ANTOLOGIA

CÁLCULO VECTORIAL

INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

TERCER CUATRIMESTRE

MAYO-AGOSTO

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Objetivo de la materia: Dominar el lenguaje del Cálculo Vectorial, tanto diferencial como integral. Aplicar las propiedades de los entes del Cálculo Vectorial, como herramientas para poder resolver los problemas de las áreas de sus materias profesionales.

UNIDAD I: ALGEBRA DE VECTORES
1.1.- Definición de un vector en plano y en el espacio e interpretación geométrica.
1.2.- La geometría de las operaciones vectoriales.
1.3.- Operaciones con vectores y sus propiedades.
1.4.- Descomposición vectorial en 3 dimensiones.
1.5.- Ecuaciones de rectas y planos.
1.6.- Aplicaciones físicas y geométricas.
1.7.- Curvas en plano y ecuaciones paramétricas.
1.8.- Ecuación paramétrica de la línea recta.
1.9.- Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica.
1.10.- Derivada de una función dada paramétricamente.
1.11.- Coordenadas polares.
1.12.- Graficación de curvas planas en coordenadas polares.

UNIDAD II: FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

2.1.- Definición de función vectorial de una variable real.
2.2.- Límites y continuidad de una función vectorial.
2.3.- Graficación de curvas en función del parámetro t.
2.4.- Derivación de funciones vectoriales.
2.5.- Propiedad de función de vectores.
2.6.- Integración de funciones vectoriales.
2.7.- Longitud de arco.
2.8.- Vector tangente.
2.9.- Vector normal y binormal.
2.10.- Curvatura.
2.11.- Aplicaciones.

UNIDAD III: FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES
3.1.- Definición de una función de varias variables.
3.2.- Gráfica de una función de varias variables.
3.3.- Curvas y superficies de nivel.
3.4.- Derivadas parciales.
3-5.- Funciones de varias variables.
3.6.- Interpretación geométrica.
3.7.- Derivada direccional.
3.8.- Derivadas parciales de orden superior.
3.9.- Incrementos y diferenciales.
3.10.- Regla de la cadena.
3.11.- Derivación parcial implícita.
3.12.- Gradiente.
3.13.- Campos vectoriales.
3.14.- Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física.
3.15.- Valores extremos de funciones de varias variables.

UNIDAD IV: INTEGRACIÓN
4.1.- Introducción.
4.2.- Integral de línea.
4.3.- Cálculo de áreas.
4.4.- Integrales iteradas.
4.5.- Integrales dobles en coordenadas rectangulares.
4.6.- Integrales dobles en coordenadas polares.
4.7.- Integral triple.
4.8.- Aplicaciones a áreas y solución de problema.
4.9.- Integral triple en coordenadas polares.

4.10.- Coordenadas cilíndricas y esféricas.
4.11.- Aplicación de la integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

INDICE

UNIDAD I ALGEBRA DE VECTORES 10
1.1.- Definición de un vector en plano y en el espacio e interpretación geométrica. 10
1.2.- La geometría de las operaciones vectoriales. 18
1.3.- Operaciones con vectores y sus propiedades. 19
1.4.- Descomposición vectorial en 3 dimensiones. 20
1.5.- Ecuaciones de rectas y planos. 21
1.6.- Aplicaciones físicas y geométricas. 22
1.7.- Curvas en plano y ecuaciones paramétricas. 23
1.8.- Ecuación paramétrica de la línea recta. 24
1.9.- Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica. 25
1.10.- Derivada de una función dada paramétricamente. 26
1.11.- Coordenadas polares. 26
1.12.- Graficación de curvas planas en coordenadas polares. 26
UNIDAD II FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL 28
2.1.- Definición de función vectorial de una variable real. 28
2.2.- Límites y continuidad de una función vectorial. 31
2.3.- Graficación de curvas en función del parámetro t. 33
2.4.- Derivación de funciones vectoriales. 34
2.5.- Propiedad de función de vectores. 41

2.6.- Integración de funciones vectoriales. 49
2.7.- Longitud de arco. 55
2.8.- Vector tangente. 64
2.9.- Vector normal y binormal. 71
2.10.- Curvatura. 77
2.11.- Aplicaciones. 81
UNIDAD III FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES 89
3.1.- Definición de una función de varias variables. 90
3.2.- Gráfica de una función de varias variables. 90
3.3.- Curvas y superficies de nivel. 90
3.4.- Derivadas parciales de funciones de varias variables y su interpretación geométrica. 91
3.5.-funciones de varias variables. 92
3.6.- Interpretación geométrica. 101
3.7.- Derivada direccional. 105
3.8.- Derivadas parciales de orden superior. 105
3.9.- Incrementos y diferenciales. 106
3.10.- Regla de la cadena 106
3.11.- Derivación parcial implícita. 106
3.12.- Gradiente. 107
3.13.- Campos vectoriales. 107
3.14.- Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física. 108
3.15.- Valores extremos de funciones de varias variables. 108
UNIDAD IV INTEGRACIÓN 108
4.1.- Introducción. 108
4.2.- Integral de línea. 109
4.3.- Cálculo de áreas. 109
4.4.- Integrales iteradas. 109
4.5.- Integral doble en coordenadas rectangulares. 110

4.6.- Integral doble en coordenadas polares. 110
4.7.- Integral triple. 110
4.8.- Aplicaciones a áreas y solución de problema. 111
4.9.- Integral triple en coordenadas polares. 112
4.10.- Coordenadas cilíndricas y esféricas. 112
4.11.- Aplicación de la integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. 113
BIBLIOGRAFÍA 113

UNIDAD I ALGEBRA DE VECTORES

1.1.- Definición de un vector en plano y en el espacio e interpretación geométrica.

Un vector es todo segmento de recta dirigido en el espacio. Cada vector posee unas características que son:

Definición: la dirección de un vector u=(a,b) es el ángulo medio en radianes que forma el vector con el eje positivo de las x.

El ángulo se puede medir haciendo tanq=b/a; pero es importante localizar el vector puesto que q=tan-1b/a da valores entre -p/2 y p/2 mientras que el ángulo buscado estará entre 0 y 2p

En física, se llama vector a un segmento de recta en el espacio que parte de un punto hacia otro, es decir, que tiene dirección y sentido. Los vectores en física tienen por función expresar las llamadas magnitudes vectoriales.

El término vector proviene del latín *vector*, *vectoris*, cuyo significado es 'el que conduce', o 'el que transporta'.

Los vectores se representan gráficamente con una flecha. Asimismo, cuando deben ser expresados en una fórmula, se representan con una letra coronada por una flecha.

Magnitudes vectoriales

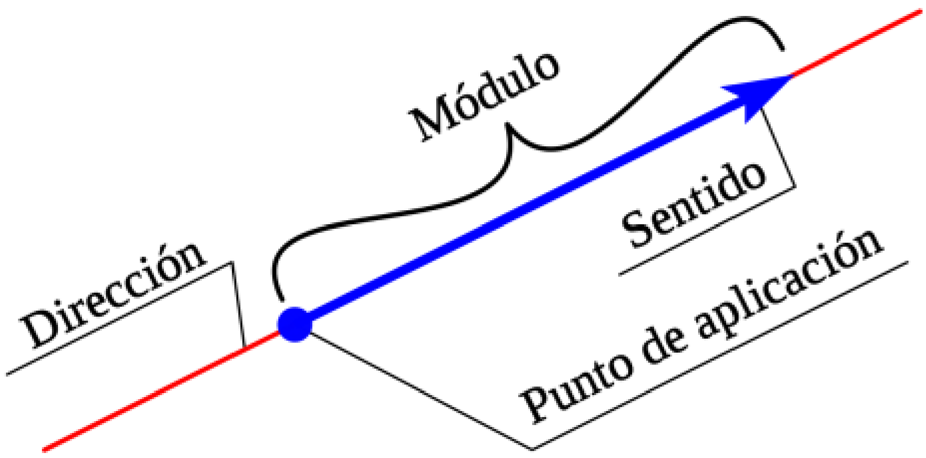
Las magnitudes vectoriales son aquellas magnitudes que, además de representarse con un número y una unidad, requieren también ser expresadas en el espacio con una dirección y un sentido, es decir, con un vector. Esto las distingue de las magnitudes escalares, las cuales solo requieren un número y una unidad. Son **ejemplos** de magnitudes vectoriales los siguientes:

- velocidad;
- desplazamiento;
- aceleración;
- impulso;
- fuerza;
- peso;
- potencia;
- campo eléctrico;
- campo magnético;
- campo gravitatorio;
- energía térmica;

- torque;
- *momentum*.

Características de los vectores

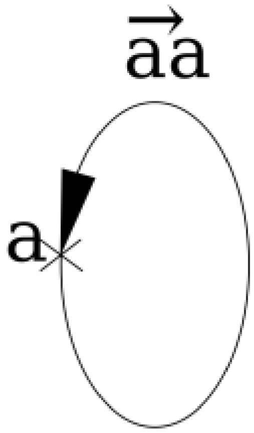
Los componentes de los vectores que definen sus características son los siguientes:



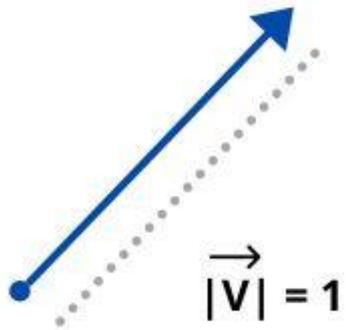
- **Módulo o magnitud:** se refiere a la longitud o amplitud del vector o segmento de recta.
- **Dirección:** se refiere a la inclinación que posee el vector con respecto a un eje horizontal imaginario, con el cual forma un ángulo.
- **Sentido:** se refiere a la orientación del vector, indicado por la cabeza de la flecha del vector.

Tipos de vectores

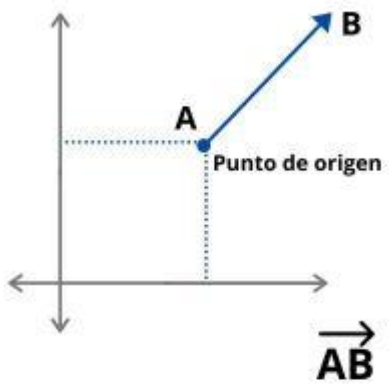
- **Vectores nulos:** son aquellos donde origen y extremo coinciden y, por lo tanto, el módulo o magnitud es igual a 0. Por ejemplo:



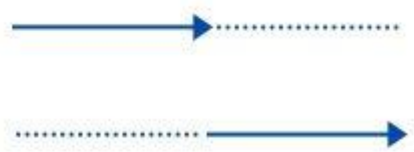
- **Vectores unitarios:** son aquellos cuyo módulo es igual a 1. Por ejemplo:



- **Vectores fijos:** son aquellos que expresan un punto de origen además de un extremo, el cual está determinado en un punto fijo del espacio. Suelen usarse, por ejemplo, para expresar la fuerza aplicada sobre dicho punto. Para representarlos, se dice que el punto de origen es A y el extremo es B. Por ejemplo:

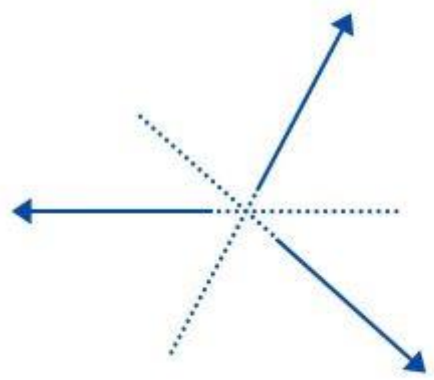


- **Vectores paralelos:** están situados en rectas paralelas, pero poseen un mismo sentido o contrario. Por ejemplo:

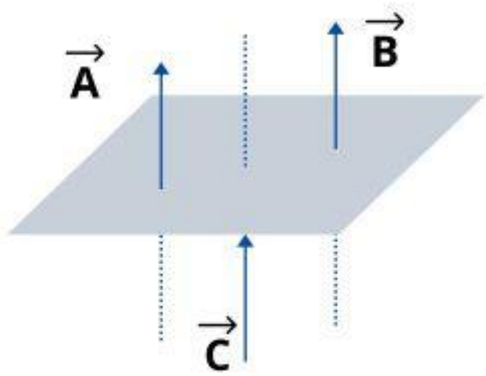


- **Vectores opuestos:** se caracterizan por tener la misma dirección y magnitud, pero su sentido es opuesto. Por ejemplo:

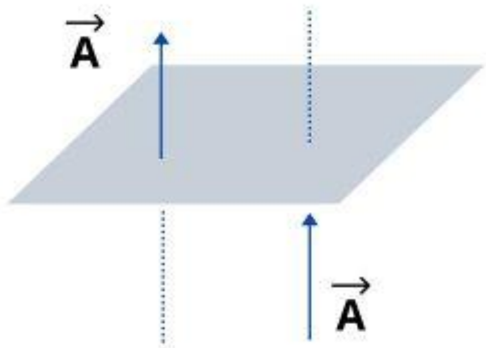
- **Vectores concurrentes o angulares:** son aquellos cuyas líneas de acción pasan por el mismo punto, es decir, se intersecan. Por ejemplo:



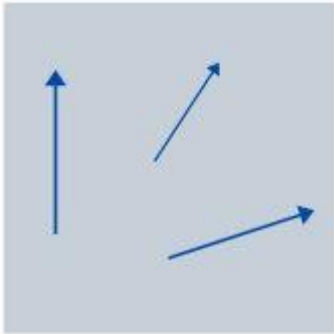
- **Vectores libres:** son aquellos vectores cuyo punto de aplicación es indeterminado y, por lo tanto, libre. Por ejemplo:



- **Vectores equipolentes o iguales:** son aquellos vectores con igual módulo, dirección y sentido. Por ejemplo:

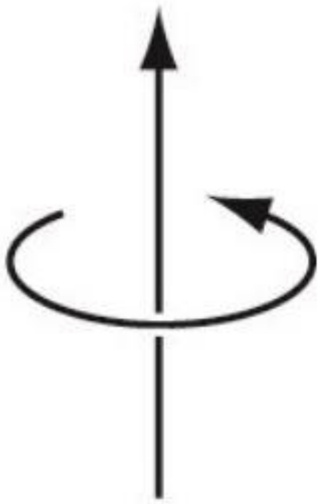


- **Vectores coplanarios:** son aquellos que están en un mismo plano. Por ejemplo:



- **Vectores colineales:** sus líneas de acción se encuentran sobre una misma recta. Por ejemplo:

- **Vectores axiales o pseudovectores:** son los que están ligados a efectos de giro. La dirección señala el eje de rotación del segmento. Por ejemplo:



Vector en matemática

En matemática, en el área de cálculo vectorial, vector es un segmento de recta orientado, que depende de un sistema de coordenadas, en el cual se puede llevar un importante número de operaciones, como suma, resta, descomposición, ángulo entre dos vectores, etc.

1.2.- La geometría de las operaciones vectoriales.

Las operaciones que se pueden hacer con los vectores son: suma, resta, multiplicación y división escalar y el producto escalar y vectorial. La suma y la resta son operaciones que toman vectores y dan como un resultado otro vector. La multiplicación y división con escalares, toman un escalar y un vector y dan como resultado un vector. El producto escalar toma dos vectores y da un escalar. El producto vectorial toma 2 vectores y da otro vector. Usaremos los siguientes vectores "a" y "b" para explicar la geometría de las operaciones.

Suma y Resta

Para hacer una suma o resta existen 2 métodos: el del paralelogramo y el del triángulo. Método del Paralelogramo

Para el método del paralelogramo se juntan las 2 colas de los vectores y se completa el paralelogramo proyectando los vectores originales paralelos a ellos mismos. Después forma un nuevo vector de donde se juntan las colas de los vectores originales hasta donde se juntan las cabezas de sus proyecciones.

Método del Triangulo

El otro método es el del triángulo. Este es el método que generalmente uso ya que la mayoría de las veces es más rápido y fácil de ver que está pasando, y cuando se suman más de 2 vectores a la vez es más eficiente. Para hacerlo de este modo se toma cualquiera de los 2 vectores y la cola del segundo vector se acomoda en la cabeza del primer vector. No importa el orden ya que dan el mismo resultado.

Para la resta se hace lo mismo que la suma excepto que el vector que está siendo restado se invierte, de tal manera que la cabeza apunte donde antes era la cola.

Multiplicación y División escalar

La multiplicación y división escalar son cuando un vector se multiplica por un escalar. Si un vector es multiplicado por 2 lo que pasa es que la magnitud de ese vector se hace 2 veces tan grande como era antes. Si se multiplica por 1/2, es como si fuera dividido entre 2, y su magnitud se hace la mitad de lo que era originalmente. Si se multiplica por un numero negativo, se invierte el sentido y su magnitud es aumentada o disminuida dependiendo del número.

1.3.- Operaciones con vectores y sus propiedades.

La suma de vectores tiene las siguientes propiedades (en lo que sigue, "u", "v" y "w" son vectores y "t" y "s" son números:

Propiedad asociativa, (u + v) + w = u + (v + w)

Existencia de elemento neutro, que es el vector nulo (0,0,0),

Para cada vector u(x,y,z) existencia de su elemento opuesto -u(-x,-y,-z) Propiedad conmutativa, u + v = v + u

El producto de vectores por números (escalares) tiene las siguientes propiedades: Propiedad distributiva con respecto a la suma de vectores, t•(u + v) = t•u + t•v Propiedad distributiva con respecto a la suma de escalares (t + s)•u = t•u + s•u Propiedad asociativa mixta: t•(s•u) = (t•s)•u

El escalar "1" también es elemento neutro para este producto, 1•u = u

Puedes verificar cada una de ellas con ayuda de las escenas anteriores o sobre tus apuntes, pues no son difíciles.

