ANTOLOGIA

ALGEBRA

TÉCNICO EN RECURSOS HUMANOS

1ER CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Nombre de la materia

Objetivo de la materia:

Que el estudiante desarrolle el lenguaje algebraico pasando por el lenguaje aritmético, adquirir habilidades del pensamiento lógico algebraico, así como resolver problemas cotidianos utilizando herramientas algebraicas.

Criterios y procedimientos de evaluación y acreditación:

Actividad en plataforma	20%
Actividades en el aula	30%
Examen	50%
Total	100%
Escala de calificaciones	7-10
Mínima aprobatoria	7

INDICE

UNIDAD I

EL ALGEBRA

1.1 Introducción al lenguaje algebraico

El lenguaje numérico expresa la información en Matemáticas a través de números particulares y el lenguaje algebraico expresa la información en Matemáticas mediante letras que representan números en general. Una expresión algebraica es una combinación de números, letras y signos de operación.

Como hemos dicho antes, el lenguaje algebraico sirve para construir expresiones algebraicas, es decir, formulaciones en las que números, símbolos y letras se combinan para expresar una relación lógica y/o formal, en la que algunas cantidades se conocen y otras son desconocidas.

Las expresiones algebraicas, entonces, son cadenas ordenadas de estos signos, en las cuales hallaremos números, letras y operadores aritméticos. Dependiendo de cuáles sean, podemos distinguir entre, por ejemplo:

Incógnitas (que expresan valores desconocidos) o variables (que expresan valores no fijos), siendo estas últimas dependientes o independientes.

Signos aritméticos (que expresan operaciones aritméticas determinadas).

Superíndices o potencias (que suponen multiplicar un número por sí mismo una cantidad de veces determinada).

Raíces o radicales (que suponen dividir un número por sí mismo una cantidad de veces determinada).

Funciones (que expresan una relación de dependencia entre dos valores de dos o más expresiones).

1.2 Signos de operaciones y relación en el lenguaje algebraico

Al igual que en la aritmética, en el álgebra se usan las operaciones de suma, resta, multiplicación, y división. Adicionalmente están las operaciones de potenciación, radicación y logaritmos.

Los signos de operación son:

Suma: +:

$$a + b.$$

Resta: -:

$$a - b$$

Multiplicación: × o ·, o es implícito entre las variables:

$$a \times b \; ; \quad a \cdot b \; ; \quad a \; b$$

División: /, : o ÷:

$$a/b \; ; \quad a : b \; ; \quad a \div b \; ; \quad \frac{a}{b}$$

Potenciación: Es un pequeño número o letra arriba y a la derecha de una cantidad:

$$a^b \; ; \quad e^a = \exp a$$

Radicación:

$$\sqrt{a} \; ; \quad \sqrt[b]{a}$$

logaritmos:

$$\ln a \; ; \quad \lg a \; ; \quad \log a \; ; \quad \log_b a$$

Signos de relación

Indican la relación que hay entre dos expresiones. Los signos de relación son:

Menor que: <

Mayor que: >

Igual a: =

Signos de agrupación

Los signos de agrupación se usan para cambiar el orden de las operaciones. Las operaciones indicadas dentro de ellos deben realizarse primero.

Los signos de agrupación son:

Los paréntesis: ()

Los corchetes: []

Las llaves: {}

las barras: II

Si no tiene signo entre el número y el signo de agrupación, se tiene que realizar una multiplicación. ejemplo:

15{3-2} = + 15

1.3 Traducción del lenguaje natural a expresiones algebraicas

Traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico es una acción que inconscientemente hacemos en el día a día, por ejemplo, al deducir los diferentes gastos del día y así como planificar las compras haciendo una suposición de las variaciones de los precios. A pesar de que se omita el formalismo matemático, los cálculos mentales que puedan desarrollarse siguen principios algebraicos muy claros.

Básicamente, esta traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico está estrechamente ligada a nuestros cerebros, incluso desde tiempos antiguos. En los siguientes párrafos aprenderás cómo sacar provecho de estas traducciones, obteniendo una compresión consciente del simple carácter matemático de la cotidianidad, así que continúa leyendo.

Cómo traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico

Sabemos muy bien que en el lenguaje algebraico existen símbolos alfanuméricos y signos operacionales, relacionales y agrupadores, los cuales se ocupan de constituir a las expresiones algebraicas y a las ecuaciones, es decir, a las palabras y oraciones del álgebra.

El monomio, es el término algebraico o expresión algebraica más simple que existe, por lo que, en esencia, es el equivalente a una palabra. Y, el polinomio (y las ecuaciones) es la expresión más compleja, por lo es el equivalente a una oración.

Lo anterior forma parte del cuadro lingüístico del álgebra, el cual, como se pudo leer, es similar al de cualquier idioma. Sin embargo, las claves para traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico se encuentran en las maneras de interpretar las operaciones y relaciones entre expresiones algebraicas con las cantidades que deseamos conocer. A continuación te mostrare algunos ejemplos para aclarar este punto.

Ejemplos de traducciones

Comencemos por lo más simple, con este enunciado: la suma de c, d y b.

Traducir esa oración de lenguaje común a lenguaje algebraico no es nada complicado. Por ello, en lenguaje algebraico ese enunciado queda así:

$$a + b + d$$

Otro ejemplo que demuestra la facilidad para traducir es este: suma del cuadrado de x, la raíz cuadrada de y, y la quinta potencia de z. La traducción algebraica de esta oración es la siguiente:

$$x^2 + sqrty + z^5$$

Por último, tenemos este ejemplo: los 4 números enteros consecutivos posteriores al número entero x. Cuya traducción algebraica es:

$$x, x+1, x+2, x+3, x+4$$

Cómo pudiste comprobar, parece que hasta el propio lenguaje común coopera en las traducciones, por ello, la clave es la interpretación del significado matemático de las palabras comunes. Aunque, estos han sido situaciones muy ideales y poco prácticas. La verdadera emoción y utilidad se da a la hora de resolver los problemas.

Cómo resolver problemas de la cotidianidad haciendo uso del lenguaje algebraico

Lo anterior solo fue un abrebocas, el verdadero meollo de las traducciones se concentra en las resoluciones de problemas prácticos, es decir, aquellos que predominantemente son del tipo comercial o económico, en donde el dinero está en juego.

Partiendo de los principios de las traducciones de lenguaje común a lenguaje algebraico podemos llegar a resolver toda clase de problemas con que nos topemos. Por ello ten siempre en mente, que el truco de todo es interpretar el significado matemático de las palabras comunes. Anteriormente pudiste ver que este significado es lo suficientemente explícito, aunque, no siempre lo será.

Las ecuaciones serán la herramienta primordial para hallar la solución de los problemas prácticos, ya que estas permiten asociar, mediante igualdades, diferentes términos algebraicos según las condiciones dictadas por el problema. Las ecuaciones permiten lograr una correspondencia entre el lenguaje común y el lenguaje algebraico. Así que conociendo las reglas básicas de despeje y simplificación, vamos a resolver los siguientes problemas.

Cabe aclarar que en este artículo solamente trataremos con ecuaciones de primer grado, para evitar cualquier complicación en la explicación.

Ejemplos de problemas junto con sus soluciones

Comencemos con el siguiente problema:

Repartir 310$ entre tres personas de modo que la segunda reciba 20$ menos que la primera y 40$ más que la tercera.

Primeramente, identifiquemos a la primera persona como x, a la secunda como y, y a la tercera como z. De modo que construyamos la siguiente ecuación:

$$310 = x + y + z$$

Ahora, tomemos en cuenta lo que el enunciado informa, estableciendo las siguientes identidades algebraicas:

$$1.\ y = x - 20$$

$$2.\ y = z + 40$$

Llegados a este punto hay varias formas de proceder. De todas ellas vamos a invertir las identidades para obtener ecuaciones para x y z, en función de y.

1. $x = y + 20$

2. $z = y - 40$

Con esto hecho, lo que queda por hacer es sustituir en la ecuación principal los valores de x y z para dejar la ecuación con solamente la incógnita y. Así nos quedamos con la siguiente expresión:

$$310 = (y + 20) + y + (y - 40)$$

Simplificando:

$$310 = 3y - 20$$

Despejando:

$$310 + 20 = 3y$$

$$y = \frac{330}{3} = 110$$

De esta forma tenemos que la primera persona recibirá:

$$x = 110 + 20 = 130$$

Y la tercera persona:

$$z = 110 - 40 = 70$$

$$z =$$

1.4 Propiedades de las igualdades

Igualdad matemática es la proposición de equivalencia existente entre dos expresiones algebraicas conectadas a través del signo = en la cual, ambas expresan el mismo valor.

La relación de igualdad establecida en una expresión de este tipo se emplea para denotar que dos objetos matemáticos expresan el mismo valor.

$$9 - 1 = 8$$

La igualdad matemática es una expresión que está formada por dos miembros. El miembro de la derecha, al lado izquierdo del signo igual y el miembro de la izquierda, al lado derecho del sigo de igualdad. La solución del enunciado anterior nos revela el planteamiento de igualdad de las expresiones. Así, el miembro de la izquierda da como resultado un valor de ocho, igual al valor del miembro de la derecha, que es igualmente ocho.

Se dice que una expresión de igualdad es falsa, cuando el resultado de uno de sus miembros es diferente al otro. Así, la expresión siguiente, resulta ser falso.

$$10x + 2 = 5 * (2x + 5)$$

Como el resultado de esta expresión es: $10x + 2 = 10x + 25$ dicha expresión resulta ser falsa.

Así también, se dice que una expresión de igualdad resulta ser verdadera cuando el resultado de ambos miembros del planteamiento resulta ser del mismo valor. Así, la expresión siguiente, resultas ser verdadera.

$$10x + 2 = 5 * (2x + 1)$$

Como el resultado de esta expresión es: $10x + 2 = 10x + 5$, dicha expresión resulta ser verdadera.

Propiedades de la igualdad matemática

Si se multiplica ambos miembros de la expresión por el mismo valor, la igualdad se mantiene.

Si dividimos ambos miembros de la expresión por el mismo valor, la igualdad se mantiene.

Si restamos el mismo valor a ambos miembros de expresión, la igualdad se mantiene.

Si sumamos el mismo valor a ambos miembros de la expresión, la igualdad se mantiene.

Por último, conviene destacar la importancia de no confundir ecuación con una igualdad matemática. Una ecuación se articula mediante una igualdad aunque podría no cumplirse. Tal es el caso de los sistemas de ecuaciones que no tienen solución. Por su parte, una igualdad matemática puede serlo sin ser ecuación. Por ejemplo:

$5=5$

Es una igualdad ya que 5 es igual a 5, pero esto no constituye una ecuación pues no existen incógnitas.

1.5 Soluciones de problemas algebraicos

Ten en cuenta los siguientes pasos:

Lee el problema cuidadosamente e identifica bien de qué se trata.

Interpreta o plantea el problema como una expresión algebraica.

Representa los valores desconocidos con variables.

Simplifica y resuelve la ecuación planteada.

Verifica tu respuesta.

Observa el siguiente ejemplo:

El costo de alquilar una camioneta es de $30 por día, más $0.5 por kilómetro recorrido. Ana rentó una camioneta por dos días y tuvo que pagar 360. ¿Cuántos kilómetros recorrió?

Vamos a resolverlo paso a paso.

Paso 1. Lee el problema cuidadosamente

Cuando leas, considera cuál es la pregunta que debes responder e identifica la información que te están proporcionando. En nuestro ejemplo, la pregunta es:

El costo de alquilar una camioneta es de $30 por día, más $0.5 por kilómetro recorrido. Ana rentó una camioneta por dos días y tuvo que pagar $360. **¿Cuántos kilómetros recorrió?**

Y la información que te están dando es:

El costo de alquilar una camioneta es de **$30 por día**, **más $0.5 por kilómetro** *recorrido. Ana rentó una camioneta* **por dos días** *y tuvo que* **pagar $360**. *¿Cuántos kilómetros recorrió?*

Paso 2. Plantea el problema como una expresión algebraica

Puedes intentar reescribir el problema con palabras más sencillas, antes de expresarlo algebraicamente. Para este ejemplo, podría ser algo como:

30 por cada día usado más 0.5 por cada kilómetro recorrido nos da el costo del alquiler

Como puedes ver, quitamos los signos de dinero para mayor claridad y pusimos los factores que afectan el costo del alquiler.

Ahora, observa que el problema nos dice que Ana usó la camioneta por dos días, por lo tanto podemos reemplazar los días usados por 2.

30 por 2 más 0.5 por cada kilómetro recorrido nos da el costo del alquiler

El problema también dice que el costo del alquiler fue de $360, así que podemos remplazar la igualdad de la ecuación por esta información:

30 por 2 más 0.5 por cada kilómetro recorrido nos da

Recuerda que *por* se debe interpretar como multiplicación y *más* como suma, así que nuestro problema ahora se ve así:

$$30 \cdot 2 + 0.5 \cdot \textit{(kilómetros recorridos) nos da } 360$$

La frase *nos da* puede ser interpretada como el símbolo igual:

$$30 \cdot 2 + 0.5 \cdot \textit{(kilómetros recorridos)} = 360$$

Paso 3. Representa los valores desconocidos

Recuerda que en álgebra, los valores desconocidos son representados con letras a las que llamamos variables o incógnitas. En este problema, lo que no sabemos y debemos resolver es cuántos kilómetros recorrió Ana. Para nuestro caso, usaremos la letra como incógnita, de esta forma nuestro problema va quedando así:

$$30 \cdot 2 + 0.5 \cdot (\textit{kilómetros recorridos}) = 360$$

$$30 \cdot 2 + 0.5 \cdot k = 360$$

$$30 \cdot 2 + 0.5k = 360$$

¡Genial! Ahora tenemos el problema descrito como una ecuación algebraica.

Paso 4. Resuelve la ecuación planteada

Solo falta resolver la ecuación simplificando y cancelando como viste anteriormente. Empecemos por simplificar 30*2:

$$30 \cdot 2 + 0.5k = 360$$

$$60 + 0.5k = 360$$

Para dejar la incógnita a la izquierda, cancelemos el usando su inverso aditivo.

$$-60 + 60 + 0.5k = -60 + 360$$

$$\cancel{-60 + 60} + 0.5k = -60 + 360$$

Simplifiquemos -60+360:

$$0.5k = -60 + 360$$

$$0.5k = 300$$

Ahora para dejar sola a k, usemos el inverso multiplicativo de 0.5.

$$\left(\frac{1}{0.5}\right)0.5k = \left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 300$$

$$\cancel{\frac{1}{0.5}(0.5)}\, k = \left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 300$$

Simplifiquemos 1/0.5 * 300

$$k = \left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 300$$

$$k = \frac{300}{0.5}$$

$$k = 600$$

Obtenemos así la respuesta: Ana recorrió 600 kilómetros.

Paso 5. Verifica tu respuesta

Recuerda que comprobar la respuesta es siempre una buena idea. Como viste anteriormente, debes reemplazar la solución en la ecuación y si obtienes una igualdad, la respuesta es correcta.

$$30 \cdot 2 + 0.5k = 360$$

$$30 \cdot 2 + 0.5 \cdot 600 = 360$$

$$30 \cdot 2 + 0.5 \cdot 600 = 360$$

$$60 + 0.5 \cdot 600 = 360$$

$$60 + 300 = 360$$

$$60 + 300 = 360$$

$$360 = 360$$

¡Excelente! Hemos encontrado y comprobado la solución al problema planteado.

1.6 Jerarquía de operaciones

Para utilizar correctamente la **jerarquía de operaciones** existen cuatro pasos que se deben aplicar en **todas las expresiones numéricas** y así obtener el resultado correcto. Revisa **paso a paso el proceso** que te explicamos aquí.

1. Signos

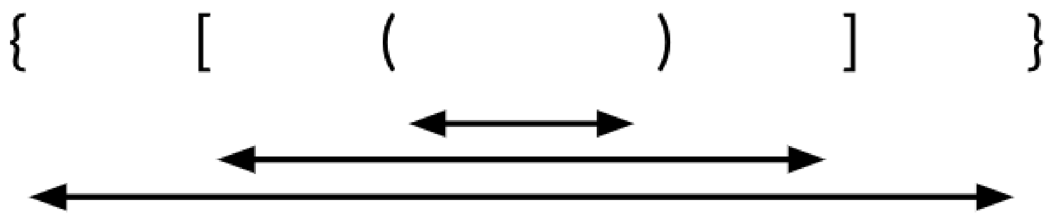
El primer paso para **resolver una expresión matemática** de acuerdo con la jerarquía de operaciones es eliminando todos los **signos de agrupación**:

Llaves { }

Corchetes [ ]

Paréntesis ( )

La manera correcta de resolver las **expresiones que usan estos signos** es de adentro hacia afuera. Los encontrarás en el siguiente orden.



Resolvamos **el siguiente ejemplo** para aprender cómo funciona:

$$9-\{6+[5-3+(6-2)]+8(4-7)\}$$

Primero, se deben resolver las operaciones **dentro de los paréntesis**:

$$9-\{6+[5-3+4]+8(-3)\}$$

Ahora, continuamos con los **corchetes**:

$$9-6+6+8(-3)$$

¡Atención aquí! El **único paréntesis** que nos queda es el -3, pero porque este debe multiplicarse por el 8 antes de **eliminar las llaves**:

$$9-\{6+6-24\}$$

$$9-\{-12\}$$

Para este último paso, el **-12 cambiará de signo**, debido al menos que existe un negativo fuera de los signos de agrupación:

$$9+12$$

21

2. Potencias y raíces

Una vez que se han eliminado las **operaciones con signos de agrupación**, el siguiente **nivel dentro de la jerarquía de operaciones** son las potencias y raíces. Vamos un ejemplo sencillo:

$$(62+8-\sqrt{1})+(43-52\ )$$

El pimer paso es resolver las **potencias y las raíces**:

$$(36+9)+48-25$$

Ahora, como se explicó antes, toca las **operaciones dentro de los paréntesis**, al mismo tiempo que estos se eliminan:

$$27+23$$

$$50$$

3. Multiplicaciones y divisiones

Para continuar con el **orden de la jerarquía de operaciones**, en una expresión algebraica el tercer nivel son las **multiplicaciones y divisiones**.

