¡ajá!

# Paradojas

## Paradojas que hacen pensar

Martin Gardner

¡ajá!

# Paradojas

## Paradojas que hacen pensar

Martin Gardner

Labor, S.A.

Traducción de Luis Bou

Primera edición: 1983

Título de la edición original: *Aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight*

Depósito legal: B. 13 510. ISBN: 84-335-5117-5
Printed in Spain - Impreso en España
Industrias de Artes Gráficas Grafink, S.A. Ripollet (Barcelona)

# Índice

# Prefacio

*Son éstas viejas y amables paradojas que hacen reír a los lobos en la taberna.*

Desdémona, *Otelo*, acto II, escena 1

Modifiquemos la observación de Desdémona, dejándola en «Son éstas viejas y amables paradojas para hacer sonreír durante la sobremesa», y seguramente tendremos una descripción bastante atinada de este libro. Aunque el término *paradoja* tiene numerosos significados, lo tomo aquí en un sentido amplio, capaz de contener todo resultado que por contrario a la intuición y al sentido común alcanza a provocar de inmediato un sentimiento de sorpresa. Tales paradojas son de cuatro tipos fundamentales:

1. Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas.
2. Afirmaciones que parecen verdaderas, pero en realidad son falsas.
3. Cadenas de razonamientos aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas. (Las paradojas de esta clase suelen llamarse falacias.)
4. Declaraciones cuya veracidad o falsedad es indecidible.

Como las científicas, las paradojas matemáticas pueden ser mucho más que amenidades, y llevarnos hasta nociones muy profundas. A los primeros pensadores griegos les resultaba tan paradójico como insoportable que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no pudiera ser medida exactamente por finas que se hicieran las graduaciones de la regla. Este hecho perturbador sirvió para abrir el vasto dominio de los números irracionales. Los matemáticos del siglo pasado encontraban enormemente paradójico que todos los miembros de un conjunto infinito puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los miembros de algún subconjunto del dado, mientras por otra parte podían existir conjuntos infinitos entre los cuales es imposible establecer una correspondencia biunívoca. Tales paradojas condujeron a desarrollar la moderna teoría de conjuntos, que a su vez ha ejercido profunda influencia sobre la filosofía de la ciencia.

Mucho podemos aprender de las paradojas. Al igual que los buenos trucos de ilusionismo, nos causan tanto asombro que inmediatamente queremos saber cómo se han hecho. Los ilusionistas no revelan jamás cómo hacen lo que hacen, pero los matemáticos no tienen necesidad de guardar el secreto. En todo el libro he procurado explicar al máximo con lenguaje ordinario, sin tecnicismos y de la forma más breve posible, por qué cada paradoja es paradójica. Si con ello animo al lector a consultar libros y artículos donde aprender más, no sólo habrá absorbido una buena dosis de ideas matemáticas importantes, sino que habrá disfrutado por el camino. Al final del libro he señalado con un asterisco, en la sección de referencias y lecturas recomendadas, algunas obras de consulta fácilmente accesibles.

*Noviembre de 1981* *Martin Gardner*

# 1 Lógica

1 Lógica
1 Lógica
1 Lógica
1 Lógica
1 Lógica
1 Lógica
Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos
Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos
Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos
Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos
Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos
Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos



## Paradojas sobre mentirosos, veraces, cocodrilos y barberos

En vista del indispensable papel que la lógica desempeña, no sólo en matemática, sino en todo el pensamiento deductivo, sorprende descubrir que la lógica se encuentra acribillada de razonamientos aparentemente impecables que conducen a contradicciones obvias. En tales razonamientos se demuestra algo así como que 2 + 2 son 4, y en seguida se da otra demostración igualmente buena de que es imposible que 2 + 2 sean 4. ¿Qué error se ha cometido? ¿Será posible que los procesos mismos del pensamiento deductivo oculten fallos irremediables?

Los esfuerzos por resolver las paradojas clásicas han hecho avanzar la lógica a zancadas de gigante. Bertrand Russell dedicó a ellas muchos años de parcos frutos antes de colaborar con Alfred North Whitehead en los *Principia Mathematica,* monumental tratado que proporciona fundamento unificado a la matemática y la lógica moderna.

Las paradojas no sólo plantean cuestiones, sino que también pueden responderlas. Entre las cuestiones que las paradojas de este capítulo permiten resolver tenemos:

1. ¿Hay situaciones donde sea un imposible lógico la predicción correcta de un suceso futuro?
2. ¿Por qué la teoría de conjuntos prohíbe con carácter general construir conjuntos entre cuyos elementos tendríamos que contar al propio conjunto?
3. Cuando hablamos *de* un lenguaje, ¿por qué es preciso distinguir el lenguaje *del cual* hablamos (nuestro lenguaje objeto) y el lenguaje *en que* hablamos (nuestro metalenguaje)?

Las paradojas que responden a tales preguntas contienen todas indicios de razonamiento circular o autoalusión. En lógica, la posibilidad de autoalusión tanto puede enriquecer una teoría como destruirla. El problema consiste en dar a nuestras teorías las formas justas que consienten enriquecer el tema y al tiempo excluyen toda posibilidad de contradicción interna. El instrumento primario para someter a prueba nuestras ideas lógicas y comprobar si les hemos impuesto los límites correctos es precisamente la invención de paradojas.

No se imagine el lector que todas las paradojas de la lógica moderna están resueltas ya. ¡Lejos de eso! En cierta ocasión, Immanuel Kant afirmó imprudentemente que en su tiempo la lógica se encontraba ya tan desarrollada que nada nuevo podría decirse acerca de ella. Todo cuanto Kant pudiera conocer de lógica no es sino una parte reducida y elemental de la lógica moderna. Hay niveles profundos donde los más grandes lógicos están en desacuerdo, niveles donde no han sido resueltas todavía cuestiones paradójicas, y donde tendrán que formularse aún muchas preguntas más.

# La paradoja del mentiroso


Se atribuye a Epiménides haber afirmado: «Todos los cretenses son mentirosos». Sabiendo que él mismo era cretense, ¿decía Epiménides la verdad?

Epiménides fue un legendario poeta griego que vivió en Creta hacia el siglo VI a. de C. Uno de los mitos que de él se cuentan dice que en cierta ocasión estuvo durmiendo durante cincuenta y siete años.

La frase que se le atribuye da pie a una contradicción lógica si se admite que los mentirosos mienten *siempre*, mientras que las personas que no son mentirosas —las llamaremos veraces— dicen *siempre* la verdad. Con estas hipótesis, la declaración «Todos los cretenses son mentirosos» no puede ser verdadera, porque entonces Epiménides sería mentiroso, y, por tanto, esto que él nos dice tiene que ser falso. Por otra parte, tampoco puede ser falsa, porque se deduciría entonces que los cretenses son veraces, y, por consiguiente, lo que Epiménides dice sería verdad.

A los antiguos griegos les tenía perplejos que enunciados de apariencia perfectamente clara no pudieran ser ni verdaderos ni falsos sin contradecirse a sí mismos. Un filósofo estoico, Crisipo, escribió seis tratados acerca de la paradoja del mentiroso, de los que ninguno ha llegado a nuestros días. Filetas de Cos, otro poeta griego, tan flaco que se decía de él que llevaba los zapatos lastrados con plomo para no ser arrastrado por el viento, se cavó temprana tumba de tanta angustia que le causaba. En el Nuevo Testamento, san Pablo reproduce la paradoja en su epístola a Tito:

> Dijo uno de ellos, su propio profeta: «Los cretenses, siempre embusteros, malas bestias, panzas holgazanas».
> Verdadero es tal testimonio...*
>
> Tito 1:12-13

No sabemos si san Pablo cayó en la cuenta de la paradoja implícita en estas frases.

* La traducción es la de Nácar-Colunga, en la Biblia de la BAC. (N. del T.)


Estamos atrapados en la famosa paradoja del mentiroso. He aquí su versión más sencilla: «Esta frase es falsa». ¿Es la frase verdadera? ¡En tal caso, sería falsa! ¿Es entonces falsa? Si tal fuera, ¡sería verdadera! Las declaraciones contradictorias como ésta son más corrientes de lo que se cree.

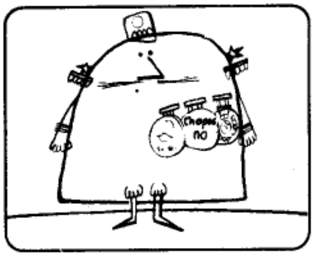
¿Por qué al presentar la paradoja de esta forma, donde una frase habla de sí misma, nos parece más clara? La razón es que así redactada se eliminan todas las ambigüedades acerca de si los mentirosos mienten siempre y de si los veraces dicen siempre la verdad.

Existen infinidad de variantes. En cierta ocasión. Bertrand Russell manifestó estar convencido de que el filósofo George Edward Moore había mentido tan sólo una vez en su vida. Al preguntársele a Moore si siempre decía la verdad, éste se lo pensó un instante y respondió: «No».

Distintas formas de la paradoja del mentiroso han merecido papel central de varios cuentos. Mi favorito es *Told Under Oath* (Declarado bajo juramento), de Lord Dunsany. Podemos encontrarlo en una antología reciente de escritos suyos poco conocidos, *The Ghost of Heaviside Layer and Other Fantasies.* En este cuento Dunsany conoce a un individuo que declara bajo solemne juramento que la historia que va a referir es toda la verdad y nada más que la verdad.

Al parecer, este hombre se tropezó con Satanás en una fiesta, cerrando con él un trato. Acordaron que el hombre, quien hasta la fecha había sido el peor de los jugadores de golf de su club, haría siempre hoyo en un golpe. Tras cierto número de hoyos a la primera, los demás jugadores llegaron a convencerse de que el sujeto se las apañaba para hacer trampa, y lo expulsaron del club. El cuento termina cuando Dunsany le pregunta qué exigió Satanás a cambio de tan extraordinario don. Contesta el hombre: «Extirpó de mí la capacidad de nunca más decir la verdad».

# Chapas y pintadas




¿Se acuerda de aquellas chapas que decían «Chapas no»? Llegaron a hacerse bastante populares.


¿Y de las pintadas que clamaban «¡Basta ya de pintadas!»?

¿Por qué son contradictorios estos enunciados? En cada uno de ellos se practica lo contrario de lo que se predica. Hay abundantes ejemplos del mismo estilo. En un parachoques dice una pegatina: «¡Ya está bien de pegatinas en los parachoques!». Dice un anuncio de prensa, en grandes letras: «No lea este anuncio». Un solterón manifiesta estar dispuesto a casarse con sólo una mujer: la bastante lista como para plantarle a *él*. Groucho Marx gustaba de decir que no estaba dispuesto a ingresar en ningún club que le quisiera por socio. Una etiqueta engomada dice: «Si esta etiqueta se desprendiera en tránsito, notifíquenoslo inmediatamente, por favor».

Más cercanas a la paradoja del mentiroso están las declaraciones autoinvalidantes del estilo de «Todo conocimiento es dudoso», o el aforismo de Bernard Shaw, a saber, que «La única regla áurea es que no existen reglas áureas».

> Érase una jovencita muy rotunda
> cuyos ripios concluían en la línea segunda.

Este pareado anónimo no es paradójico, pero sirve para provocar este otro:

> Érase un jovencito muy perverso.

¿En qué consiste la paradoja? ¿Tal vez mentalmente el lector ha completado el pareado, añadiendo «cuyos ripios terminaban en el primer verso»? ¿Tal vez en la idea misma de que un pareado no puede tener menos de dos versos?

Humorísticamente se han dado normas de buen estilo literario expresadas en forma paradójica. He aquí un decálogo recogido por Harold Evans, redactor jefe del *Sunday Times* londinense:

No utilice nunca doble negación.
Esfuércese en que cada pronombre concuerde con sus antecedentes.
Al dejar frases colgando, atención a los participios.
No use comas, que no sean necesarias.
El verbo tienes que concordar con el sujeto.
Con respecto a frases fragmentadas.
Procurar nunca los infinitivos separar demasiado.
Es importante usar los apóstrofo's correctamente.
Relea siempre lo escrito, y vea si palabras.
¡Mucha atención a la hortografía!

Un despacho de la agencia UPI (24 de abril de 1970) daba cuenta de que en unas elecciones de Oregón se permitía a los candidatos imprimir en las papeletas de voto un lema de hasta 12 palabras debajo de su nombre. He aquí el de Frank Hatch, candidato al Congreso por los demócratas: «No deberían figurar aquí quienes pierden tiempo ideando lemas de doce palabras».

En 1909, el renombrado economista británico Alfred Marshall escribía: «Toda frase breve acerca de economía es intrínsecamente falsa».

Una lectora me contó que un día ella y su niño pequeño jugaron al hueso del deseo. Ganó el niño, quien preguntó a su madre qué había ella deseado para él. La madre contestó que su deseo había sido que *él* ganara. ¿Fue ella quien ganó? ¿Habría ganado la madre si hubiera logrado arrancar el mayor de los dos trozos?

¿Qué significado tendría una declaración ex cáthedra del papa, que afirmase que ningún papa, pasado, presente o futuro, es infalible?

Un anuncio de una revista dice: «¿Quiere usted aprender a leer? Aprenda rápidamente por correspondencia. Escríbanos a la dirección adjunta».

La autoalusión puede ser divertida aun cuando no sea paradójica. En el índice de *Finite Dimensional Vector Spaces*, de Paul R. Halmos, vemos la referencia «Hochschild, G. P., 198». Excepto en esta entrada, para nada se menciona a Hochschild en todo el libro. La llamada se encuentra en la página 198.

Raymond Smullyan dio a un libro de rompecabezas lógicos el título *What Is the Name of This Book?* (versión española: *¿Cómo se llama este libro?*, Madrid, Cátedra, 1981). Dos años más tarde ha hecho un segundo libro, esta vez de paradojas de la vida ordinaria, titulado *This Book Needs No Title* (Este libro no precisa título).

Puede verse un divertido artículo sobre autoalusión, con muchos ejemplos nuevos, en la sección «Temas matemágicos» de *Investigación y Ciencia* (marzo de 1981), que escribe Douglas R. Hofstadter.

# Un enunciado y su contrario


¿Cuántas palabras tiene la frase de la viñeta? Seis. Está claro que su enunciado es falso. Por tanto, su *contrario* debería ser verdadero. ¿Es esto correcto?


¡Es falso! La oración contraria está formada exactamente por siete palabras. ¿Cómo resolver estos raros dilemas?

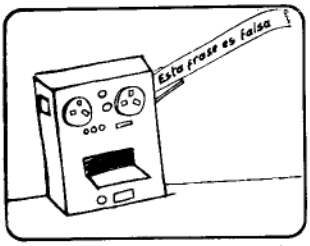
Veamos ahora otra paradoja acerca de valores de veracidad o falsedad, de autor anónimo.

Tenemos aquí tres enunciados falsos. ¿Será capaz el lector de descubrir cuáles?

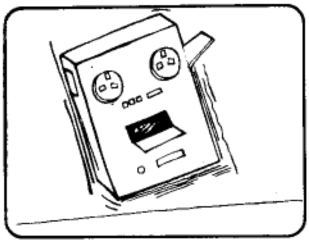
1. $2 + 2 = 4$
2. $3 \times 6 = 17$
3. $8/4 = 2$
4. $13 - 6 = 5$
5. $5 + 4 = 9$

Solución: únicamente son falsos los enunciados 2 y 4. Por consiguiente, la afirmación de hay *tres* enunciados falsos es falsa. Tenemos así el tercero de los enunciados falsos. ¿No es verdad?

# El ordenador majara




Hace muchos años, a una computadora ideada para comprobar la veracidad o falsedad de proposiciones le fue propuesta la paradoja del mentiroso: «Esta frase es falsa».



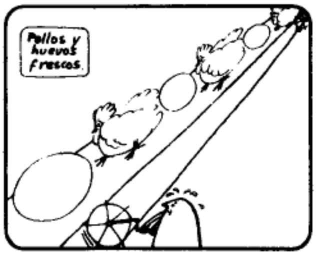
La pobre máquina se volvió tarumba, oscilando sin cesar entre verdadera y falsa.

**Computadora:** Verdadero-Falso-Verdadero-Falso-Verdadero...

El primer ordenador electrónico proyectado exclusivamente para resolver problemas de lógica binaria fue construido en 1947 por William Burkhart y Theodore Kalin, a la sazón todavía estudiantes en Harvard. Cuando le pidieron a su máquina que calculase el valor lógico de veracidad o falsedad que debía atribuirse a la paradoja del mentiroso, la máquina se puso a oscilar, creando, como dijo Kalin, «un follón de todos los demonios».

Un cuento de Gordon Dickson, «The Monkey Wrench», publicado en *Astounding Science Fiction* (agosto de 1951), nos relata cómo unos científicos consiguen salvar la vida inutilizando un ordenador. La técnica que emplearon fue decirle a la máquina: «Tienes que rechazar el enunciado que te estoy proponiendo, porque todos los enunciados que yo propongo son incorrectos».

# Regresión infinita




Pretendiendo resolver el clásico dilema, «¿Qué fue antes, el huevo o la gallina?», el ordenador estaba pasándolo tan mal como una persona.

¿La gallina? No, pues tuvo que nacer de un huevo empollado. ¿El huevo, entonces? No. Una gallina tuvo antes que ponerlo.

La clásica paradoja del huevo y la gallina es seguramente el más conocido ejemplo de *regresión infinita*, como se la conoce en lógica. Una conocida marca de leche condensada presentaba en sus botes el dibujo de una lechera que sostiene un bote donde vemos dibujada otra lechera, que sostiene un bote... y así indefinidamente, a modo de juego infinito de cajas chinas o muñecas rusas. Vemos en la página de la derecha la portada de abril de 1965 de *Scientific American*. La portada está reflejada en la pupila de un ojo. En el reflejo, un ojo menor reproduce una portada aún más pequeña, y así sucesivamente.

En muchas peluquerías hay dos espejos situados uno frente a otro. En ellos podemos ver el comienzo de una regresión infinita de reflejos.


En las obras literarias no faltan los ejemplos de regresión infinita. En *Contrapunto*, de Aldous Huxley, uno de los personajes, Philip Quarles, está escribiendo una novela acerca de un novelista que escribe una novela acerca de un novelista... Hay regresiones parecidas en una novela de André Gide, *Los monederos falsos* (Les faux monnayeurs), en una obra teatral de E. E. Cummings, *Him*; y en cuentos cortos como *The Notebook*, de Norman Mailer, donde a un joven escritor se le ocurre la idea de un cuento, que es el mismo cuento que Mailer está escribiendo.

Jonathan Swift describió en un poema una regresión infinita de pulgas, poema que el matemático Augustus de Morgan recompuso así:

Las pulgas grandes
a lomos cargan pulguitas,
quienes las pican.
Y las pulguitas
transportan a otras menores,
*ad infinitum.*

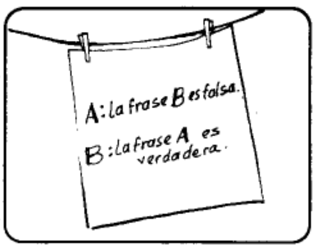
Y las más grandes van a su vez
a cuestas de otras mayores,
y éstas,
aún cabalgan sobre otras,
y así una vez y otra.

Dos cuestiones científicas de nuestra era, concernientes a regresiones infinitas, seguramente no pueden ser contestadas nunca. ¿Es nuestro universo, en su continua expansión, todo cuanto existe, o es sólo parte de un sistema más vasto todavía, del que nada sabemos? La segunda cuestión va en sentido contrario, hacia lo pequeño. ¿Es el electrón una partícula última, o, por el contrario, tiene estructura interna, y está compuesto por partes aún menores? Los físicos opinan ahora que muchas partículas están formadas por combinaciones de quarks. ¿Estarán los quarks formados por entidades aún más pequeñas? Hay físicos que consideran verosímil que no haya fin en ninguna de estas dos direcciones. El universo total de universos sería como un inmenso juego de cajas chinas, en el que no hubiera ni caja mínima ni caja máxima, al igual que no existe un entero positivo que sea máximo ni un quebrado menor que los demás.

# La paradoja de Platón y Sócrates


Pensemos por un momento en la frase del dibujo. Un cretense habla de los cretenses. Una proposición alude a sí misma. Una chapa habla de las chapas. Todos estos enunciados parecen hablar de sí mismos. ¿Será la autoalusión culpable de sus males?


No. Ya los antiguos griegos sabían que no basta con eliminar la autoalusión. He aquí un diálogo que lo demuestra.
**Platón:** La próxima declaración de Sócrates será falsa.
**Sócrates:** ¡Platón ha dicho la verdad!




Los lógicos han simplificado la paradoja de Platón-Sócrates reduciéndola a las frases de la viñeta. Cualquiera que sea el valor de verdad que se asigne a cualquiera de ellas quedará contradicho por la otra. Ninguna de estas proposiciones se refiere a sí misma; empero, tomándolas conjuntamente la paradoja del mentiroso subsiste.

Esta variante de la paradoja del mentiroso, que fue muy analizada en tiempos medievales, es importante porque muestra que la fuente de confusión de las paradojas reside mucho más profundamente que la mera autoalusión. Si la oración *A* es verdadera, la oración *B* será falsa, y si *B* es falsa, entonces *A* tiene que ser falsa. Pero si *A* es falsa, entonces *B* es verdadera, y si *B* es verdadera, entonces *A* es verdadera. Ahora estamos de vuelta en el punto de partida, repitiéndose el proceso cíclicamente, como dos polis de historieta persiguiéndose uno al otro en torno a un edificio. Ninguna de las frases alude a sí misma, pero tomadas conjuntamente cambian continuamente el valor de verdad asignado a la otra, incapacitándonos para decir si alguna de ellas es verdadera o falsa.

Puede resultar entretenido preparar para los amigos la siguiente variante de la paradoja, ideada por P. E. B. Jourdain, un matemático inglés.

En una cara de una ficha en blanco escribimos en letras de molde:

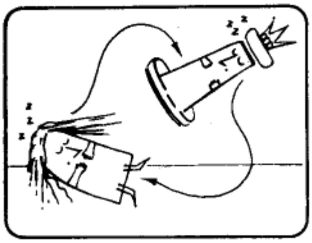
LA FRASE ESCRITA EN LA OTRA CARA DE ESTA TARJETA ES VERDADERA

Y en el reverso de la misma ficha escribimos:

LA FRASE ESCRITA EN LA OTRA CARA DE ESTA TARJETA ES FALSA

Mucha gente tiene que darle vueltas a la ficha, una y otra vez, antes de caer en la cuenta de que ha sido atrapado en una regresión sin fin, donde cada proposición va siendo alternativamente verdadera y falsa.

# Alicia y el Rey



La paradoja de Platón y Sócrates tiene *dos* regresiones infinitas, lo mismo que Alicia y el Rey Rojo, en *Through the Looking Glass:*
**Alicia:** Estoy soñando con el Rey Rojo. También él duerme y sueña conmigo, que estoy soñando con él, quien sueña conmigo... ¡Cielos! ¡Esto se repite sin cesar!

El episodio en que Alicia conoce al Rey Rojo se halla en el capítulo 4 de *Through the Looking Glass.* El Rey está dormido, y Tweedledee le dice a Alicia que el Rey sueña con ella, y que ella no tiene existencia excepto como «una especie de cosa» del sueño del Rey.

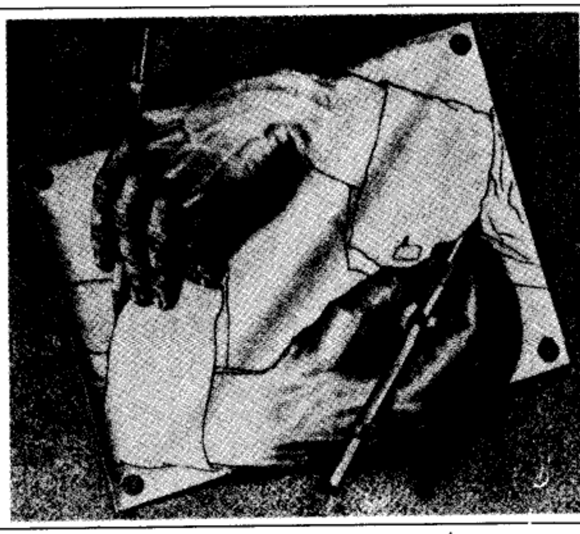
«Si el Rey se despertase —añade Tweedledee— te esfumarías —bang!— como la llama de una vela.»

Pero todo este diálogo tiene lugar en el propio sueño de Alicia. ¿Es el Rey «una cosa» del sueño de la niña, o es ella «una cosa» del sueño del Rey? ¿Cuál es real y cuál es ensueño?

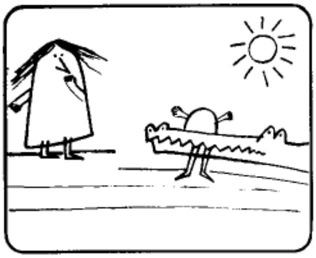
El doble sueño suscita profundos problemas filosóficos acerca de la realidad. «Si no fuera planteado humorísticamente —dijo Bertrand Russel en cierta ocasión—, nos resultaría excesivamente penoso.»

Huevos y gallinas retroceden en el tiempo a través de interminables generaciones de huevos y gallinas; en el caso de Alicia y el Rey, la regresión es circular. Una obra de Maurits Escher, *Drawing Hands* (Manos que dibujan) ilustra gráficamente esta paradoja circular.

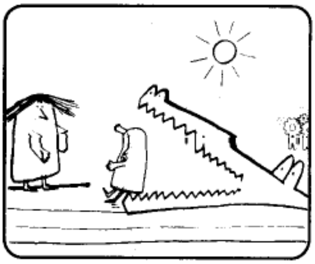
Douglas Hofstadter, en su libro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid,* llama «bucles extraños» a estas paradojas circulares. Su libro rebosa de sorprendentes ejemplos de bucles extraños en la ciencia, las matemáticas, las artes y la filosofía.



# El cocodrilo y el niño

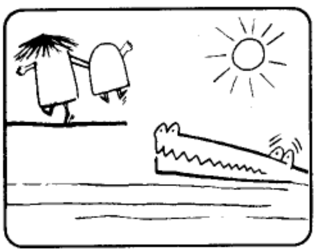


A los filósofos griegos les gustaba referir el caso de un cocodrilo que le arrebató su bebé a una mujer.
**Cocodrilo:** ¿Voy a comerme a tu niño? Responde correctamente y te lo devolveré ileso.
**La madre:** ¡Ay, ay, ay! ¡Te vas a comer a mi hijito!



**Cocodrilo:** Humm... ¿Qué debo hacer? Si te devuelvo el nene lo que has dicho será falso. Debería habérmelo comido ya... Decidido, no te lo devuelvo.
**La madre:** ¡Tienes que hacerlo!

Si te comieras a mi nene yo habría contestado correctamente, así que tienes que dármelo.

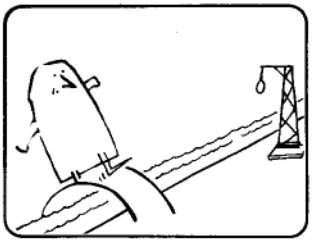


El pobre cocodrilo estaba tan embrollado que dejó escapar al niñito. La madre lo asió de un brazo y huyó.
**Cocodrilo:** ¡Cáscaras! ¿Por qué no me diría que le devolviera el chiquillo? ¡Ahora estaría yo disfrutando de un bocado exquisito!

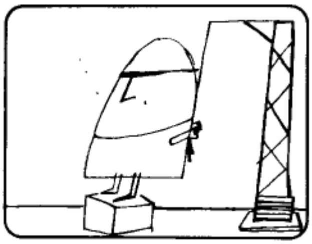
El cocodrilo tiene un dilema: tiene que comerse al niño y tiene que devolverlo, las dos cosas al mismo tiempo.

La madre fue muy lista. Supongamos que hubiera contestado: «Vas a devolverme a mi hijito». En tal caso el cocodrilo hubiera podido devolverlo o comérselo, a su capricho, sin contradecirse. Si lo devolviera, la madre habría contestado correctamente, y el cocodrilo, cumplido su palabra. Por otra parte, de ser lo bastante malvado, puede comerse al nene. De esta forma, lo afirmado por la madre sería falso, liberando al cocodrilo de la obligación de soltar al niño.

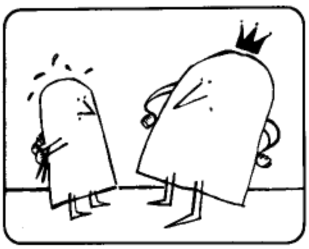
# La paradoja del Quijote



En la novela *Don Quijote* se nos cuenta de una isla donde regía una curiosa ley. Un guardia pregunta a cada visitante:
**Guardia:** ¿Para qué viene usted aquí?
Si el viajero contesta con verdad todo va bien. Pero si dice mentira es ahorcado allí mismo.



Un día, un visitante contestó:
**Visitante:** ¡He venido aquí para ser ahorcado!
Los guardias quedaron tan perplejos como el cocodrilo. Si no ahorcasen al sujeto, éste habría mentido, y por ello debería ser colgado. Pero si lo ahorcan habrá dicho la verdad, y no debería ser ajusticiado.



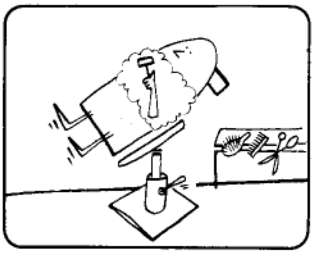
Para decidir la cuestión, el visitante fue llevado ante el gobernador de la isla. Tras pensarlo largamente, el gobernador tomó una resolución:
**Gobernador:** Decida lo que decida tendré que vulnerar la ley. Así pues, seré clemente y dejaré libre a este hombre.

La paradoja del ahorcamiento puede verse en el capítulo LI del libro segundo del *Quijote.* Sancho Panza, escudero y servidor de don Quijote, ha sido nombrado gobernador de una «ínsula», y ha jurado respetar la curiosa ley del lugar acerca de los visitantes. Cuando el hombre es llevado ante él, falla el caso con clemencia y buen sentido.

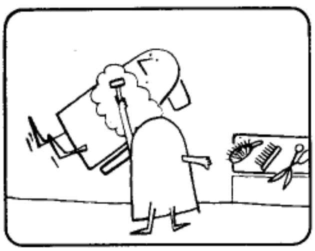
La paradoja, aunque similar a la del cocodrilo, queda oscurecida por la ambigüedad de la declaración del visitante. En efecto, ¿está manifestando su intención, o está hablando de un suceso futuro? En el primer sentido, el hombre pudo haber dicho la verdad respecto de su intención, y las autoridades podrían no ahorcarlo sin contradecir la ley. Por otra parte, tomada su afirmación en el segundo sentido, cualquier cosa que hagan las autoridades será una contradicción.

# La paradoja del barbero


La famosa paradoja del barbero fue propuesta por Bertrand Russell. Si en la luna de la peluquería vemos el cartel de la viñeta, ¿quién afeita al barbero?



De afeitarse él a sí mismo formaría parte del conjunto de hombres que se afeitan a sí mismos. Su anuncio dice que él *nunca* afeita a miembros de tal conjunto. Por tanto, el barbero *no puede* afeitarse a sí mismo.



Si otra persona afeita al fígaro, él no se afeita a sí mismo. Pero su anuncio dice que él *sí* afeita *a todos* estos hombres. Por consiguiente, no es otra persona quien rasura al barbero. ¡Parece como si *nadie* pudiera afeitarle!

Bertrand Russell propuso su paradoja del barbero para divulgar y destacar una famosa paradoja sobre conjuntos que él había descubierto. Ciertas construcciones parecen conducir a conjuntos que tendrían que ser miembros de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todas las cosas que no son manzanas no puede ser una manzana, y por tanto tiene que ser elemento de sí mismo. Fijémonos en el conjunto de todos los conjuntos que *no* son elementos de sí mismos. ¿Es tal conjunto elemento de sí mismo? Cualquiera que sea la respuesta, es seguro que nos contradiremos.

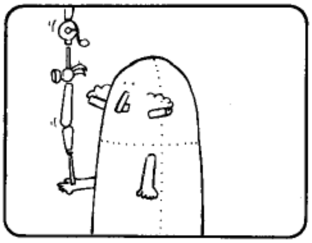
Esta paradoja suscitó uno de los momentos más cruciales y dramáticos de la lógica. Un eminente lógico alemán, Gottlob Frege, acababa de concluir el segundo volumen de la obra a que sin interrupción había dedicado su vida, *Los fundamentos de la aritmética*, donde creía haber desarrollado una teoría de conjuntos coherente, capaz de ser cimiento de la matemática toda. En 1902, estando el volumen en prensa, Frege recibió una carta de Russell dándole cuenta de la paradoja. La teoría de conjuntos de Frege permitía la formación del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Como claramente exponía la carta de Russell, este conjunto en apariencia bien formado es contradictorio. Frege tuvo el tiempo justo de insertar un breve apéndice que comienza: «Difícilmente puede un científico tener que afrontar nada más indeseable que ver hundirse los cimientos justamente cuando da fin a su obra. Tal es la situación en que me encuentro tras la carta de Mr. Bertrand Russell...».

El giro que Frege da aquí al término *indeseable* es —se ha dicho— el mayor eufemismo de la historia de la matemática.

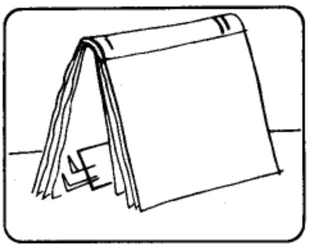
Exploraremos algunas paradojas más de este tipo, y mencionaremos algunos procedimientos para eliminarlas. Una de las posibles salidas del dilema anterior consiste en declarar que la descripción «el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos» no denota un conjunto. Una solución más radical, y de mayores consecuencias, consistiría en obstinarse en que la teoría de conjuntos no consiente formar conjuntos que sean elementos de sí mismos.

# Astrólogo, robot, catálogo

Un astrólogo hace predicciones para todos los astrólogos, y solamente aquellos astrólogos, que no hacen predicciones para sí mismos. ¿Quién le hará el pronóstico astrológico al nuestro?



¿Y qué pasará con el robot encargado de reparar a todos los robots que no se autorreparan? ¿Quién hará las reparaciones de tal robot?



¿Y con el catálogo que recoge la relación de todos los catálogos que no se mencionan a sí mismos? ¿Qué catálogo podrá dar cuenta de ese catálogo?

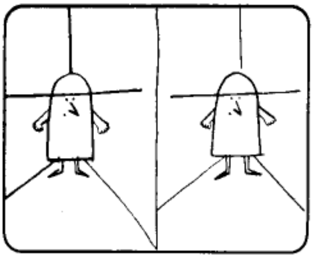
Todas las paradojas anteriores son variantes de la paradoja de Russell. En cada caso, para formar cierto conjunto $S$, la definición que se propone es que el conjunto $S$ habrá de contener a todos los objetos, y solamente a aquellos objetos, que no se encuentran en cierta relación $R$ con respecto a sí mismos. En cuanto nos preguntamos si $S$ es o no es miembro de sí mismo, queda manifiesta la paradoja. He aquí tres clásicas variaciones sobre el mismo tema.

1. La paradoja de Grelling, así llamada en recuerdo de su descubridor, el matemático alemán Kurt Grelling. Dividamos la colección de todos los adjetivos en dos conjuntos, según sean autodescriptivos o no-autodescriptivos. Palabras como *español, corto* y *polisílabo* son autodescriptivas. Otras, como *alemán, monosílabo* y *largo* son no-autodescriptivas. Preguntamos ahora: ¿a qué clase pertenece el adjetivo *no-autodescriptivo*?

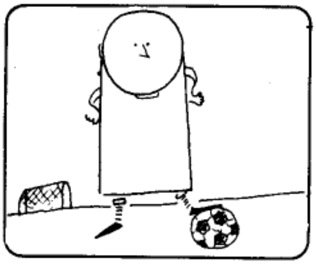
2. La paradoja de Berry recibe su nombre de G. G. Berry, un bibliotecario de la Universidad de Oxford, quien se la comunicó a Russell. La paradoja se plantea al considerar el «mínimo entero que no puede ser descrito con menos de trece palabras». Como esta expresión consta de 12 palabras, ¿a cuál de estos conjuntos pertenece el entero descrito por ella: al conjunto de enteros expresables en español con menos de 13 palabras, o al conjunto de enteros que tan sólo podrán describirse usando 13 palabras o más? Cada una de estas alternativas conduce a contradicción.

3. El filósofo Max Black expresó la paradoja de Berry en manera análoga a la siguiente versión: En este libro son mencionados diversos números enteros. Fije su atención en el mínimo entero que no haya sido mencionado en este libro de ninguna forma. ¿Existe semejante número?

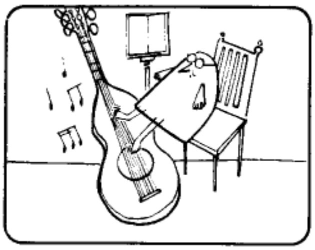
# Vulgar frente a interesante



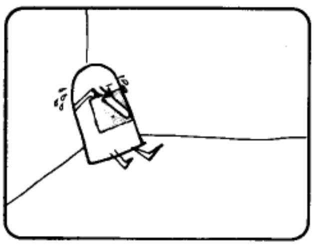
Hay personas interesantes. Otras no destacan por nada especial.



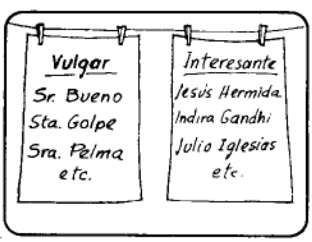
**Un futbolista:** Yo pertenezco a la selección nacional.



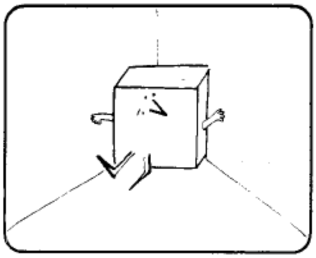
**Un músico:** Yo sé tocar la guitarra con los dedos de los pies.



**Señor Corriente:** Yo no sé hacer nada que valga la pena.




Tenemos aquí las listas de todas las personas corrientes y de todas las personas interesantes. En algún lugar de la lista de personas corrientes se encuentra la persona más anodina del mundo.



Pero eso justamente la hace muy interesante. Tendremos entonces que trasladarla a la otra lista.

**Señor Supercorriente:** Muy agradecido.

Ahora habrá otra persona que sea la más común de todas, convirtiéndose así en interesante. Al cabo, todo el mundo acabará por ser interesante, ¿no es verdad?

Esta divertida paradoja es una variante de la «demostración» de que todo número entero positivo es interesante. Su inventor, Edwin F. Bechenbach, la dio a conocer en una nota publicada por *The American Mathematical Monthly* (vol. 52, p. 211, abril de 1945), titulada «Interesting Integers».

¿Es la demostración válida o falaz? Al trasladar la segunda persona a la lista de interesantes, ¿volverá a ser nuevamente la primera una persona vulgar, o continuará siendo interesante? ¿Puede decirse que toda persona es interesante en algún sentido, porque es la más común de ciertos conjuntos especificados, al igual que todo entero es el mínimo entero de conjuntos especificados? Si todas las personas (o todos los números) son interesantes, ¿queda desprovisto de sentido el adjetivo *interesante*?

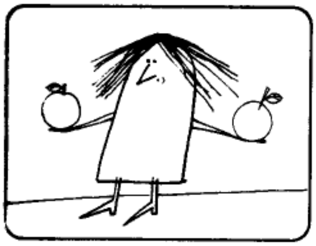
# Semántica y teoría de conjuntos


Las paradojas acerca del valor de verdad se llaman paradojas *semánticas*. Las relativas a conjuntos de cosas se llaman paradojas *conjuntistas*. Estos dos tipos están fuertemente emparentados.

La correspondencia entre paradojas semánticas (producidas por la asignación de valores de verdad) y las paradojas de la teoría de conjuntos resulta de que todo enunciado al que se asignen valores de verdad puede reconvertirse en un enunciado acerca de conjuntos, y recíprocamente. Por ejemplo, la frase «Todas las manzanas son rojas» puede transcribirse en «el conjunto de todas las manzanas es subconjunto del conjunto de todas las cosas rojas», que a su vez podemos reformular en lenguaje de valores de verdad, dando el enunciado semántico: «Si es verdad que *x* es una manzana, entonces es verdad que *x* es roja».

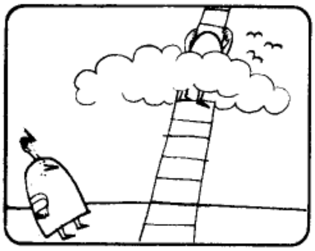
Fijémonos en la declaración de la paradoja del mentiroso: «Este enunciado es falso». Podemos traducirlo así a lenguaje conjuntista: «Esta aserción es elemento del conjunto de todas las aserciones falsas». Si este enunciado pertenece realmente al conjunto de todas las aserciones falsas, entonces lo que declara es verdadero, y, por tanto, no puede pertenecer al conjunto de los enunciados falsos. Y si el enunciado no pertenece al conjunto de los enunciados falsos entonces declara algo falso, y por tanto sí debe pertenecer al conjunto de enunciados falsos. Cada paradoja semántica tiene su homóloga en teoría de conjuntos, y cada paradoja conjuntista, su correspondiente versión semántica.

# Metalenguajes



Las paradojas semánticas se resuelven introduciendo metalenguajes. Los enunciados relativos al mundo, tales como «las manzanas son rojas» o «las manzanas son azules», se formulan en un *lenguaje objeto*. Los enunciados relativos a valores de verdad tienen que hacerse en un *metalenguaje*.


En este ejemplo no puede haber paradoja, porque la frase *A*, que se supone escrita en metalenguaje, habla del valor de verdad de la frase *B*, que está escrita en lenguaje objeto.



¿Cómo hablar de valores de verdad para enunciados de un metalenguaje? Es preciso utilizar un metalenguaje de nivel superior. Cada peldaño de esta escala infinita es metalenguaje del peldaño inferior inmediato, y es lenguaje objeto del peldaño situado sobre él.

La noción de metalenguaje fue ideada y desarrollada por el matemático polaco Alfred Tarski. En el peldaño más bajo se encuentran los enunciados relativos a objetos, tales como «Marte tiene dos lunas». En este lenguaje no pueden aparecer calificativos como *verdadero* o *falso*. Para hablar de la veracidad o falsedad de frases formuladas en este lenguaje tenemos que emplear un metalenguaje, situado en el peldaño inmediatamente superior de la escala. El metalenguaje engloba la totalidad del lenguaje objeto, pero es más «rico», porque permite referirse a los valores de verdad de los enunciados del lenguaje objeto. Por citar uno de los ejemplos favoritos de Tarski, «La nieve es blanca» es un enunciado del lenguaje objeto. En cambio, «El enunciado 'La nieve es blanca' es verdadero» es una proposición de un metalenguaje.

¿Puede hablarse de veracidad o falsedad de enunciados de un metalenguaje? Sí, pero sólo ascendiendo hasta el tercer peldaño de la escala, y hablando en un metalenguaje aún más alto, capaz de aludir a todos los situados bajo él.

Cada peldaño de la escala es un lenguaje objeto del peldaño situado inmediatamente sobre él. Cada peldaño, a excepción del más bajo, es metalenguaje del inmediatamente inferior. La escala continúa hacia arriba tanto cuanto deseemos.

Ejemplos de enunciados correspondientes a los cuatro primeros peldaños son:

A. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 180 grados.

B. El enunciado *A* es verdadero.

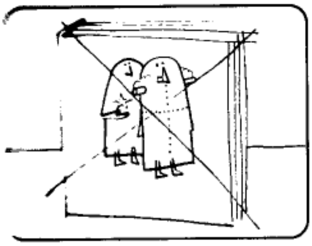
C. El enunciado *B* es verdadero.

D. El enunciado *C* es verdadero.

El lenguaje de nivel *A* enuncia sencillamente teoremas relativos a objetos geométricos. Un manual de geometría que contenga demostraciones de los teoremas está escrito en un metalenguaje de nivel *B*. Los libros que tratan de teoría de demostración están escritos en metalenguaje de nivel *C*. Afortunadamente, en matemáticas, raras veces es necesario ir más allá del nivel *C*.

En un artículo de Lewis Carroll, «What the Tortoise Said to Achilles», se discute con mucha gracia el carácter teóricamente infinito de la escala de metalenguajes. Puede verse una reimpresión de este artículo en *The Magic of Lewis Carroll,* por John Fisher, y también en *Gödel, Escher, Bach,* por Douglas Hofstadter.

# Teoría de tipos



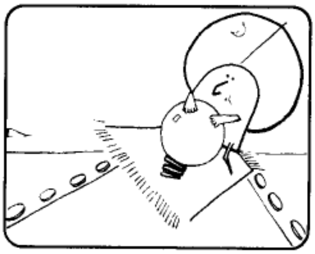
Para depurar de paradojas la teoría de conjuntos se utiliza una jerarquía infinita parecida. Ningún conjunto puede ser elemento de sí mismo, ni de ningún conjunto de tipo inferior. Los barberos, astrólogos, robots y catálogos de antes, no existen, sencillamente.

La escala de metalenguajes de Tarski tiene su homóloga en teoría de conjuntos, a saber, la que Bertrand Russell llamó originalmente «teoría de tipos». Tecnicismos aparte, en esta teoría los conjuntos van ordenándose jerárquicamente por tipos, de tal manera que no es permisible decir que un conjunto es, o no es, elemento de sí mismo. Se consigue así prohibir la formación de conjuntos contradictorios; sencillamente, es imposible definirlos dentro de la teoría. Su equivalente semántico sería declarar que la paradoja del mentiroso, sencillamente «no es proposición», porque vulnera las reglas de construcción de enunciados legítimos.

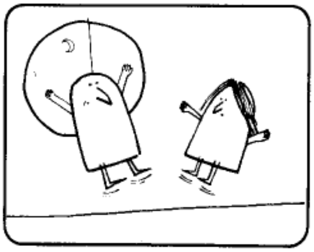
Bertrand Russell pasó muchos años trabajando en teoría de tipos. En su libro *My Philosophical Development*, Russel escribe:

> Una vez terminado *Principia Mathematica*, llegué serenamente a la determinación de intentar decididamente resolver las paradojas. Era para mí casi un reto personal, al que estaba dispuesto a dedicar, si necesario fuera, el resto de mi vida con tal de responderlas. Mas hubo dos razones que me lo hicieron insoportablemente desagradable. En primer lugar, todo el problema me daba la impresión de ser trivial... En segundo, que, probara por donde probara, no conseguía avanzar. A lo largo de 1903 y 1904, mi trabajo estuvo casi totalmente consagrado a este tema, pero sin vestigio de éxito alguno.

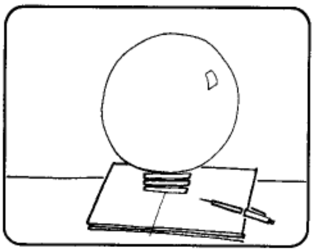
# La predicción del swami



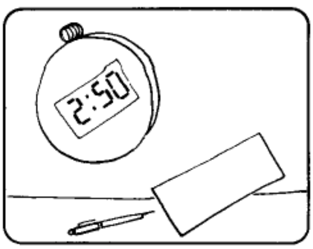
¿Podrá un *swami* ver el futuro a través de su bola de cristal? La predicción del futuro puede llevarnos a un nuevo y curioso tipo de paradoja lógica.



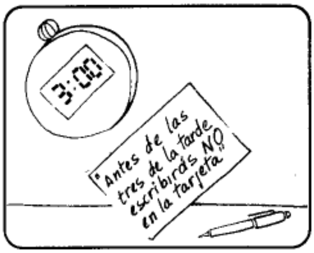
Un día, el *swami* tuvo una discusión con su hija Sue, una adolescente.
**Sue:** Mira, papá, sólo eres un engañabobos. La verdad es que no puedes predecir el futuro.
**Swami:** ¡Claro que puedo!
**Sue:** ¡Qué vas a poder! ¡Yo te lo demostraré!



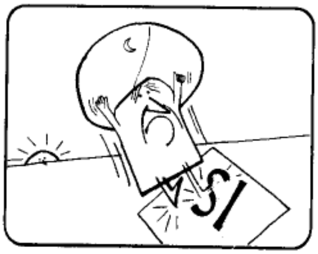
Sue anotó algo en un papel, lo dobló, y lo pisó con la bola.
**Sue:** Ahí tienes descrito un acontecimiento que podrá suceder o no suceder antes de las tres de esta tarde. Si eres capaz de predecir si ocurrirá, no tendrás que comprarme el coche que me prometiste si aprobaba todo.




**Sue:** Aquí tienes una ficha en blanco. Si crees que el acontecimiento va a ocurrir, escribe SÍ. Si crees que no puede suceder, escribe NO. Si tu predicción es equivocada, ¿estarás de acuerdo en comprarme el coche ahora, y no a fin de curso?
**Swami:** De acuerdo, Sue. Trato hecho.




El *swami* escribió algo en la ficha. A las tres en punto, Sue sacó el papel de debajo de la bola, y leyó en voz alta: «Antes de las tres de la tarde escribirás NO en la tarjeta».



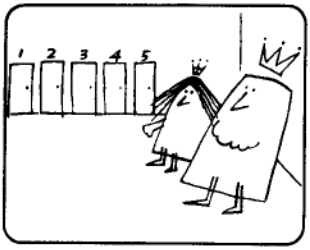

**Swami:** ¡Eso es trampa! Yo escribí SÍ y me equivoqué. Pero si hubiera escrito NO también habría perdido. No puedo acertar de ninguna forma.
**Sue:** Papi, me gustaría un deportivo rojo. ¡Y con asientos anatómicos!

En su versión original, en esta paradoja se tenía un ordenador que sólo puede responder «sí» o «no». Se le pide al ordenador que prediga si su próxima respuesta será «no». Evidentemente, es imposible que la predicción sea lógicamente correcta. En su forma más concisa, la paradoja se plantea al preguntarle a otra persona: «¿Será 'no' la próxima palabra que pronuncia usted? Por favor, responda diciendo 'sí' o 'no'».

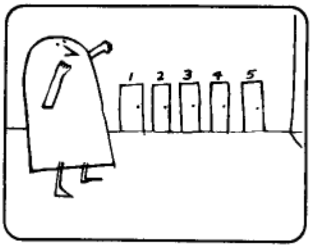
¿Es esta paradoja igual a la del mentiroso? Cuando la persona responde, ¿qué significa «no»? Como es natural, significa «Es falso que yo esté diciendo ahora 'Es falso'». Por tanto, la predicción del *swami* es apenas otra versión disfrazada de la paradoja del mentiroso.

Observemos que al igual que la frase «Esta frase es verdadera» no conduce a paradoja, tampoco la pregunta «¿Será 'sí' la próxima palabra que usted diga?» conduce a paradoja. La persona puede contestar indiferentemente «sí» o «no» sin contradicción, lo mismo que, en la paradoja del cocodrilo, éste puede comerse al niño o devolverlo, sin contradicción, si la madre dice: «Tú me devolverás a mi hijito».

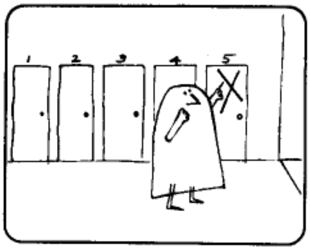
# Tigre sorpresa



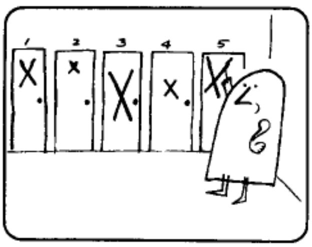
**La princesa:** Padre, tú eres el rey. ¿Podré casarme con Miguel?
**El rey:** Querida, podrás si es capaz de matar al tigre encerrado tras una de estas cinco puertas. Miguel tiene que ir abriéndolas una tras otra, comenzando por la número 1. Y no podrá saber en qué cuarto se encuentra el tigre hasta que abra la puerta. Será un tigre *sorpresa*.



