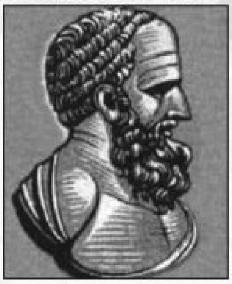
CAPÍTULO 11
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TRIGONOMETRÍA



Hiparco de Nicea
(190-120 *a. C.*)

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo.

Desde hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos y las razones trigonométricas para efectuar medidas en la agricultura, así como para la construcción de pirámides.

Hiparco de Nicea

Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea. Uno de los principales desarrolladores de la trigonometría (plana y esférica), construyó tablas que relacionaban los ángulos centrales con las cuerdas delimitadas por su ángulo central correspondiente. Gracias a esta tabla, equivalente a una tabla de senos actual, logró relacionar los lados y ángulos en cualquier triángulo plano.

Los triángulos esféricos se forman en la superficie de una esfera y son objeto de estudio de la trigonometría esférica, la cual se aplica en la náutica y navegación.

Funciones trigonométricas

A las razones que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama funciones o razones trigonométricas.

Definiciones

Seno de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Cotangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

Secante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

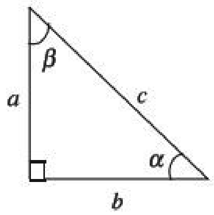
Cosecante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Nota: los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina los catetos opuesto y adyacente para cada uno de los ángulos agudos.



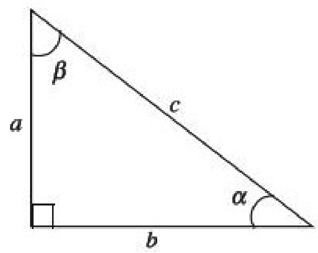
Solución

Para el ángulo α:
cateto opuesto = a
cateto adyacente = b
hipotenusa = c

Para el ángulo β:
cateto opuesto = b
cateto adyacente = a
hipotenusa = c

El cateto que es opuesto para uno de los ángulos será el adyacente para el otro, siendo la hipotenusa el lado que no presenta variante.

2 Obtén las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



Solución

En el triángulo la hipotenusa es c y los catetos son a y b, entonces las funciones para los ángulos agudos α y β son:

Funciones de α:	Funciones de β:
$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$	$sen\,\beta = \frac{b}{c}$
$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$	$cos\,\beta = \frac{a}{c}$
$tan\,\alpha = \frac{a}{b}$	$tan\,\beta = \frac{b}{a}$
$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$	$ctg\,\beta = \frac{a}{b}$
$sec\,\alpha = \frac{c}{b}$	$sec\,\beta = \frac{c}{a}$
$csc\,\alpha = \frac{c}{a}$	$csc\,\beta = \frac{c}{b}$

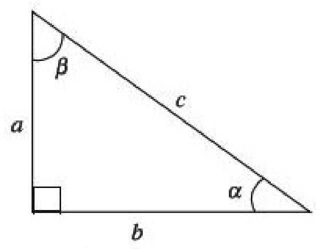
Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo guardan ciertas relaciones entre sí:

Función directa			Función recíproca	
seno	(sen)	$\longleftrightarrow$	*cosecante*	(csc)
coseno	(cos)	$\longleftrightarrow$	*secante*	(sec)
tangente	(tan)	$\longleftrightarrow$	*cotangente*	(ctg)

Cofunciones

Cualquier función de un ángulo es igual a la cofunción de su complemento.

En el triángulo rectángulo:



Por geometría:
$90° + \alpha + \beta = 180°$
Donde:
$\alpha + \beta = 90°;\ \beta = 90° - \alpha$
por tanto, α y β son complementarios.

Entonces, mediante las definiciones:

$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha) = cos\ \beta$$
$$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha) = sen\ \beta$$
$$tan\ \alpha = ctg\ (90° - \alpha) = ctg\ \beta$$
$$ctg\ \alpha = tan\ (90° - \alpha) = tan\ \beta$$
$$sec\ \alpha = csc\ (90° - \alpha) = csc\ \beta$$
$$csc\ \alpha = sec\ (90° - \alpha) = sec\ \beta$$

Ejemplos

Dadas las funciones trigonométricas, se determinan sus respectivas cofunciones:

$$sen\,32° = cos\,(90° - 32°) = cos\,58°$$

$$tan\,25° = ctg\,(90° - 25°) = ctg\,65°$$

$$cos\,\frac{\pi}{3} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\,\frac{\pi}{6}$$

$$sec\,\frac{\pi}{4} = csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = csc\,\frac{\pi}{4}$$

Rango numérico

Dado que la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es mayor que cualquiera de los dos catetos, los valores del seno y el coseno de un ángulo agudo no pueden ser mayores que +1, ni menores que –1, mientras que los valores de las funciones cosecante y secante, al ser recíprocas del seno y coseno, no pueden estar entre –1 y +1; los catetos de un triángulo rectángulo pueden guardar entre sí cualquier proporción, por tanto, los valores de la tangente y la cotangente varían sobre todo el conjunto de números reales.