Por cumplir estas ocho propiedades, el conjunto de vectores libres junto con las operaciones suma de vectores y producto de vectores por escalares forma la estructura de espacio vectorial de los vectores libres de R3.

1.4.- Descomposición vectorial en 3 dimensiones.

Un vector euclidiano (a veces llamado geométricas o del vector espacial, o - como aquí - simplemente un vector) es un objeto geométrico que tiene tanto una magnitud (o longitud) y dirección. Un vector euclidiano es frecuentemente representado por un segmento de recta con una dirección definida, o gráficamente como una flecha, la conexión de un punto inicial. A con un punto terminal B.

La magnitud del vector es la distancia entre los dos puntos y la dirección se refiere a la dirección de desplazamiento de una de B. Muchas operaciones algebraicas sobre números reales, tales como adición, sustracción, multiplicación, y la negación han análogos de cierre para los vectores, las operaciones que obedecen a la suma algebraica de las leyes conocidas de la conmutatividad, asociatividad y distributividad. Estas operaciones y las leyes asociadas calificar euclidiana vectores como unejemplo del concepto más generalizado de vectores se define simplemente como elementos de un espacio vectorial.

Los vectores juegan un papel importante en la física: la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento y las fuerzas que actúan sobre él son descritos por vectores. Muchas otras magnitudes físicas puede ser útil considerar como vectores. Aunque la mayoría de ellos no representan distancias (como la posición o el desplazamiento), su magnitud y dirección puede ser todavía representada por la longitud y la dirección de una flecha. La representación matemática de un vector físico depende del sistema de coordenadas utilizadas para describirlo. Otros como los objetos del vector que describen las magnitudes físicas y transformar de una manera similar por los cambios del sistema de coordenadas son pseudovectors y tensores.

El término vector también tiene generalizaciones a dimensiones superiores y un enfoque más formal con una aplicación más amplia.

1.5.- Ecuaciones de rectas y planos.

Para determinar un plano se necesitan un punto Po(xo,yo,zo) y un vector N→ (A,B,C) normal al plano. La ecuación del plano viene entonces dada por la relación:

A(x - xo) + B(y - yo) + C(z - zo) = 0 ⇒ A.x + B.y + C.z + D = 0 (1)

Donde D = -A.xo - B.yo - C.zo

Se pueden considerar varios casos particulares según que uno o dos de los coeficientes de la ecuación

(1) sean nulos.

a) Plano paralelo al eje OX. Se tiene A = 0 y la ecuación toma la forma: B.y + C.z + D = 0,

Siendo el vector director normal al plano de la forma: N→ =B·jˆ+C·kˆ

b) Plano paralelo al eje OY. Se tiene B = 0 y la ecuación general toma la forma: A.x + C.z + D = 0, Siendo el vector director normal al plano de la forma: N→ =A·iˆ+C·kˆ

c) Plano paralelo al eje OZ. Se tiene C = 0 y la ecuación general toma la forma: A.x + B.y + D = 0, Siendo el vector director normal al plano de la forma: N→ =A·iˆ+B·jˆ

1.6.- Aplicaciones físicas y geométricas.

APLICACIÓN: ANGULO ENTRE DOS VECTORES

Producto Escalar.

El producto escalar de dos vectores es por definición un escalar. a*b=|a|*b

propiedades:

a*b=b*a p*(q+r)=p*q+p*r

Podemos usar ahora el producto escalar para encontrar el angulo de los vestores a y b: a*b=|a|*b

-El coseno dara siempre entre 0 y 1

-El producto escalar varia como máximo entre el |a|*b y 0

-El coseno nos dice si los vectores son paralelos o perpendiculares Si coseno de a y b = 0 –vectores perpendiculares

Si coseno de a y b < >0 –vectores perpendiculares

En este caso, a*b=0, podemos sacar como conlcuison que a=0 o b=0, o bien que a y b son mutuamente perpendiculares.

MODULO DE UN VECTOR

Un vector no solo nos da una dirección y un sentido, sino también un amagnitud se le denomina modulo.

Gráficamente: es la distancia que existe entre su origen y su extremo, y se representa por: a-a.

Coordenadas cartesianas: en muchas ocasiones es conveniente tomar las componentes sobre tres direcciones mutuamente perpendiculares OX, OY, y OZ que forman un sistema cartesiano tridimensional.

APLICACION: COORDENADAS INTRINSECAS Y COSENOS DIRECTORES

Se debe hacer notar que la proyección de a en una dirección cualquiera (por ejemplo: a) es un escalar, mientras que su componente en la misma dirección (por ejemplo: A.x• i) es un vector.

Para un vector genérico a, los cosenos de los ángulos, y, que forma con los semiejes x, y, z, respectivamente, se denominan cosenos directores de a.

1.7.- Curvas en plano y ecuaciones paramétricas.

La primera forma de representar una curva plana es la siguiente. Supongamos que tenemos la curva en el plano wq. Se toma un segmento del eje e, que llamaremos [e,r] y, para cada valor de t en ese segmento le asociamos una coordenada y, u(i). Los puntos así formados se llaman curva en forma explícita o = p(a).

Este tipo de curvas tiene varias desventajas, siendo la más obvia que para cada valor de s existe solamente un punto de la curva sobre ese valor. Podemos imaginar una curva de este tipo como un "levantamiento" del segmento [d,f].

Newton basa su definición y cálculo de la curvatura de una curva plana en cartesianas en las siguientes afirmaciones:

- Un círculo tiene su radio.
- El "círculo más grande" que es el de mas radio

Platón define el centro de este círculo como el punto de intersección de las rectas normales a la curva en puntos de ella arbitrariamente próximos.

Normales a la curva en puntos de ella arbitrariamente próximos.

1.8.- Ecuación paramétrica de la línea recta.

Las ecuaciones paramétricas de cualquier recta r se obtienen por medio de la siguiente expresión:

{x=a1+λ·v1y=a2+λ·v2 λ∈R Donde:

x e y son las coordenadas de cualquier punto P(x,y) de la recta.

a1 y a2 son las coordenadas de un punto conocido de la recta A(a1,a2). v1 y v2 son las componentes de un vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$ de r.

λ es un valor real que determina cada coordenada P(x,y) dependiendo del valor que se le asigne. Explicación

Cualquier recta r que puedas dibujar sobre una hoja de papel puede ser determinada analíticamente por medio de punto A que forme parte de dicha recta y una dirección que se puede expresar mediante un vector no nulo $\vec{v}$.

El vector encargado de determinar la dirección de la recta recibe el nombre de vector director y como podrás imaginar este no es único ya que cualquier vector paralelo a este nos sirve también para determinar la dirección de la recta. De esta forma, si $\vec{v}$ es un vector director de la recta r, también lo serán cualquier múltiplo de $\vec{v}$ ($\lambda\cdot\vec{v}$ $\lambda\in R$).

1.9.- Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica.

Si en la ecuación vectorial se sustituyen los vectores por sus coordenadas,queda así: (x, y) = (p1,p2)

+t(d1,d2)Expresando por separado cada coordenada se obtiene las ecuaciones paramétricas: (x,y) son las coordenadas de un punto cualquiera desconocido de la recta (p1,p2)son las coordenadas de un punto conocido de la recta (d1,d2)son las coordenadas de un vector paralelo a la recta t es un parámetro. Para cada valor que le demos a t se obtiene un punto (x,y) de la recta.La recta queda determinada por un punto fijo P0 y un vector ^v = a^i + b^j +c^k, el conjunto de los puntos P, tales que P o P es paralelo a ^v, es decir, quesatisfacen d(P0, P) = t^v para algún número real t.

Si r = OP y r0= OP son los vectores de posición de P y P0, respectivamente, entonces: P0 P = t^vP0

P = r –r0

$r = r0 + t^v$ (1)

Si escribimos $r = (x, y, z)$ y $r0 = (x0, y0. z0)$ e igualamos los componentes en (1)tenemos, $x = x0 + at$; $y = y0 + bt$; $z = z0 + ct$

1.10.- Derivada de una función dada paramétricamente.

Una derivada de una función en forma paramétrica es una derivada en cálculo que se toma cuando ambas variables x e y (tradicionalmente independiente y dependiente, respectivamente) dependen de una tercera variable independiente t, usualmente tomada como «tiempo».

1.11.- Coordenadas polares.

Las coordenadas polares o sistema de coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo. Este sistema es ampliamente utilizado en física y trigonometría.

De manera más precisa, como sistema de referencia se toma: (a) un punto O del plano, al que se llama origen o polo; y (b) una recta dirigida (o rayo, o segmento OL) que pasa por O, llamada eje polar (equivalente al eje x del sistema cartesiano). Con este sistema de referencia y una unidad de medida métrica (para poder asignar distancias entre cada par de puntos del plano), todo punto P del plano corresponde a un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia de P al origen y θ es el ángulo formado entre el eje polar y la recta dirigida OP que va de O a P. El valor θ crece en sentido antihorario y decrece en sentido horario. La distancia r $(r \geq 0)$ se conoce como la «coordenada radial» o «radio vector», mientras que el ángulo es la «coordenada angular» o «ángulo polar».

En el caso del origen, O, el valor de r es cero, pero el valor de θ es indefinido. En ocasiones se adopta la convención de representar el origen por $(0,0°)$.

1.12.- Graficación de curvas planas en coordenadas polares.

Parábola

Esta figura es muy conocida en el mundo del Cálculo. Tal como podemos generar funciones de parábolas en coordenadas cartesianas, lo podemos hacer también en coordenadas polares. Veamos el ejemplo:

Espiral

Este gráfico tiene la forma de una espiral, tal como su nombre lo indica. La espiral más simple la podemos encontrar al mirar una cuerda enrollada sobre sí misma. La forma de una espiral la vemos en una serpiente enrollada por ejemplo.

El gráfico que se presenta a continuación es también conocido como Espiral de Arquímedes, precisamente en honor Arquímedes, quien fue un notable físico y matemático griego que al ser fascinado por la belleza de esta curva, realizó un estudio profundo sobre sus propiedades matemáticas en su escrito titulado Sobre las espirales, escrito en el siglo III antes de Cristo.

Para mostrar el gráfico que se forma, presentamos la siguiente función en coordenadas polares que formará la espiral polar siguiente:

Veamos ahora otra gráfica espiral conocida como espiral de Fermat, pues fue examinada por Fermat en 1936. Su ecuación es $r^2 = a^2 +$. En el siguiente ejemplo se muestra una función y su respectiva gráfica que nos permiten conocer la espiral de Fertat:

Un segundo gráfico espiral lo tenemos en la función que veremos ahora, que podríamos encontrarla con dos nombres refiriéndose al mismo gráfico. Ambos nombres equivalen a lo mismo como podremos apreciar. Dichos nombres con los que se conoce a esta espiral son: espiral recíproca o espiral hiperbolica.

UNIDAD II FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

2.1.- Definición de función vectorial de una variable real.

Las funciones vectoriales, también conocidas con el nombre de funciones valoradas vectoriales, son funciones matemáticas cuyo dominio es un conjunto de números reales y su rango es un conjunto infinito de vectores dimensionales. La notación convencional para tal función es, de la ecuación anterior está claro que el rango de tal función es R3 o Rm. La interpretación de esta oración sería que la función está asociada con tres o más funciones de variables reales f1, f2,f3 … fm.

Una función vectorial es una función que transforma un número real en un vector:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{definida como} \quad F(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

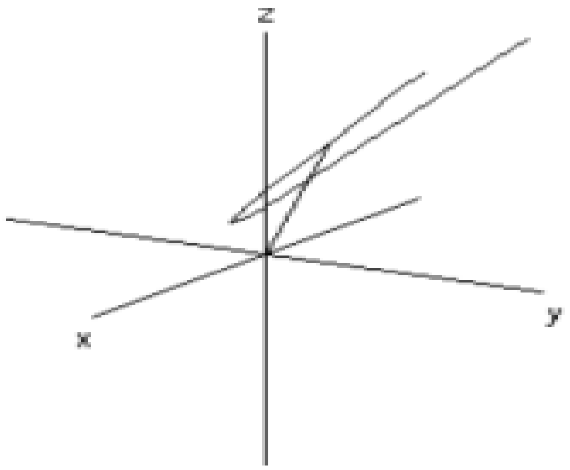
Donde x(t), y(t) y z(t) son funciones llamadas funciones componentes de variable real del parámetro t. Así, se dice que F es continua, derivable o integrable, si lo son x(t), y(t) y z(t). La función vectorial también se puede encontrar representada como $f\ (t)$. Por tanto, se llama función vectorial a cualquier función de la forma:

$$r(t) = \big(f(t), g(t)\big) \dots \dots \dots . Plano$$
$$r(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big) \dots . Espacio$$

DOMINIO El dominio de una función vectorial está dado por la intersección de los dominios de cada una de las funciones componentes, es decir:

$$Si\ \vec{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t) \ldots \ldots f_n(t)\right)\ \ es\ \ D\vec{f} = D\vec{f}_1 \cap D\vec{f}_2 \cap D\vec{f}_3 \cap \ldots \ldots . . D\vec{f}_n$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA La representación grafica de una función vectorial es aquella curva C que describen los puntos finales de los vectores que forman parte de la función para toda t que pertenece al dominio de la función.



Un punto de la curva C tiene la representación cartesiana (x,y,z) donde: $x = f\mathrm{I}\ t\ y = f2(t)\ z = f3(t)$ Las cuales se llaman ecuaciones paramétricas de C. Al asignar números reales a t se elimina el parámetro y se obtienen ecuaciones cartesianas de C.

Límites y continuidad. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL Dada una función vectorial $F\ t$ = $(x\ t\ , y\ t\ , z(t)$ lim $t{\to}a\ F\ t$ = lim $t{\to}a\ x\ t$, lim $t{\to}a\ y\ t$, lim $t{\to}a\ z\ t = \ell$

Esto significa que cuando t tiende al valor de a, el vector $F\ (t)$ se acerca más y más al vector ℓ . Para que exista el límite de la función, debe existir el límite de cada una de las funciones componentes.

CONTINUIDAD Sea $F\ t : A \to \mathbb{R}n\ y\ a\ un\ punto\ de\ acumulacion\ de\ A \subseteq \mathbb{R}.\ Análogamente\ a\ la\ definición\ utilizada\ para\ funciones\ escalares\ diremos\ que\ F\ t$ es continua en a sí y sólo si: - Existe el vector $F\ a$ - Existe el lim$t{\to}a\ F\ t$ - lim$t{\to}a\ F\ t = F\ a$ Teorema: Una función con valores vectoriales r(t) es continua en t = a si y sólo si sus funciones componentes f ,g y h son continuas en t = a.

Sea la función vectorial $F\ t$ entonces diremos que $F\ '\ t$ es la derivada de dicha función y se define mediante: $F\ '\ (t)$ = lim $\Delta t{\to}0\ F\ t + \Delta t - F(t)\ \Delta t$ Para valores cualesquiera de t para los que existe el límite. Cuando el límite existe para t = a se dice que $F\ t$ es derivable en t = a. Teorema Sea $F\ t$ una función vectorial y supongamos que sus funciones componentes f ,g y h son todas derivables para algún valor de t, entonces $F\ t$ es derivable en ese valor de t y su derivada está dada por: $F\ '\ t$ = $(f'\ t\ , g'\ t\ , \square'(t))$ PROPIEDADES Supongamos que r(t) y s(t) son funciones vectoriales derivables, que f(t) es una función escalar también derivable y que c es un escalar cualquiera, entonces:

Cuando una función vectorial definida en un intervalo abierto de R es derivable indefinidamente y su primera derivada no es nula, decimos que se trata de una curva regular. Al vector $F\ (t)$ se le llama vector de posición de la curva y a los vectores $F\ '(t)$ y $F\ ''(t)$ se les llama, respectivamente, vectores velocidad y aceleración. De modo que la rapidez en un instante t es $F\ '\ t$, es importante observar que la rapidez es un escalar, mientras que la velocidad un vector. Al vector $F\ '(t)$ también se le llama vector tangente a la curva $F\ (t)$ en t, y el vector

PROPIEDADES Supongamos que r(t) y s(t) son funciones vectoriales derivables, que f(t) es una función escalar también derivable y que c es un escalar cualquiera, entonces:

Adición y Sustracción

$\frac{d}{dt}[r(t) \pm s(t)] = r'(t) \pm s'(t)$

Producto por un Escalar
$\frac{d}{dt} c\, r(t) = c\, r'(t)$

Producto por una Función Escalar
$\frac{d}{dt}[f(t)\, r(t)] = f'(t)\, r(t) + f(t)\, r'(t)$

Producto Escalar
$\frac{d}{dt}[r(t) \cdot s(t)] = r'(t) \cdot s(t) + r(t) \cdot s'(t)$

Producto Vectorial
$\frac{d}{dt}[r(t) \times s(t)] = r'(t) \times s(t) + r(t) \times s'(t)$

La función vectorial $F\ (t)$ es una antiderivada de la función vectorial $f\ (t)$, siempre y cuando $F\ '\ t$ = $f\ (t)$

INTEGRAL INDEFINIDA Si $F\ (t)$ es cualquier antiderivada de $f\ (t)$, la integral indefinida de esta se define como $f\ (t)\ dt$ = $F\ t$ + c Donde c es un vector constante arbitrario.

