UDS

ANTOLOGIA

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

2° CUATRIMESTRE

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Nombre de la materia

Objetivo de la materia:

Que el estudiante interprete y resuelva problemas contextualizados que requieran la orientación espacial, a través del análisis, representación y solución por medio de figuras y procedimientos geométricos y algebraicos.

Criterios y procedimientos de evaluación y acreditación:

Actividad en plataforma	20%
Actividades en el aula	30%
Examen	50%
Total	100%
Escala de calificaciones	7-10
Mínima aprobatoria	7

INDICE

UNIDAD I

ANGULOS Y TRIÁNGULOS

1.1 Ángulos y su clasificación

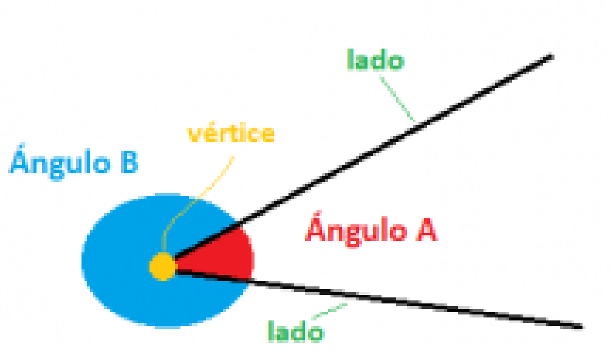
Un ángulo es la porción del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen común.

Partes de un ángulo

En un plano, dos semirrectas con un origen común siempre generan dos ángulos.

En el dibujo podemos ver dos, el **A** y el **B**.

Están compuestos por **dos lados** y un **vértice** en el origen cada uno.



Tipos de ángulos

Hay varios tipos según su tamaño, es decir, en función de los grados que tenga:

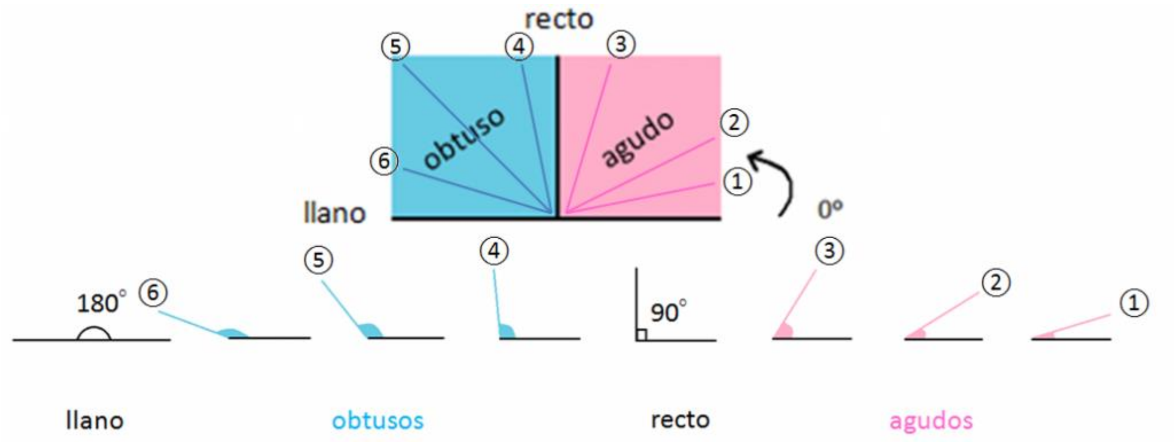
Ángulo agudo: Mide menos de 90° y más de 0 °.

Ángulo recto: Mide 90° y sus lados son siempre perpendiculares entre sí. En esta entrada del blog puedes aprender todo sobre los ángulos rectos.

Ángulo obtuso: Mayor que 90° pero menor que 180°. Para saber todo sobre el ángulo obtuso, revisa este post del blog de Smartick.

Ángulo llano: Mide 180°. Igual que si juntamos dos ángulos rectos. Si quieres aprender más sobre ángulos llanos puedes leer este post de nuestro blog.

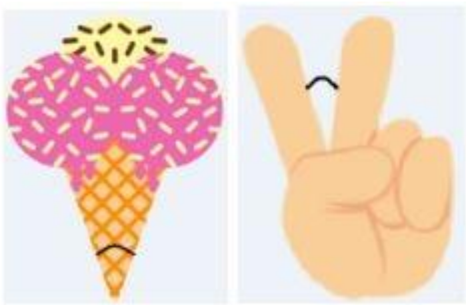
Con una imagen lo verás más fácil. Todo ángulo comprendido en la zona rosa es un ángulo agudo, y todo ángulo comprendido en la zona azul es un ángulo obtuso.



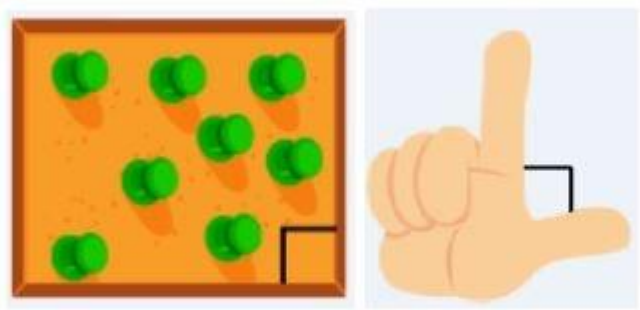
Ejemplos de ángulos en la vida cotidiana

A continuación veremos algunos ejemplos de **ángulos en nuestra vida cotidiana.**

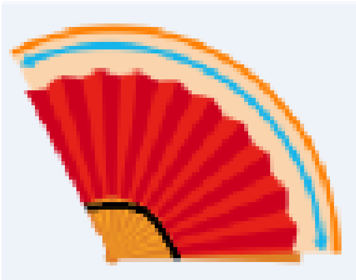
En el cono del helado y en la separación de los siguientes dedos tenemos **ángulos agudos**, ya que su abertura es menor de 90º.



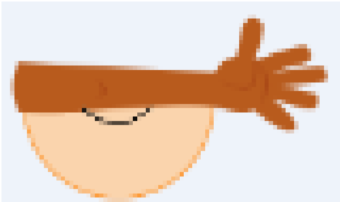
En la posición de los siguientes dedos en forma de L y en la esquina del corcho podemos observar los ángulos de 90°, **rectos**.



La apertura del abanico es mayor que 90° y menor que 180°, por lo cual tenemos un **ángulo obtuso**.



Y por último tenemos un brazo estirado formando un **ángulo llano** de 180°.



1.2 Elementos básicos de geometría

El punto

Piensa en un punto... ¿imaginaste la marca que deja la punta de un lápiz en una hoja de papel?

Aunque tu imagen de punto es útil, técnicamente no es correcta: si se hiciera un acercamiento sobre dicha marca, observarías que a medida que te aproximas a ella cambia, pareciendo "más grande", de esa forma se podría medir. Sin embargo la característica esencial del punto es que no se puede medir, pues un punto es algo que no tiene partes.

Para identificar los puntos se usan letras mayúsculas, por ejemplo: el punto Q. Pese a saber que los puntos no son marcas de lápiz en una hoja de papel, no tenemos otra forma de representarlos.

En el siguiente interactivo se representa un punto, llamado A. A su lado se representa la marca C, como la que un lápiz deja en una hoja.

Haz zoom y arrastra los puntos A y C. Verás como la marca de lápiz rojo C deja su marca y se ve más grande cuando te acercas, mientras que el punto no parece más grande al acercarse, pues no tiene medida.

La recta

Otro concepto tan importante como el de punto, y que tampoco es posible definir, es el de recta. Puedes imaginar la recta como una sucesión de puntos que tiene las siguientes características:

Es continua: las rectas no tienen huecos.
Es infinita: no tiene principio ni fin.
Sus puntos están alineados en una misma dirección.

Para identificar las rectas se usan las letras minúsculas, por ejemplo: la recta m. También, si se conocen dos puntos pertenecientes a la recta, digamos A y B, se le puede identificar escribiéndolos bajo una flecha de dos direcciones así: AB .

En el siguiente interactivo se muestra la representación de una recta que contiene los puntos A y B. Junto a la recta se representa la marca C, como la que deja la punta de un lápiz en una hoja de papel.

Arrastra los puntos A y B o la marca C, también puedes arrastrar la recta. Haz zoom para acercarte más a estos objetos.

Observa que al acercarte a la recta su anchura no cambia, pues está compuesta de puntos, mientras la marca C sí lo hace.

El plano

Para que te hagas a una idea de lo que es un plano puedes imaginar una superficie similar a una hoja de papel con las siguientes características:

Es continua: los planos no tienen huecos.
Es infinita: no están limitados.
Es lisa: no tienen arrugas o curvaturas.
Para representar los planos es usual utilizar letras griegas
minúsculas: a (alfa), b(beta), y (gamma), etc.

En el siguiente interactivo puedes observar un plano. Para poder apreciarlo mejor se muestra solo una parte de él (en púrpura), de otra forma ocuparía toda la pantalla, pues carece de límites.

Arrastra el punto A para rotarlo sobre sí mismo.

Al comparar el plano con una hoja de papel lisa debemos tener en cuenta que, a diferencia de la hoja, el plano no tiene grosor.

El espacio

En el interactivo anterior pudiste observar que al mover el plano este lo hace en un lugar específico, cambiando su posición en el mismo.

A este lugar se le conoce como espacio, y podemos decir de él que es conjunto de todos los puntos. Contiene infinitos puntos, rectas y planos. En términos de conjuntos, el espacio también hace el papel de conjunto universal

1.3 Ángulos según su medida

Un ángulo se representa en el plano por un punto llamado vértice y dos rectas o semirrectas llamadas rayos.

En el triángulo ABC de la figura de arriba se pueden identificar tres ángulos internos, que pueden ser nombrados de dos maneras:

Por la letra que aparece en su interior.

Escribiendo un punto de un rayo, el vértice del ángulo y otro punto del rayo, en ese orden.

Ejemplo 01

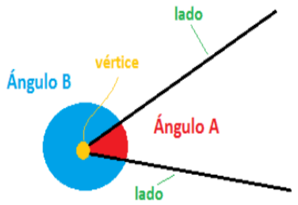
Nombrar los ángulos del triángulo del inciso a.

Por la letra que está en su interior, los ángulos son:

Por las letras de sus vértices, el ángulo puede ser llamado ∡ BAC, el ángulo puede ser nombrado ∡ ABC y el ángulo es ∡ BCA.

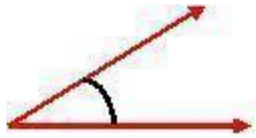
Ejemplo 02

Observa los elementos del ∡, que mide 65°30 ‘30”.

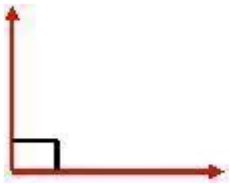


Los ángulos se miden en grados (°) y según su medida se clasifican en:

1) Ángulo agudo: es aquel que mide más de 0° y menos de 90°.



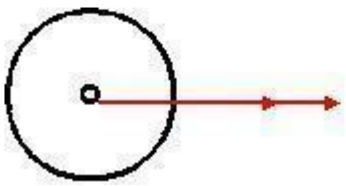
2) Ángulo recto: es aquel que mide 90°.



3) Ángulo obtuso: es aquel que mide más de 90° y menos de 180°.

4) Ángulo extendido: es aquel que mide 180°.

5) Ángulo completo: es aquel que mide 360°.

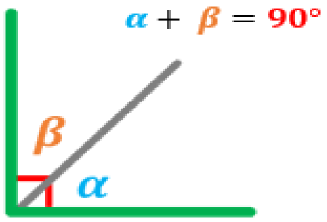


1.4 Ángulos según su posición y sus características

Ángulos que suman dan 90°

Puede no saberse cuánto mide cada uno de los ángulos, pero se sabe que entre los dos miden 90°.

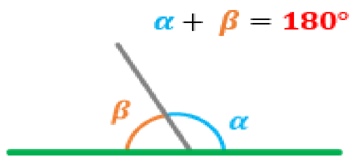
Cuando un ángulo mide 90° se le dibuja un cuadro el vértice



Ángulos complementarios

Ángulos que sumados dan 180°

Puede no saberse cuánto mide cada uno de los ángulos, pero se sabe que entre dos miden 180°

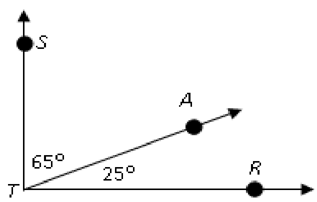


Ángulos suplementarios

Ejemplo 01

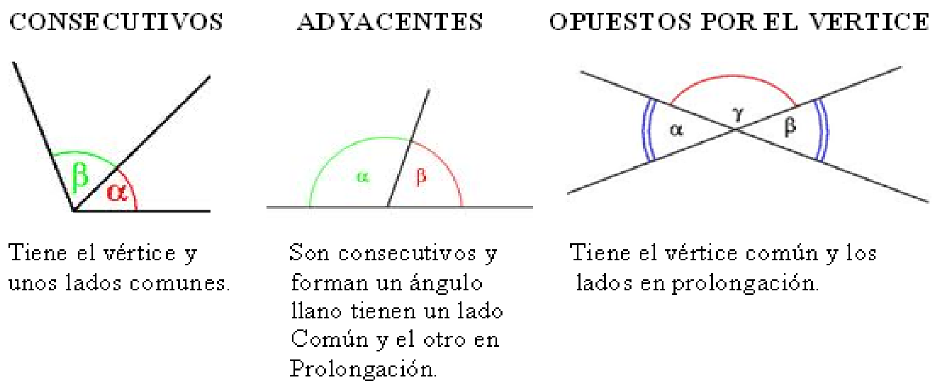
Calcular el complemento del ángulo ∡ RTA, que mide 25.

Dos ángulos que sumados dan 90° son complementarios, por lo tanto se busca un ángulo que sumado a 25 complete los 90



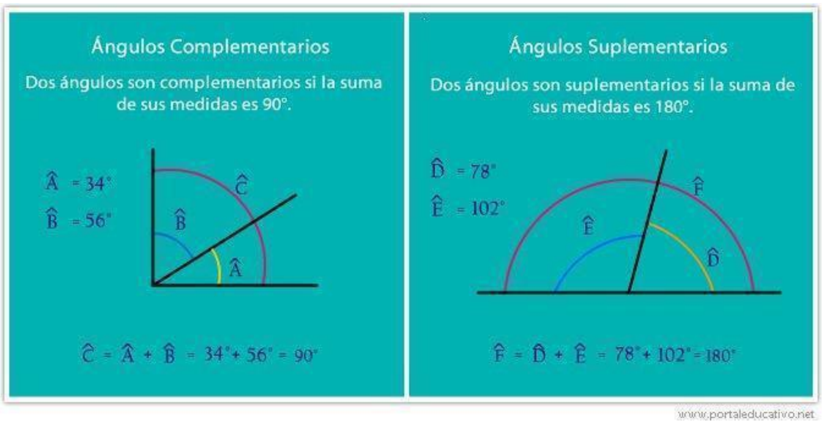
90° - 25° = 65°

El complemento es el ángulo ∡ ATS, que mide 65.



Los ángulos consecutivos tienen en común un vértice y un lado.

Los ángulos adyacentes son ángulos consecutivos que tienen los lados no comunes en la misma recta.

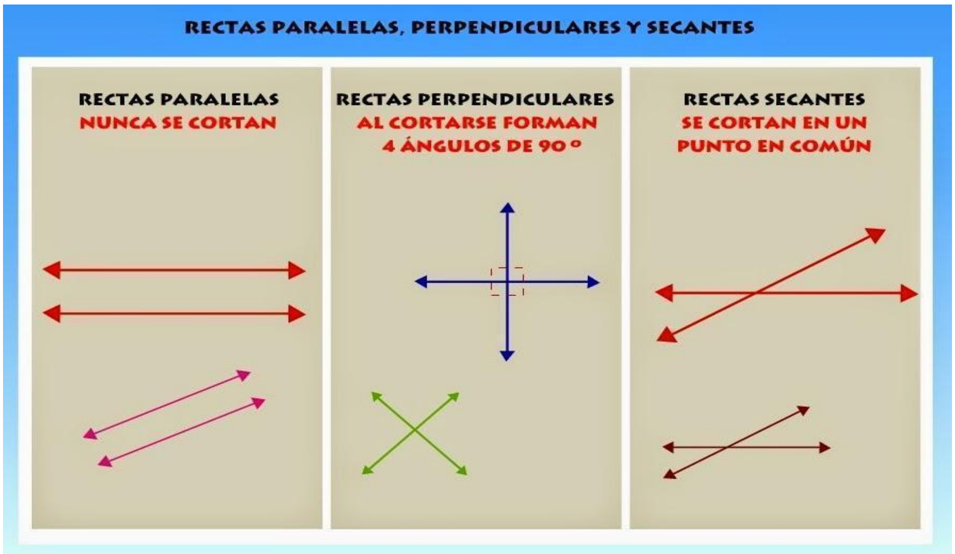


Nota: Los ángulos adyacentes son suplementarios.

1.5 Ángulos entre paralelas y una transversal

Ángulos opuestos por el vértice: tienen el vértice común y sus lados están sobre las mismas rectas. Dos rectas que se cortan determinan dos parejas de ángulos opuestos por el vértice. Los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

Dos rectas que se cortan reciben el nombre de secantes.



Se conoce como recta la línea formada por una cantidad infinita de puntos que siguen la misma dirección.

Las rectas pueden ser clasificadas como:

Paralelas. Son aquellas que se encuentran siempre a la misma distancia, no se juntan ni se separan por más que se prolonguen en algún sentido.

Perpendiculares. Son las rectas que al intersecarse forman entre ellas cuatro ángulos rectos (90).

Oblicuas. Son las rectas que al intersecarse no forman entre ellas cuatro ángulos rectos.

Transversal. Es aquella que interseca a dos o más recta.

Cuando una recta transversal interseca a dos o más rectas paralelas se forman los siguientes tipos de ángulos:

Ángulos correspondientes. Guardan la misma orientación y miden lo mismo.

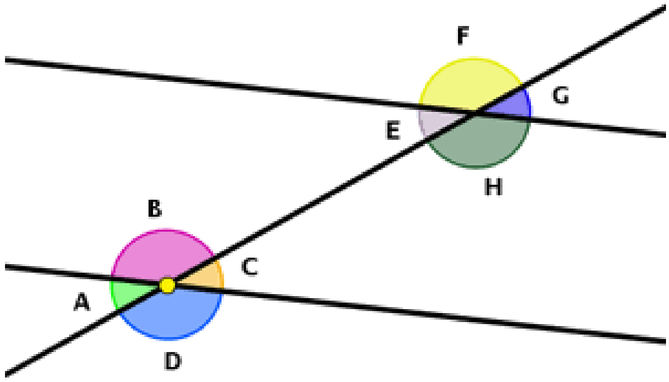
Ángulos opuestos por el vértice. Se oponen por el mismo vértice y miden lo mismo.

