o **directas** son las integrales que no requieren aplicar ningún método de integración porque son muy sencillas. Por ejemplo, la integral de *2x* es $x^2 + C$, donde C es la constante de integración.

A veces, el integrando es una función multiplicada por su derivada. En este caso, la integral es la propia función:

$$\int f(x)\, f'(x)dx = f(x) + C$$

No olvidéis escribir siempre la constante de integración *C*.

Integral I

Integral de la potencia *x* a la quinta:

$$\int x^5\, dx$$

Aplicaremos la **propiedad** "una constante puede entrar o salir de la integral".

Sólo falta un 6 multiplicando para tener la derivada de x^6. Multiplicamos y dividimos por 6 la integral para introducir un 6 en la integral:

$$\int x^5\, dx = \frac{6}{6}\int x^5 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int 6x^5 dx = \frac{1}{6}\cdot x^6 + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Integral 2

Integral de una función racional:

$$\int \frac{2}{3x+2}dx$$

Normalmente, las integrales inmediatas de funciones racionales son la derivada de un logaritmo. Si no es así, tendremos que aplicar otros métodos para integrales de funciones racionales.

El integrando será la derivada de un logaritmo si conseguimos escribir el numerador como la derivada del denominador. Para ello, en esta integral, debemos cambiar el 2 por un 3:

$$\int \frac{2}{3x+2}dx = 2\int \frac{1}{3x+2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x+2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{3x+2} \cdot 3dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Integral 3

Integral de un cociente con una raíz cuadrada en el denominador:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$$

Vamos a escribir la raíz cuadrada en forma de potencia. De este modo, aplicando las propiedades de las potencias, el integrando será muy simple (una potencia).

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{2-1/2} dx = \int x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{3/2 + 1} \int (3/2 + 1) x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{5}{2} x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} =$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

Ejercicios de integración

1. Tenemos que integrar un monomio del estilo x^n así que usamos la fórmula

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De modo que

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C$$

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$$

Ejercicio 2. $\int 7x^3 dx$

Tenemos que integrar un monomio del estilo x^n así que usamos la fórmula

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De modo que

$$\int 7x^3 dx = 7\int x^3 dx = \frac{7x^{3+1}}{3+1} + C$$

$$\int 7x^3 dx = \frac{7x^4}{4} + C$$

Ejercicio 3. $\int x^{2/3} dx$

Tenemos que integrar un monomio del estilo x^n así que usamos la fórmula. Notemos que el exponente es fraccionario, pero eso no tiene nada de particular, pues la misma fórmula funciona

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De modo que

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} + C$$

Desarrollamos la suma y simplificamos

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

Generalmente no se muestran los resultados con exponente fraccionario sino con la raíz que corresponde usando la fórmula

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

La aplicamos

$$\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$$

Ejercicio 4. $\int \frac{3}{x^4}dx$

Antes de aplicar alguna de las fórmulas que vimos, debemos convertir la expresión usando que

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Entonces

$$\int \frac{3}{x^4}dx = \int 3x^{-4}dx$$

Y así podemos usar la fórmula para integrar monomios x^n

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De modo que

$$\int \frac{3}{x^4}dx = \int 3x^{-4}dx = \frac{3x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{3x^{-3}}{-3} + C$$

Simplificamos y nos deshacemos del exponente negativo usando la fórmula que usamos al principio (ya que al igual que los exponentes fraccionarios, es preferible mostrar expresiones equivalentes, pero con exponente entero positivo).

$$\int \frac{3}{x^4}dx = -x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$$

Ejercicio 5. $\int \sqrt[3]{x}dx$

Antes de aplicar alguna de las fórmulas que vimos, debemos convertir la expresión usando que

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Entonces

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx$$

Como llegamos a un monomio usamos la fórmula

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De tal modo que

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$$

Como último paso simplificamos y nos deshacemos del exponente fraccionario usando una raíz

$$\int \sqrt[3]{x}dx \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$$

Ejercicio 6. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

Antes de aplicar alguna de las fórmulas que vimos, debemos convertir la expresión usando que