INTEGRAL DEFINIDA Para la función vectorial $f\ (t)$, se define la integral definida de la misma $f\ (t)$ $b\ a\ dt$ = ($f\ t$, $g\ t$, □ t) $b\ a\ dt$ = $f(t)\ b\ a\ dt$, $g(t)\ b\ a\ dt$, □$(t)\ b\ a\ dt$ 5

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL (Regla de Barrow) Supongamos que F (t) es una antiderivada de $f\ (t)$ en el intervalo [a,b] diremos: $f\ (t)\ b\ a\ dt$ = $F\ b - F(a)$

Teorema. Si C es la gráfica de un función F en un intervalo [a,b] y si F’ es continua en dicho intervalo, entonces C tiene una longitud L y

2.2.- Límites y continuidad de una función vectorial.

Por tanto, se puede escribir de tal manera que una función vectorial puede tomar como valor de entrada tanto cantidades escalares como cantidades vectoriales, pero el resultado siempre será una cantidad vectorial. Como podemos ver aquí el rango de dicha función está infinitamente extendido, pero no afecta el rango del dominio de la función de alguna manera. Dado que el rango de la función es infinito, por tanto puede ser dividido sus componentes constitutivos.

Teorema. Si C es la gráfica de un función F en un intervalo [a,b] y si F' es continua en dicho intervalo, entonces C tiene una longitud

L y $L = 1 + [F' x] \; b \; a \; dx = 1 + (dy \; dx) \; 2 \; b \; a \; dx$

Ejemplo: Encuentre la longitud de la parte de la parábola con ecuación $y = 4 - x \; 2$ que está en la parte superior del eje x.

Solución: La curva que se desea determinar es la grafica de

$F = x, y \mid y = 4 - x \; 2 \; , x \in [-2,2]$

Como $F \; x = 4 - x \; 2$, $F \; ' \; x = -2x$, vemos que F' es continua en [-2,2]; por tanto se puede aplicar el teorema anterior y tenemos:

$L = 1 + 4x \; 2 \; 2 \; -2 \; dx = 2 \; 17 + 1 \; 2 \; \ln(17 + 4)$

Ocasionalmente se expresa la longitud de una curva C por la ecuación:

$L = ds \; B \; A = (dx) \; 2 + (dy) \; 2 \; B(b,d) \; A(a,c)$

La formula anterior sugiere que si la curva C tiene la representación paramétrica

$x = G \; t \; , y = H \; t \; , t \in [t1 \; ,t2 \;]$

Donde $a = G \; t1 \; , b = G \; t2 \; , c = H \; t1 \; , d = H \; t2 \; , entonces, \; como \; dx = G \; ' \; t \; dt \; y \; dy = H \; ' \; t \; dt, \; la \; longitud \; L \; de \; C \; se \; puede \; obtener \; por$:

$L = [G' \, t \,] \, 2 + [H' \, t \,] \, 2 \; t2 \; t1 \;\; dt$ La formula anterior se puede aplicar para cuando la ecuación de la curva está dada por una función vectorial, por lo que, la longitud de arco de curva entre dos puntos F(a) y F(b) viene dada por la fórmula:

$L \; F, a, b = |F \,' \, t \,| dt \; b \; a = x \,' \, (t) \; 2 + y'(t) \; 2 + z \,' \, (t) \; 2 \; b \; a \; d$�

2.3.- Graficación de curvas en función del parámetro t.

El sistema de coordenadas polares no es muy diferente de un sistema de coordenadas Cartesianas. Mientras en un sistema de coordenadas Cartesianas tenemos una cuadrilla rectangular de rectas verticales y horizontales que representan los ejes x e y respectivamente, en un sistema de coordenadas polarestenemos un polo en el centro el cual es equivalente al origen en el sistema de coordenadas Cartesianas, y tenemos muchos círculos concéntricos que tienen su origen en el polo y algunas rectas que pasan por el polo formando ángulos diferentes en el mismo.

La longitud de estas rectasforma la coordenada radial del sistema, es decir, „r" y el ángulo en el cual subtienden con respecto al eje x forma las coordenadas polares del sistema, esto es, t, el cual está en radianes. Por lo tanto, el sistema de coordenadas polares está representado por un par de coordenadas tales como (r, t).

Una curva polar sólo puede ser graficada en un sistema de coordenadas polares para alcanzar precisión. Trazar una curva polar es muy parecido a trazar una curva Cartesiana. Es necesario tomar en cuenta dos técnicas mientras grafica una curva polar, la primera, y bastante frecuente, es el trazado de los puntos y, la segunda, comprobar la simetría de la curva.

La mayor parte de las curvas polares son simétricas en los cuadrantes opuestos y por tanto, pueden graficarse completamente solo por simetría. El trazado del punto se realiza de forma similar al del sistema de coordenadas Cartesianas. En un sistema de coordenadas Cartesianas, se calcula sencillamente la salida de la curva para diferentes valores de x, y en un sistema de coordenadas polares calculamos la salida de la curva para diferentes valores de t. La salida son los diferentes valores de r.

2.4.- Derivación de funciones vectoriales.

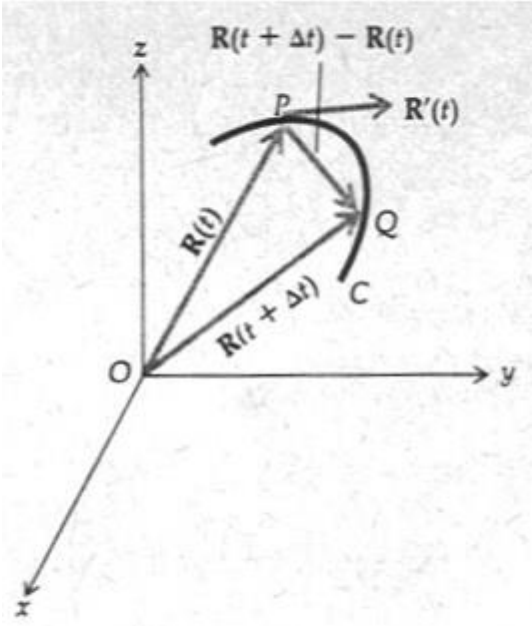
El cálculo aplicado a las funciones Cartesianas puede ser extendido también para ser aplicable a las funciones vectoriales. Como ya sabemos una función vectorial, es en realidad, una función compuesta de varias funciones constituyentes. Cada una de estas funciones constituyentes es una función independiente que determina el efecto del cambio de variable en su dirección correspondiente, y el efecto general del cambio de variable puede ser conocido a través de la función compuesta, esta es la función vectorial.

En el cálculo existen diferentes tipos de funciones. Las más comunes son las funciones cartesianas, de la forma $y = f(x)$. Por otro lado hay funciones polares, en las que la variable dependiente es un radio y la independiente, un ángulo. Pero existe otra familia de funciones, llamadas funciones vectoriales.

Las funciones vectoriales son vectores en los que cada uno de sus componentes dependen de un parámetro t como variable independiente. La forma de las funciones vectoriales es la siguiente:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

Las funciones vectoriales describen una figura mediante vectores. Una curva en el espacio o en el plano está formada por una sucesión de puntos. Cada punto es el extremo de cada vector que proviene del origen. Hay un número infinito de vectores.



Al igual que cualquier función, las funciones vectoriales tienen su cálculo diferencial e integral.

Límites

El concepto de límite es aplicable a las funciones vectoriales. La idea es igual al límite en funciones vectoriales; cuando el parámetro *t* se aproxima a un valor *a*, la función vectorial tiende a tomar un valor también. El cálculo de límites se denota de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \lim_{t\to a} x(t)\hat{\imath} + \lim_{t\to a} y(t)\hat{\jmath} + \lim_{t\to a} z(t)\hat{k}$$

Por ejemplo, el límite de la siguiente función vectorial cuando *t* tiende a 0:

$$\vec{r}(t) = 2t^2\hat{\imath} - 5t\hat{\jmath} + (1 - 2t)\hat{k}$$

El límite se expresa y se calcula:

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to 0} 2t^2\hat{\imath} - \lim_{t\to 0} 5t\hat{\jmath} + \lim_{t\to 0}(1 - 2t)\hat{k}$$

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = 0\,\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \hat{k}$$

La dificultad del límite dependerá de las funciones *x*, *y* y *z* que se encuentren en las componentes.

Cálculo vectorial diferencial

Derivar una función vectorial es simple. Es similar a derivar una función de una variable. La diferencia es que se deriva cada componente del vector de la función. Sin embargo, cada derivada se hace respecto al parámetro *t*.

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Por ejemplo, derivar la siguiente función:

$$\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath} + (1-t)\hat{k}$$

Para derivar la función, se deriva cada componente:

$$\vec{r}'(t) = 2t\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}$$

Una aplicación del cálculo vectorial diferencial es en la física, específicamente en la dinámica. Una función vectorial puede representar la posición de una partícula o un objeto. La derivada de una función vectorial representa la velocidad de la partícula. La segunda derivada de la función es la función aceleración. Todas estas tres funciones dependen del parámetro *t*, que para este caso, es el tiempo. Como vectores, tienen magnitud, dirección y sentido. Para conocer su magnitud es necesario calcularla mediante la siguiente fórmula:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

La magnitud de la velocidad se conoce como rapidez.

Por ejemplo, se tiene que una partícula se mueve en el plano y su trayectoria está descrita con la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

Para encontrar la velocidad hay que derivar la función:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Si se pide la velocidad en el tiempo *t=1*, basta con evaluar la función vectorial:

$$\vec{v}(1) = 4\hat{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

Se puede encontrar también la magnitud de la velocidad, que es la rapidez, utilizando la fórmula y evaluando en el tiempo *t=1*:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(4t)^2 + 3^2} = \sqrt{16t^2 + 9}$$

$$\|\vec{v}(1)\| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Finalmente, el vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

Cálculo vectorial integral

Las funciones vectoriales, por tener una parte diferencial, también poseen una parte integral. Toda función que se deriva, podría ser integrada. En este caso, la integral de una función vectorial es un vector cuya derivada es la función original. Las integrales de este tipo se escriben de la siguiente manera:

Por ejemplo, se pide integrar la siguiente función:

$$\vec{r}'(t) = 2t\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}$$

El procedimiento consiste en integrar las funciones de las componentes del vector, respecto al parámetro *t*.

2.5.- Propiedad de función de vectores.

Puesto que una función vectorial es una función compuesta, esta no puede ser diferenciada directamente, en lugar de diferenciarla, necesitamos diferenciar cada una de sus funciones constituyentes por separado. Las técnicas utilizadas para integrar una función Cartesiana se pueden aplicar para diferenciar una función vectorial debido a que las funciones constitutivas de la misma son funciones valoradas reales.

Las derivadas de unas función vectorial sigue reglas similares a las derivadas de una función escalar y de las ecuaciones paramétricas. Puedes utilizar estas propiedades de derivadas para diferenciar funciones complejas rápidamente. Los siguientes ejemplos te mostrarán algunas de las propiedades más útiles para trabajar con funciones vectoriales.

Ejemplo A

Propiedad La derivada de una de suma de dos vectores es igual a la suma de la derivada de cada función. Eso significa: $(\vec{F}(t)+\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)$ **.**

Considera estas funciones vectoriales:

$\vec{F}(t)=(t2,5t)$ $\vec{G}(t)=(\sin t,\cos t)$

Estas muestran que $(\vec{F}(t)+\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)$.

Solución: Si sumas juntas las funciones, obtienes:

$\vec{F}(t)+\vec{G}(t)=(t2,5t)+(\sin t,\cos t)=(t2+\sin t,5t+\cos t)$.

Si sacas la derivada de la suma de las funciones, tienes:

$(\vec{F}(t)+\vec{G}(t))'=(2t+\cos t,5-\sin t)$.

Por otro lado, si sacas las derivadas primero y luego las sumas juntas, obtienes:

$\vec{F}'(t)=(2t,5)$ $\vec{G}'(t)=(cost,-sint)$ $\vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)=(2t+cost,5-sint)$

Por lo que, $(\vec{F}(t)+\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)$.

Puedes utilizar esta igualdad en casos donde conozcas la derivada de una de las funciones componentes y de las funciones combinadas, pero no de las otras funciones componente.

Ejemplo B

Una función escalar toma una entrada y devuelve una sola salida en vez de un vector.

Propiedad Si multiplicas una función escalar por una función vectorial, la derivada de su producto seguirá la regla del producto para sus derivadas. $(f(t)\vec{G}(t))'=f'(t)\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)f(t)$ **.**

Considera estas funciones:

$f(t)=t2$ $\vec{G}(t)=(t4,\ln t)$

Estas muestran que $(f(t)\vec{G}(t))'=f'(t)\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)f(t)$.

Solución: Si multiplicas las funciones juntas y sacas las derivadas, verás que:

$f(t)\vec{G}(t)=(t6,t2\ln t)$ $(f(t)\vec{G}(t))'=(6t2,2t\ln t+t2t)=(6t5,2t\ln t+t)$

Fíjate que $t2\ln t$ es el producto de dos funciones, necesitarás utilizar la regla del producto para diferenciarlos.

Si utilizas la regla del producto para encontrar la derivada del producto de $f(t)$ y $\vec{G}(t)$, tienes:

$f(t)=t2$ $\vec{G}(t)=(t4,\ln t)$ $(f(t)\vec{G}(t))'=f'(t)\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)f(t)$ $(f(t)\vec{G}(t))'=2t(t4,\ln t)+(4t3,1t)(t2)$

Lo que se simplifica en:

(2t5,2tln t)+(4t5,t2t) =(6t5,2tln t+t)

Ejemplo C

Encontrar la derivada de una función vectorial también puede ayudarte a determinar si la función es un círculo centrado en el origen.

Propiedad Si la función derivada de una función vectorial es perpendicular a la función original, eso significa que si el ángulo entre dos vectores siempre está en 90 grados, entonces la magnitud de los vectores que hacen la función original es constante, y la función vectorial es un círculo.

Puedes utilizar el producto escalar de la función vectorial y sus derivadas para ver si las dos son perpendiculares. Recuerda que si el producto escalar de dos funciones es cero, entonces esas funciones son perpendiculares la una a la otra. Entonces, si calcular el producto escalar de una función vectorial y sus derivados, puedes ver si las dos son perpendiculares. Si lo son, entonces la función vectorial es un círculo.

Considera la función $\vec{F}(t)=(\sin t,\cos t)$. Muestra que esta función es un círculo.

Solución: $\vec{F}'(t)=(\cos t,-\sin t)$.

Si encuentras el producto escalar de las dos funciones vectoriales, verás que:

$\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t)=\sin t\cos t+(-\sin t\cos t)=0$.

El producto escalar es cero, por lo que $\vec{F}(t)\perp\vec{F}'(t)$. Eso significa que $\|\vec{F}(t)\|$ es una constante. Ya que todos los puntos en $\vec{F}(t)$ son una distancia constante desde el origen, debe describir un círculo centrado en el origen. Fíjate que si el círculo no está centrado en el origen, la magnitud de los vectores no será constante porque la magnitud es la distancia desde el origen al extremo final del vector.

Por ejemplo, el círculo $\vec{F}(t)=(5+\cos t,2+\sin t)$.

La derivada de esta función vectorial es $\vec{F}'(t)=(-\sin t,\cos t)$.

El producto escalar, $\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t)$ es:

$\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t)=(5+\cos t)(-\sin t)+(2+\sin t)(\cos t)=-5\sin t+-\sin t\cos t+2\cos t+\sin t\cos t=2\cos t-5\sin t$

La derivada de la función no es perpendicular a la función, por lo que la magnitud de $\vec{F}(t)$ no es constante. Sin embargo, esta función vectorial sí describe un círculo: sólo describe un círculo centrado en (5, 2) en vez del origen.

Ejemplo D

Propiedad La derivada de una función que es el producto escalar de dos funciones vectoriales se puede describir como $(\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)$ **.**

Considera estas funciones vectoriales:

$\vec{F}(t)=(t2,3t)$ $\vec{G}(t)=(1t,\sin t)$

Estas muestran que $(\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)$.

Solución: Fíjate que $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)=t2t+3t\sin t=t+3t\sin t$. Por lo que,

$(\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t))'=1+3\sin t+3t\cos t.$

Ahora calcula $\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)=\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)$:

$\vec{F}(t)=(t2,3t)$ $\vec{F}'(t)=(2t,3)$ $\vec{G}(t)=(1t,\sin t)$ $\vec{G}'(t)=(-1t2,\cos t)$

Por lo que tienes:

$\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)=(2t,3)\cdot(1t,\sin t)+(t2,3t)\cdot(-1t2,\cos t)=[(2tt)+3\sin t]+[-t2t2+3t\cos t]=[2+\sin t]+[-1+3t\cos t]=1+3\sin t+3t\cos t$

Por lo que $(\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)$

Análisis del Problema de la Sección

Tessa planea que el caballo mecánico comience despacio y acelere su velocidad a través del trayecto, que termina en un pequeño pueblo. El trabajo es el producto de la fuerza y la distancia. La fuerza es el producto de la masa de un objeto y su aceleración. El caballo mecánico pesa cerca de 50 kg. Tessa modela la fuerza utilizada para moverlo a lo largo de la ruta con la ecuación:

$\vec{F}(t)=(50t,10t2)$

Y la distancia que viaja en un cierto tiempo t como:

$\vec{D}(t)=(3t,5t2)$

Ella quiere ver cuán rápido la cantidad de trabajo necesitado para mover el caballo cambia cuando el tiempo es 1, 5, y 10 minutos en el desfile. De esa manera, ella puede asegurarse que el motor puede manejar las horas de trabajo requeridas para mover el caballo mecánico en varios puntos importantes de la ruta.