Ángulos alternos internos. Están en lados opuestos de la recta transversal, en el interior de las rectas paralelas y miden lo mismo.

Ángulos alternos externos. Están en lados opuestos de la recta transversal, en el exterior de las rectas paralelas y miden lo mismo.

Ejemplo 01

Identificar los tipos de ángulos que se forman cuando una recta transversal interseca las rectas paralelas.



Ángulos correspondientes.

∡ A es correspondiente con ∡ G.

∡ B es correspondiente con ∡ H.

∡ C es correspondiente con ∡ E.

∡ D es correspondiente con ∡ F.

Ángulos alternos internos.

∡ D es correspondiente con ∡ H.

∡ C es correspondiente con ∡ G.

Ángulos opuestos por el vértice.

∡ A es correspondiente con ∡ C.

∡ B es correspondiente con ∡ D.

∡ G es correspondiente con ∡ E.

∡ H es correspondiente con ∡ F.

Ángulos alternos externos.

∡ A es correspondiente con ∡ E.

∡ B es correspondiente con ∡ F

Aprende:

Un teorema es una proposición que se puede demostrar lógicamente a partir de axiomas, proposiciones o enunciados tan evidentes que no requieren demostración. Por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180.

Ejemplo 02

Observar cuidadosamente el gráfico de la derecha:

Se tiene un triángulo ABC de cualquier forma y medida, cuyos ángulos internos son, alfa, beta y pilos

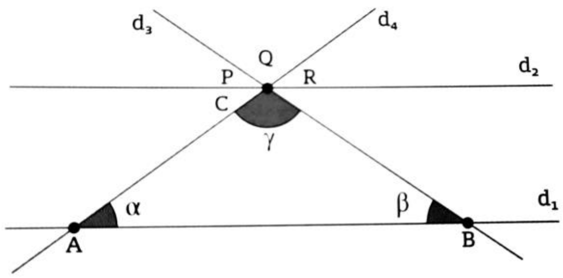
Se traza una recta sobre la base AB.

Luego se traza la recta paralela a AB que pasa por C.

d_3 es la prolongación de BC.

d_4 es la prolongación de AC.

Por lo tanto, se concluye que si ∡ P + ∡ Q + ∡ R = 180 , entonces = 180.



Si una recta transversal corta a dos rectas paralelas:

Ángulos alternos internos: son los ángulos que están entre las paralelas y a distinto lado de la transversal.

Ángulos alternos externos: son los ángulos que están en la parte exterior de las paralelas y a distinto lado de la transversal.

Ángulos correspondientes: son los que están del mismo lado de la transversal y en la misma posición respecto de cada paralela, pero uno es interno y el otro externo a las paralelas.

Ángulos conjugados internos: son dos ángulos internos a las dos rectas paralelas y del mismo lado de la transversal.

Ángulos conjugados externos: son dos ángulos externos a las dos rectas paralelas y del mismo lado de la transversal.

Ángulos adyacentes: son dos ángulos que tienen el vértice común, un lado común que los separa y los otros dos lados en línea recta.

1.6 Sistemas angulares de medición

Se entiende por sistemas de medición angular a la clase de mediciones sobre un arco de circunferencia en un plano. Son un capítulo básico en el estudio de la trigonometría, para comprender estos sistemas se debe saber el concepto de ángulo trigonométrico. En este sistema de medición angular utilizamos el ángulo como posición de vértice en ángulo C. Por ejemplo: el ángulo C es un vértice 0 que se suma a la circunferencia de C+A que llega a un total de C+A= 360° al cuerpo de otros.

Ángulo trigonométrico

Es una figura formada por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo (llamado vértice), desde una "posición inicial" llamado lado inicial, hasta una "posición final" denominado lado final (o lado terminal). Este ángulo puede superar el orden de los 360° a diferencia del ángulo geométrico… Existen variedades y cosas de definiciones del ángulo trigonométrico: sexagesimal.

- Ángulo positivo: El rayo gira en sentido antihorario"
- Ángulo negativo: El rayo gira en sentido horario.
- Ángulo nulo: El rayo no gira.
- Ángulo de una vuelta: El rayo gira 360°.
- Ángulo de dos vueltas: Dos rayos 720° a.
- Ángulo de tres vueltas: 1080°.

Sistema de medición

Sistema circular:1 es un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y cuyos lados abarcan un arco de longitud igual al radio de la circunferencia; en este sistema se le conoce como medida angular unidad el radián, con abreviatura rad. Se utiliza en geometría, cálculos y análisis matemático, por ejemplo en sistema de coordenadas polar, etc.

Sistema sexagesimal: sistema de 360°, su unidad es el grado sexagesimal (°); cada grado a su vez se divide en 60 partes iguales llamadas minutos (´), y cada una de estas se divide a su vez en 60 partes iguales llamadas segundos (").

Sistema centesimal: sistema de 400 grados; su unidad es el grado centesimal (g) Estos se dividen: I grado (g) igual a 100 minutos (m) y I minuto en 100 segundos (s).

1.6.1 Ángulos en notación sexagesimal y decimal

Cuando se suman ángulos conviene sumar primero las unidades más pequeñas y terminar con las más grandes. Primero se deben sumar segundos con segundos, luego minutos con minutos y al final grados con grados. Al sumar los segundos, por cada grupo de 60 se pasa una unidad a los minutos; de igual manera, al sumar minutos, por cada grupo de 60 se pasa una unidad a los grados.

Ejemplo 01

Sumar un ángulo de 28° 39' 59" con otro que mide 125° 28' 33".

Grados	Minutos	Segundos	
28°	39'	59"	+
125°	28'	33"	
153°	67'	92"	
153°	68'	32"	
154°	08'	32"	

Se suman segundos con segundos, minutos con minutos y grados con grados, y el resultado que se obtiene es 153° 67' 92".

Se sabe que 92" es igual a 1' con 32", por lo tanto,

se reescribe como 153° 68' 32".

Después de reescribirlo se deduce también que 68' con 1´ con 8'; entonces se reescribe, esta vez como 154° 08' 32".

Ejemplo 02

Calcular $\measuredangle$ ABC - $\measuredangle$ BAD dados $\measuredangle$ ABC 28° 15’ 32” y $\measuredangle \; BAD$ 19° 27’ 39”.

Grados	Minutos	Segundos	
28°	15'	32"	−
19°	27'	39"	

Grados	Minutos	Segundos	
27°	74'	92"	−
19°	27'	39"	
08°	47'	53"	

Se inicia con los segundos. Como a 32 no se le pueden quitar 39, en el minuendo se pide un minuto “prestado”, que equivale a 60”, entonces, el 15’ se convierte en 14’ porque “presto” una unidad a los segundos, y 32” se hace 32” + 60” = 92”.

Luego se sigue con los minutos. Ocurre que a 14’ no se le pueden restar 27’; entonces, los minutos piden prestada una unidad a los gados, que equivale a 60’, de manera que el 28 se hace 27 y el 14’ se vuelve 14’ + 60’ = 74’. Luego se concluye la resta.

Ejemplo 03

Convertir un ángulo de medida 36° 45’ 18” sexagesimal a su expresión con decimales:

Se separa el 36 y se suman los minutos divididos entre 60.

Se suman los segundos divididos entre 3 600.

Al final se cambian las unidades a grados.

$$36º\,45´18´´ \;=\; 36º + \frac{45}{60} \;+ \frac{18}{3600} + 0.75º \,+\, 0.005º \;=\; 36.755º$$

Ejemplo 04

Convertir el $\measuredangle$ de medida 36.755 a un ángulo expresado en grados, minutos y segundos.

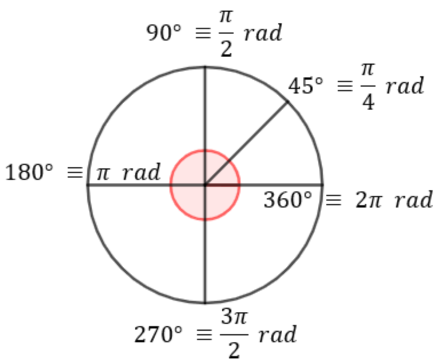
Se separa el 36 y el decimal 0.755 se multiplica por 60: 0.755 x 60 = 45.3.

La parte entera (45) son los minutos, la parte decimal 0.3 se multiplica otra vez por 60: 0.3 x 60 = 18. Estos son los segundos.

Entonces 36.755 = 36° 45’ 18”.

1.7 Conversión de grados a radianes

Otra unidad para medir ángulos es el radian (rad). En la circunferencia de radio r se observa un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo. Este ángulo separa al círculo en dos partes llamadas arcos. El arco subtendido s es aquel que corresponde a la menor longitud sobre el círculo. De esta forma, el ángulo en radianes se define como .



La longitud de arco de una circunferencia completa es igual a 2π rad.

Se observa que 360 = 2 π rad. Por lo tanto:

Si 360° = 2 π rad, al dividir entre 360 queda:

$$\frac{360}{360} = \frac{2\pi rad}{360}$$

$$1 = \frac{\pi}{180} rad$$

La expresión encontrada se utiliza para transformar grados a radianes:

$$\mathbf{1 = \frac{\pi}{180} rad}$$

Ejemplo 01

Determinar el número de radianes a los que equivale un ángulo recto (90°).

Se multiplica el valor del ángulo, en este caso 90 , en los dos lados de la fórmula; se realizan las operaciones y se simplifica:

$$(90°)(1) = (90)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$(90°)(1) = \left(\frac{90}{1}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$90° = \left(\frac{90\pi}{180}\right)rad$$

$$90° = \frac{\pi}{2}rad$$

Un ángulo recto equivale a: $\frac{\pi}{2}rad$

Ejemplo 02

Un barco recibe información desde la torre de control del puerto. El mensaje recibido dice: el lugar donde se estrelló el avión está 150° grados al norte de su ubicación. Si el radar solo está en radianes, ¿cuál es la ubicación en radianes?

Se multiplica el valor del ángulo, en este caso 150°, en los dos lados de la fórmula:

$$(150°)(1) = (150)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

Se realizan las operaciones y se simplifica:

$$(150°)(1) = \left(\frac{150}{1}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$150° = \left(\frac{150\pi}{180}\right)rad$$

$$150° = \frac{5\pi}{6}rad$$

Por lo tanto, el barco debe dirigirse a $\frac{5\pi}{6}$ al norte de su ubicación.

1.8 Conversión de radianes a grados

El radián es una unidad de ángulo plano. Se usa cuando medimos ángulos de circunferencias, arcos y ángulos de otras figuras.

Un círculo está formado de 2 π radianes, lo que equivale a 360°. Por lo tanto, 1 π radián representa 180 de un círculo.

Para realizar una conversión de radianes a grados simplemente se multiplica el valor en radianes por $\frac{180}{\pi}$.

Ejemplo 01

Convertir $\frac{\pi}{12}$ radianes a grados.

Se multiplican los radianes por $\frac{180}{\pi}$.

$$\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{180^{\pi}}{12^{\pi}}$$

El resultado obtenido se simplifica y se realiza la división:

$$\frac{180^{\pi}}{12} = \frac{180}{12} = 15$$

Por lo tanto, $\frac{\pi}{12}$ radianes es igual a 15.

Ejemplo 02

Convertir 4 radianes a grados.

Se multiplican los radianes por $\frac{180}{\pi}$:

$$4\left(\frac{180}{\pi}\right) = \frac{720}{\pi}$$

Posteriormente se realiza la división:

$$\frac{720}{3.1416} = 229.1825$$

Por lo tanto, 4 radianes equivalen a 229.1825° o 229° 10' 57''.

Ejemplo 03

Si se desea forrar la piel una parte de la circunferencia del volante de un carro, equivalente a 1 radián, ¿cuál es el ángulo central que se deberá forrar?

Puesto que 1 radián es igual a $\frac{180}{\pi}$, solo se realiza la operación:

$$1rad = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.1416} = 57.2956$$

El ángulo del arco mide 57,2956 o 57 17’44”.

Resuelve

El piloto de un helicóptero recibe información de que una tormenta se encuentra cerca de su ubicación y pretende rodearla. El último mensaje que alcanzó a escuchar en el radio antes de que se cortara la comunicación fue “la tormenta se encuentra $\frac{\pi}{5}$ radianes al noreste de tu ubicación”. Si el piloto solo conoce los ángulos en grados, ¿a qué dirección no se debe acercar?

1.9 Triángulos y sus propiedades

Los triángulos o trígonos **son** figuras geométricas **planas, básicas, que poseen tres lados en contacto entre sí** en puntos comunes denominados vértices. Su nombre proviene del hecho de que posee tres ángulos interiores o internos, formados por cada par de líneas en contacto en un mismo vértice.

Estas figuras geométricas se nombran y clasifican de acuerdo a la forma de sus lados y al tipo de ángulo que construyen. Sin embargo, sus lados son siempre tres y **la suma de todos sus ángulos siempre dará 180°**.

Los triángulos han sido estudiados por la humanidad desde tiempos inmemoriales, ya que han estado asociados a lo divino, a los misterios y a la magia. Por eso, es posible hallarlos en muchos símbolos ocultistas (masonería, brujería, cábala, etc.) y en tradiciones religiosas. Su número asociado, el tres (3), numerológicamente alude al misterio de la concepción y a la vida misma.

En la historia del triángulo la antigüedad griega merece un lugar destacado. El griego Pitágoras (c. 569 – c. 475 a.C.) propuso su célebre teorema para los triángulos rectángulos, que reza que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos.

La propiedad más obvia de los triángulos son sus **tres lados, tres vértices y tres ángulos**, que bien pueden ser semejantes o totalmente distintos entre sí. Los triángulos son los polígonos más simples que hay y **carecen de diagonal**, ya que con tres puntos no alineados cualesquiera es posible formar un triángulo.

De hecho, cualquier otro polígono puede dividirse en un conjunto ordenado de triángulos, en lo que se conoce como *triangulación*, de modo que el estudio de los triángulos es fundamental para la geometría.

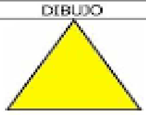
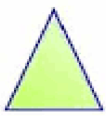
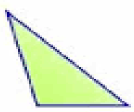
Además, los triángulos **son siempre convexos**, nunca cóncavos, ya que sus ángulos nunca pueden superar los 180° (o π radianes).

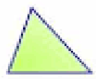
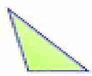
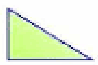
1.9.1 Clasificación de triángulos

Un triángulo es un polígono determinado por tres segmentos de recta que intersectan en tres puntos desalineados (no colineales).

Los puntos de intersección de las rectas se llaman vértices, los segmentos de recta son los lados del triángulo tiene tres ángulos interiores, tres ángulos exteriores, tres lados y tres vértices.

CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS SEGÚN SUS LADOS.

DIBUJO	NOMBRE	CARACTERÍSTICAS	ÁNGULOS
	EQUILÁTERO	TODOS SUS LADOS DE IGUAL MEDIDA.	TRES ÁNGULOS AGUDOS DE 60º.
	ISÓSCELES	DOS LADOS DE IGUAL MEDIDA Y UNO DE DISTINTA MEDIDA.	LOS ÁNGULOS BASALES SON IGUALES.
	ESCALENO	TODOS SUS LADOS DE DISTINTA MEDIDA.	TRES ÁNGULOS DE DIFERENTE MEDIDA.

CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS SEGÚN SUS ÁNGULOS.			
DIBUJO	NOMBRE	CARACTERÍSTICAS	ÁNGULOS
	ACUTÁNGULO	TIENE TRES ÁNGULOS AGUDOS.	ÁNGULOS AGUDOS QUE MIDEN MENOS DE 90º.
	OBTUSÁNGULO	TIENE DOS ÁNGULOS AGUDOS Y UNO OBTUSO.	DOS ÁNGULOS AGUDOS QUE MIDEN MENOS DE 90º Y UNO OBTUSO QUE MIDE MÁS DE 90º.
	RECTÁNGULO	TIENE UN ÁNGULO RECTO Y DOS AGUDOS.	UN ÁNGULO RECTO QUE MIDE 90º Y DOS QUE MIDEN MENOS DE 90º.

1.10 Ángulos internos y externos

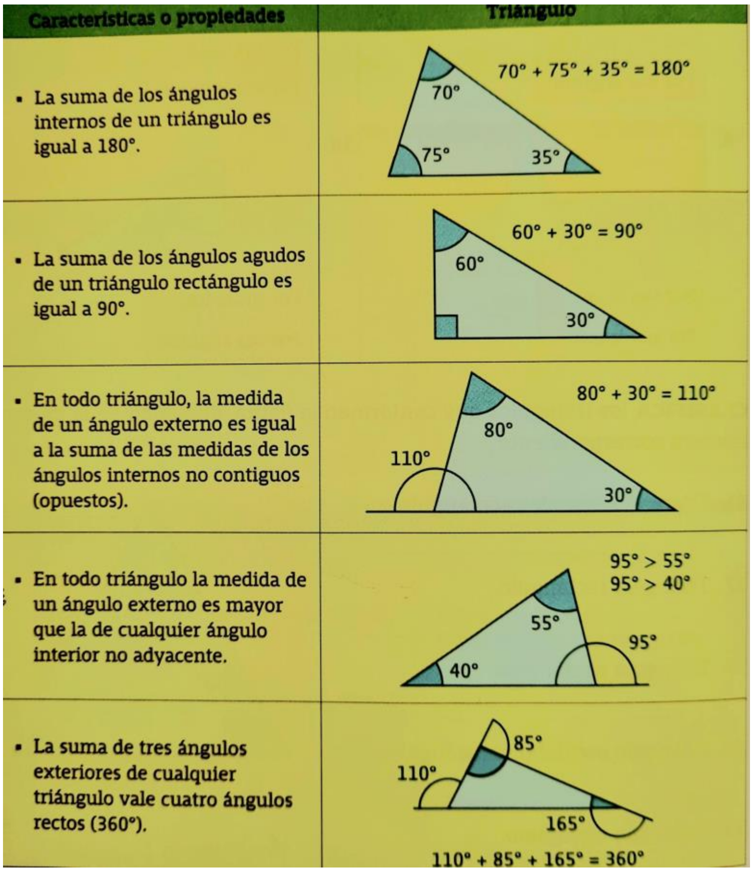
En geometría, un ángulo interior o ángulo interno de un triángulo es aquel formado por dos lados que tienen un vértice en común y está contenido dentro del triángulo. La suma de los ángulos internos de todos los triángulos es igual a 180.