Valor

Dada una función trigonométrica de un ángulo agudo se pueden determinar las demás funciones a partir de la construcción de un triángulo rectángulo y el empleo del teorema de Pitágoras como a continuación se ilustra.

EJEMPLOS

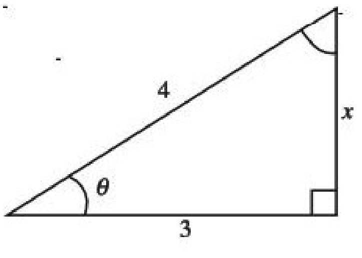
Ejemplos

1 Si θ es agudo, y $cos\,\theta = \frac{3}{4}$, calcula los valores de las funciones trigonométricas para θ.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo, donde θ es uno de los ángulos agudos, la hipotenusa es 4 y el cateto adyacente es 3.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:



$$(4)^2 = (x)^2 + (3)^2$$
$$16 = x^2 + 9$$
$$16 - 9 = x^2$$
$$7 = x^2$$
$$\sqrt{7} = x$$

Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ son:

$$sen\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad ctg\,\theta = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad csc\,\theta = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$tan\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad sec\,\theta = \frac{4}{3}$$

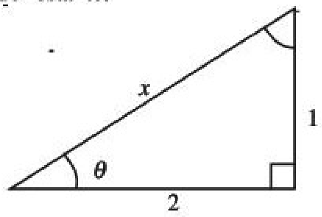
2 Si θ es agudo y $tan\ \theta = \frac{1}{2}$, calcula los valores de seno y coseno del ángulo θ.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo, donde θ es uno de los ángulos agudos, el cateto opuesto es 1 y el cateto adyacente es 2.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:

$$(x)^2 = (1)^2 + (2)^2$$
$$x^2 = 1 + 4$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

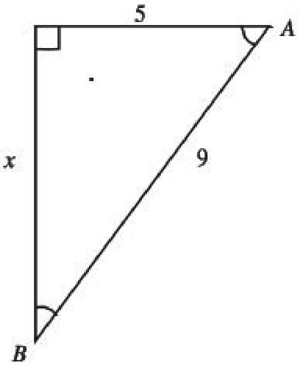


Por consiguiente, $sen\ \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $cos\ \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

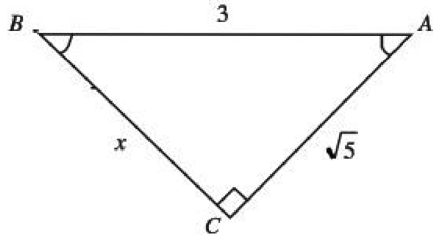
EJERCICIO 37

1. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, en los siguientes triángulos:

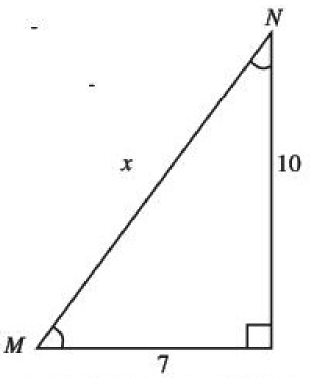
a)



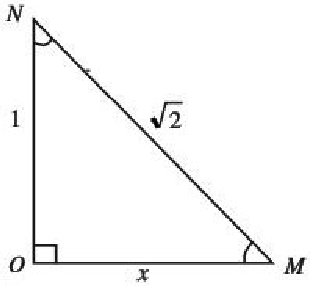
c)



b)



d)



2. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos:

a) Si θ y α son los ángulos agudos y $cos\ \theta = \frac{1}{5}$

b) Si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios y $tan\ B = \frac{2}{3}$

c) Si $\angle M$ y $\angle N$ son complementarios y $csc\ N = 2$

d) Si θ y α son los ángulos agudos y $sec\ \theta = 2\sqrt{3}$

e) Si $\alpha + \beta = 90°$ y $ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

f) sen $A = \frac{4}{\sqrt{29}}$ y $\angle B$ es complemento de $\angle A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Si un triángulo rectángulo se ubica en el plano cartesiano, de manera que uno de sus catetos coincida con el eje horizontal, las funciones trigonométricas tendrán un signo dependiendo del cuadrante sobre el cual se encuentre dicho triángulo.

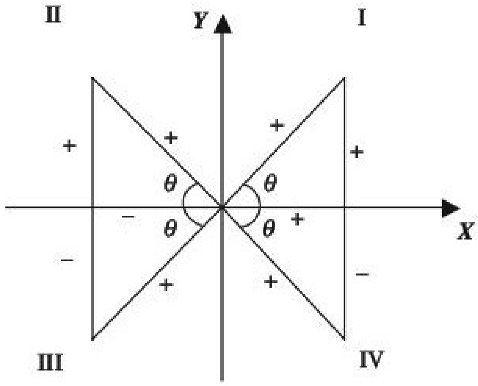


Tabla de signos

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–
Cotangente	+	–	+	–
Secante	+	–	–	+
Cosecante	+	+	–	–

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea el punto $A(-3, 4)$, determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = \angle X\,O\,A$.