El trabajo se puede describir como el producto escalar del vector de fuerza y el vector de trabajo. Sin embargo, ya que ella quiere saber cómo la cantidad de trabajo cambia, necesitará encontrar las derivadas de este producto escalar.

$\vec{F}(t)=(50t,10t2)$ $\vec{F}'(t)=(50,20t)$ $\vec{D}(t)=(3t,5t2)$ $\vec{D}'(t)=(3,10t)$

$\Delta W=(\vec{F}(t)\cdot\vec{D}(t))'=\vec{F}'(t)\cdot\vec{D}(t)+\vec{D}'(t)\cdot\vec{F}(t)$ $\vec{F}'(t)\cdot\vec{D}(t)=(50)(3t)+(20t)(5t2)=150t+100t3$ $\vec{D}'(t)\cdot\vec{F}(t)=(3)(50t)+(10t)(10t2)=150t+100t3$ $\vec{F}'(t)\cdot\vec{D}(t)+\vec{D}'(t)\cdot\vec{F}(t)=300t+200t3$ $\Delta W=300t+200t3$

Después de que ella encuentra la derivada del producto escalar, ella puede juntar los valores de t para encontrar la rapidez de cambio del trabajo en diferentes puntos del tiempo.

t=1 ΔW=300(1)+200(1)3=500 J t=5 ΔW=300(5)+200(5)3=26,500 J t=10 ΔW=300(10)+200(10)3= 203,000 J

Tessa puede utilizar estas figuras para darse cuenta cuánta energía necesitas producir su motor, y cuán rápido necesitará producir esa energía.

Vocabulario

Vector **-** Una cantidad que expresa tanto la magnitud como la dirección. Puedes definir un vector en términos de su magnitud y su ángulo, o en términos de sus extremos.

Escalar **-** Una cantidad que solo expresa magnitud. Por ejemplo, el peso es un escalar. La velocidad es una escalar pero la rapidez es un vector.

Producto Escalar **-** El producto escalar es una operación matemática que te permite multiplicar dos vectores juntos y obtener un escalar como el producto. Las dos formas del producto escalar son $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$ y $\vec{a}\cdot\vec{b}=xaxb+yayb$.

Vectores perpendiculares **-** Dos vectores son perpendiculares si y solo si sus productos escalares son iguales a cero.

Trabajo **-** Una expresión de cuánta energía toma mover un objeto en la distancia. El trabajo se define como la fuerza multiplicada por la distancia y se mide en Jules.

Práctica Guiada

1. Encuentra la derivada de la función vectorial producida cuando sumas las funciones

$\vec{F}(t)=(2t+7,t2)$ $\vec{G}(t)=(\sin 4t,t3)$

2. Utiliza productos escalares para determinar si las siguientes funciones vectoriales son círculos con centros en el origen.

a. $\vec{F}(t)=(5\sin t,5\cos t)$

b. $\vec{G}(t)=(3\sin t,5\cos t)$

c. $\vec{H}(t)=(4+\sin t,\cos t)$

d. $\vec{I}(t)=(12\cos t,12\sin t)$

3. Encuentra la derivada de la función escalar $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)$ cuando

$\vec{F}(t)=(3t2,4t3)$ $\vec{G}(t)=(et,t2)$

Respuesta:

1.

$\vec{F}'(t)=(2,2t)$ $\vec{G}'(t)=(4\cos 4t,3t2)$

$(\vec{F}'(t)+\vec{G}'(t))'=\vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)=(2+4\cos 4t,2t+3t2)$

2. a.

$\vec{F}(t)=(5\sin t,5\cos t)$ $\vec{F}'(t)=(5\cos t,-5\sin t)$

$\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t)=(5\sin t)(5\cos t)+(5\cos t)(-5\sin t)=0$

El producto escalar es cero, por lo que la función es una círculo centrado en (0, 0).

b.

$\vec{G}(t)=(3\sin t,5\cos t)$ $\vec{G}'(t)=(3\cos t,-5\sin t)$

$\vec{G}(t)\cdot\vec{G}'(t)=(3\sin t)(3\cos t)+(5\cos t)(-5\sin t)$

El producto escalar no es cero, por lo que la magnitud de $\vec{G}(t)$ no es una constante y la función no es círculo centrado en el origen.

c.

$\vec{H}(t)=(4+\sin t,\cos t)$ $\vec{H}'(t)=(\cos t,-\sin t)$

$\vec{H}(t)\cdot\vec{H}'(t)=(4+\sin t)(\cos t)-(\cos t)(\sin t)$ $=4\cos t+\cos t\sin t-\cos t\sin t=4\cos t$

El producto escalar no es cero, por lo que la magnitud de $\vec{H}(t)$ no es una constante y la función no es círculo centrado en el origen.

d.

$\vec{I}(t)=(12\cos t,12\sin t)$ $\vec{I}'(t)=(-12\sin t,12\cos t)$

$\vec{I}(t)\cdot\vec{I}'(t)=(12\cos t)(-12\sin t)+(12\sin t)(12\cos t)=0$

El producto escalar es 0. Esto significa que la magnitud de la función vectorial es 0 y representa un círculo con su centro en el origen.

3.

$\vec{F}(t)=(3t2,4t3)$ $\vec{G}(t)=(et,t2)$ $\vec{F}'(t)=(6t,12t2)$ $\vec{G}'(t)=(et,2t)$

$(\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t))'=\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)$ $\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)=6tet+12t4$ $\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)=3t2et+8t4$ $\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{G}'(t)\cdot\vec{F}(t)=20t4+3t2et+6tet$

2.6.- Integración de funciones vectoriales.

Una función vectorial es una función definida en términos de la variable tiempo. El rango de esta función es multidimensional dado que la función está constituida por diversos componentes, donde cada uno de los componentes varía con respecto al tiempo en una de las direcciones. Aquí, cada una de las funciones individuales es una función vectorial de variable real en sí misma. Por lo tanto, el conjunto de funciones (p (t), q (t), r (t)) es una asignación de un intervalo cerrado en Rk, la cual es de rango dimensional k para la función dada. Las dimensiones de entrada y salida de una función vectorial son iguales, las cuales son un vector con alguna forma determinada.

Puedes integrar las funciones vectoriales utilizando las mismas técnicas que usas para integrar funciones escalares y funciones paramétricas. Cuando integras una función vectorial, integras los componentes horizontales y verticales de manera separada. El resultado de la integración será una nueva función vectorial o, si calcular una integral definida, un nuevo vector.

Por lo tanto, si $\vec{F}(t)=(f(t),g(t))$ y $\vec{F}(t)$ es una función vectorial, entonces $\int\vec{F}(t)=(\int f(t)dt,\int g(t)dt)$.

Como con las funciones escalares y paramétricas, la función vectorial $\vec{F}(t)$ es la integral de la función vectorial $\vec{G}(t)$ si y solo si la derivada de $\vec{F}(t)$ es igual a $\vec{G}(t)$.

Ejemplo A

Encuentra la integral de la función vectorial $\vec{F}(t)=(t2,-\cos t)$.

Solución: $\int\vec{F}(t)=(\int t2,\int-\cos t)$

Encuentra las integrales de los componentes horizontales y verticales:

$\int t2dt=13t3+C$ $\int-\cos t\,dt=-\sin t+D$

Por lo tanto, tienes

$\int\vec{F}(t)=(13t3+C,-\sin t+D)$

Recuerda, puedes utilizar todas las técnicas que aprendiste para integrar funciones escalares para integrar cada componente de una función vectorial.

Ejemplo B

Para encontrar la integral definida de una función vectorial evalúa cada componente de la función separadamente. Tu respuesta será un solo vector.

Encuentra el valor de la integral definida $\int 02\vec{F}(t)\,dt$ cuando $\vec{F}(t)=(2t,12t2)$.

Solución: Primero, encuentra las integrales definidas para los componentes horizontales y verticales.

$\int 022t\,dt=[t2]20=22-02=4$ $\int 0212t2\,dt=12\int 02t2\,dt=12[t33]20=12[23-033]=86=43$

La integral definida de esta función es el vector $(4,43)$.

Ejemplo C

Las integrales de una función vectorial son muy útiles para ingenieros, físicos y otras personas que tratan con conceptos como fuerza, trabajo, momentum, velocidad y movimiento. Por ejemplo, la velocidad de un objeto se puede describir como la integral de una función vectorial que describe la aceleración del objeto. Esto es porque la aceleración se define como el índice de cambio de la velocidad de un objeto. La aceleración es la derivada de la velocidad y la velocidad es la integral de la aceleración.

Si la aceleración de un objeto se puede describir con la función vectorial (-1, 5), encuentra la función vectorial que describe su velocidad.

Solución:

$\vec{A}(t)=(-1,5)$ $\vec{V}(t)=\int \vec{a}(t)\,dt$

Entonces, para encontrar la función de la velocidad, encuentra las integrales de los componentes horizontales y verticales de la función de la aceleración.

$\int \vec{A}(t)\,dt=(\int -1\,dt,\int 5\,dt)=(-t+C,5t+D)$ $\vec{V}(t)=(-t+C,5t+D)$

Ahora tienes una función vectorial que describe la velocidad del objeto en un momento determinado, de acuerdo a su aceleración.

Análisis del Problema de la Sección

La velocidad describe cómo cambia la posición de un objeto con respecto al tiempo. Esto significa que la velocidad muestra el índice y la dirección de cambio de la posición del vector, por lo que la velocidad es la derivada de la posición. De la definición de una integral, esto significa que una función vectorial que describe la posición de un objeto es la integral de una función vectorial que describe la velocidad del mismo objeto.

Raymond ha modelado la velocidad de su cámara después del despegue como $\vec{V}(t)=(t+12,-6t2+18t)$. Él puede integrar para encontrar una función vectorial que describirá el trayecto que tomará la cámara. Él medirá el tiempo en horas.

Por lo tanto, $\vec{D}(t)=\int\vec{V}(t)\,dt$. Él integra los componentes horizontales y verticales de manera separada y descubre que:

$\int t+12dt=12t2+12t+C$ $\int -6t2+18t\,dt=-2t3+9t2+K$

Entonces, $\vec{D}(t)=(12t2+12t+C,-2t3+9t2+K)$.

Vocabulario

Integral **-** También conocida como la "antiderivada", la integral de f(x) es una función por la que f(x) es su derivada.

Velocidad **-** La rapidez y dirección en que se mueve un objeto.

Aceleración **-** El índice en el que la rapidez y la dirección de un objeto cambian.

Vector **-** Una cantidad que expresa tanto la magnitud y la dirección. Puedes definir un vector en términos de su magnitud y su ángulo, o en términos de sus extremos finales.

Escalar **-** Una cantidad que expresa magnitud, pero no dirección. Por ejemplo, el peso es un escalar. La rapidez es un escalar pero la velocidad es un vector.

Función Vectorial **-** Una función que recibe un escalar como una entrada y vuelve a su extremo final del vector como una salida.

Práctica Guiada

1. Dada la función vectorial, encuentra la integral.

$\vec{F}$ (t)=(e2t,4sin2t)

2. Encuentra la integral definida de la siguiente función vectorial.

$\vec{F}$ (t)=(3t2,1t) ∫.1e$\vec{F}$ (t) dt

3. La función vectorial $\vec{A}$ (t)=(t2,cos t) describe la aceleración de un objeto. ¿Cuál es la función vectorial que describe la velocidad del objeto?

Respuesta:

1.

$\vec{F}$ (t)=(e2t,4sin 2t) ∫$\vec{F}$ (t) dt=(∫e2tdt,∫4sin2t dt) ∫e2tdt=12e2t+C ∫4sin2t dt=−2cos2t+K ∫$\vec{F}$ (t) dt=(12e2t+C,−2cos2t+K)

2.

$\vec{F}$ (t)=(3t2,1t) ∫.1e$\vec{F}$ (t) dt=(| ∫.1e3t2 dt,∫.1e1t dt) | ∫.1e3t2 dt=[t3]e.1=e3−.13≈20.08 ∫.1e1t dt=[ln t]e.1=1−(−2.3)=3.3 ∫.1e$\vec{F}$ (t) dt=(20.08,3.3)

3.

$\vec{A}$ (t)=(t2,cost) $\vec{V}$ (t)=∫$\vec{A}$ (t) dt ∫$\vec{A}$ (t) dt=(∫t2 dt,∫cost dt) ∫t2 dt=13t3+C ∫cost dt=sint+K $\vec{V}$ (t)=(13t3+C,sint+K)

Práctica

Utiliza las siguientes funciones vectoriales desde #1 a #10.

- $\vec{F}$ (t)=(t2,1t)
- $\vec{G}$ (t)=(6sint,3cost)

- $\vec{H}(t)=(t+1,t2)$
- $\vec{K}(t)=(2t2,t-5)$
- $\vec{M}(t)=(et,sint)$

Desde #1 a #5, encuentra la integral indefinida de la función.

1. $\vec{F}(t)$

2. $\vec{G}(t)$

3. $\vec{H}(t)$

4. $\vec{K}(t)$

5. $\vec{M}(t)$

Desde #6 a #10, calcula cada integral definida.

6. $\int 25\vec{F}(t)\,dt$

7. $\int 0\pi 2\vec{G}(t)\,dt$

8. $\int 05\vec{H}(t)\,dt$

9. $\int 010\vec{K}(t)\,dt$

10. $\int 0\pi\vec{M}(t)\,dt$

Para #11 y #12, la función vectorial $\vec{A}(t)=(5t,t2)$ describe la aceleración de un objeto.

11. ¿Cuál es la función vectorial que describe la velocidad del objeto?

12. ¿Cuál es la velocidad del objeto en el tiempo $t=2$ si la velocidad inicial del objeto es $\vec{V}(0)=(0,0)$?

Para #13 y #14, la función vectorial $\vec{V}(t)=(t3,sint)$ describe la velocidad de un objeto.

13. ¿Cuál es la función vectorial que describe la posición del objeto?

14. ¿Dónde está el objeto en el tiempo $t=\pi$ si $\vec{D}(0)=(2,5)$?

15. Si la función vectorial $\vec{A}(t)=(sint,5)$ describe la aceleración de un objeto con $\vec{V}(0)=(0,0)$ y $\vec{D}(0)=(0,0)$, ¿dónde está el objeto en el tiempo $t=\pi 2$?

2.7.- Longitud de arco.

En matemática, la longitud de arco, también llamada rectificación de una curva, es la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de una curva o dimensión lineal. Históricamente, ha sido difícil determinar esta longitud en segmentos irregulares; aunque fueron usados varios métodos para curvas específicas. La llegada del cálculo trajo consigo la fórmula general para obtener soluciones cerradas para algunos casos.

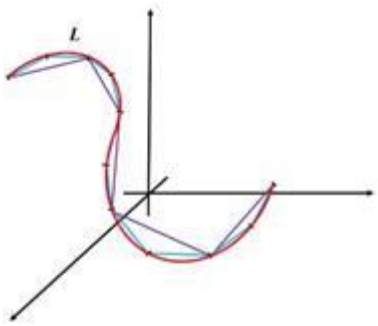
PLANTEAMIENTO

Se expone el concepto de longitud de arco y como calcularla a través de la integral.

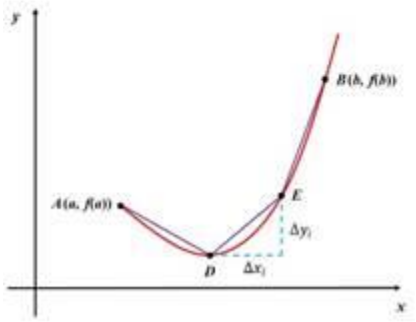
LONGITUD DE ARCO

La longitud de arco es la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de una curva o dimensión lineal. Las primeras mediciones se hicieron posibles a través de aproximaciones trazando un polígono dentro de la curva y calculando la longitud de los lados de éste para obtener un valor aproximado de la longitud de la curva. Mientras se usaban más segmentos, disminuyendo la longitud de cada uno, se obtenía una aproximación cada vez mejor.

La longitud de una curva plana se puede aproximar al sumar pequeños segmentos de recta que se ajusten a la curva, esta aproximación será más ajustada entre más segmentos sean y a la vez sean lo más pequeño posible, como lo muestra la siguiente figura:



Para determinar formalmente la longitud L del arco de una curva con ecuación $y = f(x)$, comprendida entre los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ se considera la siguiente figura:



Como se muestra, el arco AB se divide en n partes, uniendo luego los sucesivos puntos de división por segmentos rectilíneos. Por ejemplo, el segmento DE tendrá como longitud:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Si se aumenta indefinidamente el número de puntos de división, entonces las longitudes de los segmentos tienden a cero, por lo que el

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

resulta ser el arco AB, siempre que el límite exista.