Un ángulo exterior o ángulo externo es aquel formado por un lado del triángulo y la prolongación del lado adyacente. En cada vértice de un triángulo es posible identificar dos ángulos exteriores con la misma amplitud.

Ángulos internos: Es un ángulo formado por dos lados de un polígono que como comparten un extremo común, está contenido dentro del polígono.

Ángulos externos: Son los ángulos formados por un lado de un polígono y la prolongación del lado adyacente. La suma de los ángulos externos de un polígono es 360.

A continuación, las medidas de los ángulos internos y externos de los polígonos.

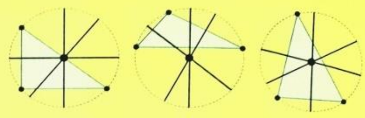
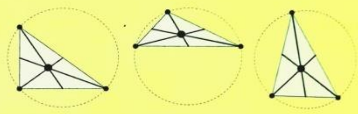
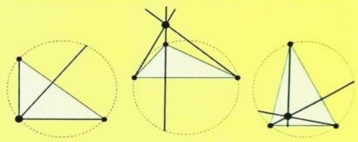
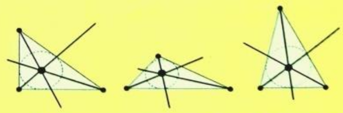


Características o propiedades	Triángulo
• La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.	70° + 75° + 35° = 180°
• La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°.	60° + 30° = 90°
• En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos (opuestos).	80° + 30° = 110°
• En todo triángulo la medida de un ángulo externo es mayor que la de cualquier ángulo interior no adyacente.	95° > 55° 95° > 40°
• La suma de tres ángulos exteriores de cualquier triángulo vale cuatro ángulos rectos (360°).	110° + 85° + 165° = 360°

1.11 Rectas y puntos notables del triángulo

Un triángulo, en geometría, es un polígono determinado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos (que no se encuentran alineados). Los puntos de intersección de las rectas son los vértices y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo.

Dos lados contiguos forman uno de los ángulos interiores del triángulo. En los triángulos se puede denotar un grupo de rectas y puntos muy importantes. Entre las rectas notables más conocidas de un triángulo se pueden nombrar las mediatrices, las medianas, las alturas y las bisectrices; cada una de estas rectas notables determina cierto punto notable: circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro, respectivamente.

Rectas	Puntos	Representación gráfica
Mediatrices. Son las rectas perpendiculares que atraviesan los puntos medios de cada uno de los segmentos que forman los lados del triángulo.	**Circuncentro.** Es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo; es decir, del circuncentro hay la misma distancia a cualquiera de los vértices. El circuncentro puede localizarse en el interior del triángulo cuando es acutángulo, y en el exterior si es obtusángulo; en el caso del triángulo rectángulo el circuncentro se localiza en el punto medio de la hipotenusa.	 Rectángulo Obtusángulo Acutángulo
Medianas. Son las rectas que pasan por los vértices de un triángulo y los puntos medios de sus lados opuestos. Las tres medianas de un triángulo intersectan en un punto.	**Baricentro.** Es el punto donde se juntan las medianas de un triángulo. La distancia de un vértice al baricentro es el doble de la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto a ese vértice. El baricentro siempre está en el interior del triángulo, y es su centro de gravedad.	 Rectángulo Obtusángulo Acutángulo
Alturas. Son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados, pero que pasan por el vértice opuesto. Forman un ángulo recto con el lado opuesto al vértice desde donde se trazan.	**Ortocentro.** Es el punto donde intersectan las alturas de un triángulo. Si el triángulo es acutángulo el ortocentro se localiza en el interior, en un triángulo rectángulo se localiza en el vértice de los lados perpendiculares y en un triángulo obtusángulo se localiza en el exterior.	 Rectángulo Obtusángulo Acutángulo
Bisectrices. Son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en otros dos ángulos iguales.	**Incentro.** Punto en el que coinciden las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo. Este punto también es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo y siempre es interior.	 Rectángulo Obtusángulo Acutángulo

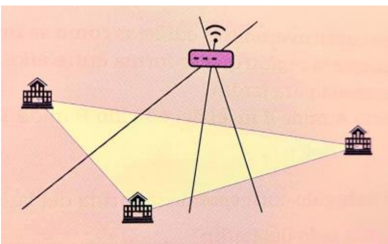
Ejemplo 01

En una escuela van a colocar un módem para distribuir la señal inalámbrica (wifi) a tres edificios que entre ellos forman un triángulo escaleno.

¿En dónde se debe colocar el módem si se necesita que la intensidad de la señal sea la misma para todos los edificios? Se traza un triángulo escaleno en el cual cada vértice represente la ubicación de uno de los edificios.

De acuerdo con las definiciones de los puntos notables de un triángulo, el punto que se ubica a la misma distancia de los vértices es el circuncentro.

Se traza la mediatriz de cada uno de los lados del triángulo. El punto donde se intersecan las tres mediatrices es el circuncentro. Ahí se deberá colocar el módem para que la distancia a todos los edificios sea la misma y las tres tengan la misma intensidad de señal.



UNIDAD II

FIGURAS GEOMÉTRICAS

2.1 Teorema de Pitágoras

En matemáticas, el teorema de Pitágoras es una relación en geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Afirma que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos (los otros dos lados que no son la hipotenusa). Este teorema se puede escribir como una ecuación que relaciona las longitudes de los lados 'a', 'b' y 'c'. Es la proposición más conocida entre las que tienen nombre propio en la matemática.1 El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma del área de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.
El teorema se ha demostrado en numerosas ocasiones por muchos métodos diferentes, posiblemente el mayor número de teoremas matemáticos. Las pruebas son diversas, e incluyen tanto pruebas geométricas como algebraicas, y algunas se remontan a miles de años atrás.

El teorema se puede generalizar de varias maneras: a espacios de mayor dimensión, a espacios que no son euclidianos, a objetos que no son triángulos rectos y a objetos que no son triángulos en absoluto, sino sólidos n. El teorema de Pitágoras ha despertado interés fuera de las matemáticas como símbolo de abstracción matemática, mística o poder intelectual; abundan las referencias populares en la literatura, obras de teatro, musicales, canciones, sellos y dibujos animados.

2.2 Propiedades y demostración del teorema

En matemáticas, el teorema de Pitágoras es una relación fundamental en geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Afirma que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los otros dos lados. Este teorema se puede escribir como una ecuación que relaciona las longitudes de los lados a, b y c, a menudo llamada ecuación pitagórica; Es la proposición más conocida entre las que tienen nombre propio en la matemática.1

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma del área de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

El teorema se ha demostrado en numerosas ocasiones por muchos métodos diferentes, posiblemente el mayor número de teoremas matemáticos. Las pruebas son diversas, incluyendo tanto pruebas geométricas como algebraicas, y algunas se remontan a miles de años atrás.

El teorema se puede generalizar de varias maneras: a espacios de mayor dimensión, a espacios que no son euclidianos, a objetos que no son triángulos rectos, y a objetos que no son triángulos en absoluto, sino sólidos n. El teorema de Pitágoras ha despertado interés fuera de las matemáticas como símbolo de abstracción matemática, mística o poder intelectual; abundan las referencias populares en la literatura, obras de teatro, musicales, canciones, sellos y dibujos animados.

Información clave:

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto, es decir, de 90°.

En un triángulo rectángulo el lado más grande recibe el nombre de hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos.

La hipotenusa usualmente se representa con la letra c y los catetos con las letras a y b.

Teorema

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Su representación algebraica es: $a^2 + b^2 = c^2$

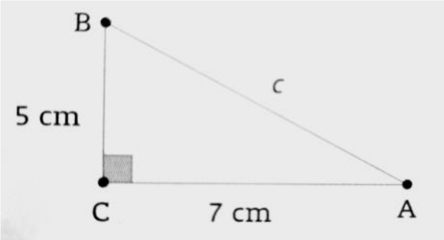
Ejemplo 01

Calcular el lado faltante del triángulo rectángulo.

Puesto que el lado faltante es la hipotenusa, se utiliza la fórmula que tiene despejada c, después se sustituyen los datos y se resuelve:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8.60\ cm$$



2.3 El teorema de Pitágoras y su recíproco

El Teorema de Pitágoras puede usarse para verificar que un triángulo es rectángulo. Es decir, que si se demuestra que los tres lados de un triángulo dado hacen verdadera la ecuación (cateto1)2+(cateto2)2=(hipotenusa)2, entonces se concluye que dicho triángulo es un triángulo rectángulo. Esto se conoce como el Recíproco del Teorema de Pitágoras.

Nota: Cuando usamos el Recíproco del Teorema de Pitágoras, debemos asegurarnos de que utilizamos los valores correctos para los catetos y la hipotenusa. Una forma de verificación es que la hipotenusa debe ser el lado mayor (es decir, el lado de mayor longitud). Los otros dos términos son los catetos y el orden en que son utilizados en la ecuación no es importante.

El recíproco del teorema de Pitágoras establece que si las longitudes de los tres lados de un triángulo satisfacen la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$, se trata de un triángulo rectángulo. Si las medidas de los lados cumplen esta condición reciben el nombre de terna pitagórica.

Cuando se usa el recíproco del teorema de Pitágoras se deben asignar los valores correctos a los catetos y la hipotenusa. La hipotenusa (lado c) es el lado mayor longitud, y queda sola en un lado de la igualdad. Los otros dos términos son los catetos (a y b) y aparecen en el otro lado de la ecuación.

Ejemplo 01

Determinar si un triángulo con las siguientes medidas es una terna pitagórica:

cateto a = 16 cateto b = 63 hipotenusa c = 65

Se sustituyen los valores en la fórmula del teorema Pitágoras y se resuelven las operaciones.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$16^2 + 63^2 = 65^2$$

$$256 + 3969 = 4225$$

$$4225 = 4225$$

Por lo tanto, las medidas 16, 63 y 65 sí son una terna pitagórica ya que la igualdad sí se cumple.

Resuelve

Determinar si un triángulo de medidas 6, 8 y 10 es un triángulo rectángulo.

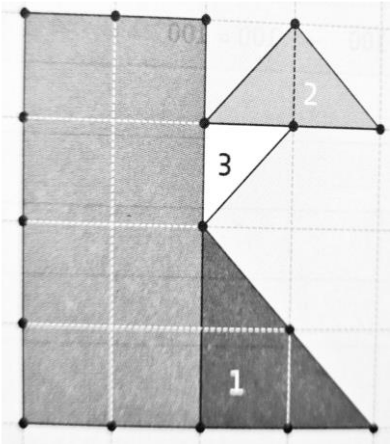
Determinar si los números 8, 15 y 17 forman una terna pitagórica.

2.4 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Para calcular el área de un polígono irregular se emplea el método de descomposición; pero no se descompone en forma arbitraria, sino sistemática. Se divide el polígono en otros polígonos regulares cuyas áreas sean fáciles de calcular: triángulos, cuadriláteros, trapecios, etcétera.

Ejemplo 01

Don Jorge quiere vender un terreno, pero necesita calcular el área para definir el precio. En el siguiente plano cuadriculado se muestra la forma que tiene el terreno, todos los lados de los cuadrados miden 10 m.



Se procede a dividirlo en polígonos regulares para obtener el área de cada uno de ellos.

Se calcula el área del rectángulo utilizando la fórmula A = Bh:

$$20x40 = 800m^2$$

Para calcular el área del triángulo se usa la fórmula $A = \frac{Bh}{2}$

Para obtener el área del triángulo 1 se tiene:

$$\frac{(20)(20)}{2} = \frac{400}{2} = 200m^2$$

El área del triángulo 2 se obtiene con la operación:

$$\frac{(20)(10)}{2} = \frac{200}{2} = 100m^2$$

En seguida se calcula el área del triángulo 3:

$$\frac{(10)(10)}{2} = \frac{100}{2} = 50m^2$$

El área del terreno es igual a la suma de las áreas obtenidas de todos los polígonos regulares:

$$800 + 200 + 100 + 50 = \mathbf{1150m^2}$$

2.5 Polígonos y sus propiedades

Si observas a tu alrededor, las paredes, los techos, el piso, el pizarrón, las bancas, las sillas, las puertas, … en fin, lo que te rodea, verás muchas cosas; pero lo importante es que observes que tiene lados rectos y circulares, las cuales al unirse representan figuras como rectángulos, cuadrados, círculos, triángulos, entre otras. Y no solo en tu salón puedes apreciar estas formas, en tus clases de química orgánica, cuando veas el tema de hidrocarburos cíclicos, observarás las siguientes cadenas cerradas o cíclicas.

Como estas figuras están formadas por líneas definidas les llamamos polígonos o figuras planas. ¿Ahora reconoces la importancia del estudio de los polígonos o figuras planas? ¿Reconoces que no es lo mismo la figura del pizarrón, que las losetas del piso, ni tampoco el foco? ¿En qué son diferentes? ¿Qué diferencias marcarías en las diferentes figuras que observas? Conversa con alguno de tus compañeros sobre las respuestas a estas interrogantes y finalmente exprésenlas a todo el grupo.

Polígonos regulares

Un polígono es una figura plana, cerrada, formada por lados rectos. Las anteriores figuras y muchas otras más son polígonos.

Por la medida de sus lados, los polígonos pueden ser regulares o irregulares. En la figura 4.2 se presentan algunos polígonos regulares:

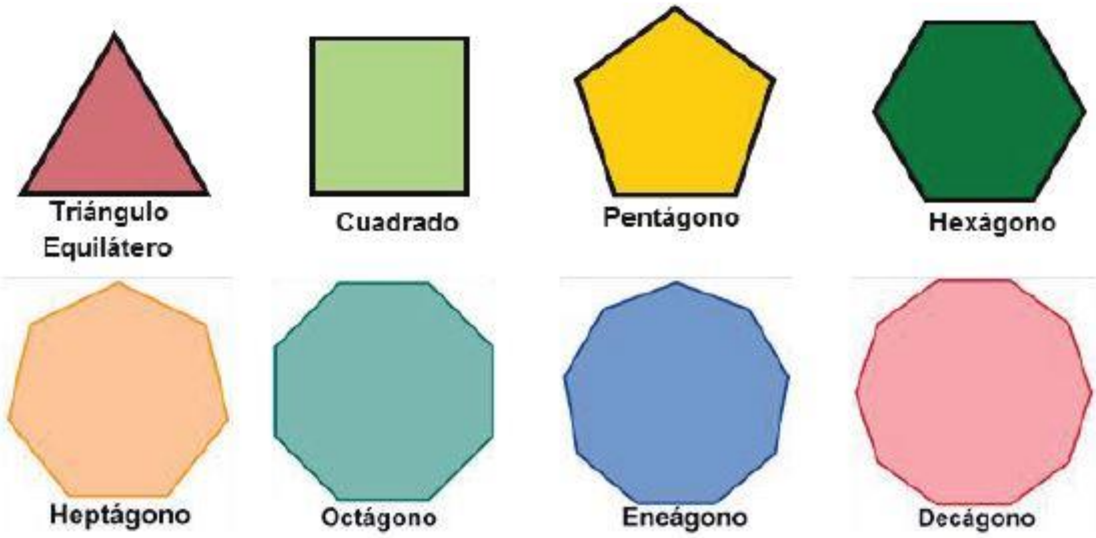
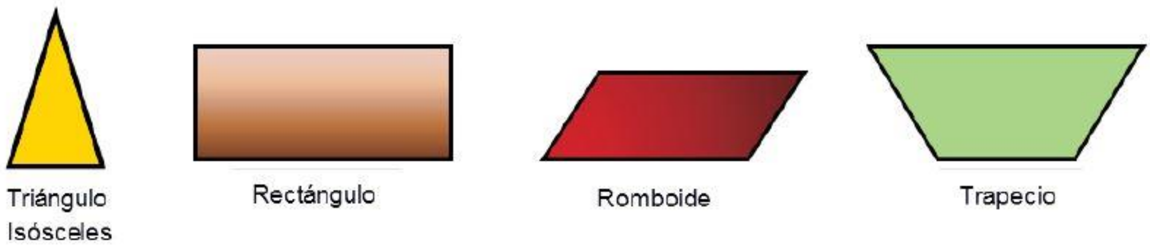


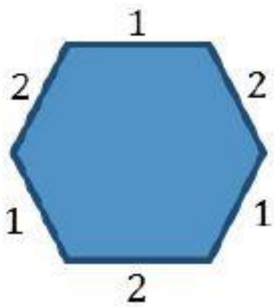
Figura 4.2

Observando los polígonos que aparecen en la figura 4.2 puedes darte cuenta que tanto sus lados como sus ángulos son iguales. Esta es la característica más importante de los **polígonos regulares**. De este modo, el primer polígono regular es el triángulo regular, denominado triángulo equilátero, que está formado por tres lados y ángulos iguales; le siguen el cuadrado (formado por cuatro lados y ángulos iguales), el pentágono (de cinco lados y ángulos iguales), el hexágono (de seis lados y ángulos iguales), el heptágono (de siete lados y ángulos iguales), el octágono (de ocho lados y ángulos iguales), el eneágono (de nueve lados y ángulos iguales), el decágono (de diez lados y ángulos iguales) y así sucesivamente.

Los **polígonos irregulares** no tienen ángulos y lados iguales, tal es el caso del triángulo isósceles, el triángulo escaleno, el rectángulo, romboide, trapecio, trapezoide y en general cualquier polígono de lados y ángulos diferentes. La figura, muestra algunos de los polígonos irregulares:



La primera característica que podemos mencionar es que los polígonos se forman con segmentos rectos unidos por sus extremos de dos a dos; como podrás observar en la figura



Al trazar un polígono comienzas desde un lado inicial continuando el trazo de cada lado unido por un vértice hasta terminar uniendo el lado final con el inicial. Ahora, ¿cuáles son los elementos importantes que diferencian a unos polígonos de otros?

2.6 Clasificación de Polígonos

Según las propiedades que cumpla el contorno del polígono, es posible realizar las siguientes clasificaciones.

Simple, si ningún par de aristas no consecutivas se corta. Equivalentemente, su frontera tiene un solo contorno.

Complejo o Cruzado, si dos de sus aristas no consecutivas se intersecan.

Convexo, si todo segmento que une dos puntos cualesquiera del contorno del polígono yace en el interior de este. Todo polígono simple y con todos sus ángulos internos, menores que 180º es convexo.

No convexo, si existe un segmento entre dos puntos de la frontera del polígono que sale al exterior del mismo. O si existe una recta capaz de cortar el polígono en más de dos puntos.

Cóncavo, si es un polígono simple y no convexo.

Equilátero, si tiene todos sus lados de la misma longitud.

Equiángulo, si tiene todos sus ángulos interiores iguales.

Regular, si es equilátero y equiángulo a la vez.

Irregular, si no es regular. Es decir, si no es equilátero o equiángulo.