A diferencia de los niveles anteriores, donde la dirección en que se resolvían las expresiones no afectaba el resultado, a partir de aquí debes recordar que todo se hace **de izquiera a derecha**.

Checa el siguiente ejemplo:

$$4\times2(3+6)\div2$$

$$4\times2\times9\div2$$

Recuerda, primero se realizan las **operaciones de la izquierda** y avanza hacia la derecha:

$$8\times9\div2$$

$$72\div2$$

$$36$$

4. Sumas y restas

Finalmente, el último paso de la **jerarquía de operaciones** es la resolución de las **sumas y restas**.

Fíjate cómo se resolvió el siguiente ejercicio:

$$32-20+(5\times4)\div2$$

Paso 1: Signos de agrupación:

$$32-20+20\div2$$

Paso 2: Potencias:

$$9-20+20\div 2$$

Paso 3: Multiplicaciones y divisiones

$9-20+10$

Paso 4: Sumas y restas

$$-11+10$$

$$-1$$

Como notarás, la **jerarquía de operaciones** es muy sencilla. Sin embargo, es importante que **recuerdes estas reglas** y pongas mucha atención al resolver este tipo de ejercicios en tu examen de admisión. Conoce qué tan preparado te encuentras y resuelve el siguiente **diagnóstico gratuito** del curso en línea Unitips.

1.7 Sucesión aritmética

Una sucesión es un conjunto de cosas (normalmente números) una detrás de otra, en un cierto orden. Las aplicaciones de las sucesiones son incontables. Se utilizan abundantemente para demostrar los teoremas y las propiedades de la topología matemática, y en la muy conocida demostración del número pi.

Definición

Podemos definir una sucesión aritmética de la siguiente manera.

Es una secuencia de números, en la cual la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante d, excepto el primer término que es dado. El valor de la constante d puede ser positivo o negativo.

Ejemplos:
La sucesión: s = 2, 5, 8, 11, 14, 17, $\cdots$ Es un ejemplo claro de una sucesión aritmética, dado que la diferencia entre dos términos consecutivos nos da una constante d de valor 3.

La sucesión: s = -6, -2, 2, 6, 10, 14, $\cdots$ Es un ejemplo claro de una sucesión aritmética, dado que la diferencia entre dos términos consecutivos nos da una constante d de valor 4.

La sucesión: s = -1, 5, 11, 16, 22, 28, $\cdots$ No es un ejemplo de una sucesión aritmética, dado que la diferencia entre el tercer y cuarto término nos da una constante d =

5 diferente al valor de la otra constante con los otros téerminos que es d = 6.

Cuando hablamos de sucesiones aritméticas es importante definir la notación utilizada.

Notación: (Sucesión Aritmética)
Comunmente se denominan los términos de una sucesión de la siguiente manera:

a(1) = primer término de la sucesión
a(2) = segundo término de la sucesión
⋮
a(n) = n-ésimo término de la sucesión
d = Constante o diferencia común

El n-ésimo término de una sucesión aritmética es la regla que determina como se calculan los términos de la misma.

Encontrando el N-ésimo Término

Cuando se habla del N-ésimo Término de una sucesión aritmética nos referimos a la regla o fórmula que rige el patrón que siguen todos los términos de la misma. Para encontrar esta fórmula debemos seguir los siguientes pasos:

Encontrando el N-ésimo Término
1. Determinar el valor de a(1). Es el primer término de la sucesión.

2. Realizar la diferencia d entre dos términos consecutivos en la sucesión, esa diferencia d debe ser igual para cualquier par de términos escogidos.

3. Comprobar el resultado dado, haciendo la respectiva sucesión paso a paso. Si no tenemos una sucesión, entonces utilizamos la fórmula cuando tenemos un término y la constante o distancia entre dos términos.

La fórmula para el término general de una sucesión aritmética es:

$$a\,n = a\,1 + n - 1 \cdot d$$

donde a(n) es el término deseado, a(1) es el primer término y d es la constante o diferencia común

Utilicemos los siguientes ejemplos para tener una idea más concreta de como encontrar el N-ésimo Término de una sucesión.

Supongamos que se quiere encontrar el N-ésimo Término de la sucesión: 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , 23 , 26 , ...
Para hacer esto seguimos los pasos anteriores.

Encontrando el N-ésimo Término
1. Para determinar a(1), podemos usar la formula para n=1

$$a\,n = a\,1 + n - 1 \cdot d \longrightarrow a\,1 = 8 + 1 - 1 \cdot d \longrightarrow a\,1 = 8$$

podemos determinar a(1) tomando directamente el primer término de la sucesión.

$$a\,n = 8 + n - 1 \cdot d$$

2. Encontrar el valor de d:

$$d = a\,2 - a\,1 \longrightarrow d = 11 - 8 \longrightarrow d = 3$$

$$d = a\,4 - a\,3 \longrightarrow d = 17 - 14 \longrightarrow d = 3$$

$$d = a\,7 - a\,6 \longrightarrow d = 26 - 23 \longrightarrow d = 3$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$a\,n = 8 + n - 1 \cdot 3$$

3. Verifica:

para $n = 1 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (1 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (0) \cdot 3 \longrightarrow 8$
para $n = 2 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (2 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (1) \cdot 3 \longrightarrow 11$
para $n = 3 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (3 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (2) \cdot 3 \longrightarrow 14$
para $n = 4 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (4 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (3) \cdot 3 \longrightarrow 17$
para $n = 5 \longrightarrow 8 + (n - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (5 - 1) \cdot 3 \longrightarrow 8 + (4) \cdot 3 \longrightarrow 20$

Asi encontramos el N-ésimo Término de la sucesión provista viene dado por: $a(n) = 8 + (n - 1) \cdot 3$.

Supongamos que se quiere encontrar el N-ésimo Término de la sucesión: -13 , -19 , -25 , -31 , -37 , -43 ,...
Para hacer esto seguimos los pasos anteriores.

Encontrando el N-ésimo Término
1. Para determinar a(1), podemos usar la formula para n=1

$$a\,n = a\,1 + n - 1 \cdot d \longrightarrow a\,1 = -13 + 1 - 1 \cdot d \longrightarrow a\,1 = -13$$

podemos determinar a(1) tomando directamente el primer término de la sucesión.

$$a_n = -13 + (n - 1) \cdot d$$

2. Encontrar el valor de d:

$$d = a_2 - a_1 \longrightarrow d = (-19) - (-13) \longrightarrow d = -6$$

$$d = a_4 - a_3 \longrightarrow d = (-31) - (-25) \longrightarrow d = -6$$

$$d = a_6 - a_5 \longrightarrow d = (-43) - (-37) \longrightarrow d = -6$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$a_n = -13 + (n - 1) \cdot (-6)$$

3. Verifica:

para n = 1 ⟶ -13 + (n - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (1 - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (0) ·(-6) ⟶ -13
para n = 2 ⟶ -13 + (n - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (2 - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (1) ·(-6) ⟶ -19
para n = 3 ⟶ -13 + (n - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (3 - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (2) ·(-6) ⟶ -25
para n = 4 ⟶ -13 + (n - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (4 - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (3) ·(-6) ⟶ -31
para n = 5 ⟶ -13 + (n - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (5 - 1) ·(-6) ⟶ -13 + (4) ·(-6) ⟶ -37

Asi encontramos el N-ésimo Término de la sucesión provista viene dado por:-13 + (n - 1) ·(-6).

Supongamos que se quiere encontrar el N-ésimo Término de la sucesión: -7 , -1 , 5 , 11 , 17 , 23 ,...
Para hacer esto seguimos los pasos anteriores.

Encontrando el N-ésimo Término
1. Para determinar a(1), podemos usar la formula para n=1

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \longrightarrow a_1 = -7 + (1 - 1) \cdot d \longrightarrow a_1 = -7$$

podemos determinar a(1) tomando directamente el primer término de la sucesión.

$$a\ n = -7 + n - 1 \ \cdot d$$

2. Encontrar el valor de d:

$$d = a\ 2 - a\ 1 \longrightarrow d = (-1) - (-7) \longrightarrow d = 6$$

$$d = a\ 4 - a\ 3 \longrightarrow d = (11) - (5) \longrightarrow d = 6$$

$$d = a\ 6 - a\ 5 \longrightarrow d = (23) - (17) \longrightarrow d = 6$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$a\ n = -7 + n - 1 \ \cdot (6)$$

3. Verifica:

para n = 1 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (1 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (0) ·(6) ⟶ -7
para n = 2 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (2 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (1) ·(6) ⟶ -1
para n = 3 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (3 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (2) ·(6) ⟶ 5
para n = 4 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (4 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (3) ·(6) ⟶ 11
para n = 5 ⟶ -7 + (n - 1) ·(6) ⟶ -7 + (5 - 1) ·(6) ⟶ -7 + (4) ·(6) ⟶ 17

Asi encontramos el N-ésimo Término de la sucesión provista viene dado por:-7 + (n - 1) ·(6).

La siguiente aplicación interactiva te provee una guia para encontrar el n-ésimo término de sucesiones aritméticas, presiona el siguiente botón para iniciar la misma.

1.8 Sucesión geométrica

Progresión geométrica es toda sucesión de términos en la cual cada término después del primero se obtiene multiplicando al término anterior una constante llamada razón.

Se denotan mediante PG y entre cada término y el siguiente se escribe una coma.

Ejemplos.

1) $PG = \{5, 10, 20, 40, 80, \cdots\}$es una progresión geométrica cuya razón es 2 ya que:

$$\frac{10}{5} = 2, \quad \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{40}{20} = 2, \quad etc.$$

2) $PG = \{243, 81, 27, 9, 3, \cdots\}$es una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{3}$ ya que:

$$\frac{81}{243} = \frac{1}{3}, \quad \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \quad \frac{9}{27} = \frac{1}{3}, \quad etc.$$

Una progresión geométrica es creciente cuando su razón, en valor absoluto, es mayor que uno.

Ejemplo.

$PG = \{1, 5, 25, 125, \cdots\}$,es creciente porque su razón es 5.

Una progresión geométrica es decreciente cuando su razón, en valor absoluto, es menor que uno.

Ejemplo.

$PG = \left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \cdots\right\}$,es decreciente ya que su razón es $\frac{1}{2}$.

ELEMENTOS Y DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIM

Sea la siguiente progresión:

$$PG = \{a, b, c, d, e, \cdots, u\}$$

en la que u es el término enésimo y cuya razón es r.

Por definición, en toda progresión geométrica, cada término es igual al anterior multiplicado por la razón, por lo tanto:

$$b = a \cdot r$$

$$c = b \cdot r = a \cdot r \cdot r = a \cdot r^2$$

$$d = c \cdot r = a \cdot r^2 \cdot r = a \cdot r^3$$

$$e = d \cdot r = a \cdot r^3 \cdot r = a \cdot r^4$$

y así sucesivamente.

Se puede apreciar que un término cualquiera es igual al primero de la progresión multiplicado por la razón elevada a una potencia igual al número de términos que le preceden.

Como u es el término enésimo y le preceden $n - 1$ términos, se tiene que:

$$u = a \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo.

Hallar el séptimo término de $PG = \{3,6,12,\cdots\}$

Solución.

$$r = \frac{6}{3} = 2$$

$$a = 3$$

$$n = 7$$

$$\therefore \quad u = 3(2^{7-1}) = 3(2^6) = 3(64) = 192$$

1.9 Concepto serie

Una serie es un conjunto de cosas que tienen una relación entre sí y que se suceden unas a otras. Por ejemplo: "Una serie de malos resultados desencadenó el despido del entrenador", "Si te fijas en la serie de acontecimientos, no resulta tan extraño que las cosas hayan terminado de esta forma", "La familia Kennedy fue golpeada por una serie de tragedias en el último medio siglo".

Una serie matemática, en este marco, es la expresión de la suma de los infinitos términos de una sucesión (una aplicación definida sobre los números naturales). Una serie de datos, por otra parte, es un conjunto de resultados observados en una cierta secuencia temporal.

1.10 Variación proporcional

Antes necesitamos saber qué es una magnitud. Una magnitud es aquello que se puede medir. Por ejemplo, el peso de una persona, el número de albañiles trabajando, el número de plátanos, la cantidad de pienso que come un perro, la distancia entre dos pueblos o la velocidad de un caballo al galopar.

Todas estas magnitudes se pueden relacionar con otras.

Se puede relacionar:

El peso de una persona con la talla de ropa que usa.

El número de albañiles trabajando con el tiempo que tardan en terminar la obra.

El número de plátanos con el número de cajas necesarias para colocarlos.

La distancia entre dos pueblos con el tiempo que se tarda en ir de uno a otro.

La velocidad de un caballo galopando con el tiempo que tarda el caballo en llegar de un punto a otro.

Hay varios tipos de relaciones. Hoy veremos solo una de ellas: la proporcionalidad directa

Para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que si duplicamos una, la otra se tiene que duplicar, si la triplicamos la otra también y si la reducimos a la mitad la otra también se tiene que reducir. Se puede entender que si aumentamos la cantidad de una, la otra tiene que aumentar también proporcionalmente.

¿Qué relación podemos ver entre el número de plátanos y el número de cajas que necesitamos para guardarlos?

Nº de plátanos	3	6	9	12	15
Nº de cajas	1	2	3	4	5

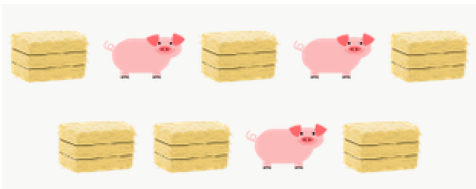
Podréis observar que cuantos más plátanos tenemos más cajas necesitamos, ¿verdad? Estas dos magnitudes mantienen una relación proporcionalmente directa.

Es importante saber que el cociente (razón o proporción) entre dos magnitudes directamente proporcionales es siempre constante. En nuestro ejemplo tenemos que la razón es 3.

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = 3$$

Las relaciones de proporcionalidad aparecen con mucha frecuencia en nuestra vida cotidiana.

¿Alguna vez habéis comprado caramelos? ¿Cómo calculabais la cantidad de dinero que teníais que pagar por los caramelos? ¿Qué me podéis decir de estas dos magnitudes, el número de cerdos y el número de fardos de paja que se necesita para alimentarlos?



¿Podríais decir que mantienen una proporcionalidad directa?

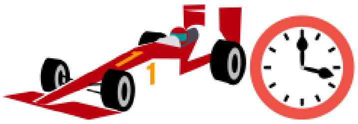
Si quieres aprender a resolver problemas de proporcionalidad, revisa este post de problemas de proporcionalidad, tienes varios ejemplos para practicar. Recuerda que el método Smartick se adapta a tu nivel de matemáticas. Regístrate y pruébalo gratis.

1.11 Variación proporcional inversa

Ya vimos en la entrada de proporcionalidad directa que hay relaciones en las que cuanto más crece una de las magnitudes más crece la otra. Pero cuando una magnitud crece y la otra disminuye proporcionalmente, se le llama proporcionalidad Inversa.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Cuanto mayor velocidad lleve el coche de carreras menos tiempo tardará en dar una vuelta al circuito

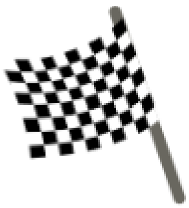


Imaginemos que dando una vuelta al circuito a 100 km/h, el coche tarda 12 min. En este caso y sabiendo que existe una relación de proporcionalidad inversa podremos decir que si multiplicamos la velocidad por 2 (200 km/h), entonces el tiempo por vuelta quedará dividido entre 2 (6 min).

Si por el contrario, redujera su velocidad a la mitad (100 km/h : 2 = 50 km/h) el tiempo por vuelta sería al doble (12 min x 2 = 24 min)

Si el coche diera su última vuelta en 4 min, ¿qué habría pasado con la velocidad del coche durante esa vuelta?

(12 min : 4 min = 3) Como el tiempo se ha dividido entre 3, la velocidad se tiene que multiplicar por 3 (3 x 100 km/h = 300 km/h). Es decir que la velocidad a la que el coche dio su última vuelta fue 300 km/h.



Con estos ejemplos podemos observar el porqué del nombre INVERSA para este tipo de relación de proporcionalidad. Lo que ocurre con una de las magnitudes ocurre de forma INVERSA con la otra magnitud, cuando una crece la otra disminuye y viceversa.

Ahora, igual que ocurre con la proporcionalidad directa, vamos a hallar la Razón de Proporción.

Para calcular la razón tenemos que multiplicar las cantidades de cada magnitud relacionadas entre sí.

100 km/h x 12 min = 1200

200 km/h x 6 min = 1200

50 km/h x 24 min = 1200

300 km/h x 4 min = 1200

Al ver esto recordamos que la razón de proporción es una constate, es decir que es igual para cada par de números que representan las magnitudes relacionadas. En este caso la razón de proporción es 1200

Si quieres en esta entrada puedes aprender a resolver problemas de proporcionalidad.

Recuerda que en Smartick tienes muchos más ejercicios y problemas de proporcionalidad inversa y proporcionalidad directa para practicar.

Si quieres aprender muchas más matemáticas de primaria, adaptadas a tu nivel, regístrate en el método Smartick y pruébalo gratis.

1.12 Porcentajes

El porcentaje es una fracción o una parte de 100, denominándose también como tanto por ciento, y se indica con el símbolo %.

Una forma fácil de interpretar un porcentaje es como una cantidad determinada de cada 100 unidades.

Por ejemplo, 42% significa 42 de cada 100 unidades, y es equivalente a 42/100 y a 0,42. Es decir, puede expresarse como una división o como el cociente de ésta.

Otra forma de interpretar el porcentaje es como el factor 0,01, por el cual se multiplica el número que le antecede. Es decir, 55% es igual a 55*0,01, y, a su vez, 0,01 es equivalente a 1/100.

Una forma adicional de entender el porcentaje es como el rendimiento que poseen 100 unidades de algo en determinadas situaciones.

¿Cómo calcular el porcentaje?

Para calcular el porcentaje de un número debemos tomar dicha cifra y multiplicarla por el tanto por ciento respectivo y dividirlo entre 100.