Para expresar el límite como una integral se considera que la función $y = f(x)$ sea continua y posea derivada continua en cada punto de la curva, desde $A(a, f(a))$ hasta $B(b, f(b))$. Luego, por el teorema del valor medio del cálculo diferencial, existe un punto $D^*(x_i{}^*, y_i{}^*)$ entre los puntos D y E de la curva, donde la tangente es paralela a la cuerda DE, esto es:

$f'(x_i{}^*) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, es decir: $\Delta y_i = f'(x_i{}^*) \cdot \Delta x_i$

Así que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

puede expresarse como:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(x_i{}^*) \cdot \Delta x_i)^2}$$

que equivale a:

$$\lim_{\|\Delta x_i\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

que como ya se sabe, corresponde a la definición de integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Nótese como la longitud de una curva no depende de la elección de los ejes coordenados. Si x puede expresarse como función de y, entonces la longitud del arco está dada por:

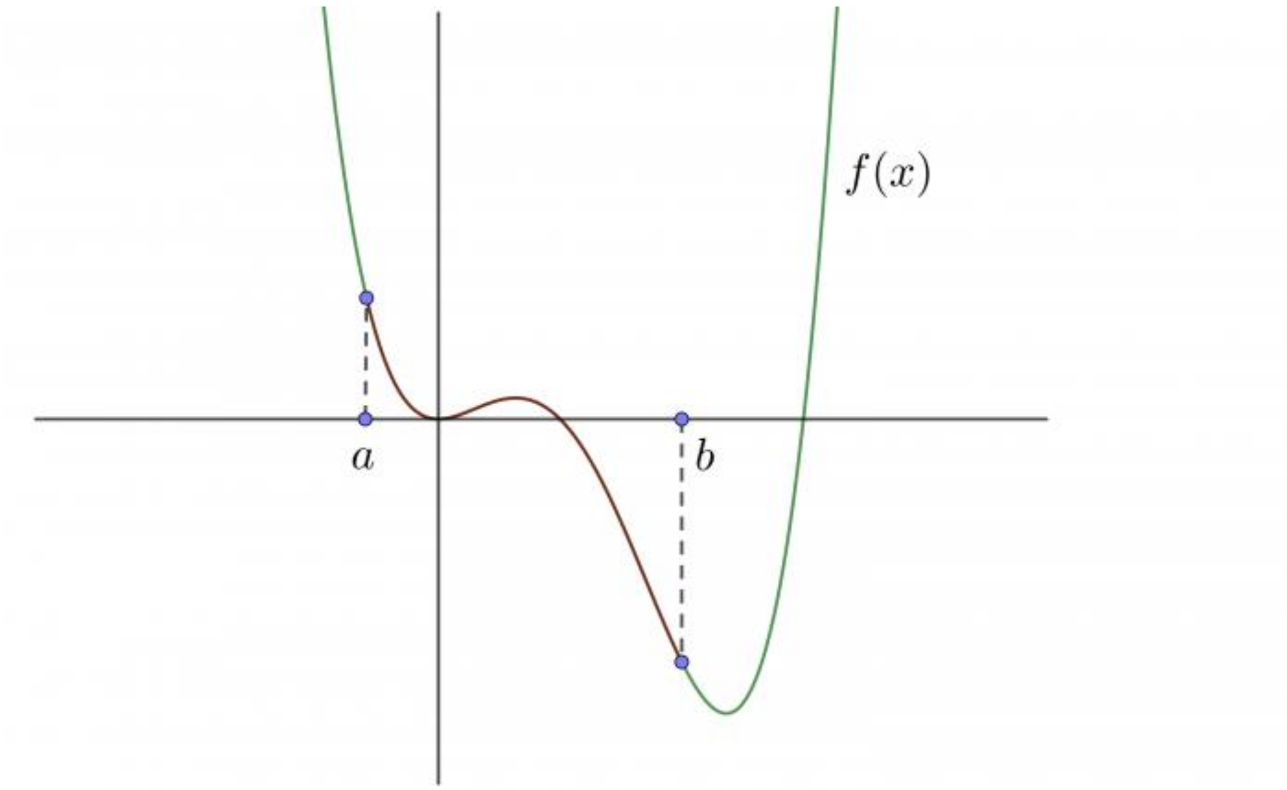
$$L = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

CONCLUSIÓN

La longitud del arco, de la curva $f(x)$, comprendida entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ viene dado por la integral definida:

$$L = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

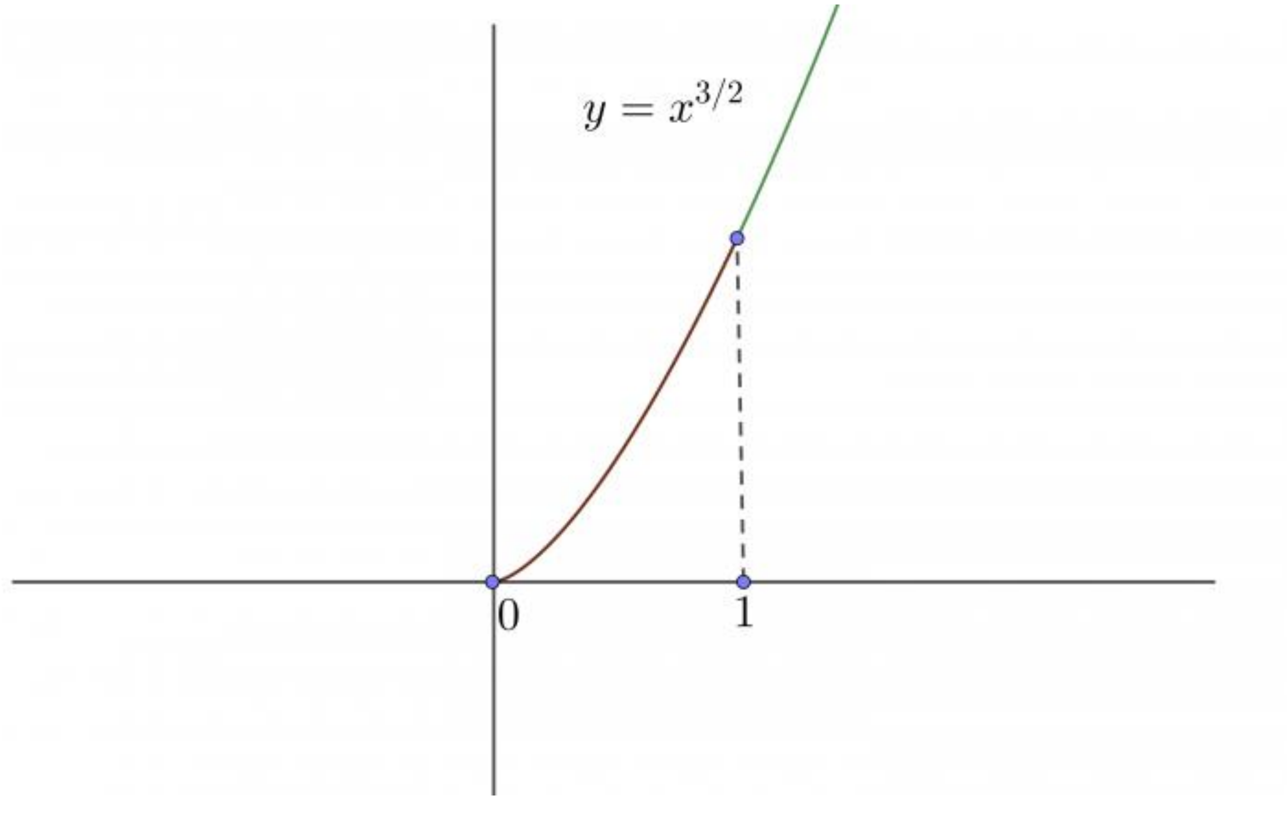
Si se tiene una función $f(x)$ derivable en un intervalo $[a, b]$, entonces podemos medir la longitud de la gráfica en este intervalo. Esta longitud se conoce como la **longitud del arco** de la curva $f(x)$



Para encontrar la longitud de arco empleamos la siguiente fórmula que viene dada por la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Ejemplo: Hallar la longitud del arco de la función $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 1]$.



1Derivamos la función

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2Sustituimos en la fórmula de longitud de arco

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx$$

3Resolvemos la integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

4Completamos la integral

$$\int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad = \quad \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{9}{4}\, dx$$

5Hacemos $u = 1 + \frac{9}{4}x$, luego su derivada es $u' = \frac{9}{4}$. Resolvemos la integral de la función potencia

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{9}\int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{9}{4}\,dx &= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\cdot 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{13\sqrt{13}-8}{27}
\end{aligned}
$$

6Así, la longitud de arco es

$$
L = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}
$$

2.8.- Vector tangente.

La tangente de una curva es una recta que intersecta la curva en un solo punto. Es conocido por nosotros a través del cálculo que mediante la diferenciación de una función se obtiene el punto tangencial para la curva de esa función. Un concepto similar es aplicable al cálculo vectorial, junto con una excepción.

En matemáticas, un **vector tangente** es uno que es paralelo (o tangente) a una curva o una superficie en un punto dado. En la geometría diferencial de curvas, se definen en términos de curvas en R^n o en forma más general, en geometría diferencial de variables, como miembro del espacio tangente. La dirección de este vector es la misma que la pendiente de la línea tangente.

Definición

Sea $\boldsymbol{r}(t) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ una curva diferenciable, el vector tangente de ésta se define como:

$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{r}'(t) / |\boldsymbol{r}'(t)|$

Donde $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$. Por lo tanto, para encontrar el vector tangente $\boldsymbol{T}(t)$ de una curva descrita por $\boldsymbol{r}(t)$, debemos:

1. Determinar la derivada $\boldsymbol{r}'(t)$.
2. Calcular la magnitud del vector anterior.
3. Dividir el vector que encontramos en el paso 2 entre la magnitud del paso 3.

La dirección del vector tangente es la misma que la pendiente de la línea tangente.

Ejemplos

1. Hallar el vector tangente a la curva dada por:

$\boldsymbol{r}(t) = 3\cos(t)\,\hat{\imath} + 3\sin(t)\,\hat{\jmath}$

Sabemos que el vector tangente viene dado por:

$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{r}'(t) / |\boldsymbol{r}'(t)|$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{r}'(t) = -3\sin(t)\,\hat{\imath} + 3\cos(t)\,\hat{\jmath}$

Y

$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{[\,9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)]} = \sqrt{9} = 3$

Entonces:

$\boldsymbol{T}(t) = [-3\sin(t)\,\hat{\imath} + 3\cos(t)\,\hat{\jmath}\,] / 3 = -\sin(t)\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath}$

1. Hallar el vector tangente a la curva dada por:

$\boldsymbol{r}(t) = t\,\hat{\imath} + 1/9\, t^3\,\hat{\jmath}$

Sabemos que el vector tangente viene dado por:

$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{r}'(t) / |\boldsymbol{r}'(t)|$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{r}'(t) = \hat{\imath} + 1/3\, t^2\,\hat{\jmath}$

Y

$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{[\,(1)^2 + (1/3\, t^2)^2]} = \sqrt{(1 + 1/9\, t^4)}$

Entonces:

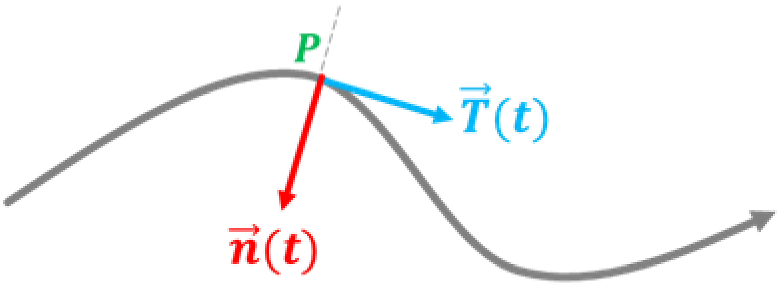
$\boldsymbol{T}(t) = (\hat{\imath} + 1/3\, t^2\,\hat{\jmath}) / \sqrt{(1 + 1/9\, t^4)}$

Cuando $t = 3$

$\boldsymbol{T}(t) = (\hat{\imath} + 1/3\ (3)^2\ \hat{\jmath})\ /\ \sqrt{}\ (1 + 1/9\ (3)^4)\ = (\hat{\imath} + 9/3\ \hat{\jmath})\ /\ \sqrt{}\ (1 + 81) =\ \ 1/\sqrt{10}\ \hat{\imath} + 3/\sqrt{10}\ \hat{\jmath}$

Vector tangente y vector normal

Se define como vector normal ***n*** a uno cuya dirección es perpendicular a una curva, superficie o a cualquier vector paralelo (o tangente) a esta última. Por lo tanto, en un punto P dado, ***n***(t) y ***T***(t) son octogonales.



Vector tangente y vector normal a una curva

En la sección anterior establecimos que si $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ es una curva que eventualmente denote la trayectoria de una partícula y si $s = s(t)$ describe la longitud de la curva en función de la variable *t*, entonces

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \frac{d\boldsymbol{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)}$$

Nota: este resultado se concluye bajo la ecuación (2) de la sección anterior. De tal forma que para calcular el vector tangente a la curva en un punto determinado necesitamos conocer la derivada de la función longitud de curva s(*t*), donde esta se obtiene mediante

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$$

Y es así, también, que podemos obtener una expresión analítica para la función longitud de arco, integrando esta última ecuación, esto es

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{dr}{dt'}\right| dt' = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt'}\right)^2}\, dt'$$

Veamos un ejemplo.

Consideremos la curva **r**(*t*) = *a* cos w *t* **i** + *a* sen w *t* **j** + *b*w *t* **k**. (*a*, *b* y w constantes positivas). la derivada de esta función es

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\,\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + a\,\omega \cos \omega t\,\mathbf{j} + b\,\omega\,\mathbf{k}$$

La magnitud o norma de este vector es

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \omega\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{ds}{dt}$$

De tal forma que el vector tangente a la curva en un punto cualquiera está dado por

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \frac{-a \operatorname{sen} \omega t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{i} + \frac{a \cos \omega t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Y si queremos medir la longitud de la curva desde 0 hasta el valor de *t*, tenemos que

$$s(t) = \omega\sqrt{a^2+b^2}\int_0^t dt' = \omega t\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Por ejemplo, la longitud de la curva entre los puntos (a, 0, 0) y (a, 0, 2pb), puntos que corresponden a los valores de t = 0 y t = 2p/w respectivamente, es

s(2p/w) - s(0) = 2p $(a^2 + b^2)^{1/2}$.

En particular, si b = 0 obtenemos simplemente el perímetro de la circunferencia de radio a, 2pa, puesto que esta hélice se proyecta como una circunferencia sobre el plano XY.

Con este mismo ejemplo, es fácil verificar que efectivamente se cumple (siempre) que

$$\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{T}} = 1$$

y derivando esta igualdad respecto de la variable longitud de curva s, tenemos que

$$\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{ds} = 0 \quad \left(\text{en efecto, } \hat{\boldsymbol{T}}\cdot\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{ds} + \frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{ds}\cdot\hat{\boldsymbol{T}} = 2\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{ds} = 0\right)$$

de modo que aparece otro vector a escena, y que además es ortogonal al vector tangente. ¿Cómo podemos encontrar este nuevo vector? Notemos que

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{dt}\frac{1}{s'(t)} \qquad (3)$$

Esta última igualdad se debe al teorema de la función inversa. De modo que, en nuestro ejemplo, derivando (1) respecto de t y sabiendo el valor de $s'(t)$, tenemos que

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{-a\omega \cos \omega t}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i} + \frac{-a\omega \operatorname{sen} \omega t}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$s'(t) = \omega\sqrt{a^2+b^2}$$

de manera que, según (3), nos queda

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{-a \cos \omega t}{a^2+b^2}\mathbf{i} - \frac{a \operatorname{sen} \omega t}{a^2+b^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \qquad (4)$$

No resulta para nada complicado verificar que efectivamente el vector en (4) es ortogonal al vector tangente en (1). Si ahora hacemos unitario este vector obtenemos un vector unitario ortogonal al vector tangente, que llamaremos ***vector normal***, y se define como

$$\hat{N} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}/ds}{\left| d\hat{\mathbf{T}}/ds \right|}$$

que para nuestro ejemplo

$$\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

y en consecuencia

$$\hat{N} = -\cos \omega t\, \mathbf{i} - \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

2.9.- Vector normal y binormal.

Para una función con un vector de la forma, (x), un vector de la forma es llamado vector tangente en el caso de que esta función sea real y su magnitud no sea igual a cero. En esta situación, la tangente de la función dada (x) en un punto arbitrario es paralela al vector tangente, en ese punto. Aquí, con el fin de tener un vector tangente, 0 es un pre-requisito esencial. Esto es debido a que un vector de magnitud cero no puede tener dirección.

La tangente de una curva es una recta que intersecta la curva en un solo punto. Es conocido por nosotros a través del cálculo que mediante la diferenciación de una función se obtiene el punto tangencial para la curva de esa función. Un concepto similar es aplicable al cálculo vectorial, junto con una excepción.

Para una función con un vector de la forma, (x), un vector de la forma es llamado vector tangente en el caso de que esta función sea real y su magnitud no sea igual a cero. En esta situación, la tangente de la función dada (x) en un punto arbitrario es paralela al vector tangente, en ese punto. Aquí, con el fin de tener un vector tangente, 0 es un pre-requisito esencial. Esto es debido a que un vector de magnitud cero no puede tener dirección.

De manera similar, un vector tangencial unitario es definido como,

Aquí s es la longitud total del arco dado, (t) es el vector posición de la función dada y t es la variable de parametrización.

En la figura anterior, X es un punto estático, mientras que P es un punto en movimiento. El punto P se mueve lentamente en la dirección del punto X, mientras el punto P se acerca al punto X, el vector desde el punto X hasta el punto P se acerca al vector tangente en el punto X. La recta que contiene el vector tangente se conoce como recta tangencial.