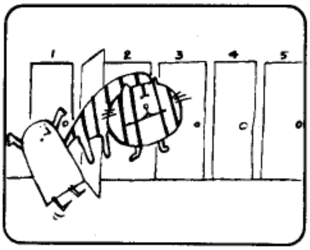
Cuando Miguel vio las puertas pensó:
**Miguel:** Si llegase a abrir las cuatro primeras habitaciones y las encontrase vacías, yo *sabría* que el tigre me espera tras la quinta puerta. Pero el rey dijo que yo no podría saberlo por anticipado. Luego el tigre no podrá estar tras la quinta puerta.



La quinta está descartada, así que el tigre debe estar en alguna de las otras cuatro. Pero ¿qué sucedería si las tres primeras estuvieran vacías? Que el tigre debería encontrarse en la cuarta. Pero entonces no habría sorpresa. Así que también la número 4 está eliminada.



Con igual razonamiento, Miguel demostró que el tigre no podría encontrarse tras la puerta número 3, ni tras la número 2, ni en la número 1. Miguel saltaba de alegría.
**Miguel:** ¡Claro! ¡No hay tigres en *ningún* cuarto! Si lo hubiera en alguno no sería sorpresa, como aseguró el rey. Y el rey *siempre* cumple su palabra.



Habiendo demostrado que no había tigre alguno, Miguel fue abriendo las puertas osadamente. Para sorpresa suya, el tigre le saltó encima al abrir la número 2. Fue completamente inesperado. El rey había cumplido su palabra. Hasta hoy, los lógicos no consiguen ponerse de acuerdo acerca de en qué falla el razonamiento de Miguel.

La paradoja del tigre ha sido narrada como cuento de otras muchas formas. De origen desconocido, en su primera versión, de mediados de los cuarenta, se trataba de un profesor que anunciaba que un día de la semana siguiente haría un «examen sorpresa». El profesor aseguraba a sus alumnos que nadie podría deducir la fecha del examen hasta el momento de celebrarse. Un alumno «demostraba» entonces que tal día no podría ser el último de la semana, ni el penúltimo, ni tampoco el antepenúltimo, y así con los demás. El profesor pudo, sin embargo, cumplir su palabra, proponiendo el examen el miércoles, pongamos por caso.

Cuando en 1953 el filósofo W. V. Quine, de la Universidad de Harvard, dedicó un artículo a esta paradoja, la narró contando el caso del alcaide de una prisión que quería dar a un condenado una ejecución inesperada. Puede verse un análisis de la paradoja, más una bibliografía de 23 referencias, en el primer capítulo de un libro mío, *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions.*

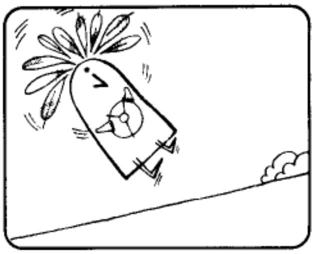
Casi todo el mundo concede que el primer paso del razonamiento de Miguel es correcto, es decir, que el tigre no puede estar en la última habitación. Pero una vez admitida como sólida esta conclusión, el resto del razonamiento parece inevitable. Pues si el tigre no puede estar en la última habitación, un razonamiento idéntico obliga a descartar la penúltima, e, igualmente, las demás.

Sin embargo, incluso el primer paso del razonamiento es falaz. Supongamos que Miguel haya abierto todas las puertas salvo la última. ¿Puede él deducir válidamente que el tigre no está en esta habitación? ¡No! De hacerlo, podría ser que al abrir la puerta se encontrase al tigre, ¡que sería ahora un tigre inesperado! Y más aún, ¡toda la paradoja subsiste de haber tan sólo una habitación!

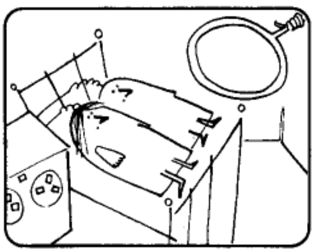
Imaginemos que nuestra amiga Véritas, a quien tenemos por encarnación de la verdad, nos diera una caja, añadiendo: «Si la abres te encontrarás inesperadamente un huevo». ¿Podremos deducir algo acerca de la existencia o inexistencia de un huevo dentro de la caja? Si Véritas está diciendo la verdad, la caja tendrá que contener un huevo, pero puesto que esperamos encontrarlo, resulta que la afirmación de Véritas es falsa. Por otra parte, si esta contradicción nos hiciera suponer que la caja no puede contener un huevo (en cuyo caso Véritas ha dicho una mentira) y al abrirla encontramos inesperadamente un huevo, resulta que Véritas ha dicho la verdad.

Los lógicos convienen en que si bien el rey sabe que podrá cumplir su palabra, Miguel no tiene forma de saber que es así. Por consiguiente, no hay manera de que pueda sacar conclusiones válidas sobre la ausencia del tigre en ninguna habitación, ni siquiera en la última.

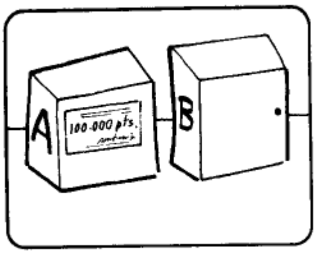
# La paradoja de Newcomb



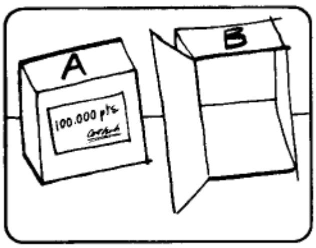
Un buen día, Omega, ser ultrahumano extraterrestre, tomó tierra en nuestro planeta.



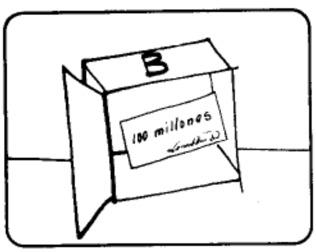
Omega disponía de equipos muy perfectos para estudiar la mente humana. Gracias a ellos era capaz de predecir con mucha exactitud cómo decidiría una persona cualquiera frente a una disyuntiva.



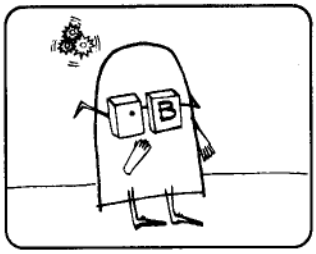

Omega sometió a prueba a muchas personas con ayuda de dos grandes cajas. La caja *A* era transparente, y contenía 100 000 pesetas. La caja *B* era opaca, y podía estar, bien vacía, bien ocupada con 100 millones.



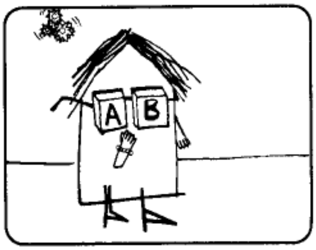

Omega le decía a cada uno de sus sujetos:
**Omega:** Tiene usted dos opciones. Una, tomar ambas cajas y quedarse con su contenido. Ahora bien, de haber juzgado yo que eso es lo que usted piensa hacer, habré dejado vacía la caja *B*. Sólo ganará usted cien mil pesetas.



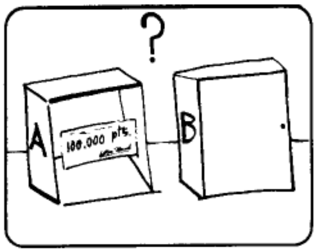

**Omega:** La segunda es tomar solamente la caja *B*. Si yo he juzgado que eso es lo que usted va a hacer, habré dejado en ella cien millones. Puede usted quedárselos.




Este señor ha decidido quedarse solamente la caja *B*, razonando así:
**Señor:** He visto a Om realizar cientos de experimentos. En todos, su predicción fue correcta. Cuantos arramblaron con las dos cajas ganaron solamente cien mil pesetas. Así pues, me llevaré la caja *B* y me haré millonario.




Esta mujer ha decidido quedarse ambas cajas. He aquí su razonamiento:
**Señora:** Om ha hecho ya su predicción, y se ha ido. La caja *B* no va a cambiar. Si está vacía seguirá vacía. Y si está llena, así va a seguir. Por tanto, me llevaré las dos y me quedaré todo lo que tengan.




A juicio del lector, ¿quién tomó mejor decisión? No es posible que ambos razonamientos sean correctos. ¿Cuál, pues, es erróneo? *¿Por qué* es erróneo? Esta paradoja es nueva, y los especialistas no saben aún cómo resolverla exactamente.

Ésta es la última y más aturullante de las muchas paradojas de predicción que están hoy analizando los filósofos. Su inventor fue un físico, William Newcomb, y por ello es conocida por su nombre. El primero en publicarla y analizarla fue Robert Nozick, un filósofo de Harvard. Su análisis descansa en buena medida sobre teorías matemáticas llamadas «teoría de juegos» y «teoría de la decisión».

La decisión del hombre, llevarse solamente la caja *B*, es fácil de comprender. Para ver más claro el razonamiento de la mujer, recordemos que Omega se ha ido ya. La caja *B* está, o bien llena, o bien vacía, y no va a cambiar. Si está llena, seguirá estando llena. Y si está vacía, así seguirá. Examinemos cada caso.

Si *B* estuviera llena, y la mujer se llevase solamente la caja *B*, conseguiría nada más 100 millones de pesetas. En cambio, llevándose las dos, lograría una ganancia de 100 millones más 100 000 pesetas.

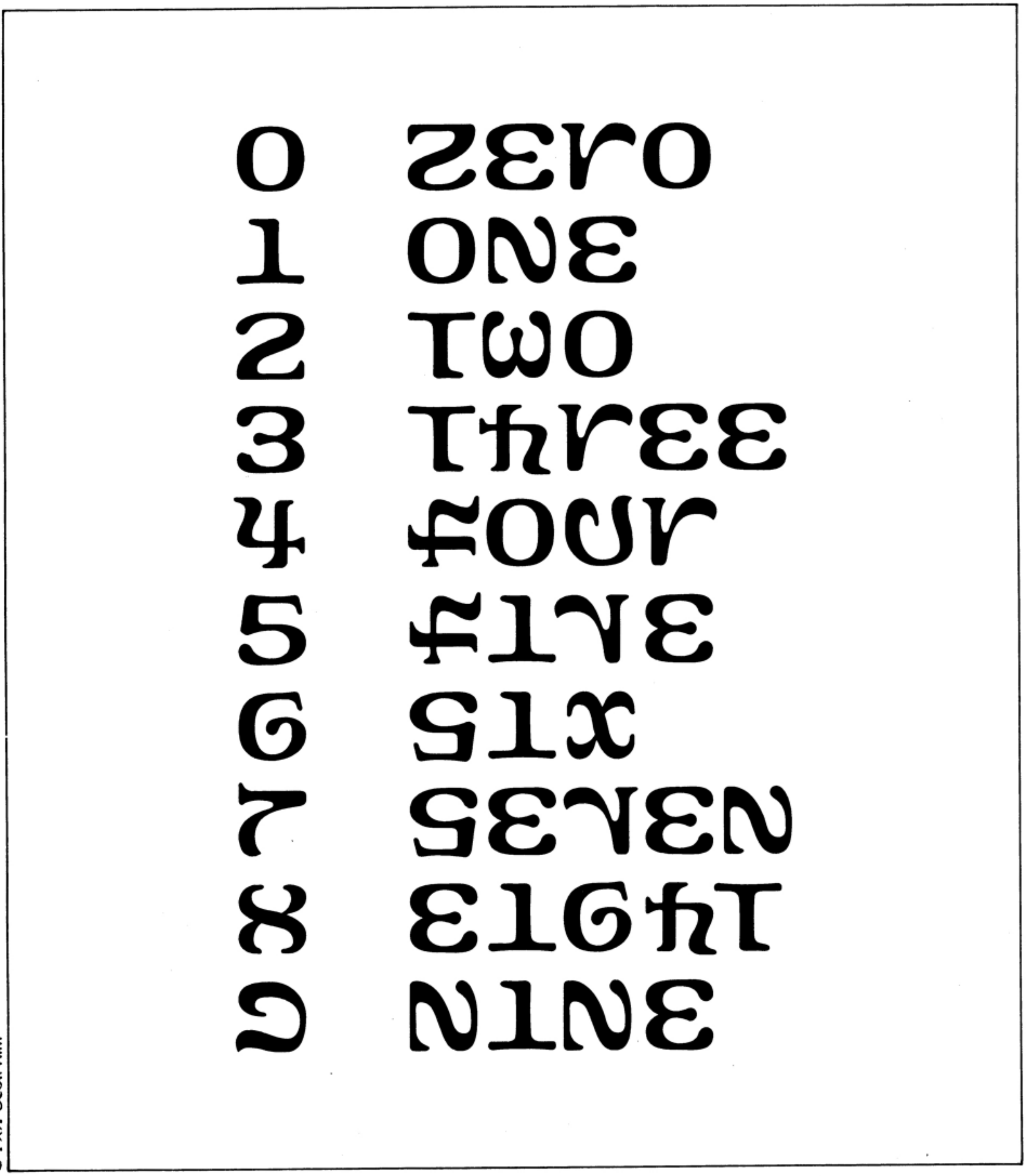
Si *B* estuviera vacía y solamente se llevase esta caja, la mujer no ganaría nada. Llevándose ambas cajas logrará al menos 100 000 pesetas.

En ambos casos la mujer gana 100 000 pesetas más si se lleva ambas cajas.

La paradoja viene a ser a modo de papel de tornasol que indica si una persona está convencida de que existe la conducta espontánea, nunca previsible del todo, o está convencida de lo contrario. Enfrentada a la paradoja, las reacciones de la gente se dividen casi por igual entre «espontaneístas», partidarios de llevarse ambas cajas, y «deterministas», partidarios de llevarse solamente la caja *B*. Otros arguyen que las condiciones exigidas para plantear la paradoja son contradictorias, independientemente de si el futuro está o no completamente determinado.

Puede verse una discusión de estas contradictorias opiniones en mi sección de «Juegos matemáticos» de *Scientific American*, julio de 1973, y en la misma sección, en marzo de 1974, donde cedo la pluma al doctor Nozick.

# 2 Números





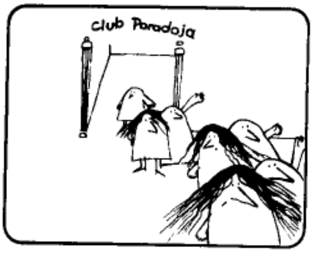

**Paradojas sobre números enteros, sobre fracciones y sobre una escalera infinita**

En la historia de las matemáticas han pesado fuertemente las paradojas aritméticas —paradojas relativas a números— que han sorprendido y confundido a los matemáticos por contrarias a la intuición. Tenemos ejemplos clásicos en los descubrimientos de:

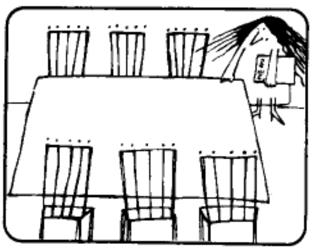
1. Los números irracionales: $\sqrt{2}$, $\pi$, $e$ y una infinidad incontable de otras más.
2. Los números imaginarios: $\sqrt{-1}$ y el sistema de números complejos, del que los imaginarios forman parte.
3. Números que, como los cuaternarios, infringen la ley conmutativa de la multiplicación: $a \times b = b \times a$.
4. Números que, como los de Cayley, vulneran la ley asociativa de la multiplicación: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
5. Los números transfinitos (o infinitos), como los números *álef* descubiertos por Cantor, que abrieron las puertas de lo que el gran matemático alemán David Hilbert llamó «nuevo paraíso de los matemáticos».

Exceptuadas las tres últimas, que contienen números irracionales y transfinitos, todas las paradojas de este capítulo se refieren a números racionales. Han sido elegidas no sólo para entretener al lector, sino también para invitarle a explorar por sí mismo algunas de las más importantes regiones de la teoría de números, hacia las que conducen. Por ejemplo, «El ubicuo número 9» nos lleva hacia la teoría de congruencias, llamada por algunos «aritmética finita». «Un testamento curioso», hacia el análisis diofántico. Muchas de las paradojas son punto de partida de soluciones algebraicas generales, que servirán para pulir sus buenas artes de algebrista. El capítulo se cierra echando una ojeada sobre el tentador paraíso cantoriano, donde prosigue hoy una investigación apasionante.

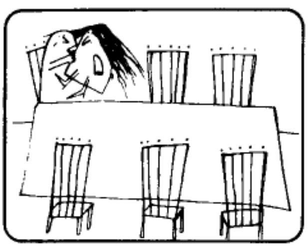
# El misterio de las seis sillas



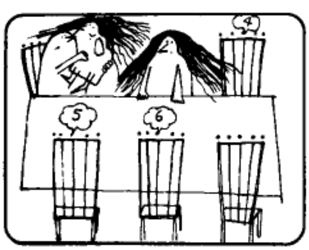

Seis estudiantes reservaron sitio en una discoteca de moda. A última hora se sumó al grupo una séptima amiga.



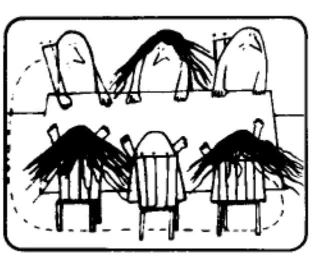
**Acomodadora:** ¡Gracias a Dios que han llegado esos chicos! ¡Lo que me ha costado guardarles el sitio! Pero... ¡si son *siete*!



**Acomodadora:** De todas formas, no hay problema. Haré sentarse al primero, y le diré a su chica que se siente unos momentos en las rodillas de su pareja.



**Acomodadora:** Ahora la tercera estudiante se sienta al lado de los dos primeros, y el cuarto muchacho, junto a ella. Después la quinta chica se pondrá del otro lado, frente a la primera pareja, con el sexto chico a su costado. Así tendré acomodo para seis, ¡y *todavía* me queda una silla libre!

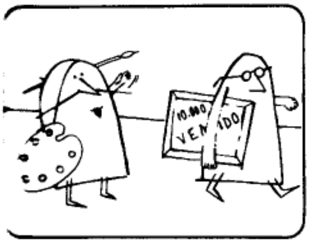


**Acomodadora:** Así que ahora todo lo que he de hacer es decirle a la séptima que baje del regazo de su amigo y vaya a ocupar la silla libre.
¿No es maravilla? ¡Siete personas sentadas en seis asientos, una en cada uno!

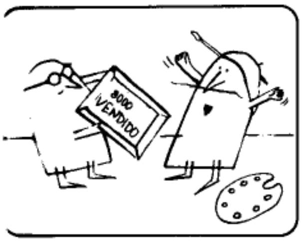
No debería haber dificultad en localizar la falacia de esta variante de la vieja paradoja de la patrona que consiguió dar habitación a 21 personas con sólo 20 cuartos. La paradoja se desvanece tan pronto caemos en la cuenta de que la chica temporalmente sentada en el regazo de su pareja no es la número 7, sino la número 2. Cuando por fin el sexto estudiante está acomodado, la encargada del local se ha olvidado del número que hacía la chica y la cuenta como número 7. El verdadero número 7 no llega a quedar a la mesa. Sencillamente, la número 2 se baja del regazo de su amigo y pasa a ocupar la sexta silla.

La paradoja parece vulnerar el teorema que establece que ningún conjunto finito podrá quedar en correspondencia biunívoca (o biyectiva, con terminología moderna) con otros conjuntos que consten de distinto número de elementos. Volveremos a este teorema en la paradoja del «Hotel del Infinito». El «Misterio de las seis sillas» ilustra de forma divertida la esencial diferencia entre conjuntos finitos y conjuntos infinitos.

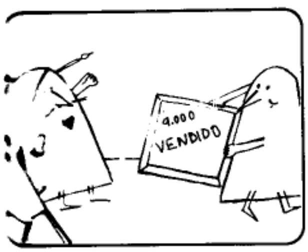
# Las difíciles ganancias



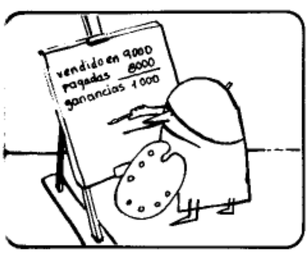
Ginés le vendió a Jorge uno de sus cuadros, por 10 000 pesetas.
**Ginés:** Te llevas una ganga, Jorge; de veras. Dentro de diez años ese cuadro valdrá diez veces más.




Jorge colgó el cuadro en su casa. Al cabo llegó a la conclusión de que no le gustaba, y se lo revendió a Ginés por 8 000 pesetas.

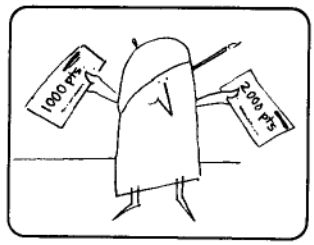



Una semana más tarde, Ginés le colocó el cuadro a Gabriel, esta vez por 9000 pesetas.
**Ginés:** Has tenido una suerte enorme, Gabriel. ¡Dentro de diez años ese cuadro valdrá *cien* veces más de lo que has pagado!




El pintor estaba contento.
**Ginés:** Empecé vendiendo el cuadro por 10 000 pesetas. Más o menos, eso cubre gastos y trabajo, así que salí bien. Después lo compré por 8000 y lo revendí por 9000, así que llevo ganadas 1000 pesetas.


Pero los cálculos de Jorge son distintos.
**Jorge:** ¡Vaya! El pintor vendió el cuadro por 10 000 pesetas y lo recompró por 8000. Está claro que ganó 2000 pesetas. Podemos prescindir de la reventa porque el valor real del cuadro debe de ser de unas 9000 pesetas.




Gabriel considera los razonamientos de ambos.
**Gabriel:** El pintor ganó 2000 pesetas al vender el cuadro por 10 000 y recomprarlo por 8000. Luego volvió a ganar otras 1000, pues pagó 8000 por él y me lo revendió por 9000. Su ganancia total ha sido de 3000 pesetas. ¿Cuál ha sido su verdadero beneficio?: ¿1000 pesetas?, ¿2000?, ¿3000?

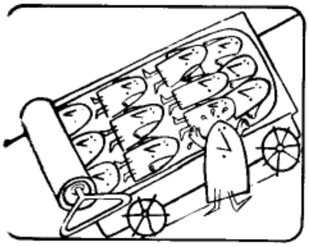
Este enredoso problemita provoca siempre animadas discusiones. Podemos tardar algún tiempo en darnos cuenta de que la dificultad estriba en que el problema no está «bien definido», y que cualquiera de las respuestas es tan buena (o tan mala) como las demás.

Es imposible decir cuál es el «verdadero» beneficio del pintor, porque el enunciado no aclara cuál fue el «costo» inicial del cuadro. Dejemos de lado el valor del tiempo del artista, y pongamos que Ginés pagase en total 2000 pesetas por los materiales: marco, lienzo, colores, etc. Al cabo de los tres trueques el pintor ha obtenido 11 000 pesetas. Definiendo como ganancia final la diferencia entre el costo de los materiales y la cantidad de dinero que finalmente consiguió, el beneficio sería de 9000 pesetas.

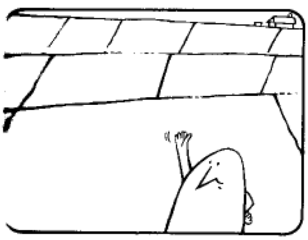
Como ignoramos el costo de los materiales (sólo les hemos supuesto un valor), no hay forma de calcular el verdadero beneficio. Este problema *parece* ser un problemita aritmético, pero, en realidad, lo que plantea es qué debe entenderse por beneficio o ganancia. Esta paradoja recuerda la vieja cuestión de si al caer un árbol en el bosque hace ruido o no, según que haya o no oídos que lo perciban. La respuesta puede ser afirmativa o negativa; depende de lo que se entienda por *ruido*.

En las dos primeras paradojas del capítulo 3, «Geometría», tenemos otros dos entretenidos ejemplos de problemas que, fundamentalmente, son debates acerca de a qué aluden las palabras.

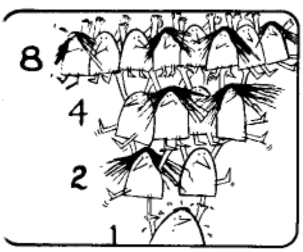
# La implosión demográfica



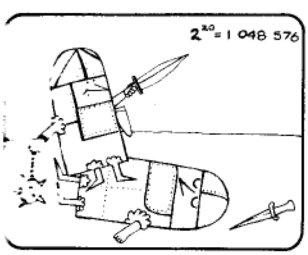
En nuestros días mucho se oye hablar del rápido crecimiento de la población mundial.



El señor Linasión, presidente de la Liga de Natalidad a Presión, no está de acuerdo. A su juicio, la población mundial está *decreciendo*, y pronto todos tendremos más *espacio* del que necesitemos. He aquí su razonamiento.




**Señor Linasión:** Cada una de las personas vivas tuvo dos padres. Cada uno de sus padres tuvo a su vez dos padres. Tenemos así cuatro abuelos. Y cada abuelo tuvo dos padres, lo que hace ocho bisabuelos. El número de ascendientes se *duplica* por cada generación que se retrocede.




**Señor Linasión:** Retrocediendo 20 generaciones, hasta la Edad Media, cada uno de nosotros tendría ¡1 048 576 antepasados! Y este razonamiento vale para toda persona hoy en vida. Así que la población medieval tuvo que ser ¡un millón de veces mayor que hoy!

El señor Linasión tiene que estar equivocado, pero ¿dónde está el fallo?

El razonamiento de Linasión sería correcto si se cumplieran dos requisitos:

1. En el árbol genealógico de cada persona viva ningún antepasado figura más de una vez.
2. Nunca aparece una misma persona en más de un árbol.

Ninguna de estas premisas puede ser cierta sin excepción. Si una pareja tiene cinco hijos, y cada uno de estos cinco hijos otros cinco, la pareja inicial serán los abuelos de 25 árboles genealógicos distintos. Además, sobre cualquier árbol que se tome, si se retroceden muchas generaciones se producirá una superposición de ramas debidas a matrimonios de parientes muy lejanos.

La falacia del razonamiento de Linasión se debe a que no tiene en cuenta ni las duplicaciones de los árboles individuales ni la enorme «intersección» de los conjuntos de personas que componen los árboles genealógicos de las distintas personas vivas. En el razonamiento «implosivo» de Linasión, ¡hay millones de personas que son contadas millones de veces!

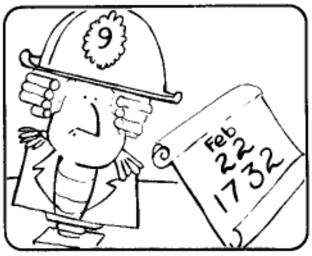
Casi todo el mundo se asombra de cuán rápidamente crecen los términos de una progresión geométrica de razón 2, es decir, de una sucesión en la que cada término es doble del anterior. Si alguien accediera a donar 1 peseta hoy, 2 mañana, 4 pasado mañana, y así sucesivamente, ¡cuesta creer que el donante tenga que dar más de un millón al cabo de 20 días!

¿Habrá algún atajo para sumar los 20 primeros términos de esta progresión? Sí: basta duplicar el último sumando y restar 1 del producto. El vigésimo sumando es 1 048 576. La suma de los veinte primeros términos es

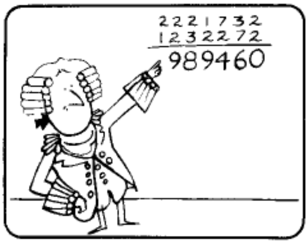
$$(2 \times 1\ 048\ 576) - 1 = 2\ 097\ 151$$

Esta misma receta vale para cualquier suma parcial de esta serie geométrica. Hay una demostración sencilla que así lo prueba. Al lector pudiera gustarle probar su mano, a ver si la consigue.

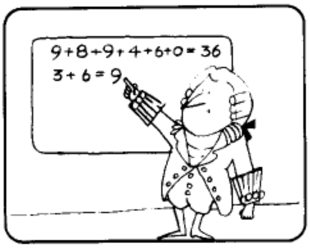
# El ubicuo número 9



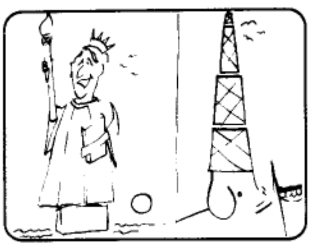

El número 9 tiene muchas misteriosas propiedades. ¿Sabía usted que el número está escondido tras el natalicio de toda persona famosa?




Fijémonos en la fecha de nacimiento de George Washington, que fue el 22 de febrero de 1732. Escribamos tal fecha con un solo número: 2221732. Ahora reordenamos las cifras y formamos con ellas otro número distinto cualquiera. Restemos el menor del mayor.




Sumemos todas las cifras de la diferencia. En este caso la suma es 36. ¡Y 3 más 6 son 9!



Haciendo lo mismo con el natalicio de John F. Kennedy (29 de mayo de 1917), o de Charles de Gaulle (22 de noviembre de 1890), o de cualquier otro hombre o mujer famoso, siempre se obtiene 9. ¿Habrá alguna curiosa relación entre el 9 y los natalicios de las personas famosas? ¿Ha probado el lector con su propia fecha de nacimiento?

Al sumar todas las cifras de un número, y luego sumar todas las cifras de la suma, y continuar así hasta lograr un número de una sola cifra, lo que se obtiene es la *raíz digital* del número de partida. La raíz digital de un número es igual al resto de su división por 9, y por esta razón el procedimiento se llama a veces «expulsión de los nueves», y en España, «prueba del nueve».

La forma más rápida de calcular la raíz digital consiste en ir separando los nueves, desechándolos conforme se van sumando las cifras del número. Por ejemplo, si las dos primeras cifras fuesen 6 y 8, que suman 14, inmediatamente se suman 1 y 4, y se conserva el 5. Dicho de otra forma, cada vez que una suma parcial tenga más de una cifra, sumaremos las cifras de la suma, y llevaremos sólo la suma. La última de las obtenidas será la raíz digital del número. Se dice también que la raíz digital es congruente, o equivalente, módulo 9 al número de partida, lo que suele abreviarse «mód. 9». Como al dividir 9 entre 9 el resto es 0, en aritmética de módulo 9, el 0 y el 9 son equivalentes.

Antes de la llegada de las máquinas de cálculo, los contables solían valerse de esta aritmética de módulo 9 para verificar sumas, diferencias, productos y cocientes de números grandes. Por ejemplo, si hemos de multiplicar $A$ por $B$, y obtenemos $C$, podemos comprobar nuestro trabajo multiplicando la raíz digital de $A$ por la de $B$ y viendo si este producto, o su raíz digital, es igual a la raíz digital de $C$. Si el producto $C$ está bien calculado, forzosamente los resultados deberán coincidir. La coincidencia *no* basta para demostrar que el producto está bien calculado, pero de no producirse, *sí* podremos asegurar que hay un error. Cuando hay coincidencia es bastante probable que el resultado sea correcto. Las «pruebas de los nueves», basadas en el cálculo de las raíces digitales de los operandos y resultado de sumas, diferencias, productos y divisiones son parecidas.

Estamos ahora en condiciones de comprender por qué funciona el truco de las fechas de nacimiento. Imaginemos un número $N$ formado por muchas cifras. Reordenándolas obtendremos un segundo número, $N'$. Como es obvio, $N$ y $N'$ tendrán iguales raíces digitales. Por tanto, al restar una de otra estas raíces la diferencia será 0 (que es igual a 9 en aritmética mód. 9). Este número, 0 o 9, tiene que ser la raíz digital de la diferencia entre $N$ y $N'$. En resumen: tomando un número cualquiera, reordenando sus cifras y restando el menor del mayor, la diferencia tendrá raíz digital igual a 0 o a 9.

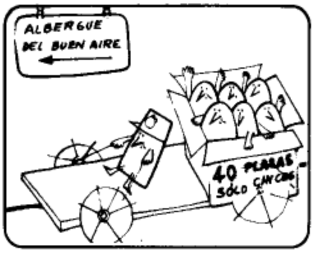
A causa del procedimiento con que se calcula la raíz digital, sólo podrá darse la diferencia final 0 si $N$ y $N'$ son números idénticos. Por tanto, al ensayar el procedimiento con sus fechas de nacimiento, nuestros amigos deberán comprobar que al desordenar las cifras resulta número distinto. En tanto $N$ y $N'$ no sean idénticos, su diferencia tendrá raíz digital 9.

Hay muchos trucos de magia basados en el ubicuo número 9. Pidámosle a alguien que anote el número de un billete, permaneciendo nosotros de espaldas para no ver lo que esta persona escribe. La persona reordena las cifras, construyendo otro número, y en seguida resta el número menor del mayor. Pídale a su amigo que tache en la diferencia una cifra cualquiera *distinta* de cero, y que nos dé a continuación las cifras restantes, *en cualquier orden*. Aunque seguimos de espaldas, ¡no deberíamos tener dificultad en decir cuál era la cifra tachada!

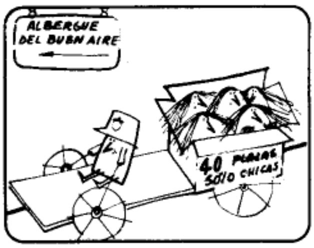
El secreto del truco debería ser evidente. La diferencia tendrá raíz digital 9. Conforme nuestro amigo va nombrando las cifras nosotros las sumamos mentalmente, despreciando los nueves. Al terminar de dárnoslas, nosotros restaremos de 9 el último dígito calculado, y la diferencia es la cifra tachada. (Si nuestro último dígito fuese 9, la cifra tachada fue un 9.)

Los trucos del billete y de la fecha de nacimiento son excelentes introducciones al estudio de las congruencias, que algunos llaman «aritmética modular».

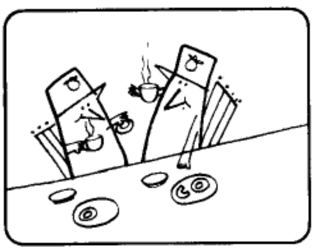
# La perplejidad de un buen chófer




Este autobús va ocupado por 40 chavales. Pronto estarán camino del campamento.

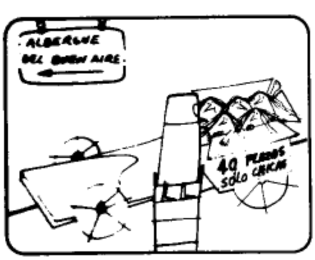



En este autobús viajan 40 chicas, que se dirigen también al mismo campamento.

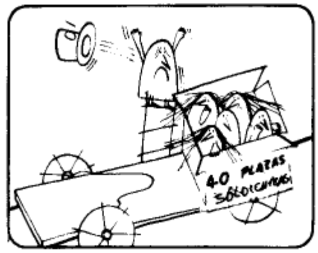


Antes de arrancar, los conductores se van a tomar un café.

Entretanto, diez muchachos bajan de su coche y se cuelan en el de las chavalas.

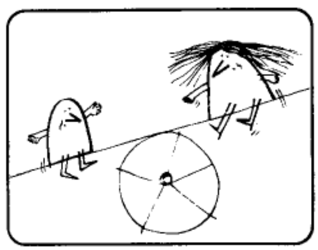



Al regresar, el conductor de las chicas se da cuenta de que lleva demasiados pasajeros.

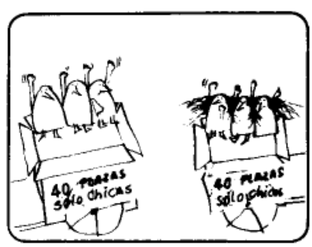


**Conductor:** ¡Vale ya! ¡Se acabó la fiesta! Este autobús es de 40 plazas, así que 10 de vosotros tendréis que apearos. ¡Y deprisita!

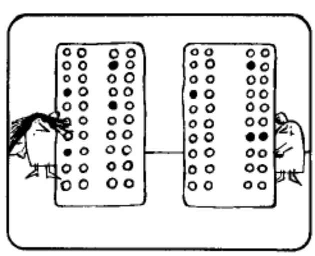
Diez pasajeros, de sexo no determinado, se trasladan al coche de los muchachos. Allí ocupan los diez asientos vacíos. Poco después, ambos coches echan a andar, cada uno con 40 pasajeros.



Algo más tarde, al conductor de las chicas se le ocurre:
**Conductor:** Humm... Seguro que en este coche van algunos muchachos, y en el de los chicos, algunas chicas. Me pregunto en cuál de los dos habrá mayor proporción de personas del sexo contrario.




Cuesta creerlo, pero independientemente del sexo de las 10 personas que retornaron al autocar de los muchachos, la proporción de pasajeros de sexo minoritario es exactamente la misma en ambos coches.



¿Por qué? Supongamos que haya 4 chicos en el autocar de las chicas. Éstos dejan cuatro asientos libres en el de los muchachos. Éstos son los asientos que forzosamente habrán de ocupar las muchachas. El razonamiento es idéntico para cualquier otro número de chicos.

Podemos fácilmente hacer ver la paradoja con ayuda de una baraja francesa, de 52 naipes. Primero, dividimos el mazo en dos bloques, de 26 cartas rojas y 26 cartas negras. Le pedimos a alguien que corte un grupo de una cualquiera de las dos pilas. Supongamos que toma 13 naipes rojos. Los coloca sobre el montón negro, y baraja concienzudamente. Se le indica ahora que retire el mismo número de naipes (13 en este caso) de la pila recién barajada (extraídos de cualquier lugar del montón) y que los coloque sobre la pila roja. Finalmente, esta media baraja recién recompuesta ha de ser bien mezclada.

Al examinar las dos mitades se observará que el número de cartas rojas del mazo negro es exactamente igual al de negras del mazo rojo. La demostración de este truco es idéntica a la de los números de chicos y chicas de los autocares.

Hay muchos trucos de cartas inspirados en este principio. He aquí otro, donde el principio está deliciosamente oculto. Dividimos el mazo en dos mitades iguales. volvemos una de ellas cara arriba, y barajamos conjuntamente los dos montones. Se les muestra a los espectadores el mazo así barajado, sin decirles que hay exactamente 26 cartas en cada sentido. Haga usted que otra persona lo baraje nuevamente. Extienda la mano y pídale que deposite 26 cartas sobre su palma.

«¿No sería una coincidencia asombrosa —les dice usted a todos— que mi mano contuviera exactamente el mismo número de cartas boca arriba que la suya?»

Pídale entonces a su amigo que extienda sus naipes sobre la mesa. Al tiempo que él lo hace, disimuladamente déle usted la *vuelta* a su mazo, para después extenderlo junto al otro. Cuente el número de naipes que han quedado a la vista en cada grupo. ¡Ambos números serán iguales!

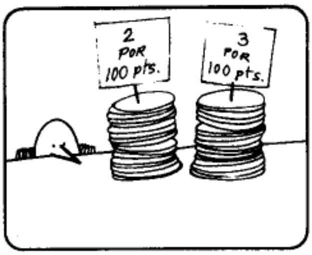
El truco tiene el mismo fundamento que la paradoja del autobús. De no darle usted la vuelta a su mazo, el número de cartas a la vista de la otra mitad coincidiría con el número de naipes ocultos de la suya. Al darle la vuelta al mazo, las cartas que estaban hacia abajo quedarán a la vista, y esto las pone en correspondencia biunívoca con las situadas boca arriba en la otra mitad.

Llegados aquí podemos analizar un problema muy antiguo. Tenemos un vaso de agua y un vaso de vino, uno junto al otro. Las cantidades de líquido de ambos son iguales. Se traslada una gota de vino al agua. El agua se agita concienzudamente; después se toma una gota (de igual volumen que la anterior) de la mezcla, y se la deja caer en el vino. ¿Hay ahora más o menos vino en el agua que agua en el vino?

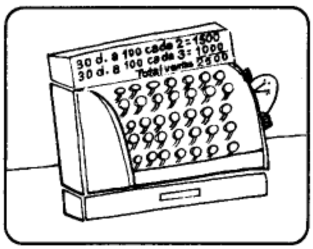
Las cantidades de uno y otra en ambas mezclas serán iguales. Esta respuesta es la misma aunque los vasos contengan cantidades distintas de líquido, y tanto si la mezcla es agitada como si no. Podemos además trasladar tantas gotas de uno a otro, y de los tamaños que queramos, tantas veces como queramos. La única condición que hay que respetar es que al final cada vaso contenga la misma cantidad de líquido que al empezar. Del vaso de vino, pongamos por caso, faltará cierta cantidad de vino. ¡El volumen que ocupaba este vino estará perfectamente relleno por el agua que ha recibido! La demostración de la igualdad de los volúmenes trasladados de ambos líquidos en este ejemplo es idéntica a la de los números de chicos y chicas de los autobuses, o del número de cartas rojas y negras de los mazos de cartas.

El problema del agua y el vino es maravilloso ejemplo de problema resoluble por métodos algebraicos fastidiosos, pero que cede prontamente ante un razonamiento lógico sencillo, si se tiene la adecuada comprensión de los datos.

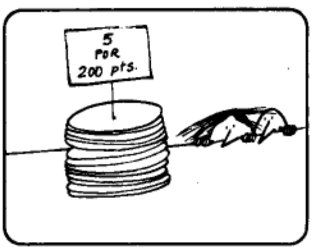
# Un billete de menos




Una tienda de discos hizo liquidación, saldando 30 redondos de rock a razón de dos por 100 pesetas, y otros 30, en lotes de tres por 100 pesetas. Al cabo del primer día ya los había vendido todos.

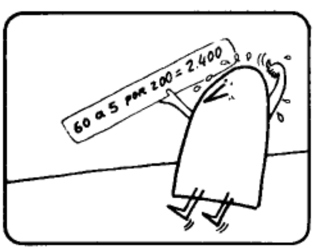


Los discos del lote «dos por 100» hicieron en caja 1500 pesetas. Los del otro lote, «tres por 100», ingresaron 1000 pesetas más. En total, el primer día se ingresaron 2500.




Al día siguiente, el encargado puso otros 60 discos en el mostrador.

**Vendedor:** ¿Para qué molestarme en clasificarlos? Si vendo 30 a razón de dos por 100 pesetas, y otros 30 a razón de tres por otras 100, ¿por qué no los junto todos y los vendo en lotes de cinco por 200 pesetas? El resultado será el mismo.




A la hora de cerrar se habían vuelto a vender los 60 discos, a razón de cinco por 200 pesetas. Pero cuando el encargado hizo arqueo, vio con gran sorpresa que sólo había recaudado 2400 pesetas y no 2500.


¿Qué piensa usted que pudo ocurrirle al billete de 100 pesetas que falta? ¿Lo habrá sisado el vendedor? ¿Será que el vendedor ha dado mal algún cambio?

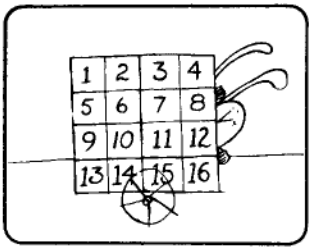
Veamos de explicar qué ha ocurrido aquí. Tal como muestra la historieta, el vendedor se ha equivocado al presumir que vender dos juegos de discos en lotes de cinco por 200 pesetas «es lo mismo» que venderlos separadamente a razón de dos por 100 pesetas y otros tres por otras 100. No hay razón para que la recaudación final sea la misma en ambos casos. En nuestro ejemplo la diferencia es tan pequeña —sólo 100 pesetas. un billete— que parece como si se hubiera perdido o cometido algún error en los cambios.

Rehagamos el problema, esta vez con parámetros ligeramente distintos. Supongamos que los discos del grupo más caro se vendieran en lotes de tres de 200 pesetas, es decir, a 200/3 pesetas cada disco, y que los discos baratos cuesten 100 pesetas el par, es decir, 50 pesetas cada uno. El vendedor apila conjuntamente ambos grupos, y los vende en lotes de cinco por 300 pesetas. Si, como antes, cada grupo estuviera formado por 30 discos, al venderlos por separado recibiría 3500 pesetas, mientras que al venderlos conjuntamente en lotes de cinco recaudará 3600. ¡Ahora la tienda gana 100 pesetas extra, en lugar de perderlas!

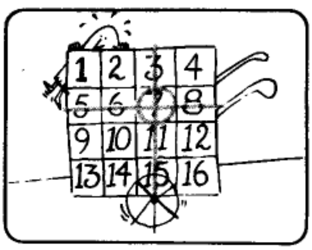
Aunque la idea del vendedor no parecía disparatada, los números demuestran que estaba equivocado. Es fácil poner de manifiesto su error por medios algebraicos; de todos modos, un ejemplo más exagerado deberá bastar para hacer ver que no se pueden promediar precios y números de unidades por transacción, tal como acabo de explicar, y obtener resultados equivalentes.

Imaginemos un vendedor de automóviles que dispusiera de seis Rolls Royce y de seis Volkswagen. Pone todos ellos en oferta, a razón de dos Rolls por 10 millones y seis Volkswagen por cinco. Si vendiese de esta forma los 12 coches conseguiría 35 millones de pesetas. Ahora, el número medio de coches por cada venta individual de cada tipo es cuatro. El promedio de los precios de transacción, 7,5 millones. Si pusiera a la venta los 12 autos, a razón de cuatro por 7,5 millones, lo más que recaudaría serían 22,5 millones. Por otra parte, es probable que el primer cliente se llevase cuatro Rolls por 7,5 millones, dejando al vendedor ocho autos supervalorados. ¡Ya se ve cuánto vale el razonamiento del vendedor del problema inicial!

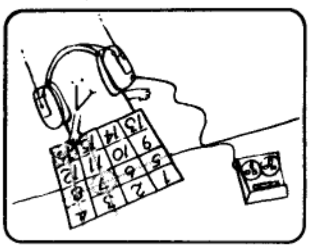
# Matrices mágicas



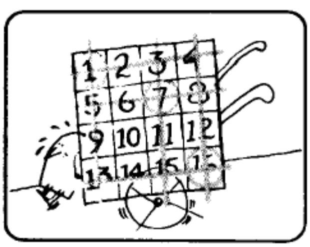

Copie esta matriz de 4 por 4 en una hoja, y numere de 1 a 16 sus casillas. Voy a hacerle una exhibición de fuerza psíquica que le dejará atónito. ¡Voy a dirigir y controlar una selección de cuatro números realizada por usted en la matriz!



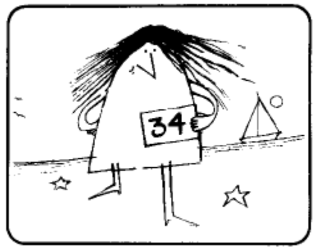

Rodee con un círculo un número cualquiera, a su capricho. En el dibujo se ha marcado el 7; lo mismo puede tomarse otro cualquiera. Tache con una barra vertical la columna que lo contiene, y otro tanto con la fila.



Ahora rodee otro número cualquiera de los no tachados todavía. Vuelva a tachar la fila y columna de éste. Elija a su capricho un tercer número no tachado, y suprima también su fila y columna. Finalmente, rodee el único número restante.



Si usted ha seguido mis indicaciones, el casillero presentará más o menos este aspecto. Sume ahora los cuatro números seleccionados.




¿Preparado? Voy a decirle cuánto vale la suma que usted ha calculado. Es..., es... ¡34! ¿Es correcta? ¿Cómo he podido yo saberlo? ¿Será que he influido sobre usted en el momento de elegir?

¿Por qué nos obliga esta matriz a que la suma de los números elegidos sea siempre 34? Su secreto es tan sencillo como ingenioso. En el encabezamiento de una matriz de 4 por 4 escribamos los números 1, 2, 3, 4; a la izquierda de cada hilera ponemos los números 0, 4, 8, 12:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 4 | | | | |
| 8 | | | | |
| 12 | | | | |

Estos ocho números se llaman *generadores* de la matriz mágica. En cada casilla se escribe ahora el número suma de sus dos generadores, a saber, la suma del situado a la cabeza de la columna con el escrito al costado de su fila. Una vez rellenado de este modo el casillero encontraremos una matriz que contiene los números de 1 a 16 en orden correlativo.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Veamos ahora qué sucede al ir señalando cuatro números según el procedimiento indicado. Tal procedimiento garantiza que *no serán elegidos dos números de una misma fila o columna.* Cada número de la matriz es suma de un único par de generadores; por consiguiente, la suma de los cuatro números señalados será igual a la suma de los ocho generadores. Y como los generadores suman en total 34, también los cuatro números elegidos habrán de sumar 34.

Una vez comprendido el funcionamiento de la matriz, se pueden construir matrices mayores de tamaño arbitrario. Fijémonos, por ejemplo, en la matriz de orden 6 siguiente, con sus 12 generadores. Observemos que en este caso los generadores han sido elegidos de manera que los números del casillero parezcan dados al azar. Queda así oculta la estructura subyacente de la matriz, haciendo que parezca aún más misteriosa:

| | 4 | 1 | 5 | 2 | 0 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 4 |
| 5 | 9 | 6 | 10 | 7 | 5 | 8 |
| 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 8 | 5 | 9 | 6 | 4 | 7 |
| 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 0 | 3 |
| 3 | 7 | 4 | 8 | 5 | 3 | 6 |

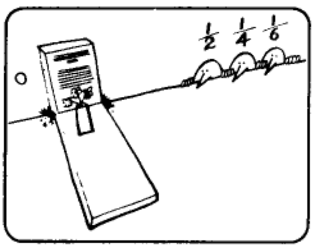
Los generadores suman 30. Elegidos seis números por el procedimiento explicado, con certeza sumarán 30. El número mágico (la suma) podrá ser, desde luego, cualquier número que se desee.

Es posible construir una matriz de 10 por 10 que implique suma 100 o cualquier otro número curioso, como el año en curso, o el año de nacimiento de una persona. ¿Podrán construirse matrices mágicas que contengan en algunas casillas números negativos? ¡Claro que sí! En realidad, los generadores pueden ser números cualesquiera, positivos o negativos, racionales o irracionales.

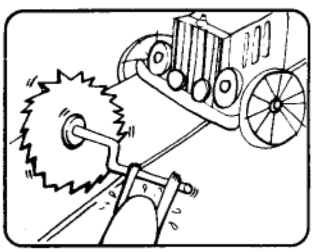
¿Podrán construirse matrices donde el cálculo del número mágico se haga *multiplicando* los elegidos, en vez de sumarlos? Sí; y ello sugiere otro camino a explorar. La construcción fundamental sigue siendo exactamente la misma. El número impuesto, en este caso, resulta ser *producto* del conjunto de generadores. Tal vez le interese averiguar qué sucede si las casillas son ocupadas por números complejos. Puede encontrarse más material sobre matrices mágicas consultando el segundo capítulo de mi *Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.*

# Un curioso testamento

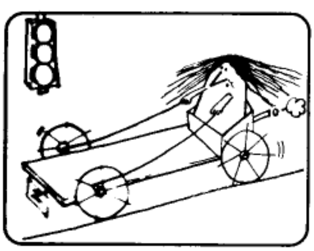

Un rico abogado poseía 11 autos antiguos, cada uno de ellos valorado en unos tres millones de pesetas.



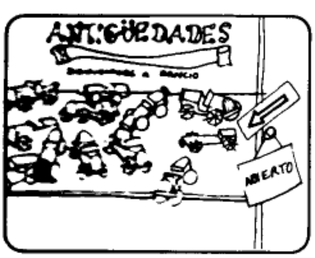

Cuando el abogado murió dejó un curioso testamento. En él pedía que sus 11 coches fuesen repartidos entre sus tres hijos. La mitad de los autos debía ser para el hijo mayor; la cuarta parte, para el mediano, y una sexta parte, para el benjamín.