Por ejemplo, si tenemos 130 alumnos en una entidad educativa y queremos calcular el 12% de ese grupo debemos multiplicar 130*12/100=15,6.

La fórmula puede resumirse como:

$$a\% \text{ de } N = axN/100$$

Por otro lado, si buscamos calcular el porcentaje entre dos cifras, debemos dividir la menor entre la mayor y multiplicar por cien. Es decir, si tenemos 200 personas y queremos saber a qué porcentaje es equivalente una muestra de 30 personas de dicho grupo, debemos proceder de la siguiente forma: 30/200*100=15%. Así, concluimos que la muestra es el 15% de las 200 personas.

La fórmula sería la siguiente, donde n es la cifra menor y m, la mayor:

%n/m*100

Ejemplo de porcentajes

Los porcentajes son de utilidad en la vida cotidiana, por ejemplo, para el cálculo de los impuestos. Supongamos que el impuesto al valor añadido es equivalente al 18% y el valor de venta es 420 euros. Entonces, el monto del tributo a pagar sería:

420*18/100=75,6 euros

De igual modo, las ofertas, descuentos o promociones que vemos en las tiendas suelen estar expresados en porcentajes.

Otra utilidad de los porcentajes es la comparación. Por ejemplo, si queremos evaluar el nivel de analfabetismo en un país no basta solo con calcular el valor absoluto, sino el porcentaje respecto a la población total y hacer un paralelo frente a otras naciones. No es lo mismo que existan 300 mil analfabetos en un país de 10 millones de habitantes, que en un país donde viven 30 millones de personas. En el primer caso, el analfabetismo sería del 3% (300.000/10.000.0000*100), mientras que en el segundo caso sería del 1% (300.000/30.000.000*100).

UNIDAD II

ECUACIONES LINEALES

2.1 Formas ax+b=c y (ax+b)/c=d

Una ecuación de primer grado o lineal con una incógnita es una igualdad de la forma:

ax + b = c (a, b, c, son números conocidos)

Esta ecuación tiene dos miembros, separados por el signo de igualdad: Primer miembro: ax + b. Segundo miembro: c.

La **solución** de la ecuación es un número que, al colocarlo en el lugar de x, hace que los dos miembros sean iguales. Se trata de una ecuación de primer grado porque la incógnita **x** está elevada a la potencia 1.

Una ecuación de primer grado puede tener:

Una única solución: ej. x+2 = 5, sólo tiene como solución x=3 ; (3 + 2 = 5)

Infinitas soluciones: (realmente es una identidad), ej. 2x + 4 = 2(x+2)

Ninguna solución: ej. x + 1 = x + 3

PASOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN

Si la ecuación es de la forma ax = b se deja sola la incógnita.

En este caso, el número que está multiplicando a la incógnita lo pasamos al otro miembro de la ecuación con el mismo signo: como multiplica a la incógnita, pasa al otro miembro dividiendo. De esta forma hallaremos el valor de la incógnita x.

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

La ecuación es de la forma ax + b = cx + d

Se agrupan en un miembro las incógnitas (hay que prestar atención al signo que tienen, ya que éste cambia al pasarlos al otro miembro y permanece el mismo si continúan en el mismo miembro).

Los números de la ecuación que no acompañan a la incógnita pasan al otro miembro, pero con la operación inversa a la que tenían en el miembro en el que se encontraban.

Se realiza la operación correspondiente con las incógnitas que están en un miembro y con los términos sin incógnita que están en el otro miembro de la ecuación.

Se despeja la incógnita y se haya su valor.

$$7x + 12 = 6x + 9$$

$$7x - 6x = -12 + 9$$

$$x = -3$$

Ecuación con paréntesis

Toda ecuación con paréntesis se transforma en cualquiera de las ya estudiadas, suprimiéndolos mediante la propiedad distributiva (mutiplicando el número que va delante del paréntesis por lo que contiene el paréntesis). Se debe prestar especial atención en los casos en que el factor numérico que multiplica a la expresión incluida dentro del paréntesis va precedido del signo menos.

$$2(x - 3) - 3(x - 4) = 2 - 5(x - 2) + 10$$

$$2x - 6 - 3x + 12 = 2 - 5x + 10 + 10$$

$$2x - 3x + 5x = 2 + 10 + 10 + 6 - 12$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

Ecuaciones con denominadores

Toda ecuación con denominadores se transforma en otra equivalente que no los tenga, multiplicando sus miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{6x}{5} = \frac{x + 1}{2}$$

Paso 1: Buscamos el mínimo común múltiplo de los denominadores 5 y 2: m.c.m (5, 2) = 10.

Paso 2: Dividimos el m.c.m por los denominadores de la ecuación y el resultado lo multiplicamos por los numerados. De esta forma podemos prescindir de los denominadores.

$$\frac{10}{5} = 2, \quad \frac{10}{2} = 5$$

$$2(6x) = 5(x + 1)$$

Paso 3: Se quitan paréntesis aplicando la propiedad distributiva.

$$12x = 5x + 5$$

Paso 4: Se aplican las reglas de la suma y del producto para despejar la incógnita.

$$12x - 5x = 5$$

$$7x = 5$$

$$x = \frac{5}{7}$$

2.2 Forma (ax+b)/c=(dx+e)/f

(3x + 12) / 4 = (2x + 14) / 3

1. Despejar las variables c y f, ahora están dividiendo, pasan multiplicando

(3) (3x + 12) = (4) (2x + 14)

2. Multiplicar f y c, por sus respectivos polinomios

9x + 36 = 8x + 56

3. pasar el término bf al segundo miembro y el término cdx al primer miembro

9x - 8x = 56 - 36

4. Se factorizan los dos términos del primer miembro.

x (1) = 20

5. la expresión (af + cd) pasa al segundo término como denominador.

x = (20) / (1)

6. Simplificar y expresar el resultado si es posible

x = 20

2.3 Gráfica de ecuaciones lineales

La gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una recta (es por eso que se le llama **lineal**).

Si Usted sabe que una ecuación es lineal, puede graficarla al encontrar cualquiera de las dos soluciones

$$(x_1, y_1) \text{ y } (x_2, y_2),$$

graficando esos dos puntos, y dibujando la recta que los une.

Ejemplo :

Grafique la ecuación $x + 2y = 7$.

Puede encontrar dos soluciones, correspondientes a la intercepción en x y la intercepción en y de la gráfica, al establecer primero $x = 0$ y luego $y = 0$.

Cuando $x = 0$, obtenemos:

$$0 + 2y = 7$$

$$y = 3.5$$

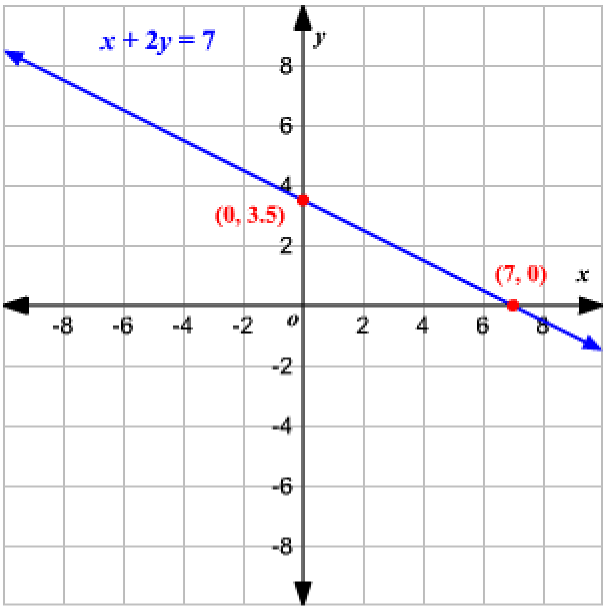
Cuando $y = 0$, obtenemos:

$$x + 2(0) = 7$$

$$x = 7$$

Así los dos puntos son (0, 3.5) y (7, 0).

Grafique estos dos puntos y dibuje la recta que los une.

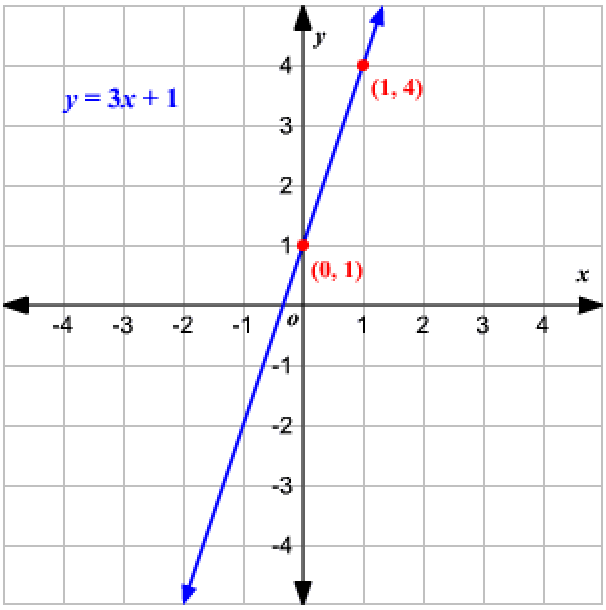


Si la ecuación esta en la forma intercepción-pendiente o de la forma punto-pendiente , puede tambien utilizar la pendiente para ayudarlo a graficar.

Ejemplo :

Grafique la recta $y = 3x + 1$.

De la ecuación, sabemos que la intercepción en y es 1, el punto (0, 1) y la pendiente es 3. Grafique el punto (0, 1) y de ahi vaya hacia arriba 3 unidades y a la derecha 1 unidad y grafique un segundo punto. Dibuje la recta que contiene ambos puntos.

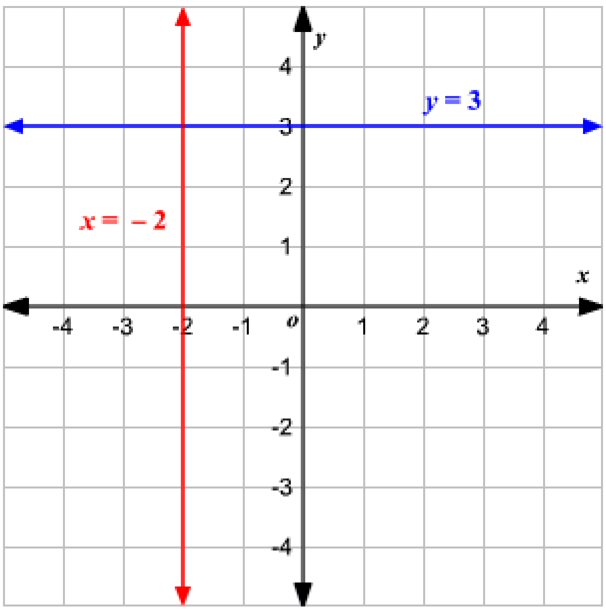


Las rectas horizontales y verticales tienen ecuaciones sencillas extra.

Ejemplo :

Recta Horizontal: $y = 3$

Recta Vertical: $x = -2$

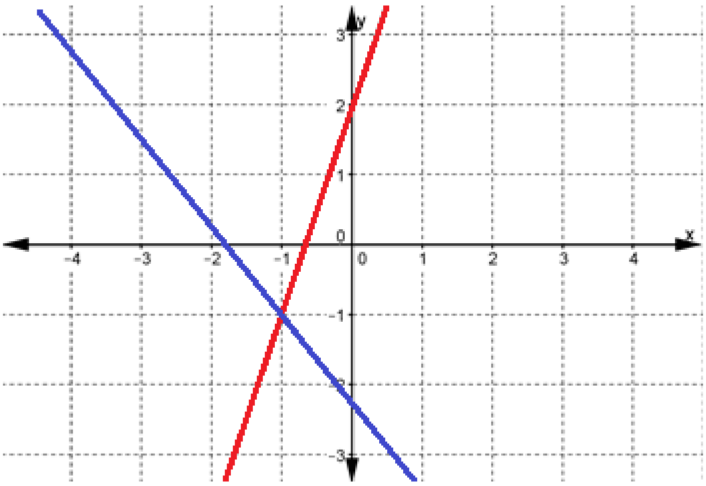


2.4 Gráfica de sistema de ecuaciones 2x2

Consiste en graficar las rectas que conforman el sistema de ecuaciones lineales, para determinar las coordenadas (x,y) en donde se cortan dichas rectas. Al graficarlo se pueden presentar tres casos

Caso 1

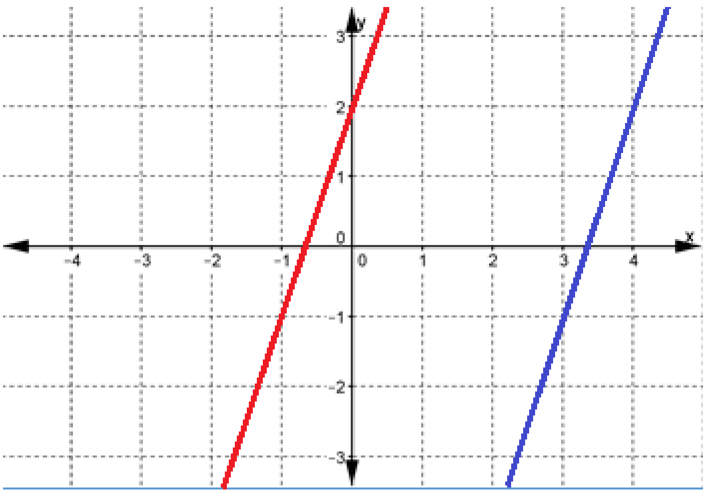
Las rectas se cortan en un solo punto. Esto significa que el sistema tiene única solución, dada por los valores x, y que son coordenadas del punto de corte.



En la figura la solucion grafica del sistema 2x2 esta dada por x=-1, y=-1. Lo cual corresponde a las coordenadas del punto de corte de las dos rectas.

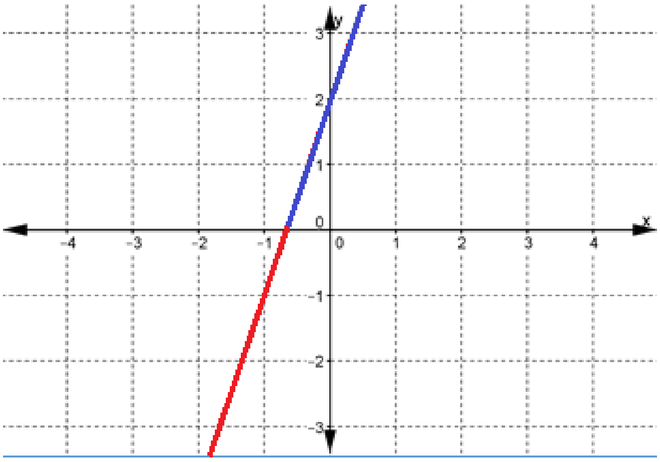
Caso 2

El sistema no tiene solución. Las rectas son paralelas y no se cortan.



Caso 3

Infinitas soluciones. Las rectas son coincidentes por lo tanto se cortan en infinitos puntos.



Ejemplo

Encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$$

Primero, se despeja la incógnita y quedando el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} \mathrm{y} = -3\mathrm{x} + 4 \\ \mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 1 \end{cases}$$

El segundo paso sería determinar dos puntos que pertenezcan a cada una de las rectas.

En la ecuación y= -3x+4, le asignamos dos valores a x, para determinar el correspondiente valor de y.

Si x=0

Es decir si x toma el valor de cero que valor toma y.

Reemplazamos x=0, en la ecuación y= -3x+4,

$$\begin{aligned} y &= -3(0) + 4 \\ y &= 0 + 4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Si x=1

Es decir si x toma el valor de uno que valor toma y.

Reemplazamos x=2, en la ecuación y= -3x+4,

$$y = -3(2) + 4$$
$$y = -6 + 4$$
$$y = -2$$

Resumimos en una tabla de valores para la ecuación 1

x	0	2
y	4	-2

En la ecuación y =2x-1 le asignamos dos valores a x, para determinar el correspondiente valor de y.

Si x=0

Es decir si x toma el valor de cero que valor toma y.

Reemplazamos x=0, en la ecuación y =2x-1

$$y = 2(0) - 1$$
$$y = 0 - 1$$
$$y = -1$$

Si x=1

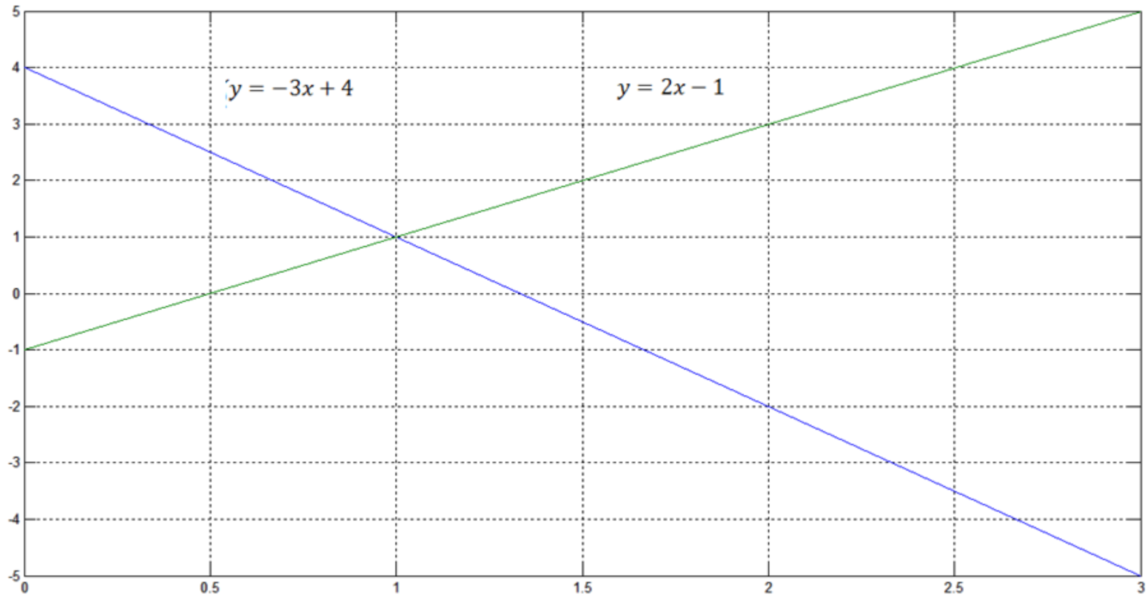
Es decir si x toma el valor de uno que valor toma y.