Un vector normal es algo similar a un vector unitario, suponga que para una función (x), (t) es el vector posición, entonces el vector normal para la función dada es definida como,

Aquí es el vector unitario de la función dada.

Como se describió en la figura anterior, un vector normal es un vector que está perpendicular a un plano o superficie dada. Un vector normal para una superficie dada en un punto arbitrario,sea (x, y), está dado por una matriz como la siguiente,

Aquí fx y fy son diferenciales parciales de la función dada con respecto a x e y.

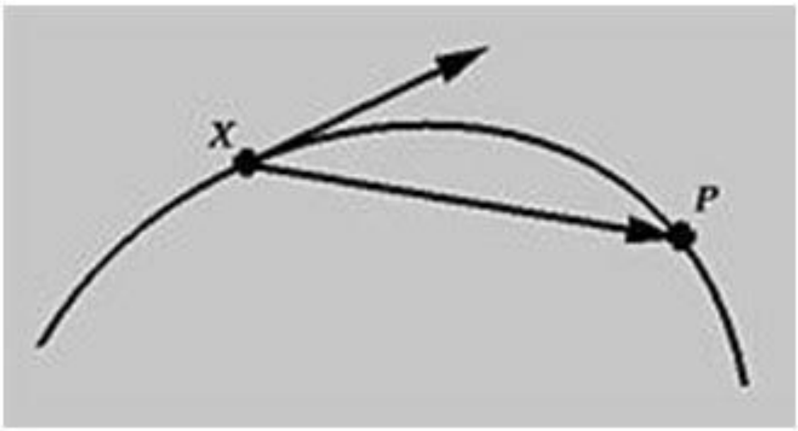
De la misma forma, el vector normal a un plano es representado por una matriz como

Donde la ecuación del plano es,

f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0

Un vector binormal es un producto cruz o producto vectorial del vector normal y del vector unitario normal. Suponga que para una función (x), (t) es el vector posición, entonces el vector binormal para la función dada se define como,

Como sabemos que tanto un vector unitario como un vector normal son vectores unitarios y que se encuentran perpendicular a la superficie dada, un vector Binormal es también un vector unitario que se encuentra normal a un plano o superficie dada. Este vector es normal a ambos, el vector unitario y el vector normal.



Vector tangente unitario y vector normal unitario principal: sea C una curva en el espacio descrita por r (t) = f (t) + g (t) +H (t) k, en donde f g y h tienen segundas derivadas.

Vector tangente unitario

½r´ (t)½T = r’ (t) /

Vector binormal unitario.- Vector unitario definido mediante B = T X N

Los tres vectores unitarios T, N, B forman un conjunto de vectores mutuamente ortogonales de orientación derecha, llamado triedo móvil Radio de curvatura.-El reciproco de la curvatura, p = 1/k se llama radio de curvatura. El radio de curvatura en un punto p de una curva es el radio de una circunferencia que se ajusta a la curva mejo que cualquier otra.

Por ejemplo, un automóvil que recorre una pista curvada. Puede considerarse que se mueve sobre una circunferencia.

Definición del Vector Tangente Unitario:

Sea c : [a , b] → R3 una trayectoria infinitamente diferenciable (es decir, existen derivadas de todos los ordenes). Supongamos que c’(t) ≠ 0 para todo t. El vector

Es tangente a c en el punto c(t) y puesto que │T(t))│ = 1, T se denomina vector tangente unitario de c

Ejemplo 1.-

Si

… c(t) = (2 cos t , 2 sen t, t)

Encontrar el vector tangente unitario.

Solución:

.. c’(t) = (−2 sen t , 2 cos t, 1)

Por lo tanto, el vector tangente unitario es:

Definición de Vector Normal Principal (unitario):

Sea C una curva suave representada por c en un intervalo abierto I. Si T'(t) ≠ 0, el vector normal principal en t se define como:

Ejemplo 2.-

Hallar el vector Normal principal para la hélice:

… c(t) = (2 cos t, 2 sen t, t)

Solución:

Por el ejemplo1 sabemos que el vector tangente unitario es:

T'(t) viene dada por:

T'(t) = (−2 cos t, −2 sen t, 0)

Como

| T'(t) | = =

se sigue que el vector normal principal es:

N(t) = ½ (−2 cos t , −2 sen t, 0) = (-cos t, sen t , 0)

Consideremos un tercer vector:

Definición de vector Binormal:

El vector Binormal es un vector unitario perpendicular a T y a N definido por:

B = T H N

Ejemplo 3.-

Hallar el vector Binormal principal para la hélice:

… c(t) = (2 cos t, 2 sen t, t)39297

Solución:

B = =

Los tres juntos, T, N y B, forman un sistema ortogonal orientado positivamente, que podemos interpretar en movimiento a lo largo de la trayectoria

Vector tangente unitario

La geometría diferencial constituye el estudio de las curvas y superficies en el espacio. Sea C una curva en el espacio definida por la función R(t), dR/dt es un vector en la dirección de la tangente a C. A dicho vector le llamaremos T(t).

Vector normal unitario

Consideramos la longitud de arco S medida a partir de un punto fijo de C. La variación de T con respecto de S es una medida de la curvatura de C y se obtiene por dT/ds. La dirección de dT/ds en un punto cualquiera de C es la correspondiente a la normal a curva en dicho punto. El vector unitario

N en la dirección de la normal se llama normal principal a la curva. Así, dT/ds = k N, siendo k la curvatura de C en el punto dado. El recíproco de la curvatura r = 1/k se llama radio de curvatura.

Vector binormal unitario

El vector unitario B definido por el producto vectorial B = T x N, perpendicular al plano formado por T y N se llama binormal a la curva. Los vectores T, N, B, forman un triedro tri-rectángulo a derechas en cualquier punto de C.

2.10.- Curvatura.

En matemáticas, la curvatura se refiere a cualquiera de una serie de conceptos vagamente relacionados en las diferentes áreas de la geometría. Normalmente se refiere a un concepto métrico de objetos matemáticos o geométricos. Por extensión también se usa el término para referirse a un número u objeto matemático que caracteriza la forma y magnitud de la curvatura. Más específicamente el término curvatura puede referirse a alguno de estos conceptos:

- Geometría diferencial de curvas:
- Geometría diferencial de curvas para curvas.
- Radio de curvatura

Geometría diferencial general:

- Geometría diferencial de superficies para superficies.
- Tensor de curvatura

• 2-forma de curvatura.

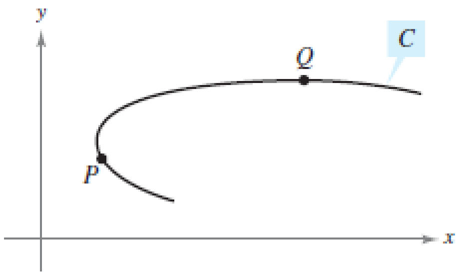
Física:

• Curvatura del espacio-tiempo.

Muchas veces no sabemos dentro de estas funciones vectoriales como va a comportarse nuestras curvas, y esto puede saberse debido a los vectores de la misma.

Un uso importante del parámetro longitud de arco es hallar la curvatura, la medida de

cuán agudamente se dobla una curva. Por ejemplo,



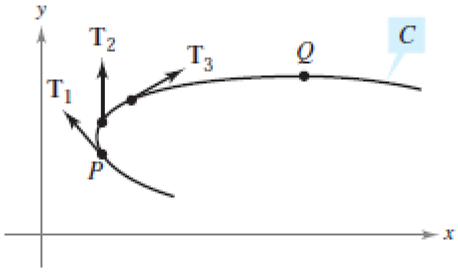
La curvatura en P es mayor que en Q

en la figura la curva se dobla más

agudamente en P que en Q, y se dice que la curvatura es mayor en P que en Q. Se puede

hallar la curvatura calculando la magnitud de la tasa o ritmo de cambio del vector unitario

tangente T con respecto a la longitud de arco s, como se muestra en la figura



La magnitud de la tasa o del ritmo de cambio de T respecto a la longitud de arco es la curvatura de una curva

Con esta pequeña explicación nos vamos a la definición de esta:

DEFINICIÓN DE CURVATURA

Sea C una curva suave (en el plano o en el espacio) dada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco. La **curvatura** K en s está dada por

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

Un círculo tiene la misma curvatura en todos sus puntos. La curvatura y el radio del círculo están relacionados inversamente. Es decir, un círculo con un radio grande tiene una curvatura pequeña, y un círculo con un radio pequeño tiene una curvatura grande.

Existe una formula para calcular la curvatura en dado caso que no tengas la curva parametrizada.

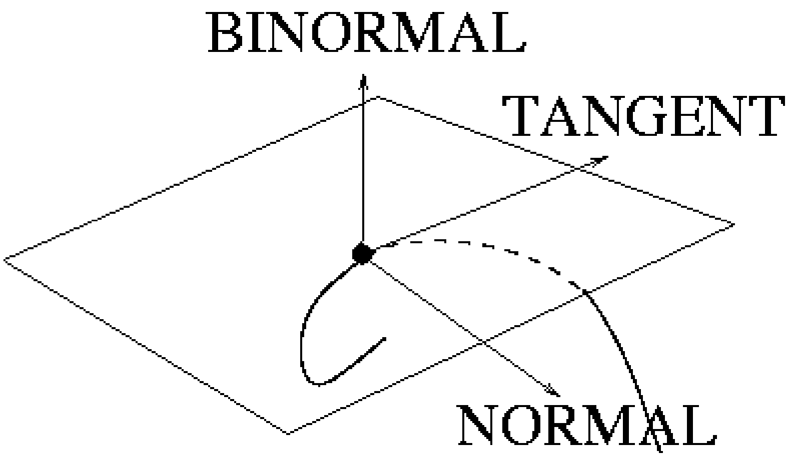
$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Vectores Tangente Normal y Binormal Unitarios

Podemos definir el vector tangente unitario a la curva suave C por:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

El vector unitario B definido por el producto vectorial B=T x N, perpendicular al plano formado por T y N, se le llama binormal a la curva C.



2.11.- Aplicaciones.

Las corrientes costeras son de gran importancia para todas las áreas de la oceanología ya que estas determinan las características físicas del medio. Los cambios en la velocidad de una corriente costera determinan las características del sedimento. Estos dos factores juntos, a su vez, limitan o promueven un hábitat.

Es muy común encontrar desagües cerca de la costa. El conocer las características de la corriente costera permite predecir la trayectoria de aguas negras.

Una de las maneras de conocer las corrientes costeras es mediante boyas. Una boya se coloca en el mar y su posición se registra cada cierto tiempo.

Para determinar las características de una corriente costera, se coloca una boya en el mar. Como resultado se obtienen los siguientes datos. El ángulo es con referencia al Este. La distancia es en m.

DISEÑO DE CARRETERAS

En la ingeniería civil, una de las principales aplicaciones del cálculo vectorial se encuentra en la rama del diseño de vías y carreteras, más específicamente, en la curvatura de estas construcciones. En primer lugar hay que saber que toda carretera se compone de tres tipos de curvaturas, estos son: las rectas, las curvas de transición y la curva como tal.

En las rectas, la curvatura es igual a cero; en las curvas de transición, la curvatura es variable y en la curva como tal, la curvatura es constante. En este blog, se intentara explicar y hacer un especial énfasis en las curvas de transición, es decir, con curvatura variable.

FUNCIÓN:

El objetivo principal de las curvas de transición consiste en evitar varias discontinuidades en la curvatura de la carretera. Teniendo en cuenta esto, las curvas de transición deben cumplir con las mismas condiciones de seguridad y de estética de toda la carretera.

FORMA Y CARACTERISTICAS:

En la mayoría de los casos, la curva más aceptada para el diseño de carreteras es la clotoide. Esta curva se representa por la ecuación:

$$R * L = A^2$$

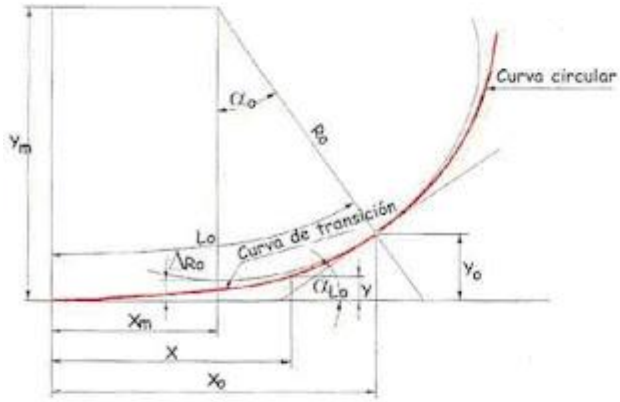
Donde:

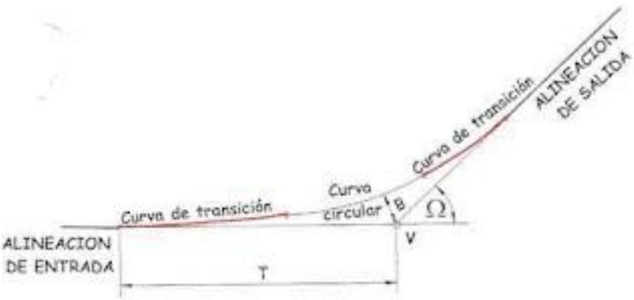
R es el radio de la curvatura en cualquier punto.

L es la longitud de la curva desde su punto de inflexión y el punto de radio R. A es el parámetro de la clotoide, este es característico de la clotoide.

El punto de inflexión de la curvatura se halla en el momento en que el radio es infinito.

Otros de los elementos que hacen parte de la clotoide son:





Ro es el radio de la curva circular contigua a la clotoide.

Lo es la longitud total de la curva de transición.

ΔRo es el retranqueo de la curva circular.

Xo, Yo son las coordenadas del punto de unión de la clotoide y de la curva circular, referidas a la tangente y normal a la clotoide en su punto de inflexión.

Xm, Ym son las coordenadas de la curva circular (retranqueada) respecto a los mismos ejes. αL es el ángulo de desviación que forma la alineación recta del trazado con la tangente en un punto de la clotoide. En radianes, este ángulo es = L/2*R. En grados, este ángulo es = 31.83*L/R. αLo es el ángulo de desviación en el punto de tangencia con la curva circular. Ω es el ángulo entre las rectas tangentes a dos clotoides consecutivas en sus puntos de inflexión. V es el vértice o punto de intersección de las rectas tangentes a dos clotoides consecutivas en sus puntos de inflexión.

T es la tangente o distancia entre el vértice y el punto de inflexión de la clotoide. B es la bisectriz o distancia entre el vértice y la curva circular.

LONGITUD MINÍMA:

La curva de transición debe cumplir con una longitud mínima para cumplir con varios requerimientos, entre estos están:

LIMITACION DE LA VARIACION DE LA ACELERACIÓN CENTRIFUGA EN EL PLANO HORIZONTAL

La variación aceptada de la aceleración centrípeta y que no es contrarrestada por el peralte de la carretera, debe tener un valor máximo, denominado J.

Para efectos de cálculo, suponiendo que la clotoide sea recorrida a una velocidad constante igual a la velocidad especifica de la curva circular asociada de radio menor, el parámetro A se puede definir como:

$$A_{min} = \sqrt{\frac{V_e * R_0}{46.656 * J} * \left(\frac{V_e^2}{R_0} - 1.27 * \frac{(P_0 - P_1)}{\left(1 - \frac{R_0}{R_1}\right)}\right)}$$

Donde:

Ve es la velocidad específica de la curva circular asociada y de radio menor.

J es la variación de la aceleración centrifuga.

R1 es el radio de la curva circular asociada de radio mayor.

R0 es el radio de la curva circular asociada de radio menor.

P1 es el peralte de la curva circular asociada de radio mayor.

P0 es el peralte de la curva circular asociada de radio menor.

Teniendo en cuenta esto, la longitud mínima de la curva debe ser:

$$L_{min} = \frac{V_e}{46.656 * J} * \left(\frac{V_e^2}{R_0} - 1.27 * \frac{(P_0 - P_1)}{\left(1 - \frac{R_0}{R_1}\right)}\right)$$

Los valores de J aceptados para todo trazado están dados por la siguiente tabla:

V_e (km/h)	V_e <80	80< V_e <100	100< V_e <120	120< V_e
J (m/s^3)	0.5	0.4	0.4	0.4
J_{max} (m/s^3)	0.7	0.6	0.5	0.4

LIMITACION DE LA VARIACION DE LA PENDIENTE TRANSVERSAL:

La variación de la pendiente transversal no puede ser mayor al 4%/s, según la velocidad especifica de la curva de radio menor.

CONDICIONES DE PERCEPCION VISUAL:

Con el fin de que una curva sea lo suficientemente perceptible por el conductor, es necesario que:
- La variación de azimut entre los extremos de la clotoide, sea mínimo 1/18 radianes.
- El retranqueo de la curva circular debe ser como mínimo 50 centímetros.

En términos de cálculo, las condiciones que se deben cumplir son:

$$L_{min} = \frac{R_0}{9} \text{ Y } A_{min} = \frac{R_0}{3}$$

O

$$L_{min} = 2 * (3 * R_0)^{\frac{1}{2}} \text{ Y } A_{min} = \left(12 * R_0{}^3\right)^{\frac{1}{4}}$$

Donde:

Lmin es la longitud en metros.

R0 es el radio de la curva circular en metros.

Además, es muy recomendable que la variación del azimut entre los extremos de la clotoide, se como mínimo, la quinta parte del ángulo total de giro entre las alineaciones rectas consecutivas en que se inserta la clotoide.