Cíclico, si existe una circunferencia que pasa por todos los vértices del polígono. Todos los polígonos regulares son cíclicos.

Ortogonal o Isotético, si todos sus lados son paralelos a los ejes cartesianos.

Alabeado, si sus lados no están en el mismo plano.

Estrellado, si se construye a partir de trazar diagonales en polígonos regulares. Se obtienen diferentes construcciones dependiendo de la unión de los vértices: de dos en dos, de tres en tres, etc.

Reticular es simple y, al representarlo en un reticulado, cada vértice yace exactamente en un vértice de cuadrado unitario del reticulado (en este caso funciona la fórmula de Pick).

Monótono, si existe alguna dirección del plano en la cual todos los cortes del polígono en esa dirección consisten en un punto o un segmento.

Elementos de un polígono

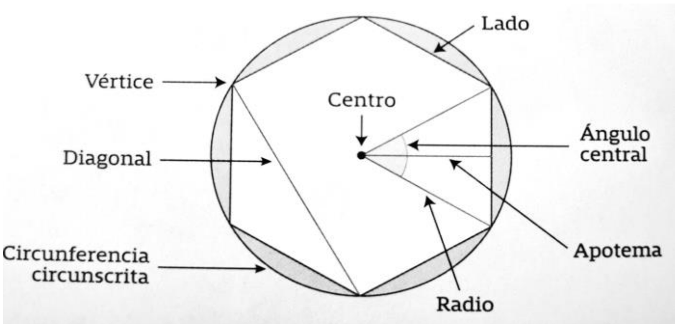
Apotema. Es el segmento que une el centro de un polígono con el punto medio de alguno de sus lados.

Centro. Es el punto que está a igual distancia de todos los vértices y lados del polígono regular.

Diagonales. Son los segmentos que unen dos vértices no adyacentes, es decir, segmentos que no son lados del polígono.

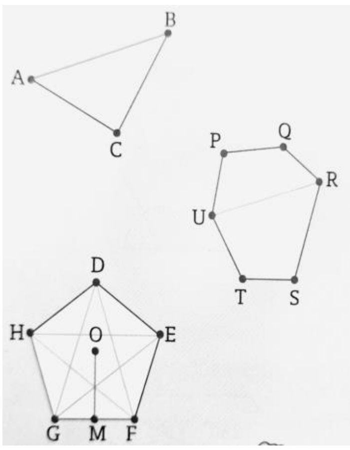
Lados. Son cada uno de los segmentos que conforman y delimitan al polígono, normalmente se nombran de acuerdo con los vértices que los determinan.

Vértices. Son los puntos donde se unen dos lados del polígono, por lo general se nombran con una letra mayúscula.



Resuelve

Reconoce los elementos de los polígonos marcados en las figuras de la derecha:



2.7 Ángulos internos y externos

En un polígono se contemplan dos tipos de ángulos: los interiores y los exteriores. Los interiores son los formados por cada dos lados contiguos y los exteriores son sus suplementarios.

Conocemos la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, que es 180º. Como cualquier polígono se puede dividir en triángulos se podrá calcular cuál es la suma total en cada caso.

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

Un cuadrilátero se puede dividir en 2 triángulos, un pentágono en 3, un hexágono en 4, etc.; siempre dos menos que el número de lados. En definitiva, un polígono de n lados se puede descomponer en n-2 triángulos y, por tanto, la suma de los ángulos interiores será: 180º ·(n-2). Si el polígono es regular el valor de uno de los ángulos interiores es:

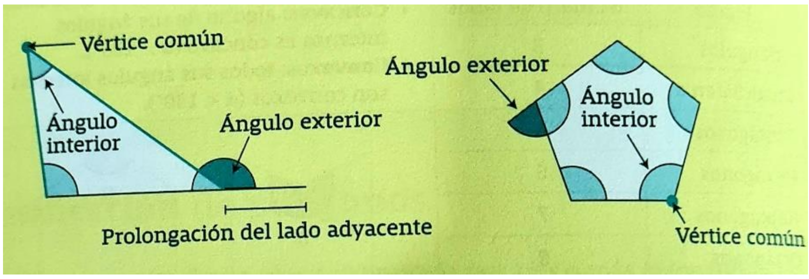
La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360º. Teniendo en cuenta que el ángulo interior y el exterior suman 180º, en un polígono de n lados los interiores y los exteriores sumarán, en total, n ·180º, como los interiores suman 180º ·(n-2) los exteriores suman 360º

Información clave:

Un ángulo interior o ángulo interno de un polígono es aquel formado por dos lados que tienen un vértice en común y está contenido dentro de una figura.

- En un triángulo la suma de sus ángulos interiores es de 180°.
- En un cuadrilátero la suma es de 360°, ya que se compone de dos triángulos.
- En un pentágono es igual a 540°, dado que está compuesto por tres triángulos.

Un ángulo exterior o ángulo externo es aquel formado por un lado del polígono y la prolongación del lado adyacente. La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360°.

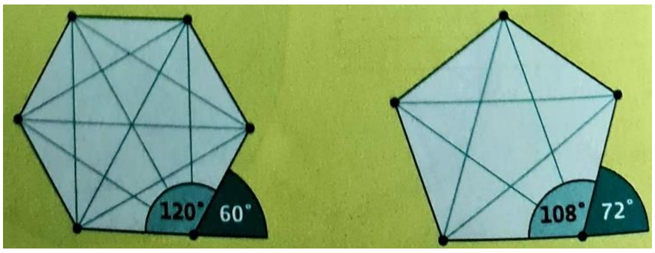


Información clave

Para obtener más información útil y resolver problemas relacionados con polígonos se debe considerar lo siguiente:

Analizar los ángulos internos y ángulo externo de los polígonos regulares.

Observar que las diagonales forman nuevos triángulos equiláteros e isósceles.



Ejemplo 01

Calcular la suma de los ángulos interiores de un octágono regular.

El octágono tiene 8 lados, por lo que n = 8.

Se utiliza la fórmula para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera, se reemplaza n por 8 y se realizan las operaciones:

$$(180°)\,(n-2) = (180°)\,(8-2)$$
$$= (180°)\,(6)$$
$$= 1080°$$

La suma de los ángulos interiores de un octágono es 1 080°.

Ejemplo 02

Calcular el ángulo externo de un pentadecágono.

El pentadecágono tiene 15 lados, por lo que n = 15.

Se utiliza la fórmula para calcular el ángulo externo de un polígono regular, se reemplaza n por 15 y se realizan las operaciones:

$$\beta = \frac{360}{n} = \frac{360}{15} = 24$$

El ángulo externo de un pentadecágono es de 24°.

Diagonales y ángulos de un polígono regular

La diagonal de un polígono es un segmento que une a dos vértices no consecutivos.

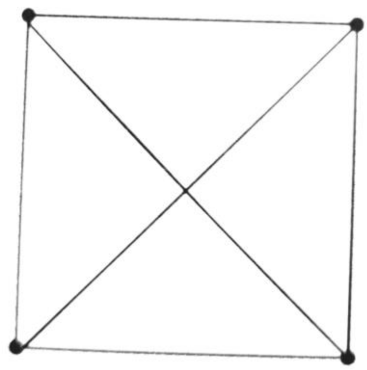
En un polígono de n lados, el número de diagonales viene dado por la ecuación:

$$N_d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ejemplo 01

Calcular la cantidad de diagonales que tiene un cuadrado.

Se considera que n = 4 y se aplica la fórmula para obtener el número de diagonales:

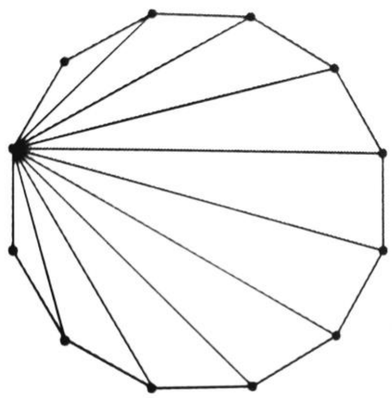


El cuadrado tiene dos diagonales.

Ejemplo 02

Calcular la suma de los ángulos internos de un dodecágono.

Se trazan las diagonales desde un vértice



Se cuentan los triángulos que se forman, en este caso son 10.

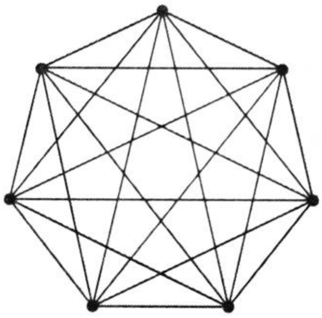
Se multiplica el número de triángulos por 180:

(10)(180°) = 1800°

Resuelve

Calcular la cantidad de diagonales que tiene un heptágono.

El heptágono tiene 7 lados, por lo tanto, n = 7.



El heptágono tiene 14 diagonales.

¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 20 lados? Un polígono es convexo si todos los ángulos interiores son menores de 180º. En un polígono convexo la suma de los ángulos exteriores es 360º.

Polígono	Nº Lados	Nº Diagonales
Cuadrilátero	4	d4=2
Pentágono	5	d5= 2+3=5
Hexágono	6	d6= 2+3+4=9
Heptágono	7	d7 = 2+3+4+5=14

En geometría plana, se denomina polígono regular a un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Los polígonos regulares de tres y cuatro lados se llaman triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente. Para polígonos de más lados, se añade el adjetivo regular (pentágono regular, hexágono regular, octágono regular, etc). Solo algunos polígonos regulares pueden ser construidos con regla y compás.

2.9 Perímetros y áreas

El perímetro y el área son dos elementos fundamentales en matemáticas. Para ayudarte a cuantificar el espacio físico y también para proveer las bases de matemáticas más avanzadas como en el álgebra, trigonometría, y cálculo. El perímetro es una medida de la distancia alrededor de una figura y el área nos da una idea de qué tanta superficie cubre dicha figura.

El conocimiento del área y el perímetro lo aplican muchas personas día con día, como los arquitectos, ingenieros, y diseñadores gráficos, y es muy útil también para la gente en general. Entender cuánto espacio tienes y aprender cómo conjuntar figuras te ayudará cuando pintas tu cuarto, compras una casa, remodelas la cocina, o construyes un escritorio.

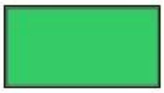
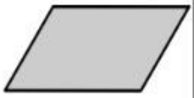
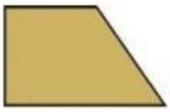
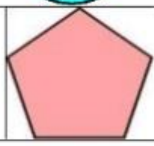
El perímetro de una figura de dos dimensiones es la distancia alrededor de la figura. Puedes imaginar una cuerda siguiendo los lados de la figura. La longitud de la cuerda será el perímetro. O caminar alrededor de un parque, caminas la distancia del perímetro del parque. Algunas personas encuentran útil pensar "peri-metro" donde peri es "periferia" y metro es "medida".

Si la figura es un polígono, entonces puedes sumar todas las longitudes de sus lados para encontrar el perímetro. Ten cuidado de asegurarte que todas las longitudes están medidas en las mismas unidades. Medimos el perímetro en unidades lineales, que representan una sola dimensión. Ejemplos de unidades de medida de longitud son pulgadas, centímetros, o pies.

2.10 Perímetros de figuras básicas y compuestas

El perímetro es la medida del contorno de una figura. Dado que muchas figuras presentan formas caprichosas e irregulares, conocer las propiedades de las figuras que las conforman facilita el cálculo de esta medida y brinda la información necesaria para resolver problemas.

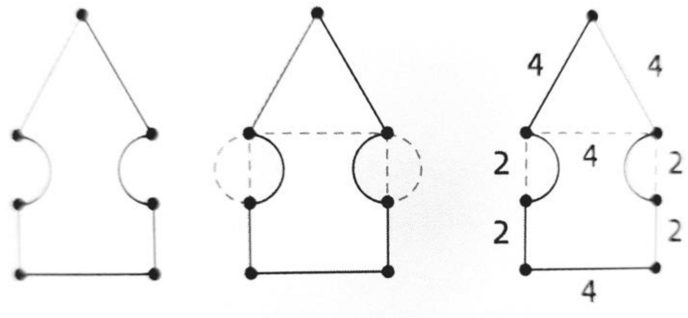
Las siguientes son las principales fórmulas para calcular el perímetro de figuras simples.

Nombre	Figura geométrica	Área	Perímetro
Cuadrado		$A = a \times a$	$P = 4a$
Rectángulo		$A = b \times h$	$P = 2b + 2h$
Triángulo		$A = \frac{b \times h}{2}$	$P = 3a$
Rombo		$A = \frac{D \times d}{2}$	$P = 4a$
Romboide		$A = b \times h$	$P = 2b + 2a$
Trapecio		$A = \frac{b + B}{2}(h)$	$P = a + b + B + c$
Círculo		$A = \pi r^2$	$P = \pi(d)$
Pentágono		$A = \frac{5a \times b}{2}$	$P = 5b$

Ejemplo 01

Determina el perímetro de una figura compuesta por un cuadrado cuyo lado mide 4 u. Sobre la base superior se traza un triángulo equilátero cuya base coincide con el lado del cuadrado; en dos de sus lados, el punto medio y un vértice del cuadrado determinan una semicircunferencia.

Bosqueja -> Separa -> Registra Datos -> Localiza la fórmula -> Sustituye y resuelve



- La figura está compuesta por dos lados de un triángulo equilátero de lado 4.
- La base y dos mitades de los lados de un cuadrado de lado 4.
- Dos semicircunferencias de radio 1 cuyo perímetro es P=2 π/2

Obtener el área o perímetro es de las habilidades más fáciles y básicas en geometría. Sin embargo, al momento de combinar varias figuras planas se forman figuras compuestas, que pueden incluir: cuadrados, círculos, triángulos, rectángulos, trapecio, etc.

2.11 Áreas de figuras básicas y compuestas

Área es la medida de la superficie de una figura; es decir, la cantidad de espacio que existe dentro de los límites de un objeto plano. Las medidas se indican en unidades cuadradas (u^2).

Las fórmulas para calcular el área de los polígonos son:

Información clave

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo se conocen las medidas de sus tres lados. Por lo tanto, con esta fórmula no es necesario conocer ni la altura ni la medida de los ángulos.

Primero se debe conocer el semiperímetro (mitad del perímetro), al que llamaremos s:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Entonces, el área se expresa como:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ejemplo 01

Calcular el área de un triángulo de lados a=12, b=8 y n c=9.

Se calcula el semiperímetro:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+8+9}{2} = \frac{29}{2} = 14.5$$

Se aplica la fórmula de Herón, donde A significa área:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{14.5(2.5)(6.5)(5.5)} = \sqrt{1295.93} = \mathbf{35.99u^2}$$

UNIDAD III

FORMAS, CONGRUENCIAS Y SEMEJANZAS

3.1 Volúmenes

El volumen es una magnitud métrica de tipo escalar2 Definida como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio. Es una magnitud derivada de la longitud, ya que en un ortoedro se halla multiplicando tres longitudes: el largo, el ancho y la altura. Matemáticamente el volumen es definible no solo en cualquier espacio euclídeo, sino también en otro tipo de espacios métricos que incluyen por ejemplo a las variedades de Riemann.

Desde un punto de vista físico, los cuerpos materiales ocupan un volumen por el hecho de ser extensos, fenómeno que se debe al principio de exclusión de Pauli. La noción de volumen es más complicada que la de superficie y en su uso formal puede dar lugar a la llamada paradoja de Banach-Tarski.

La unidad de medida de volumen en el Sistema Internacional de Unidades es el metro cúbico. En el sistema métrico decimal, una unidad de volumen para sólidos era el estéreo, igual al metro cúbico, pero actualmente poco usada. En ese mismo sistema, para medir la capacidad de líquidos, se creó el litro, que es aceptado por el SI. Por razones históricas, existen unidades separadas para ambas; sin embargo, están relacionadas por la equivalencia entre el litro y el decímetro cúbico:

1 dm^3 = 1 litro = 0,001 m^3 = 1000 cm^3.

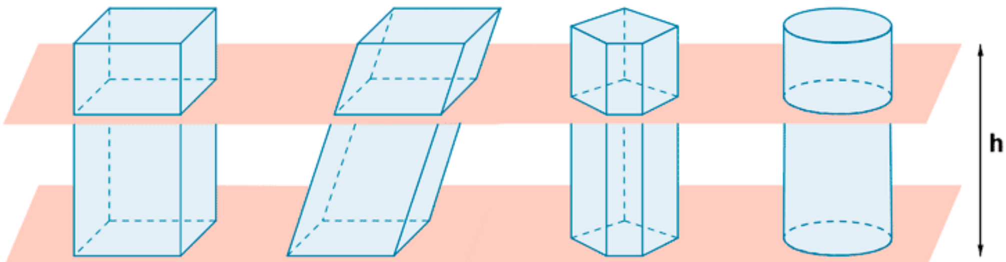
3.2 Prismas y paralelepípedos

El volumen de un cuerpo se refiere al espacio que ocupa. Un cuerpo tiene tres dimensiones, y para calcular su volumen es necesario conocer la longitud de ellas.

Se entiende por capacidad el número de unidades que caben dentro de un cuerpo. Por ejemplo, en la figura de la izquierda se observa que el número de unidades cúbicas que contienen un prisma son 27.

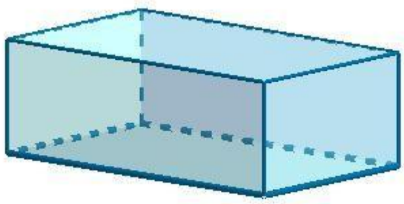
En la vida cotidiana se presentan situaciones en las que es necesario calcular el volumen de algunos cuerpos. Entre los más comunes se encuentran los prismas y los paralelepípedos.

El prisma es una figura que tiene dos bases iguales y paralelas unidas por caras planas (paralelogramos); si las bases paralelas son polígonos, estos sirven para nombrar la figura. En un prisma podemos considerar como altura el segmento perpendicular a las bases. Las figuras siguientes son ejemplos de prismas:



$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = A_{\text{base}} \cdot h \qquad V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Un paralelepípedo es un prisma en el que todas sus caras son paralelogramos; es decir, son cuadrados, rectángulos, rombos o romboides. Los siguientes son ejemplos de paralelepípedos:

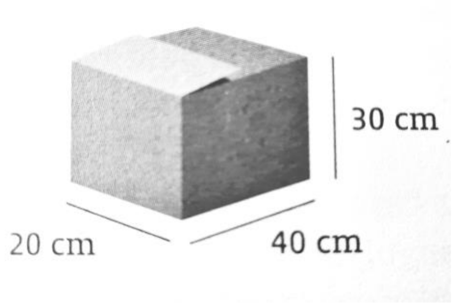


El volumen de cualquier prisma se calcula de la siguiente manera:

Volumen= área de la base x altura.