Reemplazamos x=1, en la ecuación y =2x-1

$$y = 2(1) - 1$$
$$y = 2 - 1$$
$$y = 1$$

Resumimos en una tabla de valores para la ecuación 2

x	0	1
y	-1	1



En la figura podemos identificar que las rectas se intersectan en la coordedana (1,1), por lo tanto el sistema tiene solucion y esta dada por x=1, y=1

2.5 Método por igualación con dos incógnitas

$$x + y = 7 \quad \text{DESPEJAMOS} \quad x = 7-y$$

$$5x-2y = -7 \qquad x = \frac{+2y-7}{5}$$

IGUALAMOS

$$\frac{+2y-7}{5} = 7-y$$

$$2y-7 = 5.(7-y)$$

$$2y-7 = 35-5y$$

$$2y+5y = 35+7$$

$$7y = 42$$

$$y = 6$$

SUSTITUÍMOS

$$x = 7-y$$

$$x = 7-6=1$$

$$y = 6$$

$$x = 1$$

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y después igualar los resultados.

Los pasos a seguir son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, elegimos la incógnita que deseamos despejar. En este caso, empezaré por la «x» y despejo la misma en ambas ecuaciones.

x+y=7; x=7-y

5x-2y=-7; 5x=2y-7

x=(2y-7)/5

Una vez hemos despejado, igualamos:

7-y = (2y-7)/5
5.(7-y) = (2y -7)
35 -5y= +2y -7
42=7y
y=42/7=6

y=6

Por último, sustituimos el valor que hemos calculado despejando la otra incógnita en una de las ecuaciones iniciales.

x=7-y
x=7-6=1

x=1

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

2.6 Método de sustitución con dos incógnitas

El método de sustitución consiste en aislar en una ecuación una de las dos incógnitas para sustituirla en la otra ecuación.

Este método es aconsejable cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 4 + x = 2y \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Solución

1. Aislamos una incógnita

Vamos a aislar la x de la primera ecuación. Como su coeficiente es 1, sólo tenemos que pasar el 4 restando al otro lado:

$$\begin{aligned} &4 + x = 2y \rightarrow \\ &x = 2y - 4 \end{aligned}$$

Ya tenemos aislada la incógnita x.

2. Sustituimos la incógnita en la otra ecuación

Como tenemos que la incógnita x es igual 2y-4, escribimos 2y-4 en lugar de la x en la segunda ecuación (sustituimos la x):

$$\begin{aligned} &2x - y = 1 \rightarrow \\ &2 \cdot (2y - 4) - y = 1 \rightarrow \\ &4y - 8 - y = 1 \end{aligned}$$

Observad que hemos utilizado paréntesis porque el coeficiente 2 tiene que multiplicar a todos los términos.

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} &4y - 8 - y = 1 \rightarrow \\ &3y - 8 = 1 \rightarrow \\ &3y = 9 \rightarrow \\ &y = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Ya sabemos una incógnita: y=3.

4. Calculamos la otra incógnita sustituyendo:

Al despejar la incógnita x teníamos

$$x = 2y - 4$$

Como conocemos y=3, sustituimos en la ecuación:

$$\begin{aligned} x &= 2y - 4 \quad \rightarrow \\ x &= 2 \cdot 3 - 4 \rightarrow \\ x &= 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la otra incógnita es x=2.

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

2.7 Método por eliminación de dos incógnitas

El método de reducción consiste en sumar (o restar) las ecuaciones del sistema para eliminar una de las incógnitas.

Este método es aconsejable cuando una misma incógnita tiene en ambas ecuaciones el mismo coeficiente (restamos las ecuaciones) o los coeficientes son iguales pero con signo opuesto (sumamos las ecuaciones).

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$$

Solución

1. Comprobamos los coeficientes

Hay que asegurarse de que al sumar o restar las ecuaciones, alguna de las incógnitas desaparece:

Escogemos una incógnita a eliminar: la y.

Sus coeficientes son **-1** (en la primera) y 1 (en la segunda).

Como son iguales y de signo contrario, sumaremos las ecuaciones.

Nota: si ninguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente, podemos multiplicar cada ecuación por el número distinto de 0 que sea necesario para conseguirlo. Un ejemplo de esto lo podemos encontrar en el **Problema 2**.

2. Sumamos o restamos las ecuaciones

Sumamos las ecuaciones para eliminar la y:

$$
\begin{array}{rl}
 & x - y = 2 \\
+ & 2x + y = 19 \\
\hline
 & 3x \quad\;\; = 21
\end{array}
$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida

$$
\begin{aligned}
3x &= 21 \rightarrow \\
x &= \frac{21}{3} \rightarrow \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

4. Calculamos la otra incógnita sustituyendo

Sustituimos la incógnita x por 7 en alguna de las ecuaciones y la resolvemos:

$$
\begin{aligned}
& x - y = 2 \rightarrow \\
& 7 - y = 2 \rightarrow \\
& y = 7 - 2 \rightarrow \\
& y = 5
\end{aligned}
$$

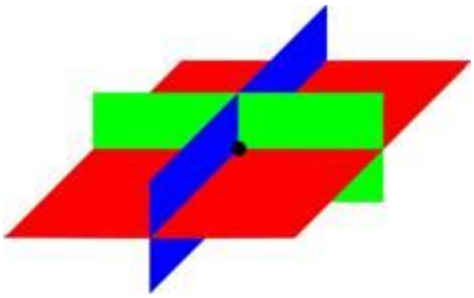
La solución del sistema es

$$
\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}
$$

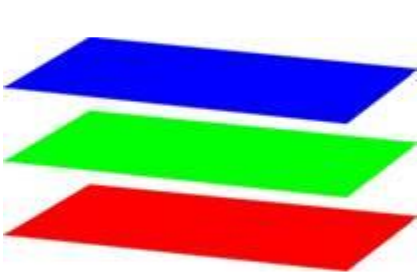
2.8 Método por eliminación de tres incógnitas

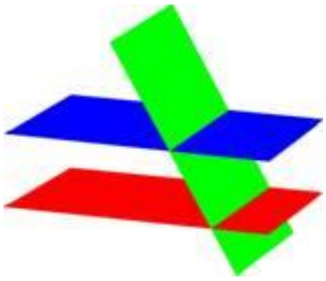
Al igual que cuando resuelves sistemas de dos ecuaciones, hay tres posibles resultados para la solución de un sistema de tres variables. Estudiemos esto visualmente, aunque no graficaremos estas ecuaciones.

Caso 1: Existe una solución. Para que tres ecuaciones con tres variables tengan una solución, los planos deben interesectarse en un sólo punto.

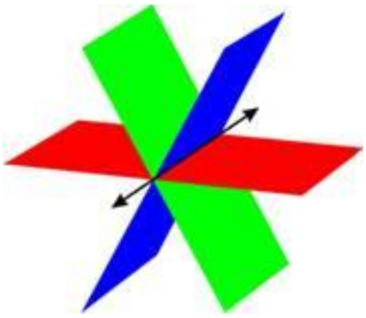


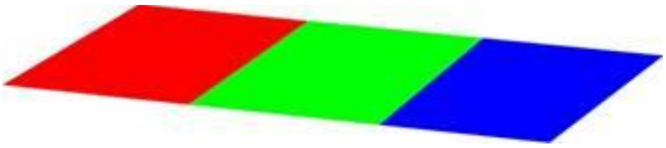
Caso 2: No hay solución. Los tres planos no tienen ningún punto en común. (Observa que dos ecuaciones podrían tener puntos en común una con la otra, pero no con las tres.) Abajo hay ejemplos de algunas maneras que esto sucede.





Caso 3: Existe un número infinito de soluciones. Esto ocurre cuando los tres planos se intersectan en una recta. Y también puede ocurrir cuando los tres planos están en el mismo plano.





Empecemos con el Caso 1, donde el sistema tiene sólo una solución. Este es el caso en el que normalmente estamos interesados.

Aquí hay un sistema de ecuaciones lineales. Hay tres variables y tres ecuaciones.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & z & = & 8 \\ 5x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Sabes cómo resolver un sistema con dos ecuaciones y dos variables. Para el primer paso, usa el método de eliminación para quitar una de las variables. En este caso, z puede ser eliminada sumando la primera ecuación con la segunda.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & z & = & 8 \\ 5x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ \hline 8x & + & 2y & & & = & 12 \end{array}$$

Para resolver el sistema, necesitas dos ecuaciones usando dos variables. Sumando la primera ecuación con la tercera en el sistema original también te dará una ecuación con *x* y *y* pero no con z.

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
3x & + & 4y & - & z & = & 8 \\
2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\
\hline
5x & + & 2y & & & = & 9
\end{array}
$$

Ahora tienes un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

$$
\begin{array}{rcrcl}
8x & + & 2y & = & 12 \\
5x & + & 2y & = & 9
\end{array}
$$

Resuelve el sistema de nuevo usando eliminación. En este caso, puedes eliminar *y* sumando el opuesto de la segunda ecuación:

$$
\begin{array}{rcrcr}
8x & + & 2y & = & 12 \\
-5x & + & -2y & = & -9 \\
\hline
3x & & & = & 3
\end{array}
$$

Resuelve la ecuación resultante para la variable que queda.

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Ahora usa una de las ecuaciones en el sistema de dos variables para encontrar *y*.

$$5x + 2y = 9$$

$$5(1) + 2y = 9$$

$$5 + 2y = 9$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Finalmente, usa cualquier ecuación del primer sistema, junto con los valores que ya encontraste, para resolver la primera variable.

$$2x - 2y + z = 1$$

$$2(1) - 2(2) + z = 1$$

$$2 - 4 + z = 1$$

$$-2 + z = 1$$

$$z = 3$$

2.9 Matriz

En matemáticas, una matriz es una tabla de números que sirve para representar datos de manera ordenada.

La principal utilidad de las matrices es representar los datos de los problemas. Por ejemplo, una empresa que vende 3 productos (X, Y, Z) ha realizado un estudio de mercado para saber a qué precio venden estos productos sus principales competidores (M y N) y ha obtenido los siguientes datos:

Pues la información de este problema se puede expresar en forma de matriz:

De esta forma se puede analizar mejor el problema y es más fácil de resolverlo. Para ver cómo calcular la solución de un sistema matricial puedes consultar el link del principio de la página.

En este caso concreto, hemos obtenido una matriz rectangular de 3 filas y 2 columnas. Para abreviar se suele decir que es una matriz de dimensión 3×2.

El determinante de una matriz es una operación que se aplica a las matrices, pero únicamente se pueden calcular los determinantes de matrices cuadradas. Por lo tanto, el resultado del determinante de una matriz siempre será un número, no una matriz. Por ejemplo, el determinante de la siguiente matriz es igual a cero (0):

Si quieres saber cómo resolver el determinante de cualquier matriz haz click en el link del principio de la página.

Como puedes ver, los determinantes siempre se expresan con barras verticales, a diferencia de las matrices que normalmente se representan con paréntesis.

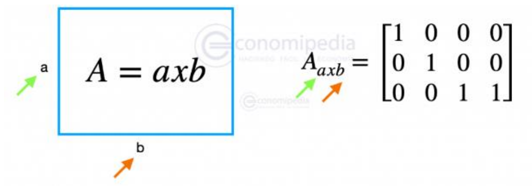
2.10 Tipos de matríz

El orden de las matrices puede entenderse fácilmente si lo relacionamos con la fórmula del área del rectángulo. Hablamos de rectángulo y no de cuadrado porque el rectángulo puede convertirse en cuadrado si sus lados son iguales, pero no al revés. Por tanto, haremos el ejemplo asociativo mediante un rectángulo.

El orden de una matriz también se llama dimensión dado que podría describirse como las unidades del espacio que ocupa la matriz.

Si una matriz es cuadrada, veremos que el número de filas coincide con el número de columnas y, por tanto, los dos números multiplicados en el orden serán iguales y la matriz tendrá forma de cuadrado.

Dado un rectángulo cualquiera, su área sería:



El orden de las matrices y las áreas de los rectángulos

El área del rectángulo se calcula mediante la multiplicación de la longitud del segmento a por la longitud del segmento b. Esa longitud del segmento viene expresada en términos unitarios, es decir, si el segmento a tiene una longitud de 3, también podemos decir que tiene una longitud de tres unidades unitarias.

En términos matriciales, esta longitud se puede entender como el número de filas que tiene una matriz. Para expresar las columnas podemos usar la misma lógica anterior. La longitud del segmento b, expresado en unidades unitarias, puede entenderse como el número de columnas que tiene una matriz. La matriz anterior sería a = 3 y b = 4.

$$A_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

Diferencia entre orden y área

La diferencia entre encontrar la dimensión u orden de una matriz y el cálculo del área de un rectángulo es que dejaremos expresada la multiplicación de las filas por las columnas sin calcular el resultado. En otras palabras, en el área del rectángulo calcularíamos el valor de la multiplicación, pero cuando se trata del orden de una matriz, no se calcula dicha multiplicación. Esta condición se puede ver en el subíndice que tiene la matriz:

$$\boxed{A_{axb}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de una matriz

Ejemplo

Determina el orden de las siguientes matrices:

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & -4 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_{axb} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Las soluciones ordenadas de forma descendiente serían: 3×4, 3×2, 2×5, 2×1.

Matriz nula

Una matriz nula es una matriz en la que todos sus elementos son 0:

Como puedes ver, esta matriz no es nada compleja. Pero aunque no lo parezca, tiene su utilidad. Puedes ver sus aplicaciones en la página de las propiedades de la matriz nula.

Matriz simétrica

Una matriz simétrica es una matriz en la que la diagonal principal es un eje de simetría.

Debido a las propiedades de las matrices simétricas, el resultado de trasponer una matriz simétrica es la propia matriz.

Matriz antisimétrica

Una matriz antisimétrica es una matriz en la que la diagonal principal está llena de ceros y, además, es un eje de antisimetría.

En el siguiente enlace puedes ver todas las propiedades y más ejemplos de matrices antisimétricas.

Ahora que has visto los tipos de matrices, seguro que te estás preguntando… ¿y para qué sirve todo esto? Pues una de las principales aplicaciones son las operaciones de matrices, siendo la más importante de ellas la multiplicación, que también puedes ver cómo se hace en la página de matrices multiplicación.

2.11 Método de Creammer con tres incógnitas

El método de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Recuerda que un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

Donde:

A es la matriz de coeficientes del sistema.

X es la matriz con las incógnitas.

B es la matriz con los términos independientes de las ecuaciones.

Bajo estas condiciones, la regla de Cramer es la siguiente:

La incógnita xi del sistema AX = b es

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Donde Ai es la matriz A, pero cambiando la columna i de A por la columna de términos independientes, b.

Ejemplo 1.

Véase a continuación el procedimiento que debe seguirse para utilizar la regla de Cramer.

Sea un sistema que cumple las dos condiciones necesarias:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x - z = 5 \end{cases}$$

Lo primero será reescribir el sistema mediante la matriz de los coeficientes y calcular su determinante para asegurarnos que es distinto de cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el determinante es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

(efectivamente, distinto de cero).

Definimos ahora los determinantes Δi que resultan de cambiar la columna de la matriz de coeficientes por la columna de términos independientes. Calculemos dichos determinantes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

La regla de Cramer dice que las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

En este caso, pues, $x_1 = \frac{21}{2}$, $x_2 = \frac{-8}{2}$, $x_3 = \frac{-11}{2}$.

EJEMPLO 2.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ -2x + y - 7z = 0 \\ 3x - y + 8z = 2 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema por la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 1 \cdot 8 \\ &\quad +2 \cdot (-7) \cdot 3 \\ &\quad +(-2) \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\quad -1 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad -2 \cdot (-2) \cdot 8 \\ &\quad -3 \cdot (-7) \cdot (-1) = \\ &= -8 \neq 0 \end{aligned}$$

Como el determinante es distinto de 0, la matriz es regular y el sistema tiene una única solución (sistema compatible determinado):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-28}{-8} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{28}{-8} = -\frac{7}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2}$$

Nota: Para calcular la incógnita asociada a la columna n, sustituimos la columna n de la matriz de coeficientes por la columna de términos independientes.

UNIDAD III

ECUACIONES CUADRÁTICAS

3.1 Binomio al cuadrado

Un binomio es un polinomio de 2 términos no semejantes como a+ba+b, al elevarlo al cuadrado produce un polinomio de 3 términos:

(a+b)2□ □□□□ □□□□□binomioal

cuadrado=a2+2ab+b2□ □□□□□□□□ □□□□□□□□trinomio

cuadradoperfecto(a+b)2 binomioal cuadrado=a2+2ab+b2 trinomio cuadradoperfecto El trinomio de la forma a2+2ab+b2a2+2ab+b2 se le conoce como trinomio cuadrado perfecto. Si encontramos expresiones notables que tienen la forma de del trinomio cuadrado perfecto significa que se puede expresar como la suma de dos términos al cuadrado o simplemente binomio al cuadrado.

Demostración

Su demostración es muy sencilla, veamos:

Expresando (a+b)2(a+b)2 como un producto:

(a+b)2=(a+b)(a+b)(a+b)2=(a+b)(a+b)

Por la ley distributiva m(n+p)=mn+mpm(n+p)=mn+mp:

(a+b)2=a(a+b)+b(a+b)(a+b)2=a(a+b)+b(a+b)

De nuevo la ley distributiva:

a.a+a.b+b.a+b.ba.a+a.b+b.a+b.b

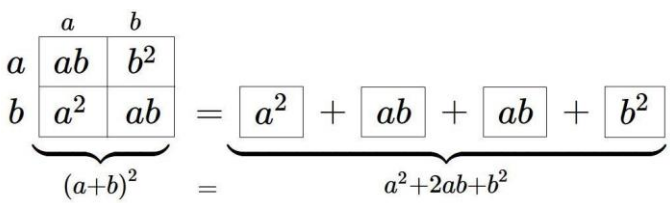
Por la ley conmutativa xy=yxxy=yx:

(a+b)2=a2+ab+ab+b2(a+b)2=a2+ab+ab+b2

Reduciendo términos semejantes, finalmente obtenemos:

(a+b)2=a2+2ab+b2(a+b)2=a2+2ab+b2

También podemos realizar una demostración geométrica, para nuestro caso, el área del cuadrado grande es la suma del área de sus partes como se muestra en la siguiente imagen:



Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de la formula del binomio al cuadrado:

o Resolver $(m+2)2(m+2)2$.