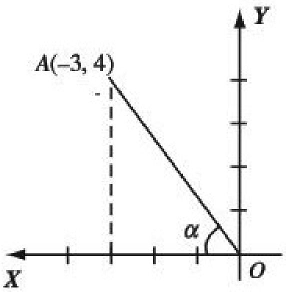
Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = (-3)^2 + (4)^2$$

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = 9 + 16$$

$$\overline{OA} = \sqrt{25} = 5$$



Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo α, son:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} \qquad tan\ \alpha = -\frac{4}{3} \qquad sec\ \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$cos\ \alpha = -\frac{3}{5} \qquad ctg\ \alpha = -\frac{3}{4} \qquad csc\ \alpha = \frac{5}{4}$$

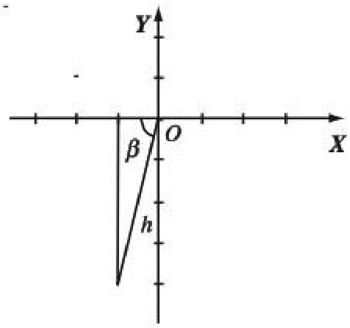
2 Calcula las funciones trigonométricas para el ángulo β, si se sabe que $tan\ \beta = 4$ y $180° \leq \beta \leq 270°$.

Solución

El ángulo se define en el tercer cuadrante y la función tangente es positiva, por tanto, $tan\ \beta = \frac{4}{1} = \frac{-4}{-1}$, estos valores se ubican en el plano cartesiano.

Por el teorema de Pitágoras:

$$(h)^2 = (-4)^2 + (-1)^2$$
$$h^2 = 16 + 1$$
$$h = \sqrt{17}$$



Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo β son:

$$sen\ \beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad tan\ \beta = 4 \qquad csc\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

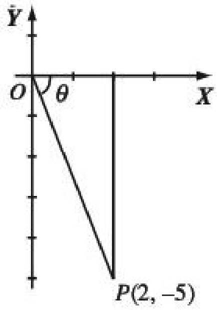
$$cos\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad ctg\ \beta = \frac{1}{4} \qquad sec\ \beta = -\sqrt{17}$$

3 Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ que forman el punto $P(2, -5)$ y el eje horizontal.

Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 = (2)^2 + (-5)^2$$
$$\overline{OP} = \sqrt{4+25}$$
$$\overline{OP} = \sqrt{29}$$



Las funciones trigonométricas son:

$$sen\ \theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29} \quad tan\ \theta = -\frac{5}{2} \quad sec\ \theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$cos\ \theta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} \quad ctg\ \theta = -\frac{2}{5} \quad csc\ \theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

EJERCICIO 38

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = < XOM$ que forman el punto $M(12, -5)$ y el eje horizontal.
2. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha =$ YON que forman el punto $N(-4, -7)$ y el eje vertical.
3. Determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\beta = XOA$ que forman el punto $A(2, 3)$ y el eje horizontal.
4. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\omega =$ XOB que forman el punto $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y el eje horizontal.
5. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo α, si se encuentra en el tercer cuadrante con $csc\ \alpha = -\frac{3}{2}$
6. Determina las funciones trigonométricas del ángulo α, si se encuentra en el cuarto cuadrante con $ctg\ \alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}$
7. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo β, si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{9}{13}$ y $90° \leq \beta \leq 180°$
8. Obtén las funciones trigonométricas del ángulo ω, si se sabe que $ctg\ \omega = -8$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \omega \leq 2\pi$
9. Si $csc\ \delta = \frac{13}{5}$ si $90° \leq \delta \leq 180°$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo δ
10. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo β si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$
11. Si $sen\ \alpha > 0$, $tan\ \alpha < 0$ y $sec\ \alpha = -2$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo α
12. Si $sec\ \alpha > 0$, $ctg\ \alpha < 0$ y $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo α

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones trigonométricas para ángulos mayores que 90°

Todo ángulo mayor que 90°, se puede expresar en la forma $(n \cdot 90° \pm \alpha)$ o bien $\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, donde n es un entero positivo y α es un ángulo cualquiera, la función de dicho ángulo será equivalente a:

i) La misma función de α si n es un número par.
ii) La cofunción correspondiente de α si n es un número impar.

Esto con el fin de expresar la función trigonométrica de dicho ángulo en una expresión equivalente, pero con un ángulo agudo, conservando el signo correspondiente a la función dada, según el cuadrante donde se encuentre el lado terminal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa como función de un ángulo agudo $tan\ 140°$.

Solución

El ángulo se sitúa en el segundo cuadrante, donde la función tangente es negativa, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (2 \cdot 90° - 40°) = -tan\ 40°$$

Ahora bien, $tan\ 140°$ se puede expresar también como $tan\ (1 \cdot 90° + 50°)$, $n = 1$, por tanto se utiliza cotangente, la cual es cofunción de la tangente, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (1 \cdot 90° + 50°) = -ctg\ 50°$$

2 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\ \frac{11}{9}\pi$.