Ejemplo 01

En el negocio de Ernesto se utilizan cajas con medidas de 20cm x 30cm x 40cm. ¿Cuál es el volumen de una caja?



Para calcular el volumen se sustituyen las medidas de la caja en la fórmula y se multiplica:

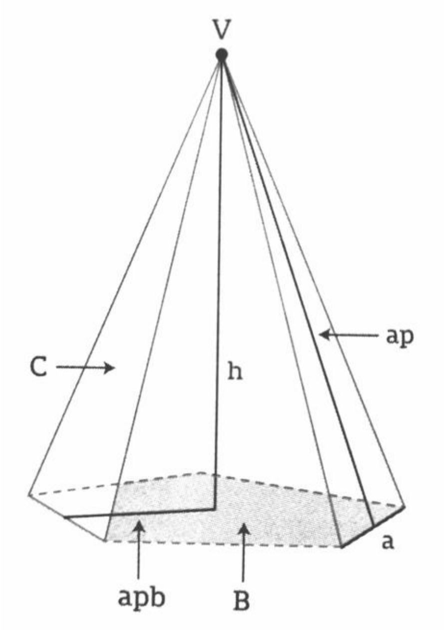
(40)(20)(30) = 24 000

El volumen de una caja es 24 000 cm³.

3.3 Cono, esfera y pirámides

La pirámide es un poliedro que tiene solo una base y tantas caras laterales en forma de triángulo como lados tenga la base, las que se unen en un punto llamado vértice.

En una pirámide se puede distinguir los siguientes elementos:



Base (B). En un polígono cualquiera, es la única de sus caras que no toca el vértice de la pirámide.

Caras (C). Triángulos laterales y la base.

Aristas (a). Segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide.

Altura (h). Distancia del plano de la base al vértice de la pirámide.

Vértice o cúspide (V). Punto donde confluyen las caras laterales triangulares. También se llama ápice.

Apotema lateral de la pirámide (ap). Distancia del vértice a un lado de la base. Solo existe en las pirámides regulares, en las que sus caras laterales son triángulos isósceles.

Apotema de la base (apb). Distancia del punto medio de un lado de la base al centro de la misma. Solo existe en pirámides regulares.

La forma de la base es la que le da el nombre. Así, hay pirámides triangulares, rectangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

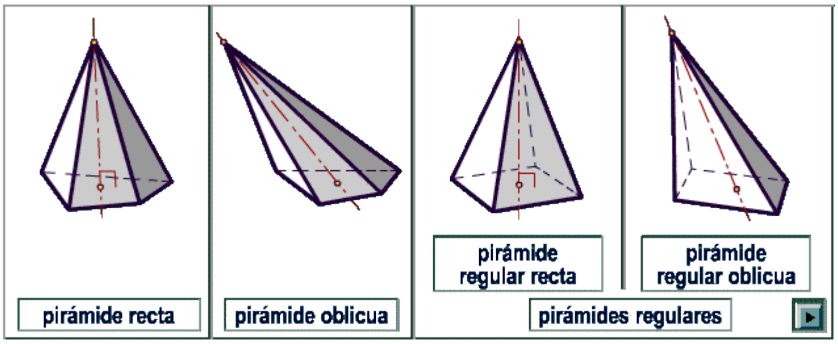
También te puedes encontrar pirámides regulares, irregulares, rectas y oblicuas.

Regulares. Aquellas que tienen un polígono regular como base y sus caras laterales son triángulos isósceles.

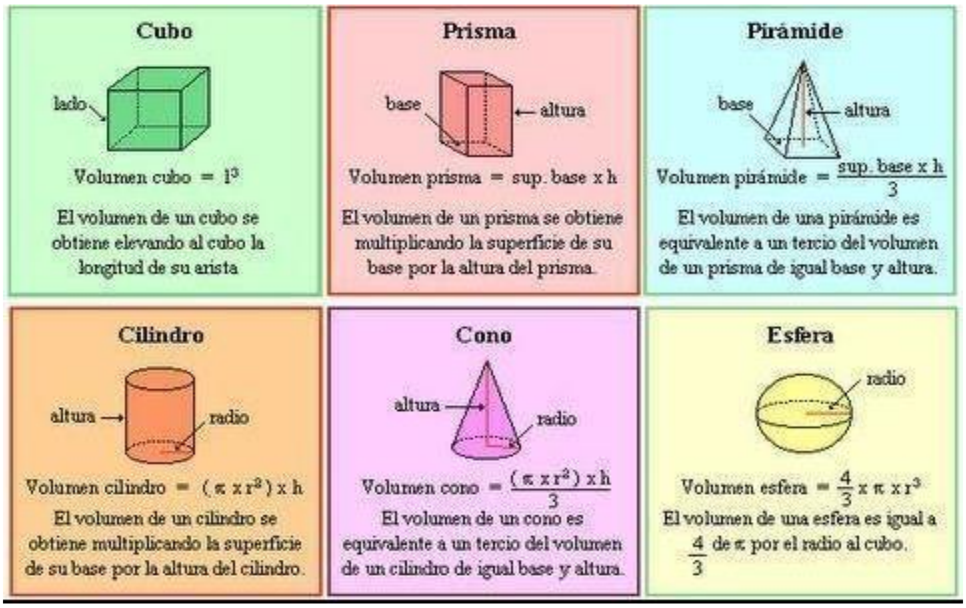
Irregulares. Pueden tener como bases polígonos irregulares y alguna de sus aristas laterales puede ser de distinta medida.

Rectas. La línea del centro de la base a la cúspide es perpendicular al polígono de la base.

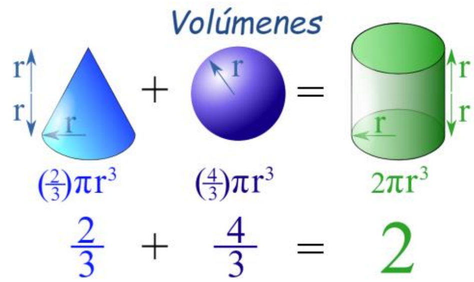
Oblicuas. La línea del centro de la base a la cúspide no es perpendicular al polígono de la base.



Aprende

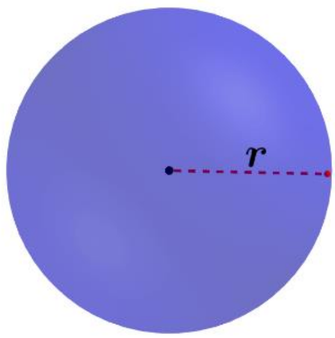


Arquímedes descubrió que el volumen de un cono equivale a la tercera parte del cilindro que lo contiene y que una esfera equivale a dos terceras partes del volumen del cilindro que la contiene.



Las medidas del cilindro son: radio de la base= r y altura = 2r.

Volumen de la esfera:



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.4 Problemas de volúmenes

Resuelve

¿Cuál es el volumen de un cilindro cuyo radio mide 15cm y su altura es de 90cm?

PARALELEPÍPEDOS. Son poliedros, concretamente prismas que cumplen las siguientes condiciones: - Tienen 6 caras (12 aristas y 8 vértices). - Todas sus caras son paralelogramos: cuadrados, rectángulos, rombos o romboides. - Sus caras son dos a dos iguales y paralelas: 3 pares de caras paralelas e iguales.

Resuelve

Determina el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10cm y su altura es de 20cm.

Encontrar el volumen de una pirámide circular (cono) cuyo radio de la base mide 10cm y su altura es de 20cm. Se considera que el volumen de la pirámide es igual a la tercera parte del prisma que la contiene, por lo tanto:

Calcular el volumen de una esfera cuyo radio mide 10cm

3.5 Circunferencia

La circunferencia es una línea curva, cerrada y plana formada por puntos que están a igual distancia del punto central.

Es cerrada porque forma un ciclo, vuelve sobre sí misma.

Es plana porque todos sus puntos están en un mismo plano.

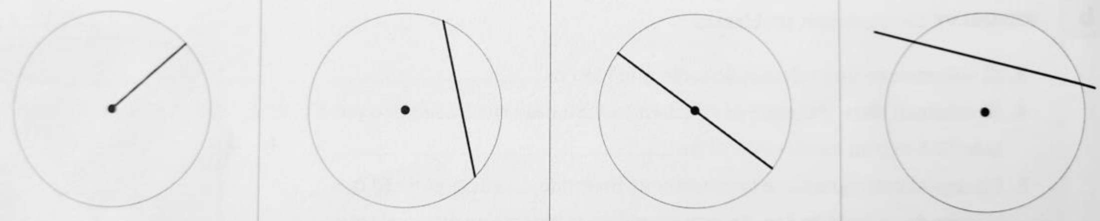
El círculo es la superficie del plano limitada por la circunferencia. Está formado por los puntos de la circunferencia, los puntos interiores y el espacio que está dentro de ella.

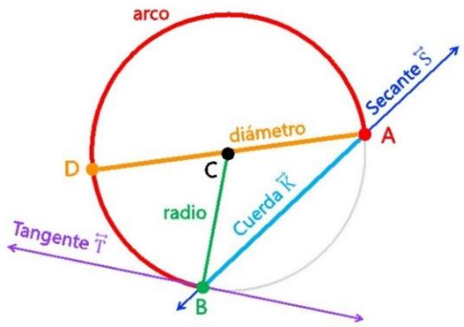
La circunferencia es el perímetro y sus valores siempre son unidades lineales. El círculo es el área y sus valores siempre son unidades cuadradas.

3.6 Rectas y segmentos notables

Las rectas y los segmentos notables de una circunferencia son:

Radio	Cuerda	Diámetro	Secante
Segmento de recta que une el punto central con todos y cada uno de los puntos de la línea que forma la circunferencia.	Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.	Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.	Línea recta que corta la circunferencia en dos puntos cualesquiera.





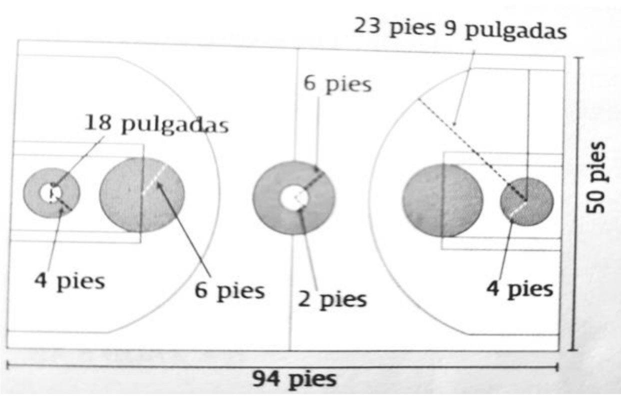
Ejemplo 01

Trazar la cancha de basquetbol con las medidas oficiales. Se tienen las siguientes instrucciones:

La circunferencia central tiene un radio de 6 pies o un diámetro de 12 pies.

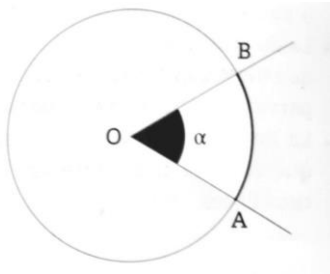
La línea de tiro de tres puntos es una cuerda que tiene como radio 23 pies y 9 pulgadas, a partir del centro de la canasta.

La línea de tiro de castigo es una secante que corta la circunferencia de la zona de tiros libres.

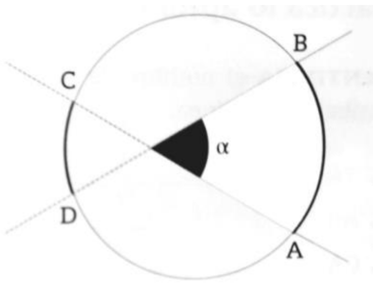


3.7 Ángulos en la circunferencia

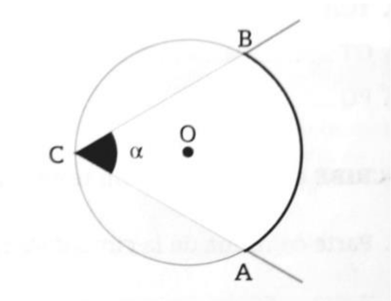
Central. Es aquel formado por dos radios que parten del centro de la circunferencia e intersecan un arco de ella de igual magnitud que el valor del ángulo.



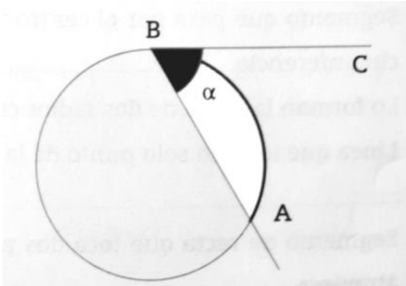
Interior. El que tiene su vértice en el interior de la circunferencia. También se llama ángulo excéntrico y se define como aquel formado por dos cuerdas que se cruzan en cualquier punto interior de la circunferencia que no sea el centro.



Inscrito. Es el que tiene su vértice en un punto sobre la circunferencia y está formado por dos cuerdas.



Semiinscrito. Es el que tiene su vértice en un punto sobre la circunferencia y lo forman una cuerda y una recta tangente.



Exterior. Es el que inicia en un punto exterior de la circunferencia y sus lados entran en contacto con ella. Puede estar formado por diferentes segmentos de recta.

Formado por dos secantes (figura 1):

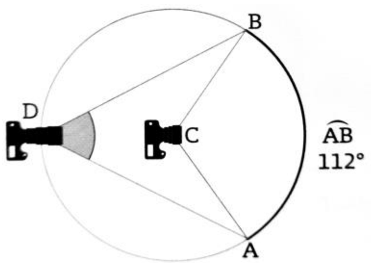
Formado por dos tangentes (figura 2):

Formado por una tangente y una secante (figura3):

Estas propiedades son aplicables solo si el circulo es unitario.

Ejemplo 01

Un fotógrafo ubicado en el punto C va a tomar una foto con un lente gran angular que tiene un ángulo de visión con un arco AB de 112°. Si otro fotógrafo va a tomar una foto similar, pero se ubica en el punto D, ¿Cuál es el ángulo de visión ∡ADB que tendrá su lente?



Se observa que el punto C es el centro de una circunferencia y el punto D es el vértice de un ángulo inscrito en ella.

La propiedad que relaciona la medida de un ángulo inscrito es:

$$\measuredangle ADB = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\measuredangle ACB$$

Para utilizar la propiedad anterior se sabe que la propiedad que relaciona la medida de un ángulo central con la medida de un arco es:

$$\measuredangle ACB = \widehat{AB}$$

Por consecuencia, si el arco AB es 112°, y el ángulo central ∡ACB también es 112°.

Se sustituye el valor de ∡ACB en la primera propiedad y se resuelve:

$$\measuredangle ADB = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}(112°) = \frac{112}{2} = 56$$

El ángulo de visión del lente ubicado en el punto D es de 56°.

3.8 Perímetro y área de figuras circulares

Longitud de la circunferencia

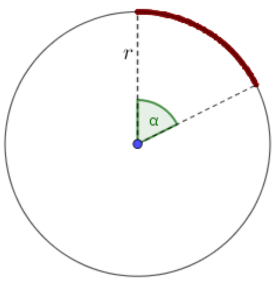
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

r es el radio de la circunferencia

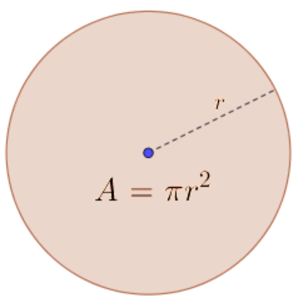
Longitud de un arco de circunferencia

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360}$$

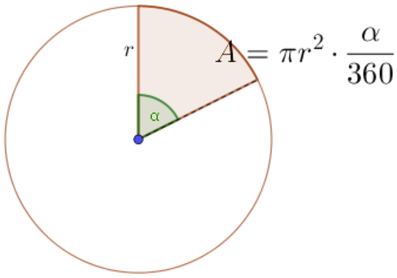
r es el radio y α es el número de grados que abarca el arco



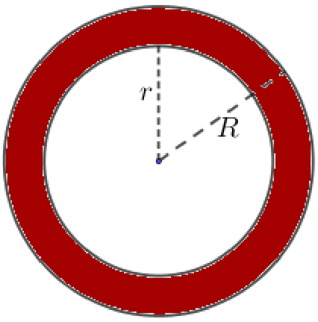
Área del círculo



Área del sector circular



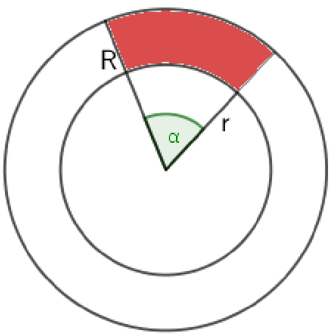
Área de la corona circular



$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Restamos al área del círculo grande, el área del círculo pequeño
R: radio de la circunferencia grande
r: radio de la circunferencia pequeña

Área del trapecio circular



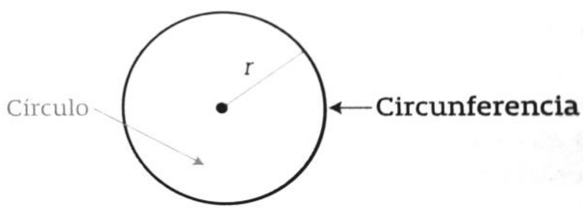
$$A = \pi(R^2 - r^2) \cdot \frac{\alpha}{360}$$

R: radio de la circunferencia grande
r: radio de la circunferencia pequeña

α: grados del ángulo que abarca

3.9 Problemas de circunferencia

El circulo es la superficie del plano limitada por la circunferencia. Esta formado por todos los puntos de la circunferencia, los puntos interiores y el espacio que está dentro de ella.



La circunferencia es el perímetro, es decir, la longitud de la misma, que está dada por:

P= πd

El circulo es el área y se calcula con la fórmula:

A= πr^2

Ejemplo 01

Calcular el perímetro de una circunferencia si su radio es de 6cm.

Se utiliza la fórmula para calcular el perímetro; se sustituyen los valores conocidos y se resuelve:

P= 2π r

P= (3.1416) (2) (6)

P= 37.7 cm

Ejemplo 02

Calcular el área de un círculo si su radio es de 8 cm.