Solución:

$(m+2)2=m2+2mn+22=m2+2mn+4(m+2)2=m2+2mn+22=m2+2mn+4$ o Resolver $(2x+3y)2(2x+3y)2$.

Solución:

$(2x+3y)2=(2x)2+2(2x)(3y)+(3y)2=4x2+12xy+9y2(2x+3y)2=(2x)2+2(2x)(3y)+(3y)2=4x2+12xy+9y2$ o Resolver $(xn+yn)2(xn+yn)2$.

Solución:
$(xn+yn)2=(xn)2+2(xn)(yn)+(yn)2=x2n+2xnyn+y2n(xn+yn)2=(xn)2+2(xn)(yn)+(yn)2=x2n+2xnyn+y2n$ o Resolver $(m-3)2(m-3)2$.

Solución

$(m-3)2=m2-2(m)(3)+32=m2-6m+9(m-3)2=m2-2(m)(3)+32=m2-6m+9$ o Resolver $(x+1x)2(x+1x)2$

$(x+1x)2=x2+2(x)(1x)+(1x)2=x2+2+1x2(x+1x)2=x2+2(x)(1x)+(1x)2=x2+2+1x2$ También se aplica el proceso inverso, esto solo es posible para aquellos casos donde el trinomio es un trinomio cuadrado perfecto de la forma $a2+2ab+b2a2+2ab+b2$, por ejemplo:

o $x2+2x+1=x2+2(x)(1)+12=(x+1)2x2+2x+1=x2+2(x)(1)+12=(x+1)2$ o $x2-2x+1=x2-2(x)(1)+12=(x-1)2x2-2x+1=x2-2(x)(1)+12=(x-1)2$ o $x2-6x+9=x2-2(x)(3)+32=(x-3)2x2-6x+9=x2-2(x)(3)+32=(x-3)2$

Identidades de Legendre

Las siguientes identidades son consecuencia del binomio al cuadrado y son útiles si encontramos casos similares donde tengamos que aplicar estas identidades, veamos:

$(a+b)2+(a-b)2=2(a2+b2)(a+b)2+(a-b)2=2(a2+b2)$

$(a+b)2-(a-b)2=4ab(a+b)2-(a-b)2=4ab$

$(a+b)4-(a-b)4=8ab(a2+b2)(a+b)4-(a-b)4=8ab(a2+b2)$

Demostración

Cada una de estas demostraciones son sencillas de desarrollar, para este caso usaremos la identidad del binomio al cuadrado, veamos:

Probando $(a+b)2+(a-b)2=2(a2+b2)(a+b)2+(a-b)2=2(a2+b2)$, tenemos:

$(a+b)2+(a-b)2=(a2+2ab+b2)+(a2-$

2ab+b2)=2a2+2b2=2(a2+b2)(a+b)2+(a−b)2=(a2+2ab+b2)+(a2–

2ab+b2)=2a2+2b2=2(a2+b2)

Probando (a+b)2–(a−b)2=4ab(a+b)2–(a−b)2=4ab, tenemos:

(a+b)2–(a−b)2=(a2+2ab+b2)−(a2–2ab+b2)=a2+2ab+b2–a2+2ab–b2=4ab(a+b)2–

(a−b)2=(a2+2ab+b2)−(a2–2ab+b2)=a2+2ab+b2–a2+2ab–b2=4ab

La identidad 3 se puede reducir rápidamente con el producto notable "diferencia de cuadrados", pero como aun no lo anunciamos, lo haremos por el binomio al cuadrado. Por la ley de potencias x4=(x2)2x4=(x2)2, tenemos:

(a+b)4–(a−b)4=[(a+b)2]2–[(a−b)2]2=[a2+2ab+b2]2–[a2+2ab+b2]2(a+b)4–

(a−b)4=[(a+b)2]2–[(a−b)2]2=[a2+2ab+b2]2–[a2+2ab+b2]2

Ordenando convenientemente y realizando un cambio de variable donde n=a2+b2n=a2+b2 y m=2abm=2ab, obtenemos:

(a+b)4–(a−b)4=[n+m]2–[n−m]2(a+b)4–(a−b)4=[n+m]2–[n−m]2

Por la segunda identidad de Legendre, se cumple:

(a+b)4–(a−b)4=4nm(a+b)4–(a−b)4=4nm

Recordar que n=a2+b2n=a2+b2 y m=2abm=2ab, finalmente logramos:

(a+b)4–(a−b)4=4(a2+b2)(2ab)=8ab(a2+b2)(a+b)4–(a−b)4=4(a2+b2)(2ab)=8ab(a2+b2)

3.2 Binomios conjugados

Es la segunda identidad mas conocida después del binomio al cuadrado llamado diferencia de cuadrados, también se le conoce como producto de un binomio por su conjugado y su formula es la siguiente:

(a+b)(a−b)=a2–b2(a+b)(a−b)=a2–b2

Tenga en cuenta que el conjugado de a+ba+b es a−ba−b. Esta identidad nos ayuda a demostrar con mayor rapidez las identidades de Legendre, pero el desarrollo se lo dejamos como ejercicio para el lector, veamos su demostración rápida.

Demostración

Su demostración es muy sencilla, usando la identidad de la ley distributiva, tenemos:

(a+b)(a−b)=(a+b)a–(a+b)b(a+b)(a−b)=(a+b)a–(a+b)b

Aplicando de nuevo la ley distributiva en (a+b)a(a+b)a y (a+b)b(a+b)b, tenemos: (a+b)(a−b)=a.a+b.a–a.b–b.b(a+b)(a−b)=a.a+b.a–a.b–b.b

Aplicando la ley conmutativa b.a=a.bb.a=a.b y eliminando términos, finalmente logramos:

(a+b)(a−b)=a2+ab–ab–b2=a2–b2(a+b)(a−b)=a2+ab–ab–b2=a2–b2

De esta manera queda demostrada la identidad, veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de esta formula:

(m+n)(m−n)=m2–n2(m+n)(m−n)=m2–n2 o (x+a)(x−a)=x2–a2(x+a)(x−a)=x2–a2 o (x−1)(x+1)=x2–12=x2–1(x−1)(x+1)=x2–12=x2–1 o (x−2)(x+2)=x2–22=x2–4(x−2)(x+2)=x2–22=x2–4

(n2+m2)(n2–m2)=(n2)2–(m2)2=n4–m4(n2+m2)(n2–m2)=(n2)2–(m2)2=n4–m4 o (m20+n40)(m20–n40)=(m20)2–(n40)2=m40–n80(m20+n40)(m20–n40)=(m20)2–

(n40)2=m40–n80 o (2x+3y)(2x–3y)=(2x)2–(3y)2=4x2–9y2(2x+3y)(2x–3y)=(2x)2–(3y)2=4x2–9y2 o (5x–7y)(5x+7y)=(5x)2–(7y)2=25x2–49y2(5x–7y)(5x+7y)=(5x)2–(7y)2=25x2–49y2 o (an+bn)(an–bn)=(an)2–(bn)2=a2n–b2n(an+bn)(an–bn)=(an)2–(bn)2=a2n– b2n

x +√y)(√x –√y)=(√x)2–(√ y (√)2=x−y(x+y)(x–y)=(x)2–(y)2=x−y (am+1+bn+3)(am+1–bn+3)=(am+1)2–(bn+3)2=a2(m+1)–b2(n+3)(am+1+bn+3)(am+1–bn+3)=(am+1)2–(bn+3)2=a2(m+1)–b2(n+3)

También podemos realizar el proceso inverso, tan solo tomamos los términos de la diferencia y dividimos sus exponentes a la mitad, luego sumamos los nuevos términos y lo multiplicamos por su conjugado.

m2–n2=(m+n)(m−n)m2–n2=(m+n)(m−n)

m4–n2=(m2+n)(m2–n)m4–n2=(m2+n)(m2–n) o m8–n6=(m4+n3)(m4–n3)m8–n6=(m4+n3)(m4–n3)

m40k–n10k=(m20k+n5k)(m20k–n5k)m40k–n10k=(m20k+n5k)(m20k–n5k) o 4x2–9y2=(2x+3y)(2x–3y)4x2–9y2=(2x+3y)(2x–3y)

3.3 Binomio por término común

Para dos binomios con término en común: el producto de dos binomios con termino común es igual al cuadrado del termino común, mas el termino común por la suma de los términos no comunes, mas el producto de los términos no comunes, matemáticamente se expresa así:

$(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab$

Para tres binomios con término en común: este producto notable es mas extenso, se trata de la multiplicación de 3 binomios con termino en común, aquí la expresión matemática:

$(x+a)(x+b)(x+c)=x3+x2(a+b+c)+x(ab+bc+ac)+abc(x+a)(x+b)(x+c)=x3+x2(a+b+c)+x(ab+bc+ ac)+abc$

Demostración

La demostración de $(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab$ es sencilla, aplicaremos la ley distributiva para la multiplicación, veamos:

$(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$

Aplicando de nuevo la ley distributiva:

$(x+a)(x+b)=x.x+x.b+a.x+a.b(x+a)(x+b)=x.x+x.b+a.x+a.b$

Operando:

$(x+a)(x+b)=x2+xb+ax+ab(x+a)(x+b)=x2+xb+ax+ab$

Factorizando xx, logramos:

$(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab(x+a)(x+b)=x2+x(a+b)+ab$

La demostración para la multiplicación de 3 binomios con termino en común es análoga a esta demostración.

Ejemplos

Multiplicar $x-5x-5$ y $x+7x+7$.

Solución:

$(x-5)(x+7)=x2+x(-5+7)+(-5)(7)=x2+2x-$

$35(x-5)(x+7)=x2+x(-5+7)+(-5)(7)=x2+2x-35$ o Multiplicación $x-2x-2$ y $x-3x-3$.

Solución:

$(x-2)(x-3)=x2+x(-2-3)+(-2)(-3)=x2-5x+6(x-2)(x-3)=x2+x(-2-3)+(-2)(-3)=x2-$

$5x+6$

Multiplicación $a+2a+2$ y $a+10a+10$.

Solución:

(a+2)(a+10)=a2+a(2+10)+2.10=a2+12a+20(a+2)(a+10)=a2+a(2+10)+2.10=a2+12a+2

0 o Multiplicar m−5m−5 y m−6m−6.

Solución:

(m−5)(m−6)=m2+m(−5−6)+(−5)(−6)=m2–

11m+30(m−5)(m−6)=m2+m(−5−6)+(−5)(−6)=m2–11m+30 o Multiplicar a2+2a2+2 y a2+10a2+10.

Solución:

(a2+2)(a2+10)=(a2)2+a2(2+10)+(2)(10)=a4+12a2+20(a2+2)(a2+10)=(a2)2+a2(2+10)+

(2)(10)=a4+12a2+20

3.4 Gráfica de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática es una ecuación polinomial de grado 2. La forma estándar de una ecuación cuadrática es

0 = ax 2 + bx + c donde a, b, y c son todos los números reales y a ≠ 0.

Si reemplazamos 0 con y , entonces obtenemos una función cuadrática

y = ax 2 + bx + c cuya gráfica será una parábola .

El eje de simetría de esta parábola será la recta $x = -\frac{b}{2a}$. El eje de simetría pasa a través del vértice, y por lo tanto la coordenada en x del vértice es $-\frac{b}{2a}$. Sustituya $x = -\frac{b}{2a}$ en la ecuación para encontrar la coordenada en y del vértice. Sustituya unos pocos valores de x en la ecuación para obtener los valores correspondientes de y y grafique los puntos. Únalos y extienda la parábola.

Ejemplo 1:

Grafique la parábola $y = x^2 - 7x + 2$.

Compare la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$ para encontrar los valores de a , b , y c .

Aquí, a = 1, b = –7, y c = 2.

Use los valores de los coeficientes para escribir la ecuación del eje de simetría .

La gráfica de una ecuación cuadrática en la forma y = ax 2 + bx + c tiene como su eje de simetría la recta $x = -\frac{b}{2a}$. Así, la ecuación del eje de simetría de la parábola dada es $x = \frac{-(-7)}{2(1)}$ o $x = \frac{7}{2}$.

Sustituya $x = \frac{7}{2}$ en la ecuación para encontrar la coordenada en y del vértice.

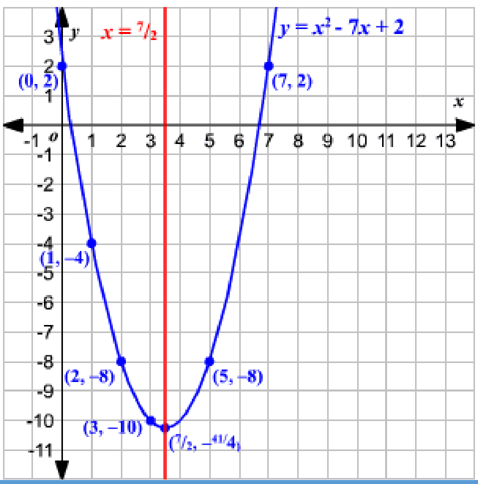
$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 2 \\ &= \frac{49 - 98 + 8}{4} \\ &= -\frac{41}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del vértice son $\left(\frac{7}{2}, -\frac{41}{4}\right)$.

Ahora, sustituya unos pocos valores de x en la ecuación para obtener los valores correspondientes de y .

x	$y = x^2 - 7x + 2$
0	2
1	-4
2	-8
3	-10
5	-8
7	2

Grafique los puntos y únalos para obtener la parábola.



3.5 Ecuaciones cuadráticas incompletas

Es necesario considerar que en una ecuación de segundo grado o cuadrática puede faltar el término bx o el término independiente c, pero no el término ax^2 pues en ese caso la ecuación ya no sería de segundo grado. A estas ecuaciones se les llama cuadráticas incompletas.

Si falta el término bx, la ecuación es incompleta y tendrá la forma: $ax^2 + c = 0$ Ésta recibe el nombre de cuadrática pura.

Si falta el término independiente c, la ecuación es incompleta y tendrá la forma: $ax^2 + bx = 0$. Se le llama cuadrática mixta.

Naturalmente, el procedimiento para resolverlas tiene que ser diferente, dada la forma distinta de ellas: $ax^2 + c = 0$ y $a^2 + bx = 0$

Así, se tienen ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$

Resuélvase la siguiente ecuación: $3x^2 - 48 = 0$

Como su forma general es $ax^2 + c = 0$, conviene resolver simultáneamente tanto la ecuación como su forma general para obtener, con ello, una fórmula que se aplique a este tipo de ecuaciones.

Tómese en cuenta que es necesario emplear las propiedades de la igualdad y realizar las operaciones indicadas, dejando en el primer miembro al término que contiene a la incógnita (ax^2) y en el segundo miembro al término independiente (c), como se ve a continuación.

Ecuación	Forma general
$3x^2 - 48 = 0$	$ax^2 + c = 0$
$3x^2 - 48 + 48 = 0 + 48$	$ax^2 + c - c = 0 - c$
$3x^2 = 48$	$ax^2 = -c$
$\frac{3x^2}{3} = \frac{48}{3}$	$\frac{ax^2}{a} = -\frac{c}{a}$
$x^2 = 16$	$x^2 = -\frac{c}{a}$
$x = \pm\sqrt{16}$	$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Las dos raíces cuadradas de 16 son :

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$$

Por otra parte, la expresión $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ puede utilizarse como fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas puras.

Ejemplos:

a) $5x^2 - 20 = 0$

$a = 5$

$c = -20$

$$x = \pm \sqrt{- \frac{c}{a}}$$

Sustituyendo:

$$x = \pm \sqrt{- \left[\frac{-20}{5} \right]} = \pm \sqrt{-(-4)} = \pm \sqrt{4}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

Comprobación

$$\begin{array}{rcl} 5(2)^2 - 20 &=& 0 \\ 5(4) - 20 &=& 0 \\ 20 - 20 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5(-2)^2 - 20 &=& 0 \\ 5(4) - 20 &=& 0 \\ 20 - 20 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}$$

b) $2x^2 - 18 = 0$

$a = 2$

$c = -18$

Sustituyendo:

$$x = \pm \sqrt{- \frac{c}{a}}$$

Comprobación

$$x = \pm \sqrt{- \left[\frac{-18}{2} \right]} = \pm \sqrt{-(-9)} = \pm \sqrt{9}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

Comprobación

$$\begin{array}{rcl} 2(3)^2 - 18 &=& 0 \\ 2(9) - 18 &=& 0 \\ 18 - 18 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2(-3)^2 - 18 &=& 0 \\ 2(9) - 18 &=& 0 \\ 18 - 18 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}$$

Así, hay ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$

Resuélvase la siguiente ecuación $3x^2 - 6x = 0$.

Al observar que su forma general es $ax^2 + bx = 0$, conviene resolver simultáneamente la ecuación y su forma general para obtener una fórmula que pueda ser aplicada al resolver ecuaciones de este tipo, empleando la factorización y una característica muy especial de la multiplicación: Si uno de los factores es cero, el producto es cero.

Ecuación $3x^2 - 6x = 0$

Forma general $ax^2 + bx = 0$

Se toma en cuenta que x es factor común en el primer miembro y se factoriza:

$x\,(3x - 6) = 0$

$x\,(ax + b) = 0$

Luego, se considera que el producto de cualquier número por 0 es 0, lo que significa que uno de los factores (x o 3 x - 6) es 0, o los dos factores equivalen a 0, ya que 0 x 0 = 0. Si x= 0, entonces se expresa x_1 =0.

Si 3x - 6 = 0 y ax + b = 0, se tiene :

$$\begin{aligned} 3x - 6 + 6 &= 0 + 6 \\ 3x &= 6 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Luego, en una cuadrática mixta la incógnita tiene 2 valores, siendo uno de ellos 0, o sea:

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_1 = 0$$

$$x_2 = 2 \qquad\qquad x_2 = \frac{-b}{a}$$

La expresión $x_2 = \frac{-b}{a}$ se puede aplicar como fórmula para obtener la solución de las cuadráticas mixtas.