Solución

El ángulo está en el tercer cuadrante, donde la función seno es negativa, entonces:

$$sen\ \frac{11}{9}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{9}\pi\right) = -sen\ \frac{2}{9}\pi$$

$sen\ \frac{11}{9}\pi$ se puede representar también como $sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right)$, $n = 3$ por tanto se utiliza la cofunción del seno, es decir, se expresa en términos del coseno.

$$sen\ \frac{11}{9}\pi = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right) = -cos\ \frac{5}{18}\pi$$

3 Expresa como función de un ángulo agudo $sec\ 350°\ 15'\ 28''$.

Solución

El ángulo está situado en el cuarto cuadrante donde la función secante es positiva, entonces:

$$sec\ 350°\ 15'\ 28'' = sec\ (4\cdot 90° - 9°\ 44'\ 32'') = sec\ 9°\ 44'\ 32''$$

O en términos de cosecante:

$$sec\ 350°\ 15'\ 28'' = sec\ (3\cdot 90° + 80°\ 15'\ 28'') = csc\ 80°\ 15'\ 28''$$

4 Expresa como función de un ángulo agudo $cos\ 1\ 000°$.

Solución

Cuando el ángulo es mayor que 360°, debe dividirse entre esta cantidad para obtener el número de giros o vueltas que da el lado terminal y el residuo es el ángulo que debe expresarse en función de un ángulo agudo.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 2 \leftarrow \text{giros o vueltas} \\ \hline 360° & 1\ 000° \\ & \ \ 280° \leftarrow \text{Ángulo equivalente} \end{array}$$

El ángulo equivalente a 1 000° es 280°, situado en el cuarto cuadrante donde la función coseno es positiva, entonces:

$$cos\ 1\ 000° = cos\ 280° = cos\ (4\cdot 90° - 80°) = cos\ 80°$$

O bien, en términos de la función seno,

$$cos\ 1\ 000° = cos\ 280° = cos\ (3\cdot 90° + 10°) = sen\ 10°$$

5 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\ 6\ 290°$.

Solución

Se obtiene el ángulo equivalente, que sea menor que 360°,

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 17 \\ \hline 360° & 6\ 290° \\ & \ \ 170° \end{array}$$

El ángulo equivalente es 170°, el cual se sitúa en el segundo cuadrante donde la función seno es positiva, entonces,

$$sen\ 6\ 290° = sen\ 170° = sen\ (2\cdot 90° - 10°) = sen\ 10°$$

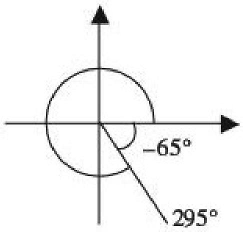
O bien, en términos de coseno,

$$sen\ 6\ 290° = sen\ 170° = sen\ (1\cdot 90° + 80°) = cos\ 80°$$

6 Expresa como función de un ángulo agudo $tan(-65°)$.

Solución

Se traza el ángulo negativo, el cual girará en sentido horario y será equivalente a un ángulo de 295°, que se sitúa en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa.



Por consiguiente:

$$tan\,(-65°) = tan\,295° = tan\,(4 \cdot 90° - 65°) = -tan\,65°$$

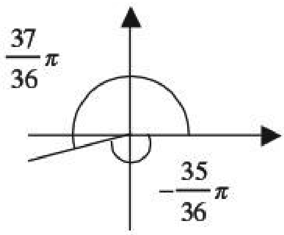
O bien, en términos de cotangente:

$$tan\,(-65°) = tan\,295° = tan\,(3 \cdot 90° + 25°) = -ctg\,25°$$

7 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right)$

Solución

Se traza el ángulo negativo, el cual se encuentra en el tercer cuadrante donde la función seno es negativa.



Por tanto,

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\,\frac{37}{36}\pi = sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{36}\right) = -sen\,\frac{\pi}{36}$$

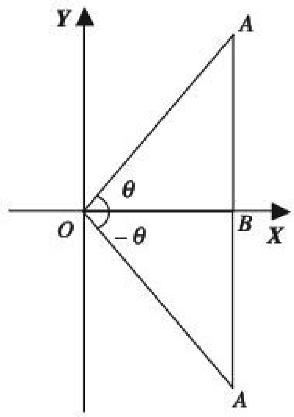
O bien, en términos de coseno:

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\,\frac{37}{36}\pi = sen\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{17}{36}\pi\right) = -cos\,\frac{17}{36}\pi$$

Funciones trigonométricas de ángulos negativos

Los ángulos negativos giran en sentido horario y las funciones trigonométricas de ángulos negativos, se expresan en términos de funciones trigonométricas de ángulos positivos.

En el triángulo $\Delta\, AOB$, ubicado en el primer cuadrante:



$$sen\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \qquad tan\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \qquad sec\ \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$$

$$cos\ \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \qquad ctg\ \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} \qquad csc\ \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

En el triángulo $\Delta\, AOB$, ubicado en el cuarto cuadrante:

$$sen\ (-\theta) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \qquad tan\ (-\theta) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \qquad sec\ (-\theta) = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$$

$$cos\ (-\theta) = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \qquad ctg\ (-\theta) = -\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} \qquad csc\ (-\theta) = -\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

Por consiguiente: $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$ $\quad tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ $\quad sec\ (-\theta) = sec\ \theta$
$cos\ (-\theta) = cos\ \theta$ $\quad ctg\ (-\theta) = -ctg\ \theta$ $\quad csc\ (-\theta) = -csc\ \theta$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa $sen\ (-30°)$ en términos de un ángulo positivo.