Se utiliza la fórmula para calcular el área; se sustituyen los valores conocidos y se resuelve:

A= π r^2

A= $(3.1416)\ (8)^2$

A= 201.06 cm

3.10 Congruencia y semejanza

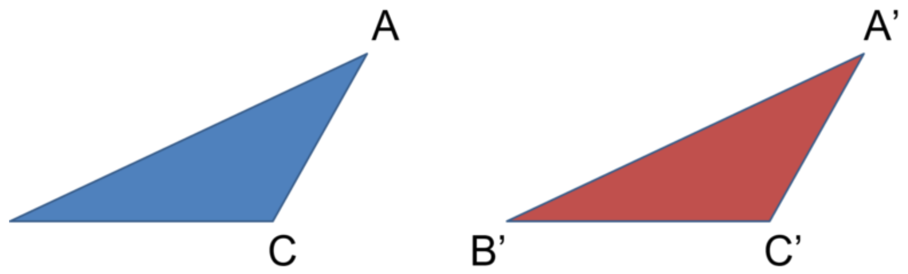
Los triángulos son los polígonos con menor número de lados que existe en la geometría plana. Están presentes en muchos ámbitos de la vida cotidiana y el estudio formal de los triángulos ha permitido su uso en diversas formas.

Es muy importante utilizar el lenguaje de las matemáticas adecuadamente, pues ayudará a expresarte correctamente y así, las personas y tú mismo tendrás una mejor comprensión de lo que haces y estudias.

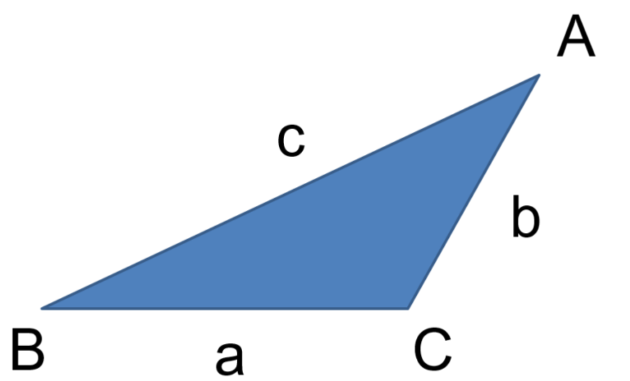
Siguiendo esta idea, identificarás los elementos de los triángulos y la nomenclatura asociada.

Observa este triángulo: A cada vértice lo identificarás con una letra mayúscula y nombrarás a este el triángulo ABC.

Puedes utilizar cualquier letra del abecedario y utilizarás A', B' y C' si los quieres asociar a otra figura, indicando que hay algún tipo de correlación entre estos vértices.



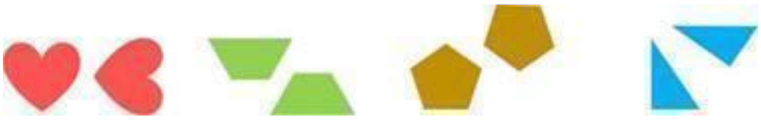
Los lados de los triángulos se pueden identificar con las letras del abecedario, pero minúsculas.



Para referirse al valor de los ángulos como una incógnita, se acostumbra a usar las letras minúsculas del alfabeto griego.

3.11 Criterios de congruencia

En general, las figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distinta.



El símbolo $\cong$ denota el criterio de congruencia entre dos elementos.

Congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Si el triángulo ABC es congruente al triángulo DEF, la relación puede ser escrita matemáticamente así:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

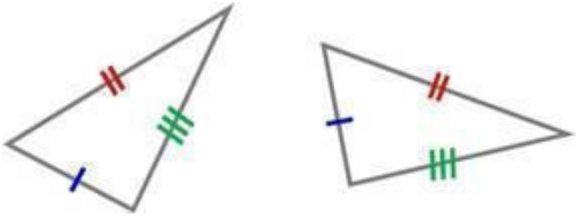
Dos o más figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Se demuestra que lo son si sus ángulos homólogos (correspondientes) tienen la misma medida y sus lados homólogos son congruentes entre sí, es decir, si tienen la misma longitud.

Se dice que un triángulo ABC es congruente con otro DEF si sus lados y sus ángulos respectivos son iguales.

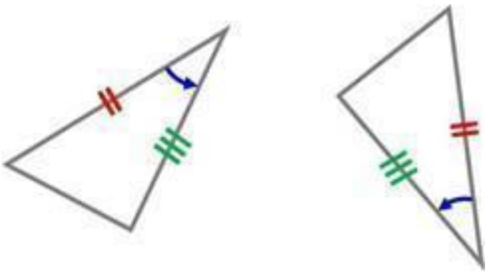
Para expresar el lenguaje matemático de dos triángulos son congruentes se utiliza la siguiente simbología:

Los criterios de congruencia corresponden a los postulados y teoremas que enuncian cuáles son las condiciones mínimas que deben reunir dos a más triángulos para ser congruentes.

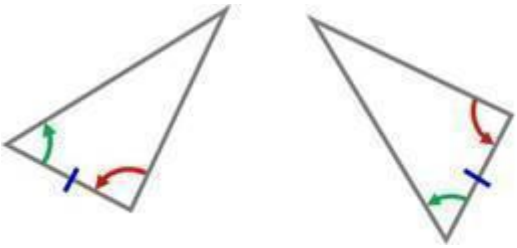
Postulado LLL. Se lee: lado-lado-lado. Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.



Postulado LAL. Se lee: lado-ángulo-lado. Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo determinado por ellos respectivamente iguales.



Postulado ala. Se lee: ángulo-lado-ángulo. Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a ellos respectivamente iguales.



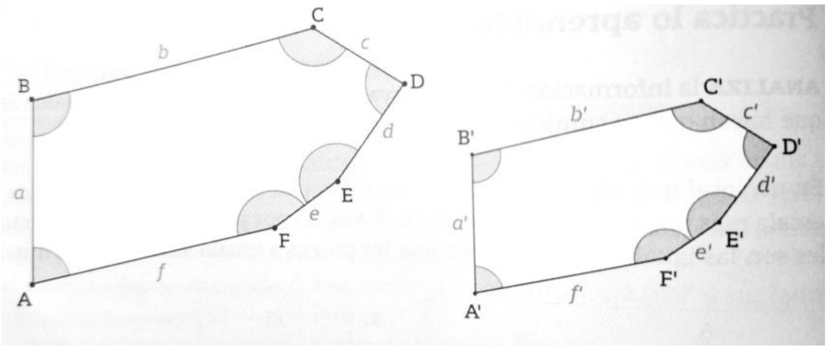
Postulado LLA. Se lee: lado-lado-ángulo. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Conclusión: Si dos triángulos tienen entre sí la misma forma y tamaño, entonces son congruentes.

3.12 Semejanza de triángulos y polígonos

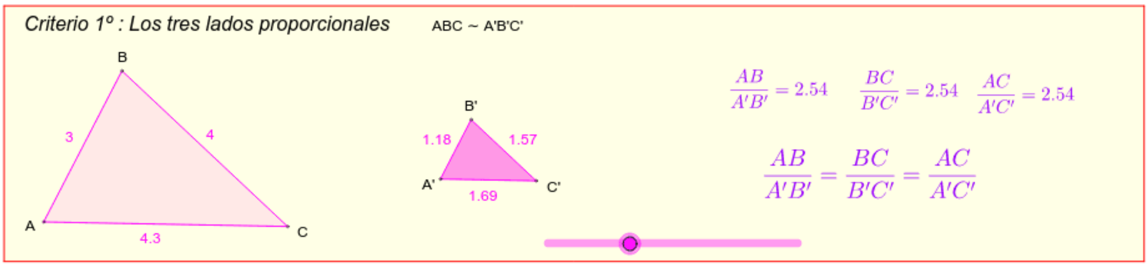
La semejanza es la variación de tamaño entre dos figuras que tienen forma idéntica.

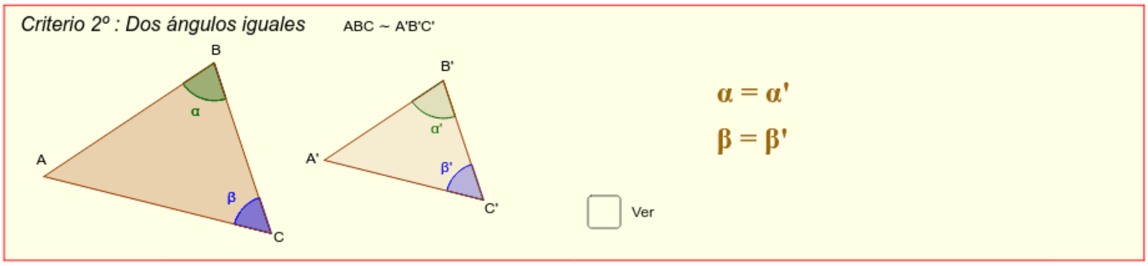
Dos polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son semejantes y las longitudes de sus lados son proporcionales. Si los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'F' son semejantes, se cumple que:

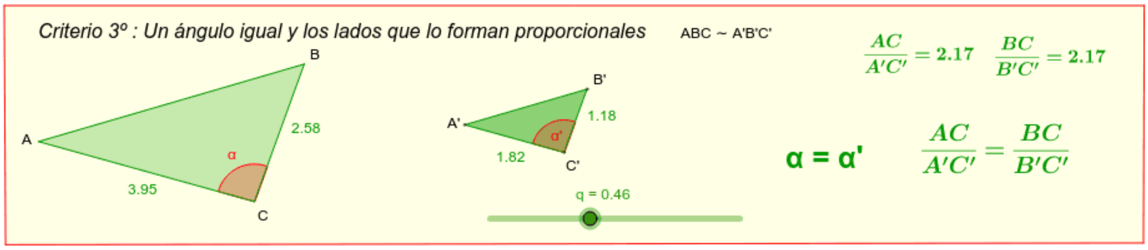


Los ángulos A = A', B = B', C = C', D = D', E = E', F = F'.

Los cocientes de los lados son iguales a r (razón de semejanza).

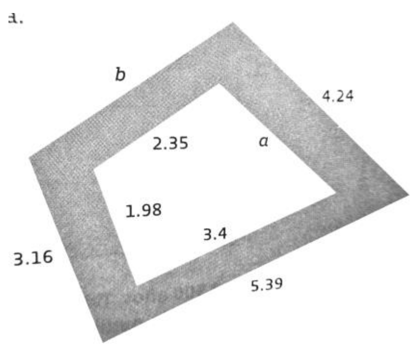






Ejemplo 01

Aplicar la semejanza de polígonos para calcular los lados faltantes de la figura interna y de la figura externa.



Por semejanza de polígonos, se tiene que

$$\frac{b}{2.35} = \frac{3.16}{1.98}$$

Se despeja b de la expresión:

$$b = \frac{(2.35)(3.16)}{1.98} = \mathbf{3.75}$$

Se tiene que:

$$\frac{a}{4.24} = \frac{3.4}{5.39}$$

Se despeja a de la expresión:

$$a = \frac{(4.24)(3.4)}{5.39} = \mathbf{2.67}$$

3.13 Teorema de Tales

Como definición previa al enunciado del teorema, es necesario establecer que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales o si sus lados son proporcionales entre sí. El primer teorema de Tales recoge uno de los resultados más básicos de la geometría, a saber, que:

Según parece, Tales descubrió el teorema mientras investigaba la condición de paralelismo entre dos rectas. De hecho, el primer teorema de Tales puede enunciarse como que la igualdad de los cocientes de los lados de dos triángulos no es condición suficiente de paralelismo. Sin embargo, la principal aplicación del teorema, y la razón de su fama, se deriva del establecimiento de la condición de semejanza de triángulos, a raíz de la cual se obtiene el siguiente corolario.

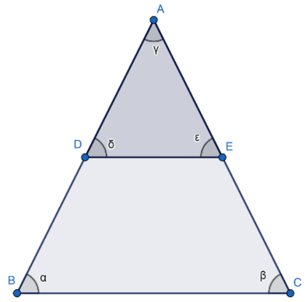
Aprende

Del establecimiento de la existencia de una relación de semejanza entre ambos triángulos se deduce la necesaria proporcionalidad entre sus lados. Ello significa que la razón entre la longitud de dos de ellos en un triángulo se mantiene constante en el otro.

Dicho de otro modo, si cortamos un triángulo dibujando una recta paralela a uno de sus lados, obtendremos un triángulo semejante al previamente existente.

En este punto, cabe señalar que dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos correspondientes son congruentes (miden lo mismo) y sus lados homólogos son proporcionales entre sí.

Para entenderlo mejor, observemos la siguiente figura:



Por el teorema de Tales se puede concluir que α=δ y β=ε

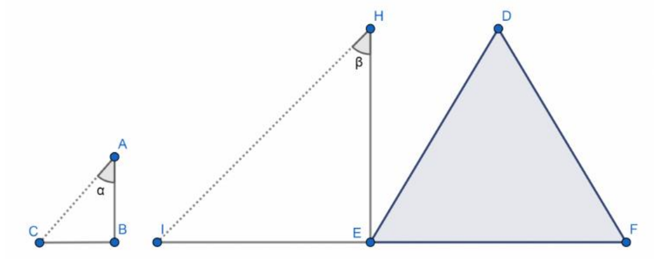
Además, como mencionamos previamente, los lados son proporcionales, por lo que se cumple que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Una anécdota relatada por el historiador Plutarco cuenta que Tales de Mileto, en uno de sus viajes, hizo uso de este teorema para conocer la altura de las pirámides de Guiza (las de Keops, Kefrén y Micerino) en Egipto. Así, decidió poner una vara en vertical contra el suelo, esperando a que la longitud del objeto sea igual a la sombra que proyectaba. En ese momento, la sombra de la pirámide también sería igual a la altura de esta. En este caso, los triángulos semejantes son:

El que tiene como dos de sus lados la vara y su sombra.

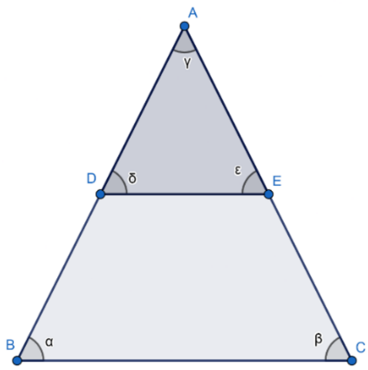
El triángulo que tiene como uno de sus lados la altura de la pirámide y, como otro lado, la sombra de esta.



Para entenderlo mejor, imaginemos en la figura de arriba que la pirámide es aquella formada por los vértices D, E y F, su altura es el segmento HE y su sombra, IE. En tanto, la vara es el segmento AB y su sombra, CB. Por tanto, AB/CB=HE/IE. Esto, tomando en cuenta que los rayos del sol son paralelos (no se cruzan ni en su prolongación), por lo que formarán el mismo ángulo con la vara que con la pirámide (ángulos α y β son iguales).

Ejemplo el teorema de Tales

Para entender mejor el teorema de Tales, observemos la siguiente figura:



Si BC mide 7,3 metros, DE mide 3,6 metros y AB mide 6,2 metros. ¿Cuál es la longitud de AD?

Despejamos en la fórmula mostrada previamente y tenemos que:

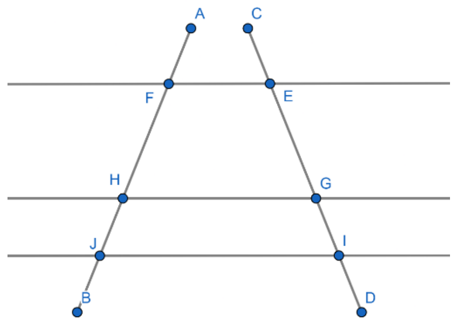
7,3/3,6=6,2/AD

2,0278=6,2/AD

AD=3,0575 metros

Extensión del teorema de Tales

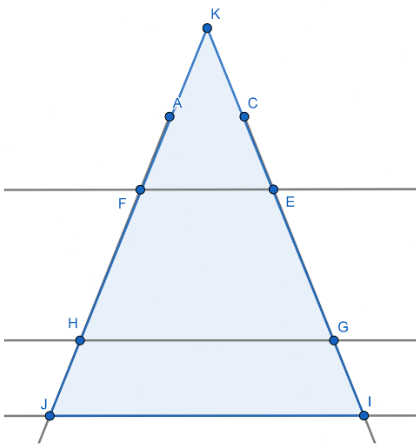
El teorema de Tales puede extenderse al análisis de dos líneas cualquiera que son cortadas por otras líneas paralelas entre sí, como vemos en la siguiente imagen:



Entonces, se cumple que:

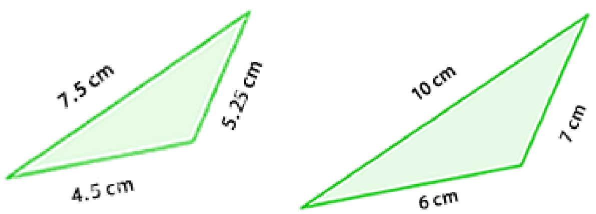
$$\frac{FH}{EG} = \frac{HJ}{GI} = \frac{FJ}{EI}$$

Lo anterior se cumple porque debemos pensar en esas líneas como parte de un triángulo o, viéndolo de otro modo, si extendemos las líneas AB y CD, estas se cruzarán. Mejor lo vemos en la siguiente imagen:



3.14 Problemas de congruencia y semejanza

1Los siguientes triángulos son semejantes porque...

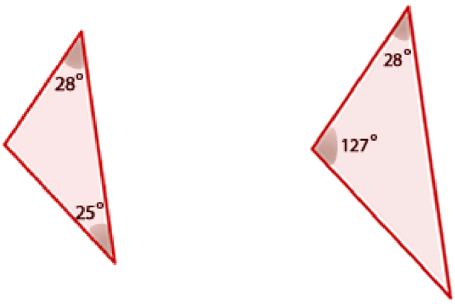


son del mismo color.

las medidas de sus lados correspondientes están dadas en centímetros.

sus lados correspondientes son proporcionales dos a dos.

2 Los triángulos de la imagen...

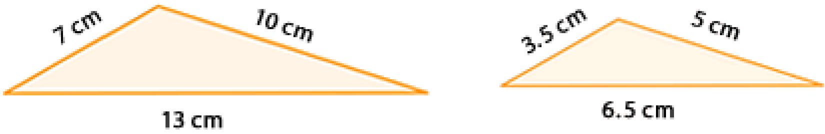


se parecen, pero no son semejantes.

son semejantes pues las medidas de sus ángulos homólogos son iguales.

No podemos afirmar nada, pues en ningún triángulo se dan las medidas de sus tres ángulos.

3 Los triángulos siguientes tienen...

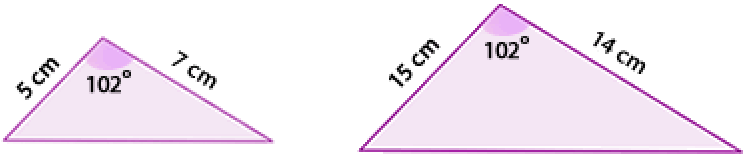


ningún ángulo igual.

sus tres ángulos iguales.

un ángulo agudo igual.

4 Selecciona la opción que pueda concluirse a partir de la imagen.



El primer triángulo no es semejante al segundo.