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Así que

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} dx$$

Sin embargo, la variable está en el denominador. Usando que

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{\frac{-1}{4}} dx$$

Y ahora sí podemos usar la fórmula para integrar monomios

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De modo que

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \int x^{\frac{-1}{4}}dx = \frac{x^{\frac{-1}{4}+1}}{\frac{-1}{4}+1} + C = \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$$

Ejercicio 7. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Antes de aplicar alguna de las fórmulas que vimos, debemos convertir la expresión usando que

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Así que

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$$

Sin embargo, la variable está en el denominador. Con la fórmula

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{\frac{-2}{3}}dx$$

Y ahora sí podemos usar la fórmula para integrar monomios

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

De modo que

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{\frac{-2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

Ejercicio 8. $\int 4x^2 - \frac{e}{2} - \frac{1}{1+x^2} + \cos x dx$

Tenemos expresiones de varios tipos. Debemos recordar que la integral de una suma es la suma de las integrales, esto quiere decir que podemos aplicar la formula correspondiente a cada término y al final sumarlo

$$\int 4x^2 - \frac{e^x}{2} - \frac{1}{1+x^2} + \cos x dx = \frac{4x^{2+1}}{2+1} - \frac{e^x}{2} - \arctan x + \operatorname{sen} x + C$$

Simplificamos donde sea necesario

$$\int 4x^2 - \frac{e^x}{2} - \frac{1}{1+x^2} + \cos x dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{e^x}{2} - \arctan x + \operatorname{sen} x + C$$

4.4. La integral indefinida.

La integral indefinida es el conjunto de las **infinitas primitivas** que puede tener una función.

Se representa por $\int f(x)dx$.

- Se lee : integral de f de x diferencial de x.
- $\int$ es el signo de integración.
- $f(x)$ es el integrando o función a integrar.
- dx es diferencial de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.
- C es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real.
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces: $\int f(x)dx = F(x) + C$

- Para comprobar que la primitiva de una función es correcta basta con derivar.

Propiedades de la integral indefinida

1 La **integral de una suma** de funciones es igual a la **suma de las integrales** de esas funciones.

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x) + \int g(x)dx$$

2 La **integral del producto de una constante** por una función es igual a la **constante por la integral** de la función.

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Ejercicios

$$\int x^5\, dx$$

Solución

Aplicaremos la **propiedad**: una constante puede entrar o salir de la integral.

Sólo falta un 6 mltiplicando en el integrando para tener la derivada de x^6.

$$\int x^5\, dx = \frac{6}{6}\int x^5 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int 6x^5 dx = \frac{1}{6} \cdot x^6 + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Integral 2

$$\int e^x dx$$

Solución

No tenemos que realizar ninguna operación para resolver esta integral porque e^x es la derivada de e^x. Sólo debemos acordarnos de escribir la constante de integración C.

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Integral 3

$$\int (3x^4 + x^2 + 2)dx$$

Solución

Aplicamos la **propiedad** de que la integral de la suma es la suma de las integrales. Así, podemos descomponer la integral como una suma de integrales más sencillas.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2)dx = \int 3x^4 dx + \int x^2 dx + \int 2dx$$

$$\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = 3 \cdot \frac{5}{5}\int x^4 dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{5}\int 5x^4 dx = \frac{3}{5} \cdot x^5$$

$$\int x^2 dx = \frac{3}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int 2dx = 2\int 1dx = 2x$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2)dx = \frac{3}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 2x + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