Ejemplos:

a) $2x^2 + 10x = 0$

$a = 2 \qquad b = 10$

$x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(10)}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Comprobación

$$
\begin{aligned}
2(-5)^2 + 10(-5) &= 0 \\
2(25) + 10(-5) &= 0 \\
50 - 50 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

b) $4x^2 + 4x = 0$

$a = 4 \quad b = 4$

$x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(4)}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Comprobación

$$
\begin{aligned}
4(-1)^2 + 4(-1) &= 0 \\
4(1) + 4(-1) &= 0 \\
4 - 4 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Cuando las ecuaciones cuadráticas incompletas se pueden resolver con seguridad y eficiencia, se tiene la posibilidad de dar solución a una gran cantidad de problemas.

Ahora bien, el problema enunciado al inicio de este texto dio origen a la ecuación $x^2 + 3x - 70 = 0$, que es una ecuación cuadrática completa. El procedimiento para resolverla se verá más adelante

3.6 Ecuaciones cuadráticas completas

Recordamos que la forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a \neq 0$, b y c los coeficientes.

Una ecuación cuadrática es completa cuando los coeficientes b y c también son distintos de 0.

Discriminante

Llamamos discriminante, Δ, de la ecuación ax 2 + bx + c = 0 a

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El signo del discriminante informa acerca del número de soluciones de la ecuación:

Si Δ es 0, la ecuación tiene una única solución (de multiplicidad 2)

Si Δ es menor que 0, no existen soluciones (reales)

Si Δ es mayor que 0, existen dos soluciones (reales) distintas (de multiplicidad 1).

Soluciones

Las soluciones (o raíces) de la ecuación de segundo grado (en la forma anterior) vienen dadas por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Vamos a resolver la siguiente ecuación

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Sólo tenemos que aplicar la fórmula:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \\ &= \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3 + 1}{2} = -1 \\ \dfrac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones de la ecuación son x = -1 y x = -2.

3.7 Fórmula de solución general

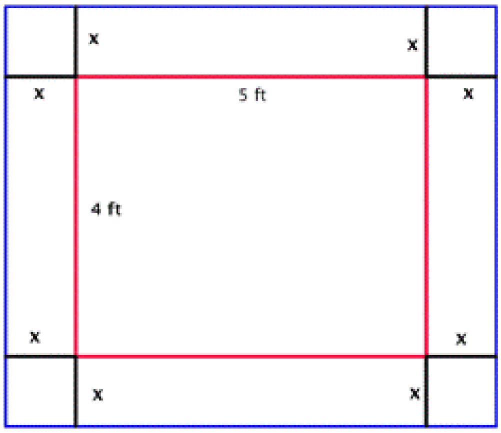
Las ecuaciones cuadráticas se usan mucho en la ciencia, los negocios y la ingeniería. Las ecuaciones cuadráticas se usan comúnmente en situaciones donde las cosas se multiplican y ambas dependen de la misma variable. Por ejemplo, cuando trabajamos con el área, si ambas dimensiones se escriben en términos de la misma variable, puedes usar una ecuación cuadrática. Ya que la cantidad de un producto vendido depende del precio, a veces usas una ecuación cuadrática para representar la ganancia como un producto del precio y de la cantidad vendida. Las ecuaciones cuadráticas también se usan cuando se trata con la gravedad, como la trayectoria de una pelota o la forma de los cables en un puente colgante.

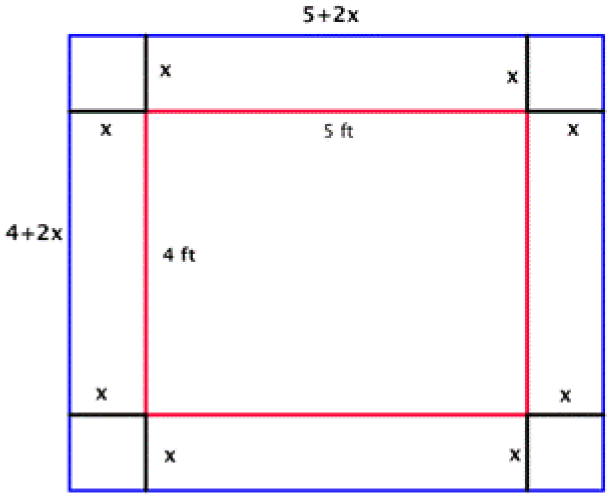
Una aplicación muy común y fácil de entender es la altura de una pelota que se deja caer al suelo desde un edificio. Como la gravedad hará que la pelota se acelere al caer, una ecuación cuadrática puede usarse para estimar su altura y el tiempo que tarda en llegar al suelo. Nota: Esta ecuación no es muy precisa, porque la fricción del aire frena un poco a la pelota. Pero para nuestros propósitos, el error no es importante.

Ejemplo		
Problema	Una pelota se deja caer de un edificio a 200 pies del suelo. Su velocidad inicial es −10 pies por segundo. (El negativo significa que viaja hacia el suelo.) La ecuación h = −16t2 – 10t + 200 puede usarse para modelar la altura de la pelota después de t segundos. ¿cómo cuánto tardará la pelota en llegar al suelo?	
	h = -16t2 – 10t + 200 0 = -16t2 – 10t + 200	Cuando la pelota golpea el suelo, su altura es 0. Sustituye 0 por h.
	−16t2 – 10t + 200 = 0	
	$t=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(-16)(200)}}{2(-16)}$	Esta ecuación es difícil de resolver factorizando o completando el cuadrado, por lo que la resuelves usando la fórmula cuadrática, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. En este caso, la variable es t en lugar de x. a = −16, b = −10 y c = 200.
	$t=\frac{10\pm\sqrt{100+12800}}{-32}$ $=\frac{10\pm\sqrt{12900}}{-32}$	Simplifica. Ten cuidado con los signos.
	t es aproximadamente −3.86 o 3.24.	Usa una calculadora para encontrar ambas raíces.

	Considera las raíces lógicamente. Una solución, −3.86, no puede usarse como el tiempo porque es un número negativo. La otra solución, 3.24 segundos, debe ser cuando la pelota golpea el suelo.
Respuesta	La pelota golpeará el suelo aproximadamente 3.24 segundos después de haber sido soltada.

El problema de área siguiente no parece incluir una fórmula cuadrática de ningún tipo y el problema se parece a algo que ya has resuelto muchas veces multiplicando. Pero para resolverlo, necesitarás una ecuación cuadrática.

Ejemplo	
Problema	Bob hizo una colcha que mide 4 ft x 5 ft. Él tiene 10 pies cuadrados de tela que puede usar para añadir un borde alrededor de la colcha. Qué tan ancho debe hacer el borda para usar toda la tela? (El borde debe tener el mismo ancho en los cuatro lados.)
	Dibuja el problema, Como no conoces el ancho del borde, usarás la letra x para representarlo. en el diagrama, la colcha original se indica por el rectángulo rojo. El borde es el área entre las líneas rojas y azules.



Como a cada lado de la colcha original de 4 y 5 se le añade un borde de ancho x, la longitud de la colcha con el borde será de 5 + 2x y el ancho será de 4 + 2x.

(Ambas dimensiones están escritas en términos de la misma variable, ¡y vas a multiplicarlas para sacar el área! Es aquí donde podrías empezar a pensar que se usará una ecuación cuadrática para resolver el problema.)

Área del borde = El área del rectángulo azul menos el área del rectángulo rojo

Sólo estás interesado en el área de los bordes. Escribe la expresión para el área del borde.

Área del borde = (4 + 2x)(5 + 2x) – (4)(5)

Hay 10 pies cuadrados de tela para el borde, por lo que el área del borde será 10.

10 = (4 + 2x)(5 + 2x) – 20

10 = 20 + 8x + 10x + 4x2 – 20

Multiplica (4 + 2x)(5 + 2x).

10 = 18x + 4x2

Simplifica.

Resta 10 de ambos lados para que tengas una ecuación cuadrática en la forma estándar y puedas aplicar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de la ecuación.

0 = 18x + 4x2 – 10

o

4x2 + 18x – 10 = 0

2(2x2 + 9x – 5) = 0

Factoriza el máximo factor común, 2, para que puedas trabajar con una ecuación equivalente más simple, 2x2 + 9x – 5 = 0.

$$2(2x^2+9x-5) = 0$$
$$\frac{2(2x^2+9x-5)}{2} = \frac{0}{2}$$
$$2x^2+9x-5=0$$

Usa la fórmula cuadrática. En este caso, a = 2, b = 9 y c = −5.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4(2)(-5)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{-9\pm 11}{4}$$

Simplifica.

$$x=\frac{-9+11}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0.5$$

Encuentra las soluciones, asegurándote de que el ± evalúa ambos valores.

o

$$x=\frac{-9-11}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

Ignora la solución x = −5, porque el ancho no puede ser negativo.

Respuesta El ancho del borde debe ser de 0.5 ft.

3.8 Suma de polinomios

Para realizar la suma de dos o más polinomios, se deben sumar los coeficientes de los términos cuya parte literal sean iguales, es decir, las variables y exponentes (o grados) deben ser los mismos en los términos a sumar.

Método 1 para sumar polinomios

Pasos:

1 Ordenar los polinomios del término de mayor grado al de menor.

2 Agrupar los monomios del mismo grado.

3 Sumar los monomios semejantes.

Ejemplo del primer método para sumar polinomios

Sumar los polinomios

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3, \qquad Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$$

1 Ordenamos los polinomios, si no lo están.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

2 Agrupamos los monomios del mismo grado.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x) \\ &= (2x^3 + 2x^3) + (-3x^2) + (5x + 4x) + (-3) \end{aligned}$$

3 Sumamos los monomios semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

Método 2 para sumar polinomios

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

Ejemplo del segundo método para sumar polinomios

Sumar los polinomios

$$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2, \qquad Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$$

1Acomodar en columnas a los términos de mayor a menor grado, y sumar.

$$\begin{array}{r} 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2 \\ + 6x^3 + 8x + 3 \\ \hline 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5 \end{array}$$

Así,

$$_2\, P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$$

3.9 Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

P(x) − Q(x) = (2x3 + 5x - 3) − (2x3 - 3x2 + 4x)

P(x) − Q(x) = 2x3 + 5x - 3 − 2x3 + 3x2 − 4x

P(x) − Q(x) = 2x3 − 2x3 + 3x2 + 5x− 4x - 3

P(x) − Q(x) = 3x2 + x - 3

También podemos restar polinomios escribiendo el opuesto de uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

P(x) = 7x4 + 4x2 + 7x + 2 Q(x) = 6x3 + 8x +3

$$\begin{array}{ccccc} 7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\ & -6x^3 & & -8x & -3 \\ \hline 7x^4 & -6x^3 & +4x^2 & -x & -1 \end{array}$$

3.10 Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base, es decir, sumando los exponentes.

EJEMPLO 1:

$$(5x^2y^3z)\cdot(2y^2z^2) = (2\cdot 5)x^2y^{3+2}z^{1+2} = 10x^2y^5z^3$$

EJEMPLO 2:

$$4x\cdot(3x^2y) = 12x^3y$$

EJEMPLO 3:

$$(3xy^2z)(7x^2) = (3)(7)(xx^2)y^2z = 21x^3y^2z$$

EJEMPLO DE EJERCICIOS RESUELTOS.

$$(2x^3)(5x^3)$$

$$\begin{aligned}(2x^3)(5x^3) &= ((2)(5))(x^3x^3)\\ &= 10x^{3+3}\\ &= 10x^6\end{aligned}$$

SIGUIENTE EJEMPLO:

$$(12x^3)(4x)$$

$$\begin{aligned}(12x^3)(4x) &= ((12)(4))(x^3x)\\ &= 48x^{3+1}\\ &= 48x^4\end{aligned}$$

SIGUIENTE EJERCICIO RESUELTO:

$$(5)(6xy^2z^5)$$

$$\begin{aligned}(5)(6xy^2z^5) &= ((5)(6))xy^2z^5\\ &= 30xy^2z^5\end{aligned}$$

3.11 Monomio por polinomio

En la multiplicación de un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base, es decir, sumando los exponentes.

Ejemplos:

1 $3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x5 - 9x4 + 12x^3 - 6x^2$

El símbolo · el cual denota la multiplicación y se encuentra delante del paréntesis, puede ser omitido

$22x(x4 - 3x^2 + 5x - 1) = 2x5 - 6x^3 + 10x^2 - 2x$

3.12 Polinomio por polinomio

Este tipo de operaciones se puede llevar a cabo de dos formas distintas.

Vamos a trabajar con el siguiente ejemplo:

$P(x) = 2x^2 - 3$ $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

Primera opción

1 Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = 4x5 - 6x4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x$

2 Se suman los monomios del mismo grado (suma de términos semejantes) y obtenemos:

$4x5 - 6x4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

3 El polinomio obtenido es otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios
que se multiplicaron.

Grado del polinomio resultante = Grado de P(x) + Grado de Q(x) = 2 + 3 = 5

Segunda opción

También podemos sumar polinomios escribiendo un polinomio debajo del otro.

1En cada fila se multiplica cada uno de los monomios del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio.

2 Se colocan los monomios semejantes en la misma columna y posteriormente se suman los monomios semejantes.

3Como la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, hemos tomado como polinomio multiplicador el polinomio más sencillo.

$$
\begin{array}{r}
2x^3 - 3x^2 + 4x \\
\times \qquad\qquad 2x^2 - 3 \\
\hline
-6x^3 + 9x^2 - 12x \\
4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\quad \\
\hline
4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x
\end{array}
$$

Observamos que ambos métodos brindan la misma solución.

3.13 División de monomios

Sólo se pueden **dividir monomios** con la **misma parte literal** y con el **grado del dividendo mayor o igual** que el **grado** de la variable correspondiente del **divisor**.

La **división de monomios** es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene** dividiendo las potencias que tenga la misma base, es decir, restando los exponentes.

axn : bxm = (a : b)xn − m

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$$

Si el **grado del divisor es mayor**, obtenemos una **fracción algebraica**.

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^5y^2z^4} = \frac{2y^2}{x^2z^2}$$

3.14 Polinomio entre monomio

Cuando dividimos un polinomio por un número, el resultado es otro polinomio que cumple las siguientes características :

El polinomio resultante es del mismo grado que el polinomio que fue dividido.

Sus coeficientes resultan de dividir cada uno de los coeficientes del polinomio entre el número

Se dejan las mismas partes literales.

Ejemplos:

$$\frac{2x^3-4x^2+6x-2}{2}=$$

$$\frac{2x^3}{2}-\frac{4x^2}{2}+\frac{6x}{2}-\frac{2}{2}=$$

$$x^3-2x^2+3x-1$$

$$\frac{6x^3-3x^2+9x-4}{3}=$$

$$\frac{6x^3}{3}-\frac{3x^2}{3}+\frac{9x}{3}-\frac{4}{3}=$$

$$2x^3-x^2+3x-\frac{4}{3}$$

División de un polinomio por un monomio

En la división de un polinomio por un monomio se divide cada uno de los monomios que forman el polinomio por el monomio, hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor.

Ejemplos:

$$\frac{2x^4-4x^3+8x^2-12x}{2x}=$$

$$\frac{2x^4}{2x}-\frac{4x^3}{2x}+\frac{8x^2}{2x}-\frac{12x}{2x}=$$

$$x^3-2x^2+4x-6$$

$$\frac{2x^6-4x^4+x^2}{2x^2}=$$

$$\frac{2x^6}{2x^2}-\frac{4x^4}{2x^2}+\frac{x^2}{2x^2}=$$

$$x^4-2x^2+\frac{1}{2}$$

3.15 Polinomio entre polinomio

Para explicar la división de polinomios nos valdremos de un ejemplo práctico con los polinomios:

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan, es decir, en esta caso dejamos el espacio para el elemento de cuarto grado y otro espacio para el elemento de segundo grado.

$$x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 \qquad dividido\ \ por \qquad x^2-2x+1$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3$$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

Es decir : $(x^3)(x^2 - 2x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-x^5 + 2x^4 - x^3$$

$$\begin{array}{llll} x^5 & +2x^3 & -x-8 & \underline{|\ x^2-2x+1} \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & & x^3 \\ \quad 2x^4 + \ x^3 & & -x-8 & \end{array}$$

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$(2x^2)(x^2 - 2x + 1) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-2x^4 + 4x^3 - 2x^2$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 &
\end{array}
$$

Procedemos igual que antes.

$$\frac{5x^3}{x^2} = 5x$$

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$(5x)(x^2 - 2x + 1) = 5x^3 - 10x^2 + 5x$$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-5x^3 + 10x^2 - 5x$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 &
\end{array}
$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$$\frac{8x^2}{x^2} = 8$$

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$(8)(x^2 - 2x + 1) = 8x^2 - 16x + 8$$

Recordemos que se va a restar al polinomio, así que debemos colocarlo con signo opuesto:

$$-8x^2 + 16x - 8$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
\qquad 2x^4 + x^3 & \\
\quad \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x & \\
\qquad\quad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2 - 6x - 8 & \\
\qquad\qquad \underline{-8x^2 + 16x - 8} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 10x - 16 &
\end{array}
$$

La división concluye aquí, ya que $10x - 16$ tiene menor grado que el divisor.

Cociente o resultado de la división: $x^3 + 2x^2 + 5x + 8$

Resto o residuo: $10x - 16$

UNIDAD IV

FACTORIZACIÓN

4.1 Concepto de factorización

Factorización es un término que se emplea en el terreno de las **matemáticas** para aludir al **acto y el resultado de factorizar**. Este verbo (**factorizar**), en tanto, refiere a la **descomposición de un polinomio** en el producto de otros polinomios de grado inferior o a la expresión de un número entero a partir del producto de sus divisiones.

Puede decirse que la factorización permite **descomponer una expresión algebraica en factores para presentarla de una manera más simple**. Cabe destacar que los **factores** son expresiones que se someten a una multiplicación para la obtención de un producto.