El segundo triángulo es semejante al primero.

No es posible concluir algo porque se desconoce la medida del tercer lado de cada triángulo.

5 Si los lados de dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son $a = 2\ \mathrm{cm}, b = 4.82\ \mathrm{cm}, C = 3.61\ \mathrm{cm}$ y $a' = 1\ \mathrm{cm}, b' = 2.41\ \mathrm{cm}$ y $c' = 1.7\ \mathrm{cm}$, respectivamente...

los triángulos son semejantes.

los triángulos no son semejantes.

con las medidas dadas no pueden construirse dos triángulos.

6 Si en los triángulos ABC y $A'B'C'$ las medidas de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos miden, respectivamente, $a = 3\ \mathrm{cm}, b = 4\ \mathrm{cm}, \alpha = 141^\circ$ y $a' = 9\ \mathrm{cm}, b' = 12\ \mathrm{cm}, \alpha' = 141^\circ$, éstos...

no son semejantes.

son semejantes.

son congruentes.

7 Si en los triángulos ABC y $A'B'C'$ las medidas de sus ángulos correspondientes son $\alpha = 90^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$ y $\alpha' = 90^\circ, \beta' = 60^\circ, \gamma' = 30^\circ$...

los triángulos son semejantes.

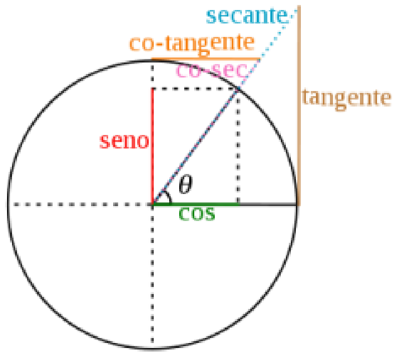
los triángulos son congruentes.

no es posible afirmar si los triángulos son semejantes o congruentes porque en ambos casos sus ángulos miden lo mismo.

UNIDAD IV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.1 Razones trigonométricas y el círculo unitario



Qué es el círculo trigonométrico y funciones trigonométricas? Es un círculo unitario que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio mide la unidad. Es una herramienta que se utiliza en conceptos de trigonometría y además nos ayuda a fundamentar las funciones trigonométricas.

Con el círculo trigonométrico podemos obtener el valor de las razones trigonométricas para cierto ángulo, además también se puede utilizar para obtener las identidades pitagóricas.

Para obtener las funciones trigonométricas se toma como base un círculo de radio 1 con centro en el origen, se toma un ángulo medido a partir del eje x positivo y en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Círculo trigonométrico y funciones trigonométricas

Seno de α

Partiendo del ángulo α y la recta r se obtiene un punto P, si se traza una línea perpendicular desde ese punto y hacia el eje Y se obtiene un segmento OB que se denomina **seno de α**.

Coseno de α

Partiendo del ángulo α y la recta r se obtiene un punto P, si se traza una línea perpendicular desde ese punto y hacia el eje X se obtiene un segmento OA que se denomina **coseno de α**.

Tangente de α

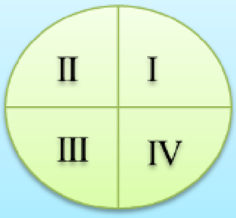
Una línea **tangente** es la que solo toca en un punto a la circunferencia.

Cotangente de α

Si trazamos una recta FD que sea tangente al punto F y que toque a la recta OD, FD es **cotangente de α**.

Cuadrantes del círculo trigonométrico

Si dividimos el círculo en 4 partes iguales a cada parte se le conoce como **cuadrante**, en cada cuadrante las funciones seno, coseno, tangente y cotangente cambian su valor.



	seno	coseno	tangente	cotangente	Secante	cosecante
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Primer cuadrante

Si aumenta el ángulo α disminuye el valor del coseno y de la cotangente pero aumenta el valor de la tangente y del seno.

Segundo cuadrante

Si aumenta el ángulo α, disminuye el valor del seno, del coseno, de la tangente y de la cotangente.

Tercer cuadrante

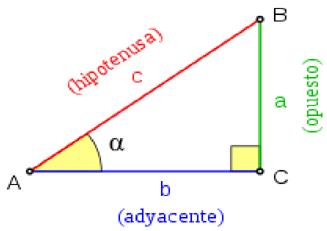
Si aumenta el ángulo α, disminuye el valor del seno, del coseno y de la cotangente pero aumenta el valor de la tangente.

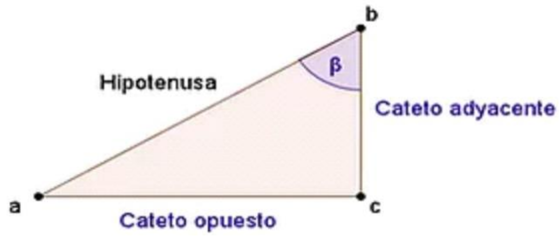
Cuarto cuadrante

Si aumenta el ángulo α, disminuye el valor del seno y de la tangente pero aumenta el valor del coseno y de la cotangente.

4.2 Definición de seno, coseno y tangente

Los catetos se nombran con base en un ángulo de referencia. Así, el cateto que está frente al ángulo de referencia se llama cateto opuesto (co), y el cateto que toca al ángulo de referencia se llama cateto adyacente (ca). Observa las siguientes figuras:





El ángulo de referencia no puede ser el ángulo recto del triángulo y siempre debe ser agudo. Por lo general es aquel cuya medida se conoce las medidas de los dos, en ángulo de referencia será el que se elija como tal.

La relación entre las medidas de los tres lados de un triángulo rectángulo genera seis cocientes distintos llamados razones trigonométricas.

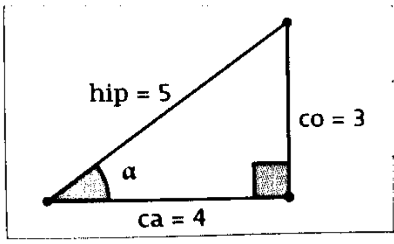
Así, el seno es la razón trigonométrica que resulta de dividir la medida del cateto opuesto entre la de la hipotenusa. Observa en la tabla las definiciones de las seis razones trigonométricas.

Los nombres de las razones trigonométricas pueden abreviarse así: seno, sen; cosen, cos; tangente, tan; y se pueden expresar como fracciones comunes o como su equivalente decimal.

Ejemplo 01

Calcula las seis razones trigonométricas en un triángulo de medidas 3,4 y 5 y con (α) como su ángulo de referencia.

Se sustituyen los valores conocidos en cada uno de los cocientes, se realizan las operaciones y se expresan el resultado en fracción decima



$\text{sen}\ \alpha = \frac{co}{hip} = \frac{3}{5} = \mathbf{0.6}$	$\csc \alpha = \frac{hip}{co} = \frac{5}{3} = \mathbf{1.6666}$
$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{4}{5} = \mathbf{0.8}$	$\sec \alpha = \frac{hip}{ca} = \frac{5}{4} = \mathbf{1.25}$
$\tan \alpha = \frac{co}{ca} = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$	$\cot \alpha = \frac{ca}{co} = \frac{4}{3} = \mathbf{1.3333}$

Ejemplo 02

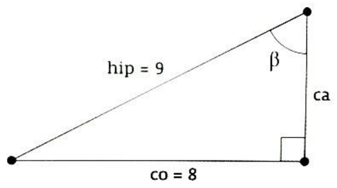
Calcular las medidas de un triángulo rectángulo donde $se\beta = \frac{8}{9}$

Se bosqueja un triángulo rectángulo-

Como $\beta = \frac{co}{hip}$, esto significa que el cateto opuesto es igual a 8 y la hipotenusa equivale a 9.

Se calcula el valor del lado faltante utilizando el teorema de Pitágoras:

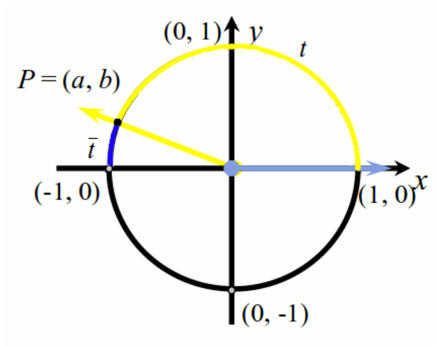
$$ca = \sqrt{81 - 64} = \sqrt{\mathbf{17}} = \mathbf{4.1231}$$



4.3 Círculo trigonométrico

Se llama circunferencia unitaria o círculo trigonométrico a la circunferencia que tiene su centro en el origen de un plano cartesiano y cuyo radio mide 1. En ella se representan ángulos. El lado inicial del ángulo se representa siempre con un segmento que inicia en el punto (0,0) y termina en el punto (1,0); y el lado terminal va del punto (0,0) al punto que coincide con el ángulo buscado (observa la figura de la derecha).

Se utiliza para ubicar las líneas que se representan a cada una de las seis razones trigonométricas en un espacio dimensional.

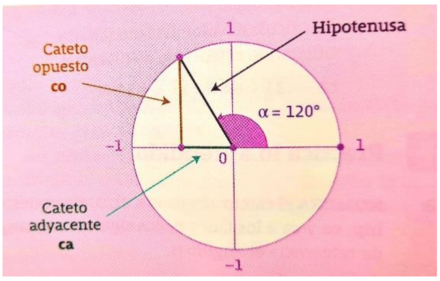


Ejemplo 01

Trazar el ángulo de $\alpha = 120°$ e identifica su cateto opuesto e hipotenusa.

Se traza el ángulo $\alpha = 120°$ sobre la circunferencia unitaria.

Se construye un triángulo rectángulo a partir del lado terminal del ángulo, con catetos paralelos a los ejes. El lado terminal es la hipotenusa del triángulo (segmento morado), el lado sobre el eje X es el cateto adyacente (segmento verde) y el lado paralelo al eje Y es el cateto opuesto (segmento naranja).



Signos de una razón trigonométrica con cualquier valor de un ángulo. Si se calcula el ángulo de referencia, siempre es posible ubicarlo en alguno de los cuatro cuadrantes de la circunferencia unitaria.

Como la hipotenusa resulta de sumar los cuadrados de los catetos, siempre es positiva,

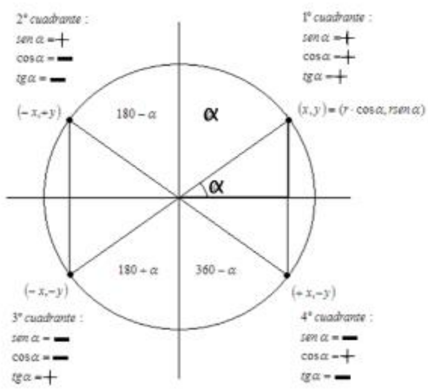
Los signos de los catetos son los siguientes:

En el cuadrante I, el cateto opuesto y el cateto adyacente son positivos.

En el cuadrante II, el cateto opuesto es positivo y cateto adyacente es negativo.

En el cuadrante III, el cateto opuesto y el cateto adyacente son negativos.

En el cuadrante IV, el cateto opuesto es negativo y el cateto adyacente es positivo.



Ejemplo 02

Calcular el valor de sen, cos y tan de 210°

Se calcula el ángulo de referencia de 210°:

210° - 180° = 30°

Se calculan las razones trigonométricas de 30. Estas equivalen al valor de las razones del ángulo de 210, y quedan así:

$$sen210° = \frac{1}{2} \qquad cos210° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan210° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se pueden presentar los resultados con radical o en forma decimal.

Se agrega el signo a cada razón trigonométrica como 210 se ubica en el cuadrante III, donde sen y cos son negativos, mientras que tan es positiva, resulta:

$$sen210° = -\frac{1}{2} = 0.05$$

$$cos210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.8660$$

$$tan210° = \frac{-\sqrt{3}}{-2} = 0.5773$$

4.4 Gráfica de funciones trigonométricas

El valor (π) se define como un valor constante de 3.1416, que son las veces que la longitud de su diámetro de un círculo puede contenerse en la longitud de su circunferencia. Es la relación que define el perímetro de una circunferencia:

$$Perímetro = (\pi)(diámetro) = \pi(2\,radio)$$

Si el diámetro es igual a 1, el perímetro es igual a 3.1416 = π

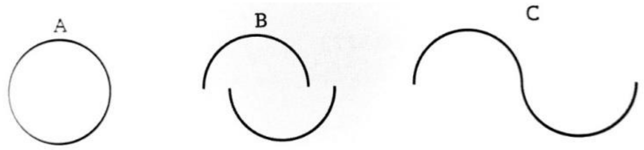
Si el radio es 1 (diámetro =2), tenemos un círculo unitario, y la longitud de la circunferencia equivale a:

$$2\pi = 6.2832$$

Si se camina sobre una circunferencia desde un punto inicial y se le da la vuelta hasta llegar de nuevo a ese punto, se dice que se ha completado una vuelta, y cada vuelta que se complementa es un ciclo. Estos ciclos son repetitivos o periódicos, ya que se pueden suceder con cierta frecuencia. De igual manera, las razones trigonométricas seno, coseno y tangente son periódicos.

Ejemplo 01

Observa que al abrir la figura desde su paso A hasta su paso C sigue siendo un ciclo, un ciclo de



La figura representa el comportamiento periódico de la razón seno. Se puede ver que necesita 2pi para que la razón seno alcance su periodicidad desde 0 hasta 360 grados, y se corresponde con la circunferencia.

Información clave.

Para bosquejar la gráfica de una función trigonométrica se realiza lo siguiente:

Se construye una tabla de valores con el valor de la función en grados, su equivalencia en radianes y su correspondencia en el círculo unitario.

En un plano cartesiano, se marcan sobre el eje X los valores del ángulo en radianes y sobre el eje Y el valor que corresponde ese ángulo en el círculo unitario.

Se ubican los pares ordenados de la tabla de valores en el plano y se unen con una línea curva.

Ejemplo 02

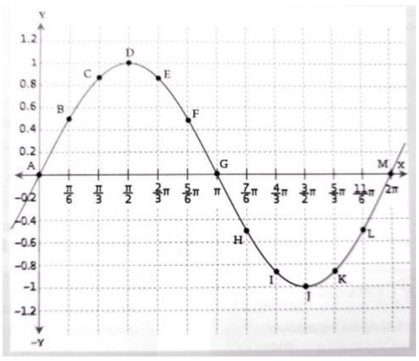
Bosquejar la gráfica de la razón seno considerando un periodo en el eje x (360° o 2π).

Se construye una tabla de valores en múltiplos de 30.

Observa que los valores de Y son positivos desde 0 hasta pi y son negativos desde pi hasta 2pi.

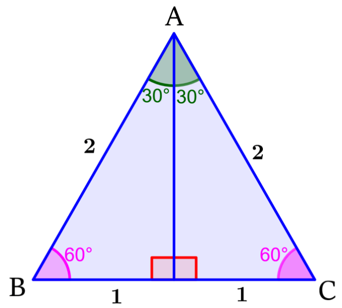
Se marcan sobre sobre el plano cartesiano los valores del eje X en radianes. Como en la tabla ningún valor del círculo unitario es mayor que 1, sobre el eje Y se marcan múltiplos de 0.20 hasta llegar a 1.

Se ubican pare ordenados de la tabla y se unen con una línea curva.



4.5 Triángulo de unidad 2

Para encontrar las razones trigonométricas del ángulo de 30°, vamos a usar un triángulo equilátero que tiene lados con una longitud de 2 unidades.



D es el punto en donde el segmento perpendicular desde A se encuentra con la base. El segmento AD divide al triángulo equilátero en dos triángulos iguales que tienen los ángulos 30°, 60° y 90°.

Podemos encontrar la longitud del segmento AD usando el teorema de Pitágoras:

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

$$AD^2 + 1^2 = 2^2$$

$$AD^2 + 1 = 4$$

$$AD^2 = 3$$

$$AD = \sqrt{3}$$

Usando la definición del seno (lado opuesto sobre hipotenusa), tenemos:

$$\sin(30^\circ) = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$$

Usando la definición del coseno (lado adyacente sobre hipotenusa), tenemos:

$$\cos(30^\circ) = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando la definición de la tangente (lado opuesto sobre lado adyacente), tenemos:

$$\tan(30^\circ) = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

En resumen, tenemos lo siguiente:

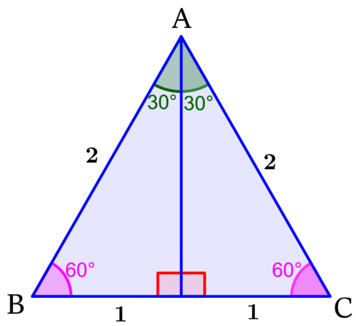
$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Razones trigonométricas de 60°

Podemos encontrar las razones trigonométricas del ángulo de 60° usando el mismo triángulo que usamos para encontrar las razones trigonométricas de 30°.



Entonces, usamos las longitudes AB=2AB=2, BD=1BD=1 y AD=\sqrt{3}AD=3 con las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Usando la definición del seno (lado opuesto sobre hipotenusa), tenemos:

$$\sin(60^\circ) = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando la definición del coseno (lado adyacente sobre hipotenusa), tenemos:

$$\cos(60^\circ) = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$$

Usando la definición de la tangente (lado opuesto sobre lado adyacente), tenemos:

$$\tan(60^\circ) = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$$

En resumen, tenemos lo siguiente:

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$

Tabla de las razones trigonométricas de ángulos notables

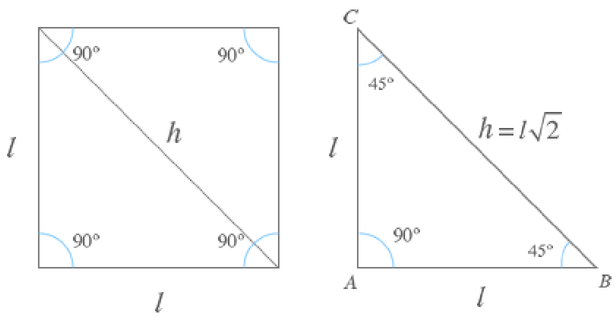
Las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° están resumidos en la siguiente tabla:

Razón	θ = 30°	θ = 30°	θ = 30°
sin θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Es recomendable memorizarse estas razones trigonométricas, ya que varios problemas encontrados en trigonometría usan los ángulos 30°, 45° y 60°.

4.6 Cuadrado unitario

Para determinar las razones trigonométricas de un ángulo de 45° (o su equivalente *π/4 rad*) tomaremos un cuadrado de lado *l* y lo dividiremos por su diagonal provocando que aparezcan dos triángulos isósceles. Recuerda que un triángulo isósceles tiene dos ángulos de 45° y uno de 90°.