4.5. Métodos de integración para funciones algebraicas y trascendentes:
4.5.1. Método directo.

Funciones algebraicas

Ejercicio 1. *Calcula la siguiente integral:*

$$\int \left(2\,x + \frac{x^2}{2} + 4\,x^3 \right)\, dx$$

Empezamos aplicando la regla (i) de integración:

$$\int \left(2\,x + \frac{x^2}{2} + 4\,x^3 \right)\, dx = \int 2\,x\, dx + \int \frac{x^2}{2}\, dx + \int 4\,x^3\, dx$$

Ahora aplicamos la regla (ii) en cada integral:

$$\int 2\,x\,dx + \int \frac{x^2}{2}\,dx + \int 4\,x^3\,dx = 2\int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx$$

Aplicamos la regla de integración (iv) y después simplificamos:

$$\begin{aligned} 2\int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^4}{4}\right) + C \\ &= x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 + C \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int \left(2\,x + \frac{x^2}{2} + 4\,x^3\right)\,dx = x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 + C$$

Ejercicio 2. *Calcula la integral:*

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}\,dx$$

Para calcular esta integral indefinida empezamos aplicando la regla (i):

$$\int \frac{x^4}{x}\,dx + \int \frac{x^2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

Al simplificar los integrando obtenemos:

$$\int x^3\,dx + \int x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

Ahora podemos aplicar la regla (iv):

$$\int x^3\,dx + \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

Entonces,

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

Ejercicio 3. *Calcula la integral:*

$$\int \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,dx$$

Empezamos aplicando la regla (i):

$$\int \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,dx = \int dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx$$

Ahora vamos a expresar cada integral con un exponente negativo, salvo la segunda, que ya sabemos cómo integrar:

$$\int dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx - \int x^{-3}\,dx$$

Ahora podemos aplicar las reglas de integración (iii), (iv) y (v):

$$\begin{aligned}\int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}\,dx - \int x^{-3}\,dx &= x+\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + C \\ &= x + \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{-2\,x^2} + C\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,dx = x + \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{-2\,x^2} + C$$

Ejercicio 4: *Calcula la integral:*

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx$$

El integrando no aparece en alguna de las reglas conocidas por nosotros aún. Pero podemos hacer la siguiente transformación: Definimos: $v = x^4 - 1$. Entonces, $dv = 4\,x^3\,dx \quad \Rightarrow \quad x^3\,dx = \frac{dv}{4}$. Esto nos permite reescribir la integral indefinida como:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx = \int \sqrt{x^4-1}\,\left(x^3\,dx\right) = \int \sqrt{v}\left(\frac{dv}{4}\right) = \frac{1}{4}\int \sqrt{v}\,dv = \frac{1}{4}\int v^{1/2}\,dv$$

Ahora podemos aplicar la regla (iv):

$$\frac{1}{4}\int v^{1/2}\,dv = \frac{1}{4}\frac{v^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\,v^{3/2}}{3} + C = \frac{v^{3/2}}{6} + C$$

Regresando todo en términos de x, obtenemos:

$$\int x^3\sqrt{x^4-1}\,dx = \frac{\left(x^4-1\right)^{3/2}}{6} + C$$

Ejercicio 5. *Calcula la siguiente integral:*

$$\int\left(2\,x + \frac{x^2}{2} + 4\,x^3\right)\,dx$$

Empezamos aplicando la regla (i) de integración:

$$\int\left(2\,x + \frac{x^2}{2} + 4\,x^3\right)\,dx = \int 2\,x\,dx + \int\frac{x^2}{2}\,dx + \int 4\,x^3\,dx$$

Ahora aplicamos la regla (ii) en cada integral:

$$\int 2\,x\,dx + \int\frac{x^2}{2}\,dx + \int 4\,x^3\,dx = 2\int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx$$

Aplicamos la regla de integración (iv) y después simplificamos:

$$\begin{aligned} 2\int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx &= 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^4}{4}\right) + C \\ &= x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 + C \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int\left(2\,x + \frac{x^2}{2} + 4\,x^3\right)\,dx = x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 + C$$