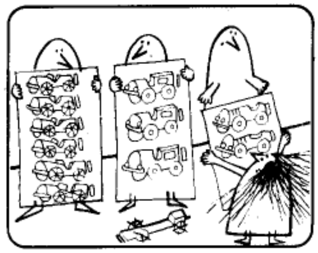
Todos estaban perplejos. ¿Cómo dividir 11 coches en dos partes iguales? ¿O en cuatro? ¿Y en seis?



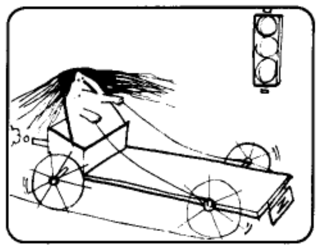
Mientras los hijos discutían qué hacer, la señora Cero, famosa especialista en numerología, se acercó a visitarlos en su deportivo nuevo.
**Señora Cero:** ¡Hola, chavales! Parece que estáis en un apuro. ¿Puedo ayudaros?




Cuando los hijos le hubieron explicado la situación, la señora Cero aparcó su deportivo junto a los coches antiguos, y saltó de él.
**Señora Cero:** Decidme, chicos, ¿cuántos coches hay?
Los muchachos contaron 12.



Entonces la señora Cero dio cumplimiento a las cláusulas del testamento. Dio la mitad de los coches, o sea, seis, al hijo mayor. El mediano se llevó la cuarta parte de 12, es decir, tres. Y el menor, la sexta parte de 12, o sea, dos.
**Señora Cero:** 6 más 3 más 2 son exactamente 11. Así que sobra un coche. ¡El mío!



La señora Cero subió de un brinco a su auto y se despidió.
**Señora Cero:** ¡Me alegro de haberos sido útil! ¡Ya os enviaré la minuta!

Es ésta una versión actualizada de una clásica paradoja árabe, en la que no se habla de autos, sino de caballos. Podemos modificar las cláusulas del testamento cambiando el número de coches y las fracciones del reparto, con la condición de que tomando prestado un coche más sea posible cumplir el testamento dejando sobrante un coche, que será devuelto al prestador.

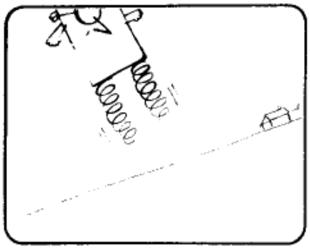
Por ejemplo, podríamos tener 17 coches y un testamento que ordenase que estos coches sean repartidos en mitad, tercera y novena partes. Si hay $n$ coches y las tres fracciones son $1/a$ $1/b$ y $1/c$, para que se mantenga la paradoja es necesario que la ecuación

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

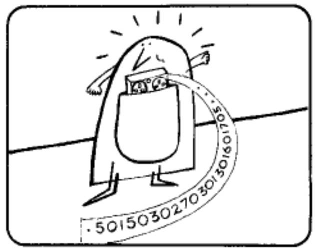
admita alguna solución con enteros positivos. Vea el lector si puede elaborar más el problema aumentando el número de herederos, así como el número de coches a tomar prestados para cumplir el testamento.

La resolución de la paradoja reside, es evidente, en que la suma de las fracciones estipuladas en el testamento original es menor que 1. Si el testamento fuese ejecutado cortando realmente los coches en pedazos, quedarían sobrantes 11/12 de coche. La señora Cero facilita un procedimiento para distribuir esos 11/12 entre los hijos. Así, el mayor recibe 6/12 de coche más de lo que le hubiera correspondido antes; el mediano, 3/12 más, y el pequeño, 2/12 más. Estas fracciones suman 11/12, y puesto que cada hijo recibe un número entero de coches, no es necesario cortar ninguno.

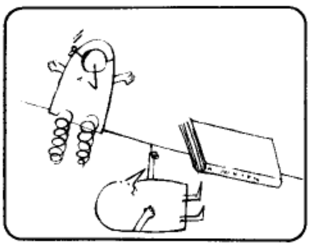
# El código maravilloso



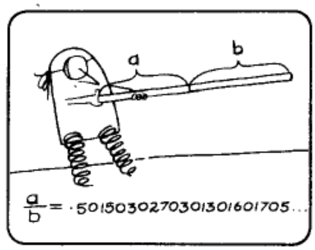
El doctor Zeta es un científico de Hélix, una galaxia perteneciente a otra dimensión del espacio-tiempo. Un día, el doctor Zeta viajó hasta la Tierra para recoger información sobre los humanos. El doctor Zeta se alojó en casa de un científico norteamericano, de nombre Herman.



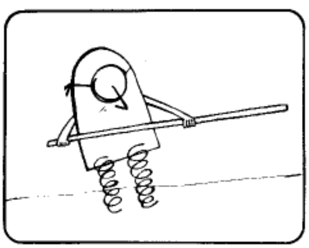
Valiéndose de su potente ordenador de bolsillo, el doctor Zeta revisó rápidamente toda la enciclopedia, traduciendo su contenido completo en un número gigantesco. Anteponiéndole un 0 y una coma, lo transformó en un decimal.



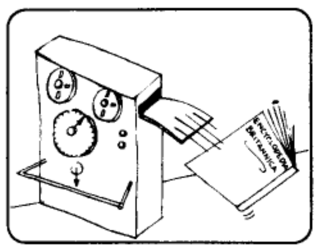
**Herman:** ¿Por qué no te llevas una *Enciclopedia Británica*? Es un magnífico resumen de todo cuanto sabemos.
**Doctor Zeta:** Una idea formidable, Herman. Lástima que no pueda transportar un cuerpo de tanta masa.



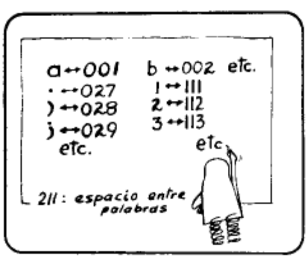

El doctor Zeta trazó una marca en su regla, que la dividía con mucha exactitud en dos longitudes *a* y *b*, de forma que la fracción *a/b* fuera generatriz del número decimal del código.



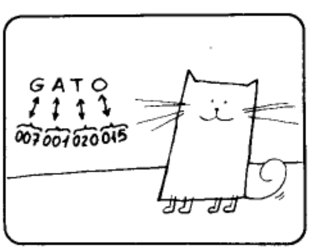
**Doctor Zeta:** Sin embargo, puedo codificar la enciclopedia completa en esta barra de metal. Haciendo una marca en ella tendré suficiente.
**Herman:** ¿Estás de broma? ¿Cómo podrás hacer que una simple marca contenga tantísima información?



**Doctor Zeta:** Cuando retorne a mi planeta, una de nuestras computadoras medirá *a* y *b* muy exactamente, y después calculará el cociente *a/b*. Este número decimal será decodificado, y el ordenador imprimirá para nosotros vuestra enciclopedia.




**Doctor Zeta:** Elemental, querido Herman. En vuestra enciclopedia hay menos de 1000 signos y letras diferentes. A cada letra o símbolo le asociaré un número de 1 a 999, añadiendo a la izquierda ceros si son precisos, para que todos tengan tres cifras.




**Herman:** Sigo sin entenderlo. ¿Cómo vas a expresar la palabra *gato*?
**Doctor Zeta:** Es sencillo: gracias a esa clave que te acabo de explicar. *Gato* podría codificarse 007001020015.

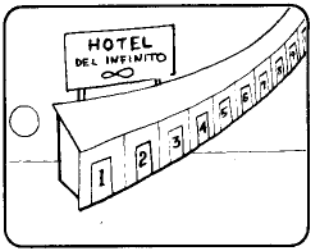
Si el lector no está todavía familiarizado con las claves y cifras, puede encontrar de su agrado codificar y descifrar algunos mensajes sencillos dados en un código numérico semejante al empleado aquí. Los códigos ponen de manifiesto la importancia de las correspondencias biunívocas, las aplicaciones de una estructura sobre otra isomórfica a ella. Se emplean hoy códigos así en la teoría superior de demostrabilidad. Kurt Gödel dio una famosa demostración de que todo sistema deductivo lo suficientemente complicado como para contener a los números enteros tiene teoremas cuya veracidad o falsedad no puede ser demostrada dentro del sistema. La demostración de Gödel está basada en un código numérico que traduce cualquier teorema de un sistema deductivo en un número entero muy largo.

La codificación de toda una enciclopedia mediante un trazo sólo puede hacerse en teoría. La dificultad práctica está en la imposibilidad de grabar la marca con la precisión suficiente. Tal marca habría de ser enormemente más fina que un electrón, y la medición de ambas longitudes tendría que hacerse con el mismo grado de exactitud. Admitiendo que tales longitudes puedan medirse con exactitud suficiente como para determinar la fracción del doctor Zeta, entonces, evidentemente, tal procedimiento *sí* funcionaría.

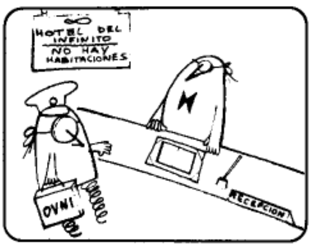
Pasando ahora a los números *ir*racionales, resulta que los matemáticos están convencidos de que el desarrollo decimal de $\pi$ (pi) es tan «aleatorio» como cualquier otra sucesión típica de infinitos dígitos tomados al azar. De ser esto cierto, significaría que la aparición dentro del desarrollo de un tramo que repita una sucesión finita cualquiera dada de antemano es un suceso seguro. Dicho de otra forma, en algún punto del desarrollo de $\pi$ comienza una sucesión de cifras que codifica la totalidad de la *Enciclopedia Británica* por el procedimiento que explicó el doctor Zeta, y más aún, ¡habrá sucesiones que codifiquen cualquier obra que haya sido impresa, o que *pueda* llegar a publicarse!

Por otra parte, existen números irracionales con reglas de formación muy claras y estrictas que contienen a cualquier sucesión finita de cifras que podamos dar. Un ejemplo es el número 0,123456789011121314 15..., obtenido al escribir todos los números naturales en su propio orden.

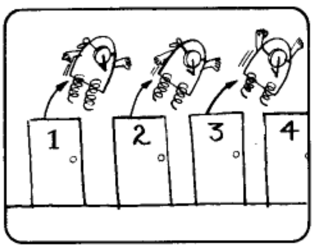
# Hotel del Infinito



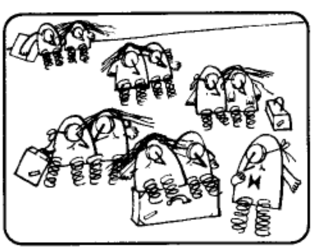

Antes de irse, el doctor Zeta relató un cuento fantástico.
**Doctor Zeta:** En el centro de nuestra galaxia hay un hotel enorme, llamado Hotel del Infinito. Tiene un número infinito de habitaciones, que se extienden hasta un espacio de dimensión superior a través de un agujero negro. Las habitaciones están numeradas de 1 en adelante.




**Doctor Zeta:** Un día, estando ocupadas todas las habitaciones, llegó el piloto de un OVNI, que iba de camino hacia otra galaxia.

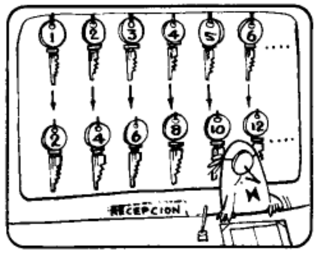


**Doctor Zeta:** A pesar de no disponer de habitaciones, el gerente consiguió dar alojamiento al piloto. Sencillamente, trasladó al ocupante de cada habitación a la de número siguiente. Así, la habitación número 1 quedó libre para el piloto.

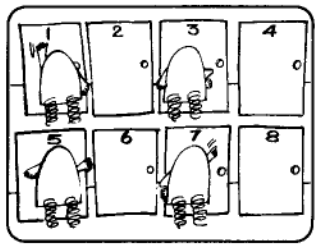


**Doctor Zeta:** Al día siguiente se presentaron cinco parejas en luna de miel. ¿Podría el Hotel del Infinito recibirlos? Sí. El gerente no tuvo más que trasladar a cada residente a la habitación número cinco unidades mayor. De esta forma, las parejas pudieron ocupar las números 1 a 5.


**Doctor Zeta:** Ese fin de semana llegó un número *infinito* de comisionistas de chicle, para celebrar una convención.
**Herman:** Comprendo ya que el Hotel del Infinito pueda atender a cualquier número *finito* de recién llegados. Pero ¿cómo dar habitación a un número *infinito* de ellos?




**Doctor Zeta:** Sin dificultad, amigo Herman. El gerente hará mudarse a cada inquilino, llevándolo a una habitación de número doble del que tenía.



**Herman:** ¡Pues claro! Así todos quedan alojados en habitaciones con números pares. ¡Y las impares, que son infinitas, quedan libres para alojar a los del chicle!

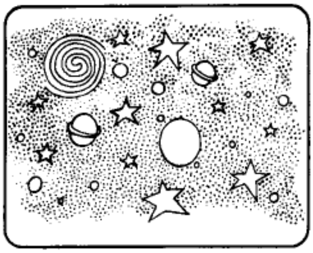
Ningún conjunto finito puede ponerse en correspondencia biunívoca con ninguno de sus subconjuntos propios. La situación es distinta para los conjuntos infinitos. Da la impresión de que vulneran la clásica regla de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes propias. Más aún, podemos definir los conjuntos infinitos precisamente por ser aquellos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con alguno de sus subconjuntos propios.

El gerente del Hotel del Infinito nos mostró primero cómo el conjunto de todos los números naturales puede coordinarse con uno de sus subconjuntos propios, de forma que sobre un elemento. Como es obvio, el procedimiento puede modificarse de manera que reste aparte el número finito de elementos que deseemos, tomando del conjunto de los números un subconjunto infinito conveniente.

Otra forma de poner de manifiesto esta especie de resta es imaginar dos reglas infinitamente largas, situadas una junto a otra sobre un mostrador, con las marcas 0 enfrentadas y coincidiendo en medio del mostrador. Ambas reglas están divididas y marcadas en centímetros, prolongándose indefinidamente hacia la derecha, con todas las graduaciones en perfecta correspondencia: 0 - 0, 1 - 1, 2 - 2, y así sucesivamente. Imagínese ahora que una de las reglas se hace deslizar $n$ centímetros hacia la derecha. Tras esta operación todas las marcas de la regla desplazada seguirán correspondiéndose con sendas marcas de la regla fija. Por ejemplo, si la regla móvil es desplazada 3 centímetros, las marcas se corresponderían así: 0 - 3, 1 - 4, 2 - 5, ... Los $n$ centímetros que sobresalen representan una diferencia de longitudes entre ambas reglas, que continúan sin embargo siendo infinitamente largas. Como podemos hacer que la diferencia $n$ sea cualquier valor que nos parezca, está claro que la operación de restar un infinito de otro es ambigua.

La última maniobra del gerente hizo aparecer un número infinito de habitaciones, mostrando así cómo es posible que al restar infinitos de infinitos queden infinitos todavía. Poniendo en correspondencia los números naturales con los números pares, queda todavía un conjunto infinito de números naturales, a saber, los impares.

# La escalera de álefs



El Hotel del Infinito es sólo una de las muchas paradojas que suscitan los números infinitos. ¡Porque hay muchos! El número de números naturales, aunque infinito, es sólo el más bajo de una jerarquía de infinitos, jerarquía que tampoco tiene fin. El segundo número infinito es el de puntos del universo entero. ¡Y el tercero es mucho mayor todavía!


El matemático alemán Georg Cantor, descubridor de esta escalera de infinitos, llamó álef subcero, álef subuno, etc., a estos números tan extraños.

El *número cardinal* de un conjunto es el número de los elementos que lo componen. Por ejemplo, el número de elementos del conjunto formado por las letras de *gato* es 4. Todo conjunto finito tiene número cardinal finito. Georg Cantor descubrió que ciertos conjuntos infinitos eran «mayores» que otros. Cantor se valió de la primera letra del alfabeto hebreo, álef ($\aleph$), para denotar números cardinales de conjuntos infinitos. Los subíndices sirven para especificar de qué «grado» es su infinitud.

Cantor llamó $\aleph_0$ (álef subcero) al número cardinal del conjunto de los números naturales. Los conjuntos de enteros pares y de enteros impares tienen ambos cardinal $\aleph_0$ Por tanto, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. La paradoja del Hotel del Infinito hacer ver que en cierto sentido podemos también tener $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$. ¡Qué locura de números!

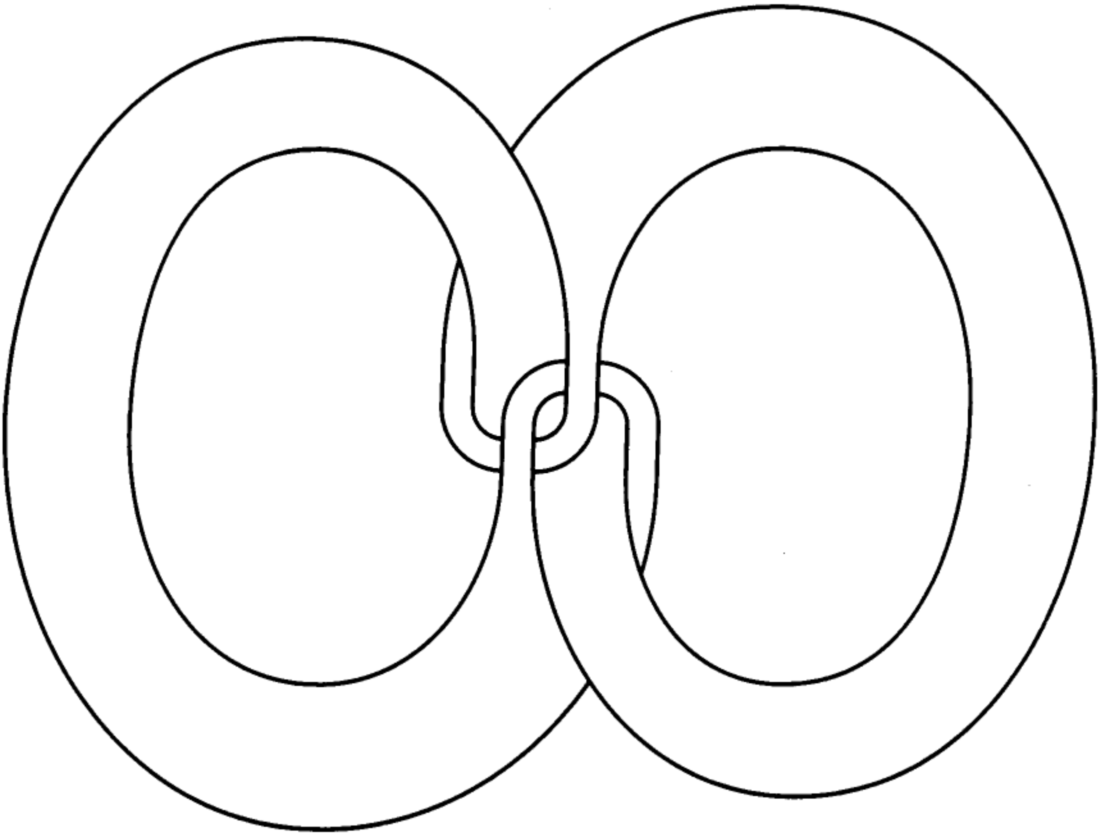
El conjunto de los números reales forma un subconjunto infinito mayor, y Cantor estaba convencido de que habría de tener cardinal $\aleph_1$ (álef subuno), y ser el primer número transfinito mayor que $\aleph_0$. Su famosa «demostración diagonal» estableció que el conjunto de los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros. Demostró también que el conjunto de los números reales sí es coordinable con el conjunto de puntos de un segmento rectilíneo, o de una recta ilimitada, o con los de la superficie de un cuadrado, o de un plano infinito, o de un cubo, o del espacio infinito, y así sucesivamente para hipercubos y espacios de dimensión superior.

Al elevar 2 a la potencia de un álef, Cantor demostró que se engendra un álef mayor, no coordinable con el álef del exponente. Por tanto, la escalera de álefs prosigue su ascenso ilimitadamente.

La cardinalidad del conjunto de los números reales es denotada $c$, y se la conoce por «potencia del continuo». Hiciera lo que hiciese, Cantor se vio incapaz de demostrar que $c$ es igual a álef subuno. Muchos decenios más tarde, los trabajos de Kurt Gödel y Paul Cohen establecieron que esta cuestión no puede ser decidida a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos ordinaria (llamada teoría estándar). En consecuencia, la teoría de conjuntos está hoy escindida en dos ramas, la teoría cantoriana y la no-cantoriana. La teoría cantoriana admite que $c = \aleph_1$. La teoría no-cantoriana postula que entre $\aleph_0$ y $c$ hay una infinidad de números transfinitos intermedios.

La famosa «hipótesis del continuo», como dio en ser llamada la conjetura de Cantor, fue resuelta demostrando que es *indecidible*. La situación es semejante a la ocurrida tras el descubrimiento de que el postulado euclídeo de las paralelas no podía ser demostrado. El postulado pudo ser sustituido por otros, dividiendo así la geometría en ramas euclídea y no-euclídea.

# 3 Geometría





## Paradojas acerca de figuras planas, espaciales e imposibles

Para casi todo el mundo, la palabra *geometría* significa geometría euclídea plana, y, más concretamente, el estudio de las figuras rígidas planas. En este capítulo tomaremos el término en un sentido más amplio, propuesto hace más de un siglo por Felix Klein. La geometría estudia las propiedades de las figuras, de un espacio de dimensión cualquiera, que permanecen invariantes con respecto a un grupo de transformaciones previamente definidas, no importa de qué tipo sean.

La noción de geometría propuesta por Klein es una de las ideas más primordiales y de mayor fuerza unificadora de la matemática moderna. En la geometría euclídea, plana o del espacio, las transformaciones permitidas son las traslaciones (desplazamientos de un lugar a otro que respetan el paralelismo), simetrías respecto de un eje o un plano, giros y homotecias (a veces llamadas dilataciones, sean contractivas o expansivas). Transformaciones de otros tipos definen las geometrías afín y proyectiva, la topología y, en último extremo, la teoría de conjuntos, en la que toda figura puede descomponerse en puntos que pueden ser luego reagrupados.

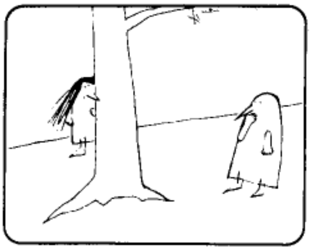
Según Jean Piaget, el famoso psicólogo suizo, los niños van, en realidad, captando las nociones geométricas en orden inverso. A los niños muy pequeños, por ejemplo, les resulta más fácil distinguir entre una pila de canicas rojas y otra de canicas azules (teoría de conjuntos), o entre un anillo elástico cerrado y una tira abierta (topología) que entre un pentágono y un hexágono (geometría euclídea).

La topología es una curiosa rama de la geometría, encargada de estudiar qué propiedades permanecen invariantes respecto a deformaciones continuas. Imaginemos un objeto hecho de goma, al que podemos deformar y retorcer a capricho, con tal de no romperlo ni desgarrarlo, ni tampoco pegar los posibles cortes que tenga. La propiedad de tener una sola cara, por ejemplo. es una propiedad topológica que poseen las bandas de Möbius, porque si las imaginamos en goma, por mucho que las retorzamos y estiremos no podremos hacer que pierdan esta propiedad. Muchas paradojas de este capítulo —el trenzado de un brazalete, la vuelta del revés de un toro, un teorema del punto fijo, y otras— se refieren a propiedades topológicas.

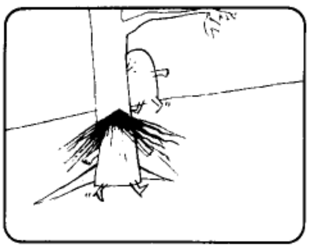
Las transformaciones de simetría, donde las figuras asimétricas como la letra *B* quedan convertidas en la imagen que de ellas nos daría un espejo, ocupan en este capítulo un lugar distinguido, no sólo por subyacer a tantas fascinantes paradojas, sino también por su importancia en la geometría y la ciencia moderna. La simetría respecto de un plano, o simetría especular, tiene en química un papel fundamental, especialmente en química orgánica, al ser asimétricas casi todas las moléculas carbonadas, que admiten formas levógira y dextrógira. Su importancia no es menor en cristalografía, biología y genética, y en la física subatómica.

Aunque en principio algunas de estas paradojas pueden parecer poco más que curiosidades recreativas, el lector verá que cada una de ellas puede conducirle sin brusquedades hacia importantes campos de las matemáticas, tales como teoría de grupos, lógica, sucesiones, series infinitas y límites. Con demasiada frecuencia los estudiosos de la geometría se cierran tanto en las construcciones con regla y compás que se les escapan las apasionantes relaciones entre la geometría y las otras ramas de la matemática, lo mismo que las interminables y hermosas aplicaciones de la geometría en la astronomía, la física, y las otras ciencias.

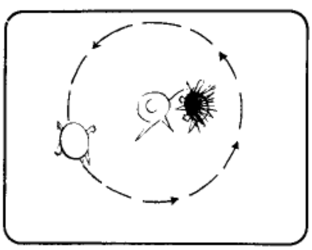
# En torno a una chica



**Marcos:** Mariví, ¿dónde te escondes? ¡Seguro que estás ahí, detrás del árbol!



Conforme Marcos iba rodeando el árbol, Mariví, del otro lado, hacía otro tanto. Así consiguió mantenerse oculta.



Tras haber dado cada uno de ellos una vuelta en torno al árbol, volvieron a quedar en las posiciones iniciales. ¿Consiguió el muchacho rodear a Mariví?

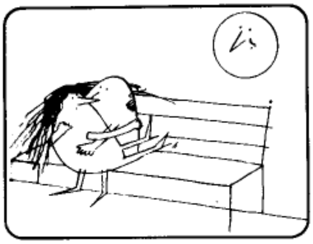
**Marcos:** ¡Pues claro! Ya que he rodeado el árbol, forzosamente he tenido que dar una vuelta en torno *a ella*.

**Mariví:** ¡Ni hablar! Aunque no hubiera árbol, nunca habría llegado a verme la espalda. ¿Cómo es posible rodear algo y no poder verlo por todos lados?

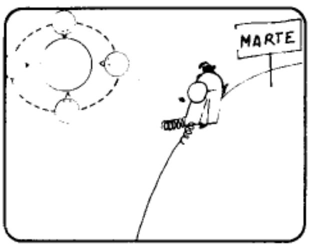
Esta clásica paradoja suele presentarse protagonizada por un cazador y una ardilla. La ardilla está sentada sobre un tocón. Conforme el cazador va deslizándose en torno al tocón la ardilla va girando sobre sí misma, siempre de frente al cazador. Cuando el cazador haya rodeado completamente el tocón, ¿habrá dado una vuelta en torno a la ardilla?

Salta a la vista que es imposible responder a tal pregunta sin precisar antes qué se entiende por *rodear.* Muchas palabras del vocabulario habitual no tienen definición estricta. En su clásica obra filosófica, *Pragmatism,* William James da un divertido análisis de la paradoja del cazador y la ardilla, presentándola como modelo de desavenencias cuyo origen es puramente semántico. El desacuerdo desaparece tan pronto ambos bandos comprenden que se están enzarzando tan sólo acerca de cómo definir una palabra. Si las personas tuviéramos una más clara conciencia de la necesidad de precisar la terminología, muchas agrias discusiones resultarían tan triviales como ésta.

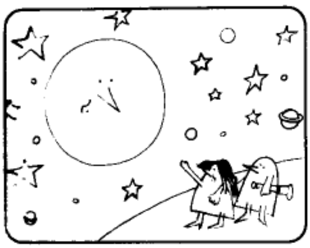
# El gran misterio de la Luna



La Luna presenta siempre la misma cara hacia la Tierra. Al cabo de una revolución en torno a ésta, ¿habrá girado la Luna una vez en torno a su eje?




**Padre:** Como astrónomo que soy, afirmo que sí. Situándonos en Marte veríamos cómo la Luna da una vuelta sobre sí misma por cada órbita que describe en torno a la Tierra.



**Hija:** ¡Pero, papá! ¿Cómo va a girar sobre sí misma? De ser así podríamos verla por todas partes, y en cambio nosotros sólo vemos la cara de siempre. ¿Tiene la Luna movimiento de rotación? ¿Llegó a rodear el chico a la muchacha? ¿Son éstas verdaderas paradojas, o estamos solamente enzarzados con el significado de una palabra?

Lo mismo que en la paradoja anterior, toda la dificultad de ésta es semántica. ¿Qué significa exactamente *girar sobre su eje*? Con respecto a un observador situado en la Tierra, la Luna parece desprovista de rotación. En cambio, con respecto a un observador exterior al sistema Tierra-Luna, sí parece tenerla.

Aunque cueste creerlo, se ha dado el caso de que personas inteligentes se hayan tomado con la mayor seriedad esta sencilla paradoja. Augustus de Morgan, en el primer volumen de su *Budget of Paradoxes,* revisa y comenta varias monografías del siglo pasado donde se rebatía la idea de que la Luna pudiera tener rotación. Henry Perigal, un astrónomo aficionado londinense, fue tal vez, entre todos ellos, el más inasequible al desaliento. Según una nota necrológica, «en vida, su principal objetivo como astrónomo» fue convencer a otros de que la Luna carece de movimiento de rotación. Perigal escribió monografías, construyó modelos, e incluso compuso poemas al objeto de probar sus tesis, «soportando con heroica jovialidad la continua frustración de ver que todo esto era en vano».

Podemos ahora examinar una pequeña y deliciosa paradoja, pariente cercana de la paradoja lunar. Dibujemos dos circunferencias tangentes, de igual tamaño, que representen sendos discos. Uno de ellos ha de rodar en torno al otro sin deslizar, permaneciendo siempre sus contornos en contacto. ¿Cuántas vueltas habrá dado sobre sí mismo el disco rodante en el momento de completar su primera revolución en torno al disco fijo?

Casi todo el mundo contesta que una. Pero hágales comprobarlo con dos monedas iguales, ¡y tal vez descubran con sorpresa que la moneda rodante da en realidad *dos*!

¿De verdad? Lo mismo que en la paradoja Tierra-Luna, todo depende del sistema de referencia del observador. Con respecto a usted, que observa desde arriba, la moneda da dos vueltas sobre sí misma. También esta paradoja ha suscitado furiosas controversias. Cuando, en 1867, *Scientific American* publicó por primera vez el problema se produjo un aluvión de cartas de los lectores, que se alinearon en dos bandos tajantemente contrarios.

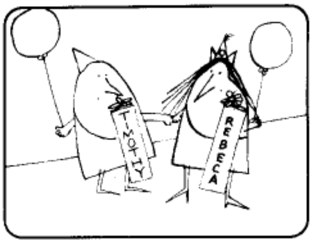
Los lectores se dieron cuenta enseguida de la relación entre esta paradoja y la del sistema Tierra-Luna. Quienes sostenían que la moneda sólo daba una vuelta sobre sí misma sostenían también que la Luna no tiene movimiento de rotación. «Al voltear un gato por encima de nuestra cabeza —escribía un lector—, ¿girarán en torno a sus ejes la cabeza, los ojos y las vértebras?... ¿Morirá el gato en su séptima vuelta?»

El volumen de correo sobre el tema alcanzó tal magnitud, que en abril de 1868 la revista anunció la suspensión del debate y la fundación de una nueva revista mensual, *The Wheel* (La rueda), dedicada por entero a la «gran cuestión». Llegó a publicarse al menos un número, en el que se presentaban dibujos de intrincados dispositivos construidos por los lectores y enviados a la redacción al objeto de establecer definitivamente sus puntos de vista.

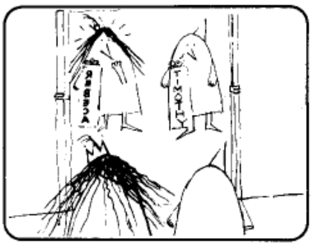
La rotación de los cuerpos astrales suscita fenómenos inerciales, detectables por medio de dispositivos como el péndulo de Foucault. Situando en la Luna uno de estos péndulos se demostraría que nuestro satélite gira sobre sí mismo conforme cincunvala a la Tierra. ¿Servirá esto para dar una demostración de la rotación que sea independiente del sistema de referencia del observador?

Sorprendentemente, a la luz de la teoría general de la relatividad, resulta que no. Se puede suponer que la Luna no gira en absoluto sobre sí misma, sino que es el universo entero (independientemente de si su estructura espaciotemporal es o no afectada por la materia que contiene) el que gira en torno a la Luna. ¡Este universo en rotación engendra campos gravitatorios que producen los mismos efectos que los campos inerciales generados por una Luna giratoria en un cosmos fijo! Evidentemente, es mucho más cómodo imaginar que el sistema de referencia fijo sea el universo. Pero estrictamente hablando, la cuestión de si un objeto cualquiera está «verdaderamente» en rotación o está fijo es, en teoría de relatividad, una cuestión de significado. Tan sólo es «verdadero» el movimiento relativo.

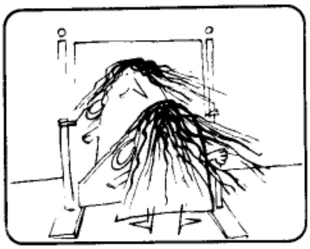
# Espejo, espejito...



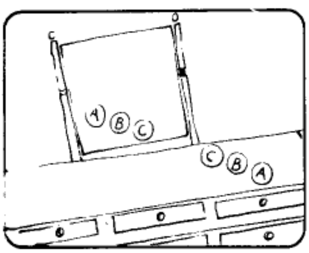

Los espejos pueden resultar desconcertantes. Rebeca y Timothy están invitados a una reunión donde todo el mundo ha de llevar una tarjeta de identidad.



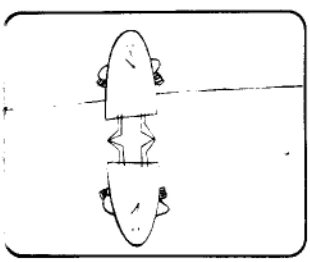
**Rebeca:** ¡Mira, Tim! ¡Qué espejo más raro! Mi nombre se ve al revés al reflejarse en él. En cambio, el tuyo no ha cambiado nada.



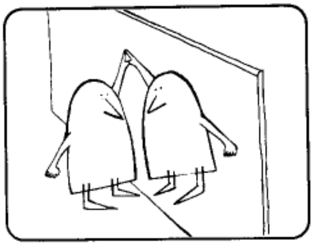
¿No encuentra usted curioso que los espejos sólo parezcan permutar los lados derecho e izquierdo? ¿Por qué no invierten también las partes alta y baja?



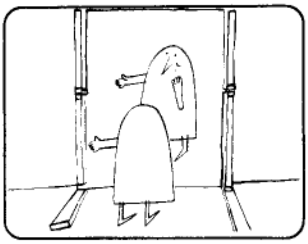
En realidad, lo único que hacen los espejos es una inversión a lo largo de rectas perpendiculares a su superficie. Como las tres bolas están perpendicularmente alineadas frente al espejo, al reflejarse las vemos en orden de proximidad inverso.



Colocándonos de pie sobre un suelo reflectante, nuestro eje coordenado «pies-cabeza» queda perpendicular a la superficie del espejo. Por tanto, lo situado a nuestro frente queda, al reflejarse, al frente; la parte izquierda sigue siendo parte izquierda, pero nosotros nos vemos cabeza abajo.

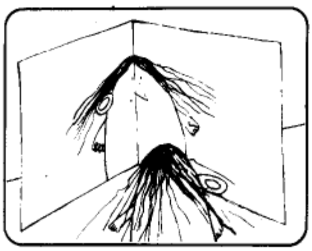


Al presentar al espejo nuestro *costado,* el eje «izquierda-derecha» queda perpendicular a aquél. Ahora la cabeza sigue apuntando hacia arriba, lo situado al frente sigue viéndose al frente. Nosotros vemos invertida la dirección izquierda derecha.



Al mirarnos de *frente* en el espejo, la cabeza señala hacia arriba, la izquierda sigue estando a la izquierda, y se produce inversión en profundidad, de delante a atrás. Debido a que la imagen de nuestra mano izquierda se encuentra del lado contrario a donde se hallaría si nosotros hubiéramos rodeado el espejo y nos situáramos tras él mirando hacia la posición inicial, se *dice* que el espejo ha intercambiado los lados derecho e izquierdo.


¿Por qué este espejo no invierte DIOXIDO DE y sí, en cambio, CARBONO? ¡Sí que lo hace! Las letras de DIOXIDO DE también han sufrido la inversión, pero por su simetría, después de la inversión tienen igual aspecto que antes.



¿Puede usted imaginar qué sucede al colocar dos espejos planos formando un diedro recto? Entre ambos puede crearse una imagen *no* invertida. Ahora Rebeca se ve a sí misma como los demás la ven a ella.

Debido a que cada letra de TIMOTHY tiene un eje de simetría vertical, la imagen reflejada en el espejo no presenta ningún cambio. En REBECA sólo la A tiene eje de simetra vertical; por eso la A permanece invariable, pero todas las demás letras quedan invertidas por reflexión.

¿Por qué los espejos trastruecan derecha e izquierda, y no lo alto y lo bajo? Lo mismo que en las paradojas sobre la Luna o las monedas, esta otra paradoja plantea también una cuestión semántica, imposible de contestar sin antes convenir el significado de palabras como *izquierda, derecha* e *invertir.* Puede verse un análisis más detallado de lo que hacen los espejos en los tres primeros capítulos de *Ambidextrous Universe (Izquierda y derecha en el cosmos,* Editorial Salvat, 1973), también mío. Dicho libro contiene mucho material acerca de la «simetría del espejo», es decir, las simetrías respecto de un plano, y sobre su papel en la ciencia y en la vida cotidiana.

A diferencia de las letras de TIMOTHY, las de DIOXIDO tienen todas eje de simetría horizontal. Por consiguiente, al colocar un espejo en lo alto de la palabra todas sus letras permanecen invariables al reflejarse. En la palabra CARBONO, las letras C, B, O se ven iguales en el espejo, porque también ellas tienen eje de simetría horizontal. En cambio, las A, R, N, que carecen de él, se ven invertidas.

¿Qué palabras permanecen invariables al sufrir reflexiones de este tipo? El primer paso consiste en examinar todas las mayúsculas y hacer la lista de aquellas que posean eje de simetría horizontal. Son éstas: B, C, D, E, H, I, K, O, X. Con ellas pueden formarse muchas palabras de cuatro o más letras: DEDO, DICHO, EXHIBIDO, OBEDECE, HOCICO, OXIDO, DECIDIDO, y otras muchas.

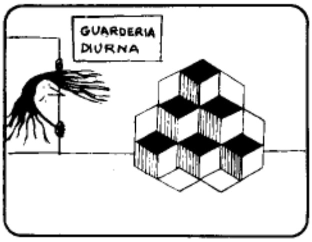
Podemos ver una imagen no invertida de nuestra cara situando en diedro recto dos espejos de mano y mirando al ángulo. (Puede ser necesario ajustar el ángulo de los espejos, hasta ver una sola imagen de nuestro rostro.) Al guiñar el ojo izquierdo, la imagen devuelta por el espejo no guiñará *su* ojo derecho, como podíamos esperar, sino el ojo del lado contrario. Los dos lados de nuestra cara habrán sido permutados, porque cada lado es reflejado por dos veces, una por cada espejo.

Seguramente su cara le parecerá extraña; y ello se debe a que la cara que usted ve en los espejos planos ordinarios está siempre invertida. Aunque el rostro tiene un plano de simetría vertical, raramente sus mitades derecha e izquierda son imagen especular perfecta una de otra. Al vernos la cara por doble reflexión es como verla no reflejada, y estas leves diferencias de sus mitades hacen que nos resulte curiosamente distinta, aunque no sepamos decir exactamente por qué. ¡Y ése es, sin embargo, el rostro por el que los demás nos conocen! Más todavía, la imagen especular de nuestra cara les resulta curiosamente igual de extraña a quienes nos conocen bien.

Una buena forma de poner a prueba nuestra comprensión de cómo funciona el doble espejo es preguntarnos qué podremos ver al colocar los espejos no con el diedro vertical, sino horizontal. ¡Ahora el doble reflejo volverá boca abajo nuestra cabeza! ¿Acaso este rostro nuestro, que vemos boca abajo, ha sido vuelto del revés, izquierda con derecha, por el espejo? No, no ha sufrido reversión. Si guiñamos el ojo izquierdo, nuestra imagen, cabeza abajo, volverá como antes a guiñarnos el ojo del lado contrario.

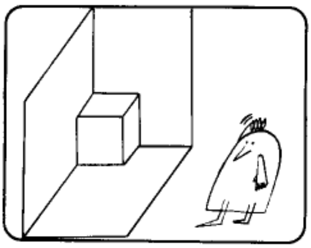
Estos ejemplos pueden servir de excelente introducción al estudio de simetrías respecto de ejes y planos en geometría de transformaciones. Las paradojas pueden todas explicarse aplicando nociones elementales de esa teoría.

# Cubos y damas




¿Cuántos cubos es usted capaz de ver aquí? ¿Hay seis? ¿O hay siete?


¿No es éste el retrato de una mujer joven? ¿O tal vez ve usted una vieja bruja?



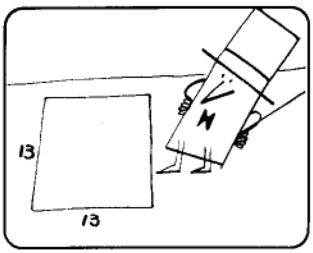
¿Qué observa usted aquí? ¿Un cubo pequeño adosado a un rincón de un cuarto? ¿Un cubo pequeño, *sobresaliente* de un gran bloque cúbico? ¿O quizá un gran bloque al que se ha *vaciado* un hueco cúbico en un vértice?

Estas ilusiones ópticas son todas ellas ejemplos de interpretación fluctuante de lo que vemos. En la primera ilusión, la mente imagina que un motivo plano es representación en perspectiva de un conjunto de cubos; empero, este conjunto puede concebirse de dos maneras distintas. Ambas interpretaciones son igualmente buenas, y por ello la mente salta de una a otra, irresoluta.

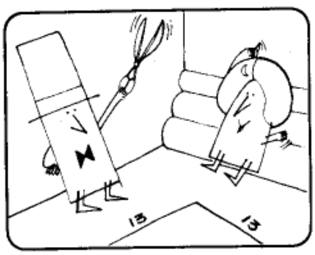
Igual descripción vale para el dibujo de la mujer joven o de la bruja. Es imposible no ver una u otra, y la mente salta, aun sin querer, de una a otra interpretación.

En la tercera de estas ilusiones son posibles no dos, sino *tres* interpretaciones. La que más suele costarle a todo el mundo es la de bloque con hueco vaciado, seguramente porque raramente hemos tenido ocasión de ver huecos cúbicos en bloques cúbicos. Pero con un poco de constancia, tratando de imaginar que el cubo pequeño no es un sólido, sino un hueco, se terminará viendo el dibujo en la forma explicada. Hay fuerte relación entre la capacidad para «ver» este diagrama de las tres formas posibles y la capacidad de visualización de dibujos geométricos. En geometría, una de las principales fuentes de confusión procede de la incorrecta «visión» de los dibujos.

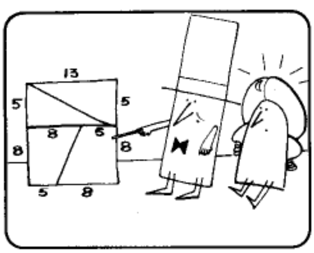
# Las curiosas alfombras de Randi



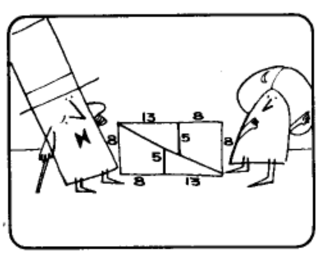

Randi, mago famoso conocido en todo el mundo, tiene una alfombra de 13 por 13 decímetros, y la quiere transformar en otra de 8 por 21. Para ello, Randi llevó su alfombra a Omar, un especialista.




**Randi:** Omar, amigo mío, quiero que cortes esta alfombra en cuatro piezas, y luego montes con ellas una alfombra rectangular de 8 por 21 decímetros.
**Omar:** Lo lamento, señor Randi. Es usted un gran mago, pero no anda bien de aritmética. 13 por 13 son 169, mientras que 8 por 21 son 168. No podrá ser.




**Randi:** Querido Omar, el gran Randi *jamás* se equivoca. Ten la bondad de cortar la alfombra en cuatro piezas como éstas.




Omar hizo como se le dijo. Después Randi reagrupó las piezas, y Omar las cosió, formando una alfombra de 8 por 21.
**Omar:** ¡No puedo creerlo! El área se ha contraído, de 169 a 168 $dm^2$! ¿Qué ha ocurrido con el decímetro cuadrado que falta?

Esta clásica paradoja es tan sorprendente y difícil de explicar que vale la pena tomarse la molestia de dibujar el cuadrado en papel milimetrado, recortar las cuatro piezas y reagruparlas en forma de rectángulo. A menos que las piezas sean muy grandes y hayan sido recortadas y dibujadas con gran precisión, será imposible observar la leve superposición que se produce a lo largo de la diagonal principal del rectángulo. Esta ligera imperfección del ajuste de las piezas a lo largo de la diagonal explica la desaparición de una unidad de superficie. Si duda usted de la existencia de traslapado tiene un método sencillo para convencerse: calcule usted la pendiente de la diagonal del rectángulo, y compárela con las pendientes de las piezas.

¿Qué sucedería si dibujásemos el rectángulo en papel milimetrado, recortásemos las piezas, y construyéramos el cuadrado? Tal vez le entren deseos de averiguarlo.

En esta paradoja intervienen cuatro números: 5, 8, 13, 21. Seguramente haya usted reconocido en ellos cuatro términos de una famosa sucesión. ¿Sabría usted dar la regla recursiva que va generando los términos? La sucesión es conocida por sucesión de Fibonacci, y en ella cada término resulta de sumar los dos precedentes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Otras variantes de esta paradoja se basan en otros grupos de cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. En cada caso descubrimos que el rectángulo tiene distinta área que el cuadrado; unas veces es una unidad de más; otras, de menos. El paso siguiente es descubrir que cuando hay pérdida al pasar del cuadrado al rectángulo es a causa de un «solapamiento» de forma rómbica sobre la diagonal principal, a lo largo de la cual se produce la superposición, mientras que cuando hay ganancia es a causa de una rendija, también rómbica, que ensancha la diagonal.

Dados los cuatro términos de la sucesión de Fibonacci en que se basa alguna de estas versiones, ¿podremos predecir si habrá pérdida o ganancia? La paradoja sirve para ilustrar una de las propiedades fundamentales de la sucesión de Fibonacci. Al elevar al cuadrado uno cualquiera de los términos de la sucesión, el cuadrado resultante es igual al producto de los términos adyacentes por cada lado a dicho término, más o menos una unidad. Algebraicamente,

$$t_n^2 = (t_{n-1} \cdot t_{n+1}) \pm 1$$

El primer miembro de la igualdad equivale, como es obvio, al área del cuadrado, mientras que el segundo da el área del rectángulo. Los signos «más» y «menos» van alternándose a lo largo de toda la sucesión. Todo número de Fibonacci que ocupe lugar impar en la sucesión (por ejemplo, 2, 5 o 13 en la sucesión de Fibonacci dada arriba) tiene un cuadrado una unidad mayor que el producto de los términos de lugar par adyacentes a él. Recíprocamente, todo número situado en lugar par (por ejemplo, 3, 8, 21, ... en la sucesión) tiene un cuadrado que es una unidad menor que el producto de los términos adyacentes, ambos de lugar impar, que lo escoltan. Sabiendo esto, es fácil predecir si el rectángulo asociado a un cuadrado dado ganará o perderá una unidad de superficie.

*La* sucesión de Fibonacci empieza 1, 1; pero una «sucesión de Fibonacci genealizada» puede comenzar con dos números cualesquiera. Pueden entonces explorarse variantes de la paradoja basadas en otras sucesiones más generales. Por ejemplo, la sucesión 2, 4, 6. 10, 16, 26, ... da pérdidas y ganancias de cuatro unidades de área. La sucesión 3, 4, 7, 11, 18, ... da pérdidas y ganancias de cinco unidades.

Sean $a$, $b$, $c$ tres términos consecutivos cualesquiera de una sucesión de Fibonacci generalizada, y sea $x$ la pérdida o ganancia. Se verifican las siguientes relaciones:

$$a + b = c$$

$$b^2 = ac \pm x$$

En lugar de $x$ podemos tomar cualquier pérdida o ganancia que deseemos, y en lugar de $b$, la longitud que nos parezca conveniente para lado del cuadrado. Resolviendo el sistema de ecuaciones tendremos los valores de $a$ y $c$. Empero, puede ocurrir que las soluciones no sean números racionales.

¿Podremos cortar el cuadrado de forma tal que al redisponer las piezas el rectángulo tenga área exactamente *igual* a la del cuadrado?

Para responder a esto, pongamos $x = 0$ en la segunda de las ecuaciones anteriores, y despejemos $b$ en función de $a$. La única solución positiva es

$$b = \frac{(1 + \sqrt{5})\, a}{2}$$

La expresión $(1 + \sqrt{5})/2$ es la famosa razón áurea, ordinariamente denotada $\phi$ (phi). Es éste un número irracional de valor 1,618033... Dicho de otra forma, la única sucesión de Fibonacci en la que el cuadrado de cada término es exactamente igual al producto de sus dos términos adyacentes es

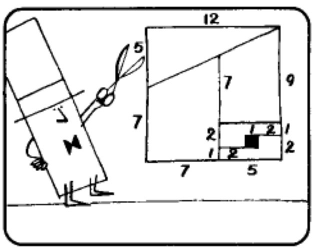
$$1,\ \phi,\ \phi^2,\ \phi^3,\ \phi^4,\ \ldots$$

Con cierto trabajo de manipulación de los radicales podríamos demostrar que la sucesión anterior es una verdadera sucesión de Fibonacci, viendo que es equivalente a la sucesión

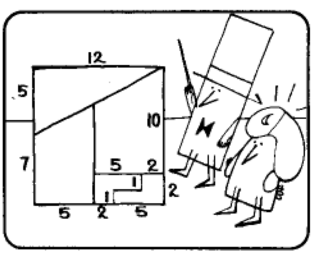
$$1;\ \phi;\ \phi + 1;\ 2\phi + 1;\ 3\phi + 2;\ \ldots$$

Tan sólo si se descompone el cuadrado en longitudes que sean números consecutivos de la sucesión anterior podremos conseguir que las áreas del rectángulo y el cuadrado sean idénticas (aunque, claro, ¿cuál es ahora la paradoja?). Para saber más acerca de la razón áurea, y de su relación con la paradoja del cuadrado y el rectángulo, véase el capítulo dedicado a $\phi$ en mi *Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.*


Pocos meses después, Randi retornó con una alfombra de 12 por 12 decímetros.
**Randi:** Omar, viejo amigo, mi estufilla eléctrica se cayó sobre esta preciosa alfombra y la ha quemado. Yo creo que cortándola y recosiéndola será fácil reparar el agujero.




Aunque Omar no lo veía nada claro, siguió al pie de la letra las instrucciones de Randi. Después de cosidas las piezas, la alfombra seguía midiendo 12 por 12, ¡y el agujero había desaparecido!




**Omar:** Se lo ruego, señor Randi, ¡dígame cómo lo ha conseguido! ¿De dónde ha salido el decímetro cuadrado necesario para llenar el hueco?

¿Cómo podrán cuadrados idénticos tener áreas diferentes? En la segunda de estas paradojas, la pérdida de área viene en forma de agujero real y manifiesto. A diferencia de la paradoja anterior, el ajuste a lo largo de la línea oblicua es perfecto. ¿Qué habrá podido sucederle a la unidad cuadrada que falta?