Ósea:

$$L_{min} = \frac{(\pi * \Omega * R_0)}{500} \text{ Y } A_{min} = R_0 * \left(\frac{\pi * \Omega}{500}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde:

Lmin es la longitud en metros.

R0 es el radio de la curva circular en metros.

Ω es el ángulo de giro entre alineaciones rectas.

VALORES MAXIMOS:

Es recomendable que los valores mínimos dados no se excedan considerablemente, de hecho, el máximo factor para excederse es de 1.5.

En las siguientes imágenes podemos observar diversas aplicaciones de la curvatura en la vida real.

Puente Juscelino Kubitschek, Brasilia (Brasil). Aquí se puede observar una calada con curvas consecutivas muy complicadas, donde su diseño tuvo que haber tenido en cuenta las numerosas curvaturas en la calzada de tal manera que no se excedan los valores máximos planteados por la reglamentación.

Las altas velocidades de los automóviles, unidas a unas curvaturas en las carreteras muy inapropiadas, conllevan a un muy alto riesgo de accidentalidad en estos trazados.

Construcción de una carretera. Antes de iniciar un proceso constructivo de una carretera, es necesario que se lleven a cabo una gran cantidad de estudios que conllevaran posteriormente a un diseño preliminar. En este diseño la curvatura juega un papel muy importante para garantizar la suficiente seguridad al conductor.

es un campo de las matemáticas referidas al análisis real multivariable de vectores en 2 o más dimensiones.Es un enfoque de la geometría diferencial como conjunto de fórmulas y técnicas para solucionar problemas muy útiles para la ingeniería y la física.

Como sabemos los vectores son muy utilizados para representar tanto fuerzas como movimientos.

Además, también es muy utilizado para resolver sistemas de ecuaciones. Cualquier problema medianamente complejo de ingeniería puede convertirse a un sistema de ecuaciones, que mediante cálculo matricial que está relacionado con el cálculo vectorial, puede resolverse. Dentro de la ingeniería mecánica que es una de las ramas de la ingeniería industrial, en esta podemos notar que el cálculo vectorial se usa mucho en problemas de dinámica y cinemática de mecanismos. Es decir, para analizar el movimiento (como por ejemplo las velocidades, aceleraciones, etc.) de cada uno de los elementos que forman cualquier tipo de mecanismo se puede ver desde la suspensión de un automóvil como hasta el complejo brazo de un robot.

Muchos de los universitarios intentamos buscar una justificación de peso para demostrarnos que esta materia tiene que ver mucho en nuestra carrera y sobretodo la gran importancia que tiene. Una justificación o demostración para esto se centra más en los mecanismos que son como conjuntos de cuerpos o piezas móviles interconectadas entre sí, y sus movimientos y fuerzas, son representadas mediante vectores, que deben relacionarse entre sí mediante operaciones relacionadas con el cálculo vectorial.

El cálculo vectorial también es muy utilizado en el cálculo de estructuras de edificios y de máquinas.

Como nos podemos dar cuenta el cálculo vectorial es fundamental para laingeniería industrial pero especialmente en la rama de ingeniería mecánica.

UNIDAD III FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

3.1.- Definición de una función de varias variables.

Se definen las funciones de varias variables y se enmarcan las funciones de dos variables como un caso particular de ellas. Se define el concepto de dominio de una función de dos variables como un conjunto de puntos que se encuentran en un plano y que son admisibles por la función. Se analiza un ejemplo en el que una cantidad llamada Índice de Temperatura-Humedad depende de la temperatura en grados centígrados y de la humedad relativa.

3.2.- Gráfica de una función de varias variables.

Gráfica de una función de varias variables y curvas de nivel.

Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando se gráfica. La gráfica de una función fde dos variables es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) para los que z=f(x,y) y (x,y) está en el dominio de f.

Una segunda manera de visualizar una función de dos variables es como un campo escalar que asigna al punto (x,y) el escalar Z=f(x,y).

Un campo escalar se caracteriza por sus curvas de nivel ó líneas de contorno a lo largo de las cuales el valor f(x,y) es constante.

3.3.- Curvas y superficies de nivel.

Las curvas y superficies no son funciones, son conjuntos. que se pueden ver como "cortes" de los gráficos que describen las funciones. a cada corte de la función se lo llama nivel.

El conjunto de parejas ordenadas x,y se llama dominio de la función y el conjunto de valores correspondiente a z se llama contra dominio, rango, ámbito. Una función de dos variables se escribe z

= “f(x,y) de x, y”.

Las variables x, y se denominan variables independientes y z la variable dependiente.

La gráfica de una función Z es una superficie del espacio tridimensional. El potencial electrostático en un punto P(x,y) del plano debido a una carga puntual unitaria, colocada en el origen está dada por: Donde C es una constante positiva, las líneas o curvas equipotenciales son círculos alrededor de la carga y se les denomina curvas del nivel-

Las curvas de nivel se usan: en la elaboración de mapas orográficos o planos de configuración.

En los mapas meteorológicos o climáticos, las curvas de nivel se llaman isotérmicos (cuando la temperatura es constante: isotérmico), en un mapa meteorológico que represente la presión atmosférica se les llama isobalos (presión barométrica constante).

3.4.- Derivadas parciales de funciones de varias variables y su interpretación geométrica.

Las derivadas parciales nos indicarán también la pendiente de una recta concreta tangente a la superficie. Antes, pero, vamos a aprender a calcular derivadas parciales, ya que es un metodología a la que luego le daremos sentido.

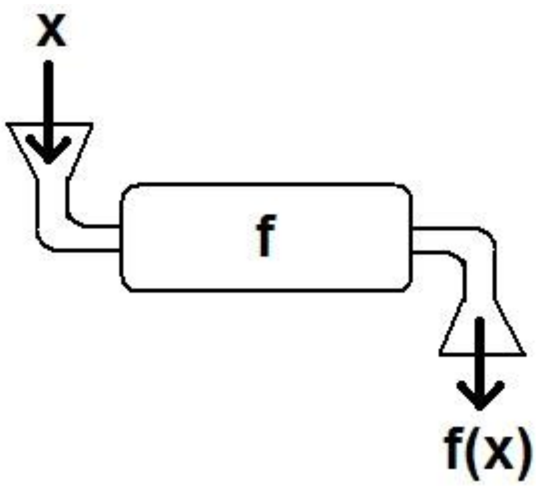
Para calcular una derivada parcial de una función en diversas variables tenemos que derivar como siempre respecto una de las variables y mantener las demás como constantes, (como valores fijos).

3.5.-funciones de varias variables.

Las funciones de varias variables son funciones como cualquier otra, cumplen la misma definición de función; una relación. La diferencia es que una variable dependiente estará regida por más de una variable independiente. Es muy común trabajar con funciones de tres variables, generalmente llamadas z = f(x,y).

Una función es una relación entre dos conjuntos donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo conjunto. Esta es la definición matemática de una función. Existen funciones comunes que poseen una variable independiente (x) que cambia libremente sin depender de ningún parámetro y una variable dependiente (*y*) que cambia respecto a *x*. El cambio que sufre *y* está definido por una expresión algebraica que funge como regla.

Se puede entender a una función como una máquina por la que entra algo y sale algo diferente, procesado:



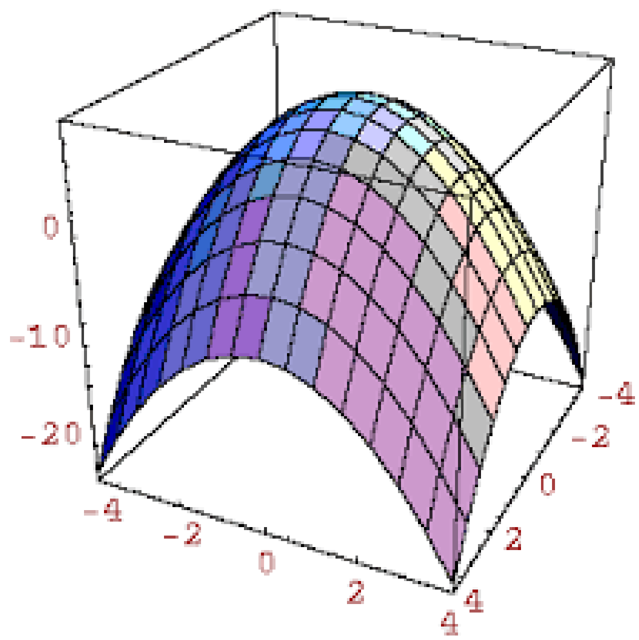
La imagen anterior lo ilustra perfectamente. La función genera resultados para $y = f(x)$ dependiendo el valor que tome x. En el mundo real, estas funciones describen fenómenos que dependen de solo una variable. Por ejemplo, en cinemática, la rama de la física que estudia el movimiento sin preocuparse por las causas que lo provocan, la posición de un objeto se define por funciones que varían respecto al tiempo t. Son funciones de una única variable dependiente. Sin embargo, existen fenómenos de la naturaleza cuyo comportamiento no depende únicamente de un solo factor. Estas son funciones de varias variables.

Las funciones de varias variables son funciones como cualquier otra, cumplen la misma definición de función; una relación. La diferencia es que una variable dependiente estará regida por más de una variables independiente. Es muy común trabajar con funciones de tres variables, generalmente llamadas $z = f(x,y)$. La idea de relación es más compleja puesto que el valor de z depende no solo del valor de x o de y, sino de puntos coordenados a los que les corresponde un valor de z.

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$$

$$f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$$

Casi por impulso, se tiende a graficar una función para observar su comportamiento y entenderlo con más claridad. Las funciones de varias variables no están exentas de ello. El problema es que no todas las funciones de varias variables se pueden graficar. De hecho, el máximo número de variables que permite graficar es de tres variables. ¿Por qué? Pues porque dimensionalmente no se pueden observar más de tres variables interactuando entre sí, o al menos no gráficamente. Un ejemplo de como se ve una función de tres variables es el siguiente:



Sí, un paraboloide es una función de tres variables. Varias superficies tridimencionales son funciones de tres variables. Los planos, paraboloides, etcétera. Pero, no todas las gráficas en tercera dimensión son funciones. ¿Cómo saberlo? Aplicando la prueba de la recta vertical. Tanto en funciones de dos variables como de tres, la recta vertical sirve para demostrar que una gráfica no es función. Una esfera, por ejemplo, no es función puesto que no pasa dicha prueba; esto significa que a un mismo punto coordenados (*x, y*) le corresponden dos valores de *z*. Rompe con la definición de función.

Rango y dominio

Las funciones de varias variables también se someten a un rango y dominio, tal y como ocurre en funciones de dos variables. Sin embargo, la idea es la misma. El dominio es el conjunto de valores que puede tomar el argumento de la función sin que esta se indefina. El rango es el conjunto de valores reales que toma la función *z* en función del dominio.

El proceso para encontrar el dominio es similar a el caso de funciones de dos variables, pero ahora se debe encontrar en función de la relación entre las variables del argumento. Es decir, el dominio depende de como interactuan estas variables. Por ejemplo:

$$f(x,y) = 2xy$$

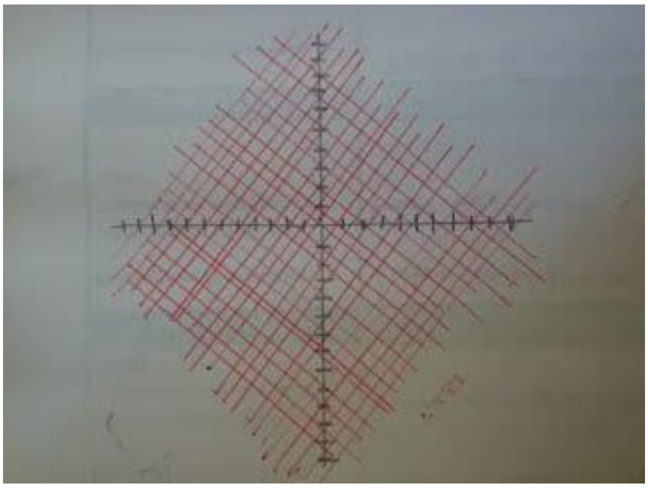
Esta función es muy simple. El dominio es el conjunto de valores de x y de y tal que ambas variables pueden tomar cualquier valor de los números reales, puesto que la función f jamás se indefinirá. La manera formal de escribirlo es:

$$Dom[f] = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

De tal manera que el rango de la función es el conjunto de valores toma *f* o *z*, que en realidad son todos los reales, pues nunca se indefine:

$$Im[f] = \mathbb{R}$$

En funciones de varias variables, es posible graficar el dominio. Esto da una idea de los valores que toman *x* y *y* en un plano, en el caso de una función de tres variables. Para la función anterior, el gráfico del dominio es el siguiente:



Lo anterior se entiende como que un tapiz de puntos. Todos los valores de *x* y de *y* son permitidos, y es por eso que se marca todo el plano cartesiano, en dos dimensiones solamente.

Para el siguiente ejemplo de función:

$$f\,(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Esta función es algo más compleja. Existe una raíz que afecta al argumento. El método para encontrar dominios no es siempre el mismo. En este caso, se sabe que argumento de una raíz cuadrada no puede ser negativo, por lo que el dominio queda de la siguiente forma:

$$Dom[f] = \{(x,y) |\, 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

Es bastante simple de anotar para cualquier caso. Este dominio es el conjunto de puntos que simplemente no indefinen a la función *f*. La imagen se encuentra evaluando a la función desde el punto en que comienza a definirse y el punto donde se alcanza el valor máximo de *f*, si es que lo hay:

$$f\ (0,0) = \sqrt{4-0-0} = 2$$

Valor máximo

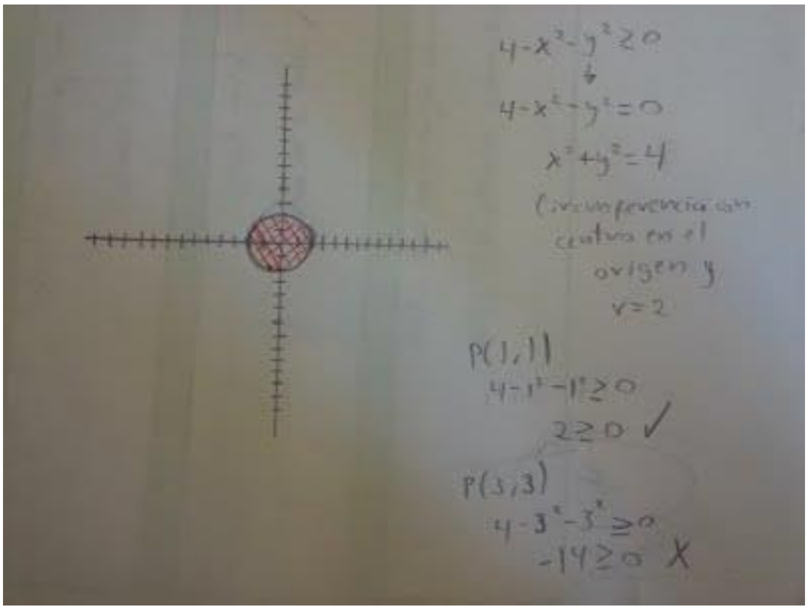
$$f\ (2,0) = \sqrt{4-4-0} = 0$$

Valor mínimo

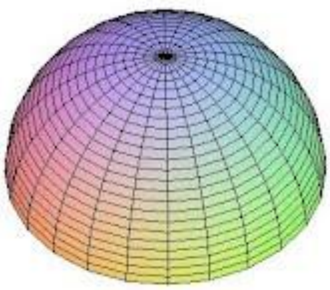
Ahora se escribe la imagen:

$$Im[f] = [0\ ,2]$$

El dominio gráfico de la función se haya encontrando una gráfica bidimensional que sirva de frontera para la indefinición y evaluando un punto por dentro y otro por fuera y así determinar que región indefinie a *f* y cual no.



Esta función resulta ser una semiesfera que abarca al eje z positivo. La circunferencia que describe a la mitad es justamente la frontera del dominio.



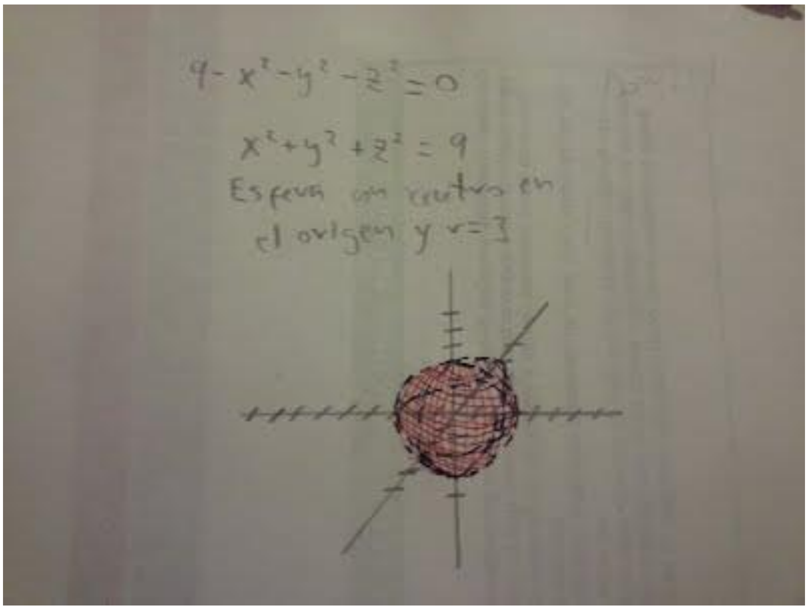
El último dominio que se puede graficar es el de una función de cuatro variables. En estos caso, el dominio es una gráfica tridimensional. Por ejemplo:

$$f\,(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - \ x^2 - y^2 - z^2}}$$

El dominio se encuentra de la misma forma. Aunque la función tenga tres variables en su argumento, existe un conjunto de valores que probablemente indefinan a *f*. La raíz cuadrada del denominador no puede ser igual a 0. Así mismo, su argumento no puede ser negativo. Por la conjunción de ambas condiciones se tiene que el dominio es:

$$Dom[f] = \{(x, y, z)|9 - \ x^2 - y^2 - x^2 > 0\}$$

La gráfica del dominio está en tres dimensiones:



El gráfico es pues una esfera. Es importante notar que la superficie está punteada pues solo el "contenido" es parte del dominio. Si las variables del argumento de la función tomaran valores de un punto de la superficie, *f* se indefiniría.