Ejercicio 6. *Calcula la integral:*

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}\, dx$$

Para calcular esta integral indefinida empezamos aplicando la regla (i):

$$\int \frac{x^4}{x}\, dx + \int \frac{x^2}{x}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$$

Al simplificar los integrandos obtenemos:

$$\int x^3\, dx + \int x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$$

Ahora podemos aplicar la regla (iv):

$$\int x^3\, dx + \int x\, dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

Entonces,

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x}\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

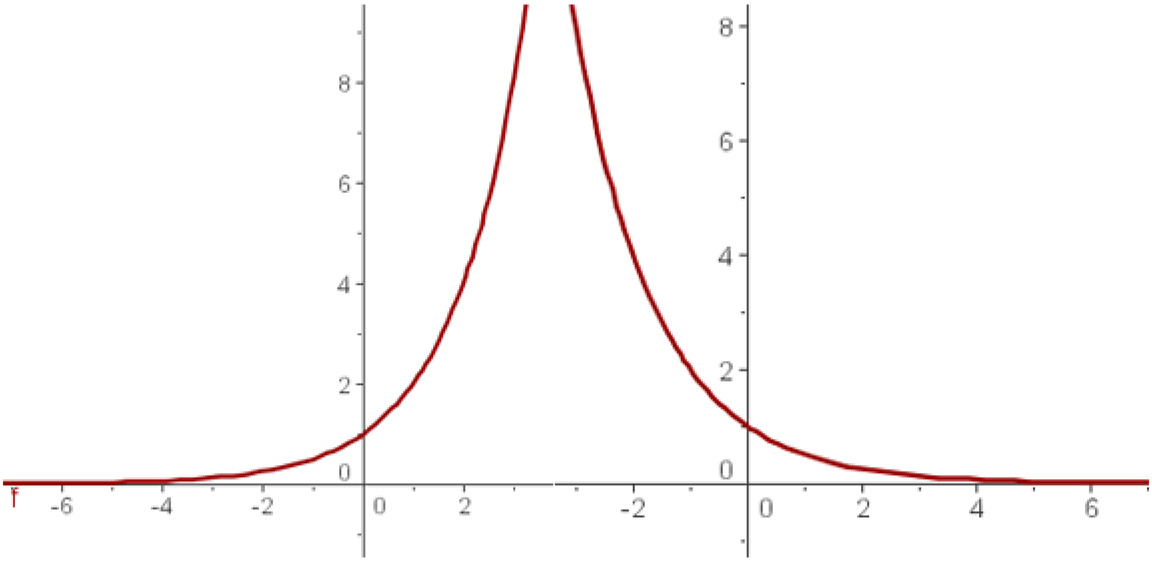
Funciones trascendentes

En las **funciones trascendentes** la variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

Función exponencial

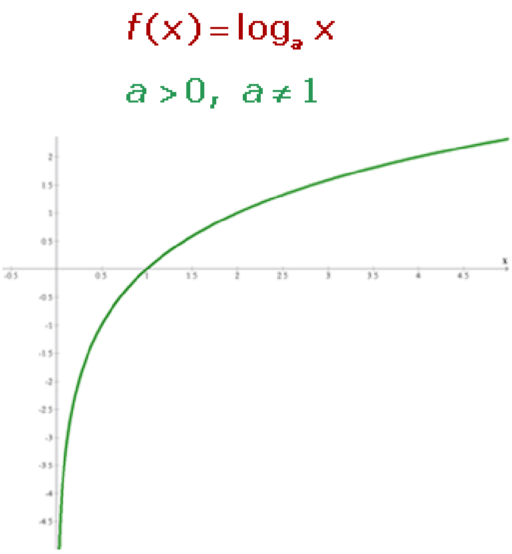
$$f(x) = a^x$$

Sea **a** un número real positivo. La función que a cada número real **x** le hace corresponder la potencia $\mathbf{a^x}$ se llama *función exponencial de base a y exponente x*.



Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

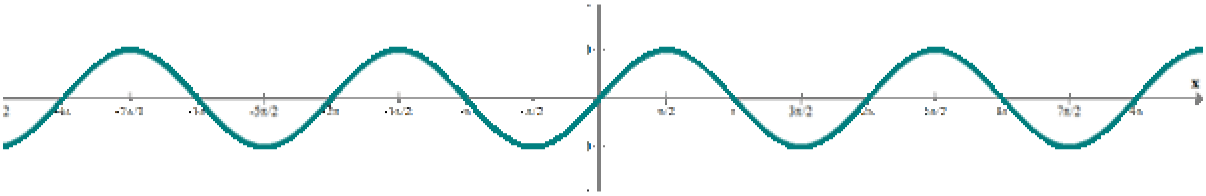


Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas asocian a cada número real, x, el valor de la razón trigonométrica del ángulo cuya medida en radianes es x.

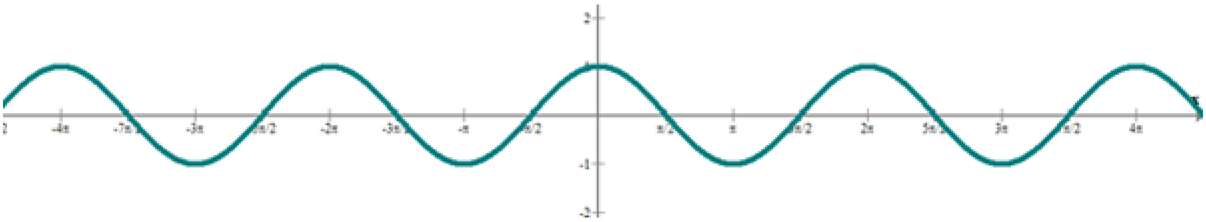
Función seno

f(x) = sen x



Función coseno

f(x) = cosen x



4.5.2. Cambio de variable.

El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la derivada de la función compuesta.

$$\int f'(u) \cdot u' \, dx = F(u) + C$$

Para cambiar de variable identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable t, de modo que se obtenga una integral más sencilla.

Pasos para integrar por cambio de variable

$$\int f'(u) \cdot u' \, dx$$

1. Se hace el cambio de variable y se diferencia en los dos términos:

$$t = u$$

$$dt = u' \, dx$$

2. Se sustituye la diferencial en la integral:

$$\int f'(t)\cdot u'dx = \int f'(t)\,dt$$

3. Si la integral resultante es más sencilla, integramos:

$$\int f'(t)\,dt = f(t) + \mathrm{C}$$

4. Se vuelve a la variable inicial:

$$f(t) + \mathrm{C} = f(u) + \mathrm{C}$$

Ejemplo: **Resuelve empleando integración por cambio de variable, la integral**

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx$$

1. Realizamos el cambio de variable

$$\sqrt[3]{1+2x} = t \quad \Longrightarrow \quad 1+2x = t^3 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{t^3-1}{2}$$

Calculamos la diferencial

$$2\,dx = 3t^2\,dt \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{3t^2\,dt}{2}$$

2. Sustituimos en la integral y simplificamos el integrando

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx = \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2}dt$$

$$= \frac{3}{2}\int \left(\frac{t^6-2t^3+1}{4}\right) \cdot t\, dt$$

$$= \frac{3}{8}\int (t^7-2t^4+t)\, dt$$

3. Resolvemos la nueva integral

$$\frac{3}{8}\int (t^7-2t^4+t)\, dt = \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+\mathrm{C}$$

4. Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt[3]{1+2x}$

$$\frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+\mathrm{C} = \frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 - \frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 + \mathrm{C}$$

Así la solución buscada es

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx = \frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 - \frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 + \mathrm{C}$$

4.5.3. Por partes.

La fórmula de la integración por partes es

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Observemos que tenemos que derivar u e integrar v', por lo que será conveniente que la integral de v' sea sencilla.