Para dar con la respuesta, haga usted dos ejemplares del cuadrado sin agujero; cuanto mayores, tanto mejor. Uno de los cuadrados debe ser recortado con la máxima precisión, descompuesto, y sus piezas reagrupadas con objeto de que aparezca el agujero. Una vez en esta disposición, situemos sobre ella el cuadrado no descompuesto, ajustándolo cuidadosamente por arriba y los costados. Se verá entonces que el «cuadrado» del agujero no es un verdadero cuadrado, sino un rectángulo, cuya altura es 1/12 de decímetro mayor que la base. Esta tira que sobresale por la parte baja mide 12 por 1/12, y tiene la misma superficie que el agujero del interior.

Tenemos así explicado dónde ha ido a parar el cuadrado unidad. Pero ¿por qué aumenta la altura del cuadrado? El secreto es que el vértice situado sobre la hipotenusa de la pieza rectangular no se encuentra en un punto reticular, es decir, sus coordenadas no son ambas enteras. Sabiendo esto podrá usted construir variantes del cuadrado en las cuales la pérdida o ganancia superficial sea mayor de una unidad cuadrada.

Esta paradoja es conocida por «paradoja de Curry», en recuerdo de su inventor, Paul Curry, mago aficionado neoyorquino. La paradoja admite numerosas variantes, incluidas formas triangulares. Si se quiere saber más sobre cuadrados y triángulos de Curry, véase el capítulo 8 de mi libro *Mathematics, Magic and Mystery*, y el capítulo 11 de mis *New Mathematical Diversions from Scientific American* (versión española, *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, 1982).

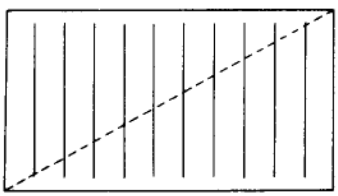
# Duendecillo juguetón

Las versiones más divertidas de estas paradojas son aquellas en que se hace desaparecer una figura de persona. Fijémonos, por ejemplo, en el rompecabezas del duendecillo desaparecido *(The Vanishing Leprechaun Puzzle),* diseñado por Pat Patterson, de Toronto, y cuyos derechos de venta y *copyright* pertenecen a la Elliott Company, de Toronto. Reproducimos aquí el rompecabezas. Para no estropear el libro, fotocópielo y después recórtelo por su borde y por las líneas de puntos, formando tres rectángulos. Intercambie entre sí los dos rectángulos superiores, y uno de los quince duendecillos desaparecerá, esfumándose sin dejar rastro. ¿Cuál de ellos se ha esfumado? ¿Adónde ha ido? Cuando regrese, ¿de dónde habrá venido?

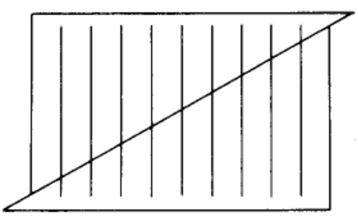
En caso de que usted desee disponer de una versión de lujo de esta paradoja, impresa en color sobre una cartulina de casi medio metro de largo, escriba a W. A. Elliott Company, 212 Adelaide Street West, Toronto, Ontario, Canada M5H 1W7.

Durante más de un siglo han venido usándose con fines publicitarios paradojas de desaparición de personas. Hace un siglo que Sam Loyd, famoso inventor norteamericano de problemas y rompecabezas, lanzó una versión circular, en la que un guerrero chino parece esfumarse al hacer girar un disco. Desde entonces se han impreso otras muchas versiones, tanto rectilíneas como circulares.

La forma más eficaz de explicar la paradoja es trazar con escuadra y cartabón 10 rectas paralelas sobre una ficha de cartulina, igualmente espaciadas, como se muestra:



Después se corta la ficha a lo largo de la línea de puntos, y se hace deslizar la mitad inferior hacia la izquierda y abajo.

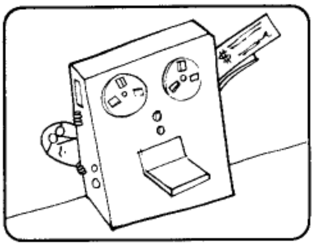


Contemos las líneas. ¡Ahora sólo hay nueve! Carece de sentido preguntar cuál de los diez trazos primitivos ha desaparecido. La realidad es que las diez rectas han quedado repartidas entre 18 trozos, y que estas partes han sido reagrupadas en un nuevo conjunto de 9 líneas. Cada una de las 9 líneas es, evidentemente, 1/9 más larga que cada una de las diez anteriores. Al hacer deslizar nuevamente la pieza inferior, esta vez hacia arriba, aparece una décima línea; las nuevas líneas son ahora 1/10 más cortas de lo que antes eran.

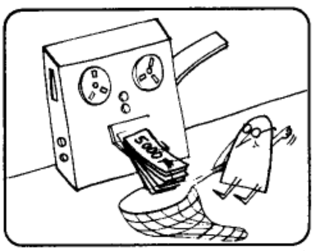
Exactamente lo mismo sucede con los enanitos. Cuando los duendes son 15, cada uno de ellos es 1/15 más bajo que cuando sólo hay 14. Es imposible detectar cuál de los quince se esfuma, porque el conjunto de catorce duendes es un grupo *totalmente distinto* del otro. Y cada uno de ellos es 1/14 mayor que antes. Puede verse un extenso análisis de esta paradoja, y de otras relacionadas con ella, en el capítulo 7 de mi *Mathematics, Magic and Mistery.*

El mismo principio que inspira esta paradoja sirve de fundamento a un viejo método de falsificación. Podemos cortar 9 billetes en 18 partes, de forma parecida a como antes se hizo, y recomponerlos formando diez billetes. Los nuevos billetes, no obstante, son fácilmente detectables, porque sus mitades no tendrán números iguales. Todos los billetes estadounidenses llevan la numeración en dos ángulos opuestos, uno arriba y otro abajo, justamente para frustrar semejante plan de falsificación. En 1968, un tribunal de Londres condenó a ocho años de prisión a un individuo, reo de utilizar semejante método con billetes de cinco libras.

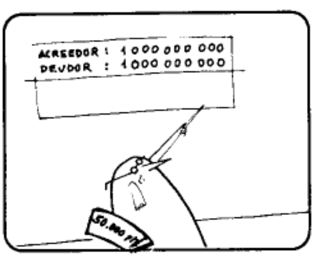
# Timo en el gran banco



Tal vez no lo crea, pero estas paradojas tienen algo en común con el método empleado por un programador poco escrupuloso para robar a un gran banco.



**Ladrón:** ¡Muchacho! ¡Soy un genio! Voy a sacar 50 000 pesetas mensuales limpias de la manera más tonta. Acabo de programar nuestro ordenador para que redondee *por defecto* todas las cuentas de nuestros clientes, en lugar de hacerlo a la unidad más próxima.

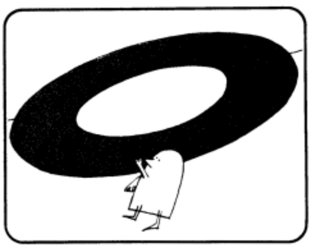



**Ladrón:** Cada cliente nuestro perderá alrededor de 50 céntimos de peseta al mes. Es tan poco que nadie lo va a notar. Pero como el banco tiene cien mil clientes, la pérdida total será de unas 50 000 pesetas. Cada mes el ordenador las depositará en mi cuenta secreta, ¡y los libros de contabilidad quedarán perfectamente cerrados!

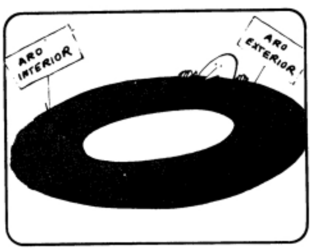
Las paradojas de desaparición de áreas se basan en ir robando pedacitos de áreas de muchos sitios. La primera de las alfombras de Randi, una vez reagrupadas las piezas, tiene una superposición imperceptible a lo largo de la diagonal principal del rectángulo. La segunda de sus alfombras, después de cortada y reformada, se contrae en altura una cantidad minúscula. Después de la desaparición de un enanito, cada uno de ellos es ligeramente mayor que los anteriores. Después de que hayan sido ingresadas las 50 000 pesetas en la cuenta del ladrón, el saldo de algunas de las cuentas de los clientes del banco será una peseta inferior a lo que debiera.

# La fantástica rosquilla reversible

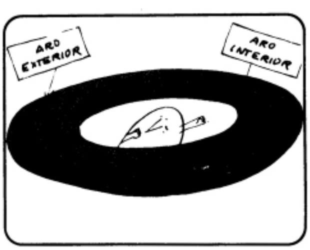

Suele decirse que la topología es la «geometría de la lámina elástica», porque estudia qué propiedades se conservan al deformar y estirar las figuras.



Los toros son superficies fascinantes, de forma de rosquilla. ¿Querrá usted creer que un toro hecho de goma fina y que tenga un agujero puede ser vuelto del revés a través del agujero? Aunque es muy difícil, *sí* puede conseguirse.




Antes de volver del revés el toro, imaginemos que por su *interior*, transversalmente, le pegamos un aro de goma, y por el *exterior*, longitudinalmente, un cinturón más grande, también de goma. Las bandas *no* están entrelazadas.




Éste es el aspecto que deberá presentar el toro una vez vuelto del revés. ¡Pero ahora los aros elásticos están eslabonados! Y es imposible formar una cadena con dos aros sin cortar y volver a pegar uno de ellos. *Algo* debe estar mal, pero ¿qué?

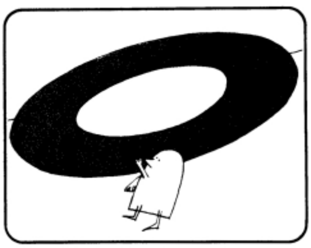
Sí es cierto que un toro puede ser vuelto del revés a través de un agujero, pero al hacerlo no por ello quedarán encadenados los aros de goma. La razón es que cuando el toro queda del revés ¡los aros se cambian uno por otro! Después de la reversión, el pequeño aro interior queda estirado por el exterior, ocupando el antiguo lugar del aro grande, mientras éste se ve contraído y convertido en el pequeño; así pues, los dos aros siguen igual de sueltos que antes. La clave de la paradoja reside en que el dibujante hizo en la última viñeta lo que nosotros hubiéramos esperado ver, y no lo que realmente sucede.

Es muy difícil volver del revés un toro de goma, como puede ser la cámara de un neumático, porque es preciso estirar la goma demasiado enérgicamente. En cambio, es fácil conseguirlo con un modelo de tela. Doblemos por la mitad un cuadrado de tela, cosiéndolo por los bordes opuestos al doblez, para hacer un tubo. Doblemos ahora la tela en el otro sentido y cosamos los extremos libres del tubo, haciendo un toro. Al alisarlo tendrá forma cuadrada. Para facilitar la vuelta del revés, el agujero será una rendija cortada horizontalmente en la capa de tela situada al exterior.

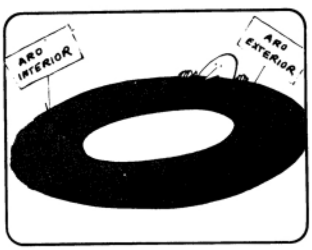
Ahora es sencillo volver del revés este toro de tela a través de la rendija. Tras la reversión el toro tendrá la misma forma que antes, pero ahora la rendija está verticalmente situada y el «grano» del tejido ha quedado vuelto 90 grados. Dicho de otra forma: los círculos que antes contorneaban al toro de una forma ahora lo circundan de la otra. Para mejor comprender cómo este giro de la trama del tejido explica la transposición de las dos bandas elásticas de que antes se habló, podemos valernos de dos rotuladores de distinto color, con los cuales trazamos un aro en torno al toro en uno de los sentidos, y otro anillo de distinto color en el otro. Al volver el toro del revés se podrá apreciar que los dos aros han intercambiado sus posiciones.

# La fantástica rosquilla reversible

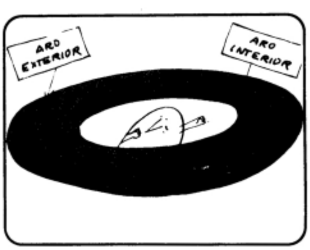

Suele decirse que la topología es la «geometría de la lámina elástica», porque estudia qué propiedades se conservan al deformar y estirar las figuras.



Los toros son superficies fascinantes, de forma de rosquilla. ¿Querrá usted creer que un toro hecho de goma fina y que tenga un agujero puede ser vuelto del revés a través del agujero? Aunque es muy difícil, *sí* puede conseguirse.




Antes de volver del revés el toro, imaginemos que por su *interior*, transversalmente, le pegamos un aro de goma, y por el *exterior*, longitudinalmente, un cinturón más grande, también de goma. Las bandas *no* están entrelazadas.




Éste es el aspecto que deberá presentar el toro una vez vuelto del revés. ¡Pero ahora los aros elásticos están eslabonados! Y es imposible formar una cadena con dos aros sin cortar y volver a pegar uno de ellos. *Algo* debe estar mal, pero ¿qué?

Sí es cierto que un toro puede ser vuelto del revés a través de un agujero, pero al hacerlo no por ello quedarán encadenados los aros de goma. La razón es que cuando el toro queda del revés ¡los aros se cambian uno por otro! Después de la reversión, el pequeño aro interior queda estirado por el exterior, ocupando el antiguo lugar del aro grande, mientras éste se ve contraído y convertido en el pequeño; así pues, los dos aros siguen igual de sueltos que antes. La clave de la paradoja reside en que el dibujante hizo en la última viñeta lo que nosotros hubiéramos esperado ver, y no lo que realmente sucede.

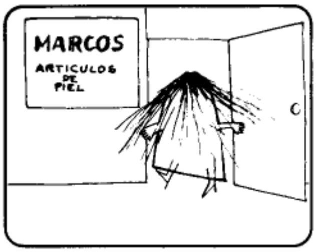
Es muy difícil volver del revés un toro de goma, como puede ser la cámara de un neumático, porque es preciso estirar la goma demasiado enérgicamente. En cambio, es fácil conseguirlo con un modelo de tela. Doblemos por la mitad un cuadrado de tela, cosiéndolo por los bordes opuestos al doblez, para hacer un tubo. Doblemos ahora la tela en el otro sentido y cosamos los extremos libres del tubo, haciendo un toro. Al alisarlo tendrá forma cuadrada. Para facilitar la vuelta del revés, el agujero será una rendija cortada horizontalmente en la capa de tela situada al exterior.

Ahora es sencillo volver del revés este toro de tela a través de la rendija. Tras la reversión el toro tendrá la misma forma que antes, pero ahora la rendija está verticalmente situada y el «grano» del tejido ha quedado vuelto 90 grados. Dicho de otra forma: los círculos que antes contorneaban al toro de una forma ahora lo circundan de la otra. Para mejor comprender cómo este giro de la trama del tejido explica la transposición de las dos bandas elásticas de que antes se habló, podemos valernos de dos rotuladores de distinto color, con los cuales trazamos un aro en torno al toro en uno de los sentidos, y otro anillo de distinto color en el otro. Al volver el toro del revés se podrá apreciar que los dos aros han intercambiado sus posiciones.

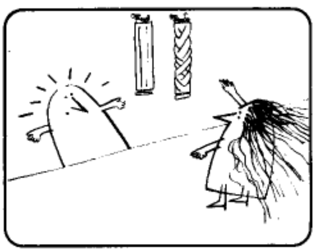
No es fácil visualizar exactamente cómo se deforma el toro durante el proceso de reversión. Puede verse una serie de dibujos que muestran todas las etapas del proceso en «Topology», por Albert Tucker y Herbert Bailey, en *Scientific American,* enero de 1950, y en la página 179 de *Mathematics,* Life Science Library.

Hay muchas otras paradojas acerca del toro. Por ejemplo, si se encadena un toro (sin agujeros) a un toro «con boca» (con un agujero), ¿podrá éste tragarse al otro y encerrarlo concéntricamente en sí? La respuesta es afirmativa; puede verse cómo hacerlo en mi sección de «Juegos matemáticos» de *Scientific American* (mayo de 1977) o de *Investigación y Ciencia* (julio de 1977). Hay otras paradojas sobre toros en mi sección de diciembre de 1972 (concerniente a toros anudados) y en diciembre de 1979 (febrero de 1980 de *Investigación y Ciencia*).

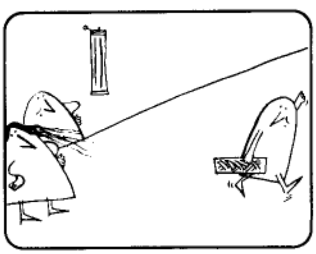
# Una trenza enrevesada



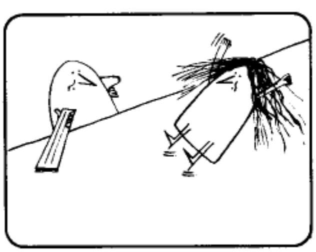

Lupe va de compras. Está buscando una pulsera de piel.



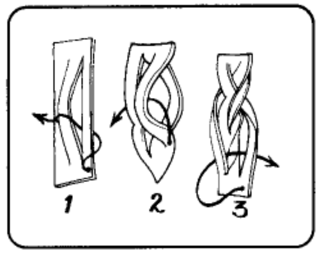
En el taller de Marcos, ella ha visto dos pulseras que le gustan. Las dos consisten en tres tiras de cuero. Una está trenzada, la otra no.
**Lupe:** ¿Cuánto cuesta esa pulsera trenzada?



**Marcos:** Son 500 pesetas, señora. Pero siento decirle que acabo de venderla.
**Lupe:** ¡Sí que es lástima! ¿No tendrá usted otra?

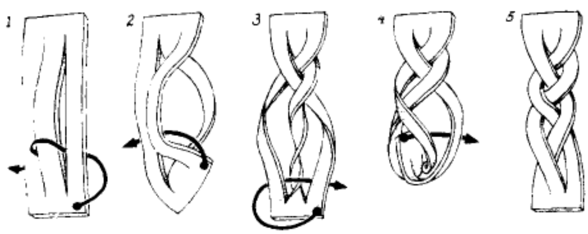


**Marcos:** Pues sí, tengo esta otra.
**Lupe:** Pero ésa no está trenzada.
**Marcos:** Con mucho gusto se la trenzaré, señora.




Parece imposible, pero Marcos trenzó la pulsera en 30 segundos, ¡y sin cortar ni una sola de las tirillas! Vemos aquí cómo empezó el trabajo.

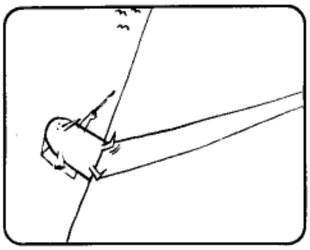
Lo verdaderamente sorprendente de la pulsera es que la trenza, que tiene seis nudos, pueda formarse a pesar de que las tirillas estén permanentemente ligadas entre sí por ambos cabos. Dicho de otra forma, la pulsera trenzada es topológicamente equivalente a la pulsera lisa. La ilustración nos muestra un procedimiento para formar la trenza. Repitiéndolo con tirillas más largas podemos prolongar la trenza cuanto queramos con la condición de que el número de nudos sea múltiplo de seis. Si usted desea hacerse un brazalete o cinturón trenzado como se ha dicho, empiece por empapar el cuero con agua caliente para hacerlo más flexible.



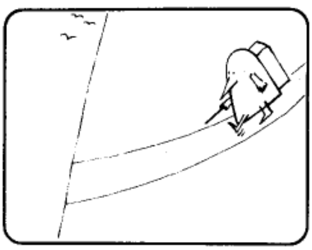

No hay dificultad en formar trenzas de este mismo tipo con más de tres tiras. Puede verse más información en un artículo de A. H. Shepherd, «Braids Which Can Be Plaited with Their Threads Tied Together at Each End» («Trenzas que pueden tejerse con sus cabos ligados entre sí por los extremos»), en los *Proceedings of the Royal Society, A,* vol. 265 (1962), pp. 229-244. Puede verse también el capítulo «Trenzas y teoría de grupos», en mis *New Mathematical Diversions from Scientific American* (versión española, *Nuevos pasatiempos matemáticos,* Alianza Editorial, 1982).

Casi todo el mundo pensará que esta pulsera es tan sólo otra de las muchas curiosidades topológicas; pero en realidad es mucho más que eso. Emil Artin, famoso matemático alemán establecido en los Estados Unidos, ha desarrollado una teoría del trenzado, en la que aplicó sistemáticamente la teoría de grupos. Así pues, los «elementos» de grupo son «pautas de trenzado», la «operación» o ley de composición del grupo consiste en ejecutar dos pautas, una tras otra, y la «inversa» de una pauta de trenzado es su imagen especular, simétrica de ella respecto de un plano. Las trenzas proporcionan un magnífico punto de partida para el descubrimiento y exploración de los grupos y las transformaciones geométricas. (Hay una excelente introducción a la teoría de trenzas en el artículo de Artin «The Theory of Braids», en *The Mathematics Teacher,* mayo de 1959.)

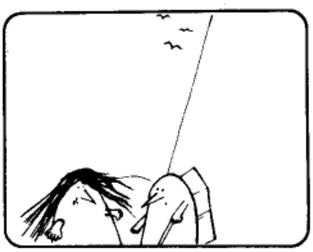
# El punto ineludible



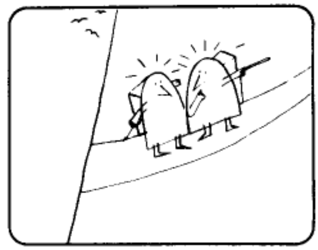
Pat echó a andar por un estrecho sendero que sube hasta la cima de un monte. Salió a las siete en punto de la mañana, y llegó a la cumbre a las siete de la tarde del mismo día.



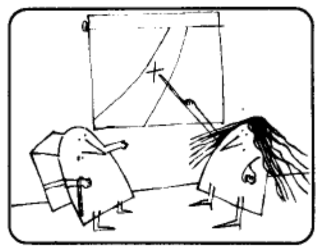
Tras una noche de meditación en la cumbre, Pat emprendió el camino de regreso, descendiendo por el mismo sendero, a las siete de la mañana.



A las siete de la tarde de ese día, Pat se tropezó con la doctora Klein, su profesora de topología.
**Doctora Klein:** Hola, Pat. ¿Sabías que al descender hoy pasaste por cierto punto *exactamente* a la misma hora en que pasaste ayer al subir?
**Pat:** Me parece que está usted tomándome el pelo. ¡No puede ser! Fui caminando a distinta velocidad. Incluso hice paradas para comer y descansar.



Pero la doctora Klein estaba en lo cierto.
**Doctora Klein:** Imaginemos que cuando tú iniciaste el ascenso, un doble tuyo empezaba simultáneamente a descender. Poco importa cómo hagáis el camino tu doble y tú. Es seguro que habréis de cruzaros en algún punto del sendero.



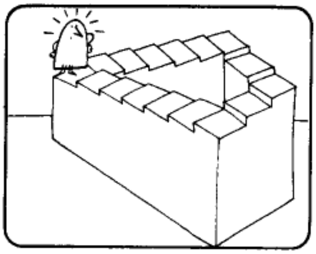
**Doctora Klein:** No podemos asegurar dónde os encontraréis; sólo sabemos que el encuentro forzosamente ha de producirse. Tu doble y tú estaréis allí al mismo tiempo. Por tanto, tiene que haber un punto en el sendero por donde tú pasaste, al subir y al bajar, a una misma hora del día.

Si para cada punto del sendero formamos un par ordenado, anotando las horas en que Pat pasó por él en sus trayectos de ida y de vuelta, habremos construido una correspondencia entre horas. Al menos una de estas horas tiene que hallarse emparejada consigo misma. El cuentecillo sirve, pues, para ilustrar con un ejemplo muy sencillo lo que en topología se llaman *teoremas de punto fijo*. La demostración que hemos dado es una «demostración de existencia»; lo único que hace es establecer la existencia de un punto fijo cuando menos. Los teoremas de punto fijo son de extraordinaria importancia en la aplicación de la topología a otras ramas de la matemática, y en general, de la ciencia.

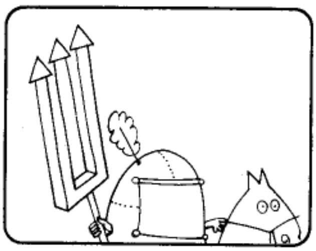
Puede ponerse de manifiesto el significado de un famoso teorema de punto fijo con ayuda de una caja poco profunda y de una hoja de papel que cubra exactamente el fondo de la caja. Imaginemos emparejado cada punto del papel con el punto situado exactamente debajo de él en el fondo de la caja, lo que define una correspondencia entre puntos del papel y puntos de la caja. Saquemos el papel, estrujémoslo, y hecho una bola dejémoslo caer al azar en la caja. ¡Los topólogos han demostrado que comoquiera que el papel sea estrujado, y dondequiera que caiga en la caja, tiene que haber al menos un punto situado exactamente encima del punto de la caja que le estaba asociado! Véase «A Fixed Point Theorem», en *What is Matematics?*, por Richard Courant y Herbert Robbins (versión española, *Qué es la matemática*, Editorial Aguilar, 1967).

Este teorema, que fue demostrado por el matemático holandés L. E. Brouwer en 1912, tiene muchas curiosas aplicaciones. Por ejemplo, demuestra que en todo momento existe sobre la superficie terrestre un punto donde el viento está en calma. También se puede demostrar que hay siempre sobre la Tierra dos puntos antípodas (puntos extremos de un diámetro terrestre) que tienen exactamente igual temperatura y presión atmosférica. Un teorema parecido puede servir para demostrar que si una esfera estuviera totalmente cubierta de pelo sería imposible peinarla con todo el pelo aplastado. (En cambio, sí podemos dejar perfectamente liso el pelo de una rosquilla peluda.) Puede verse una excelente introducción a estos temas en «Fixed-Point Theorems», por Marvin Shinbrot, en *Scientific American*. enero de 1966.

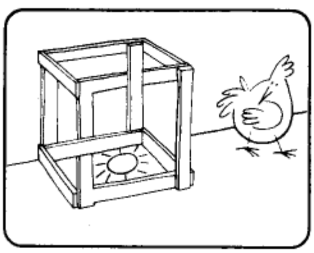
# Objetos imposibles



Si a Pat pudo sorprenderle la existencia de un punto, ¡cuánto más no le sorprenderá esta escalinata! Puede estar eternamente subiendo por ella, ¡y retornar al punto de partida en cada vuelta!



¿Cuántas puntas tiene el arma de este caballero andante? ¿Dos o tres?



¿Podría usted construir un modelo de este armazón absurdo?

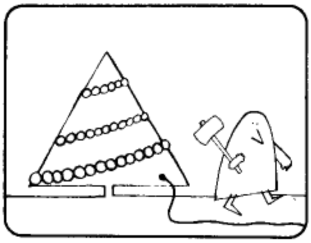
La escalinata, el arma y el armazón son llamados *objetos imposibles*, y también, *figuras indecidibles*. La escalinata imposible fue inventada por el genetista inglés Lionel S. Penrose y su hijo, el matemático Roger Penrose, quienes la dieron a conocer en 1958; suele llamársela por ello *escalinata de Penrose*. Al artista holandés M. C. Escher esta escalinata le fascinaba. En una de sus litografías, la titulada *Ascenso y descenso*, Escher se valió eficazmente de ella.

La figura imposible de dos o tres puntas es de origen desconocido. Hacia 1964 empezó a ser broma común entre ingenieros y proyectistas. La revista humorística *Mad*, en su portada de marzo de 1965, presentaba a Alfred E. Neuman sosteniendo en equilibrio uno de estos objetos sobre la yema del índice.

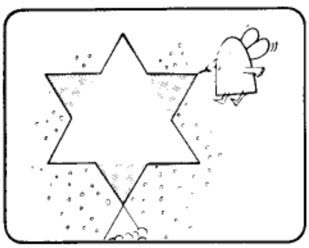
El armazón absurdo, también de origen desconocido, aparece en otro de los dibujos de Escher, titulado *Belvedere*. Estos tres objetos nos hacen ver cuán fácilmente podemos ser inducidos a creer engañosamente que un diagrama geométrico representa una estructura auténtica, mientras que tal estructura es intrínsecamente contradictoria, y, por tanto, no puede existir. Tales objetos son como analogías visuales de proposiciones indecidibles del tipo de «Esta frase es falsa», comentadas en el capítulo 1.

Pueden verse más ejemplos de figuras indecidibles en mi *Mathematical Circus* y en los libros del artista gráfico japonés Mitsumasa Anno, especialmente, *Anno's Alphabet* y *Anno's Unique World*.

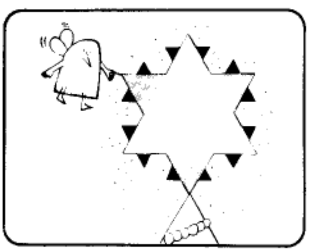
# Una curva patológica



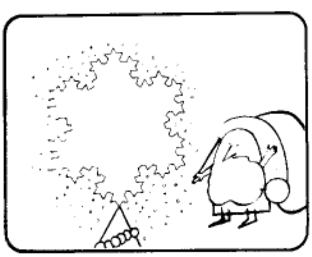
La curva en «copo de nieve» es otra figura paradójica, pero ésta no imposible. Para construirla partimos de la silueta de un árbol de Navidad: un triángulo equilátero.



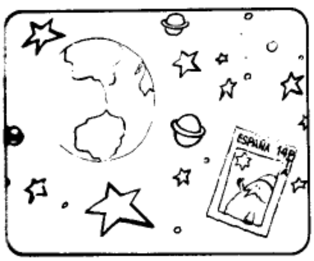
Dibujando un triángulo sombreado más pequeño, construido sobre el tercio central de cada lado del triángulo inicial, este angelito ha formado una estrella de seis puntas.



El querubín repite la construcción, dibujando triangulitos todavía más pequeños sobre los lados de la estrella. La curva se va alargando, y empieza a parecerse a un copo de nieve.



La siguiente repetición genera una curva todavía más larga y más bonita.



Prosiguiendo de esta forma, el perímetro de la curva llega a ser tan grande como se quiera. Y aunque su gráfica cabe en un sello de Correos, ¡su longitud puede ser mayor que la distancia que separa a la Tierra de la estrella más lejana!

La curva «copo de nieve» se cuenta entre las más bellas de una familia infinita de curvas llamadas *patológicas* por sus desconcertantes propiedades. Prosiguiendo *ad infinitum* la construcción del copo de nieve, vemos que su longitud límite es infinita, y, sin embargo, ¡encierra en sí un área finita! Dicho de otra forma: las consecutivas longitudes de la curva, tomadas en cada paso de su construcción, forman una sucesión divergente, mientras que las correspondientes áreas encerradas por las curvas forman una sucesión convergente hacia 8/5 del área del triángulo de partida. Además, es imposible definir una recta tangente en ninguno de los puntos de la curva límite.

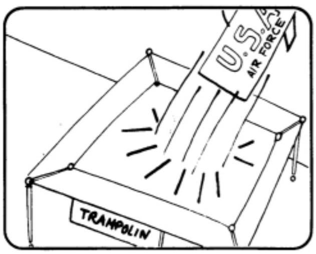
La curva en copo de nieve puede serle útil para consolidar la idea de límite. ¿Sabrá el lector demostrar que si el triángulo inicial tiene área 1, el área límite encerrada por la curva medirá 8/5?

He aquí algunas otras construcciones emparentadas con ésta:

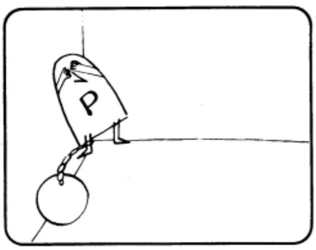
1. Construya el anticopo, trazando los triángulos hacia adentro en vez de hacia afuera, y borrando las líneas de base. En el primer paso se obtienen tres «diamantes» concurrentes en un punto, como si fueran las tres palas de una hélice. ¿Tendrá también esta curva longitud límite infinita? ¿Encerrará también un área finita?
2. ¿Qué sucederá al emplear como base de construcción otros polígonos regulares?
3. Investigue qué efecto se producirá al construir sobre cada lado más de un polígono.
4. ¿Existirán análogos tridimensionales del copo de nieve y sus parientes? Por ejemplo, construyendo tetraedros sobre las caras de tetraedros, ¿tendrá el sólido límite una superficie de área finita? ¿Será finito el volumen que encierre?

En mi sección sobre curvas patológicas de diciembre de 1976 en *Scientific American* (febrero de 1977 en *Investigación y Ciencia*) puede verse una curva paradójica llamada *curva serpenteante*, descubierta por William Gosper. Otra curva muy notable, descubierta por Benoit Mandelbrot, fue reproducida en la portada de abril de 1978 de *Scientific American* (junio de ese año de *Investigación y Ciencia*) y analizada en mi sección del mismo número. Hay más información sobre curvas patológicas emparentadas con el copo de nieve en *The Fractal Geometry of Nature*, libro cuyo autor es Mandelbrot.

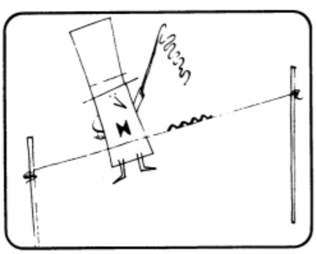
# El universo desconocido



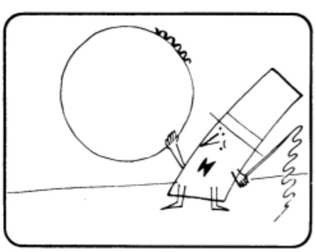

Si una astronave lanzada desde la Tierra prosiguiese indefinidamente en línea recta, ¿se alejaría siempre más y más de nosotros? Pudiera ser que no, sugirió Einstein. ¡Pudiera ser que retornase a nuestro planeta!



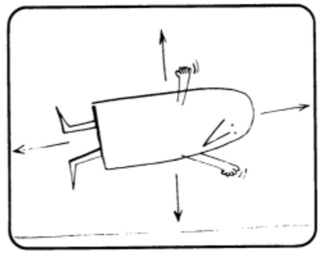

Para comprender la paradoja de Einstein fijémonos primero en este pobre «puntolandés». El mundo del puntolandés se reduce a un punto. ¡Su universo tiene dimensión cero!



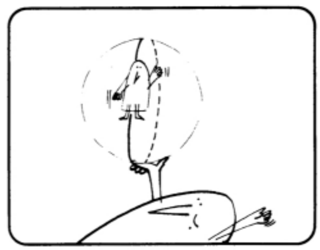
El linelandés, que vive sobre una recta unidimensional, viene a ser como la oruga que repta por el hilo tenso. Si el cordel fuese infinito, podría viajar eternamente en cada sentido.



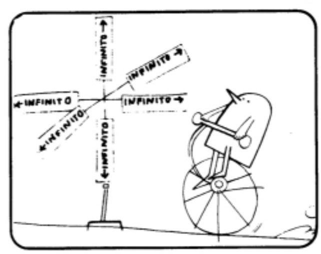
Si la cuerda estuviera curvada y cerrada, como un aro, formaría una línea ilimitada que tendría, sin embargo, longitud finita. Y si la oruga reptase lo suficiente en un sentido cualquiera acabaría por retornar al punto de partida.



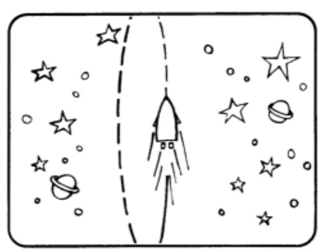
El planilandés vive sobre una superficie bidimensional. Si su universo fuese un plano infinito podría viajar eternamente sobre él, en cualquier dirección.



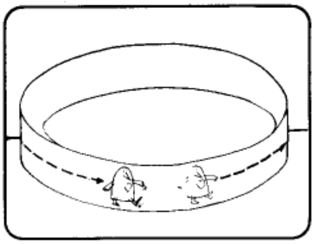
Pero si su superficie es cerrada, como lo es una esfera, resultará ser finita e ilimitada. También el planilandés retornaría entonces al punto de partida si caminase siempre «en línea recta», en una dirección cualquiera.



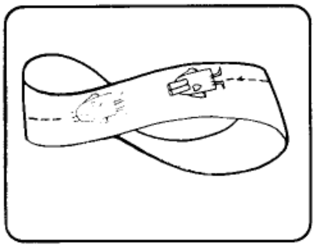

Usted y yo somos solidlandeses, que vivimos en un espacio tridimensional. Tal vez nuestro espacio sea infinito en todas direcciones.



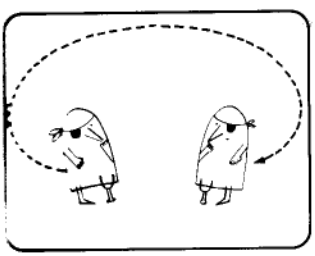
O tal vez, como creyó Einstein, sea un espacio curvo inmenso en un espacio de dimensión superior, formando un universo finito e ilimitado como los otros ejemplos. Una astronave que surcase tal espacio, siguiendo siempre la trayectoria «más recta» posible, acabaría retornando a casa.



Cuando un planilandés circunvala una esfera es como si estuviera caminando a lo largo de un cinturón liso. Si tuviera el corazón situado a un costado, lo tendría siempre del mismo lado.



Pero cuando un planilandés circunvala una banda de Möbius, algo extraño sucede: el rizado de la banda lo vuelve del revés, y así, al retornar, su corazón estará del *otro* lado.



Si nuestro universo fue curvo, pudiera estar retorcido como una banda de Möbius. Un astronauta que hiciera un circuito en torno a un tal espacio pudiera encontrarse «del revés» al regresar.

Los astrónomos ignoran todavía si el espacio de nuestro universo es cerrado, como sugirió Einstein, o abierto. Todo depende de cuánta materia contenga. Según la teoría general de relatividad, la presencia de materia en el espacio tiene por efecto hacer que éste se «curve», y tal curvatura aumenta conforme aumenta la proporción de materia. En nuestros días, la mayoría de los cosmólogos opinan que no hay en el universo materia suficiente para que la curvatura sea tan grande que el espacio se cierre. La cuestión, empero, sigue abierta, pues todavía no se conocen ni la naturaleza ni la densidad de la materia que el universo contiene. Pudiera suceder que el universo contenga suficiente «materia oculta» como para cerrarse a sí mismo. (En este momento se sospecha que los neutrinos tienen en reposo masa positiva, en lugar de masa nula, como se venía creyendo.)

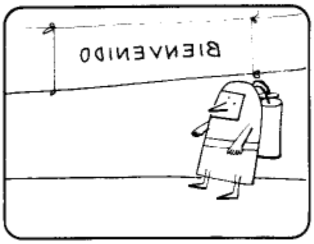
No existen pruebas de que el espacio de nuestro universo esté rizado como una banda de Möbius, pero a los cosmólogos les gusta inventar diversos modelos de cosmos, y en algunos de estos modelos suyos el universo, además de curvatura, tiene torsión. Para comprender cómo el planilandés podría sufrir una simetría respecto de un eje —quedando convertido en su imagen especular— tras cerrar un círculo alrededor de una banda de Möbius, es importante tener en cuenta que la banda tiene espesor nulo. Un modelo hecho de papel es en realidad un cuerpo sólido, porque el papel sí tiene espesor. Es preciso admitir que la banda de Möbius no tiene grosor.

Al trazar sobre una banda de Möbius una figura plana, lo que sucede viene a ser que la tinta traspasa el papel: la figura no está dibujada sobre una cara, sino «embebida» en la superficie. No es posible hacerla deslizar por un «lado» sin hacerla al mismo tiempo deslizar por el otro. Cuando esta figura describa un circuito en torno a la banda, al retornar al punto de partida se encuentra «vuelta del otro lado», transformada en su simétrica. Como es natural, un segundo circuito en torno a la banda la devolverá a su forma primitiva. Análogamente, si un astronauta recorriera a través de un cosmos con torsión un circuito semejante, podría sufrir en el proceso una «reversión» como la explicada, si bien un segundo recorrido lo dejaría como antes.

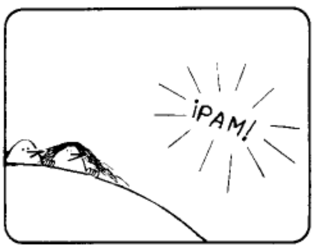
Si las paradójicas propiedades de la banda de Möbius le han intrigado, seguramente le agrade explorar otras dos superficies no menos paradójicas: la botella de Klein y el plano proyectivo. Lo mismo que la banda de Möbius, son superficies de una sola cara, pero a diferencia de ésta, no tienen borde. Ambas son cerradas, como la superficie de una esfera. La botella de Klein está emparentada con la banda de Möbius, porque convenientemente cortada en dos, forma dos bandas; una, imagen de la otra por reflexión en el espejo. Un planilandés «embebido» en una botella de Klein, o un plano proyectivo, puede convertirse en copia simétrica de sí mismo sin más que realizar un viaje en torno a la superficie (v. el capítulo 2 de mi *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*). La obra clásica sobre la vida en dos dimensiones es *Flatland,* de Edwin A. Abbott. Una segunda parte, *Sphereland,* se debe a Dionys Burger.

Tal vez encuentre usted de su agrado un cuento de H. G. Wells titulado «The Plattner Story» (que forma parte de su colección *28 Science Fiction Tales*). Este cuento de ciencia ficción relata el caso de un hombre que en un viaje interestelar sufre la «simetrización», y al retornar, su corazón se encuentra al otro lado.

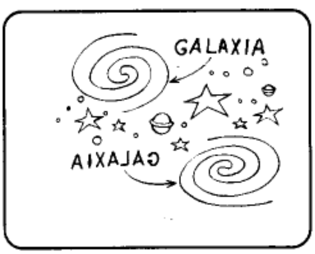
# Antimateria



Un astronauta que sufriera esta reversión se encontraría normalmente; en cambio, el mundo que le rodease parecería estar reflejado en el espejo: la escritura iría de derecha a izquierda, y los coches parecerían circular por mano contraria.




Muchos físicos opinan que la materia, al sufrir esta «reflexión», se convertiría en antimateria, la cual se aniquila cuando entra en contacto con la materia ordinaria. En tal caso nuestro astronauta nunca podría volver a la Tierra. ¡Tan pronto como su astronave «simetrizada» tocase nuestra atmósfera haría explosión!




¿Contiene nuestro universo galaxias de antimateria? ¿Existirán inmensos universos de antimateria, exteriores al nuestro? Hoy por hoy, los cosmólogos sólo pueden aventurar conjeturas.

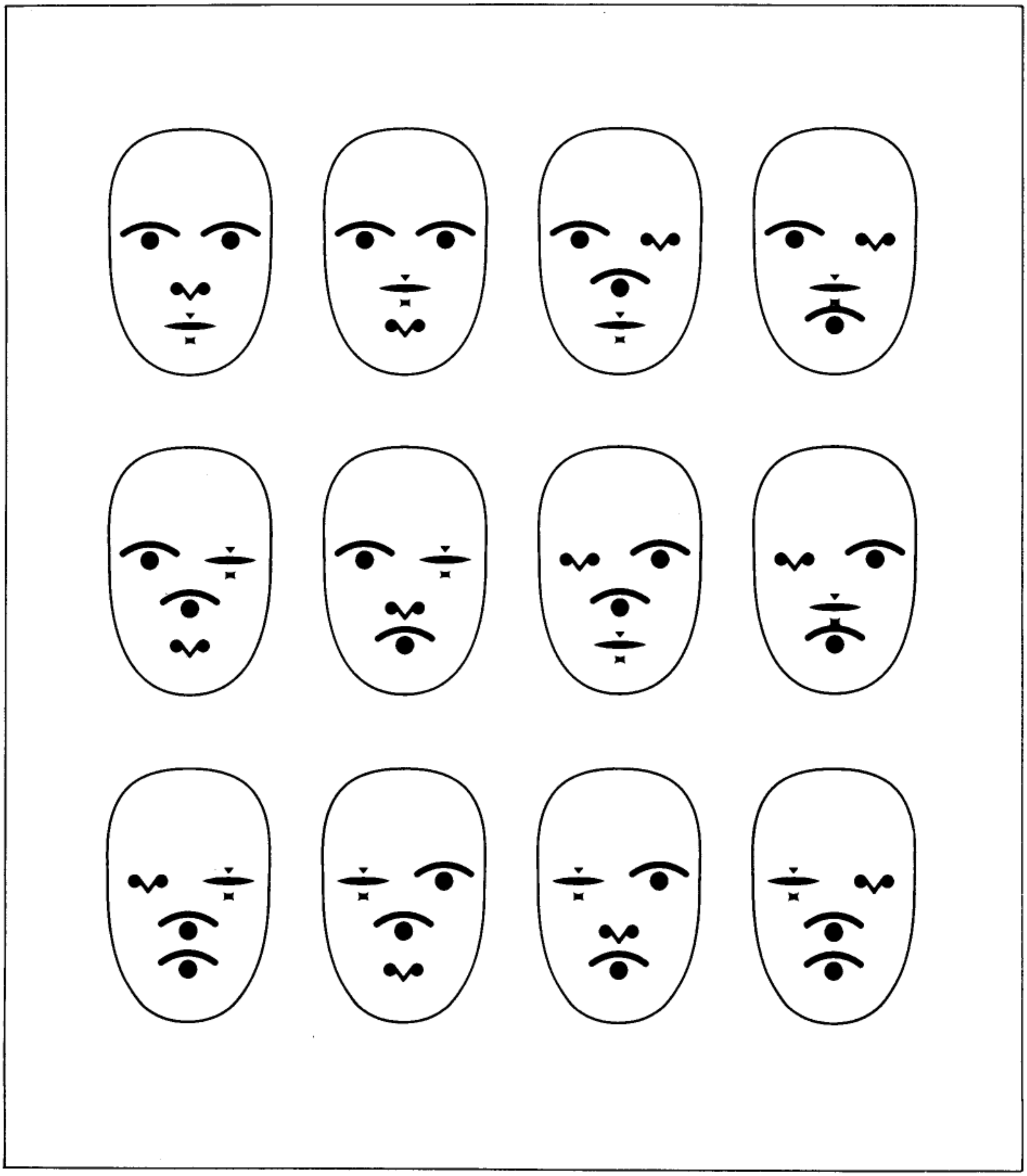
Cada partícula fundamental tiene una antipartícula que es idéntica a dicha partícula, excepto en que su carga eléctrica (si es que la tiene), o alguna otra propiedad, es de signo contrario. Muchos físicos opinan que las antipartículas son, sencillamente, partículas cuya estructura interna es imagen simétrica de la partícula ordinaria. La materia formada por antipartículas se llama *antimateria*.

Cuando una partícula y su antipartícula se encuentran se produce la mutua aniquilación. Nuestra Galaxia está enteramente formada por materia, así que dondequiera que sea creada una antipartícula, sea en el laboratorio o en el interior de una estrella, en un microsegundo quedará aniquilada, destruida al tropezar con su partícula opuesta.

Los cosmólogos, en su gran mayoría, están convencidos de que el universo está formado solamente por materia; no obstante, algunos han defendido la posibilidad de que pueda contener galaxias de antimateria. Como la luz procedente de tales galaxias sería indistinguible de la luz emitida por las galaxias de materia, resulta difícil saberlo. Algunos cosmológos han especulado también con la posibilidad de que inmediatamente después de la gran explosión con que presumiblemente comenzó la evolución del universo, la materia y la antimateria pudieran haberse separado, formando dos universos: un «cosmon» y un «anticosmon», que se repelieron y separaron a gran velocidad.

La idea de que el universo está escindido en estas dos partes, cada una a modo de imagen simétrica de la otra, ha tenido su papel en muchos cuentos de ciencia ficción, y en una novela romántica de Vladimir Nabokov, *Ada.* Puede usted leer más acerca de la antimateria y temas afines en *Elementary Particles,* de Chen Ning Yang; en *Worlds-Antiworlds,* de Hannes Alfvén; y en mi *Ambidextrous Universe (Izquierda y derecha en el cosmos,* Editorial Salvat, 1973).

# 4 Probabilidad





## Paradojas acerca del azar, las apuestas y las creencias

La teoría de probabilidad ha llegado a ser tan esencial en todas las ramas de la ciencia —no sólo en las ciencias físicas, sino también en las biológicas y sociales—, que a buen seguro los años venideros pondrán en ella cada vez más fuerte acento en la enseñanza de matemáticas de nivel elemental. El obispo Joseph Butler, y otros antes que él (Cicerón, por dar un nombre), han dicho que la probabilidad es guía de la vida misma. De la mañana a la noche vivimos a base de hacer inconscientemente miles de pequeñas apuestas sobre resultados probables. Y si la mecánica cuántica resulta ser en física la palabra definitiva, el sustrato de las leyes fundamentales de la naturaleza será el azar puro.

Más que en la mayoría de las ramas de la matemática, en teoría de probabilidad bulle y pulula un enjambre de resultados fuertemente contrarios a la intuición, de problemas cuyos resultados parecen absolutamente contrarios al sentido común. En una planta de un edificio podríamos confiar en que las probabilidades de que la primera vez que el ascensor se detiene en ella sean iguales para subir y bajar. Paradójicamente, por lo común esto es falso. En una familia con cuatro hijos podríamos esperar como lo más verosímil que en ella hubiera dos niños de cada sexo, pero también esto es falso.

Las ideas sencillas que sobre probabilidad presentamos aquí le ayudarán a comprender por qué apuestas que parecen favorables en el juego de dados son en realidad desfavorables. Con mayor generalidad, estas ideas son también útiles para comprender por qué ciertas sorprendentes coincidencias no son en realidad tan sorprendentes, aunque de ello se tratará en el capítulo siguiente.

Las paradojas de este capítulo han sido seleccionadas por ser fáciles de comprender, y porque muchas de ellas admiten modelos con materiales tan fácilmente disponibles como barajas y monedas. Siempre que ha sido posible, la paradoja es explicada enumerando todos los casos equiprobables, aun cuando el problema pudiera resolverse más rápidamente con auxilio de teoría de probabilidad. Aunque esta resolución directa sea más larga, se adquiere con ella una comprensión más profunda de la estructura del problema, que no podría conseguirse de otras formas.

Aunque en último extremo tal vez haya solamente una clase de probabilidad, es costumbre por ahora distinguir al menos tres tipos principales:

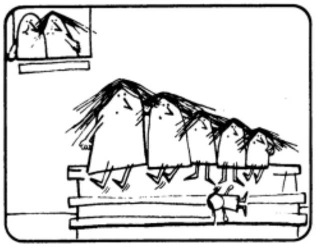
1. La probabilidad clásica, o probabilidad *a priori*. Suponemos aquí que todos los resultados del experimento son igualmente probables. Sabiendo que cierto fenómeno de azar puede admitir $n$ resultados con igual posibilidad, para conocer la probabilidad de que se presente alguno de los $k$ casos de un subconjunto dado basta calcular el cociente $k/n$. Por ejemplo, al lanzar un dado, si el dado está correctamente construido, puede mostrar con iguales posibilidades cualquiera de sus seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par? De los seis resultados equiprobables (1, 2, 3, 4, 5, 6), hay tres que son pares (2, 4, 6), y, por tanto, la probabilidad de sacar puntuación par al lanzar un dado es $3/6 = 1/2$. Dicho de otra forma, pares e impares están a la par. La apuesta es justa.

2. La frecuencia relativa, o probabilidad estadística. Esta probabilidad se aplica a fenómenos cuyos resultados no parecen, en principio, equiprobables. Lo mejor que podemos hacer es repetir el experimento el mayor número posible de veces, e ir anotando la frecuencia de aparición de ciertos resultados. Tendremos un ejemplo cargando un dado de manera que no pueda determinarse fácilmente por inspección. Lo lanzamos cientos de veces. Llevando el registro de las puntuaciones podríamos concluir, pongamos por caso, que la probabilidad de sacar un 6 es 7/10, en lugar del familiar 1/6 del dado equilibrado.