Solución

Al aplicar $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$, se obtiene:

$$sen\ (-30°) = -sen\ 30°$$

2 Expresa $tan\ (-120°)$ en términos de un ángulo positivo y agudo.

Solución

Se aplica $tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ y se obtiene:

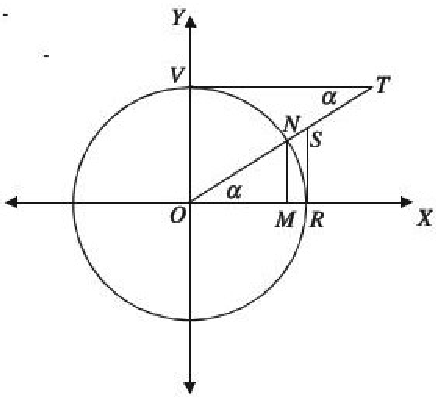
$$tan\ (-120°) = -tan\ 120°$$

y al reducir a un ángulo agudo,

$$tan\ (-120°) = -tan\ 120° = -tan\ (2 \cdot 90° - 60°) = -(-tan\ 60°) = tan\ 60°$$

Valores numéricos de las funciones trigonométricas circulares

Los valores de las funciones trigonométricas guardan una estrecha relación con el círculo unitario y se pueden calcular por medio de la medición de algunos segmentos de éste, el uso de tablas matemáticas o con el empleo de una calculadora.



Si se consideran las distancias $\overline{OR}=\overline{ON}=\overline{OV}=1$, entonces para calcular el valor de las funciones trigonométricas del ángulo α, se emplean las definiciones de las mismas y representan la longitud de los segmentos:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{MN}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{MN}}{1} = \overline{MN}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$

$$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{VT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{VT}}{1} = \overline{VT}$$

$$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \overline{OS}$$

$$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

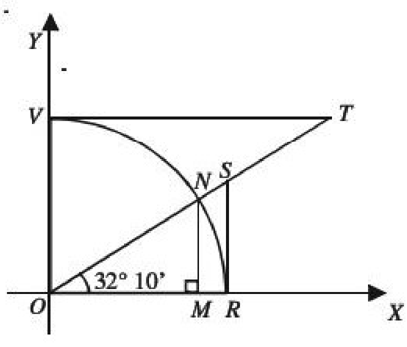
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de las funciones trigonométricas del ángulo 32° 10'.

Solución

Si se emplea el círculo unitario para calcular las funciones, donde $\alpha = 32°\ 10'$, entonces:



Se consideran los segmentos $\overline{OR} = \overline{ON} = \overline{OV} = 1$, entonces:

$sen\ 32°\ 10' = \overline{MN} = 0.5324$

$cos\ 32°\ 10' = \overline{OM} = 0.8465$

$tan\ 32°\ 10' = \overline{SR} = 0.6289$

$csc\ 32°\ 10' = \overline{OT} = 1.8783$

$sec\ 32°\ 10' = \overline{OS} = 1.1813$

$ctg\ 32°\ 10' = \overline{VT} = 1.5900$

Si se emplean las tablas matemáticas (incluidas al final del texto) para calcular el valor de las funciones trigonométricas de 32° 10', entonces, se procede de la siguiente forma:

Grados	Radianes	Sen	Tan	Ctg	Cos		
0° 00'	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00'
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32° 00'	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00'
10'	.5614	**.5324**	**.6289**	**1.5900**	**.8465**	1.0094	50'
20'	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0065	40'
30'	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0036	30'
40'	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20'
50'	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10'
33° 00'	.5760	.5446	.6494	1.5399	.9387	.9948	57° 00'
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
45° 00'	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00'
		Cos	Ctg	Tan	Sen	Radianes	Grados

El renglón superior corresponde a la columna izquierda cuyos valores van desde 0° 00' a 45° 00' y el renglón inferior va desde 45° 00' a 90° 00'.

El valor de *sen* 32° 10' se busca en la columna izquierda de arriba hacia abajo y además se observa que es el mismo valor que el de *cos* 57° 50', buscado en la columna derecha de abajo hacia arriba, esto es porque son cofunciones.

Si se busca el valor de las funciones trigonométricas empleando una calculadora, el procedimiento es el siguiente:

a) Verificar si la calculadora es de renglón simple o es más sofisticada y cuenta con doble renglón. Esto es porque se teclea de forma diferente; en la explicación que a continuación se presenta se considera que el estudiante empleará una máquina de doble renglón.

b) Es necesario definir en qué medidas angulares se desea trabajar (grados o radianes).

c) Considerar que el idioma que regularmente emplean los fabricantes en los menús y teclados es el inglés, es por ello que el ejemplo así lo considera.

d) Para encontrar las funciones cosecante, secante y cotangente, es necesario encontrar primero sus respectivas funciones recíprocas, ya que las calculadoras no cuentan con estas funciones de manera directa, y después dividir la unidad entre dicho resultado.

Si se emplea la medida en grados debes digitar la tecla de $\boxed{\text{Mode}}$ y elegir la opción $\boxed{\text{Deg}}$, la cual indica que la medida angular está en grados sexagesimales.