En general, las funciones polinómicas, logarítmicas y arcotangente se eligen como u. Mientras que las funciones exponenciales, seno y coseno se eligen como v'.

Deducción de la fórmula

Supongamos que tenemos las funciones $u(x)$ y $v(x)$. Entonces su derivada está dada por:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Si integramos ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) &= \int [u(x) \cdot v(x)]' dx \\ &= \int \left(u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\right) dx \\ &= \int u'(x) v(x) dx + \int u(x) v'(x) dx \end{aligned}$$

Luego, si pasamos $\int u'(x)v(x)dx$ al lado izquierdo, obtenemos

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

que es la fórmula que buscábamos

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. $\int x \sin x \, dx$

Tenemos un producto entre la función $\sin x$ y x. Como se mencionó anteriormente, en este tipo de casos se elige $u(x) = x$ y $v'(x) = \sin x$.

Derivamos $u(x)$:

$$u(x) = x \quad \longrightarrow \quad u'(x) = 1$$

Integramos $v'(x)$:

$$v'(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad v(x) = -\cos x$$

De manera que la integral nos queda

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x - \int -\cos x \cdot 1 dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Así, $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$

Ejercicio 2. $\int x e^x dx$

Tenemos un producto entre la función e^x y x. En este tipo de casos se elige $u(x) = x$ y $v'(x) = e^x$.

Derivamos $u(x)$:

$$u(x) = x \quad \longrightarrow \quad u'(x) = 1$$

Integramos $v'(x)$:

$$v'(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad v(x) = e^x$$

De manera que la integral nos queda

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x \cdot 1dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

Así, $\int xe^x dx = (x-1)e^x + C$

Ejercicio 3. $\int x^2 \ln x dx$

Tenemos un producto entre la función $\ln x$ y x^2. En general, ambas funciones se suelen tomar como $u(x)$; sin embargo, en este tipo de casos el logaritmo toma preferencia y se elige $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = x^2$.

Derivamos $u(x)$ (este es el motivo por el que elegimos al logaritmo):

$$u(x) = \ln x \quad \longrightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

Integramos $v'(x)$:

$$v'(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad v(x) = \frac{1}{3}x^3$$

De manera que la integral nos queda

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C\end{aligned}$$

Así, $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$

Ejercicio 4. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

Tenemos un producto entre la función $\ln x$ y $1/x^3$. De nuevo, en este tipo de casos se elige $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = 1/x^3$ (la función logaritmo siempre se elige como $u(x)$).

Derivamos $u(x)$:

$$u(x) = \ln x \quad \longrightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

Integramos $v'(x)$:

$$v'(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \quad \longrightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

De manera que la integral nos queda

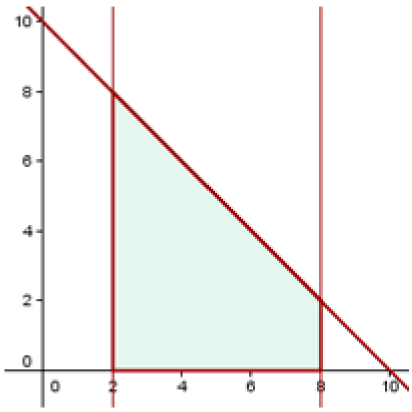
$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3}$$
$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} + C$$
$$= -\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2x^2} + C$$

Así, $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2x^2} + C$

4.5.4. Problemas de aplicación: llenado de una presa.

Ejercicio 1. Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 8$.

a) Representamos gráficamente las rectas y el eje indicados; también ubicamos el área solicitada



b) Los extremos del área solicitada están dados por las rectas $x = 2$ y $x = 8$, por ello representamos la recta en función de la variable x