Descomposición de un cuadrado

Al dividir un cuadrado de lado *l* por su diagonal obtenemos dos triángulos isósceles cuya hipotenusa se puede obtener por medio del teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2}$$

Razones trigonométricas de los ángulos de 45°

Si aplicamos las definiciones de las distintas razones trigonométricas sobre el anterior triángulo isósceles obtenemos que:

Razones	Razones inversas
$\sin\ 45^{\text{o}} = \frac{l}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{cosec}\ 45^{\text{o}} = \frac{h}{l} = \sqrt{2}$
$\cos\ 45^{\text{o}} = \frac{l}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec\ 45^{\text{o}} = \sqrt{2}$
$\text{tg}\ 45^{\text{o}} = \frac{l}{l} = 1$	$\text{cotg}\ 45^{\text{o}} = \frac{l}{l} = 1$

4.7 Razones trigonométricas de ángulos notables

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$
cosec	∞	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	∞	-1	∞
cotg	∞	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

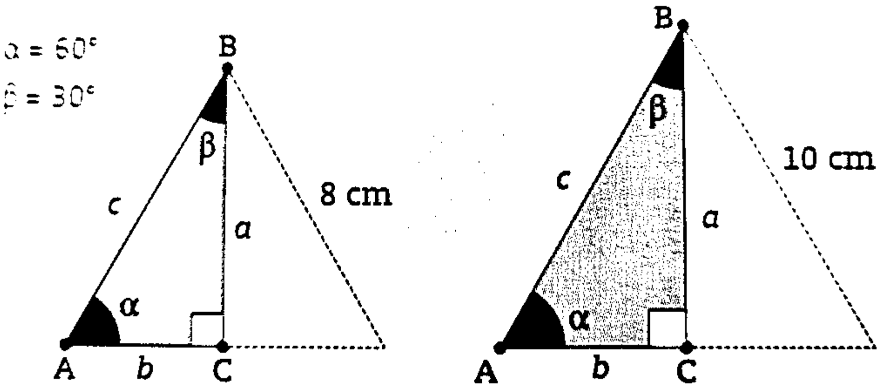
4.7.1 Valores de sen, cos y tan en ángulos de 30 y 60

Se conoce como ángulos notables aquellos que miden 0°, 30°, 45°, 60° y 90° o son múltiplos de estos valores.

Los valores de las razones trigonométricas de ángulos notables se pueden obtener a partir de triángulos particulares. De esta manera, dos triángulos de diferente tamaño pero con iguales ángulos internos tienen razones trigonométricas iguales.

Ejemplo 01

Calcular las razones trigonométricas del triángulo que se forma al dividir por la mitad dos triángulos equiláteros, donde uno mide 8 cm por lado y el otro mide 10 cm por lado.



Se observa que al dividir cada triángulo por la mitad se forman un triángulo rectángulo cuyos ángulos internos miden (fórmula).

Para calcular las razones de triángulo I se toma como referencia el ángulo α y se observa lo siguiente:

La hipotenusa equivale a 8 cm.

Dado que el cateto adyacente (ca) es la mitad de un lado de un triángulo equilátero, equivale a 4 cm.

El cateto opuesto (co) se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

$$co = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 6.9282$$

Se sustituye con los valores de los lados del triángulo en cada uno de los cocientes, se realizan las operaciones y se expresa el resultado en fracción decimal.

$\text{sen } \alpha = \frac{co}{hip} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \mathbf{0.8660}$
$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{4}{8} = \mathbf{0.5000}$
$\tan \alpha = \frac{co}{ca} = \frac{\sqrt{48}}{4} = \mathbf{1.7320}$

Para calcular el triángulo 2 se toma también como referencia el ángulo alfa y se observa lo siguiente:

La hipotenusa es 10 cm.

Dado que el cateto adyacente (ca) es la mitad de un lado del triángulo equilátero, mide 5 cm.

El cateto opuesto (co) se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

$$co = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8.6602$$

Se sustituye con los valores de los lados del triángulo en cada uno de los cocientes, se realizan las operaciones y se expresa el resultado en fracción decimal.

sen $\alpha = \frac{co}{hip} = \frac{\sqrt{75}}{10} = \mathbf{0.8660}$
cos $\alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{5}{10} = \mathbf{0.5000}$
tan $\alpha = \frac{co}{ca} = \frac{\sqrt{75}}{5} = \mathbf{1.7320}$

Se observa que los triángulos tienen razones trigonométricas iguales, ya que sus ángulos son iguales. Por lo tanto, son semejantes, aunque sus lados no miden lo mismo.

Ejemplo 02

Si el valor de $sen\alpha = \frac{3}{5}$, entonces $csc\alpha = 5/3$

Si el valor de $cos\alpha = \frac{4}{5}$, entonces $sec\ \alpha = \frac{5}{4}$.

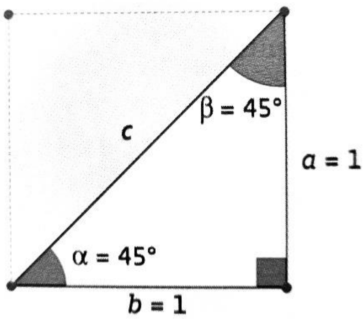
Si el valor de $tan\alpha = \frac{3}{4}$, entonces $cot\alpha = \frac{4}{3}$.

4.7.2 Valores de sen, cos y tan en un ángulo de 45

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 45° se toma como referencia un cuadrado que mide una unidad de lados y se divide por su diagonal, lo que hace que se formen dos triángulos isósceles con un ángulo de 90° y dos ángulos de 45°.

Ejemplo 01

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 45° a partir de un triángulo rectángulo donde se es la hipotenusa y los catetos a y b miden 1.



Para poder calcular las razones trigonométricas primero se calcula el valor de la hipotenusa c. Para ello se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.4142$$

Para calcular las razones trigonométricas se toma como referencia el ángulo a, se sustituye con los valores de los lados del triángulo en cada uno de los conscientes, Se realizan las operaciones y se expresan el resultado en fracción decimal.

$\text{sen}\ \alpha = \frac{co}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{0.7071}$
$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{0.7071}$
$\tan \alpha = \frac{co}{ca} = \frac{1}{1} = \mathbf{1.000}$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo β se sustituye con los valores de los lados del triángulo en cada uno de los cocientes, se realizan las operaciones y se expresan el resultado en fracción decimal:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{co}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{0.7071}$
$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{0.7071}$
$\tan \alpha = \frac{co}{ca} = \frac{1}{1} = \mathbf{1.000}$

Se observa que tanto para el ángulo α para el ángulo β los valores de las razones son iguales.

Ejemplo 02

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 45° a partir de un triángulo rectángulo cuyos catetos a y b miden 4 y la hipotenusa es c.

Se sabe que sus catetos miden a es igual a = 4 y b = 4. Por el que el teorema de Pitágoras se deduce:

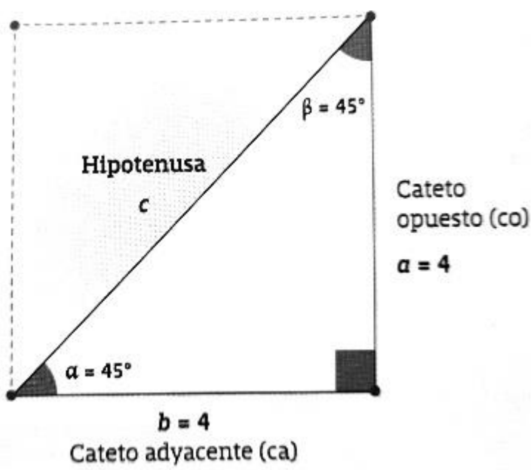
$$C = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 5.65$$

Se selecciona un ángulo de referencia, por ejemplo α.

Se coloca los nombres; el lado a es el co, el lado b es el ca y el lado c es la hip.

Se aplican las definiciones de sen α, cos α, tan α, cot α, sec α y csc α. Para esto se sustituye con los valores de los lados y se calcula el valor de las seis funciones trigonométricas.

Razón	Definición	Fracción común	Fracción decimal
sen α	$\frac{co}{hip}$	$\frac{4}{\sqrt{32}}$	0.7071
cos α	$\frac{ca}{hip}$	$\frac{4}{\sqrt{32}}$	0.7071
tan α	$\frac{co}{ca}$	$\frac{4}{4}$	1.000
csc α	$\frac{hip}{co}$	$\frac{\sqrt{32}}{4}$	1.4142
sec α	$\frac{hip}{ca}$	$\frac{\sqrt{32}}{4}$	1.4142
cot α	$\frac{ca}{co}$	$\frac{4}{4}$	1.000



4.8 Triángulos rectángulos

En geometría, se llama triángulo rectángulo a todo triángulo que posee un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90-grados. Las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo es la base de la trigonometría. En particular, en un triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras.

Hay dos tipos de triángulo rectángulo:

- Triángulos rectángulos isósceles
- Triángulos rectángulos escalenos

4.9 Solución de triángulos rectángulos

Cuando se conoce a un lado y uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo, se puede alguna manera se pueden utilizar las razones trigonométricas para calcular la medida de uno de sus lados desconocidos. A esto se llama resolución de triángulos rectángulos.

Para calcular el lado de un triángulo rectángulo conociendo uno de sus lados y uno de sus ángulos agudos, se procede de la siguiente manera:

Bosquejar un triángulo rectángulo que contenga los datos del problema coma representa con x la medida del lado que se busca y tomar en cuenta el ángulo y al lado conocidos.

Asignar nombres a los lados con base en el ángulo agudo conocido del triángulo rectángulo. Recuerda que el cateto opuesto (co) es el lado opuesto al ángulo dado, el cateto adyacente (ca) ese lado con el que comparte el ángulo recto y la hipotenusa (hip) y siempre el lado más grande.

Obtener los valores del lado que se busca, el lado conocido y la medida del ángulo α con base en el cual se asignaron los nombres.

Buscar entre las razones trigonométricas de seno, coseno o tangente aquella que relaciona el lado conocido con el lado que se busca:

Sustituir en la razón trigonométrica los valores de los lados y del ángulo.

Buscar el valor de la razón trigonométrica del ángulo α. Si un es un ángulo notable se puede escribir directamente, pero sí es un ángulo distinto es necesario utilizar la calculadora.

Resolver la igualdad despejando la variable x. Otra opción es resolver como si se tratara de una regla de tres.

Simplificar y racionalizar el resultado. Es más exacto expresarlo con radicales, pero también se puede representar con decimales.

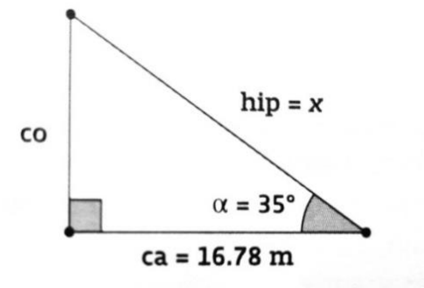
Utilizar este valor para dar respuesta al problema planteado.

Ejemplo 01

Se requiere reforzar una antena atando un cable desde su punto más alto hasta el suelo a una distancia de 16.78 m de la base del poste. Se desconoce la altura de la antena coma se calcula que el cable tendría un ángulo de elevación de 35°. Observa al gráfico de la izquierda.

¿Cuál debe ser la medida del cable sin tomar en cuenta lo necesario para hacer amarres?

Se bosqueja el triángulo rectángulo y se asignan nombres a los lados:



Se relacionan los valores:

El lado que se busca es la hipotenusa: hip = x.

El lado conocido es ca = 16.78 m.

El ángulo considerado es α = 35°.

Se elige la razón trigonométrica que contiene el lado conocido y el lado que se busca y se sustituyen los valores conocidos:

$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} \rightarrow \cos 35° = \frac{16.78}{x}$

Se calcula el valor de cos 35° con la calculadora:

$\cos 35° = 0.8191$

Se sustituye el valor anterior en la expresión, se resuelve la igualdad y se simplifica:

$0.8191 = \frac{16.78}{x}$

$x = \frac{16.78}{0.8191}$

$x = 20.48$

En este caso la medida del cable debe ser 20. 48 m.

4.10 Aplicación de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo implica el cálculo de las medidas de sus lados o de sus ángulos. Para encontrar la medida de uno de los ángulos agudos, qué es determinado por dos lados de un triángulo rectángulo, es necesario involucrar un nuevo concepto, denominado función inversa.

A cada función trigonométrica corresponde su función inversa.

En la tabla anterior X representa el valor de la razón trigonométrica y Alfa representa el valor de un ángulo.

En términos prácticos, si se conoce el valor de la razón trigonométrica, utilizando una función trigonométrica inversa se puede determinar el ángulo que le corresponde.

El procedimiento para calcular el ángulo agudo entre dos lados conocidos de un triángulo rectángulo es:

Buscar la figura identificando el ángulo que se quiere conocer y los lados conocidos.

Asignar los nombres de los lados (co, ca, hip) respecto al ángulo buscado.

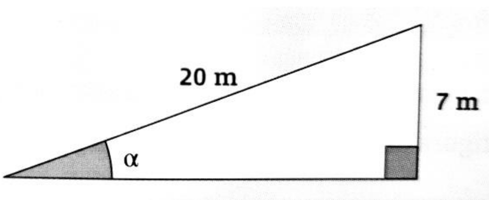
Relacionar una razón trigonométrica 3 elementos: tus lados y el ángulo.

Aplicar función inversa y calcular.

Ejemplo 01

En una práctica de lanzamiento, a lanzar un disco se observa que éste alcanza una altura de 7 m y se ubica a 20 m de la posición desde donde se lanzó. ¿Qué ángulo de elevación se forma desde el punto de lanzamiento?

Se bosqueja el triángulo rectángulo y se asignan los datos conocidos, este caso la altura y la distancia desde el punto de lanzamiento.



Para calcular el ángulo de elevación se elige la razón trigonométrica que contiene los dos lados conocidos y el ángulo que se ubica y se sustituye con los valores:

sen α = $\frac{co}{hip}$ → sen α = $\frac{7}{20}$

Se resuelve la función:

sen α = $\frac{7}{20}$ → sen α = 0.35

Se aplica la inversa de esa función a ambos lados de la igualdad:

$$sen^{-1}\,(sen\,\alpha) \;=\; sen\;\;(0.35)$$

Dado que una función se revierte con su inversa, se eliminan estos términos en la parte izquierda:

α = sen^{-1} (0.35)

En este caso se resuelve con la calculadora y resulta:

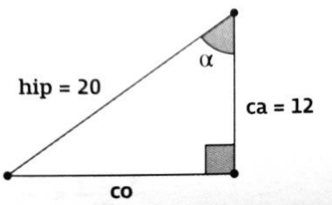
α = 20.48 °

El ángulo de elevación del disco es de 20.48°.

Ejemplo 02

Sergio está volando una cometa. Si en un momento dado se suelta la cuerda 20 m y alcanza los 12 m de altura, ¿cuál es el ángulo de depresión de la cometa?

Se bosqueja un triángulo rectángulo y se señala como α al ángulo de depresión determinando por la cuerda y la altura de la cometa. Se asignan los nombres de hip, co y ca a los lados, de acuerdo con el ángulo α.



Se relaciona los lados conocidos y el ángulo que se va a calcular mediante una razón trigonométrica. La que relaciona la hipotenusa con el cateto adyacente es coseno:

$$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} \rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{20}$$

Se resuelve la función:

$$\cos \alpha = \frac{ca}{hip} \rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{20}$$

Se aplica la función inversa y se resuelve:

$$\cos^{-1}(cos\ \alpha) = \cos^{-1}(0.6)$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0.6)$$

$$\alpha = 53.13\ °$$

El ángulo de depresión de la cometa es de 53.13°.

4.11 Funciones inversas

Ya conocemos las operaciones inversas. Por ejemplo, la suma y la resta son operaciones inversas, al igual que la multiplicación y división. Cada operación hace lo opuesto de su inversa.

La idea es la misma en trigonometría. Funciones trigonométricas inversas hacen lo opuesto de las funciones trigonométricas "normales". Por ejemplo:

Seno inverso (\sin^{-1})(sin−1)left parenthesis, sine, start superscript, minus, 1, end superscript, right parenthesis hace lo opuesto del seno.

Coseno inverso (\cos^{-1})(cos−1)left parenthesis, cosine, start superscript, minus, 1, end superscript, right parenthesis hace lo opuesto del coseno.

Tangente inversa (\tan^{-1})(tan−1)left parenthesis, tangent, start superscript, minus, 1, end superscript, right parenthesis hace lo opuesto de la tangente.

En general, si conoces la razón trigonométrica, pero no el ángulo, puedes utilizar la correspondiente función trigonométrica inversa para determinar el ángulo. Esto se expresa matemáticamente en los siguientes enunciados:

Ángulos de entrada en funciones trigonométricas y razones de lados resultantes		Razones de lados de entrada en funciones trigonométricas inversas y ángulos resultantes
$\sin(\theta) = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$	$\sin^{-1}\left(\dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right) = \theta$
$\cos(\theta) = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$	$\cos^{-1}\left(\dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right) = \theta$
$\tan(\theta) = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$	$\rightarrow$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}\right) = \theta$

UDS

Bibliografía básica y complementaria

Allen, A. (2010). Matemáticas I. México: Pearson educación. Recuperado el 31 de mayo de 2012, de la base de datos de Bibliotechnia de la biblioteca Digital de la UVEG.

Cuéllar, J.A. (2008). Matemáticas I Álgebra (2ª. ed.). México: McGraw-Hill.

De Oteyza, et. al. Temas Selectos de Matemáticas. Prentice Hall, México 1988.

F. Ayres Jr., Teoría y problemas de matrices. McGraw-Hill, 1991.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E., Álgebra Lineal. México: Publicaciones Cultural, 1986.

F. Granero, Álgebra y geometría analítica. McGraw-Hill, 1992.

Gentile, E. R., Aritmética Elemental. Washington: OEA, 1985

J. de Burgos, Geometría y trigonometría . McGraw-Hill, 2000.

J. Rojo e I. Martín, Ejercicios y problemas de álgebra. McGraw-Hill, 1994.

J. Rojo, Geometría y trigonometria McGraw-Hill, 2001.

J. Flaquer y otros, Curso de álgebra lineal. Ediciones Universidad de Navarra, 1996.

M. Castellet e I. Llerena, Álgebra lineal y geometría. Reverté, 1991.

M. Anzola y otros, Problemas de álgebra. (Especialmente tomos 1, 3, 6, 7) Madrid, 1981.

Martínez, M. A. (1996). Aritmética y Álgebra. México: McGraw-Hill.

Wisniewski, P. M., & Gutiérrez, A. L. (2011). Introducción a las matemáticas universitarias. México: McGraw-Hill Interamericana. Recuperado el 22 de junio de 2012, de la base de datos de Bibliotechnia de la e-libro Digital de la UVEG.