Si se busca el *sen* 32° 10', entonces:

Se digita $\boxed{\text{sin}}$ después, el valor de los grados 32 a continuación la tecla $\boxed{\circ\,\prime\,\prime\prime}$ enseguida 10 y por último la tecla $\boxed{\circ\,\prime\,\prime\prime}$. Para que el resultado aparezca en la pantalla es necesario digitar la tecla $\boxed{=}$ y el resultado desplegado en la pantalla de la calculadora es 0.53238389.

Si la función buscada es *sec* 32° 10', ésta no puede ser calculada de forma directa, por lo que es necesario encontrar su función recíproca. Además, ahora vamos a usar la medida angular en radianes, por tanto:

Se digita $\boxed{\text{Mode}}$ y se elige la opción $\boxed{\text{Rad}}$, la cual indica que la medida angular empleada está en radianes, 32° 10' = 0.5614 *rad*.

Se comienza digitando un paréntesis $\boxed{(}$, en seguida la función recíproca de la secante, la cual es el coseno $\boxed{\text{cos}}$ de 0.5614, después se cierra el paréntesis $\boxed{)}$ y por último la tecla $\boxed{x^{-1}}$, la cual es la función recíproca. Para que aparezca el resultado se teclea $\boxed{=}$ y se desplegará en la pantalla 1. 1813.

EJERCICIO 39

1. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

a) *sen* 210°
b) *tan* 165°
c) *cos* 280°
d) *csc* 120°
e) *sec* 358°
f) *sen* 240° 37' 25"
g) *ctg* 315°
h) *tan* 254° 46' 24"
i) *cos* 95° 25'
j) *sec* 320° 48' 12"
k) *csc* 127°
l) *ctg* (–48°)
m) *cos* (–38° 54')
n) *sen* (–28° 35' 24")

2. Expresa en términos de un ángulo positivo las siguientes funciones:

a) *sen* (–160°)
b) *ctg* (–140°)
c) *sec* (–240°)
d) *cos* (–280°)
e) *tan* (–345°)
f) *csc* (–90°)
g) *cos* (–225° 15' 46")
h) *ctg* (–176° 45' 23")
i) *sec* (–108° 32')
j) *sen* (–228° 15')

3. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

a) *sen* (–160°)
b) *ctg* 1 240°
c) *cos* (–2800°)
d) *tan* 5 445°
e) *csc* (–98° 32' 12")
f) *sec* (–230°)
g) *sen* (1 315°)
h) *tan* 823° 25' 18"
i) *cos* (–428° 45' 24")
j) *ctg* 920°
k) *sec* (–220°)
l) *csc* 328° 33' 41"

4. Encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas (empleando tablas o calculadora):

a) *sen* 18°
b) *ctg* 46°
c) *sec* 25°
d) *cos* 83°
e) *tan* 37°
f) *csc* 79°
g) *cos* 22° 10'
h) *ctg* 14° 40'
i) *sec* 10° 30'
j) *sen* 29° 50'

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 12

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS NOTABLES

Reseña HISTÓRICA

Ptolomeo
(100 *d. C.* – 170 *d. C.*)

Astrónomo, matemático y geógrafo egipcio del siglo II de la era cristiana, nace en Tolemaida Hermia (en el Alto Egipto), alrededor del año 100, y vive y trabaja en Alejandría.

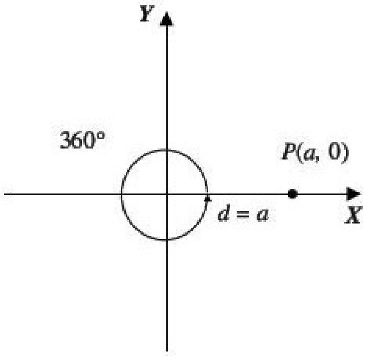
Ptolomeo calculó cuerdas inscribiendo polígonos regulares de lados 3, 4, 5 y 6 en un círculo, lo cual le permitió calcular cuerdas subtendidas por ángulos de 36°, 72°, 60°, 90° y 120°. En su obra *Almagesto*, Ptolomeo proporcionó una tabla de cuerdas de 0° a 180° con variaciones de 1°, con una exactitud de 1/3 600 de una unidad.

Los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno, en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ (radio de la circunferencia) y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.

Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Las coordenadas del punto *P* sobre el eje *X* son $(a, 0)$ y la distancia al origen es igual a a, entonces las funciones de los ángulos de 0° y 360° son:



$$sen\ 0° = sen\ 360° = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos\ 0° = cos\ 360° = \frac{a}{a} = 1$$