4.2 Factor común

Al factorización por término común está ligada a una de las propiedades de los números reales, llamada propiedad distributiva, esta propiedad dice que para cuales quiera a, b y c en los números reales, se cumple que ac + bc = c(a + b)

En este caso decimos que la factorización de ac + bc es c(a + b)

Ejemplo: Considere la suma 5·8 + 5·9.

Dado que el número 5 aparece en ambos sumandos, la suma se puede reescribir como un producto.

5·8 + 5·9 = 5(8+9)

Del lado izquierdo de la igualdad se tiene 5·8 + 5·9 = 40 + 45 = 85, mientras que por el lado derecho se tiene 5(8+9)=5(17)=85, llegando al mismo resultado.

De manera natural podemos extender esta idea para una cantidad más grande de números reales. Por ejemplo, si $c, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ representan algún número real. Entonces se cumple lo siguiente: $c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$

4.3 Factor común por agrupación de términos

Se llama factor común por agrupación de términos, si los términos de un polinomio pueden reunirse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo.

Cuando pueden reunirse en grupos de igual número de términos se le saca en cada uno de ellos el factor común. Si queda la misma expresión en cada uno de los grupos entre paréntesis, se la saca este grupo como factor común, quedando así una multiplicación de polinomios.

Tratar desde el principio que nos queden iguales los términos de los paréntesis nos hará mas sencillo el resolver estos problemas.

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$$

Agrupo los términos que tienen un factor común:

$$(2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b)$$

Saco el factor común de cada grupo:

$$a(2x - y + 5) + b(2x - y + 5)$$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales se tiene:

$$(2x - y + 5)(a + b)$$

Que es nuestra respuesta.

Ejemplos:

$$17ax - 17mx + 3ay - 3my + 7az - 7mz = a(17x + 3y + 7z) - m(17x + 3y + 7z) = (17x + 3y + 7z)(a - m)$$

$$m(x + 2) - x - 2 + 3(x + 2) = (x + 2)(m + 3) - 1(x + 2) = (x + 2)[(m + 3) - 1] = (x + 2)(m + 3 - 1)$$

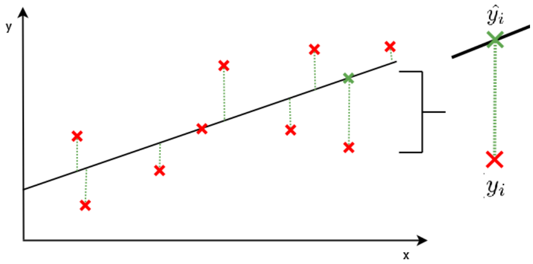
Otra forma de hacerlo:

$$m(x + 2) - x - 2 + 3(x + 2) = m(x + 2) - 1(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(m + 3 - 1)$$

4.4 Diferencia de cuadrados

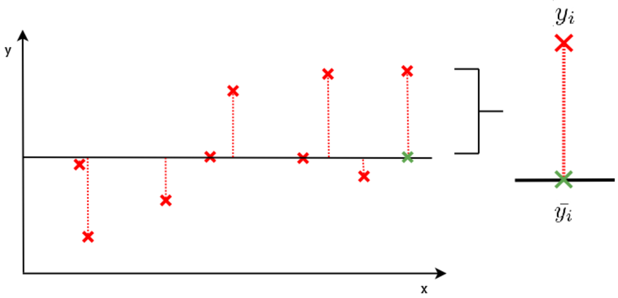
En modelos estadísticos, fundamentales en la implementación de tipos de Machine Learning (por ende, parte de lo que es Big Data), un concepto fundamental para evaluar la bondad de un modelo (qué tan buen modelo es), un indicador de qué tan bueno es su poder predictivo se encuentra en el parámetro R2. Muy utilizado, pero poco comprendido; básicamente se entiende que mientras más se acerque su valor a 1 es bueno, por el contrario, mientras más se acerque a 0 es malo.

Aquí intento explicar brevemente su significado con un ejemplo en dos dimensiones, aplicable a otros problemas.



Supongamos un problema de dos dimensiones para el cual existe un modelo de regresión lineal. La diferencia entre el valor predicho y el valor real se le denomina residuo. Para calcular el coeficiente de determinación (R2) es necesario obtener la Suma de los Cuadrados Residuales (SSres). expresado en la fórmula:

$$SS_{res} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$



Para el mismo problema es posible trazar un promedio, la diferencia entre el valor real y el valor del promedio se lleva a la Suma Total de los Cuadrados (SStot), expresado en la fórmula:

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2$$

Para obtener el valor de R2, se necesitan estos dos Sumas de Cuadrados expresados de la siguiente forma:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

Es importante tener en cuenta que para un modelo de regresión siempre es necesario minimizar la diferencia entre el valor predicho y el valor real de la variable dependiente, aquí representado por SSres, para tener un mejor modelo. De esta forma el valor de R2 muestra qué tan buena es la linea del modelo de regresión (lineal) comparada con la linea promedio entre los valores para el que se está calculando.

Al observar la fórmula es posible notar que a medida que SSres aumenta, el valor de R2 disminuye; por el contrario al obtener un bajo valor de SSres (que es lo deseado) el valor de R2 aumenta. El ideal, sería llegar a un SSres con valor cero, lo que generaría un valor de uno para R2. Si bien esto es muy poco probable, lo ideal es acercarse lo más posible a uno.

Valores negativos de R2 son posibles, esta situación se daría en el caso que el modelo fuera menos ajustado que el promedio. De todas formas, para efectos interpretativos en algunas áreas sería recomendable interpretarlo como cero.

4.5 Trinomio de la forma x2+Bb+c

Un polinomio con tres términos se llama trinomio. Normalmente (¡pero no siempre!) los trinomios tienen la forma x2 + bx + c. A simple vista, parecen difíciles de factorizar, pero puedes tomar ventaja de algunos patrones matemáticos interesantes para factorizar incluso los trinomios que más complicados se ven.

Entonces, ¿cómo pasas de 6x2 + 2x – 20 a (2x + 4)(3x −5)? Veamos.

Factorizando Trinomios: x2 + bx + c

Los trinomios de la forma x2 + bx + c normalmente pueden factorizarse como el producto de dos binomios. Recuerda que un binomio es simplemente un polinomio de dos términos. Empecemos observando qué pasa cuando multiplicamos dos binomios, como (x + 2) y (x + 5).

Ejemplo		
Problema		
	Multiplicar (x + 2)(x + 5).	
	(x + 2)(x + 5)	Usa el método FOIL para multiplicar los binomios.
	x2 + 5x + 2x +10	Luego combina los términos semejantes 2x y 5x.
Respuesta	x2 + 7x +10	

Factorizar es el reverso de multiplicar. Entonces vayamos en reversa y factoricemos el trinomio x2 + 7x + 10. Los términos individuales x2, 7x, y 10 no comparten factores comunes. Entonces vamos a reescribir x2 + 7x + 10 como x2 + 5x + 2x + 10.

Y, puedes agrupar los pares de factores: (x2 + 5x) + (2x + 10)

Factorizar cada par: x(x + 5) + 2(x + 5)

Luego sacar el factor común $x + 5$: $(x + 5)(x + 2)$

A continuación, se muestra el mismo problema en la forma de un ejemplo:

Problema		
	Factorizar $x2 + 7x + 10$.	
	$x2 + 5x + 2x + 10$	Reescribe el término de en medio $7x$ como $5x + 2x$.
	$x(x + 5) + 2(x + 5)$	Agrupa los pares y saca el factor común x del primer par y el factor 2 del segundo par.
	$(x + 5)(x + 2)$	Saca el factor común $(x + 5)$.
Respuesta	$(x + 5)(x + 2)$	

¿Cómo sabemos la manera de reescribir el término de en medio? Desafortunadamente, no puedes reescribirlo de una única manera. Si reescribes $7x$ como $6x + x$, este método no funcionará. Afortunadamente, existe una regla para eso.

Factorizando Trinomios de la forma $x2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $x2 + bx + c$, encuentra dos enteros, r y s, cuyo producto sea c y cuya suma sea b.

Reescribe el trinomio como $x2 + rx + sx + c$ y luego agrupa y aplica la propiedad distributiva para factorizar el polinomio. Los factores resultantes serán $(x + r)$ y $(x + s)$.

Por ejemplo, para factorizar $x2 + 7x + 10$, buscas dos números cuya suma sea 7 (el coeficiente del término central) y cuyo producto sea 10 (el último término).

Piensa en pares de factores de 10: 1 y 10, 2 y 5. ¿Alguno de ellos suman 7? Sí, 2 y 5. Entonces puedes reescribir $7x$ como $2x + 5x$, y continuar factorizando como el ejemplo anterior. Observa que también puedes reescribir 7x como 5x + 2x. Ambas forman funcionan.

Factoricemos el trinomio $x^2 + 5x + 6$. En este polinomio, la parte b del término central es 5 y el término c es 6. Una tabla nos ayudará a organizar las posibilidades. A la izquierda, enlista todos los factores posibles del término c, 6; a la derecha encontrarás las sumas.

Factores cuyo producto es 6	Suma de los factores
$1 \cdot 6 = 6$	$1 + 6 = 7$
$2 \cdot 3 = 6$	$2 + 3 = 5$

Sólo hay dos combinaciones posibles de factores, 1 y 6, y 2 y 3. Puedes ver que $2 + 3 = 5$. Entonces $2x + 3x = 5x$, que nos da el término central correcto.

Ejemplo		
Problema	Factorizar $x^2 + 5x + 6$.	
	$x^2 + 2x + 3x + 6$	Usa los valores de la tabla anterior. Reemplaza el 5x con 2x + 3x.
	$(x^2 + 2x) + (3x + 6)$	Agrupa los pares de términos.
	$x(x + 2) + (3x + 6)$	Saca el factor x del primer par de términos.
	$x(x + 2) + 3(x + 2)$	Saca el factor 3 del segundo par de términos.
	$(x + 2)(x + 3)$	Saca el factor (x + 2).
Respuesta	$(x + 2)(x + 3)$	

Observa que si hubieras escrito $x2 + 5x + 6$ como $x2 + 3x + 2x + 6$ y agrupado los pares como $(x2 + 3x) + (2x + 6)$; luego factorizado, $x(x + 3) + 2(x + 3)$, y sacado el factor $x + 3$, la respuesta habría sido $(x + 3)(x + 2)$. Como la multiplicación es conmutativa, el orden de los factores no importa. Entonces esta respuesta también es correcta; son resultados equivalentes.

Finalmente, observemos el trinomio $x2 + x - 12$. En este trinomio, el término c es -12. Entonces busquemos todas las combinaciones de factores cuyo producto sea -12. Luego vemos cuál de estas combinaciones te da el término centra correcto, donde b es 1.

Factores cuyo producto es -12	Suma de los factores
$1 \cdot -12 = -12$	$1 + -12 = -11$
$2 \cdot -6 = -12$	$2 + -6 = -4$
$3 \cdot -4 = -12$	$3 + -4 = -1$
$4 \cdot -3 = -12$	$4 + -3 = 1$
$6 \cdot -2 = -12$	$6 + -2 = 4$
$12 \cdot -1 = -12$	$12 + -1 = 11$

Sólo hay una combinación donde el producto es -12 y la suma es 1, y es cuando $r = 4$, y $s = -3$. Usémoslos para factorizar nuestro trinomio original.

Ejemplo	
Problema Factorizar $x2 + x - 12$	
$x2 + 4x + -3x - 12$	Reescribe el trinomio usando los valores de la tabla anterior. Usa los valores $r = 4$ y $s = -3$.
$(x2 + 4x) + (-3x - 12)$	Agrupa los pares de términos.
$x(x + 4) + (-3x - 12)$	Saca el factor x del primer par de términos.

	x(x + 4) – 3(x + 4)	Saca el factor −3 del segundo par de términos.
	(x + 4)(x – 3)	Saca el factor (x + 4).
Respuesta	(x + 4)(x – 3)	

En el ejemplo anterior, también pudiste reescribir x2 + x – 12 como x2 – 3x + 4x – 12. Luego factorizar x(x – 3) + 4(x – 3), y sacar el factor (x – 3) para obtener (x – 3)(x + 4). Como la multiplicación es conmutativa, esta respuesta es equivalente.

4.6 Trinomio de la forma ax2+Bb+c

Este tipo de trinomio se diferencia del anterior debido a que el termino al cuadrado (x^2) se encuentra precedido por un coeficiente diferente de uno (debe ser positivo). Este se trabaja de una manera un poco diferente, la cual detallamos a continuación:

Multiplicamos el coeficiente "a" de el factor "a x^2" por cada termino del trinomio, dejando esta multiplicación indicada en el termino "bx" de la manera "b(ax)", y en el termino "a x^2" de la manera "$(ax)^2$".

Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer termino será la raíz cuadrada del termino "$(ax)^2$" la que seria "ax".

al producto resultante lo dividimos entre el factor "a", con el fin de no variar el valor del polinomio.

El signo del primer binomio será el mismo signo que tenga el termino "bx", el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación de los signos de "bx" y de "c".

Se buscaran los segundos términos de los binomios según los pasos tres y cuatro del caso del trinomio anterior.

Ejemplo explicativo:

Factorizar $3m^2 + 8m + 5$

1er paso $3(3m^2 + 8m + 5) = (3m)^2 + 8(3m) + 15$

2° paso $(3m \quad)(3m \quad)$

3er paso $\dfrac{(3m \quad)(3m \quad)}{3}$

4° paso $\dfrac{(3m + \quad)(3m + \quad)}{3}$

5° paso $\dfrac{(3m + 3)(3m + 5)}{3}$

Simplificar $(m + 1)(3m + 5)$/Respuesta

Ejemplos:

$$13y^2 - 7y - 6 = (13y)^2 - 7(13y) - 78 = \frac{(13y - 13)(13y + 6)}{13}$$
$$13y^2 - 7y - 6 = (y - 1)(13y + 6)$$

$$21m^2 + 11m - 2 = (21m)^2 + 11(21m) - 42 = \frac{(21m + 14)(21m - 3)}{21}$$
$$21m^2 + 11m - 2 = (3m + 2)(7m - 1)$$

$$30p^2 + 17pq - 21q^2 = (30p)^2 + 17q(30p) - 630q^2 = \frac{(30p + 35q)(30p - 18q)}{30}$$
$$30p^2 + 17pq - 21q^2 = (6p + 7q)(5p - 3q)$$

$$6(x+3)^2 + 7(x+3) - 3 = [6(x+3)]^2 + 7[6(x+3)] - 18 = \frac{[6(x+3) + 9]\,[6(x+3) - 2]}{6}$$
$$6(x+3)^2 + 7(x+3) - 3 = [2(x+3) + 3]\,[3(x+3) - 1]$$

Siempre que sea posible hay que realizar la división indicada que nos queda de este tipo de trinomio, sin olvidar que cada factor del denominador que se simplifique se corresponde (2.3.5) a todos los términos de uno solo de los binomios.

4.7 Trinomio cuadrado perfecto

Los cuadrados perfectos son números que son el resultado de la multiplicación de un número entero con sí mismo o elevado al cuadrado. Por ejemplo 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, y 100 son cuadrados perfectos — provienen de elevar al cuadrado cada número del 1 al 10. Observa que estos cuadrados perfectos también provienen de elevar al cuadrado los números negativos del −1 al −10, como (−1)(−1) = 1, (−2)(−2) = 4, (−3)(−3) = 9, etc.

Un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que resulta de la multiplicación de un binomio por sí mismo o elevado al cuadrado. Por ejemplo, (x + 3)2 = (x + 3)(x + 3) = x2 + 6x + 9. El trinomio x2 + 6x + 9 es un trinomio cuadrado perfecto. Vamos a factorizar este trinomio usando los métodos que ya conocemos.

Ejemplo	
Problema Factorizar x2 + 6x + 9.	
x2 + 3x + 3x + 9	Reescribe 6x como 3x + 3x, como 3 • 3 = 9, el último término, y 3 + 3 = 6, el término central.
(x2 + 3x) + (3x + 9)	Agrupa pares de términos.
x(x + 3) + 3(x + 3)	Saca el factor x del primer par, y el factor 3 del segundo par.
(x + 3)(x + 3) o (x + 3)2	Saca el factor x + 3. (x + 3)(x + 3) también puede escribirse como (x + 3)2.
Respuesta (x + 3)(x + 3) o (x + 3)2	

Observa que en el trinomio x2 + 6x + 9, los términos a y c son cuadrados perfectos, como x2 = x • x, y 9 = 3 • 3. También el término central es dos veces el producto de los términos x y 3, 2(3)x = 6x.

Ahora veamos un ejemplo un poco distinto. El ejemplo anterior muestra cómo $(x + 3)2 = x2 + 6x + 9$. ¿A qué es igual $(x – 3)2$? Aplicando lo que sabes sobre multiplicación de binomios, encuentras lo siguiente.

$$(x – 3)2$$

$$(x – 3)(x – 3)$$

$$x2 – 3x – 3x + 9$$

$$x2 – 6x + 9$$

Observa: ¡$(x + 3)2 = x2 + 6x + 9$, y $(x – 3)2 = x2 – 6x + 9$! Aquí 9 puede escribirse como $(−3)2$, entonces el término centra es $2(−3)x = −6x$. Entonces cuando el signo del término central es negativo, el trinomio puede factorizarse como $(a – b)2$.

Intentemos con otro ejemplo: $9x2 – 24x + 16$. Observa que $9x2$ es un cuadrado perfecto, porque$(3x)2 = 9x2$ y que 16 es un cuadrado perfecto, porque $42 = 16$. Sin embargo, el término central, $–24x$ es negativo, entonces intenta $16 = (−4)2$. En este caso, el término central es $2(3x)(−4) = −24x$. Por lo que el trinomio $9x2 – 24x + 16$ es un cuadrado perfecto y se factoriza como $(3x – 4)2$.

También puedes continuar factorizando usando agrupamiento, como se muestra abajo.