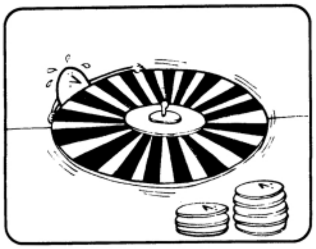
3. La probabilidad inductiva. Tenemos aquí el grado de verosimilitud y credibilidad que los científicos atribuyen a leyes y teorías. A causa del conocimiento insuficiente de la naturaleza puede ser imposible dar una solución clásica; por otra parte, los experimentos y observaciones pueden ser demasiado infrecuentes y ambiguos como para impedir el cálculo preciso de las frecuencias. Por ejemplo, un astrónomo, al examinar todas las pruebas importantes fundadas en los conocimientos científicos de su tiempo, puede llegar a concluir que la existencia de agujeros negros es más verosímil que su inexistencia. Semejantes estimaciones de probabilidad, necesariamente imprecisas, van constantemente cambiando conforme se van descubriendo nuevas evidencias relacionadas con la hipótesis.

Nuestras dos últimas paradojas tocan la cuestión de la probabilidad inductiva, al igual que las dos últimas del capítulo siguiente. Si el lector siente interés por tales paradojas, puede encontrarse pronto buceando en algunas de las aguas más profundas de la moderna teoría de la probabilidad y de la filosofía de la ciencia.

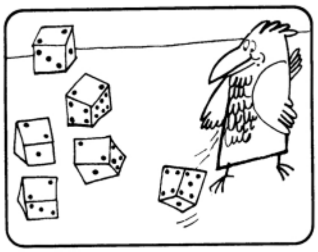
# La falacia del jugador



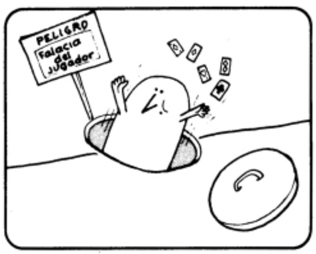
Los señores Buenafé tienen cinco niñas y ningún niño.
**Señora Buenafé:** ¡Cuánto espero que nuestro próximo bebé no sea otra niña!
**Señor Buenafé:** Querida, después de cinco niñas, forzosamente tiene que ser un niño.
¿Tendrá razón el buen señor?



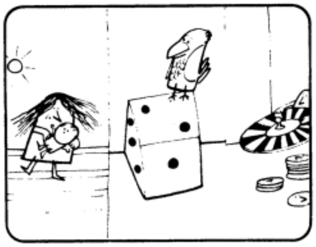
Hay muchos jugadores convencidos de que podrán ganar a la ruleta esperando a que se produzca una larga racha de rojos y apostando entonces al negro. ¿Servirá de algo este sistema?



Edgar Allan Poe argumentaba que si al lanzar un dado se sacan cinco doses seguidos, la probabilidad de sacar otro dos en la siguiente tirada es menor que un sexto. ¿Tenía razón Poe?




Si ha contestado usted afirmativamente a cualquiera de estas preguntas, ha caído usted en la trampa conocida como «falacia del jugador». En todos los casos anteriores el resultado del siguiente acontecimiento no depende de los precedentes.



La probabilidad de que los Buenafé tengan otra niña es la misma que la de que su primer hijo ya lo fuera. La probabilidad de que el siguiente número de la ruleta sea rojo es idéntica a la de que lo fuera el precedente. Y la probabilidad de sacar todavía un dos en el sexto lanzamiento sigue siendo un sexto.

Para mejor aclararlo, supongamos que el señor Buenafé va lanzando una moneda equilibrada, y saca cinco caras seguidas. La probabilidad de que en un nuevo lanzamiento la moneda salga otra vez cara es idéntica a la de antes: un cincuenta por ciento. La moneda no tiene memoria de lo que hizo en lanzamientos anteriores.

Cuando el resultado del acontecimiento *A* tiene influencia sobre el acontecimiento *B*, se dice que *B* es «dependiente» de *A*. Por ejemplo, la probabilidad de que el lector salga mañana con gabardina depende claramente de la probabilidad de que mañana llueva, o (más directamente) de cómo y en cuánto estima el lector tal probabilidad. Los sucesos que en lenguaje ordinario decimos «no tienen nada que ver uno con otro» se llaman sucesos «independientes». La probabilidad de que mañana salgamos con gabardina es independiente de la probabilidad de que el presidente del Gobierno desayune huevos *à la coque*.

A casi todo el mundo le cuesta creer que la probabilidad de sucesos independientes no se vea influida en forma alguna por su proximidad a otros sucesos independientes de la misma naturaleza. Durante la primera guerra mundial, los soldados del frente buscaban para guarecerse embudos de artillería recién formados, convencidos de que los antiguos eran más peligrosos, al ser ya hora de que nuevos proyectiles cayeran por segunda vez en ellos. Como parece inverosímil que dos granadas caigan una tras otra en el mismo punto, los soldados razonaban que los cráteres recién formados serían seguros por algún tiempo.

Hace muchos años se contaba una historieta acerca de un tipo que viajaba mucho en avión. Temeroso de que algún día un pasajero pudiera traer a bordo una bomba escondida, él llevaba siempre en un maletín, desactivada, su propia bomba. Como sabía que era muy improbable que el avión transportase *un* pasajero bombista, sería mucho más improbable —razonaba él— que llevase *dos*. Evidentemente, no por llevar su propia bomba modificaba en lo más mínimo la probabilidad de que otro pasajero la llevase también, como tampoco el lanzamiento de una moneda puede ser influido lanzando otra.

El más popular de todos los sistemas de jugar a la ruleta, conocido como «sistema de D'Alembert», cae de lleno en la «falacia del jugador»: no reconocer la independencia de sucesos independientes. El jugador apuesta al rojo o al negro (o hace cualquier otra apuesta que pueda reportarle la misma cantidad que arriesga), incrementando las cantidades tras cada pérdida, y reduciéndolas tras cada ganancia. El sistema presume que si la bolita de marfil acaba de otorgarle una ganancia al jugador, de alguna forma «se acordará» de ello y estará menos dispuesta a dejarle ganar la siguiente vez. Mientras que si la bolita le hace perder, sentirá compasión del pobre jugador y se mostrará más complaciente en las próximas vueltas de la rueda.

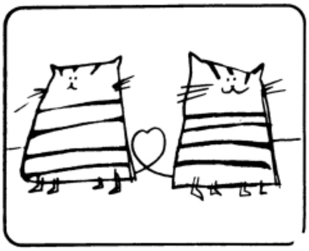
Precisamente porque cada una de las puntuaciones de una ruleta bien equilibrada es independiente de todas las puntuaciones anteriores tendremos una demostración muy sencilla de que ningún sistema de juego podrá dar al apostante ventaja sobre el casino. La palabra *ventaja*, en sus acepciones de «a favor» y «en contra», tiene que usarse con cuidado. Al lanzar una moneda bien equilibrada hay un caso a favor de que salga «cara» por cada caso en contra; es un juego justo, o matemáticamente equilibrado. Empero, un apostador profesional, buscando su beneficio, podría ofrecernos pagos de 4 pesetas contra apuestas nuestras de 5 al jugar a cara o cruz, diciéndonos como explicación «que las apuestas están 4 contra 5». El pago que nos ofrece es inferior al justo. En su *Complete Guide to Gambling* (Guía completa del jugador), John Scarne nos dice:

> Siempre que apostamos por menos de nuestra suerte a favor, lo que sucede sin excepción en toda forma de juego organizado, estamos abonando al operador un porcentaje de recargo a cambio del privilegio de dejarnos apostar. Nuestra oportunidad de ganancia tiene «esperanza negativa», como dicen los matemáticos. Cuando usamos un sistema, lo que hacemos es una serie de apuestas, todas con esperanza negativa. No hay forma de que sumando «signos menos» nos salga al final un «signo más»...

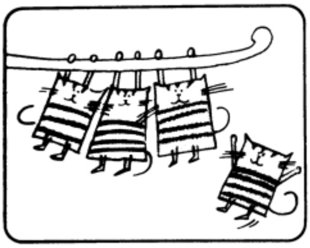
El gazapo de Edgar Allan Poe al hablar de dados aparece en el epílogo de una de sus narraciones detectivescas, *El misterio de Marie Roget.* Un dado, lo mismo que una moneda, una ruleta, o cualquier otro dispositivo de generación del azar, engendra una sucesión de acontecimientos independientes, no influidos en modo alguno por el comportamiento pasado del dispositivo.

Si el lector se siente inclinado hacia alguna forma de la «falacia del jugador», ponga a prueba su creencia simulando una verdadera partida, donde se juegue con algún sistema inspirado en la falacia. Por ejemplo, lancemos repetidamente una moneda, apostando una ficha de póquer (con pagos iguales) solamente si acaba de producirse una tanda de tres resultados iguales. Apueste siempre a favor del cambio de resultado. Concretamente, por ejemplo, después de tres caras seguidas, apueste por cruz, y después de tres cruces, apueste por cara. Al cabo de, pongamos por caso, 50 de estas apuestas será muy improbable que tengamos *exactamente* el mismo número de fichas que al empezar, pero sí debería ser un número cercano. Las probabilidades de ir con ventaja o con desventaja, esto es, ir perdiendo o ganando, son, por supuesto, iguales.

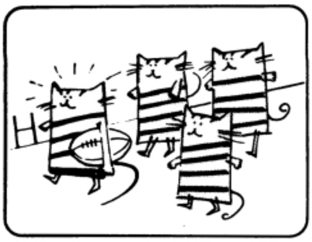
# Cuatro gatitos



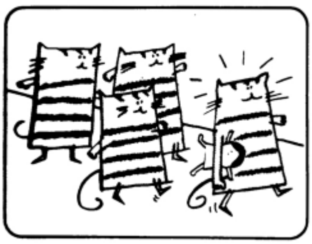
Al calcular probabilidades es fácil despistarse. Vemos aquí a un gato y una gata que se fueron de picos pardos.



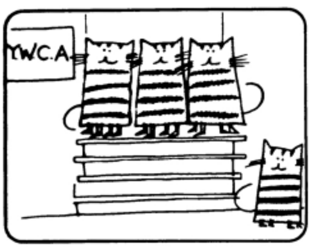
**Señor Gatos:** Oye, salada, ¿cuántos gatitos hemos tenido de la última lechigada?
**Señora de Gatos:** ¡Pero qué zángano eres!: ¿No sabes contar? ¡Pues cuatro!
**Señor Gatos:** ¿Cuántos han sido machos?
**Señora de Gatos:** Es difícil de saber. Todavía no te lo puedo decir.



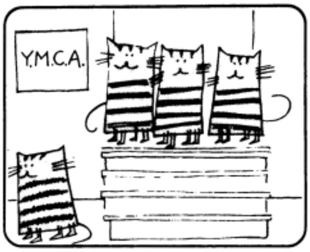
**Señor Gatos:** No es muy probable que los cuatro hayan sido machos.



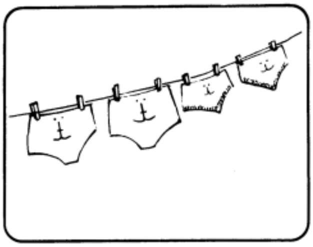
**Señora de Gatos:** Y tampoco lo es que las cuatro sean gatas.



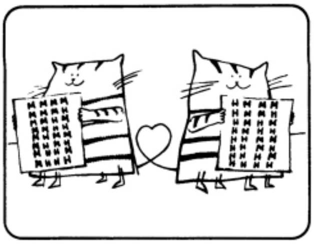

**Señor Gatos:** A lo mejor sólo hay un gatito macho.



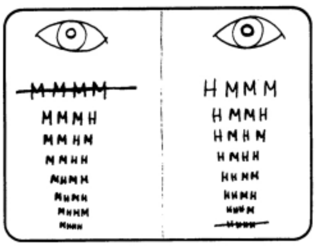

**Señora de Gatos:** Y tal vez haya solamente una hembra.



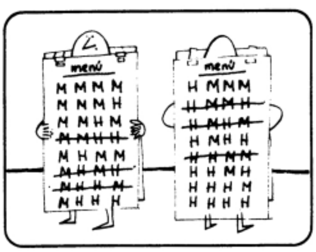
**Señor Gatos:** Calcularlo no es muy difícil. El que un gatito sea macho o hembra es cosa de cara o cruz. Así pues, es evidente que lo más verosímil es que haya dos machos y dos hembras. ¿Les has puesto nombre ya?



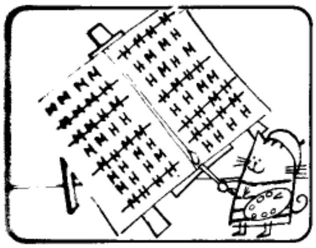
¿Ha razonado correctamente el señor Gatos? Comprobemos su teoría. Denotando $H$ a las hembras y $M$ a los machos, podemos dar la lista de todos los casos igualmente posibles, que son 16.



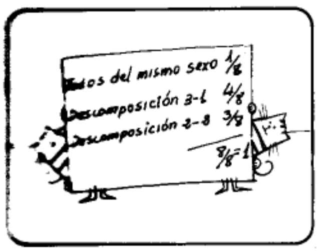

Solamente en dos de los 16 casos son todas las crías del mismo sexo. Por tanto, la probabilidad de que así ocurra es de 2/16, o sea, de 1/8. El señor Gatos estaba en lo cierto al pensar que este resultado tenía una probabilidad pequeña.




Analicemos ahora la descomposición 2 machos-2 hembras que el señor Gatos había considerado como más probable. Esta descomposición se presenta 6 veces. Su probabilidad es, por tanto, 6/16, o sea, 3/8. Qué duda cabe de que 3/8 es más que 1/8. Tal vez el señor Gatos esté en lo cierto.



Pero nos queda otra descomposición más por considerar, a saber, 3 de un sexo y 1 del otro. Así sucede en ocho casos, y su probabilidad es mayor que la del caso 2-2. ¿No podrá ser que nos hayamos equivocado?




Si nuestras probabilidades fuesen correctas deberían sumar 1. Así sucede, lo que nos dice que con certeza tendrá que darse uno de estos tres casos. La estimación del señor Gatos fue errónea. El caso más verosímil no es el 2-2, sino el de 3 de un sexo y 1 del otro.

A casi todo el mundo le sorprende que en familias de cuatro hijos lo más probable es que haya tres de un sexo y uno del otro. Experimentalmente podemos comprobarlo lanzando repetidas veces cuatro monedas. Llevemos registro de cada lanzamiento. Después de cien lanzamientos, aproximadamente 50 deberían mostrar la partición 3-1, y alrededor de 33 la partición 2-2.

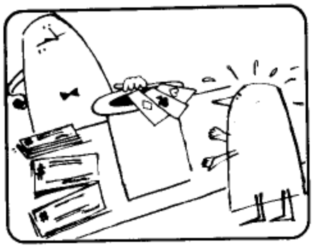
Tal vez sienta usted curiosidad por las probabilidades de las diferentes reparticiones de sexos de 5 o 6 hijos. Podemos hallarlas enumerando todas las combinaciones, pero ello es tedioso. Pudiera convenirle más valerse de los métodos abreviados que explican los libros de probabilidad.

Otro problema parecido, cuya solución también contraría a la intuición se refiere a la forma más probable de distribuirse los palos de la baraja en una mano de *bridge*. La menos probable, desde luego, es que la mano contenga las 13 cartas de un mismo palo. (La probabilidad de que tal ocurra al repartir una baraja bien mezclada es de 158 753 389 899 contra 1.) ¿Cuál es, en cambio, la distribución de palos *más probable*?

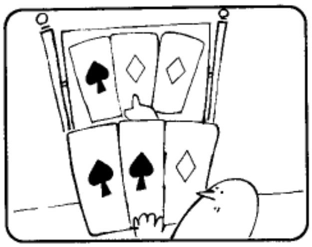
Incluso jugadores de *bridge* avezados suelen conjeturar que es la 4.3.3.3. Esto es erróneo. La mano más probable tiene la distribución 4.4.3.2. Puede esperarse obtener una distribución de estas características aproximadamente una de cada cinco manos, frente a las nueve o diez que por término medio requiere la 4.3.3.3. Incluso es de esperar que salga una 5.3.3.2 cada seis repartos. Puede verse una tabla que da todas las probabilidades en *How to Figure the Odds,* de Oswald Jacobi.

De vez en cuando leemos en la prensa que en una partida de *bridge* algún jugador recibió una mano perfecta. Las probabilidades en contra son tan astronómicas, que con casi absoluta certeza la historia es una bola, o bien alguno de los jugadores quiso gastar una broma pesada y secretamente preparó las cartas, o tal vez lo que pasó es que se abrió una baraja nueva y el repartidor le dio casualmente dos «peinados» perfectos. Un peinado perfecto es el que divide la baraja en dos partes exactamente iguales y después intercala alternativamente una de cada mitad con otra de la otra. En las barajas nuevas los palos vienen separados. Al darles dos peinados perfectos más un corte cualquiera el mazo queda preparado para que al repartir se produzcan *cuatro* manos perfectas de *bridge*.

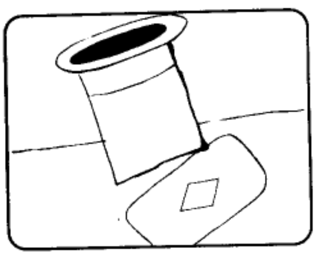
# El timo de las tres cartas



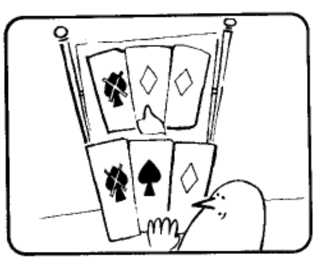
En muchos juegos de azar puede resultar desastroso fiar en la intuición para estimar las probabilidades de éxito. Un sencillo juego de apuestas con tres naipes y un sombrero así nos lo demuestra.



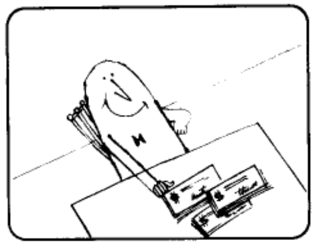
Gracias a un espejo es fácil comprender cómo son los naipes. El primero tiene una pica por ambos lados. El último, diamantes por ambas caras. La carta central muestra una pica en el anverso y un diamante en el reverso.



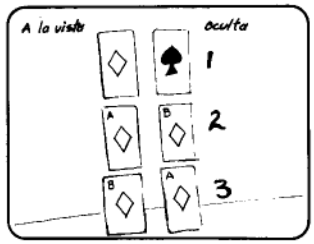
El banquero echa las cartas en su sombrero, las agita, y deja que usted tome una y la coloque sobre la mesa. El banquero le apuesta peseta por peseta a que el palo de la cara oculta es igual que el visible. Supongamos que la carta elegida presente a la vista un diamante.



Para hacerle picar y convencerle de que el juego es justo, el banquero argumenta que el naipe extraído no puede ser el doble pica-pica. Por tanto, o bien es diamante-pica, o bien diamante-diamante. En un caso, la cara oculta es un diamante; en el otro, una pica. Las posibilidades de ganar son, pues, iguales para ambos.



Si el juego es justo, ¿cómo es que el banquero está desplumándonos tan rápidamente? Su razonamiento es falaz. En realidad, él lleva ventaja de dos contra uno.




El truco está en que hay *tres*, y no sólo dos, casos igualmente probables. La carta extraída puede ser una pica-diamante, o diamante-diamante, con la cara *A* hacia arriba. O bien puede ser el diamante-diamante, con la cara *B* a la vista. En estos dos últimos casos ambas caras son iguales. Por consiguiente, el banquero gana dos de cada tres juegos.

Este juego de apuestas fue ideado por Warren Weaver, distinguido matemático, y uno de los cofundadores de la teoría de la información. Weaver presentó este juego en su artículo «Probabilidad», en *Scientific American,* octubre de 1950.

Antes dimos una explicación de las verdaderas probabilidades de este juego. He aquí otra. Hay dos cartas que tengan igual color por ambos lados. Tomando al azar una carta del sombrero, hay una probabilidad 2/3 —es decir, dos casos de cada tres— de que se saque una de estas dos cartas. Por consiguiente, hay probabilidad 2/3 de que la cara oculta de la carta extraída sea igual que la visible.

Este juego es variante de la paradoja conocida por «cajas de Bertrand», así llamada en recuerdo de J. Bertrand, matemático francés que la presentó en un libro sobre probabilidad, escrito en 1889. Bertrand imaginaba tres cajas. Una contenía dos monedas de oro; otra, dos de plata, y una tercera, una moneda de oro y otra de plata. Se elige al azar una de las cajas. Como es obvio, hay probabilidad 2/3 de que las dos monedas de esa caja sean iguales.

Supongamos, empero, que de la caja elegida sacamos una moneda, observándose que es de oro. Ello nos dice que la caja no puede ser la que contiene «plata-plata». Por consiguiente, tiene que ser, bien la «oro-oro», bien la «oro-plata». Siendo igualmente probable que la elegida haya sido una cualquiera de estas dos, parece como si la probabilidad de elegir una caja con monedas iguales hubiera bajado a 1/2. El mismo razonamiento serviría si la moneda extraída hubiese sido de plata.

¿De qué forma puede alterarse la probabilidad de que la caja contenga monedas iguales por la observación de una de sus monedas? Como es obvio, de ninguna.

He aquí otra paradoja del mismo estilo. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas muestren las tres la misma cara? Es seguro que al menos dos *tendrán* que salir iguales. La tercera podrá mostrar, bien la misma cara que las otras, bien cara distinta. Como «cara» (C) y «cruz» (X) tienen iguales probabilidades de aparición, habrá el cincuenta por ciento de probabilidades de que al caer muestre igual cara que las otras dos. Por consiguiente, la probabilidad de que las tres monedas pesenten la misma cara parece ser de 1/2.

Podemos hacer ver la falacia de tal razonamiento enumerando los ocho casos posibles:

| | |
|---|---|
| CCC | XCC |
| CCX | XCX |
| CXC | XXC |
| CXX | XXX |

Observemos que sólo en dos de los ocho casos muestran iguales caras las tres monedas. Las ocho ordenaciones son equiprobables; por consiguiente, la probabilidad correcta es $2/8 = 1/4$.

Otra pequeña paradoja, que tal vez nos cause alguna perplejidad, resultante de una incapacidad para considerar todos los casos posibles, se refiere a un juego de canicas entre un chico y una niña. El niño tiene sólo una bolilla; la niña, dos. Los niños juegan a lanzar sus bolas hacia un palito clavado en el suelo; quien más se aproxime a él vence. Supongamos iguales las habilidades de ambos jugadores, y que las medidas pueden alcanzar la precisión necesaria para deshacer los empates. ¿Qué probabilidad de vencer tiene la niña?

Razonamiento 1. La niña tiene dos canicas que lanzar, contra una única del niño. Por tanto, su probabilidad de vencer es 2/3.

Razonamiento 2. Llamemos *A* y *B* a las canicas de la niña, y *C* a la de su amiguito. Hay cuatro posibles resultados:

1. Las bolas *A* y *B* están ambas más cercanas que *C* a la señal.
2. Solamente *A* está más cercana que *C*.
3. Solamente *B* está más cercana que *C*.
4. La bola *C* está más próxima a la marca que *A* y que *B*.

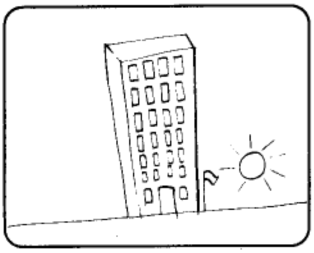
Según esto, la niña gana en 3 de los cuatro casos, y por tanto, su probabilidad de ganar es 3/4.

¿Cuál es en realidad el razonamiento correcto? Para dirimir la cuestión enumeraremos exhaustivamente los seis —que no cuatro— casos posibles. Las seis ordenaciones (por cercanía a la señal) de las tres canicas son:

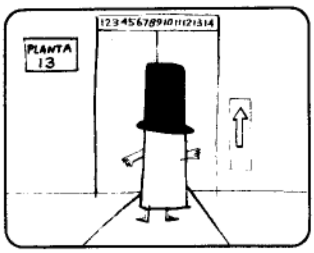
*ABC*
*ACB*
*BAC*
*BCA*
*CAB*
*CBA*

La niña gana en cuatro de los seis posibles resultados *equiprobables* de los lanzamientos, lo que confirma el razonamiento primero, pues su probabilidad es 4/6 = 2/3.

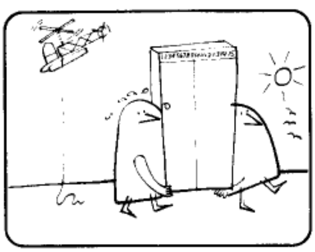
# La paradoja del ascensor



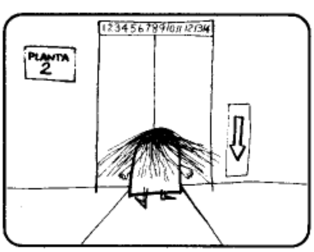
Quienes hacen uso frecuente de ascensores quedan perplejos a menudo ante otra extraña paradoja de la teoría de probabilidad. Vamos a suponer que en este edificio los ascensores se mueven independientemente unos de otros, y que por término medio, su tiempo de parada en cada planta sea el mismo.



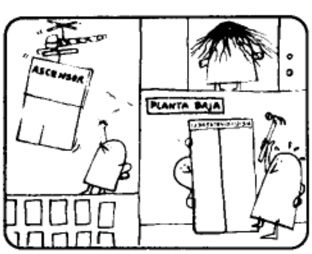

El señor Arribas tiene su oficina en uno de los pisos más altos. Y está muy molesto.
**Señor Arribas:** ¡Condenación! ¡El primer ascensor que se detiene aquí está subiendo! ¡Siempre pasa lo mismo!



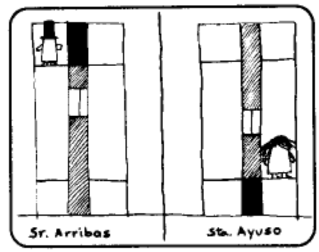
**Señor Arribas:** ¡Claro! ¡A lo mejor en la planta baja fabrican ascensores, y para sacarlos, se los llevan por helicóptero desde el terrado!




La señorita Ayuso trabaja en una de las primeras plantas. Para almorzar tiene que subir hasta el ático, donde está la cafetería. Y también está que trina.
**Señorita Ayuso:** ¡Es que no lo entiendo! ¡Siempre que necesito ascensor, el primero en llegar está bajando!




**Señorita Ayuso:** ¡Vamos, ni que los trajeran por el tejado para almacenarlos en el sótano!




Un sencillo diagrama aclara el misterio. Para el señor Arribas sólo descienden los ascensores de la zona oscura del pozo correspondiente. Esta región es pequeña comparada con la de color claro, así que la probabilidad de que se encuentre el ascensor debajo de él es muy grande. El mismo razonamiento, a la inversa, vale para la señorita Ayuso.

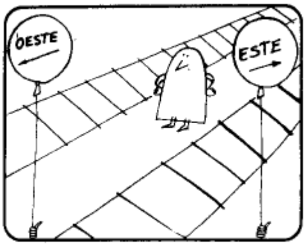
La paradoja del ascensor apareció por vez primera en *Puzzle-Math,* un libro del físico George Gamow y de su amigo Marvin Stern. Al explicar la paradoja con un solo ascensor, Gamow y Stern cometieron un pequeño error. Afirmaban ellos que las probabilidades «seguirían siendo evidentemente las mismas» si hubiese dos o más ascensores.

Donald Knuth, profesor de computabilidad en la Universidad de Stanford, fue el primero en darse cuenta de que no es así. En una nota, «The Gamow-Stern Elevator Problem», publicada en *The Journal of Recreational Mathematics* (julio de 1969), Knuth demostraba que conforme aumenta el número de ascensores, la probabilidad de que el primer ascensor que se detenga en una planta cualquiera esté subiendo se aproxima a 1/2, y la probabilidad de que esté bajando, tiende también a 1/2.

En cierto modo, la situación es ahora más paradójica todavía que antes. Significa que si usted está esperando en una planta cercana al ático y fija su atención en la puerta de un ascensor cualquiera, la probabilidad de que cuando *ese* ascensor llegue a su planta esté subiendo es alta. Pero la probabilidad de que el *primer* ascensor que llegue a la planta esté subiendo, independientemente del pozo por que suba, eso ya es harina de otro costal. *Ésta* es la probabilidad que tiende hacia 1/2 conforme el número de ascensores tiende a infinito. Lo mismo vale para los ascensores descendentes con respecto a las plantas bajas.

Estamos suponiendo, evidentemente, que los ascensores suben y bajan independientemente unos de otros, que se mueven con velocidad constante, y que tienen en cada planta tiempos de parada iguales, al menos en promedio. Cuando sólo hay dos o tres ascensores, los cambios de probabilidad son pequeños, pero cuando hay 20 o más, la probabilidad es muy cercana a 1/2 en todas las plantas, a excepción de la planta baja y de la última.

# Romeo indeciso




¿Conoce usted el caso del donjuán irresoluto? Romeo no lograba nunca decidir a cuál de sus chicas quería visitar. Una vivía al este; la otra, al oeste. Cada día, a horas elegidas al azar, el muchacho iba a su estación de metro y tomaba el tren que antes llegara.

Tren próximo

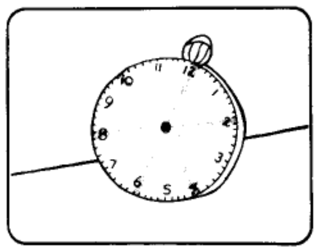
| Hacia al este | Hacia el oeste |
|---|---|
| 12:00 | 12:01 |
| 12:10 | 12:11 |
| 12:20 | 12:21 |
| 12:30 | 12:31 |
| 12:40 | 12:41 |
| 12:50 | 12:51 |

Esta curiosa situación recuerda el problema de los ascensores. Aunque los trenes pasan a intervalos regulares de 10 minutos, los trenes de dirección oeste llegan siempre un minuto después de haber salido de la estación uno de dirección este.

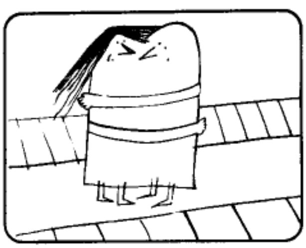
Tren próximo

| Hacia al este | Hacia el oeste |
|---|---|
| 12:00 | 12:01 |
| 12:10 | 12:11 |
| 12:20 | 12:21 |

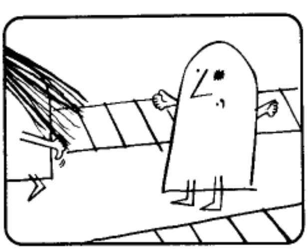
Los trenes, tanto los de dirección este como los del oeste, pasaban a intervalos de diez minutos.



El muchacho sólo tomará el tren de dirección oeste si llega en alguno de los intervalos de 1 minuto sombreados en el reloj. Para tomar un tren hacia el este, le basta llegar en alguno de los intervalos de 9 minutos que vemos en blanco. La probabilidad de ir hacia el oeste es una décima, mientras la de ir hacia el este es de nueve décimas.



Una tarde, la chica «este» le dijo:
**Esther:** ¡Qué contenta estoy! ¡Por término medio vienes a verme nueve de cada diez días!



Pero otra tarde, la chica «oeste» le sacó las uñas.
**Westy:** ¡Ya está bien! ¡Sólo se te ve el pelo cada diez días!

En esta paradoja, los tiempos de espera entre dos trenes están fijados por el horario. En una sucesión de acontecimientos aleatorios, el «tiempo medio de espera» entre acontecimientos se calcula sumando $n$ tiempos de espera consecutivos, y dividiendo por $n$. Por ejemplo, el tiempo medio de espera del joven para tomar trenes de dirección este es de 4 ½ minutos, mientras su tiempo medio de espera para trenes de dirección este es de medio minuto.

Hay otras muchas paradojas sobre tiempo de espera. Tal vez le agrade vérselas con ésta. Al lanzar una moneda, el tiempo medio de espera de «cara» (o de «cruz») es de dos lanzamientos. Esto significa que al tomar una larga lista de resultados de lanzamientos y contar cuántos lanzamientos separan una cara de la siguiente, el «tramo» medio (sin contar la primera, pero sí la segunda) es de dos lanzamientos.

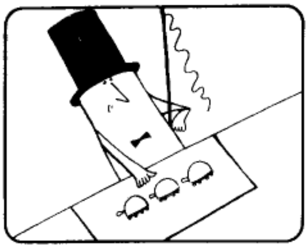
Imaginemos una larga columna de resultados de lanzamientos. Seleccionemos al azar un espacio entre dos anotaciones consecutivas (por ejemplo, cerrando los ojos y trazando a través de la lista una raya horizontal). Buscamos las caras más cercanas por arriba y debajo de la traza, y contamos la separación entre ambas, incluyendo como antes la de abajo, pero no la de arriba. ¿Cuál será el intervalo medio entre caras?

Intuitivamente parece que la respuesta debiera ser: dos lanzamientos. En realidad son tres. La razón es la misma por la cual el joven toma normalmente el tren de dirección este. Algunas rachas entre caras son cortas; otras, largas. La línea trazada al azar viene a ser como la llegada del mozo al andén, que se produce en momentos al azar. Es más probable que nuestra raya atraviese una racha larga que una corta.

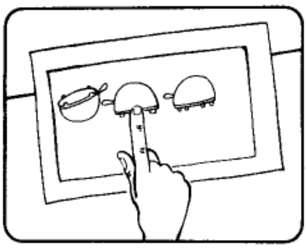
He aquí una demostración sencilla de que la solución es tres lanzamientos. Las monedas no tienen recuerdo de su conducta pasada, así que doquiera demos el corte, el tiempo medio de espera hasta la primera cara habrá de ser dos lanzamientos. Otro tanto es cierto si «damos marcha atrás» al tiempo, y contamos «hacia atrás»; el tramo medio entre caras es dos veces 2, o sea, 4, contadas ambas caras. Puesto que al definir el tramo hemos convenido en incluir una de las caras, pero no la otra, la longitud del intervalo es $4 - 1 = 3$.

Con una ruleta, el problema correspondiente nos deja más perplejos todavía. Una rueda de ruleta suele tener 38 números, pues incluye un 0 y un 00. Por tanto, el número medio de lanzamientos de espera para un número dado, el 7 por ejemplo, es de 38. Sin embargo, al tomar una larga lista de resultados de la ruleta y elegir en ella al azar un espacio de separación, el intervalo medio que selecciona, desde un 7 hasta el siguiente, no mide 38, sino $(2 \times 38) - 1 = 75$.

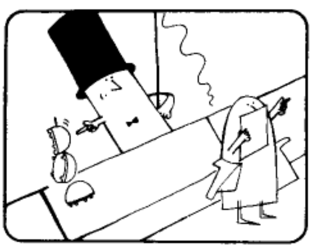
# El juego de las tres nueces



**Feriante:** ¡Acérquense, señoras y señores! Les daré doble contra sencillo si consiguen acertar bajo qué nuez está el guisante. Después de jugar un rato, el bueno de Pánfilo se dio cuenta de que no podría ganar más de una vez de cada tres.



**Feriante:** No se vaya, hombre. Mire, voy a darle alguna ventaja. Elija usted una nuez cualquiera. Yo volveré boca arriba una vacía. El guisante tendrá que estar debajo de alguna de las otras dos, y su probabilidad de ganar será mayor.



El pobre Pánfilo casi pierde la camisa. No se dio cuenta de que al volver la nuez vacía sus oportunidades no mejoraban lo más mínimo. ¿Ve usted por qué?

Después de que Pánfilo haya elegido una nuez, al menos una de las otras dos estará, con certeza, vacía. Como el feriante sabe dónde puso el guisante, siempre puede levantar una nuez vacía. Por consiguiente, tal acción no le aporta a Pánfilo ningún dato útil con el que revisar su estimación de la probabilidad de haber elegido la nuez correcta.

Podemos poner de manifiesto que así sucede con el as de picas y los dos ases rojos. Mezclamos estas tres cartas, y las colocamos boca abajo, en fila, sobre la mesa. Pidamos a una persona que ponga un dedo sobre una de las cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido precisamente el as de picas? Evidentemente, un tercio.

Imaginemos ahora que tras echar un vistazo a las otras dos cartas volvemos boca arriba un as rojo. Lo mismo que el feriante, podríamos razonar así: Sólo hay dos cartas boca abajo. Es igualmente probable que el as de picas sea cualquiera de las dos. Por consiguiente, la probabilidad de que haya sido elegido el as de picas parece haber subido hasta 1/2. En realidad, sigue siendo 1/3. Como *siempre* podremos volver un as rojo, al hacerlo no aportamos nueva información que afecte a la probabilidad.

Puede usted dejar intrigados a los amigos con la siguiente variante. En lugar de echar un vistazo a los naipes no seleccionados, como antes hacíamos para asegurarnos de volver a la vista un as rojo, dejemos que sea la persona que elige el naipe quien vuelva otro, el que prefiera. Si resultase ser el as de picas, la partida se declara nula y se repite todo el proceso, hasta que saque un as rojo. ¿Aumentará así la probabilidad de que nuestro amigo haya elegido el as de picas?

Aunque resulte algo chocante, la eleva, en efecto, hasta 1/2. Podemos comprenderlo analizando un caso típico. Llamemos 1, 2 y 3 a las posiciones de las cartas. Supongamos que nuestro amigo pone su dedo sobre la carta número 2, que a continuación vuelve la carta número 3, y que ésta resulta ser roja.

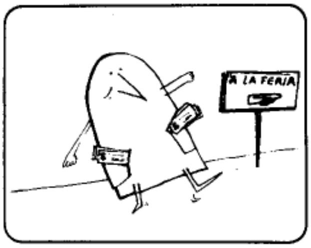
Hay seis formas igualmente posibles de colocar sobre la mesa las tres cartas:

1. A♠ A♡ A♢
2. A♠ A♢ A♡
3. A♢ A♠ A♡
4. A♢ A♡ A♠
5. A♡ A♠ A♢
6. A♡ A♢ A♠

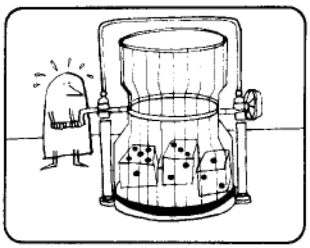
Si la tercera carta (vuelta boca arriba) hubiera sido el as de picas, el juego hubiera sido declarado nulo; por consiguiente, los casos 4 y 6 nunca entran en el problema. Quedan eliminados, por no ser en realidad casos posibles. De los cuatro restantes (1, 2, 3, 5), la carta número 2 es el as de picas en dos casos. Por consiguiente, la probabilidad de que la carta número 2 sea efectivamente el as de picas es 2/4 = 1/2.

El resultado es el mismo independientemente de la carta que elija la persona y del lugar que ocupe la carta alzada como as rojo. Si Pánfilo hubiera podido decidir por sí mismo qué nuez levantar, y ésta hubiera estado vacía, sus probabilidades de acierto *habrían* pasado de 1/3 a 1/2.

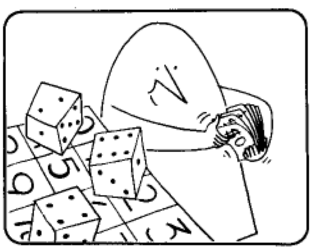
# Tragasuertes



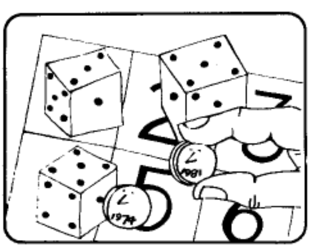

La próxima vez que vaya usted al parque de atracciones, ¡no se acerque al tragasuertes! Muchos son los engatusados que juegan a él, imaginando que nunca podrán perder.



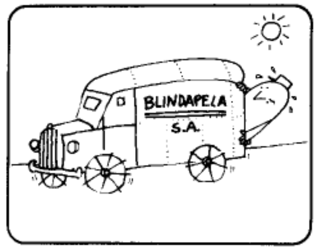
El bombo del tragasuertes tiene en su interior tres dados, que son agitados volteando repetidamente la jaula. Los jugadores apuestan por cualquier número de 1 a 6, y reciben de premio la misma cantidad que apuesten por cada dado que salga con su número. Los jugadores suelen razonar así:



**Señor Pánfilo:** Si el juego tuviera un solo dado, mi número saldría una vez de cada seis juegos. Si el bombo tuviera dos dados, saldría dos veces de cada seis. Como tiene tres, habrá de salir tres veces de cada seis. Así estaríamos a la par.



**Señor Pánfilo:** Pero, en realidad, soy yo quien lleva ventaja, porque si apuesto, por ejemplo, 100 pesetas al 5, y el 5 sale en dos dados, ganaré 200 pesetas. Y si saliera en los tres, ¡entonces serían 300! ¡Seguro que el juego va a mi favor!




Con linces así, no es milagro que los dueños de casinos sean millonarios. ¿Por qué el tragasuertes le da, en realidad, un fuerte porcentaje a la casa?

El tragasuertes, que en Estados Unidos llaman *chuck-a-luck*, se juega allí en muchos casinos. En Inglaterra, a principios del siglo pasado se hizo popular con el nombre de *sweat-cloth*. Más recientemente ha sido conocido como *bird cage*. En los *pubs* ingleses y australianos suele jugarse con tres dados, cuyas caras llevan una pica, un diamante, un corazón, un trébol, una corona y un áncora, y por eso es llamado «corona y áncora» *(crown and anchor)*.

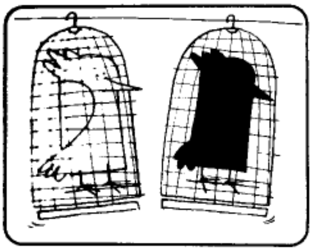
En las ferias, para atraer parroquia, el operador suele gritar: «¡Tres ganan y tres pierden en cada partida!», dando así la impresión de que el juego es justo. El juego *sería* verdaderamente justo si los dados mostrasen siempre tres números distintos. Tras cada vuelta del bombo, el feriante recaudaría 300 pesetas (admitiendo que las apuestas sean a 100 pesetas) de los tres perdedores y pagaría 300 pesetas a los tres ganadores. Por fortuna para el operador, con mucha frecuencia se repite un número en dos o tres dados. Si la repetición se produce en dos dados, ingresa 400 y paga 300, embolsándose 100 pesetas. Y si la repetición fuese triple, por cada 500 pesetas que cobre pagará 300, logrando una ganancia de 200. Gracias a estos dobletes y tripletes gana la casa su porcentaje.

Calcular exactamente este porcentaje mediante fórmulas es cuestión bastante delicada. Lo más seguro es hacer la lista completa de las 216 maneras en que pueden caer los tres dados. Descubrimos entonces que sólo en 120 casos son distintas las tres caras, que en 90 hay dobletes, y que en 6 aparecen tripletes, es decir, los tres dados presentan todos la misma puntuación. Supongamos que se realicen 216 partidas, que dieran los 216 posibles resultados. Supongamos también que seis personas apuestan respectivamente 1 peseta (por comodidad de cálculo) a cada uno de los seis números. El operador recaudará un total de $216 \times 6 = 1296$ pesetas de los apostantes.

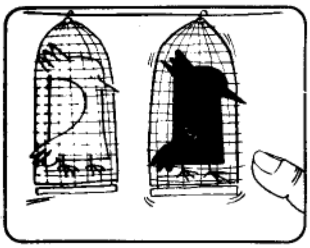
Cuando las puntuaciones de los tres dados sean todas distintas, el feriante tiene que pagar un monto de $120 \times 6 = 720$ pesetas. Cuando aparezcan dobletes, los pagos ascenderán a $90 \times 2 = 180$ pesetas (a causa del singulete) más $90 \times 3 = 270$ por el doblete. Y cuando salgan los tripletes tendrá que abonar $6 \times 4 = 24$ pesetas más. Los pagos ascienden en total a 1194 pesetas, dejándole al operador un beneficio de 102 pesetas. Dividiendo 102 entre 1296 tenemos para la casa un porcentaje del 7,8 %, lo que significa que de cada 100 pesetas que el jugador arriesgue, puede esperar perder, a la larga, alrededor de 7,80 pesetas.

¿Y qué probabilidad hay de ganar un solo juego? Imaginemos los dados de colores rojo, verde y azul. Hay 36 formas de que el dado rojo pueda mostrar un 1 mientras los otros dos salen a su capricho. Prosiguiendo el recuento, vemos que hay 30 formas de que el dado rojo muestre puntuación distinta de 1, el dado verde presente un 1, y el dado azul salga como quiera. Finalmente, si el dado azul ha de mostrar un 1 y los otros dos puntuaciones cualesquiera pero distintas de 1, habrá otros 25 casos. Por tanto, en 91 casos de 216 hay al menos un dado que presente un 1. La probabilidad de ganar en una jugada apostando al 1 es 91/216, considerablemente menor que 1/2, y lo mismo vale para cualquiera de los restantes números.

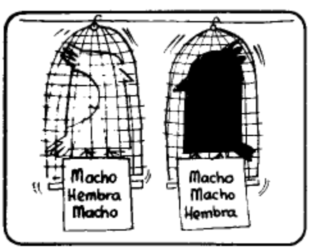
# Desconcertantes loritos



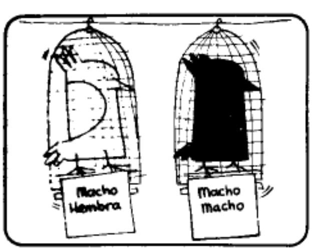
Una señora tenía dos loritos. Un día, una visita le preguntó:
**Visita:** ¿Es macho alguno de tus loritos?
**Dueña:** Sí, en efecto.
¿Cuál es la probabilidad de que ambos pajaritos sean machos? Respuesta: Un tercio.



Supongamos que la visita hubiera preguntado:
**Visita:** ¿Es macho el loro de color oscuro?
**Dueña:** Así es.
Ahora la probabilidad de que ambos pájaros sean machos ha aumentado a un medio. Pero esto parece un sinsentido. ¿Por qué al preguntar por el pájaro oscuro cambia la probabilidad?




La paradoja puede explicarse fácilmente enumerando los casos posibles. Cuando la visita solamente sabe que uno de los pájaros es macho hay tres casos a considerar. De ellos, sólo uno es «macho-macho», así que la probabilidad de que ambos sean machos es un tercio. (Estamos suponiendo igualmente probable que los pájaros sean macho o hembra.)




Pero cuando la visita se entera de que el pájaro oscuro es macho, hay exactamente dos casos a considerar. Uno de ellos es «macho-macho»; por tanto, la probabilidad de que ambos sean machos es un medio.

Podemos construir modelos para el problema de los loritos con ayuda de otra persona, que lanzará dos monedas, una de peseta y otra de duro, más ciertos convenios acerca de la manera de anunciar los resultados de los lanzamientos. El lanzador puede adoptar alguno de los divertidos procedimientos siguientes:

1. Si ambas monedas salen caras, dice: «Al menos una de las monedas ha sido cara». Si ambas han sido cruces, anuncia: «Al menos una moneda es una cruz». Y si salen distintas, dice: «Al menos una ha sido...», eligiendo al azar cara o cruz. ¿Qué probabilidad hay de que ambas monedas muestren la cara mencionada por el lanzador, cualquiera que ésta sea? Respuesta: 1/2.
2. El lanzador ha convenido previamente con nosotros en cantar «Al menos en una moneda ha salido cara» solamente cuando así suceda. Si ninguna moneda ha sido cara, no dice nada y repite el lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas monedas sean caras? Respuesta: 1/3 (pues ahora está eliminada la posibilidad de «cruz-cruz»).
3. El lanzador acuerda previamente con nosotros en decir cómo cayó la peseta, independientemente de que haya sido cara o cruz. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas monedas hayan mostrado caras iguales? Respuesta: 1/2.
4. El lanzador acuerda con nosotros que cantará «Al menos una moneda salió cara» solamente cuando la peseta salga cara. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas salgan caras? Respuesta: 1/2.

A veces, al dar la paradoja de los loritos se la presenta de tan ambigua forma que es imposible responder a ella. Por ejemplo, se encuentra usted con un desconocido, y éste le dice: «Yo tengo dos hijos. Al menos uno es chico». ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean varones?

Este problema no está definido con rigor, pues usted nada sabe de las circunstancias que indujeron al otro a tal declaración. El interlocutor podría igualmente habernos dicho «Al menos uno es niña», eligiendo al azar el sexo si los niños lo son de distinto, y dando el correcto si ambos son del mismo. De ser *tal* su modo de proceder, la probabilidad de que ambos fuesen chicos sería 1/2. La situación corresponde al caso 1 anterior.

En el problema de los loros, la ambigüedad queda eliminada haciendo que sea la propia visita quien haga la pregunta. La primera, «¿Es macho alguno de tus loritos?», se corresponde con el caso 2 antes explicado. Y la segunda versión, «¿Es macho el loro de color oscuro?», corresponde al caso 4.

Todavía más boquiabiertos puede dejarnos la paradoja conocida por «paradoja del segundo as». Supongamos que jugamos al bridge. Una vez repartidas las cartas, mira usted la mano recibida, y anuncia: «Yo tengo un as». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga usted un segundo as? Calculada exactamente es 5359/14498, menor que 1/2.

Pero supongamos ahora que todos los jugadores se ponen de acuerdo acerca de un as determinado; el de picas, pongamos por caso. El juego continúa hasta que usted recibe una mano que le permite anunciar: «Yo tengo el as de picas». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga usted un segundo as? Ahora es de 11686/20825, o sea, ligeramente *mayor* que 1/2. ¿Por qué al dar el nombre del as se modifica la probabilidad?

Con la baraja completa, el cálculo de las probabilidades es engorroso, pero la estructura de la paradoja puede comprenderse fácilmente reduciendo el mazo a cuatro naipes; por ejemplo, el as de picas, el as de corazones, el dos de tréboles y la sota de diamantes. (Simplificar un problema, reduciendo al mínimo sus elementos, suele ser excelente procedimiento para comprender su estructura.) Este pequeño mazo se baraja y reparte a dos jugadores. Hay seis manos de dos cartas, igualmente probables:

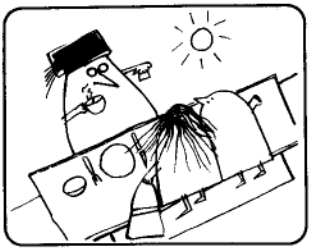
A♠ A♡
A♠ J♢
A♠ 2♣
A♡ J♢
A♡ 2♣
J♢ 2♣

De las seis manos, cinco le permiten a un jugador decir lícitamente «Yo tengo un as». Pero en sólo una de estas cinco manos aparece un segundo as. Por consiguiente, la probabilidad de segundo as es 1/5.

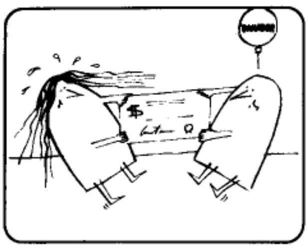
Hay exactamente tres manos que permiten al jugador anunciar «Yo tengo el as de picas». Solamente una de las tres contiene un segundo as. Por consiguiente, la probabilidad del segundo as es 1/3.

Fijémonos bien en que el as que debe ser anunciado debe quedar convenido por adelantado, lo mismo que la persona que, en cada caso, anunciará tener el as. Si no se enuncian explícitamente estas hipótesis, el problema no queda definido con precisión.