3.6.- Interpretación geométrica.

Interpretación geométrica de la derivada. expresa la pendiente de la recta que pasa por (a, f (a)) y (b, f(b)), es lógico pensar que si b y a están muy próximos entre sí, separados por un valor h que tiende a cero, esta recta se aproximará a la recta tangente a la función en el punto x = a.

El concepto de derivada de una función matemática se halla íntimamente relacionado con la noción de límite. Así, la derivada se entiende como la variación que experimenta la función de forma instantánea, es decir, entre cada dos puntos de su dominio suficientemente próximos entre sí. La idea de instantaneidad que transmite la derivada posee múltiples aplicaciones en la descripción de los fenómenos científicos, tanto naturales como sociales.

Variación de una función

Dada una **función** f (x), se define **variación de la función** entre dos puntos de su dominio x_1 y x_2, siendo $x_1 <>_2$, a la diferencia f (x_2) - f (x_1). Cuando esta diferencia es positiva, la función es **creciente** en el punto; si es negativa, la función es **decreciente**.

Relacionada con este concepto, se llama **variación media** de una función f (x) en un intervalo [a, b] al cociente siguiente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El valor de este cociente coincide con la **pendiente** de la **recta** que pasa por los puntos de coordenadas (a, f (a)) y (b, f (b)).

Cuando los dos puntos del intervalo [a,b] están lo suficientemente próximos entre sí, el cociente anterior indica la **variación instantánea** de la función. En tal caso, el valor de b podría expresarse como b = a + h, siendo h un valor infinitamente pequeño.

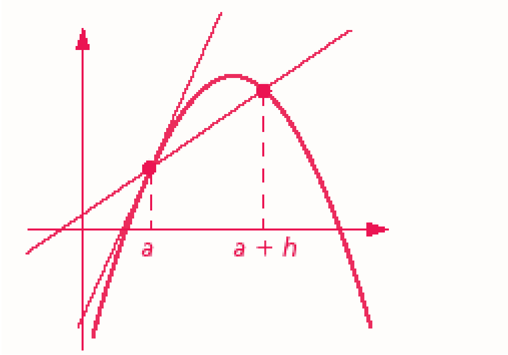
Derivada de una función en un punto

Dada una función f (x), y considerado un punto a de su **dominio**, se llama **derivada** de la función en ese punto, denotada como f ¿ (a), al siguiente **límite**:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este límite también puede expresarse de las dos formas alternativas siguientes:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Apoyo gráfico para la definición de derivada en un punto.

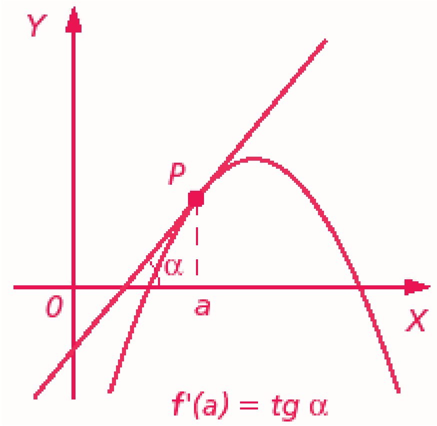
Interpretación geométrica de la derivada

La definición de derivada tiene mucho que ver con el concepto de variación instantánea. Teniendo en cuenta que el cociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

expresa la pendiente de la recta que pasa por (a, f (a)) y (b, f(b)), es lógico pensar que si b y a están muy próximos entre sí, separados por un valor h que tiende a cero, esta recta se aproximará a la recta tangente a la función en el punto x = a.

Tal es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.



La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Derivadas laterales

Como sucedía con los límites, se pueden definir los conceptos de **derivadas laterales** de una función en un punto.

Dada una función f (x) y considerado un punto a de su dominio de definición, se define su **derivada por la derecha**, y se denota como f ¿ (a^+), al límite siguiente:

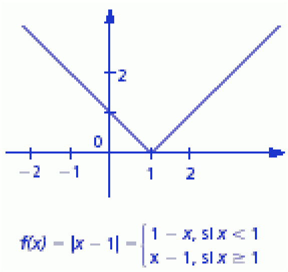
$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Por su parte, la **derivada por la izquierda** de f (x) en el punto a, denotada por f ¿ (a^-), se define como el siguiente límite:

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una función se dice **derivable** cuando tiene derivadas por la derecha y por la izquierda, y sus valores coinciden.

- Cociente incremental



Ejemplo de una función que tiene derivadas por la derecha y por la izquierda que no son iguales entre sí. Esta función no es derivable en x = 1.

Una notación utilizada comúnmente para indicar el incremento de la función f (x) dividido por el incremento del valor de la variable independiente suele ser:D f (x) / Dx.

- Derivadas sucesivas

Al derivar una función se obtiene, a su vez, una función. Por tanto, en ciertos casos será posible derivar la derivada. Así, la segunda derivada de una función y = f (x) se escribirá como y¿ o f ¿ (x), la tercera derivada (derivada de la segunda derivada) se denotará por y¿¿ o f ¿¿ (x), y así sucesivamente. Un ejemplo típico de funciones derivables infinitas veces son las funciones trigonométricas seno y coseno.

3.7.- Derivada direccional.

En análisis matemático, la derivada direccional (o bien derivada según una dirección) de una función multivariable, en la dirección de un vector dado, representa la tasa de cambio de la función en la dirección de dicho vector. Este concepto generaliza las derivadas parciales, puesto que estas son derivadas direccionales según la dirección de los respectivos ejes coordenados.

3.8.- Derivadas parciales de orden superior.

En cálculo diferencial, una derivada parcial de una función de diversas variables, es la derivada respecto a cada una de esas variables manteniendo las otras como constantes. Las derivadas parciales son útiles en cálculo vectorial, geometría diferencial, funciones analíticas, física, matemática, etc.

Al realizar esta derivada obtenemos la expresión que nos permite calcular la pendiente de la recta tangente a dicha función A en un punto dado. Esta recta es paralela al plano formado por el eje de la incógnita respecto a la cual se ha hecho la derivada con el eje que representa los valores de la función.

Analíticamente el gradiente de una función es la máxima pendiente de dicha función en la dirección que se elija. Mientras visto desde el álgebra lineal, la dirección del gradiente nos indica hacia donde hay mayor variación en la función.

3.9.- Incrementos y diferenciales.

Para funciones de una variable, se define el incremento de cómo y la diferencial de como representa el cambio en la altura de la curva y representa la variación en a lo largo de la recta tangente cuando varía en una cantidad.

3.10.- Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para poder calcular las derivadas parciales de funciones que dependes de mas de una variable f(x,y), y a su vez estas dependen de una tercer variable f(x(t), y(t)), esta función se deriva siguiendo la siguiente estructura:

3.11.- Derivación parcial implícita.

En la matemática la derivada parcial implícita corresponde a una función que tiene diversas variables, en este caso es una derivada con respecto a una de las variables manteniendo todas las otras como constantes. Las derivadas parciales implícitas con usadas en los cálculos de vectoriales y geometría diferencial.

3.12.- Gradiente.

En matemáticas, el 'gradiente' es una generalización multivariable de la derivada. Mientras que una derivada se puede definir solo en funciones de una sola variable, para funciones de varias variables, el gradiente toma su lugar. El gradiente es una función de valor vectorial, a diferencia de una derivada, que es una función de valor escalar.

Al igual que la derivada, el gradiente representa la pendiente de la línea tangente a la gráfica de una función. Más precisamente, el gradiente apunta a los puntos de la gráfica a los cuales la gráfica tiene un mayor incremento. La magnitud del gradiente es la pendiente de la gráfica en esa dirección.

Los componentes del gradiente en coordenadas son los coeficientes de las variables presentes en la ecuación del espacio tangente al gráfico. Esta propiedad de caracterización del degradado permite que se defina independientemente de la elección del sistema de coordenadas, como un campo vectorial cuyos componentes en un sistema de coordenadas se transformarán cuando se pase de un sistema de coordenadas a otro.

3.13.- Campos vectoriales.

En matemáticas, un campo vectorial representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Es una expresión de cálculo vectorial que asocia un vector a cada punto en el espacio euclidiano.

Los campos vectoriales se utilizan en física, por ejemplo, para representar la velocidad y la dirección de un fluido en el espacio, o la intensidad y la dirección de fuerzas como la gravitatoria o la fuerza electromagnética.

Como expresión matemática rigurosa, los campos vectoriales se definen en variedades diferenciables como secciones del fibrado tangente de la variedad.

3.14.- Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física.

Sea F un campo vectorial definido en un conjunto abierto $\Omega \subseteq R^n$y consideremos sus coordenadas F = (F_1, F_2, . . . ,F_n). Supongamos que F es diferenciable en un punto a$\in$ Ω, lo que sabemos equivale a que todos los campos escalares F_k , con k = 1, 2, . . . , n, sean diferenciables en el punto a. De hecho cada vector gradiente ∇F_k (a) es la k-ésima fila de la matriz jacobiana de F en a. Pues bien, la traza de dicha matriz es, por definición, la divergencia del campo F en el punto a, y se denota por div F(a).

3.15.- Valores extremos de funciones de varias variables.

Una función z= f(x,y) tiene un máximo (mínimo) en un punto P(Xo,Yo) si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en cualquier otro punto X(x,y) de algún entono de P.

Si una función diferenciable z= f(x,y) alcanza un extremo en el punto P(Xo,Yo) entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero.

UNIDAD IV INTEGRACIÓN

4.1.- Introducción.

El cálculo integral es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

La integral definida de una función representa el área limitada por la gráfica de la función, con signo positivo cuando la función toma valores positivos y negativo cuando toma valores negativos.

4.2.- Integral de línea.

En matemáticas, una integral de línea o curvilínea es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva. En el caso de una curva cerrada en dos dimensiones o del plano complejo, se llama también integral de contorno.

Las integrales de línea de un campo vectorial son independientes de la parametrización siempre y cuando las distintas parametrizaciones mantengan el sentido del recorrido de la curva. En caso de elegirse dos parametrizaciones con sentidos de recorrido contrarios, las integrales de línea del mismo campo vectorial resultarán con iguales módulos y signos contrarios.

4.3.- Cálculo de áreas.

En ocasiones no es posible calcular el área de una región con una única integral. En estos casos se puede dividir a la región en subregiones, cuyas áreas sean calculables mediante integrales iteradas dobles. El área total será la suma de las áreas.

4.4.- Integrales iteradas.

La integración iterada es un método de integración en el cual efectuamos la operación de integración en cascada con respecto a cualquier variable en relación con las otras variables que se mantienen constantes.

La integración iterada también puede realizarse como integración definida e indefinida.

4.5.- Integral doble en coordenadas rectangulares.

Integrales Dobles Las integrales dobles son una manera de integrar sobre una región bidimensional. Entre otras cosas, nos permiten calcular el volumen bajo una superficie.

Dada una función de dos variables, f(x, y), puedes encontrar el volumen entre la gráfica y una región rectangular del plano xy al tomar la integral de una integral esta es la función de y

a esta integral se le conoce como integral doble. las cuentas se verán y serán muy diferentes pero el resultado será siendo el mismo.

4.6.- Integral doble en coordenadas polares.

Para definir la integral doble de una función sobre una región R en el plano xy, iniciamos dividiendo a R en rectángulos cuyos lados fueran paralelos a los ejes coordenados. Ésta era la forma natural para usarlos porque sus lados tenían valores constantes, ya sea de y o de x.

4.7.- Integral triple.

Las integrales triples están basadas en el mismo principio de las integrales dobles, solamente que aquí ya no se habla necesariamente de regiones R en un plano, sino que se hablan de particiones interiores de D.

Ahora lo que se hace es calcular un volumen que se encuentra delimitado por una región tridimensional, cabe mencionar que el diferencial tampoco sigue siendo dA sino que cambiar por un diferencial de volumen (dV) que, en coordenadas cartesianas, se encuentra expresado como dx dy dz.

Una forma sencilla de empezar a comprender una integral triple, es recordar un prisma rectangular. Esto porque se puede decir que el diferencial de volumen es un diferencial de área (dx dy), el cuál, se está multiplicando por un diferencial en el eje z (dz), por ejemplo, que nos terminará dando el volumen del prisma. Es como calcular el volumen de una caja, multiplicas el largo por el ancho (área) y, posteriormente, por la profundidad.

4.8.- Aplicaciones a áreas y solución de problema.

Aplicaciones a áreas y solución de problema

Suma y resta de vectores: método gráfico y analítico.

Cuando necesitamos sumar 2 o más magnitudes escalares de la misma especie lo hacemos aritméticamente. Por ejemplo, 2kg + 5kg = 7kg; 20m2 + 10 m2 = 35m2;3h + 4h = 7h; 200K + 100K = 300K. Sin embargo, para sumar magnitudes vectoriales, que como ya mencionamos aparte de magnitudes tienen dirección y sentido, debemos utilizar métodos diferentes a una simple suma aritmética. Estos métodos pueden ser gráficos o analíticos, pero ambos casos se consideran además de la magnitud del vector, su dirección y su sentido.

4.9.- Integral triple en coordenadas polares.

De la misma manera en que la integral de una función positiva f (x) de una variable definida en un intervalo puede interpretarse cómo el área entre la gráfica de la función y el eje x en ese intervalo, la doble integral de una función positiva f (x, y) de dos variables, definida en una región del plano xy, se puede interpretar como el volumen entre la superficie definida por la función y el plano xy en ese intervalo. Al realizar una "integral triple" de una función f (x, y, z) definida en una región del espacio xyz, el resultado es un hipervolumen, sin embargo es bueno notar que si f (x, y, z) = 1 el resultado se puede interpretar como el volumen de la región de integración. Para integrales de órdenes superiores, el resultado geométrico corresponde a hipervolúmenes de dimensiones cada vez superiores.

La manera más usual de representar una integral múltiple es anidando signos de integración en el orden inverso al orden de ejecución (el de más a la izquierda es el último en ser calculado), seguido de la función y los diferenciales en orden de ejecución.
Es importante destacar que es imposible calcular la antiderivada de una función de más de una variable por lo que las integrales múltiples indefinidas no existen.

4.10.- Coordenadas cilíndricas y esféricas.

Las coordenadas cilíndricas son una extensión del sistema de coordenadas polares al espacio tridimensional. Generalmente, en lugar de utilizar x, y y z, se usan r, el ángulo theta y la variable z, x o

y. La última variable designa la extensión máxima de una superficie. Para elegir que variable dejar intacta, hay que observar la gráfica de la función; la variable que no cambia es aquella sobre cuyo eje abre la superficie.

El nombre de estas coordenadas proviene de la idea de que cada punto en el espacio es un punto de la superficie de una infinita cantidad de cilindros circulares, todos con un radio arbitrario de valor r.

4.11.- Aplicación de la integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto en el espacio representan con (r, θ) a las coordenadas polares de la proyección del punto en el plano xy y z el valor de la coordenada en el eje

z. Gráficamente, un punto P(x, y, z).

Si una región S de R3 tiene un eje de simetría, las integrales triples son más fáciles de evaluar si se hace un cambio de coordenadas de cartesianas a cilíndricas. Sea $S = \{(r, \theta, z) : \alpha \leq \theta \leq \beta, g1(\theta) \leq r \leq g2(\theta), h1(r, \theta) \leq z \leq h2(r, \theta)\}$ la región de integración. Consideremos f una función continua en S de tres variables x, y, z, de modo que (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas del punto (x, y, z).

BIBLIOGRAFÍA

Calculo vectorial	Jerry E. Marsden	Pearson	Calculo vectorial	Jerry E. Marsden	Pearson
Calculo vectorial	Claudio Pita Ruiz	Prentice Hall	Calculo vectorial	Claudio Pita Ruiz	Prentice Hall
Vector Calculus	Susan J. Colley	Gandhi	Vector Calculus	Susan J. Colley	Gandhi

Cálculo Vectorial	https://www.youtube.com/watch?v=aYlICOhaO1g&list=PL9SnRnlzo	MateFácil	Cálculo Vectorial	https://www.youtube.com/watch?v=aYlICOhaO1g&list=PL9SnRnlzoyX2-	MateFácil
Cálculo Vectorial	https://www.youtube.com/watch?v=bo5VMo7c59Q	Particular Puebla	Cálculo Vectorial	https://www.youtube.com/watch?v=bo5VMo7c59Q	Particular Puebla
Cálculo Vectorial	https://www.youtube.com/watch?v=IrTeyyzerjI	Alex	Cálculo Vectorial	https://www.youtube.com/watch?v=IrTeyyzerjI	Alex