Ejemplo		
Problema	Factorizar $9x2 – 24x + 16$.	
	$9x2 – 12x – 12x + 16$	Reescribe $−24x$ como $−12x – 12x$.
	$(9x2 – 12x) + (-12x + 16)$	Agrupa pares de términos. (Mantén el signo negativo con el 12.)
	$3x(3x – 4) – 4(3x – 4)$	Saca el factor $3x$ del primer grupo, y el factor $−4$ del segundo grupo.
	$(3x – 4)(3x – 4)$	Saca el factor $(3x – 4)$.
	o $(3x – 4)2$	$(3x – 4)(3x – 4)$ también puede escribirse como $(3x – 4)2$.
Respuesta	$(3x – 4)2$	

Observa que si sacas el factor 4 en lugar del −4, el factor 3x – 4 habría sido −3x + 4, que es el opuesto de 3x – 4. Al sacar el factor −4, los factores de la agrupación resultan los mismos, ambos 3x – 4. Necesitamos que esto suceda si vamos a sacar un factor común en el siguiente paso.

El patrón para factorizar trinomios cuadrados perfectos nos lleva a la siguiente regla general.

Trinomios Cuadrados Perfectos

Un trinomio de la forma a2 + 2ab + b2 puede factorizarse como (a + b)2.

Un trinomio de la formaa2 – 2ab + b2 puede factorizarse como (a – b)2.

Ejemplos:

La forma factorizada de 4x2 + 20x + 25 es (2x + 5)2.

La forma factorizada de x2 – 10x + 25 es (x – 5)2.

Ahora vamos a factorizar un trinomio usando la regla anterior. Una vez que has determinado que el trinomio es un cuadrado perfecto, el resto es fácil. Observa que en un trinomio cuadrado perfecto el término c siempre es positivo.

Ejemplo		
Problema	Factorizar x2 – 14x + 49.	
	x2 – 14x + 49	Determina si es un trinomio cuadrado perfecto. El primer término es un cuadrado, porque x2 = x • x. El último término es un cuadrado porque 7 • 7 = 49. También −7 • −7 = 49. Entonces, a = x y b = 7 o −7.
	−14x = −7x + −7x	El término medio es −2ab si usamos b = 7, porque −2x(7) = −14x. Es un trinomio cuadrado perfecto.

	(x – 7)2	Factoriza como (a – b)2.
Respuesta	(x – 7)2	

Puedes, y deberías, multiplicar para comprobar la respuesta. (x – 7)2 = (x – 7)(x – 7) = x2 – 7x – 7x + 49 = x2 – 14x + 49.

Factorizar x2 – 12x + 36.

A) (x – 4)(x – 9)

B) (x + 6)2

C) (x – 6)2

D) (x + 6)(x – 6)

4.8 Completar el trinomio cuadrado perfecto

Completar el cuadrado es un método usado para resolver una ecuación cuadrática por el cambio de la forma de la ecuación para que el lado izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto .

Para resolver ax 2 + bx + c = 0 completando el cuadrado:

1. Transforme la ecuación para que el término constante, c , esté solo en el lado derecho.
2. Si a , el coeficiente principal (el coeficiente del término x 2), no es igual a 1, divida ambos lados entre a .

3. Sume el cuadrado de la mitad del coeficiente del término x , $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación.

4. Factorice el lado izquierdo como el cuadrado de un binomio.

5. Realice la raíz cuadrada en ambos lados. (Recuerde: (x + q) 2 = r es equivalente a $x+q=\pm\sqrt{r}$.

6. Resuelva para x .

Ejemplo 1:

Resuelva x 2 – 6 x – 3 = 0 completando el cuadrado.

$$x^2 - 6x = 3$$
$$x^2 - 6x + (-3)^2 = 3 + 9$$
$$(x-3)^2 = 12$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$
$$x = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

Ejemplo 2:

Resuelva: 7 x 2 – 8 x + 3 = 0

$$7x^2 - 8x = -3$$
$$x^2 - \frac{8}{7}x = -\frac{3}{7}$$
$$x^2 - \frac{8}{7}x + \left(-\frac{4}{7}\right)^2 = -\frac{3}{7} + \frac{16}{49}$$
$$\left(x - \frac{4}{7}\right)^2 = -\frac{5}{49}$$
$$x - \frac{4}{7} = \pm\frac{\sqrt{5}}{7}i$$
$$x = \frac{4}{7} \pm \frac{\sqrt{5}}{7}i$$

4.9 Concepto y operaciones de números complejos

Los números complejos conforman un grupo de cifras resultantes de la suma entre un número real y uno de tipo imaginario. Un número real, de acuerdo a la definición, es aquel que puede ser expresado por un número entero (4, 15, 26) o decimal (1.25; 38.12; 29.85). En cambio, un número imaginario es aquél cuyo cuadrado es negativo. El concepto de número imaginario fue desarrollado por Leonhard Euler en 1777, cuando le otorgó el nombre de i (de "imaginario").

La unidad imaginaria es el número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra i.

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

Potencias de la unidad imaginaria

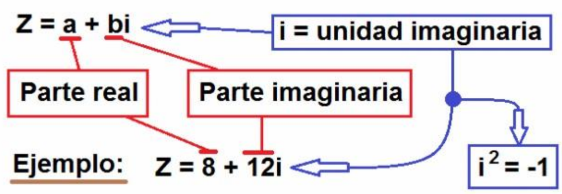
La unidad imaginaria i es definida como la raíz cuadrada de –1. Así, i 2 = –1. i 3 puede ser escrito como (i 2) i, que es igual a (–1) i o simplemente – i. i 4 puede ser escrito como (i 2) (i 2), que es igual a (–1) (–1) o 1. i 5 puede ser escrito como (i 4) i, que es igual a (1) i o i.

Por lo tanto, el ciclo se repite cada cuatro potencias, como se muestra en la tabla.

Potencias de 10	
i 1 = i	i 0 = 1
i 2 = –1	i -1 = –i
i 3 = –i	i -2 = –1
i 4 = 1	i -3 = i
i 5 = i	i -4 = 1
i 6 = –1	i -5 = –i
i 7 = –i	i -6 = –1
i 8 = 1	i -7 = i
i 9 = i	i -8 = 1
etc.	etc.

Números complejos en forma binómica

Al número a + bi le llamamos número complejo en forma binómica. El número “a” se llama parte real del número complejo y el número “b” es la parte imaginaria.



Si b = 0 el número complejo se reduce a un número real ya que a + 0i = a.

Si a = 0 el número complejo se reduce a bi, y se dice que es un número imaginario puro.

Operaciones de números complejos (forma binomica)

Suma y resta de números complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i \quad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i$$

$$(5 + 2\, i) + (-\, 8 + 3\, i) - (4 - 2i) =$$

$$= (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)\, i = -7 + 7i$$

Multiplicación de números complejos

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

$$(5 + 2\, i) \cdot (2 - 3\, i) =$$

$$= 10 - 15i + 4i - 6\, i2\, (-1) = 10 - 11i + 6 = 16 - 11i$$

División de números complejos

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2} = \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

Números complejos en forma polar y trigonométrica

$$z = a + bi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$ -------- modulo

$|z| = r$ $\quad$ $\arg(z) = \alpha$ $\quad$ $z = r\alpha$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \quad \begin{cases} \dfrac{+b}{+a} = \alpha \\[4pt] \dfrac{b}{-a} = 180^{\circ} - \alpha \\[4pt] \dfrac{-b}{-a} = 180^{\circ} + \alpha \\[4pt] \dfrac{-b}{a} = 360^{\circ} - \alpha \end{cases}$$

$$a = r \cdot \cos\alpha \qquad b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Binómica	z = a + bi
Polar	z = rα

trigonométrica	z = r (cos α + i sen α)

EJEMPLO:

$z = -1 + \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ -------- Modulo

$\alpha = \text{arc tg}\ \dfrac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^{o}$ --------- Argumento

z = 2120° ----------- Forma polar

z = 2120°

z = 2 · (cos 120° + i sen 120°) -------Forma trigonométrica

$$a = 2 \cdot \cos 120^{o} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$b = 2 \cdot \text{sen} 120^{o} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}\,i$$

Ejercicios (Operaciones con números complejos)

(−3 + 3i) + (7 – 2i) =

(−3 + 3i) – (7 – 2i) =

(3+i) + (1-3i)

(-5+3i) - (6+4i)

(0.5-4i) +(-1.5-i)

(-3.8+2.4i) - (1.3+0.5i)

(-2-2i) (1+3i)

(2+3i) (5-6i)

(2+3i) (-2-3i)

(-1-2i) (-1+2i)

$$\frac{2+4i}{4-2i}$$

$$\frac{1-4i}{3+i}$$

$$\frac{5+i}{-2-i}$$

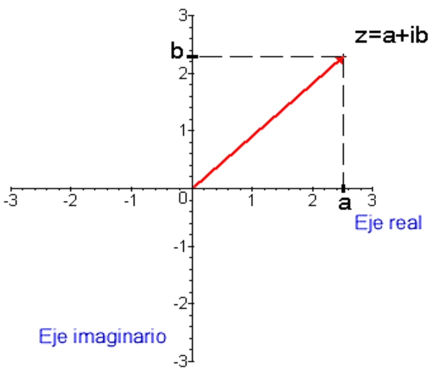
$$\frac{4-2i}{i}$$

4.10 Representación Geométrica

Así como los números reales se representan geométricamente por medio de una recta, es posible dar una representación geométrica de los números complejos usando un sistema de coordenadas cartesianas.

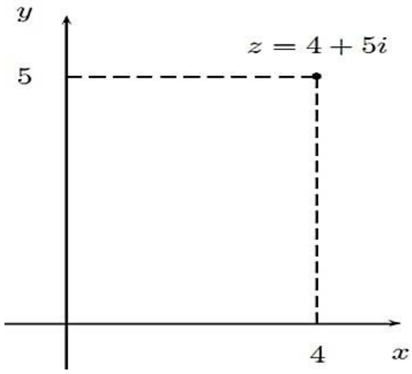
Haremos ahora una identificación entre los números complejos y los puntos del plano. A cada número complejo Z = a + bi, se le asocia el punto del plano, P (a, b).

De esta forma, se obtiene una representación geométrica o Diagrama de Argand de Z, ver la figura:



En esta representación, la componente real de Z se copia sobre el eje X, que será llamado eje real y la componente imaginaria sobre el eje Y, que será llamado eje imaginario. El conjunto de todos estos puntos, será llamado Plano Complejo.

Ejemplo. El complejo Z = 4 + 5i se puede representar en el Plano Complejo, para lo cual ubicamos primero al punto de coordenadas (4, 5). Una vez hecho esto se tendrá la representación de Z, ver la figura siguiente:



Ejercicio. Representa en el plano complejo, el Número complejo W = -6 + 2i

4.11 Cálculo de raices

La raíz de un polinomio es un número tal que hace que el polinomio valga cero. Es decir que, cuando resolvamos un polinomio a cero, las soluciones son las raíces del polinomio.

El grado del polinomio es la cantidad de raíces que tiene. Las raíces que puede tener un polinomio son de tres tipos: raíces positivas, raíces negativas y raíces complejas. Las raíces también se pueden presentar con valores repetidos.

Raíces de un Polinomio de grado 2

Ejemplo:

f(x) = x2 + x - 12 Cuando lo igualamos a cero y lo resolvemos tenemos:

x2 + x - 12 = 0 Igualando a cero.

(x + 4)(x - 3) = 0 Factorizando.

x = - 4 Solución 1 x = 3 Solución 2

Puesto que x1 = - 4 y x2 = 3 son soluciones de f(x) entonces f (-4) = 0 y f (3) = 0.

Decimos entonces que x = - 4 y x = 3 son raíces del polinomio f(x)= x2 + x – 12.

Otra forma de obtener las raíces de un polinomio de grado 2, es decir de la forma ax2 + bx +c, es haciendo uso de la ecuación cuadrática o formula general, de la siguiente manera:

$$x^2+2x-8=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-8)}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

Raíces de un polinomio de grado n.

En este caso, la regla de Ruffini será útil para encontrar las raíces enteras del polinomio. Las posibles raíces las buscaremos entre los divisores del término independiente. Iremos probando cada uno de ellos para ver si el resto da 0, en cuyo caso, se tratará de una raíz.

El número candidato a raíz es el que colocaremos a la izquierda al aplicar Ruffini.

Ejemplo: Halla las raíces del siguiente polinomio:

P(x) = x3 – 4x2 + x + 6

x3 – 4x2 + x + 6 = 0. Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del termino independiente 6, que son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Empezaremos a comprobar.

- Con el 1:

	1	-4	1	6
1	0	1	-3	-2
	1	-3	-2	4

Resto ≠0 ⇒ No es raíz

Como el resto es distinto de cero, es 4, x = 1 no es raíz del polinomio dado.

- Con el -1:

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	0

Resto 0 ⇒ Es raíz

- Con el 2:

	1	-4	1	6
2	0	2	-4	-6
	1	-2	-3	0

Resto 0 ⇒ Es raíz

- Con el 3:

	1	-4	1	6
3	0	3	-3	-6
	1	-1	-2	0

Resto 0 ⇒ Es raíz

Ya no es necesario seguir probando con el resto de los divisores, ya que, un polinomio tiene, como mucho, tantas raíces reales como indica su grado. Como es de grado 3 y hemos encontrado 3 raíces, ya no puede haber más. Por tanto, los ceros de este polinomio son: x = -1, x = 2 y x = 3.

x4-13x2+36

Los divisores de 36 son: $\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{3}, \pm\mathbf{4}, \pm\mathbf{6}, \pm\mathbf{9}, \pm\mathbf{12}, \pm\mathbf{18}, \pm\mathbf{36}$

Como es de grado 4 y hemos conseguido 4 raíces, no es necesario buscar más. Los ceros de este polinomio son: x=-2, x=2, x=-3, x=3

x4-5x3+4x2+3x+9

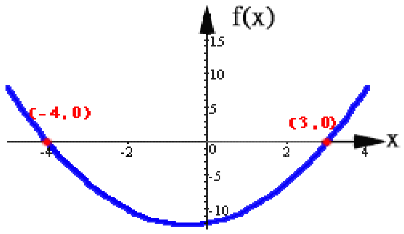
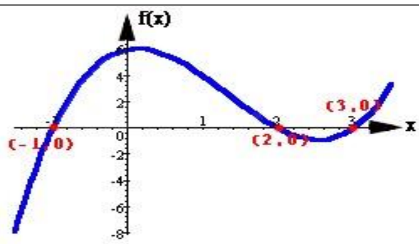
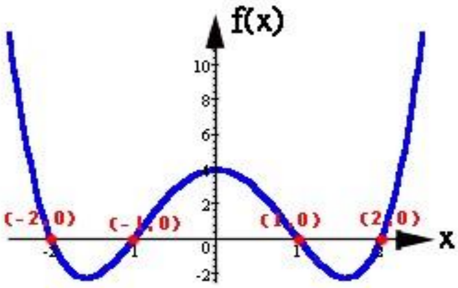
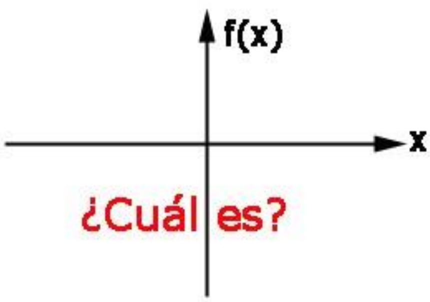
	1	-5	4	3	9
3	0	3	-6	-6	-9
	1	-2	-2	-3	0
3	0	3	3	3	
	1	1	1	0	

Si continuamos probando con 1 y -1, que serían los divisores de 1 (el ultimo termino independiente), no obtendríamos ningún resto 0. Entonces no hay más raíces enteras. Tendríamos que ver si existen otras raíces. Para ello trabajaremos con el ultimo polinomio cociente obtenido, que es de grado 2 y podemos aplicar la fórmula para ecuaciones de segundo grado.

Ultimo Polinomio cociente: C(x) = x2 + x + 1

x2 + x + 1 ----- $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ------- No tiene raíces reales, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto, el polinomio inicial P(x) tiene solo una raíz real, x = 3, que es doble.

EJERCICIOS

Función	Raíces	Gráfica
x2 + x - 12	- 4 y 3	
x3 - 4x2 + x +6	- 1 2 3	
x4 - 5x2 + 4	2 1 1 2	
x3 - 2x2 - 5x + 6	1 - 2 3	

Bibliografía básica y complementaria

Allen, A. (2010). Matemáticas I. México: Pearson educación. Recuperado el 31 de mayo de 2012, de la base de datos de Bibliotechnia de la biblioteca Digital de la UVEG.

Cuéllar, J.A. (2008). Matemáticas I Álgebra (2ª. ed.). México: McGraw-Hill.

De Oteyza, et. al. Temas Selectos de Matemáticas. Prentice Hall, México 1988. F. Ayres Jr., Teoría y problemas de matrices. McGraw-Hill, 1991.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E., Álgebra Lineal. México: Publicaciones Cultural, 1986.

F. Granero, Álgebra y geometría analítica. McGraw-Hill, 1992.

Gentile, E. R., Aritmética Elemental. Washington: OEA, 1985

Grossman, S. I., Álgebra Lineal. México: McGraw-Hill, 1996 J. Arvesú y otros, Álgebra lineal y aplicaciones. Síntesis, 1999.

J. de Burgos, Álgebra lineal. McGraw-Hill, 2000.

J. Rojo e I. Martín, Ejercicios y problemas de álgebra. McGraw-Hill, 1994.

J. Rojo, Álgebra lineal. McGraw-Hill, 2001.

J. Flaquer y otros, Curso de álgebra lineal. Ediciones Universidad de Navarra, 1996.

M. Castellet e I. Llerena, Álgebra lineal y geometría. Reverté, 1991.

M. Anzola y otros, Problemas de álgebra. (Especialmente tomos 1, 3, 6, 7) Madrid, 1981.

Martínez, M. A. (1996). Aritmética y Álgebra. México: McGraw-Hill. S. I. Grossman, Álgebra lineal. McGraw-Hill, 1995.

Swokowski, Earl. Algebra Universitaria. CECSA, México 1987.

Wisniewski, P. M., & Gutiérrez, A. L. (2011). Introducción a las matemáticas universitarias. México: McGraw-Hill Interamericana. Recuperado el 22 de junio de 2012, de la base de datos de Bibliotechnia de la e-libro Digital de la UVEG.