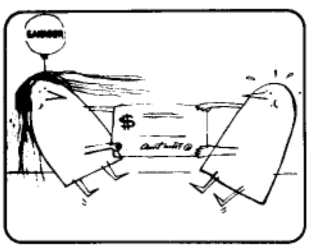
# El juego del billetero



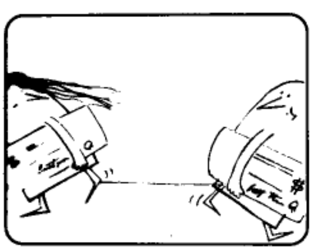
El profesor Cantorbaki está tomando el almuerzo con dos estudiantes de matemáticas.
**Profesor Cantorbaki:** Permítanme enseñarles un novísimo juego. Pongan sus billeteros sobre la mesa. Contaremos el dinero que contengan. Quien de los dos lleve menos, ganará todo el dinero que lleve el otro.



**Paco:** Humm... Si yo tuviera más que Clara, ella ganaría cuanto llevo. En cambio, si ella ha traído más que yo, ganaré más de lo que llevo. Es decir, lo que puedo perder es menos de lo que puedo ganar. ¡El juego me favorece!



**Clara:** Vamos a ver... Si yo tuviera más que Paco, él se quedaría con cuanto llevo. En cambio, si él ha traído más que yo, yo ganaré más de lo que arriesgo. ¡Me parece que el juego está a mi favor!



Pero ¿cómo puede ser un juego favorable a los dos jugadores? No es posible. ¿Se plantea la paradoja porque cada jugador supone erróneamente que las probabilidades de ganar o perder son iguales?

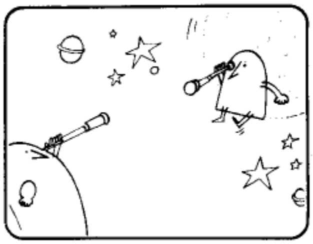
Esta encantadora paradoja se debe al matemático francés Maurice Kraitchik. En su libro *Mathematical Recreations,* Kraitchik lo presenta con corbatas en lugar de billeteros:

> Dos caballeros presumen ambos de llevar mejor corbata que el otro. Para zanjar la cuestión acuerdan recurrir a una tercera persona. El ganador habrá de darle al otro su corbata como premio de consolación. Cada uno de los rivales razona así: «Sé cuánto vale mi corbata. Puedo perderla, pero también puedo ganar otra mejor. Así que el juego me favorece». Pero ¿cómo puede el juego favorecer a ambos?

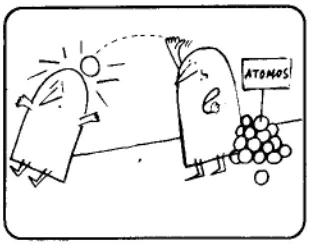
Definiendo la situación con rigor, haciendo ciertas suposiciones necesarias, el juego es justo. Evidentemente, si tenemos noticia de que uno de los jugadores lleva por lo común menos dinero que el otro (o una corbata de inferior calidad), el juego no será justo. No disponiendo de tal información, podemos admitir que cada jugador lleva consigo una cantidad aleatoria de dinero, uniformemente distribuida desde 0 hasta, pongamos por caso, 10 000 pesetas. Construyendo la matriz de pagos correspondiente a esta hipótesis, como hace Kraitchik en su libro, observamos que el juego es «simétrico» y no favorece a uno de los jugadores más que al otro.

Desdichadamente, ello no explica en qué defecto cae el razonamiento de los dos jugadores. Por nuestra parte, no hemos logrado dar con un razonamiento sencillo que aclare la cuestión. Kraitchik no sirve tampoco de ayuda, y, que sepamos, no hay otras referencias sobre el juego.

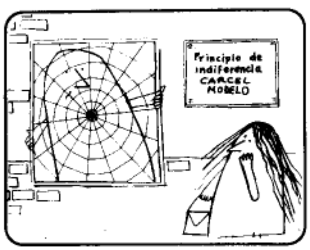
# El principio de indiferencia



Titán es el mayor de los satélites de Saturno. ¿Habrá vida en él?




¿Llegará a producirse una guerra atómica?




De responder a cuestiones así diciendo que «sí» y «no» son igualmente probables estaremos haciendo necio uso del llamado «principio de indiferencia». No han faltado matemáticos, científicos, e incluso grandes filósofos, que por aplicarlo indebidamente han quedado atrapados en las redes del absurdo.

El «principio de la razón insuficiente», nombre con que el economista John Maynard Keynes rebautizó al «principio de indiferencia» en su famoso *Treatise on Probability* (Tratado de probabilidad), puede ser enunciado como sigue: Si no tenemos razones sólidas para suponer que algo es verdadero o falso, asignamos a ambos valores de verdad probabilidades iguales.

El principio tiene una historia larga y distinguida, con aplicaciones en campos tan desiguales como la ciencia, la ética, la estadística, la economía, la filosofía y la investigación psíquica. Cuando no es correctamente utilizado conduce a contradicciones lógicas palmarias. El astrónomo y matemático francés Laplace se fundó en este principio para calcular la probabilidad de que el Sol salga mañana, y que resultó ser de ¡1 826 214 contra 1!

Veamos cómo pueden presentarse contradicciones al aplicar descuidadamente el principio a nuestra pregunta sobre Titán o sobre la guerra atómica. ¿Cuál es la probabilidad de que exista en Titán alguna forma de vida? Aplicamos el principio de indiferencia y contestamos que 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que *no* haya en Titán formas de vida vegetal siquiera rudimentarias? Como no lo sabemos, contestamos: 1/2. ¿Y de que *no* haya vida animal, siquiera monocelular? Otra vez 1/2. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que no haya en Titán ni vida vegetal ni vida animal, por sencillas que sean? Por las leyes de probabilidad, debemos multiplicar 1/2 por 1/2 y contestar: 1/4. Pero esto conlleva que la probabilidad de que haya *alguna* forma de vida en Titán ha aumentado hasta $1 - 1/4 = 3/4$, contradiciendo la estimación de equiprobabilidad primitiva, que daba 1/2.

¿Cuál es la probabilidad de que llegue a producirse una guerra atómica antes del año 2000? Por el principio de indiferencia, contestamos: 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que no llegue a ser lanzada ninguna bomba atómica sobre Estados Unidos? Respuesta: 1/2. ¿Y de que no sea bombardeada la Unión Soviética? Respuesta: 1/2. ¿Y de que no lo sea Francia? Como antes, 1/2. Aplicando el mismo razonamiento a diez países diferentes, la probabilidad de que no sean lanzadas bombas atómicas sobre ninguno de ellos es 1/2 elevado a décima potencia, o sea, 1/1024. Restándole a 1 esta cantidad tendremos la probabilidad de que *sí* sufra un bombardeo nuclear alguno de estos diez países, a saber, 1023/1024.

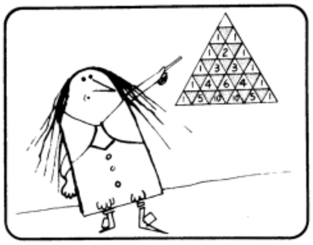
En los dos ejemplos anteriores el principio de indiferencia es apoyado por una hipótesis adicional que produce tan absurdos resultados. Hemos admitido tácitamente la *independencia* de unos sucesos que no son, como es obvio, independientes. A la luz de la teoría de la evolución, la probabilidad de vida inteligente en Titán depende de la existencia de formas inferiores de vida. Desde la actual situación política de nuestro mundo, la probabilidad de que se lancen bombas sobre, pongamos por caso, Estados Unidos no es independiente de que otro tanto suceda sobre la Unión Soviética.

Otro ejemplo de mala aplicación del principio de indeterminación es la paradoja del cubo desconocido. Se nos dice que en un armario está guardado un cubo, cuyo lado mide entre dos y cuatro decímetros. No hay razón para suponer que el lado mida más o menos de 3 dm, así que la conjetura óptima parece ser que el lado del cubo mide 3 decímetros. Ahora fijémonos en el volumen del cubo. Deberá encontrarse entre $2^3 = 8$ $dm^3$ y $4^3 = 64$ $dm^3$. El valor promedio de estos volúmenes es 36; no tenemos razón para suponer que el volumen sea mayor que 36 o menor que 36, así que conjeturamos que el volumen debe de ser de 36 $dm^3$. Con otras palabras, la estimación más aproximada parece ser la de que el cubo tiene arista 3 y volumen 36. ¡Un cubo harto curioso! Dicho de otra forma, aplicando el principio de indiferencia al lado del cubo resulta un cubo de arista 3 (y volumen 27 $dm^3$). Aplicando el mismo principio al volumen, se obtiene un cubo de volumen 36 y lado igual a la raíz cúbica de 36, aproximadamente 3,30 decímetros.

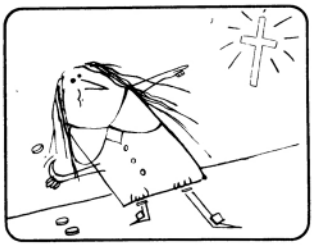
La paradoja del cubo sirve perfectamente para mostrar el tipo de dificultad con que un estadístico o científico puede encontrarse al determinar valores máximo y mínimo para una magnitud y suponer sin más que el valor más verosímil debe ser el término medio. En el libro de Keynes pueden verse otros muchos ejemplos de esta paradoja.

El principio de indiferencia sí tiene aplicaciones legítimas en probabilidad, pero tan sólo cuando las simetrías de la situación proporcionan fundamento objetivo para suponer que las probabilidades de todos los casos posibles habrán de ser iguales. Por ejemplo, una moneda es geométricamente simétrica, en el sentido de que podemos seccionarla en dos partes iguales por un plano de simetría que pasa por su canto. Es físicamente simétrica, por tener densidad uniforme, es decir, no está descompensada hacia una de sus caras. Las fuerzas que actúan sobre ella cuando es lanzada al aire —gravitación, rozamiento, presión del aire...— son simétricas y no favorecen a ninguna cara con preferencia a la otra. Estamos, por consiguiente, justificados para suponer que cara y cruz tengan ambas igual probabilidad. Simetrías semejantes valen para las seis caras de un dado cúbico, o las 38 ranuras de una rueda de ruleta. En cada uno de estos casos, una prolongada y minuciosa experimentación en los casinos de todo el mundo ha demostrado la corrección y las limitaciones de la hipótesis de simetría. En casos donde no se tenga certeza de tales simetrías, o donde puedan no existir siquiera, es frecuente que al aplicar el principio de indiferencia se llegue a resultados absurdos.

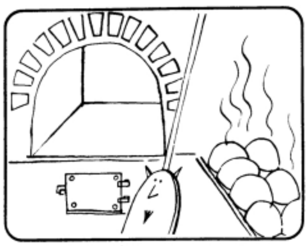
# La apuesta de Pascal



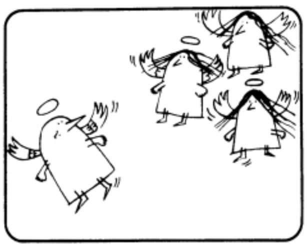
Blaise Pascal, famoso matemático francés del siglo XVII, aplicó a la fe cristiana el principio de indeterminación.



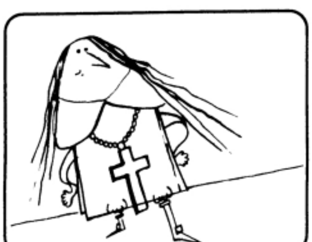
**Pascal:** Nadie puede decidir inequívocamente si debe aceptar o rechazar la doctrina de la Iglesia. Puede ser verdadera. Puede ser falsa. Es como lanzar una moneda: las probabilidades son iguales. Pero ¿lo son las pérdidas y los beneficios?



**Pascal:** Supongamos que rechazamos a la Iglesia. Si su doctrina es falsa, nada habremos perdido. Pero si es verdadera tendremos que afrontar infinitos sufrimientos en el infierno.



**Pascal:** Supongamos que aceptamos la doctrina de la Iglesia. Si resulta falsa, nada habremos ganado. Pero si es verdadera, alcanzaremos la eterna bienaventuranza en el paraíso.



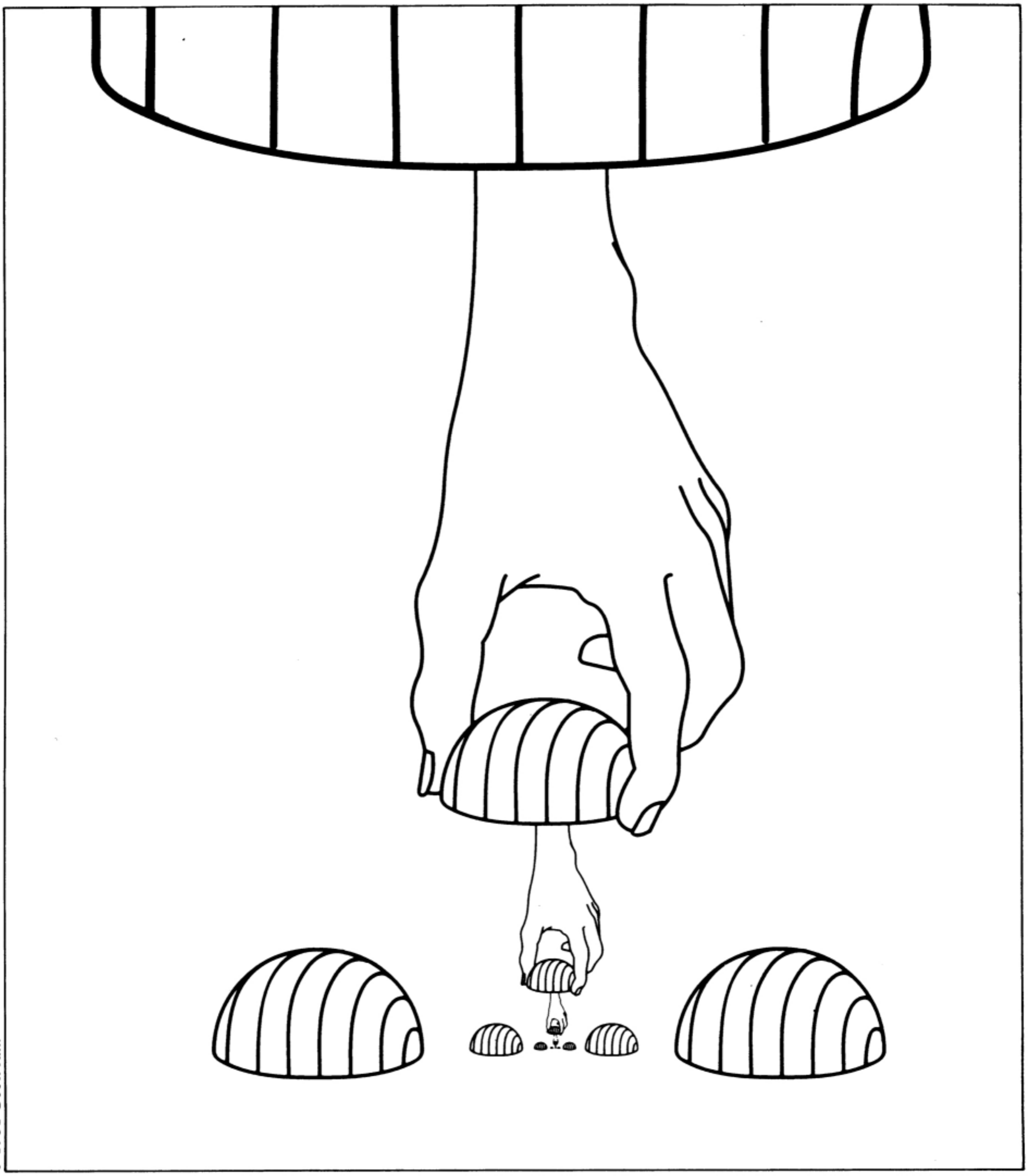
Pascal estaba convencido de que los «pagos» de este juego de decisión están infinitamente a favor de la apuesta por la veracidad de la Iglesia. Los filósofos han estado debatiendo desde entonces la apuesta de Pascal. Y usted, ¿qué opina?

Blaise Pascal fue uno de los fundadores de la teoría de probabilidad. En la primera viñeta le vemos señalando una famosa configuración de números, llamada «triángulo de Pascal». No fue Pascal quien inventó este triángulo (conocido desde la Edad Media), pero sí fue el primero en investigarlo a fondo. Esta configuración tiene elegantes propiedades combinatorias que lo convierten en útil instrumento para los problemas elementales de probabilidad. (Véase el capítulo dedicado al triángulo de Pascal en *Mathematics: A Human Endeavor,* de Harold Jacobs.)

El razonamiento de Pascal para ser cristiano —la «apuesta de Pascal», como suele llamársele— aparece en el Pensamiento 233 de sus *Pensées.* Semejante apuesta suscita muchas otras intrigantes y provocativas preguntas. Por ejemplo:

1. ¿Está válidamente aplicado el principio de indiferencia en el razonamiento de Pascal?
2. ¿Cómo responder a la siguiente objeción del filósofo francés Denis Diderot? Hay muchas otras grandes religiones, como el islam, que también condicionan la salvación a la fe en su doctrina. ¿Podrá aplicarse también a ellas la apuesta de Pascal? Y en tal caso, ¿deberíamos abrazar cada una de ellas?
3. ¿Qué opina usted de la siguiente versión «aligerada» que da William James? En su ensayo *The Will to Believe* (La voluntad de creer), James aducía que la decisión de creer en Dios (James no se refería aquí ni al más allá ni a ninguna confesión determinada) es para nosotros buena apuesta, porque al no haber pruebas ni de un sentido ni del contrario con respecto a la existencia de Dios, uno debiera decidir aquello que más feliz pueda hacerle a lo largo de su vida.
4. ¿Qué le parece este razonamiento de H. G. Wells? Ignoramos si el mundo podrá sobrevivir o no a un holocausto atómico. Pero es preciso vivir y comportarse como si estuviéramos ciertos de sobrevivir, porque —así decía Wells—, «si a fin de cuentas su optimismo resultase no estar justificado, cuando menos habría vivido de buen humor».

# 5 Estadística





**Paradojas acerca de chismes, apiñamientos, cuervos y verzules**

La estadística, que se ocupa de la obtención, organización y análisis de la información numérica, tiene cada vez papel más importante en el mundo sumamente complejo de nuestros días. Los ciudadanos de a pie sufren tal bombardeo de datos —desde la situación de la economía hasta la eficacia de las distintas marcas de dentífricos— que pueden verse incapaces de tomar decisiones inteligentes. Mucho costaría dar con una ciencia donde los estudios estadísticos no tengan un papel vital, por no mencionar su indispensable carácter en docenas de otros campos —seguros, sanidad pública, publicidad— y en prácticamente todo tipo de negocios.

En ningún sentido pretende este capítulo ser una introducción a la estadística. Tomado por sí mismo no servirá para enseñarle al lector los rudimentos de esta materia. Lo que sí se propone, en cambio, es ofrecer un muestreo de pintorescas paradojas que sirvan para estimular el interés por saber más acerca de la teoría matemática subyacente.

El capítulo se abre con una historieta que presenta las tres famosas medidas fundamentales: media, mediana y moda. Seguidamente se dan algunos ejemplos estrafalarios del uso impropio de datos —el gran arte de «mentir» con estadísticas— que habrán de alertarle sobre ciertos errores comunes.

Hoy, encarados a la explosión de interés por la astrología y lo paranormal, pocas personas alcanzan a darse cuenta de cómo la carencia del sentido crítico de carácter estadístico las hace impresionarse fácilmente por coincidencias sorprendentes que a la luz de la teoría de probabilidad y la estadística nada tienen de sorprendentes.

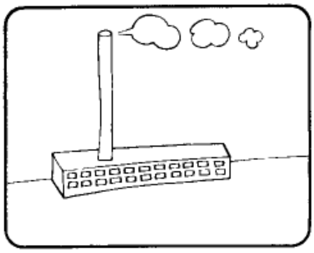
Tomemos, por ejemplo, la notoria paradoja de los cumpleaños. Elegidas al azar 23 personas, la probabilidad de que haya al menos dos con iguales día y mes de nacimiento es ligeramente mayor que 1/2. Tomando 40 personas, la probabilidad de tal coincidencia se eleva a 9/10 aproximadamente.

Nuestra primera impresión es de total incredulidad. A continuación hacemos una prueba empírica en una reunión de unas 40 personas, o bien tomamos al azar 40 nombres de una enciclopedia. Si se tiene alguna curiosidad por la teoría matemática subyacente a esta paradoja, el tercer paso es estudiarla lo suficiente para comprender por qué las cosas son de este modo. Justamente así es como estas paradojas nos sirven magníficamente de peldaños en la escalada de la matemática.

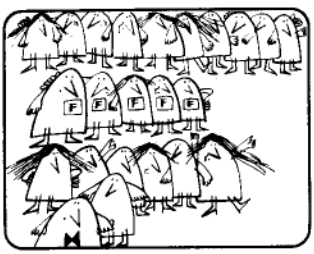
Damos en el capítulo las instrucciones a seguir para ciertos trucos de naipes donde coincidencias aparentemente milagrosas no son sino consecuencia natural de leyes matemáticas sencillas. La paradoja de la votación es una de las más famosas entre los muchos teoremas contrarios a la intuición que se estudian en teoría de la decisión, nueva rama de las matemáticas que se ocupa de la adopción racional de decisiones fundadas en información estadística. Un cuentecillo acerca de la señorita Corazón Triste pone de relieve una paradoja tan asombrosa como poco conocida.

El capítulo concluye con dos de las paradojas más ampliamente debatidas de la historia de la filosofía: la notoria paradoja del cuervo, y la suscitada por la extraña propiedad de ser «verzul». Ambas ponen de manifiesto la importancia de la estadística para valorar el grado de credibilidad de las hipótesis científicas.

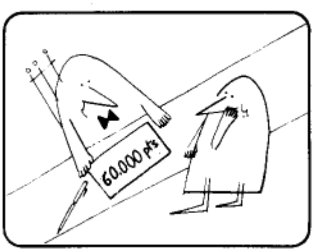
# El engañoso «término medio»



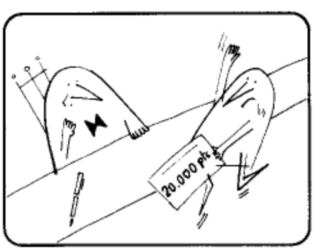
Productos Artilugio (PRODILUGIO, S. A.) tiene una pequeña fábrica de superartilugios.



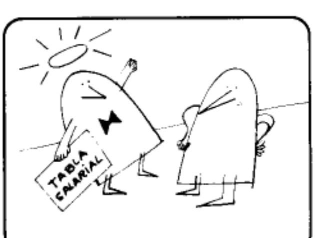

La dirección de la empresa está a cargo del señor Artilugio, su hermano y cinco parientes. La fuerza laboral consiste en cinco encargados y diez operarios. Los negocios van bien, y la fábrica precisa un operario más.



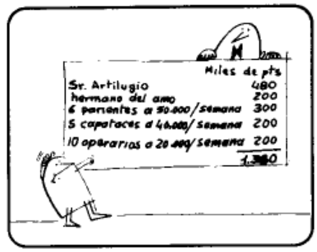

El señor Artilugio está entrevistando a Félix, candidato al puesto.
**Señor Artilugio:** Aquí pagamos muy bien. El salario medio es de 60 000 pesetas semanales. Durante el período de formación sólo cobrará usted 15 000, pero pronto le subiremos el sueldo.



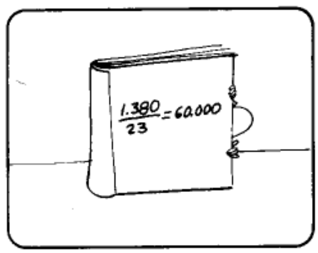

Al cabo de unos cuantos días, Félix quiso ver al jefe.
**Félix:** ¡Me ha engañado usted! He hablado con los otros operarios y ninguno gana más de 20 000 pesetas a la semana. ¿Cómo puede ser de 60 000 pesetas el salario medio?



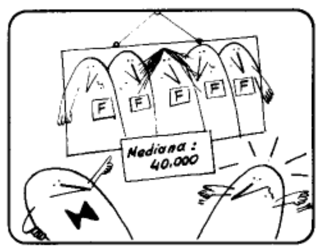

**Señor Artilugio:** Vamos, Félix, no se excite. El salario medio es de 60 000 pesetas. Se lo voy a demostrar.




**Señor Artilugio:** He aquí la nómina semanal. Yo gano 480 000; mi hermano, 200 000; mis seis parientes sacan 50 000 cada uno; los cinco capataces, 40 000, y los 10 operarios, 20 000 cada uno. El total semanal es de 1 380 000 para 23 personas. ¿Me equivoco?

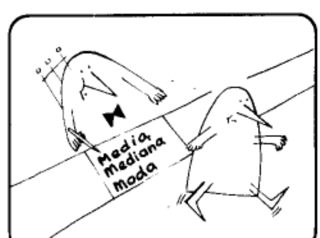



**Félix:** ¡Vale, vale! Tiene usted razón. El promedio es de 60 billetes a la semana. Pero, *aun* así, usted me ha engañado.




**Señor Artilugio:** No estoy de acuerdo. Lo que pasa es que usted no ha comprendido nada. Pude haber ido diciéndole los salarios por orden; el salario medio serían entonces 40 000 pesetas. Pero eso no es la media, sino la *mediana*.


**Félix:** ¿Y qué pintan aquí las 20 000?
**Señor Artilugio:** Eso se llama *moda*. Es el salario ganado por *máximo* número de personas.




**Señor Artilugio:** Muchacho, lo malo de usted es que no distingue entre media, mediana y moda.
**Félix:** Bueno, ahora ya sé la diferencia. Y... ¡me despido!

Los enunciados estadísticos pueden ser en extremo paradójicos, y en ocasiones, directamente engañosos. La historia de la fábrica de Artilugio hace ver una fuente de confusiones frecuentes entre media, mediana y moda.

La palabra *media* es por lo común abreviatura de «media aritmética». Es una medida estadística muy valiosa. No obstante, cuando hay valores extremos muy dispares, como sucede con los elevados salarios de los enchufados de la fábrica, el «salario medio» puede crear una impresión falsa.

Es muy fácil encontrar situaciones parecidas donde la media induce a error. Un periódico, por ejemplo, nos informa de que una persona se ha ahogado en un río cuya profundidad media es de sólo 50 centímetros. ¿Podemos sorprendernos? No, cuando nos enteramos de que la desgracia se produjo en uno de los pocos sitios donde la profundidad pasa de tres metros.

Una sociedad anónima puede declarar que su política está democráticamente controlada por sus accionistas, porque sus cincuenta socios reúnen en total 600 acciones, o sea, 12 acciones cada uno por término medio. Empero, si cuarenta y cinco de ellos tuvieran solamente cuatro votos cada uno, mientras los otros cinco dispusieran de 84 por cabeza, el promedio seguiría siendo de 12 votos, pero estos cinco se bastarían para controlar totalmente la sociedad.

Un ejemplo más. Para atraer al comercio minorista, la Cámara de Comercio propala que la renta media per cápita es muy alta. Casi todo el mundo daría por supuesto que se trata de una población rica, cuyos residentes gozan de ingresos elevados. Pero si resultara que un millonario ha ido a sentar allí sus reales, los demás residentes pudieran tener todos ingresos muy bajos, y la renta «media» seguiría siendo alta.

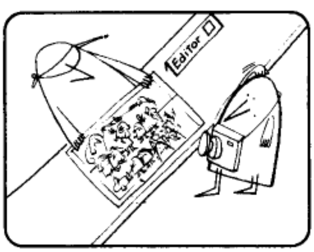
Las informaciones sobre estadísticas resultan aún más desconcertantes a causa de que «término medio» se aplica en ocasiones no a la media aritmética, sino a la mediana o la moda. La mediana es el valor que ocupa la posición central en una lista de valores ordenados de menor a mayor. Cuando el número de términos de la lista es impar, la mediana es sencillamente el término central. Cuando la lista consta de número par de términos, es costumbre tomar para la mediana la media aritmética de los dos valores situados en el centro.

A Félix la mediana le da información más útil que la media aritmética, pero incluso la mediana le da una imagen deformada de los salarios de su empresa. Lo que realmente le convenía saber es la moda, el valor de más frecuente aparición de la lista. En este caso, la moda es el salario que más personas perciben. Frases como «un caso típico» suelen aludir a la moda, pues son los que se presentan más frecuentemente que ningún otro. En el último ejemplo, una familia «típica» de la ciudad —que represente la moda de ingresos— puede ser muy pobre, aun cuando la renta media, debida a un reducido número de gente muy rica, sea muy alta.

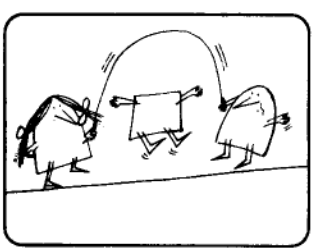
# Madre del año

Algunos meses después, la mujer de Félix fue premiada por la alcaldía. Había sido elegida «madre del año».

El periódico local publicó una foto de Félix, junto con su esposa y sus trece hijos.




El redactor-jefe estaba encantado con la fotografía.
**Redactor:** ¡Buen trabajo, Piernas! Tengo ahora otro encargo para usted. Tráigame una buena foto de la familia de tamaño medio de nuestra ciudad.



Pero Piernas fue incapaz de cumplir el encargo. ¿Por qué? ¡Porque en la ciudad no había ni una sola familia de tamaño medio! El número promedio de hijos era, según los cálculos, de 2,5.

Otro prejuicio erróneo y muy difundido acerca del «valor medio» es que en el fenómeno estudiado debe haber casos particulares que materialicen tal valor. Después de este episodio, donde todos comprendemos que no puede haber familias con dos hijos y medio, el lector no debería tener dificultad para imaginar otros ejemplos donde el valor medio no esté concretado en casos particulares. Así, ¿cuál sería la puntuación media que se obtendría al lanzar un dado un número muy grande de veces?

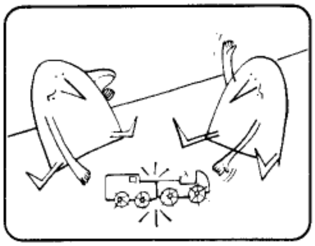
He aquí algunas preguntas que el propio lector debería hacerse para aguzar su comprensión de la media aritmética, la mediana y la moda:

1. Si el redactor-jefe quisiera la fotografía de una familia «típica», en sentido de que corresponda a la moda, ¿podría siempre el fotógrafo encontrar una familia así? (Evidentemente. El caso típico existe por definición.)

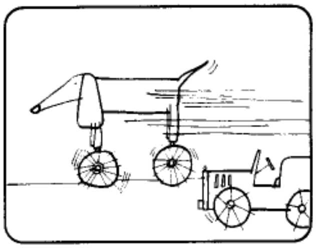
2. ¿Puede suceder que haya más de una moda? Por ejemplo, ¿podrían ser ejemplos de moda una familia de dos hijos y otra de tres? (Sí. Imaginemos que la ciudad tenga 1476 familias de dos hijos y 1476 familias con tres, y que los números de otros tipos de familias fueran inferiores. La ciudad tendría entonces dos clases de familias típicas; cada clase define lícitamente una moda.)

3. Si el redactor-jefe quisiera una foto de la familia «mediana», ¿se podría siempre encontrar alguna? (Por lo común sí, pero no necesariamente. Como vimos ya, si en la ciudad hay un número par de familias, y las dos familias de lugar central no tienen igual número de hijos, la mediana puede no ser un entero.)

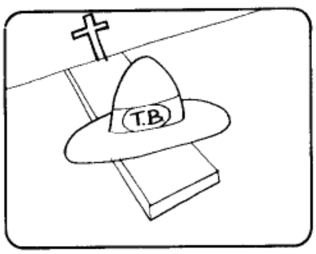
# Sacando conclusiones



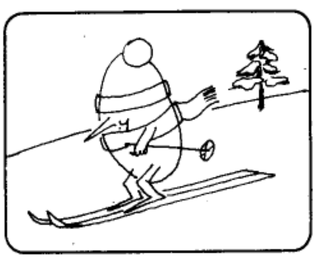
Las estadísticas muestran que casi todos los accidentes de circulación se producen entre vehículos que ruedan a velocidad moderada. Muy pocos ocurren a más de 150 km por hora. ¿Significa esto que resulta más seguro conducir a gran velocidad?



No, de ninguna manera. Con frecuencia, las correlaciones estadísticas no reflejan causas y efectos. Casi todo el mundo circula a velocidad moderada, y como es natural, la mayoría de los accidentes se producen a estas velocidades.

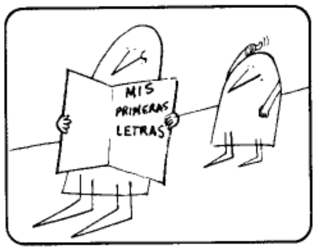



Si las estadísticas mostrasen que la mortalidad por tuberculosis es mayor en Segovia que en las demás provincias, ¿significaría esto que el clima segoviano favorece el contagio tuberculoso?



Todo lo contrario. El clima segoviano es tan beneficioso para los tuberculosos que muchos acuden allí para restablecerse. Naturalmente, ésta es la causa de que aumenten allí los fallecimientos provocados por el mal.


Un reciente estudio psicopedagógico ha mostrado que los niños de pie grande saben leer mejor que los de pie pequeño. ¿Permitirá el tamaño del pie medir la capacidad de lectura de los niños?




No, desde luego. El estudio se hizo sobre escolares, que están en *crecimiento.* Todo cuanto se demostró en él es que los niños mayorcitos, cuyos pies son más grandes, leen mejor que los pequeñines.

Estos tres episodios subrayan la importancia de no lanzarse a sacar implicaciones de tipo causal tan pronto se tiene noticia de una correlación estadística. He aquí algunos ejemplos más:

1. Suele decirse que casi todos los accidentes de automóvil ocurren cerca de casa. ¿Significa esto que viajar por carretera, a muchos kilómetros de nuestra ciudad, es menos peligroso que callejear por nuestro barrio? No. Las estadísticas reflejan, sencillamente, que se usa más el coche por los alrededores de nuestra residencia que por carreteras alejadas.

2. Un estudio demostró que en cierta región las tasas de fallecimiento por cáncer y de consumo de leche eran de las más altas del país. ¿Significa esto que beber leche puede ser causa de cáncer? No. Resulta que en tal zona el clima es benigno y en ella reside gente mayor y acaudalada. Siendo el cáncer aflicción común entre las personas de mayor edad, ésa es la razón del aumento de mortalidad por cáncer.

3. Otro estudio mostró que en cierta ciudad se produjo un súbito aumento de mortalidad por fallo cardíaco y un fuerte incremento en el consumo de cerveza. ¿Es posible que beber cerveza sea causa de que aumente la probabilidad de ataque al corazón? No. En ambos casos el aumento fue debido a un veloz incremento de la población. Por igual causa, los ataques al corazón podrían ser atribuidos a cientos de otras cosas: aumento del consumo de café, de chicle, de partidas de bridge, o de ver la televisión.

4. Un estudio hizo ver que en cierta población europea se produjo simultáneamente un fuerte crecimiento de la población y un notable incremento del número de nidos de cigüeñas. ¿No es esto demostración de que son las cigüeñas quienes traen a los niños al mundo? No; refleja el hecho de que al aumentar el número de edificios las cigüeñas dispusieron de más sitios donde anidar.

5. Otro trabajo estadístico mostró que casi todos los grandes matemáticos fueron primeros hijos. ¿Significa esto que los niños nacidos los primeros reciben una dote de sensibilidad matemática mayor que sus hermanos posteriores? No. Lo que refleja es el hecho sorprendente de que la mayoría de los *hijos* varones son el mayor de los hijos varones del matrimonio.

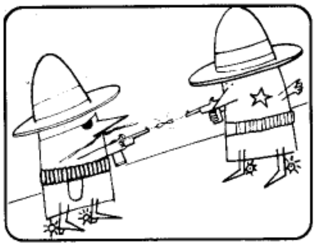
Este último ejemplo sugiere algunos experimentos interesantes. Mire entre sus amigos masculinos, a ver si más de la mitad han sido el primero de los hijos varones. Mire entre sus amigas a ver si fueron ellas las primeras de las hermanas de su familia.

Podemos también realizar un experimento mental. Imaginemos una población de 100 familias en la cual cada familia tiene dos niños. ¿Qué proporción de muchachos (o muchachas) serán el mayor de los hermanos (de su mismo sexo) o hermanas? Respuesta: 3/4. Calculemos ahora la proporción en una población de 100 familias de tres hijos cada una. (Solución: 7/12.) Inútil decir que en las familias donde sólo haya un hijo varón éste será el mayor de los hermanos (varones).

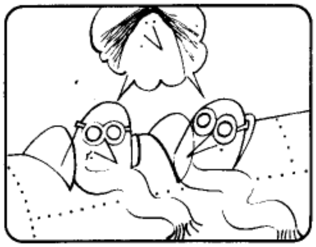
El percentil exacto de hijos mayores de un determinado sexo irá variando, como es obvio, con el tamaño de las familias de la población que se considere, pero en todos los casos es mayor que 1/2, y en muchos casos, sustancialmente superior.

Estos ejemplos tal vez induzcan al lector a buscar otros ejemplos de enunciados estadísticos fácilmente malinterpretados como relaciones de tipo causal. La publicidad moderna, y muy particularmente la televisiva, es rica fuente de tales enunciados falaces.

# ¡El mundo es un pañuelo!



En nuestros días hay mucha gente convencida de que las coincidencias están provocadas por los astros u otras fuerzas ocultas.



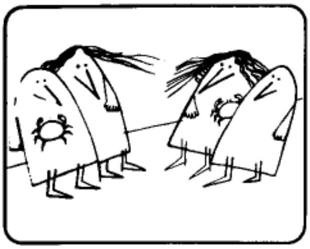
Dos personas, por ejemplo, acaban de conocerse en el avión.
**Paco:** ¡Así que es usted sevillano! Yo tengo allí una gran amiga, Lola Valdecilla, que es abogada.
**Jaime:** ¡El mundo es un pañuelo! ¡Mi mujer y ella son grandes amigas!
¿Son inverosímiles este tipo de coincidencias? Los estadísticos han demostrado que no.

Casi todo el mundo se sorprende mucho cuando al conocer a un extraño —particularmente si es lejos de casa— descubre que tienen un amigo común. Un grupo de investigadores en ciencias sociales del MIT, dirigidos por Ithiel de Sola Pool, llevaron a cabo un estudio de esta paradoja del «mundo es un pañuelo». Descubrieron que elegidas al azar dos personas en Estados Unidos, por término medio cada una de ellas conoce a unas 1000 más. Se tiene entonces una probabilidad de 1 por 100 000 de que ambas se conozcan directamente. La probabilidad de que tengan un amigo común se eleva abruptamente hasta un 1 por 100. La probabilidad de que puedan quedar conectados a través de una cadena de *dos* intermediarios es en realidad superior al 99 por 100! Dicho de otra forma, si Brown y Smith son dos norteamericanos tomados al azar, es prácticamente seguro que Brown conoce a alguien que conoce a una persona que conoce a Smith.

El psicólogo Stanley Milgram ha estudiado el problema de la «pequeñez» del mundo seleccionando al azar un grupo de «personas remitentes». A cada una de éstas le fue entregado un documento que debía hacer llegar a un «destinatario» (desconocido para el remitente) que residía en un estado distante. Para ello debía enviar por correo el documento al amigo (entendido como alguien a quien el remitente trata por su nombre de pila) que juzgase con mayores posibilidades de conocer al destinatario, y éste, a su vez, reexpedirlo a otro amigo, hasta que finalmente llegase a manos de alguien que conociese al destinatario. Milgram descubrió que el número de eslabones de la cadena, hasta que finalmente el documento llegaba a su destino, oscilaba entre 2 y 10, con mediana en 5. Al preguntársele a la gente cuántos relevos estimaba que serían necesarios, casi todos calcularon que alrededor de 100.

El estudio de Milgram muestra cuán estrechamente están unidas las personas por intermedio de la red de amistades. No es, por tanto, sorprendente que dos desconocidos al encontrarse lejos de casa descubran tener un conocido común. Esta red explica también por qué otros insólitos fenómenos estadísticos, como la transmisión de habladurías, noticias sensacionales, informaciones confidenciales y chistes nuevos, se difunden con tanta velocidad.

# ¿De qué signo es usted?



Estas cuatro personas acaban de conocerse. ¿Sería una gran coincidencia que al menos dos de ellas fueran del mismo signo astrológico?

Pudiera parecerle que sí, pero en realidad tal acontecimiento se produce unas cuatro veces de cada diez. Supongamos que cada una de las cuatro personas pueda haber nacido con igual probabilidad bajo uno cualquiera de los 12 signos zodiacales. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas sean del mismo?

Podemos valernos de un modelo con naipes. De una baraja de póquer retiramos los reyes. El mazo estará formado entonces por cuatro palos de doce valores. Cada palo representa una persona, y cada valor, un signo zodiacal. Seleccionamos al azar un naipe en cada palo. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos sean de idéntico valor? Sin duda, la misma de que al menos dos de los cuatro recién reunidos sean de un mismo signo astrológico.

La forma más sencilla de resolver este problema es calcular la probabilidad de que *no* haya dos naipes de igual valor. Restando a 1 esta probabilidad tendremos la buscada.

Si nos fijamos en dos palos, picas y corazones por ejemplo, la probabilidad de que los valores de los naipes sean distintos es de 11/12, porque sólo en un caso de cada 12 la pica y el corazón tendrán valores iguales. La probabilidad de que el trébol difiera de los otros dos (supuestos ya distintos) es 10/12, y la probabilidad de que el diamante se diferencie de los otros tres naipes, 9/12. El producto de estas tres fracciones nos dará la probabilidad de que *no haya* en la mano de cuatro naipes dos que sean iguales. El producto es 55/96. Restándole a 1 esta fracción tenemos 41/96, es decir, una probabilidad superior a 4/10 de que al menos dos personas tengan el mismo signo zodiacal. Con una probabilidad cercana a 1/2 la coincidencia no tiene nada de sorprendente.

Esta paradoja es variante de otra, muy clásica, sobre cumpleaños. Si reunimos a 23 personas tomadas al azar, la probabilidad de que al menos dos hayan nacido un mismo día de un mismo mes es ligeramente superior a 1/2. El cálculo es semejante al de antes, con la diferencia de que ahora hay que calcular el producto de 22 fracciones:

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{343}{365}$$

La probabilidad es la diferencia entre 1 y este producto, o sea, 0,5073 +, un suspiro más que 1/2. Es fácil comprobar este valor con una calculadora de mano. La probabilidad de coincidencia aumenta rápidamente cuando hay más de 23 personas. En grupos de 30, la probabilidad de que dos personas celebren el mismo día su cumpleaños está en torno a los 7/10. Con 100 personas, el suceso tiene más de tres millones de casos favorables por 1 en contra.

He aquí algunas cuestiones en las que el lector podría detenerse:

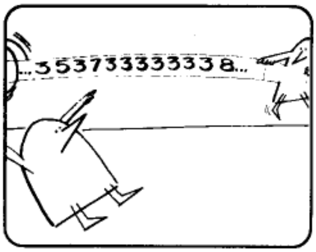
1. ¿Cuántos presidentes de Estados Unidos tienen el mismo cumpleaños? ¿Cuántos han fallecido el mismo día y en un mismo mes? ¿En qué medida concuerdan los datos reales y la predicción teórica?

2. ¿Cuál es el mínimo número de personas para que la probabilidad de que al menos dos hayan nacido el mismo mes sea mayor que 1/2? (Respuesta: 5. La probabilidad de la coincidencia es entonces de 89/144, alrededor de 0,62.)

3. ¿Cuál será el número mínimo de personas para quienes la probabilidad de que haya dos nacidas el mismo día de la semana sea mayor que 1/2? (Respuesta: 4. La probabilidad de la coincidencia es 223/343, o sea, alrededor de 0,65.)

4. ¿Cuál es el menor número de personas para las que la probabilidad de que al menos una tenga el mismo cumpleaños que el *lector* sea mayor que 1/2? (Respuesta: 253. *No* es 183, como sucedería si todas las personas tuvieran cumpleaños distintos de las demás.)

# Regularidades en pi



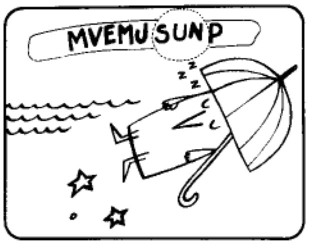

Parece como si las cifras decimales de $\pi$ vinieran dadas al azar. Pero fijémonos en la cifra 710 100-ésima. ¡A partir de ella hay siete treses seguidos en hilera!

Las cifras de $\pi$ no son aleatorias en el sentido de que estén dadas al azar, pero sí son «aleatorias» en el sentido de no presentar regularidades. Los matemáticos han sometido al desarrollo decimal de $\pi$ a toda suerte de pruebas encaminadas a descubrir algún «orden» o «pauta» en la formación de sus cifras, pero no han tenido hasta ahora ningún éxito. En este sentido, las cifras de $\pi$ tienen tan poco orden como las obtenidas con una ruleta que pudiera elegir con igual probabilidad cualquiera de las cifras de 0 a 9.

En realidad, si se toma al azar el punto de partida, la probabilidad de que se presente un tramo de siete treses consecutivos a partir de él es enormemente pequeña. Se ha calculado que hay 9 999 995 posibilidades contra 1 de que se presente un tramo así. Por consiguiente, podría sorprendernos que tal serie se presente ya entre los 710 106 primeros dígitos del desarrollo. Pero si buscamos en $\pi$ *cualquier* tipo de pauta insólita de siete cifras, la probabilidad de encontrar alguna crece rápidamente. Habrá muchísimas otras regularidades no menos sorprendentes: 4444444, u 8888888, o 1212121, o 1234567, o 7654321. Como no sabemos *de antemano* qué tipos de regularidades estamos buscando, podemos confiar en descubrir *alguna* clase de pauta insólita. El único límite es el que imponga nuestra imaginación al buscarla. Como ya dijo Aristóteles, lo improbable es extraordinariamente probable.

# Jasón y el Sol


Este señor acaba de escribir las iniciales de los meses del año: E, de enero; F, de febrero, etc. ¿Es la palabra JASON pura coincidencia?




He aquí las iniciales de los nueve planetas, ordenados por cercanía al Sol: M, de Mercurio; V, de Venus; y así sucesivamente. ¿Es coincidencia que SUN (Sol) se encuentre en medio de ellos?

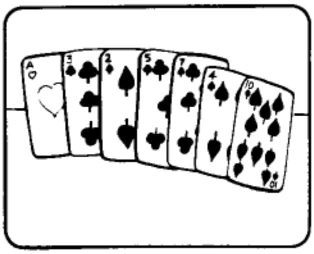
Estas dos curiosas coincidencias subrayan la veracidad del aforismo aristotélico. Otra forma de poner de manifiesto la probabilidad de lo imposible consiste en ir seleccionando al azar letras del alfabeto con ayuda de una flecha giratoria o un bombo. Si eligiéramos una palabra de tres letras y apostásemos a que aparecerá deletreada como secuencia de tres letras consecutivas dentro de las, pongamos por caso, 100 primeras extracciones, nuestra apuesta sería ruinosa. No sería lo mismo si apostásemos, en cambio, por la aparición de una palabra *cualquiera* de tres letras que figure en el diccionario.

Podemos valernos de la rueda de la suerte para ir seleccionando letras, anotarlas una por una, y ver cuánto se tarda en formar una palabra reconocible de tres letras. Estudiemos también la presentación de palabras de cuatro y cinco letras. La frecuencia con que se presentan es sorprendente.

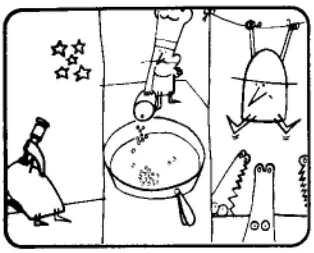
Podemos añadir un toque dramático y sobrenatural buscando formas de relacionar las palabras que vayan obteniéndose con sucesos de actualidad. *Eva,* por ejemplo, puede ser el nombre de alguna conocida nuestra; *pan* puede recordarnos que es hora de comer. Fijémonos también en las combinaciones e iniciales *(FBI, IBM, ANE, BUP).* ¡Es tan fácil relacionar estas «palabras» con acontecimientos de actualidad que algún ingenuo pudiera creer que en la formación de las palabras se están manifestando fuerzas ocultas!

El experimento explica por qué a lo largo de nuestra vida se producen tantas notables coincidencias. Siempre que se produce alguna, hay fuerte tendencia a creerla manifestación de influencias misteriosas. Para un estadístico, en cambio, semejantes coincidencias resultan extremadamente probables. Hay millones y millones de formas en que *alguna* suerte de coincidencia puede producirse entre la multitud de acontecimientos cotidianos. No estando precisada de antemano cuál será la naturaleza de las coincidencias, éstas son análogas a los curiosos arabescos y regularidades, *no especificados,* de las cifras de $\pi$, o de las palabras de aparición inesperada que se forman al ir extrayendo letras al azar. Cuando la coincidencia termina presentándose parece siempre demasiado improbable para ser mera casualidad. Y estamos olvidando que por cada una de estas curiosas coincidencias, miles de millones de otras posibles que pudieron haberse dado no ocurrieron.

# Rachas de locura



Incluso una baraja bien mezclada contendrá coincidencias. Por ejemplo, casi siempre aparecerá una racha de seis o siete naipes del mismo color.



En el cielo, las estrellas aparecen apiñadas en grupos llamados *constelaciones.* Y al esparcir habichuelas sobre una superficie plana tienden a formarse pequeños agrupamientos. Hay un viejo refrán: «Los males, de tres en tres».

La tendencia de los acontecimientos aleatorios a «arracimarse» de diversas formas en «rachas» es fenómeno bien observado, y no faltan libros dedicados a lo que en estadística se llama *teoría de agrupamientos.* La racha de siete treses del número $\pi$ es un ejemplo de agrupamiento por azar. Al lanzar repetidamente una moneda, o hacer girar muchas veces una ruleta, llevando registro de los colores y números se encontrarán con frecuencia sorprendentes ejemplos parecidos de rachas largas.

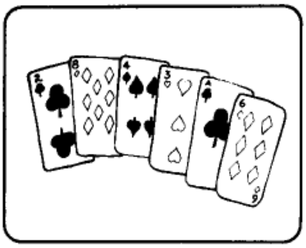
A. D. Moore, un ingeniero de la Universidad de Michigan, ha descubierto un chocante experimento sobre agrupamientos. Moore lo llama «el mosaico de anises», porque en él se usan gran cantidad de esos pequeños caramelitos esféricos de diversos colores. Provéase de suficiente cantidad de anises rojos y verdes como para llenar un frasco con cantidades iguales de cada color. Agite el frasco concienzudamente, hasta mezclarlos perfectamente.

Inspeccionemos el frasco, observándolo por sus costados. Sin duda esperamos ver una mezcla homogénea de ambos colores; pero en cambio, lo que observamos es un hermoso mosaico, formado por grandes e irregulares manchones rojos intercalados en agrupamientos verdes semejantes. La disposición es tan inesperada que incluso los matemáticos, al observarla por primera vez, creen que alguna fuerza de tipo electrostático es responsable de que las esferas de igual color se adhieran unas a otras. Nada interviene en realidad, salvo el azar. El mosaico es resultado normal del apiñamiento aleatorio.

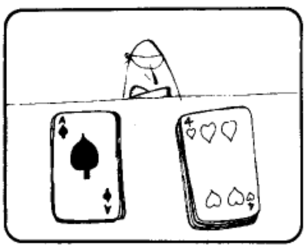
Y si le cuesta creerlo, pruebe con este sencillo experimento. Sobre una hoja de papel cuadriculado tracemos un gran cuadrado de 20 por 20. Vayamos coloreando sistemáticamente las cuadrículas, pintándolas de rojo o verde según nos indique el lanzamiento de una moneda. Cuando el gran cuadrado con sus 400 casillas esté totalmente terminado se verá el mismo tipo de mosaico que apareció en los costados del frasco.