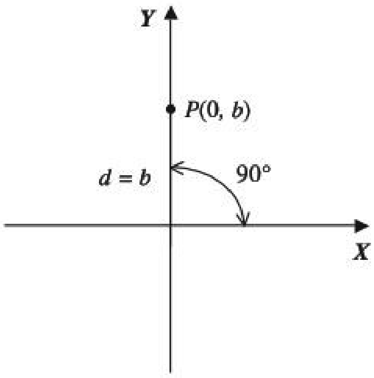
$$tan\ 0° = tan\ 360° = \frac{0}{a} = 0$$

$$ctg\ 0° = ctg\ 360° = \frac{a}{0}\ \text{No existe}$$

$$sec\ 0° = sec\ 360° = \frac{a}{a} = 1$$

$$csc\ 0° = csc\ 360° = \frac{a}{0}\ \text{No existe}$$

Para el ángulo de 90°, las coordenadas de cualquier punto *P* sobre el eje *Y* es $P(0, b)$, la distancia al origen es b, entonces:



$$sen\,90° = \frac{b}{b} = 1$$

$$cos\,90° = \frac{0}{b} = 0$$

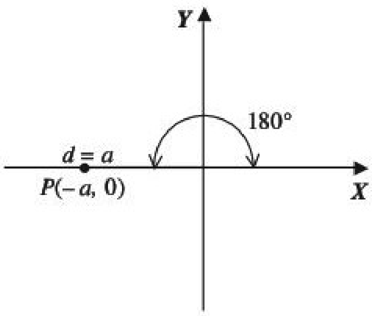
$$tan\,90° = \frac{b}{0}\ \text{No existe}$$

$$ctg\,90° = \frac{0}{b} = 0$$

$$sec\,90° = \frac{b}{0}\ \text{No existe}$$

$$csc\,90° = \frac{b}{b} = 1$$

Para el ángulo de 180° las coordenadas de cualquier punto *P* sobre el eje $-X$ son $(-a, 0)$, la distancia al origen es a.



$$sen\ 180° = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos\ 180° = \frac{-a}{a} = -1$$

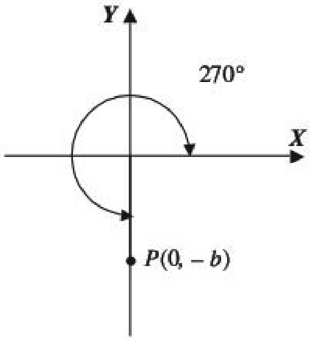
$$tan\ 180° = \frac{0}{-a} = 0$$

$$ctg\ 180° = \frac{-a}{0}\ \text{No existe}$$

$$sec\ 180° = \frac{a}{-a} = -1$$

$$csc\ 180° = \frac{a}{0}\ \text{No existe}$$

Para el ángulo de 270° las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje $-Y$ son $P(0, -b)$, la distancia al origen es b.



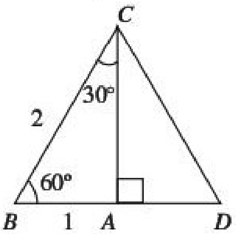
$$sen\ 270° = -\frac{b}{b} = -1$$
$$cos\ 270° = \frac{0}{b} = 0$$
$$tan\ 270° = \frac{-b}{0}\ \text{No existe}$$
$$ctg\ 270° = \frac{0}{-b} = 0$$
$$sec\ 270° = \frac{b}{0}\ \text{No existe}$$
$$csc\ 270° = \frac{b}{-b} = -1$$

Cuadro de valores de las funciones trigonométricas

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Funciones	0°	90°	180°	270°	360°
seno	0	1	0	–1	0
coseno	1	0	–1	0	1
tangente	0	No existe	0	No existe	0
cotangente	No existe	0	No existe	0	No existe
secante	1	No existe	–1	No existe	1
cosecante	No existe	1	No existe	–1	No existe

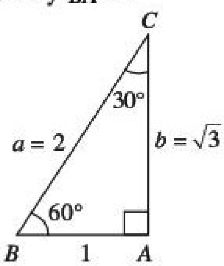
Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

Para las funciones trigonométricas de los ángulos de 60° y 30° se construye un triángulo equilátero de lado igual a 2:



Se traza $\overline{CA} \perp \overline{BD}$, $\overline{CA}$ es bisectriz del $\angle C$ y mediatriz del lado BD.

En el triángulo BAC, $\angle B = 60°$, $\angle ACB = 30°$ y $\overline{BA} = 1$



Para obtener el lado $b = \overline{CA}$ se usa el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CA}^2 = (2)^2 - (1)^2$$

$$\overline{CA}^2 = 3$$

$$\overline{CA} = \sqrt{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad sec\ 60° = \frac{2}{1} = 2$$

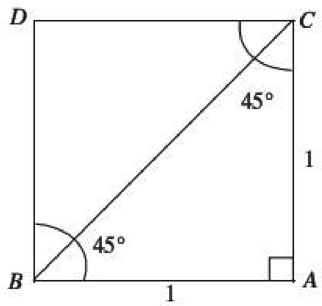
$$cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ctg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad csc\ 30° = \frac{2}{1} = 2$$

Para calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 45° se construye un cuadrado de longitud por lado igual a la unidad y se traza su diagonal.