$y = 10 - x$

c) El área solicitada viene dada por

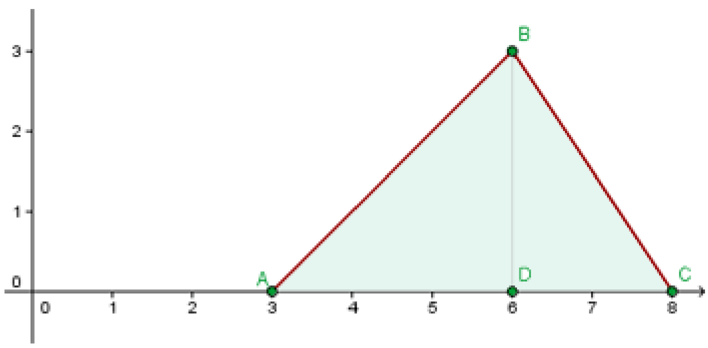
$$A = \int_{2}^{8} y\, dx$$

d) Sustituimos y en función de x y resolvemos la integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_{2}^{8} (10 - x)\; dx \\ &= \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_2^8 \\ &= \left[10(8) - \frac{8^2}{2}\right] - \left[10(2) - \frac{2^2}{2}\right] \\ &= 30\; u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Calcular el área del triángulo de vértices $A(3,0), B(6,3), C(8,0)$.

a) Representamos gráficamente los puntos dados y ubicamos el área solicitada



b) Calculamos las pendientes de las rectas AB y BC y con ello las respectivas ecuaciones de las rectas

$$m_{AB} = \frac{3-0}{6-3} = 1 \qquad \Longrightarrow \quad y_{AB} = x - 3$$

$$m_{BC} = \frac{0-3}{8-6} = -\frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad y_{BC} = -\frac{3}{2}(x-8)$$

c) El área solicitada viene dada en dos partes, una para cada recta

$$A = \int_3^6 y_{AB}\, dx + \int_6^8 y_{BC}\, dx$$

d) Sustituimos las rectas en función de x y resolvemos la integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_3^6 (x-3)\ dx + \int_6^8 \left(-\frac{3}{2}\right)(x-8)\ dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^6 - \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 8x\right]_6^8 \\ &= \frac{15}{2}\ u^2 \end{aligned}$$

Referencias bibliográficas

Anton, H. (2009). *Cálculo: trascendentes tempranas*. (2ª. Ed.). México. Limusa.

Ayres, F. (2010). *Cálculo*. (5ª. Ed.). México. McGraw-Hill.

Larson, R. (2010). *Cálculo combo*. (9ª. Ed.). México. McGraw Hill.

Larson, R. (2009). *Matemáticas I: Cálculo Diferencial*. México. McGraw-Hill.

Leithold, L. (2009). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México. Oxford, University Press.

Mera. (2013). *Cálculo diferencial* e *integral*. México. McGraw-Hill.

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. (7ª. Ed.). México. Cengage Learning.

Thomas, G. B. (2012). *Cálculo de una variable con código de acceso MyMathlab*. (12ª. Ed.). México. Pearson Educación.

Zill, D. G., Wright, W.S. (2011). *Matemáticas I: Cálculo Diferencial*. México. McGraw Hill.

Zill, D. Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. (4a Ed.) México. Mc Graw Hill.

Recursos en Internet:

Seeburger, Paul (2008). *Calculus I Derivative Grapher Applet*. Consultado en 02,11,2014 en http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/JavaCode/derivativeGraph2.htm

Seeburger, Paul (2007). *Calculus I Derivative Demostration Applet*. Consultado en 02,11,2014 en http://www.monroecc.edu/wusers/pseeburger/javacode/derivativedemo.htm.

Seeburger, Paul (2007). *Finding the Minimum Surface Area of a Can with Fixed Volume*. Consultado en 02,11,2014 en http://higheredbcs.wiley.com/legacy/college/salas/0470073330/calc_applets/figure4_5_3/figure4_5_3.htm