Es frecuente que en los fenómenos de apiñamiento intervengan además factores no matemáticos. Si los automóviles que circulan por una carretera estuvieran repartidos al azar sobre ella, observados desde un helicóptero ya se los vería formar pequeños grupos. En la práctica, los apiñamientos de vehículos son mucho mayores de lo atribuible al azar, porque los conductores tienden a no adelantar a otros vehículos que circulen a velocidad semejante a la suya, y a acelerar cuando se encuentran largos tramos despejados al frente. La situación de las ciudades en el mapa, las rachas de días lluviosos, los parches de trébol y grama en un césped, y un sinfín de otros casos nos dan ejemplos de apiñamientos que exceden de lo puramente casual.

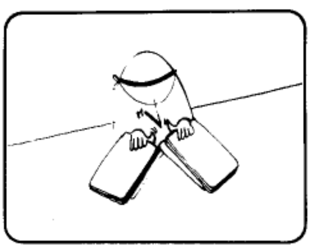
# Un asombroso truco de cartas



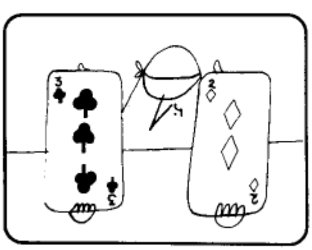
He aquí una asombrosa paradoja de naipes, relacionada con la teoría de agrupamientos. Ante todo, arreglamos una baraja, alternando los colores de las cartas.



A continuación cortamos el mazo en dos, asegurándonos de que las cartas situadas en lo más bajo de ambos sean de distinto color.



Después mezclamos una y otra mitad, «peinándolas» concienzudamente de una pasada.



Tomamos ahora las cartas de dos en dos, desde arriba. ¡A pesar de haber mezclado los mazos, *cada* par de naipes será rojo y negro!

Este notable truco de cartas es buen ejemplo de cómo una estructura matemática puede intervenir en el agrupamiento y producir resultados en apariencia milagrosos. Los ilusionistas lo conocen por «principio de Gilbreath», en recuerdo de Norman Gilbreath, matemático y mago aficionado, quien lo descubrió en 1958. Desde entonces, cientos de ingeniosos trucos se han inspirado en él.

He aquí una demostración informal, por inducción matemática, que explica su fundamento. El mazo se corta de manera que las cartas situadas en lo más bajo de cada mitad sean de distinto color. Cuando la primera carta en deslizarse bajo el pulgar caiga sobre la mesa, las cartas del fondo de ambos mazos serán del *mismo* color, y de color contrario al de la recién caída. Carece de importancia, pues, cuál de estas dos sea la siguiente en caer; en cualquier caso, sobre la primera carta caerá otra de color contrario, dejando sobre la mesa un par de distinto color. La situación es ahora idéntica a la inicial. Las cartas situadas abajo del todo en ambas manos son de colores distintos. Sea cual fuere la primera en caer de estas dos, las entonces situadas abajo vuelven a ser del mismo color, y así, independientemente de cuál caiga a continuación, quedará sobre la mesa un segundo par de naipes de distinto color. Y lo mismo para todas las restantes cartas de ambos mazos.

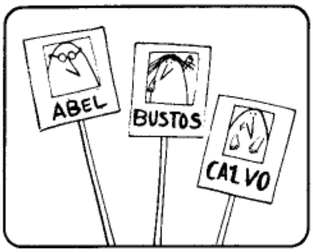
Una buena forma de presentar el truco a los amigos consiste en arreglar el mazo en secreto, dejándolo ya con alternancia de colores. Le pedimos a un espectador que vaya dando cartas desde lo alto del mazo, hasta que la pila de la mesa contenga unos 26 naipes. (Ésta es una forma de garantizar que las cartas situadas abajo no sean del mismo color.) Hagámosle barajar las cartas, peinándolas una vez. Guardemos este mazo recién mezclado bajo la mesa, donde nadie, ni siquiera nosotros mismos, pueda ver las cartas. Explique entonces a sus espectadores que usted ha conseguido «sentir» los colores al tacto, y que para demostrarlo irá sacando las cartas del mazo por pares, a razón de una roja y una negra. Como es obvio, lo único que hay que hacer es ir sacando los naipes desde arriba de dos en dos.

¿Podrá generalizarse este notable principio, y aprovecharlo para otros trucos de magia? Ensaye ahora el siguiente proceder. Arregle el mazo por secuencia de palos, por ejemplo, con las cartas en el orden «picas»-«corazones»-«tréboles»-«diamantes», p-c-t-d, p-c-t-d, ... Se van dando cartas desde arriba, hasta formar una pila de unas 26 cartas (¡el número exacto es indiferente!). Al hacer esto, automáticamente se invierte el orden secuencial de los palos de los naipes. Ahora mezclamos los dos mazos, peinándolos con una pasada entre los pulgares, como ya se explicó. Tomamos los naipes desde arriba, en grupos de cuatro. ¡Cada mano de cuatro naipes contiene uno de cada palo!

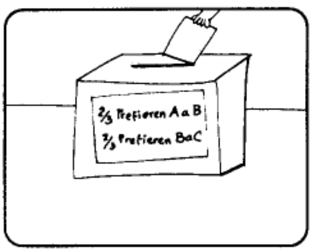
Podemos dar otra sorpresa más, preparando el mazo en cuatro grupos de 13 naipes cada uno, todos ellos ordenados as, 2, 3, ..., sota, reina y rey, sin prestar atención a los palos. Sigamos el procedimiento de reparto y peinado explicado ya. Saquemos las cartas desde arriba, en manos de 13, ¡y en cada mano se tendrá una carta de cada valor!

Como última generalización, preparemos dos barajas de manera que el orden de las cartas sea exactamente el mismo en ambas. Coloquemos un mazo sobre otro. Vayamos dando desde lo alto del gran montón, hasta formar una pila de unas 52 cartas. Barajemos, peinándolos, los dos mazos, y dividamos después los 104 naipes en dos mitades exactamente iguales. ¡Cada mitad es una baraja completa!

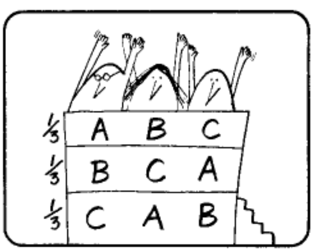
# Una paradoja electoral



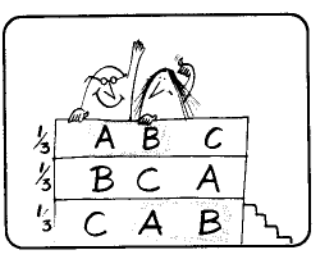

Aquí tenemos a tres candidatos en liza por la presidencia. Se llaman Abel, Bustos y Calvo.



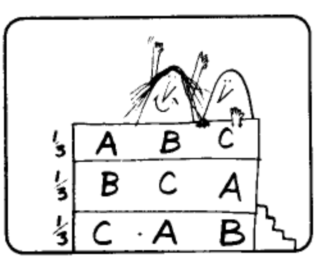

Una encuesta indica que 2/3 del electorado prefieren a *A* entre *A* y *B*, y que 2/3 prefieren a *B* frente a *C*. ¿Se deduce que la mayoría de votantes preferirán a *A* en la disyuntiva entre *A* y *C*?



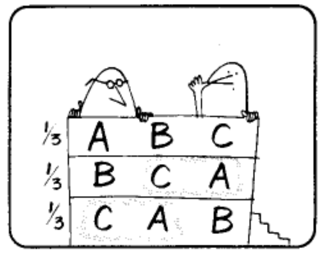

¡No necesariamente! Si las preferencias de los electores se ajustasen a la tabla de la viñeta, tropezaríamos con una sorprendente paradoja. ¡Que sean los candidatos quienes lo expliquen!




**Don Abel:** ¡Dos terceras partes del electorado me prefiere a Bustos!




**Señorita Bustos:** ¡Dos terceras partes del electorado me prefiere a Calvo!




**Señor Calvo:** ¡Dos terceras partes del electorado me prefiere a Abel!

Esta paradoja, que data del siglo XVIII, es ejemplo famoso de la relación no transitiva que puede presentarse cuando las personas han de ir eligiendo de dos en dos. La noción de transitividad es aplicable a relaciones como «más alto que», «más grande que», «menor que», «igual a», «antes que», o «más pesado que». En general, se dice que una relación $R$ es transitiva cuando toda vez que se verifique $xRy$ y también $yRz$ forzosamente ha de cumplirse que $xRz$.

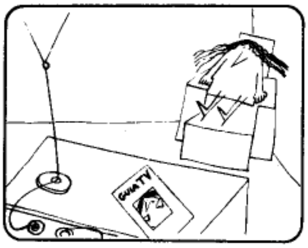
La paradoja electoral nos causa sobresalto porque estamos confiados en que la relación *preferir* ha de ser siempre transitiva. Cuando alguien prefiere a $A$ mejor que $B$, y a $B$ mejor que $C$, esperamos que naturalmente prefiera a $A$ en la disyuntiva entre $A$ y $C$. La paradoja hace ver que puede no ser éste el caso. Una mayoría de electores prefiere al candidato $A$ frente al $B$, una mayoría prefiere a $B$ frente a $C$, y una mayoría prefiere a $C$ frente a $A$. ¡La situación es no transitiva! Esta paradoja es conocida también por «paradoja de Arrow», en recuerdo de Kenneth J. Arrow, Premio Nobel de Economía, quien demostró a partir de ella y de otras consideraciones lógicas que un sistema perfecto de votación democrática es, en principio, imposible.

La paradoja puede presentarse en cualquier situación donde sea preciso llegar a una decisión entre tres alternativas, ordenadas por pares con respecto a tres propiedades. Supongamos que $A$, $B$ y $C$ sean tres pretendientes a casarse con una misma mujer. Podemos representar en las filas de una matriz cómo los ordena ella con respecto a tres rasgos, tales como inteligencia, aspecto físico e ingresos. Examinados por pares estos caracteres, ¡puede suceder que la mujer descubra que prefiere $A$ a $B$, $B$ a $C$, y $C$ a $A$!

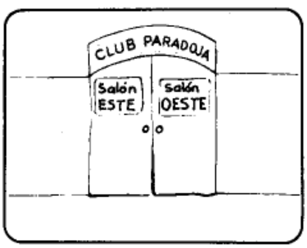
El matemático Paul Halmos propuso que $A$, $B$ y $C$ denotasen tartas de almendra, bizcocho y chocolate. Un restaurante las ofrece diariamente de dos en dos. Las filas de una matriz expresan las preferencias de un cliente con respecto a sabor, frescura y tamaño de la ración. ¡Puede ser perfectamente racional que tal cliente prefiera la almendra al bizcocho, el bizcocho al pastel de chocolate, y el chocolate a la almendra!

Para saber más sobre paradojas no transitivas, véanse los siguientes artículos de *Scientific American:* mi sección «Mathematical Games» (octubre de 1974); «The Choice of Voting Systems», por Richard G. Niemi y William H. Riker (junio de 1976), y la sección de «Juegos matemáticos» de *Investigación y Ciencia* (diciembre de 1980), escrita por Lynn Stein.

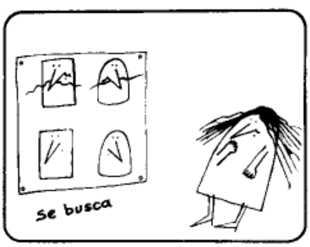
# Corazón solitario



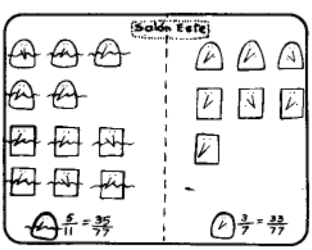

La señorita Corazón Triste, estadística experta, ya está harta de estarse sola en casa.
**Señorita Corazón:** ¡Cuánto me gustaría conocer a algunos chicos solteros! ¡Creo que voy a buscarme algún círculo de gente soltera!



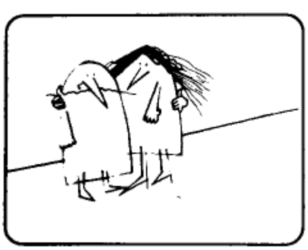

La señorita Corazón encontró no uno, sino *dos* de estos grupos. Una tarde, los dos grupos coincidieron en una fiesta, en el Club Paradoja. Un grupo se reunió en el Salón Este, y el otro, en el Salón Oeste.



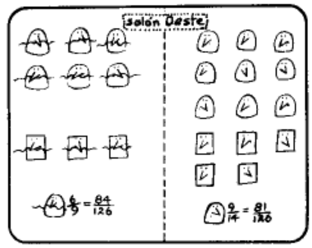

**Señorita Corazón:** Algunos hombres llevan bigote; otros no. Algunos son lanzados, y otros, reservones. La verdad, me gustaría conocer hoy algún chaval desenvuelto. ¿Tendré que buscarlo entre los de bigote?



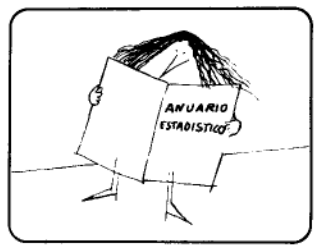

La joven hizo un estudio estadístico de los hombres del grupo Este. Descubrió que la proporción de lanzados bigotudos era de 5/11, o también, 35/77. La proporción de «liberados» rasurados era menor: 3/7, o sea, 33/77.



**Señorita Corazón:** ¡Bueno! Cuando vaya con los del Salón Este iré tras un hombre con bigote.



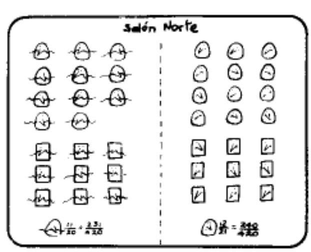

En la Sala Oeste, la estadística daba resultados parecidos. La proporción de liberados bigotudos era 84/126, también mayor que la de lanzadillos rasurados, que era sólo 81/126.



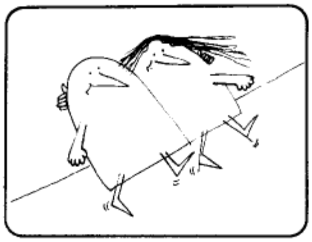

**Señorita Corazón:** ¡Qué fácil! En *ambas* fiestas tengo mayores posibilidades de dar con un chaval majo buscando entre los hombres con bigote.


Pero para cuando la moza llegó al Club Paradoja ambos grupos habían decidido juntarse en uno solo. Todo el mundo se instaló en la Sala Norte.

**Señorita Corazón:** ¿Qué me convendrá hacer ahora? Si antes debía yo apostar en ambos grupos por tipos con bigote, seguramente deba seguir haciéndolo todavía. Pero más vale que lo compruebe en el grupo total, por si acaso.




Cuando terminó su nueva tabulación, la chica quedó patidifusa. ¡Las proporciones habían cambiado de papel! ¡Ahora convenía apostar por hombres sin bigote!



**Señorita Corazón:** Tuve que cambiar de táctica, pero me fue bien. ¡Pero sigo *sin* comprender por qué!

Es fácil dar con naipes un modelo de esta curiosa paradoja. Representemos a los lanzados con cartas rojas, y a los seriotes con cartas negras. Una gran X en el revés del naipe simbolizará el bigote. Si la carta no está marcada con la X, es que se trata de un hombre rasurado.

Pongamos una X en el dorso de cinco naipes rojos y de seis naipes negros. A estas cartas añadamos tres cartas rojas y cuatro negras que no lleven X. Este mazo representa a los hombres de la fiesta «Este».

Barajemos las 18 cartas, esparciéndolas sobre la mesa con el dorso a la vista. Si deseamos la máxima probabilidad de sacar carta roja, ¿deberemos elegirla con X o sin X? Es fácil calcular las probabilidades, como se hace en las viñetas, y comprobar que la oportunidad de sacar carta roja es mayor si se elige una de las marcadas con X.

Para representar a los hombres de la Sala Oeste se procede análogamente. Pongamos X en los dorsos de seis cartas rojas y de tres cartas negras. A éstas, añadámosles nueve cartas rojas y cinco negras, todas sin X. En conjunto dispondremos de 23 naipes. Barajémoslos y esparzámoslos sobre la mesa. Al igual que antes, es fácil probar que para extraer de entre éstas una carta roja, la probabilidad de éxito es máxima eligiendo entre las marcadas con X.

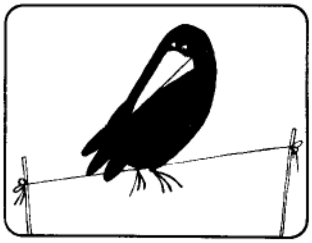
Combinamos ahora los dos grupos, formando un mazo de 41 naipes. Cuesta creerlo, pero efectuando correctamente los cálculos se comprueba que, si se quiere extraer una carta roja, ¡las probabilidades son mayores eligiendo entre las cartas *sin* X!

Pueden presentarse paradojas análogas al analizar estadísticamente datos como, pongamos por caso, los resultados de ensayos de medicamentos. Las cartas representarán a las personas que se sometieron a dos ensayos. Señalemos con una X aquellas que recibieron realmente una dosis medicamentosa, y sin ella, a quienes recibieron un placebo. Las cartas rojas representan pacientes que experimentaron mejoría, y las negras, a quienes no la experimentaron. Cada ensayo, individualmente considerado, mostraría que la droga tuvo efectos más beneficiosos que el placebo. Pero al agrupar los resultados de ambos ensayos, ¡el análisis indica que fue el placebo el que produjo consecuencias más favorables! La paradoja hace ver cuán difícil es diseñar ensayos cuyos resultados estadísticos sean siempre de confianza.

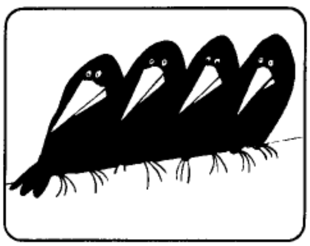
En 1973 se dio un caso de esta paradoja en la Universidad de California, en Berkeley, concerniente a un estudio sobre posibles sesgos por razón de sexo en la admisión de estudiantes posgraduados. Alrededor de un 44 por 100 de los graduados masculinos de primer ciclo fueron admitidos para continuar el segundo, mientras que entre las graduadas, sólo lo fueron el 35 por 100. Puesto que las calificaciones de hombres y mujeres eran sensiblemente iguales, parecía claro que se trataba de un caso de discriminación de la mujer.

Sin embargo, cuando estos mismos datos fueron analizados por facultades, para esclarecer en cuáles se producía la discriminación, resultó, en esencia, ¡que las mujeres tenían en cada una de ellas mayores posibilidades de ser admitidas que los hombres! ¿Cómo explicar semejante situación? La paradoja se producía porque un porcentaje de mujeres muy superior al de los hombres buscaba proseguir estudios en materias difíciles, con elevados índices de rechazo de solicitudes. Tomados materia por materia, una graduada tenía mejores posibilidades que su colega masculino de proseguir estudios de segundo ciclo. Sólo al refundir todos los datos se producía el sesgo de sentido contrario. ¿Quedó, pues, la Universidad exonerada al revelar el origen de la paradoja? Puede ser. De todas formas, uno se pregunta si sería posible planear las cosas para dificultar el acceso al segundo ciclo en las materias preferidas por el estudiantado femenino.

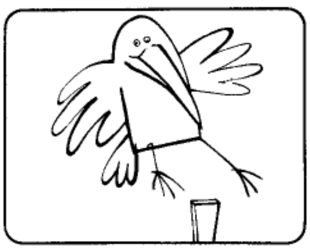
# Los cuervos de Hempel



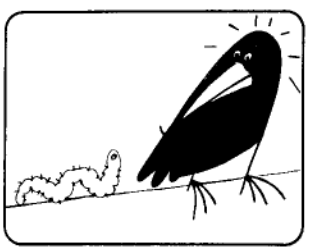
Una famosa paradoja acerca de cuervos negros nos hace ver que la señorita Corazón se encuentra en buena compañía. Incluso los expertos están todavía intentando comprenderla.



Si solamente se hubieran observado tres o cuatro cuervos, y éstos fueran negros, la ley científica que enuncia: «Todos los cuervos son negros» estaría *débilmente* confirmada. Si observados millones de cuervos, todos han sido negros, la ley estaría *fuertemente* confirmada.

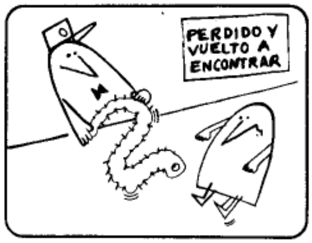


**Cuervo:** ¡Crou, crou, crou! Soy un cuervo que *no* es negro. ¡Mientras no den conmigo, no podrán saber que la ley es falsa!

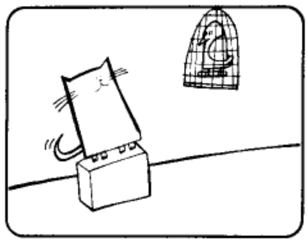


¿Qué decir si vemos una oruga amarilla? ¿Podría servirnos de caso particular que contribuyera a confirmar la ley sobre el color de los cuervos?

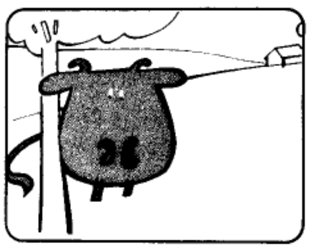

Para responder a esta cuestión, enunciemos primero la ley de otra forma, aunque lógicamente equivalente: «Todo objeto no-negro es no-cuervo».




**Científico:** ¡Ajá! Acabo de encontrarme un objeto no-negro: una oruga amarilla. No hay duda, no es un cuervo. Confirma, pues, la ley: «Todo objeto no-negro es no-cuervo». Por tanto, confirmaré también la ley equivalente: «Todos los cuervos son negros».



Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos. ¿Sirven también todos ellos de ejemplo confirmador de la ley: «Todos los cuervos son negros»?



El profesor Carl Hempel, inventor de esta famosa paradoja, opina que una vaca de color púrpura *sí* aumenta realmente (aunque en porción minúscula) la probabilidad de que los cuervos sean todos negros. Otros filósofos disienten. ¿Qué opina usted?

Es ésta la más notable entre las muchas paradojas recientemente descubiertas en teoría de confirmación. «La perspectiva de poder investigar teorías ornitológicas sin tener que echarse al campo y aguantar la lluvia —hace notar Nelson Goodman (véase la paradoja siguiente)— es tan atractiva, que estamos seguros de que en algún sitio algo no marcha.»

El problema es encontrar dónde. Hempel tiene la convicción de que al observar un objeto no-negro que no es cuervo, la teoría «Todos los cuervos son negros» recibe alguna confirmación, pero sólo en grado infinitesimal. Imaginemos la prueba (docimasia) de una hipótesis relativa a un pequeño número de objetos, por ejemplo, diez naipes boca abajo sobre la mesa. La hipótesis conjetura que todas las cartas negras de ese mazo son picas. Vamos volviendo los naipes, uno por uno. Como es obvio, cada vez que al hacerlo aparezca una pica negra hemos encontrado un caso de confirmación.

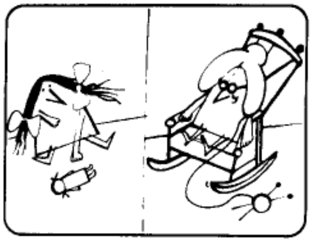
Ahora expresamos la misma hipótesis con palabras diferentes: «Todas las cartas no-picas son rojas». Cada naipe que al ser vuelto no sea una pica y además sea rojo, dará, sin duda, confirmación a la teoría en la primera de las formas en que fue enunciada. En efecto, si la primera carta fuese una pica negra y las restantes nueve fueran rojas y no fueran picas, sabremos que la hipótesis es verdadera.

La razón de que tal proceder parezca extraño al aplicarlo a no-cuervos que sean no-negros, dice Hempel, es que la clase de objetos terrestres que no son cuervos es tan enormemente grande en comparación con el número de los cuervos, que el grado de confirmación que la hipótesis de que un «no-negro que es no-cuervo» aporta es despreciable. Además, si echamos una ojeada a una habitación en busca de no-cuervos, sabiendo ya que en la habitación no hay cuervo alguno, no deberíamos sorprendernos al no encontrar ningún cuervo no-negro en la estancia.

Empero, si no tuviéramos ese conocimiento adicional, el hallazgo de objetos no-cuervos que sean no-negros sí ha de contar, en sentido teórico, como ejemplo confirmador de la hipótesis de que los cuervos son negros.

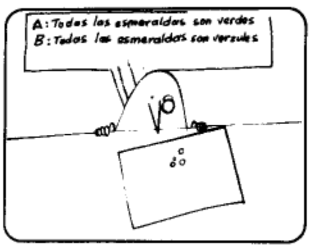
A los oponentes de Hempel les gusta hacer notar que, por el mismo razonamiento, al descubrir una oruga amarilla o una vaca color púrpura se tendrán también ejemplos que confirman la ley «Todos los cuervos son blancos». ¿Cómo puede un mismo objeto confirmar simultáneamente que «todos los cuervos son negros» y que «todos los cuervos son blancos»? La bibliografía sobre la paradoja de Hempel es enorme. Esta paradoja desempeña el papel principal en el debate relativo a la confirmación de conocimientos, que es el tema del artículo «Confirmation», por Wesley C. Salmon, publicado por *Scientific American* en mayo de 1973.

# El verzul de Goodman



Otra famosa paradoja de la teoría de confirmación se basa en que muchos objetos mudan de color en ciertos momentos. Las manzanas, al madurar, pasan de verdes a rojas; el pelo encanece con la edad; la plata se oscurece.


Nelson Goodman llama «verzules» a los objetos que cumplan estas dos condiciones. Primera, ser verdes hasta fin de siglo. Segunda, ser azules a partir de ese momento.

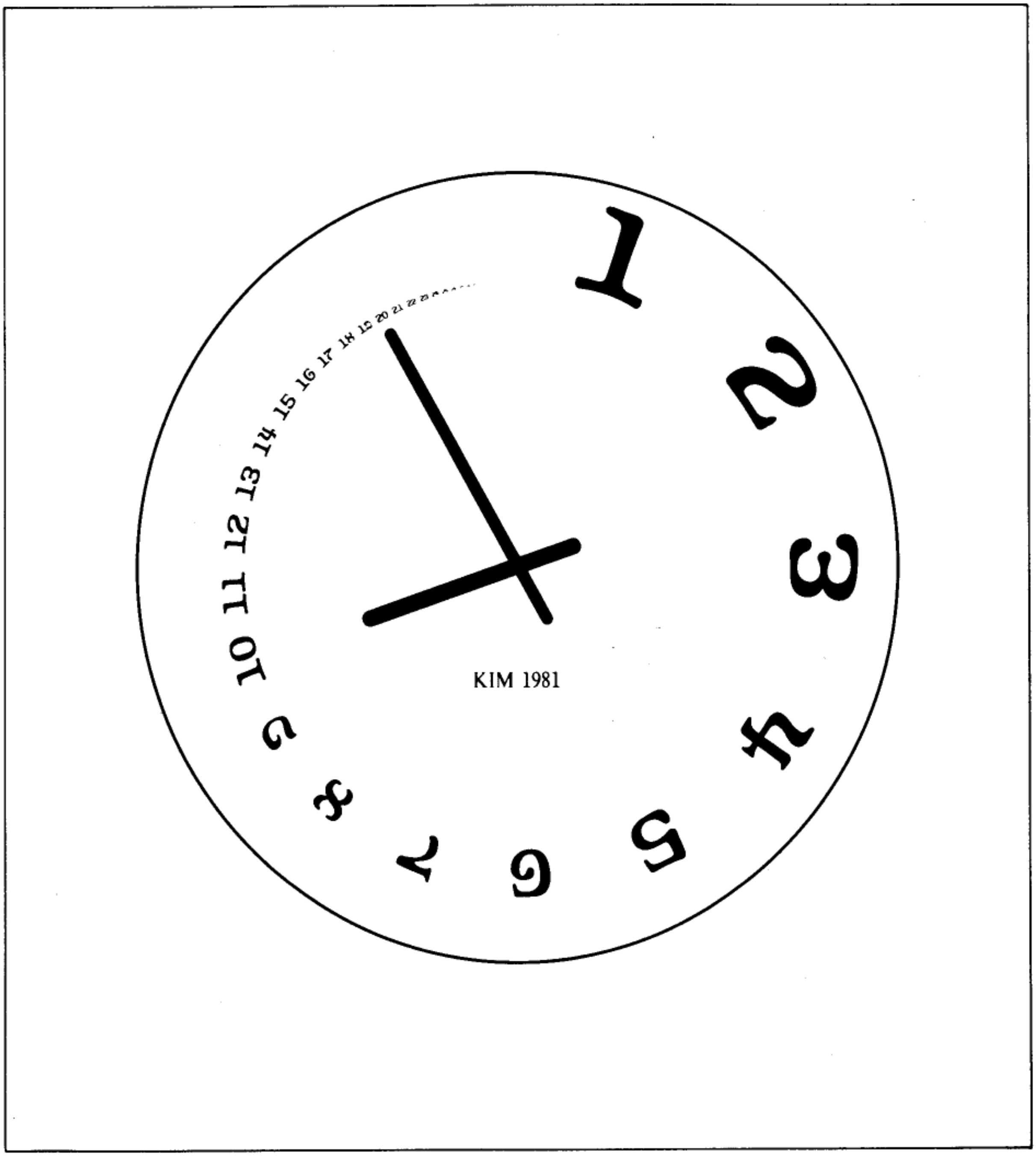



Consideremos ahora dos leyes diferentes: «Todas las esmeraldas son verdes», y «Todas las esmeraldas son verzules». ¿Cuál de estas dos leyes está más confirmada?

Bastante curiosamente, ¡ambas están confirmadas por igual! Toda observación que pueda hacerse de una esmeralda será un ejemplo que confirme cada ley, ¡y nadie ha observado jamás un contraejemplo! No es muy fácil explicar por qué una ley es aceptada y la otra no.

Las paradojas de Hempel y Goodman hacen ver cuán poco comprendemos sobre el papel exacto que la estadística tiene en el método científico. Lo que *sí* sabemos de seguro es que sin esta inestimable herramienta la ciencia no podría continuar su eterna indagación de las leyes que gobiernan nuestro misterioso universo.

# 6 Tiempo






**Paradojas relativas al tiempo, tareas sobrehumanas, viajes al futuro y al pasado, y a la inversión del tiempo**

Desde la más íntima partícula subatómica hasta la galaxia más gigantesca, el universo entero se encuentra en permanente estado de transformación, alterándose cada microsegundo sus increíbles configuraciones con el inexorable «fluir» del tiempo. (He escrito «fluir» entre comillas, porque en realidad es el universo quien fluye. Decir que el tiempo fluye tiene tan poco significado como decir que la longitud tiene extensión.)

Cuesta trabajo imaginar un mundo real sin tiempo. Un objeto que existiera solamente durante cero segundos no existiría en absoluto. ¿O tal vez sí? En cualquier caso, el fluir del universo es lo bastante uniforme como para permitir mediciones, y la medición trae consigo números y ecuaciones. La matemática pura podría considerarse «intemporal», pero en matemática aplicada, desde los rudimentos del álgebra hasta el análisis superior vastas regiones tratan de problemas en los que el tiempo es una variable fundamental.

En este capítulo he reunido diversidad de paradojas relativas al tiempo y al movimiento. Algunas, como las paradojas de Zenón, fueron acaloradamente debatidas en la Grecia clásica. Otras, como la «dilatación» del tiempo, de la teoría de relatividad, y las máquinas del infinito, capaces de ejecutar «tareas sobrehumanas», son productos de este siglo. Todas ellas debieran despertar en el lector apetito por las paradojas y, no menor, por las matemáticas en general.

He aquí algunas de las formas en que las paradojas pueden servir como punto de partida hacia las matemáticas y las ciencias serias:

La paradoja de la rueda de bicicleta, donde aparece la cicloide, magnífica introducción a curvas más complicadas que las cónicas.

La paradoja del esquiador frustrado, que resalta la potencia del álgebra elemental para demostrar un resultado inesperado.

Las paradojas de Zenón, la cuerda de goma, las tareas sobrehumanas, y el perro trotador nos sirven para introducir la idea de límite, absolutamente fundamental para comprender el cálculo diferencial y todo el análisis. La resolución de estas paradojas descansa en la teoría de conjuntos infinitos de Georg Cantor, con la que ya nos hemos encontrado en el capítulo 2.

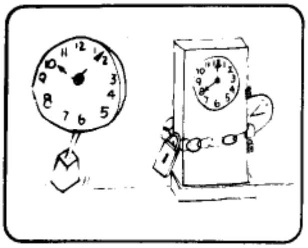
La oruga que va reptando por la cuerda elástica suscita un problema cuya solución se consigue gracias a una famosa serie infinita, la llamada serie armónica.

Las paradojas sobre retrogradación del tiempo, los taquiones y los viajes a través del tiempo permiten presentar nociones fundamentales, imprescindibles para comprender la teoría de la relatividad.

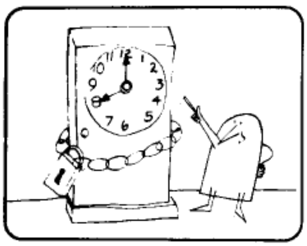
Un artificio ideado para evitar las paradojas que se producirían si nos fuera posible viajar a través del tiempo, y que se basa en admitir la bifurcación del tiempo y la existencia de mundos paralelos, servirá para presentar una extraña teoría, llamada «interpretación de mundos múltiples», recientemente introducida en la mecánica cuántica.

La paradoja final, concerniente al conflicto entre determinismo e indeterminación, echa una rápida ojeada a uno de los grandes y perennes problemas de la filosofía.

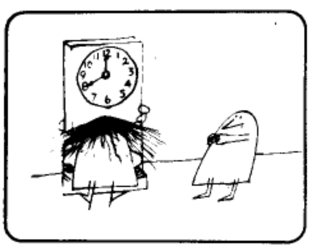
# Los relojes locos de Lewis Carroll



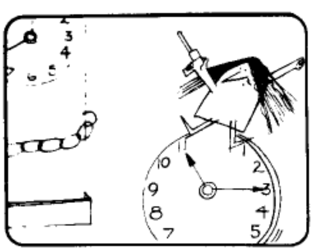
¿Cuál de estos relojes da mejor la hora? ¿El que atrasa un minuto diario, o el otro, que no funciona en absoluto?



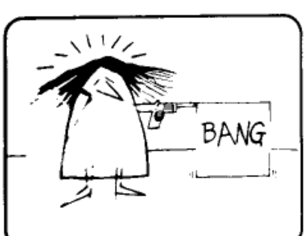
Lewis Carroll argumentaba así:
**Carroll:** El reloj que atrasa un minuto diario dará la hora exacta una vez cada dos años. El reloj parado da la hora exacta *dos* veces al día, todos los días. Por tanto, el reloj parado da mejor la hora. ¿No le parece?



Alicia está perpleja.
**Alicia:** Ya sé que el reloj parado estará dando la hora exacta cada vez que sean los ocho en punto. Pero ¿cómo puedo *yo* saber que son exactamente las ocho?



**Carroll:** Querida niña, eso es fácil de contestar. Bastará que permanezcamos junto al reloj parado, con una pistola en la mano.

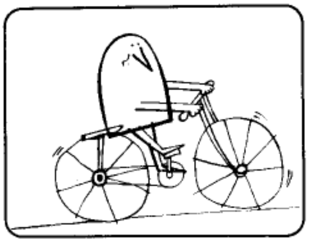



**Carroll:** No apartes la vista del reloj. En el preciso instante en que el reloj esté marcando la hora exacta, dispara la pistola. Al oír el tiro todos sabrán que son *exactamente* las ocho.

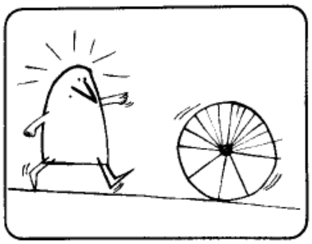
Lewis Carroll era el nombre literario de Charles L. Dodgson, profesor de matemáticas en Christ Church, uno de los colegios de la Universidad de Oxford, en Inglaterra. Su cuento sobre los dos relojes puede verse en *The Complete Works of Lewis Carroll*, y en otras muchas colecciones de sus escritos.

¿Cómo hizo Carroll para averiguar con qué frecuencia marcha en punto el reloj que retrasa? Como el reloj pierde un minuto cada día, volverá a marchar en punto cuando pierda 12 horas, lo que sucede una vez cada 720 días.

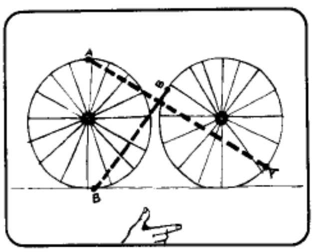
# La paradójica rueda



La paradoja de los relojes de Carroll no es más que un disparate, pero la que ahora veremos no lo es. ¿Sabía el lector que la parte alta de una rueda de bicicleta se mueve más rápidamente que la parte baja?



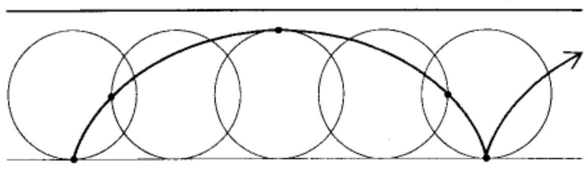
Ésa es la razón de que los radios de la mitad superior se vean más borrosos cuando la bicicleta está en marcha.



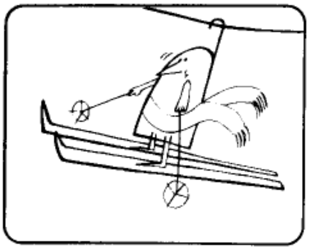
Fijémonos en dos posiciones de la rueda, conforme ésta avanza. El punto *A*, cercano a la parte alta, se ha desplazado hacia adelante mucho más que el *B*, cercano al suelo. Como la velocidad es la distancia recorrida en una unidad de tiempo, el punto *A* se mueve mucho más rápidamente que el *B*. ¿No es verdad?

Al comparar las velocidades de las partes altas y bajas de una rueda en marcha, es evidente que estamos fijándonos en sus velocidades con respecto al suelo. Una de las mejores formas de explicar esta paradoja consiste en estudiar la curva llamada cicloide. La cicloide está generada por un punto cualquiera de la llanta de una rueda, conforme ésta va rodando sin deslizar sobre una línea recta. Cuando el punto está en contacto con el suelo su velocidad es nula. Conforme la rueda prosigue su rodadura, la velocidad del punto va incrementándose, alcanzando el valor máximo cuando éste alcanza lo alto de la rueda. A partir de ahí, el punto decelera, hasta volver a tener velocidad 0 cuando toca el suelo por segunda vez. En ruedas con un nervio o reborde, como las ruedas de los trenes, los puntos del nervio llegan a moverse en sentido *contrario* al de la marcha cuando se encuentran por debajo del nivel del carril.

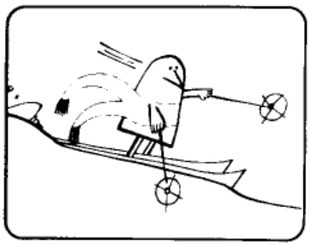
La cicloide tiene muchas hermosas propiedades, matemáticas y mecánicas, que pueden verse, por ejemplo, en el capítulo 13, «La cicloide: Helena de la geometría», de mi *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*. En ese capítulo se explica cómo trazar una cicloide haciendo rodar un bote de café. La construcción de la curva, y la deducción de su ecuación, nos harán apreciar mejor todavía sus elegantes propiedades.



# Un esquiador frustrado



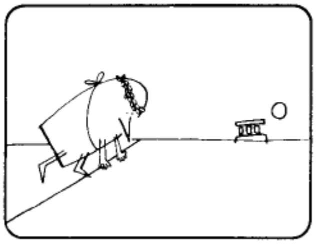
**Esquiador:** ¡Qué magnífico día para esquiar! ¡Mucho me gustaría que la telesilla subiese a más de 5 kilómetros por hora!
Si el esquiador quisiera aumentar su velocidad media en el circuito de ascenso y descenso hasta los 10 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad tendría que descender?



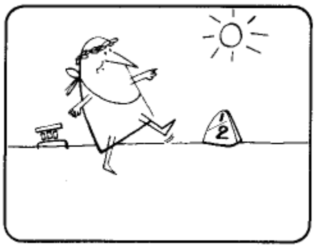
¿A 15 kilómetros por hora? ¿A 60? ¿A 100? Cuesta creerlo, pero la única forma de que el promedio de subida y bajada alcanzase los 10 km/h ¡sería descender en tiempo *nulo*!

Al principio puede parecer que en esta paradoja habrá que tener en cuenta las distancias recorridas al subir y bajar la ladera. Sin embargo, tal parámetro carece de importancia en este problema. El esquiador asciende una cierta distancia, con una cierta velocidad. Desea descender con tal velocidad que su velocidad media en el recorrido de ida y vuelta sea doble de la primera. Pero para conseguirlo tendría que hacer *dos* veces la distancia primitiva en el *mismo* tiempo que invirtió en el ascenso. Como es obvio, para lograrlo ha de bajar en un *tiempo cero.* Como esto es imposible, no hay forma de que su velocidad media pase de 5 a 10 kilómetros por hora. También es fácil demostrarlo por álgebra elemental.

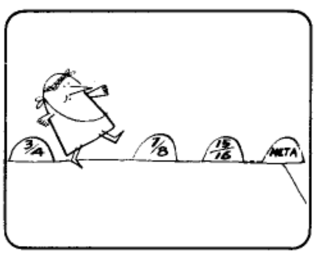
# Las paradojas de Zenón



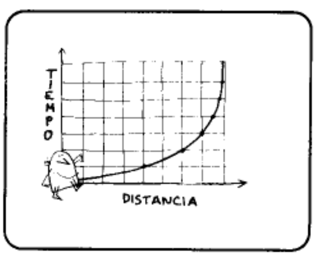
Los antiguos griegos idearon muchas paradojas concernientes al tiempo y al movimiento. Una de las más famosas fue la propuesta por Zenón acerca de un corredor.



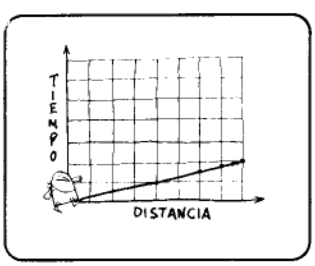

El corredor de Zenón razonaba así:
**Corredor:** Antes de alcanzar la meta habré de pasar por el punto medio. Y después habré de alcanzar la marca de 3/4, que está a la mitad de la distancia restante.



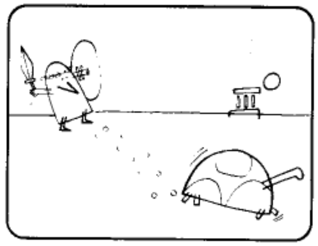

**Corredor:** Y antes de recorrer la cuarta parte final tendré que pasar por otra marca de mitad de trayecto. Estas marcas intermedias no acaban jamás. ¡Nunca podré alcanzar la meta!



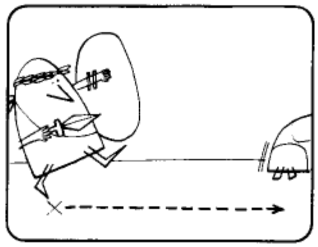

Supongamos que el corredor emplee un minuto en recorrer cada segmento mitad. La gráfica de tiempos y distancias muestra cómo va acercándose más y más a la meta, sin nunca alcanzarla. ¿Podrá ser correcto su razonamiento?



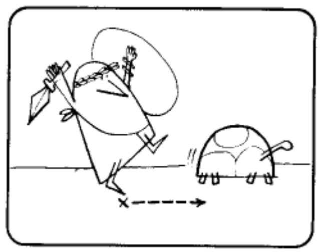

No, porque el corredor *no* invierte un minuto en cada semisegmento. Cada segmento es recorrido en la mitad de tiempo que su precedente. El corredor alcanzará la meta en 2 minutos aunque tenga que pasar por una infinidad de sucesivos puntos medios.



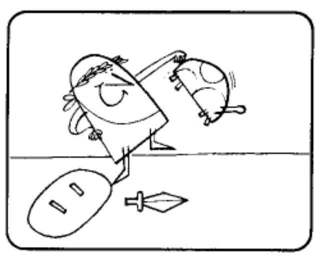
Zenón ideó una famosa paradoja sobre Aquiles. El guerrero quería alcanzar a una tortuga distante 1 kilómetro.



Cuando Aquiles llega al lugar que ocupaba la tortuga, ésta ha avanzado unos 10 metros más.



Pero cuando Aquiles recorre estos 10 metros, la tortuga ha vuelto a avanzar un poco más.
**Tortuga:** Nunca podrás cogerme, viejo. ¡Cada vez que llegues al último lugar donde estuve, yo estaré siempre un poco más adelante, aunque sea la mitad de un pelo!



Zenón sabía, desde luego, que Aquiles podía alcanzar a la tortuga. Lo que hacía era, simplemente, hacer ver las paradójicas consecuencias de imaginar el espacio y el tiempo formados por una sucesión infinita de puntos e instantes individuales consecutivos, como las cuentas de un collar.

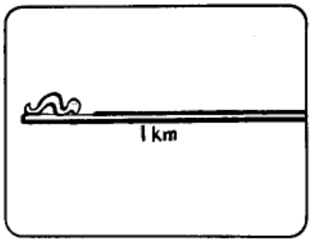
En estas dos paradojas tenemos que imaginar a los corredores como si fueran puntos que se desplazan con velocidad uniforme sobre una línea recta. Zenón sabía que un punto que se mueva desde *A* hacia *B* llega efectivamente a este punto. Las paradojas de Zenón fueron ideadas para resaltar las dificultades que surgen al intentar explicar el movimiento descomponiendo su trayectoria en puntos individuales, situados uno a continuación de otro, y al descomponer el tiempo en instantes discretos, distintos y diferenciados, que se suceden uno a otro.

Zenón no se hubiera dado por satisfecho si solamente le hubiéramos mostrado, como hemos hecho, que el tiempo requerido para recorrer un nuevo semisegmento es la mitad del invertido en el segmento precedente, y nos hubiera replicado que así como hay siempre otro punto medio en la recta, que es preciso alcanzar, así habrá también otro instante intermedio que habrá de ser alcanzado. En resumen, el razonamiento de Zenón para la recta puede aplicarse igualmente a la sucesión de tiempos. El tiempo se acerca más y más a dos minutos, pero siempre quedarán por transcurrir una infinidad de instantes más. Otro tanto vale para la paradoja de Aquiles y la tortuga. Por cada paso del proceso infinito quedarán siempre una infinidad de «próximos» pasos a dar, tanto en el espacio como en el tiempo.

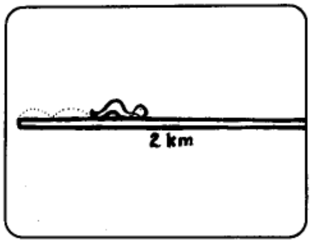
Muchos filósofos de la ciencia están de acuerdo con el famoso análisis que Bertrand Russell hace de las paradojas de Zenón en la sexta conferencia de su libro *Our Knowledge of the External World.* Russel aduce allí que a las paradojas de Zenón no se les pudo dar respuesta efectiva hasta que Georg Cantor desarrolló la teoría de conjuntos infinitos.

La teoría de Cantor nos permite manejar conjuntos infinitos de puntos del espacio, o acontecimientos temporales, como todos completos, y no como colecciones de puntos o sucesiones de instantes. En el corazón de las paradojas de Zenón late la imposibilidad de imaginar segmentos de tiempo y espacio como formados por una infinidad de miembros individuales y separados, no obstante, unos de otros, como pisadas en la nieve. La solución de las paradojas de Zenón requiere una teoría como la cantoriana, que unifique nuestra noción intuitiva de puntos y acontecimientos individuales con una teoría sistemática de conjuntos infinitos.

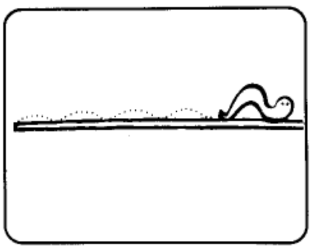
# La cuerda elástica




He aquí una nueva paradoja, que no se le ocurrió a Zenón. Una oruga se encuentra en un extremo de una cuerda de goma. La cuerda tiene 1 kilómetro de largo.




La oruga va reptando a lo largo de la cuerda con la marcha regular de 1 centímetro por segundo. Transcurrido el primer segundo, esta cuerda elástica es estirada, haciendo ahora que mida dos kilómetros. Transcurrido un segundo más vuelve a alargarse hasta medir tres kilómetros, y así sucesivamente. ¿Llegará la oruga a alcanzar el otro extremo de la cuerda?



La intuición nos dice que la oruga *nunca* alcanzará el extremo. ¡Y, sin embargo, *sí* lo consigue! ¿Cuánto tardará en lograrlo?

En este problema, la idea clave estriba en comprender que la cuerda se alarga uniformemente, como una cinta de goma. Esto significa que la oruga es *arrastrada* hacia adelante durante el alargamiento.

Una buena forma de resolver el rompecabezas es ir expresando el avance de la oruga tras cada segundo como una fracción de la longitud de la cuerda. Cuando la suma de estas fracciones sea igual a 1, la oruga habrá alcanzado el extremo de la cuerda.

En un kilómetro hay 100 000 centímetros, así que al final del primer segundo la oruga habrá recorrido (1/100 000)-ésima parte de la longitud de la cuerda. Durante el segundo siguiente, la oruga repta otro centímetro. Esta distancia equivale a la (1/200 000)-ésima de la longitud nueva de la cuerda, que es ahora de 2 kilómetros. Tras el tercer segundo la oruga habrá avanzado (1/300 000)-ésima de la longitud de la cuerda (3 kilómetros ahora), y así sucesivamente. Al cabo de $k$ segundos, el avance total de la oruga, expresado como fracción de la cuerda entera, es

$$\frac{1}{100\,000}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right)$$

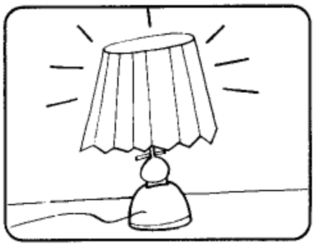
La serie encerrada en el paréntesis es llamada serie armónica. Observemos que la suma de los términos que van desde 1/2 a 1/4 —es decir, la suma de 1/3 más 1/4— es mayor que $2 \times (1/4) = 1/2$. Análogamente, la suma de los términos que van desde 1/4 hasta 1/8 es mayor que $4 \times (1/8) = 1/2$. Por tanto, la suma de la serie, desde 1/1 hasta $1/2^k$, supera siempre el valor $k \times (1/2) = k/2$, como podemos ver fácilmente agrupando los términos. Se toma la suma de los dos primeros, luego la suma de los cuatro siguientes, después la de los ocho consecutivos, etc. La suma parcial de la serie armónica puede hacerse tan grande como se desee.

La oruga alcanzará el extremo de la cuerda antes de $2^{200\,000}$ segundos. Una estimación más perfecta es $e^{100\,000}$, donde $e$ es la base de los logaritmos naturales ($e$ es un número irracional algo mayor que 2,7). Esta cantidad nos dice el tiempo transcurrido, en segundos, y la longitud de la cuerda, en centímetros.

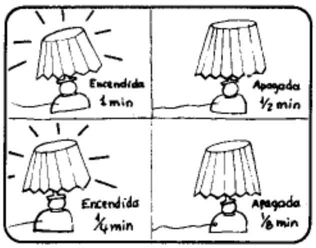
La fórmula exacta para determinar sumas parciales de la serie armónica puede verse en «Partial Sums of the Harmonic Series», por R. P. Boas Jr., y J. M. Wench Jr., en *American Mathematical Monthly* (vol. 78, octubre de 1971, pp. 864-870). La longitud final de la cuerda sería enormemente mayor que el diámetro del universo conocido, y el tiempo necesario para que el gusano alcance el otro extremo sería inmensamente mayor que la edad estimada del universo. No vale la pena decirlo, el problema se refiere a una oruga ideal representada por un punto de una cuerda tirante no menos ideal. Una oruga auténtica moriría al poco de emprender el camino, y una cuerda de verdad tendría que adelgazarse y estirarse tanto que terminaría estando formada por moléculas aisladas, separadas por huecos inconcebiblemente grandes.

Independientemente de los parámetros del problema, que son la longitud inicial de la cuerda, la velocidad de la oruga y el alargamiento adicional de la cuerda en cada unidad de tiempo, la oruga alcanza siempre el extremo de la cuerda en un tiempo finito. Cambiando las formas de alargamiento de la cuerda se plantean buenos problemas. Por ejemplo, ¿qué ocurre si la cuerda es estirada en progresión geométrica, duplicándose su longitud, pongamos por caso, cada segundo? En este caso, la oruga nunca alcanzaría el extremo de la cuerda.

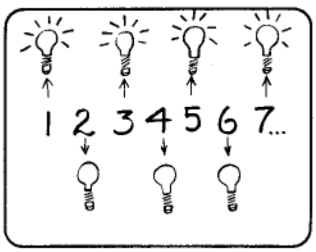
# Tareas sobrehumanas



Actualmente los filósofos discuten sobre una nueva clase de paradojas acerca del tiempo, llamadas tareas sobrehumanas. Una de las más sencillas se refiere a una lámpara. Un pulsador permite encenderla y apagarla.




La lámpara es encendida durante un minuto, apagada durante 1/2 minuto, después encendida 1/4 de minuto, y así sucesivamente. Esta serie de encendidos y apagados dura en total dos minutos, exactamente. Una vez transcurridos, ¿estará la lámpara encendida o apagada?




En cada pulsación de turno impar la lámpara será encendida; en las de turno par, apagada. Si la lámpara estuviera encendida al terminar, el último número natural sería impar. Y si estuviera apagada, par. Ahora bien, no hay ningún número natural que sea el último. Pasados los dos minutos la lámpara tiene que estar encendida o apagada, ¡pero no hay manera de saberlo!

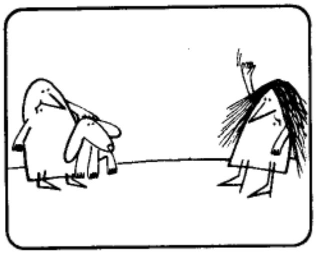
En filosofía de la ciencia no hay acuerdo todavía acerca de cómo elucidar las paradojas referentes a tareas sobrehumanas, tareas ejecutadas por las llamadas «máquinas del infinito». La paradoja de la lámpara es conocida por «lámpara de Thompson», en recuerdo de James F. Thompson, que fue el primero en escribir al respecto. Aunque sí hay completo acuerdo sobre la imposibilidad de construir una lámpara de Thompson, no es ésa la cuestión. La cuestión consiste en esclarecer si la lámpara es o no lógicamente concebible, supuestas ciertas hipótesis. Algunos sostienen que la «lámpara de Thompson» es un experimento «mental» bien planteado; otros, en cambio, la consideran absurda.

La paradoja es inquietante, porque no parece haber razones lógicas para que la lámpara, lo mismo que el corredor de Zenón, no pueda llevar a término una sucesión infinita de encendidos y apagados. Si el corredor de Zenón puede ir superando una infinidad de puntos intermedios en 2 minutos, ¿por qué no podrá el interruptor idealizado de la lámpara ser accionado una infinidad de veces, y concluir la secuencia de encendidos y apagados en 2 minutos exactamente? Pero si la lámpara *puede* hacer tal cosa, parecerá estar demostrada la existencia de un «último» número natural, y esto sí es absurdo.

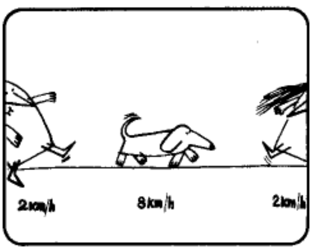
El filósofo Max Black ha presentado esta misma paradoja imaginando una máquina del infinito que transfiere una bolita de la bandeja *A* a la *B* en un minuto; después, durante el medio minuto siguiente, deposita nuevamente la bolita en *A*, durante el cuarto de minuto siguiente vuelve a dejarla en *B*, y así sucesivamente, con tiempos que forman progresión geométrica decreciente de mitad en mitad. Esta serie geométrica converge, y concluye exactamente dos minutos después de empezar. ¿Dónde se encontrará entonces la bolita? De encontrarse sobre alguno de los platillos resultaría que hay un último número natural, par o impar, según el platillo. No siendo así, parece que esta posibilidad debe ser eliminada. Pero si la bolita no está en ningún platillo, ¿dónde se ha metido?

Si el lector siente interés por las tareas sobrehumanas podrá encontrar los artículos fundamentales recopilados en *Zeno's Paradoxes,* colección de ensayos recopilados por Wesley C. Salmon, y podrá ver un análisis minucioso de las paradojas en *Modern Science and Zeno's Paradoxes,* de Adolf Grünbaum.

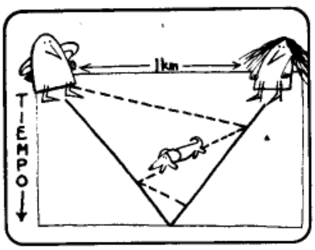
# Mary, Tom y *Fido*



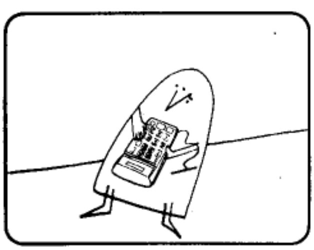
He aquí una tarea sobrehumana ejecutada por un perro. Al principio, *Fido* está con su amo, Tom. A un kilómetro de distancia se encuentra Mary.



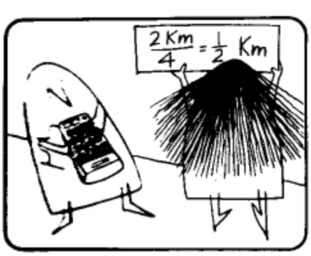

Tom y Mary caminan uno hacia el otro a 2 kilómetros por hora. *Fido*, que siente por ambos igual cariño, trota de uno a otro, a 8 kilómetros por hora. Supondremos que los giros sean instantáneos.



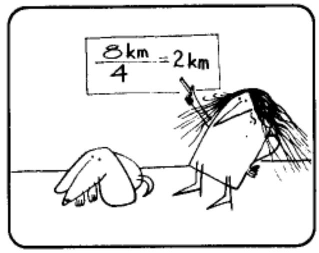

Es fácil seguir la trayectoria de *Fido* con ayuda de este gráfico espacio-tiempo. Cuando Tom y Mary se reúnan en el centro, ¿hacia quién mira *Fido*, hacia Tom o hacia Mary?



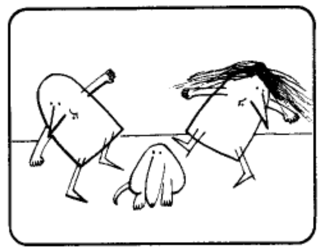
Esta cuestión es tan imposible de contestar como la de saber si la lámpara está encendida o apagada. En cambio, sí podemos ayudar a Tom a calcular la longitud total recorrida por su perro.
**Tom:** Menudo lío, Mary. Tendré que sumar una complicada serie de zigzagues.



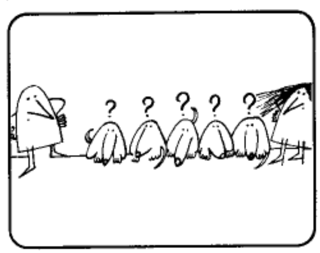

**Mary:** ¡Nada de eso, cabeza hueca! Nosotros íbamos caminando a 2 kilómetros por hora, así que cada uno anduvimos medio kilómetro en 15 minutos. Como al empezar estábamos a un kilómetro de distancia, tardamos 15 minutos en reunirnos.




**Mary:** *Fido* trota a 8 kilómetros por hora, así que en un cuarto de hora habrá recorrido la cuarta parte de esa distancia, es decir, 2 kilómetros.
**Tom:** ¡Tienes razón! ¡Para qué necesito esta calculadora!



Supongamos que Tom, Mary y *Fido* se ponen en marcha en medio del mismo camino. Tom y Mary retroceden a la misma velocidad que antes, mientras que *Fido* trota de uno a otro. Cuando Tom y Mary llegan al final del camino, ¿dónde está *Fido*?




Parece imposible, pero ¡el perro puede estar en *cualquier* sitio entre Tom y Mary! Si usted no lo cree, coloque a *Fido* en *cualquier* sitio entre ellos y repita lo sucedido. Al terminar, los tres estarán juntos en el centro.

El primer problema, donde Mary y Tom van al encuentro, mientras *Fido* trota de uno al otro, es muy clásico, y ha sido narrado de muchas formas. A veces se trata de un pájaro que vuela adelante y atrás entre dos locomotoras que se acercan; otras, de un moscardón que va y viene, zumbando, entre dos ciclistas.

Se cuenta del eminente matemático húngaro John Von Neumann esta anécdota: Alguien le propuso una versión de este problema. Von Neumann lo pensó un instante y dio la respuesta correcta. La persona que se lo planteó le felicitó por su acierto. «Mucha gente —le dijo— piensa que habrá que resolverlo por las malas, sumando una serie infinita de segmentos.» Von Neumann le miró con aire sorprendido. «¡Pero si eso es lo que he hecho!», replicó.

¿Hacia qué lado estará mirando *Fido* cuando Tom y Mary lleguen a reunirse? Viene a ser como preguntarse si la lámpara de Thompson está encendida o apagada, o si la canica se halla en el platillo *A* o en el *B*. Da la impresión de que el perro tendría que estar mirando hacia Mary o hacia Tom, pero en ambos casos ello supondría la existencia de un último número natural, que, según hacia dónde mire el perro, será par o impar.

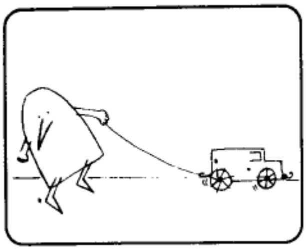
Invirtamos ahora el curso del tiempo. Comencemos con Mary, Tom y *Fido* en el punto medio del sendero. Tom y Mary irán retrocediendo hacia los puntos de partida, y *Fido* irá trotando entre ambos. Se plantea entonces otra paradoja. Nuestra intuición nos dice que si en un proceso bien definido el tiempo discurriera del presente hacia el pasado tendríamos que terminar exactamente donde empezamos. Lo curioso de este caso es que al invertir el decurso del tiempo el proceso deja de estar bien definido. Cuando el proceso se desarrolla hacia el futuro termina con *Fido* situado exactamente en el centro del camino. Pero cuando el mismo proceso se remonta hacia el pasado, es imposible determinar la posición final de *Fido*. El perro puede hallarse en cualquier punto del camino que separa a Tom de Mary.

Para una discusión más detallada puede verse el análisis de Wesley Salmon, en la sección de «Juegos matemáticos» de *Scientific American*, diciembre de 1971. Tanto este problema como las paradojas sobre corredores y tareas sobrehumanas anteriores son descripciones intuitivas del concepto de límite, además de aplicaciones de la suma de una serie geométrica.

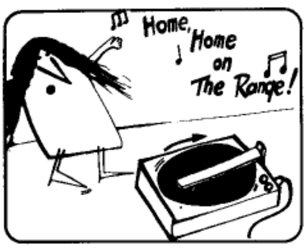
La zigzagueante trayectoria de *Fido* recuerda el rebotar de una pelota. He aquí un sencillo problema de rebotes. Imaginemos una pelota ideal que cae desde una altura de 1 metro. Siempre rebota hasta la altura mitad de la anterior. Si en cada bote tardase un segundo la pelota estaría saltando eternamente. Pero lo mismo que el corredor de Zenón, que la lámpara y que el transportador de canicas, cada tramo de la trayectoria de la pelota requiere menos tiempo que el anterior. En este caso, para cada rebote se invierte $1/\sqrt{2}$ de la duración del anterior. La sucesión de tiempos converge también hacia un límite, lo que significa que la pelota dejará de rebotar al cabo de un tiempo finito, a pesar de que, en teoría, efectúa una infinidad de rebotes. La pelota recorre una distancia de
$1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^n + \ldots = 2$ metros.

Supongamos que la pelota rebotase solamente a una tercera parte de su altura de caída. ¿Cuánto recorrería antes de quedar en reposo?

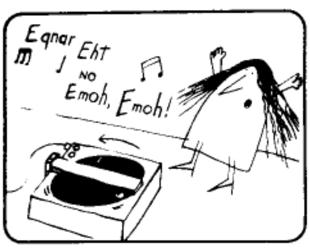
# ¿Podrá retroceder el tiempo?



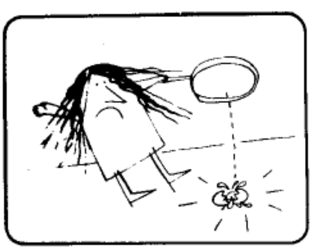
La inversión del sentido de ciertos movimientos (caminar de espaldas, dar un coche marcha atrás) casi nos hace sentir que el tiempo retrocede.



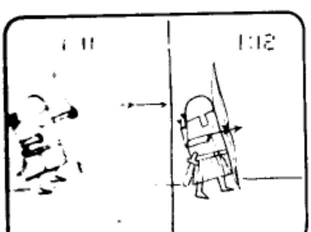

Esta conocida canción...



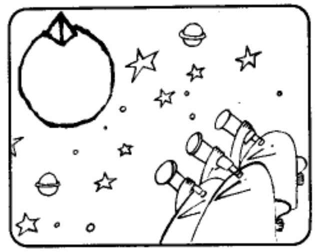

... nos hace reír al tocarla hacia atrás, empezando por el final.



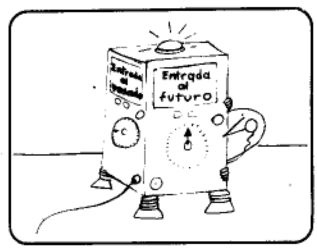
En nuestras vidas, casi todos los acontecimientos son irreversibles.




El tiempo es como una flecha que siempre apunte en la misma dirección. Incluso al reproducir en sentido retrógrado una canción, la sucesión de notas señala el progresar del tiempo.



No podemos ver el futuro, pero *sí* podemos mirar hacia el pasado. Cuando observamos una estrella distante mil años luz, la estamos viendo con el aspecto que tuvo hace un milenario.




Pero ver el pasado es una cosa muy distinta de penetrar en él. ¿Será posible algún día subir a una máquina del tiempo y *visitar* realmente el pasado o el futuro?

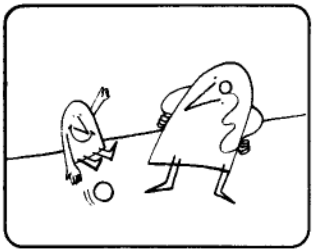
Examinemos qué tipos de sucesos pueden «retroceder en el tiempo», en el sentido de invertir su sentido de movimiento, y cuáles no. Una buena forma de aclarar las diferencias de ambos es imaginar que el acontecimiento está siendo filmado. Posteriormente, la película es proyectada, pero del fin hacia el principio. ¿Qué tipos de acontecimientos parecerían violar leyes naturales al pasarlos marcha atrás? ¿De qué tipo serían los que no?

Si, por ejemplo, en la película viésemos un coche moviéndose hacia atrás no lo tendríamos por imposible. Tal vez el conductor esté maniobrando con su auto. En cambio, si en la película vemos a un bañista salir del agua con los pies y elevarse hasta la plancha del trampolín, reconocemos inmediatamente por esta señal que la película está siendo pasada hacia atrás. Otro tanto valdría si viéramos un huevo roto recomponerse en el suelo y saltar a las manos de una persona. Tal acontecimiento jamás podría ocurrir en el mundo real.

Incluso cuando un suceso «remonta el tiempo», por cambiar su sentido «natural» de movimiento —como al reproducir un disco de fin a principio—, el acontecimiento sigue todavía desarrollándose en un tiempo progresivo. Normalmente, las flechas se desplazan en la dirección a la que apuntan. Imaginemos que viéramos una flecha viajar hacia atrás por el cielo y terminar en el arco del arquero. El momento en que alcanzase el arco sería posterior al de vuelo. Sir Arthur Eddington comparó en cierta ocasión el tiempo con una flecha indicadora que apuntase siempre en la misma dirección. En nuestro universo, los acontecimientos parecen ir inexorablemente desde el pasado hacia el futuro, y nunca desde el futuro hacia el pasado.

En años recientes, físicos y cosmólogos han estado especulando con la posibilidad de que en otros universos los acontecimientos se desarrollen «al revés». Y hay una interpretación, debida al premio Nobel Richard Feynman, en la que las antipartículas son consideradas como ¡partículas que temporalmente «remontan» el tiempo! Puede usted leer acerca de estas fantásticas especulaciones en los cuatro últimos capítulos de la segunda edición de mi *Ambidextrous Universe (Izquierda y derecha en el cosmos,* Salvat Editores y Alianza Editorial, 1973).

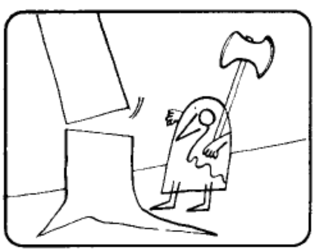
# Máquinas del tiempo



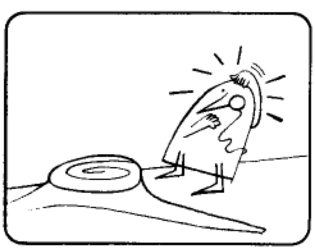
El profesor Santos acaba de retroceder 30 años en el tiempo. Ahora se está viendo a sí mismo cuando era niño.

**Santos:** Supongamos que yo matase a este niño. ¡No habría entonces nadie que al crecer llegase a ser el profesor Santos! ¿Me esfumaría yo súbitamente?


Ahora el profesor se ha adentrado 30 años en el futuro. Ahí lo tenemos, grabando su nombre en un roble del jardín de su laboratorio.



El profesor Santos retornó al presente. Pocos años después decidió talar el roble. Pero hecho esto, se encontró profundamente perplejo.



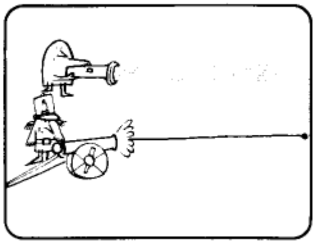
**Santos:** Hummm... Hace tres años me interné 30 años en el futuro y grabé mi nombre en este árbol. ¿Qué sucederá dentro de 27 años, al llegar yo desde el pasado? El árbol ya no se encontrará aquí. ¿De dónde pudo salir el árbol donde yo grabaré mi nombre?

Centenares de cuentos de ciencia ficción, películas de cine y televisión, han tratado el tema del viaje a través del tiempo, hacia el pasado o el futuro. De ellos es clásico el cuento de H. G. Wells *The Time Machine* (La máquina del tiempo).

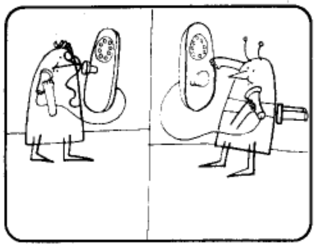
Desde el punto de vista lógico, ¿es posible viajar por el tiempo, o conduce esta idea necesariamente a contradicciones? De las paradojas se deduce claramente que admitiendo que haya solamente un universo, que avanza a través del tiempo, todo intento de penetración en el pasado puede llevarnos a absurdos lógicos. Fijémonos en la primera paradoja, donde un viajero del tiempo penetra en su propio pasado y se encuentra a sí mismo de niño. Si matase al niño, él al mismo tiempo existiría y no existiría. Si el niño, que al crecer llegará a ser el profesor Santos, es muerto, ¿de dónde viene el profesor Santos?

La segunda paradoja es más sutil. No hay contradicción en que el profesor se adelante al tiempo y grabe su nombre sobre un árbol. La contradicción surge después, al regresar al presente, es decir, al retroceder en el tiempo. Talando el árbol, Santos lo elimina del futuro. Tenemos nuevamente una contradicción. En un cierto momento del futuro, el árbol existe y no existe.

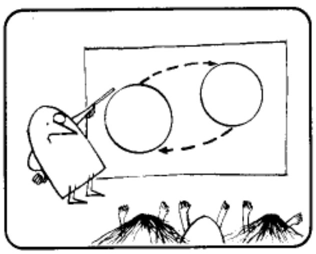
# El teléfono taquiónico



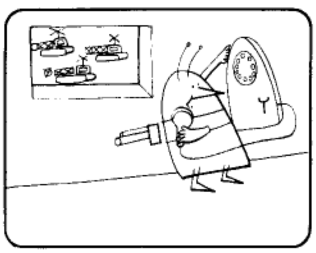
En años recientes, los físicos han estado especulando acerca de partículas subatómicas hipotéticas, llamadas *taquiones.* Los taquiones se desplazarían con velocidad mayor que la luz. Según la teoría de relatividad, si existieran, los taquiones tendrían que remontar el tiempo.



El profesor Santos cree haber inventado un teléfono taquiónico. Con él, confía en poder comunicarse con el doctor Gamma, que habita en otra galaxia.



El profesor Santos explica a sus alumnos un experimento.
**Santos:** Mañana a mediodía llamaré al doctor Gamma mediante mi teletaquiófono. Le pediré que cuelgue, que cuente el número de helicópteros que pasan frente a su ventana, y que me llame dándome el número.
**Alumna:** Lo siento, señor, pero no podrá ser como usted dice.



**Santos:** Y veamos, jovencita, ¿por qué no?
**Alumna:** Porque los taquiones remontan el tiempo. El doctor Gamma recibirá su llamada una hora *antes* del mediodía. Su llamada de vuelta se adelantaría otra hora, y por tanto usted habría de recibir su respuesta dos horas *antes* de hacer la pregunta. ¡Eso no es posible!

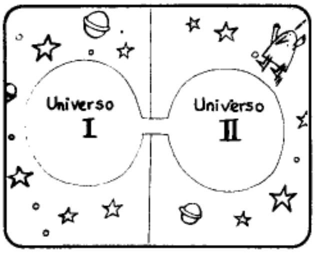
Este episodio muestra que para suscitar una paradoja no es necesario que una *persona* retroceda en el tiempo. Las contradicciones se plantean igualmente si retrocede en el tiempo alguna suerte de objeto o de mensaje. Por ejemplo, el profesor Santos podría decirse un lunes a sí mismo: «El próximo viernes meteré mi corbata en esta máquina del tiempo, para trasladarla al martes, que es mañana». Como era de esperar, el martes encontraría la corbata en la máquina. Supongamos que ese mismo día queme la prenda. Cuando llegue el viernes no habrá corbata que devolver al martes. Como antes, parece como si el viernes la corbata simultáneamente existiera y no existiera. Existió cuando el profesor la devolvió al martes, pero ahora vuelve a ser viernes, ¡y ya no hay corbata que enviar!

No obstante, los taquiones sí son perfectamente tomados en serio por muchos físicos. (Véase «Particles That Go Faster Than Light», por Gerald Feinberg, en *Scientific American,* febrero de 1970.) De acuerdo con la teoría de relatividad, la velocidad de la luz es una cota superior de las velocidades de las partículas ordinarias. Los físicos han especulado, no obstante, con la posibilidad de existencia de partículas, que Feinberg bautizó «taquiones», que siempre se desplacen mucho más rápidamente que la luz. Para los taquiones, la velocidad de la luz es una cota *inferior.* La teoría de la relatividad exige suponer que tales partículas, de existir, tendrían que remontar el tiempo, como la moza de la estrofa:

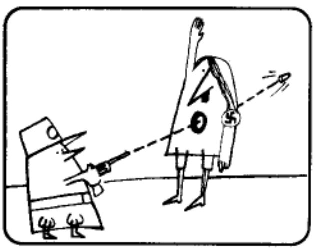
> Una jovencita, de nombre Virtud,
> viajar podía, más veloz que la luz.
> Salió de casa un buen día,
> con relativa ufanía
> ¡y retornó la noche anterior!

La paradoja del teléfono no demuestra la imposibilidad de que existan los taquiones, pero sí demuestra que de existir no podrán ser utilizados para la comunicación. Pues entonces nos tropezaríamos con la contradicción lógica descrita arriba. Para saber más sobre esta paradoja y de sus consecuencias en la investigación sobre taquiones, véase «The Tachyon Antitelephone», por G. A. Benford, D. L. Book y W. A. Newcomb (*Physical Review, D,* vol. 2, 15 de julio de 1970).

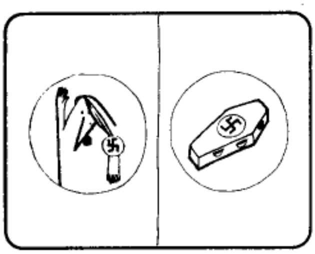
# Mundos paralelos



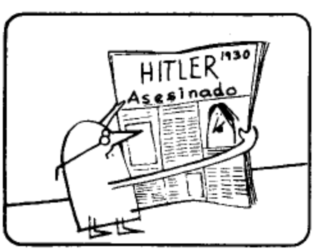

Los escritores de ciencia ficción han dado con un fantástico procedimiento para eludir las paradojas provocadas por los viajes a través del tiempo. Cada vez que el viajero penetra en el pasado, el universo se escinde en dos mitades idénticas, cada una con su propio espacio-tiempo.



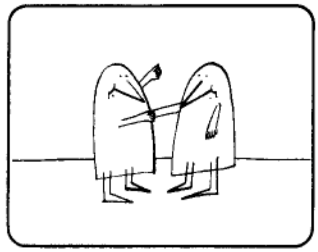
Veamos un caso. Supongamos que usted retrocede hasta 1930 y mata de un tiro a Hitler. Inmediatamente el universo se escinde en mundos paralelos.



El Universo I sigue evolucionando, con Hitler todavía vivo. El Universo II prosigue, pero con Hitler muerto.



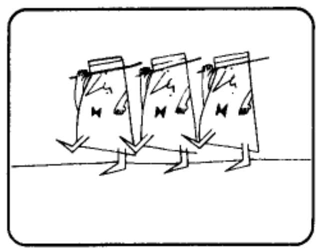

Si pudiéramos retornar al presente del Universo II nos encontraríamos en las hemerotecas periódicos informándonos del asesinato de Hitler. El mundo que hemos abandonado, en el que Hitler no fue muerto, es un mundo al que jamás podremos retornar.



Esta teoría de bifurcación de universos abre un cúmulo de extrañas posibilidades. Imaginémonos retrocediendo un año, y dándonos la mano a nosotros mismos.

**Paco:** ¡Hola, Paco!

**Paco:** ¡Hombre, Paco! ¡Cuánto tiempo sin verte!



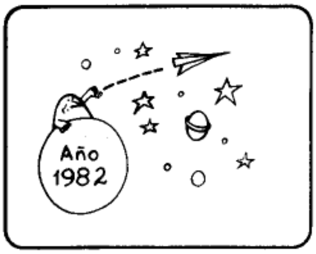
Más tarde, uno de estos nosotros se monta en su máquina del tiempo y retrocede, para encontarse con *dos* copias de nosotros mismos. Ahora hay ya *tres* Pacos. Repitiendo el proceso podrían crearse centenares más.

En las viñetas hemos explicado un fantástico procedimiento que permitiría retroceder hacia el pasado sin tropezar en contradicciones lógicas. Fueron los autores de ciencia ficción los primeros en dar con la idea, y en ella se ha basado una infinidad de narraciones. La clave consiste en suponer que cada vez que una persona o cosa penetra en el pasado, el universo se escinde en mundos paralelos. De ser así ya no habría contradicción entre la existencia e inexistencia del profesor Santos, ni de que en uno de ellos exista el árbol y en otro no. Si hay universos paralelos, Santos (o el árbol) pueden existir en uno y tal vez no en otro.

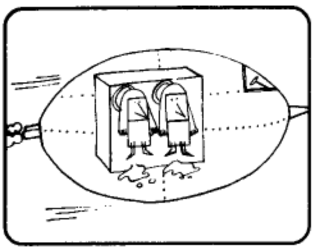
Sorprendentemente, hay una interpretación de la mecánica cuántica que se funda en esta idea de la proliferación de universos. Llamada «teoría de mundos múltiples», se ha escrito todo un libro dedicado a ella: *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics,* editado por Bryce S. DeWitt y Neill Graham. Según esta osada teoría, cuyas primeras ideas fueron propuestas en 1975 por Hugh Everett III, el universo se ramifica cada microsegundo en un sinfín de mundos paralelos, cada uno de ellos siendo una de las posibles combinaciones de microacontecimientos que *pudieran* ocurrir en ese instante. De aquí se sigue una increíble visión de una infinidad de universos que representan cada posible combinación de posibles acontecimientos. Así describía Frederic Brown tal visión en su novela *What Mad Universe:*

> De haber infinitos universos habrán de existir todas las combinaciones posibles. Por consiguiente, en un lugar u otro, *todo tiene que ser cierto*... Hay un universo donde Huckleberry Finn es una persona de carne y hueso, que hace precisamente las cosas que Mark Twain describió. Más todavía, hay un número infinito de universos donde Huckleberry está realizando cada una de las posibles variantes que Mark Twain *podría* haber descrito que hacía... E infinitos universos donde los estados de existencia son tales que no tendríamos ni palabras ni pensamientos para describirlos o imaginarlos.

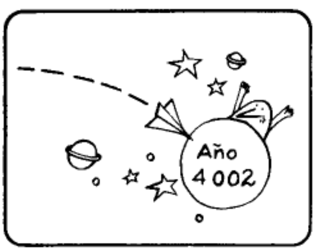
# La dilatación del tiempo



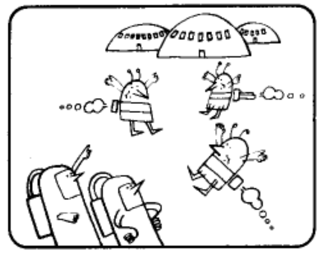

Los viajes hacia el pasado originan tales paradojas que ningún científico se los toma en serio. En cambio, los viajes hacia el futuro son ya otra cosa. Imaginemos que un navío espacial abandona la Tierra, viajando casi tan velozmente como la luz.



Cuanto más rápidamente viaje la nave, tanto más lentamente transcurre el tiempo. A los astronautas a bordo, el tiempo les parecerá discurrir normalmente, pero desde la Tierra parecerían estatuas.




La nave llega hasta otra galaxia y regresa.
A sus tripulantes el viaje les parece que habrá durado unos cinco años. Pero cuando la nave aterrice en nuestro planeta, ¡en él habrán transcurrido miles de años!



Esta clase de viajes por el tiempo no suscita paradojas, pero los astronautas están ahora atrapados en el futuro terrestre. No pueden retornar a su época.

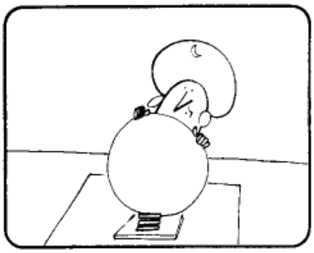
Sólo se pueden presentar contradicciones al viajar hacia el pasado; no, en cambio, al hacerlo hacia el futuro. Después de todo, somos viajeros del tiempo, caminantes hacia el futuro, tanto si vamos de grado como si no. Cuando nos vamos a dormir, por la noche, esperamos despertarnos en un futuro cercano. En teoría, una persona podría estar mil años en hibernación, y ser revivida. Muchos cuentos y novelas de ciencia ficción se han basado en esta especie de «viaje por el tiempo», muy especialmente, *When the Sleeper Wakes* (Cuando despierta el durmiente), de H. G. Wells.

Como muestran las viñetas, la teoría de relatividad de Einstein proporciona una forma totalmente distinta de viaje hacia el futuro. De acuerdo con la teoría especial de relatividad, cuanto más rápidamente se desplace un objeto, tanto más lentamente transcurre su tiempo con respecto a un observador estacionario. Por ejemplo, si una nave espacial alcanzara una velocidad cercana a la de la luz, el tiempo a bordo del navío transcurriría mucho más lentamente que en la Tierra. A bordo del navío los astronautas no observarían nada anormal. Sus relojes parecerían funcionar como siempre, sus corazones latirían al ritmo habitual, etc. Pero si los terrícolas tuvieran algún procedimiento para observarlos, la lentitud de sus movimientos los asemejaría a estatuas. A su vez, si los atronautas pudieran observar la vida de la Tierra, los acontecimientos parecerían sucederse tan rápidamente que un año terrestre parecería pasar en sólo unas cuantas horas. La razón de que no observemos estos efectos en la vida ordinaria es que sólo son apreciables y significativos a velocidades cercanas a la de la luz, convencionalmente simbolizada *c*, cuyo valor es cercano a los 300 000 kilómetros por segundo. Hay una fórmula sencilla que relaciona los intervalos de tiempo $T$ medidos por los relojes emplazados en la Tierra, con los intervalos $T'$ medidos por los relojes de una astronave que viaje a velocidad constante $v$ con respecto a la Tierra:

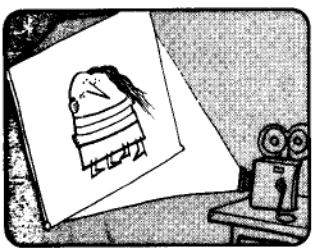
$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Al sustituir $v$ por cualquiera de las velocidades ordinariamente encontradas en la Tierra obtenemos para el segundo miembro de la fórmula un valor tan cercano a 1 que $T'$ y $T$ serán prácticamente iguales. Pero dando a $v$ valores de $0{,}5c$, $0{,}75c$ o $0{,}9c$ (velocidades alcanzadas por partículas subatómicas de alta energía), la dilatación del tiempo es lo bastante grande como para ser medida en laboratorio. Estas mediciones dan sólido respaldo a la teoría especial de relatividad.

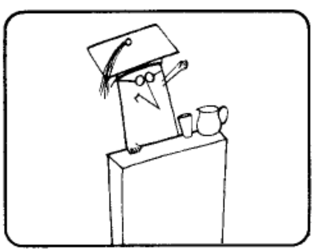
# El destino, el azar y el libre albedrío



Aunque los físicos van aprendiendo cada vez más acerca del tiempo, su esencia continúa siendo un profundo misterio. Una de las más difíciles cuestiones es la de si el futuro está o no completamente determinado.



**Determinista:** *Que sera, sera.* Lo que haya de ser, será. La vida es como una película. Nosotros somos los personajes de la pantalla. *Creemos* tener voluntad y libre albedrío. En realidad, tan sólo somos actores que interpretan acontecimientos predeterminados.



**Indeterminista:** El futuro sólo está *parcialmente* determinado. Podemos cambiar ciertas cosas gracias a nuestra voluntad. La historia ofrece auténticas sorpresas.

Hay entre científicos, filósofos y gente común la más tajante división de opiniones acerca de si el futuro está o no completamente determinado por el pasado. Los deterministas creen que el estado total del universo en un momento dado cualquiera determina completamente el estado total del universo en cualquier momento del futuro. Tal era, por ejemplo, la convicción personal de Einstein. Entre los más grandes de los muchos filósofos que abrazaron la causa determinista estuvo Benedicto de Spinoza, y Einstein se consideraba a sí mismo spinozista. Fue ésta una de las razones por las que Einstein nunca aceptó como definitiva la teoría cuántica, pues en la teoría cuántica el azar interviene de manera fundamental en la determinación de los acontecimientos del microcosmos. Como el propio Einstein manifestó en cierta ocasión, «No creo que Dios juegue a los dados con el universo».

Los indeterministas juzgan que el futuro del universo está sólo parcialmente determinado por su estado actual. Los indeterministas no creen necesariamente en el libre albedrío, y pueden no creer tampoco que el papel que desempeñe el azar a nivel subatómico sea la causa que impida la completa determinación del futuro. Por otra parte, pueden tal vez creer que los seres vivos, y muy especialmente los humanos, tienen «albedrío», una «voluntad libre» que les otorga capacidad para modificar perceptiblemente el futuro de maneras que ni siquiera un ser sobrehumano capaz de conocer todo acerca del estado actual del universo podría predecir. Charles Peirce y William James fueron dos eminentes filósofos norteamericanos, paladines de la causa indeterminista.

Estas profundas cuestiones filosóficas están, en última instancia, íntimamente ligadas a la naturaleza del tiempo, e igualmente, a lo que se entienda al decir que un suceso «es causa» de otro. Nadie duda de que aplicando técnicas matemáticas a nuestras mediciones del universo podamos predecir ciertos acontecimientos con exactitud casi perfecta: el momento en que se producirá el próximo eclipse solar, por ejemplo. Y nadie niega que otros sucesos, tales como el resultado del próximo lanzamiento de un dado, o el tiempo que hará la semana que viene, son impredictibles en la práctica, precisamente a causa de que los factores que los determinan son demasiado complejos.

La gran cuestión estriba en elucidar si las leyes básicas del universo son completamente determinísticas o no, o si la novedad genuina está originada por el puro azar en el nivel microcósmico, o por los seres vivos del nivel macroscópico, o tal vez por ambos. Estas cuestiones fueron ya debatidas por los antiguos griegos; científicos, filósofos y gentes de a pie han estado sin cesar debatiéndolas desde entonces.

# Bibliografía y obras recomendadas

*Las obras recomendadas van precedidas de ★.*

## 1 Lógica


### Bibliografía general

Carroll, Lewis: *The Annotated Alice: Alice's Adventures in Wonderland and Through the Locking Glass,* Martin Gardner (ed.), Nueva York, Clarkson N. Potter, Bramhall House, 1960.

★ Dunsany, Lord: *The Ghost of the Heaviside Layer and Other Fantasies,* Filadelfia, Owlslick Press, 1980.

Fisher, John: *The Magic of Lewis Carroll,* Nueva York, Simon and Schuster, 1973.

★ Hofstadter, Douglas R.: *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid,* Nueva York, Basic Books, 1979.

★ Quine, W. V.: «Paradox», *Scientific American,* abril de 1962.

Russell, Bertrand: *Principia Mathematica,* parte 8, Cambridge, Cambridge University Press, 1910-1913. (Trad. cast.: *Los principios de la matemática,* Madrid, Espasa-Calpe, 1977.)

Russell, Bertrand: *My Philosophical Development,* reimpr., Winchester, Mass., Allen Unwin, 1975. (Trad. cast.: *Evolución de mi pensamiento filosófico,* Madrid, Alianza, 1976.)

★ Smullyan, Raymond: *What Is the Name of This Book?* Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1978. (Trad. cast.: *¿Cómo se llama este libro?,* Madrid, Cátedra, 1981.)

★ Smullyan, Raymond: *This Book Needs No Title,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1980.

★ van Heijenoort, Jean: «Logical Paradoxes», en *The Encyclopedia of Philosophy,* Paul Edwards (ed.), Nueva York, Macmillan, 1967.

### La paradoja del mentiroso

Martin, Robert L. (ed.): *The Paradox of the Liar,* Nueva Haven, Yale University Press, 1970.

Tarski, Alfred: «Truth and Proof», *Scientific American,* junio de 1969.

### Regresión infinita

Gardner, Martin: «Infinite Regress», capítulo 22 de *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1971.

### Paradojas de predicción

★ Gardner, Martin: «Mr. Apollinax Visits New York», capítulo 11 de *New Mathematical Diversions from Scientific American,* Nueva York, Simon & Schuster, 1966. (Trad. cast.: *Nuevos pasatiempos matemáticos,* 4.ª ed., Madrid, Alianza, 1982.)

★ Gardner, Martin: «The Paradox of the Unexpected Hanging», capítulo 1 de *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions,* Nueva York, Simon & Schuster, 1968.

### La paradoja de Newcomb

Brams, Steven: «A problem of Prediction», capítulo 8 de *Paradoxes in Politics: An Introduction to the Nonobvious in Political Science,* Nueva York, Free Press, 1976.

★ Gardner, Martin: «Free Will Revisited», Mathematical Games Department, *Scientific American,* julio de 1973.

★ Nozick, Robert: «Newcomb's Problem and Two Principles of Choice», en *Essays in Honor of Carl G. Hempel,* Nicholas Rescher (ed.), Atlantic Highlands, N. J., Humanities Press, 1970.

★ Nozick, Robert: «Reflections on Newcomb's Problem», Mathematical Games Department, *Scientific American,* marzo de 1974.

## 2 Números


### Bibliografía general

Beiler, Albert H.: *Recreations in the Theory of Numbers,* Nueva York, Dover, 1964.

Dantzig, Tobias: *Number: The Language of Science,* 4.ª ed., Nueva York, Free Press, 1967.

Gardner, Martin (ed.): *Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions,* Nueva York, Simon & Schuster, 1963.

Northrop, Eugene: *Riddles in Mathematics: A Book of Paradoxes,* Huntington, N. Y., Krieger, 1975.

### Trucos mágicos

Barr, George: *Entertaining with Number Tricks,* Nueva York, McGraw-Hill, 1971.

★ Fulves, Karl: *Self-Working Card Tricks,* Nueva York, Dover, 1976.

★ Gardner, Martin: *Mathematics, Magic and Mystery,* Nueva York, Dover, 1956.

### Números transfinitos

Cohen, Paul, y Reuben Hersh: «Non-Cantorian Set Theory», *Scientific American,* diciembre de 1967.

★ Gardner, Martin: «The Orders of Inifinity», Mathematical Games Department, *Scientific American,* marzo de 1971.

★ Gardner, Martin: «Aleph-Null and Aleph-One», capítulo 3 de *Mathematical Carnival,* Nueva York, Knopf, 1975. (Trad. cast.: *Carnaval matemático,* 2.ª ed., Madrid, Alianza, 1981.)

★ Kasner, Edward, y James Newman: «Beyond the Googol», capítulo 2 de *Mathematics and the Imagination,* Nueva York, Simon & Schuster, 1940.


## 3 Geometría


### Bibliografía general

★ Abbott, Edwin A.: *Flatland: A Romance of Many Dimensions,* 1884. Varias reimpresiones disponibles.

★ Anno, Mitsumasa: *Anno's Alphabet: An Adventure in Imagination,* Nueva York, T. Y. Crowell, 1975.

★ Anno, Mitsumasa: *The Unique World of Mitsumasa Anno,* Nueva York, Philomel Books, 1980.

Burger, Dionys: *Sphereland,* Cornelie J. Rheinboldt (trad.), Nueva York, T. Y. Crowell, 1965.

Courant, Richard, y Herbert Robbins: *What Is Mathematics?,* Oxford, Oxford University Press, 1941. (Trad. cast.: *Qué es la matemática,* 5.ª ed., Madrid, Aguilar, 1967.)

Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry,* Nueva York, Wiley, 1961.

★ Gardner, Martin: *Mathematics, Magic and Mystery,* Nueva York, Dover, 1956.

Gardner, Martin: *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1971.

Gardner, Martin: *New Mathematical Diversions from Scientific American,* Nueva York, Simon & Schuster, 1971. (Trad. cast.: *Nuevos pasatiempos matemáticos,* 4.ª ed., Madrid, Alianza, 1982.)

Gardner, Martin: *Mathematical Circus,* Nueva York, Vintage Books, 1981.

Gardner, Martin (ed.): *Second Scientific American Book for Mathematical Puzzles and Diversions,* Nueva York, Simon & Schuster, 1965.

Jacobs, Harold: *Geometry,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1974.

Mandelbrot, Benoit: *The Fractal Geometry of Nature,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1982.

Ogilvy, C. Stanley: *Excursions in Geometry,* Oxford, Oxford University Press, 1969.

Wells, H. G.: *28 Science Fiction Stories,* Nueva York, Dover, 1952.

### Simetría especular

★ Kim, Scott: *Inversions,* Nueva York, McGraw-Hill, Byte Books, 1981.

Lockwood, S. H., y R. H. Macmillan: *Geometric Symmetry,* Cambridge, Cambridge University Press, 1978.

Weyl, Hermann: *Symmetry,* Princeton, Princeton University Press, 1952. (Trad. cast.: *Simetría,* Barcelona, Promoción Cultural, 1974.)

### Topología

Arnold, Bradford: *Intuitive Concepts in Elementary Topology,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1962.

Barr, Stephen: *Experiments in Topology,* Nueva York, T. Y. Crowell, 1972.

★ Tucker, Albert, y Herbert Bailey, Jr.: «Topology», *Scientific American,* enero de 1950.

### Antimateria

Alfvén, Hannes: *Worlds-Antiworlds: Antimatter in Cosmology,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1966.

★ Gardner, Martin: *The Ambidextrous Universe: Mirror Asymmetry and Time-Reversed Worlds,* 2.ª ed., Nueva York, Scribner's, 1979. (Trad. cast.: *Izquierda y derecha en el cosmos,* Barcelona, Salvat, 1973.)

Yang, Chen Ning: *Elementary Particles: A Short History of Some Discoveries in Atomic Physics,* Princeton, Princeton University Press, 1962.

## 4 Probabilidad

### Bibliografía general

Jacobs, Harold: *Mathematics: A Human Endeavor,* 2.ª ed., San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1982.

Kraitchik, Maurice: *Mathematical Recreations,* 2.ª ed., Nueva York, Dover, 1953.

Mosteller, Frederick: *Fifty Challenging Problems in Probability,* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965.

Thorp, Edward: *Elemenary Probability,* Nueva York, Wiley, 1966.

★ Weaver, Warren: *Lady Luck: The Theory of Probability,* Nueva York, Doubleday, 1963.

### Apuestas

★ Epstein, Richard: *The Theory of Gambling and Statistical Logic,* Nueva York, Academic Press, 1967.

Jacoby, Oswald: *How to Figure the Odds,* Nueva York, Doubleday, 1947.

Scarne, John: *Scarne's Complete Guide to Gambling,* Nueva York, Simon & Schuster, 1961.

### La apuesta de Pascal

Cargile, James: «Pascal's Wager», *Phylosophy,* vol. 41, julio de 1966.

James, William: capítulos 1 y 3 de *The Will to Believe and Other Essays in Popular Philosophy,* Londres, Longmans Green, 1903.

Turner, Merle: «Deciding for God—The Bayesian Support of Pascal's Wager», *Philosophy and Phenomenological Research,* vol. 29, septiembre de 1968.

## 5 Estadística

### Bibliografía general

★ Huff, Darrel: *How to Lie with Statistics,* Nueva York, Norton, 1954.

Levinson, Horace: *Chance, Luck and Statistics,* Nueva York, Dover, 1963.

Moroney, M. J.: *Facts from Figures,* Nueva York, Penguin, 1956.

Mosteller, F. R., Robert E. Rourke y G. B. Thomas, Jr.: *Probability and Statistics,* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1961.

### El mundo es un pañuelo

★ Gardner, Martin: «Why the Long Arm of Coincidence Is Usually Not as Long as It Seems», Mathematical Games Department, *Scientific American,* octubre de 1972.

★ Milgram, Stanley: «The Small World Problem», *Pshychology Today,* mayo de 1967.

### Paradojas de cumpleaños

Goldberg, Samuel: «A Direct Attack on a Birthday Problem», *Mathematics Magazine,* vol. 49, mayo de 1976, pp. 130-132.

Mosteller, Frederick: «Understanding the Birthday Problem», *The Mathematics Teacher,* mayo de 1962, pp. 322-325.

### Paradojas intransitivas

Black, Duncan: *The Theory of Committees and Elections,* Cambridge, Cambridge University Press, 1958.

★ Gardner, Martin: «On the Paradoxical Situations That Arise from Nontransitive Relations», Mathematical Games Department, *Scientific American,* octubre de 1974.

### Los cuervos de Hempel

★ Salmon, Wesley: «Confirmation», *Scientific American,* mayo de 1973.

Schlesinger, G.: «Hempel's Paradox», capítulo 1 de *Confirmation and Confirmability,* Oxford, Oxford University Press, 1974.

### El verzul de Goodman

Goodman, Nelson: *Fact, Fiction, and Forescast,* Nueva York, Bobbs-Merrill, 1965.

Hesse, Mary: «Ramifications of 'Grue'», *British Journal for the Philosophy of Science,* vol. 20, mayo de 1959, pp. 13-25.

## 6 Tiempo

### Bibliografía general

Brown, Frederic: *What Mad Universe,* Mattituck, N. Y., Amereon Ltd., 1976 (reimpr. de la ed. de 1949). (Trad. cast.: *Universo de locos,* Barcelona, EDHASA, 1964.)

DeWitt, Bryce S., y Neill Graham (eds.): *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics,* Princeton, Princeton University Press, 1973.

Gale, Richard (ed.): *The Philosophy of Time: A Collection o Essays;* Atlantic Highlands, N. J., Humanities Press, 1978.

Gardner, Martin: *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1971.

Gold, Thomas (ed.): *The Nature of Time,* Ithaca, N. Y., Cornell University Press, 1967.

Priestley, J. B.: *Man and Time,* Nueva York, Doubleday, 1964. (Trad. cast.: *El hombre y el tiempo*, Madrid, Aguilar, 1969.)

★ Whitrow, G. J.: *The Natural Philosophy of Time,* Nueva York, Harper & Row, 1961.

### Las paradojas de Zenón y tareas sobrehumanas

Grünbaum, Adolf: *Modern Science and Zeno's Paradoxes,* Nueva York, Wesleyan University Press, 1967.

★ Salmon, Wesley C. (ed.): *Zeno's Paradoxes,* Nueva York, Bobbs-Merrill, 1969.

### La dirección del tiempo

★ Davies, P. C. W.: *The Physics of Time Asymmetry,* Berkeley University of California Press, 1974.

★ Gardner, Martin: *The Ambidextrous Universe: Mirror Asymmetry and Time-Reversed Worlds,* 2.ª ed., Nueva York, Scribner's, 1979. (Trad. cast.: *Izquierda y derecha en el cosmos,* Barcelona, Salvat, 1973.)

### Viajes a través del tiempo

Edwards, Malcolm: «Time Travel», en *The Science Fiction Encyclopedia,* Peter Nicholls (ed.), Nueva York, Doubleday, 1979.

★ Gardner, Martin: «On the Contradictions of Time Travel», Mathematical Games Department, *Scientific American,* mayo de 1974.

Van Doren Stern, Philip (ed.): *Travelers in Time,* Nueva York, Doubleday, 1947.

Las paradojas son como engaños de salón mágico: le intrigan a uno, contraviniendo toda lógica y razón. En *Paradojas,* Martin Gardner presenta una colección de estos acertijos, de lo más humorísticos y atrevidos, divididos en seis áreas de la matemática: la lógica, la probabilidad, los números, la geometría, el tiempo y la estadística. Similar, en su espíritu, a la obra anterior del mismo autor, *¡Ajá!* (Labor, 1981), este libro desafía la capacidad de razonamiento y la intuición del lector.

Martin Gardner es, probablemente, más conocido como el creador de la columna mensual «Juegos matemáticos» en *Investigación y Ciencia,* popular a través de sus ocho años de existencia (veinticinco en *Scientific American*). Filósofo de la ciencia por la enseñanza, los escritos de Gardner abarcan desde la matemática recreativa hasta la ficción. Entre sus obras más conocidas se encuentran las series de libros basados en su columna de «Juegos matemáticos».