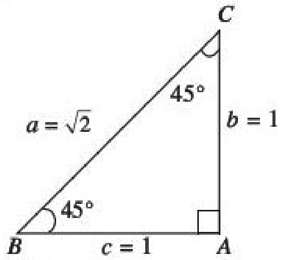
Para obtener el valor de la hipotenusa, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{donde:} \qquad a^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$a^2 = 1 + 1$$

$$a^2 = 2$$

De acuerdo con el resultado anterior, $a = \sqrt{2}$



Las funciones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad sec\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ctg\ 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad csc\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Aplicación de los valores trigonométricos de los ángulos notables

EJEMPLOS

1 Calcula el valor numérico de 2 *sen* 30° *cos* 60°.

Solución

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se efectúa la operación:

$$2\ sen\ 30° \cdot cos\ 60° = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Determina el valor numérico de la expresión: $tan^2 60° + ctg^2 45°$.

Solución

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se determina que:

$$tan^2 60° + ctg^2 45° = (tan\ 60°)^2 + (ctg\ 45°)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, $tan^2 60° + ctg^2 45° = 4$

3 Calcula el valor numérico de $sen\ \frac{7}{6}\pi + 3\ sen\ \frac{11}{6}\pi$.

Solución

Los ángulos se expresan en función de ángulos agudos para obtener los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ \frac{7}{6}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\ sen\ \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$sen\ \frac{11}{6}\pi = sen\left(4\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\ sen\ \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$sen\ \frac{7}{6}\pi + 3\ sen\ \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Por tanto, sen $\frac{7}{6}\pi + 3\ sen\ \frac{11}{6}\pi = -2$

4 Mediante ángulos notables demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\ 30° - (cos\ 30° \cdot ctg\ 60°)^2 = cos^2 60°$$

Solución

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}; \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

Después se sustituyen los valores de las funciones y se demuestra que se cumple con la igualdad:

$$sen\ 30° - (cos\ 30° \cdot ctg\ 60°)^2 = cos^2 60°$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Con lo cual queda demostrada la igualdad propuesta.

5 Demuestra la siguiente igualdad, mediante el valor de los ángulos notables:

$$\sqrt{sen^2 \frac{3}{2}\pi + 3\,sec\,2\pi} = csc\frac{\pi}{6}$$

Solución

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ \frac{3}{2}\pi = -1; \quad sec\ 2\pi = 1; \quad csc\ \frac{\pi}{6} = 2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1)^2 + 3(1)} &= 2 \\ \sqrt{1+3} &= 2 \\ \sqrt{4} &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad es verdadera.

EJERCICIO 40

Completa la siguiente tabla:

Grados	Radianes	sen	cos	tan	csc	sec	ctg
0°	0						
30°	$\frac{\pi}{6}$						
45°	$\frac{\pi}{4}$						
60°	$\frac{\pi}{3}$						
90°	$\frac{\pi}{2}$						
120°	$\frac{\pi}{3}$						
135°	$\frac{\pi}{4}$						
150°	$\frac{\pi}{6}$						
180°	π						
210°	$\frac{7\pi}{6}$						
225°	$\frac{5\pi}{4}$						
240°	$\frac{4\pi}{3}$						
270°	$\frac{3\pi}{2}$						
300°	$\frac{5\pi}{3}$						
315°	$\frac{7\pi}{4}$						
330°	$\frac{11\pi}{6}$						
360°	2π						

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

1. $2\,sen\,30°\,cos\,30°$
2. $2\,sen\,30°\,sen\,60°$
3. $3\,tan\dfrac{\pi}{6}\;sen\dfrac{\pi}{3}$
4. $sec^2 45° - 2\,tan^2 45°$
5. $sen^2 30°\,cos^2 30°$
6. $\left[sen^2 45° cos^2 45°\right]^{\frac{3}{2}}$
7. $3\,tan\,60°\,ctg\,30°\,sen\,45°\,csc\,45°$
8. $2\,sen\,60°\,sec\,30°\,cos\,45°\,tan\,45°$
9. $2\,sen\dfrac{\pi}{4}\;cos\dfrac{\pi}{4}\left(sen^2\dfrac{\pi}{6}+cos^2\dfrac{\pi}{6}\right)$
10. $2\,sen\,30°\,cos\,30°\,(1-2\,sen^2 30°)$
11. $tan^2\dfrac{5}{3}\pi+4\,sen\dfrac{5}{6}\pi-3\,ctg^2\dfrac{5}{4}\pi$
12. $\dfrac{cos\,120° + sec\,180°}{csc\,270° + sen\,330°}$
13. $\left[\dfrac{(sen\,120°)(tan\,240°)}{tan\,315° - cos\,300°}\right]^3$
14. $\sqrt{(tan\,225°)(sen\,180°)(cos\,240°)}$
15. $sen\,90° + (cos\,210° + sen\,300°)^2 + sec\,240°$

Utiliza ángulos notables para demostrar las siguientes igualdades:

16. $\dfrac{sen\,240° + sen\,120° \cdot cos\,60°}{sen\,120° \cdot sen(-60°)} = tan\,210°$
17. $tan\dfrac{\pi}{3} \cdot sen\dfrac{2}{3}\pi = 1 + sen\dfrac{\pi}{6}$
18. $sen\,180° = 2\,sen\,60° + sen\,240°(sec\,45°)^2$
19. $cos\,225° + 3\,sen\,225° = -2\,sec\,45°$
20. $csc\,60° = -\dfrac{sen\,30°}{sen\,150° \cdot sen\,300°}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente