

Seminario Universitario Material para estudiantes

# Física

## Unidad 2.

### Vectores en el plano

Lic. Fabiana Prodanoff

---

## CONTENIDOS

---

Vectores en el plano. Operaciones con vectores. Suma y producto por un número escalar. Producto escalar.

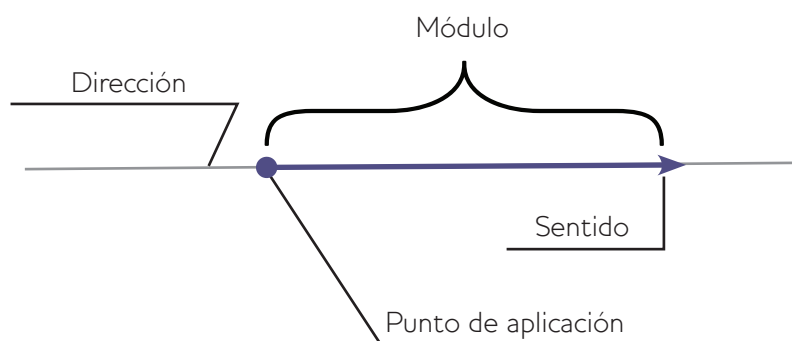
---

## INTRODUCCIÓN

---

Existen sucesos imposibles de predecir o describir indicando sólo las medidas y las unidades correspondientes de las magnitudes que están involucradas en él. A este tipo de magnitudes le vamos asociar un vector y diremos que son magnitudes vectoriales a diferencia de las magnitudes escalares que ya vimos. Ejemplo de magnitudes vectoriales son la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc.

La Física, haciendo uso de elementos de la matemática, utiliza al “vector” (segmento orientado) para esquematizar a las magnitudes vectoriales. El vector además de indicar la medida de la magnitud vectorial (establecida por la longitud del vector o módulo del vector), también establece una dirección (esquematizada por la recta imaginaria a la que pertenece el vector), un sentido (extremo del vector) y un punto de aplicación (origen del vector).



Para representar los vectores se debe utilizar una escala. La escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad y se escriben en forma de razón donde

el antecedente indica el valor a dibujar y el consecuente el valor de la realidad.

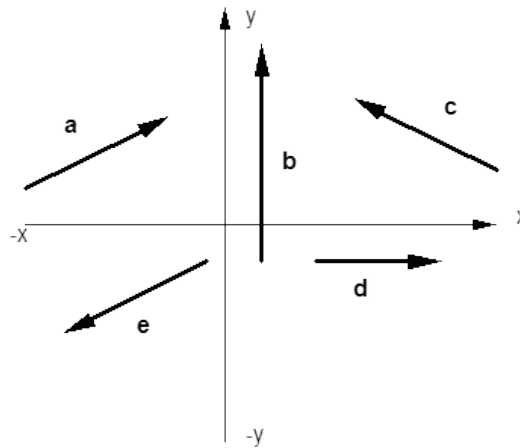
Por ejemplo si se quiere representar una fuerza de  $40 \vec{\text{kg}}$  podemos utilizar una escala  $1\text{cm} / 10 \vec{\text{kg}}$ , entonces para representar nuestra fuerza deberíamos graficar un vector de 4 cm.

## SITUACIONES PROBLEMÁTICAS



### Situaciones Problemática

1) Utilizando el sistema de ejes coordenados de la figura (coordenadas  $x$ ,  $y$ ) contestá las preguntas sobre los vectores que se detallan abajo. Elijan tantos vectores, **a**, **b**,... **e**, como sean necesarios para contestar adecuadamente las preguntas formuladas.



¿Qué vector (vectores) tiene componente  $x$  distinta de cero?

¿Qué vector (vectores) tiene componente  $x$  negativas?

¿Qué vector (vectores) tiene componente  $y$  cero?

¿Qué vector (vectores) tiene componente  $y$  positiva?

¿Qué vector (vectores) tiene componente  $z$  nula?

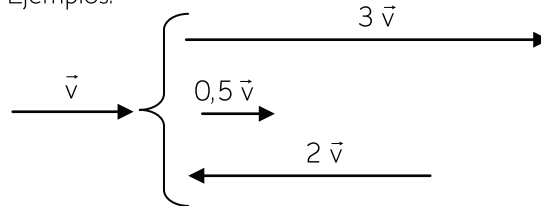
¿Cuál es el vector de mayor módulo?

## TRABAJANDO CON VECTORES

## PRODUCTO DE UN ESCALAR (NÚMERO) POR UN VECTOR

Al multiplicar un número por un vector obtenemos otro vector de la misma dirección y sentido que el primero (si el número es positivo), pero de mayor o menor módulo. O bien, un vector (de mayor o menor módulo) que apunta en sentido contrario al dado (si el número es negativo).

Ejemplos:



### SITUACIONES PROBLEMÁTICAS



#### Situaciones Problemáticas

2) Si el vector  $\vec{v}$  tiene módulo 4 (es decir,  $|\vec{v}| = 4$ ), calculá el módulo de los siguientes vectores:

Módulo de  $3\vec{v}$ :  $|3\vec{v}| =$

Módulo de  $-4\vec{v}$ :

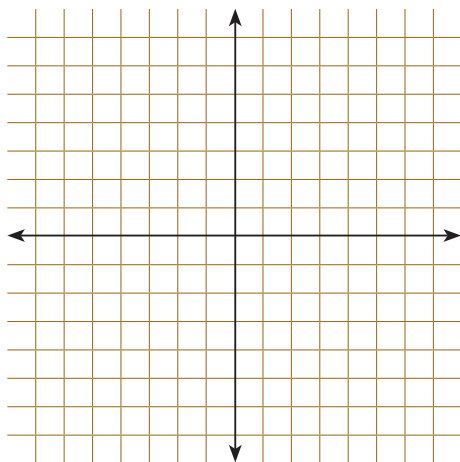
Módulo de  $3/4\vec{v}$ :

Módulo de  $-0,5\vec{v}$ :

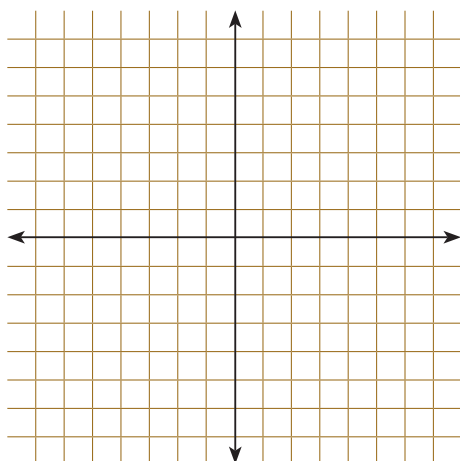
Módulo de  $1/2\vec{v}$ :

3) Ubicá en el sistema de coordenadas un vector de módulo 4 con origen en el origen del sistema de coordenadas.

Comparalo con el realizado por alguno de tus compañeros. ¿El vector que dibujaste es el único que podrías haber dibujado? ¿Por qué? ¿Presenta alguna característica particular? La información brindada en el enunciado ¿es suficiente para determinar un vector específico



4) Ubicá en el sistema de coordenadas un vector que tiene argumento  $60^\circ$  con origen en el origen del sistema de coordenadas. Comparalo con el que realizó alguno de tus compañeros. ¿El vector que dibujaste es el único que podrías haber dibujado? ¿Por qué? ¿Presenta alguna característica particular? La información brindada en el enunciado ¿es suficiente para determinar un vector específico?

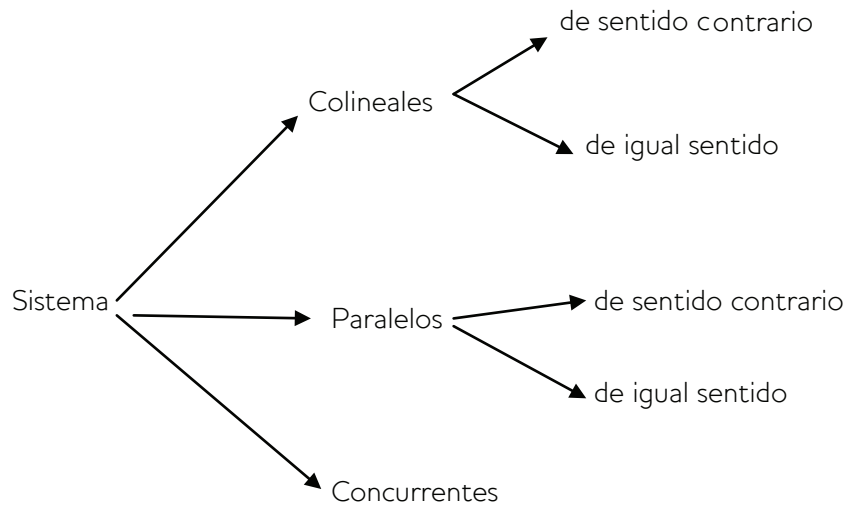


## SUMA DE VECTORES

---

Al sumar dos o más vectores se obtiene otro vector (vector suma o resultante) que produce el mismo efecto que todos los vectores sumados.

Para saber cómo sumar los vectores debemos tener en cuenta que pueden tener distintas disposiciones. Podemos encontrarnos con distintos tipos de sistemas, a saber:



## Sistema de vectores colineales

---

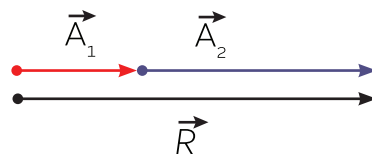
Son aquellos vectores que tienen la misma dirección, pudiendo tener igual o distinto sentido.

### De igual sentido

---

El vector resultante  $\vec{R}$  tiene la misma dirección y sentido que los vectores individuales y su módulo es igual a la suma de los módulos de cada vector.

En forma gráfica:

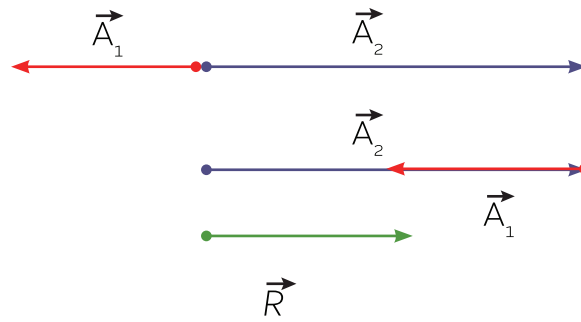


### De sentido contrario

---

El vector resultante  $\vec{R}$  tendrá la misma dirección que los vectores sumados, el sentido del vector de mayor módulo y el módulo del vector resultante será la resta de ambos módulos.

En forma gráfica:



De esta misma forma se puede resolver la resta de vectores colineales, como al suma de vectores colineales con sentidos contrarios.

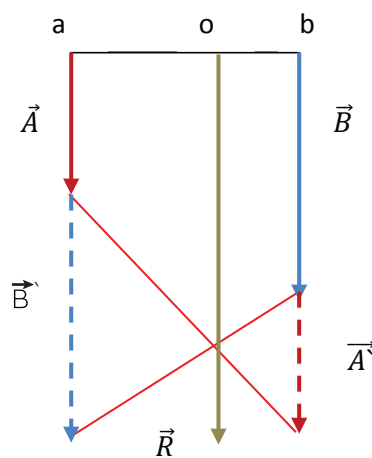
### Sistema de vectores paralelos

Son aquellos vectores cuyas direcciones son paralelas entre sí. Pueden ser de igual o distinto sentido.

### De igual sentido

El vector resultante  $\vec{R}$  es paralelo y del mismo sentido que los vectores que se suman; su módulo es igual a la suma de ambos módulos y su punto de aplicación divide al segmento que une los puntos de aplicación de ambos vectores en dos partes inversamente proporcionales a sus módulos.

En forma gráfica: se representa  $\vec{A}$  a continuación de  $\vec{B}$  ( $\vec{A}'$ ) y  $\vec{B}$  a continuación  $\vec{A}$  ( $\vec{B}'$ ). La resultante del sistema pasará por el punto intersección de las rectas que unen el extremo de  $\vec{A}$  con el punto aplicación de  $\vec{B}$  y viceversa.

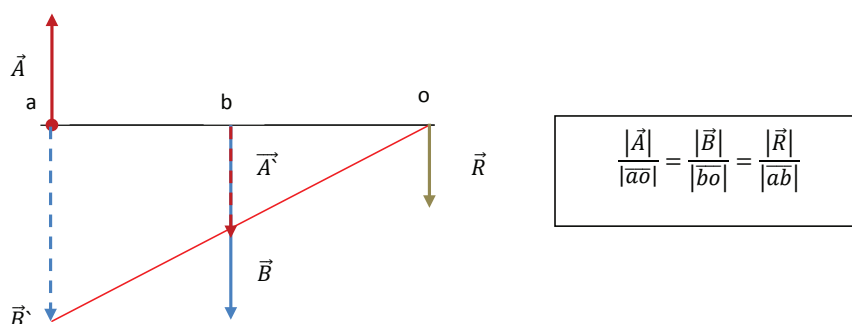


$$\frac{|\vec{A}|}{|a'o|} = \frac{|\vec{B}|}{|b'o|} = \frac{|\vec{R}|}{|ab|}$$

## De sentido opuesto

El vector resultante  $\vec{R}$  es paralelo y del mismo sentido que el vector de mayor módulo; su módulo es igual a la resta de ambos módulos y su punto de aplicación es exterior al segmento que une los puntos de aplicación de ambos vectores, situado siempre del lado del de mayor módulo.

En forma gráfica: supongamos que el módulo de  $\vec{A}$  es menor que el de  $\vec{B}$ . Se representa  $\vec{A}$  sobre el punto de aplicación de  $\vec{B}$  con sentido contrario ( $\vec{A}'$ ) y a continuación  $\vec{A}$  con igual sentido ( $\vec{B}'$ ). La resultante del sistema pasará por el punto intersección de las rectas que unen el extremo de  $\vec{A}'$  con el punto aplicación de  $\vec{B}$  y los extremos de ambas.

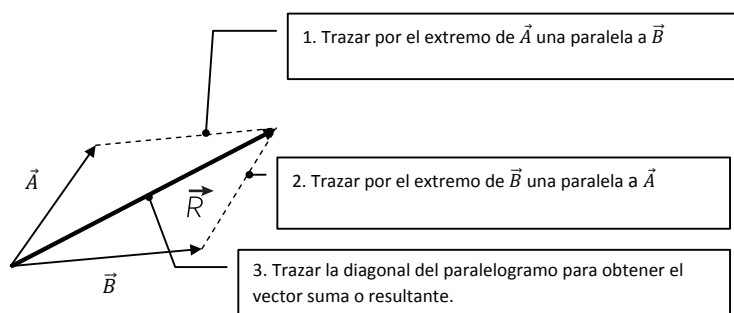


## Sistema de vectores concurrente

Son aquellos vectores cuyas direcciones pasa por un mismo punto.

### Regla del paralelogramo

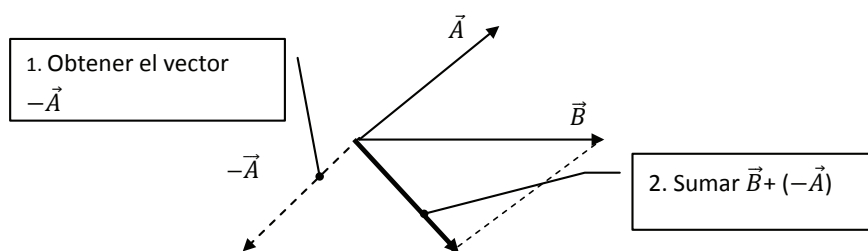
Esto es, se construye un paralelogramo que tenga los vectores como lados y se traza la diagonal del mismo para obtener el vector suma.





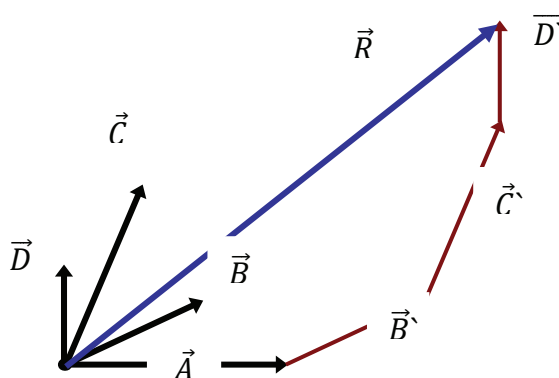
Para obtener el vector resta se puede usar la regla del paralelogramo, teniendo en cuenta que la diferencia puede ser considerada como la suma de un vector y su opuesto:

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-\vec{A})$$



### Regla del polígono

Este método consiste en trasladar la fuerza  $\vec{B}$  a continuación de  $\vec{A}$  con la misma dirección y sentido, y así sucesivamente con el resto de los vectores. El vector resultante se obtiene uniendo el punto de aplicación de  $\vec{A}$  con el extremo del último vector trasladado.



### SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

#### Situaciones Problemáticas

5) A, B, C y D son puntos arbitrarios del plano. Simplificá las siguientes expresiones dando el resultado en la forma  $\vec{XY}$  (es decir, dando el origen y el extremo del resultado):

$$\vec{AB} + \vec{BC} =$$

$$\vec{AB} + \vec{CB} =$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} =$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BA} =$$

$$\vec{CA} + \vec{BA} + \vec{BC} =$$

$$\vec{AB} + (\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{CD} =$$

$$\vec{AB} - (\vec{CC} - \vec{BA}) =$$

$$\vec{AB} + (\vec{BC} - \vec{DC}) =$$

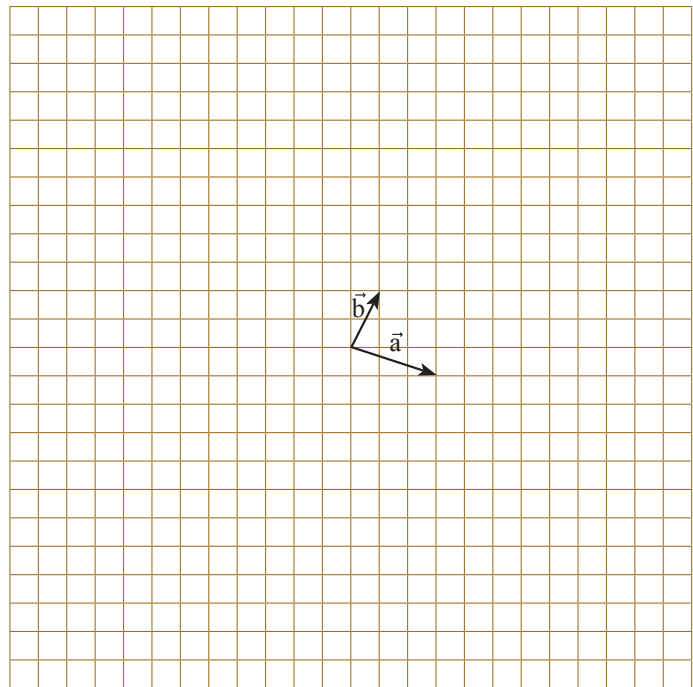
6) Dados los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  de la figura, dibujá los siguientes vectores:

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

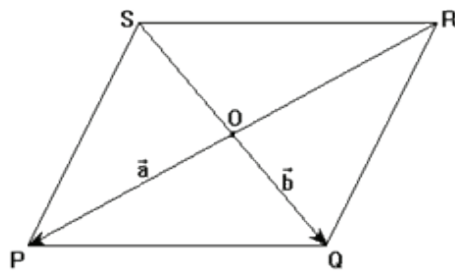
$$\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{z} = \vec{a} - 5\vec{b}$$

$$\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$$



7) En el siguiente paralelogramo,  $\vec{a} = \vec{OP}$  y  $\vec{b} = \vec{OQ}$ . Expresá los siguientes vectores en función de  $\vec{a}$  y de  $\vec{b}$ :  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{QR}$ ,  $\vec{RS}$  y  $\vec{SP}$ .



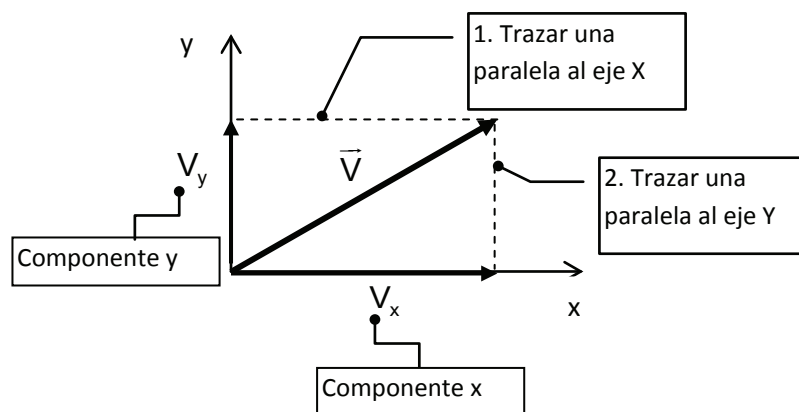
8) Realizá una construcción geométrica que ponga de manifiesto la conmutatividad de la suma de tres vectores.

## SUMA DE VECTORES EN FORMA ANALÍTICA

Para realizar la suma de varios vectores en forma analítica debemos expresar cada vector en función de sus componentes.

### Componentes de un vector

Siempre podemos descomponer un vector en dos componentes ortogonales.



Si conocemos el módulo del vector y el ángulo que forma con el eje  $x$ .

$$v_x = v \cdot \cos\alpha$$

$$v_y = v \cdot \text{sen}\alpha$$

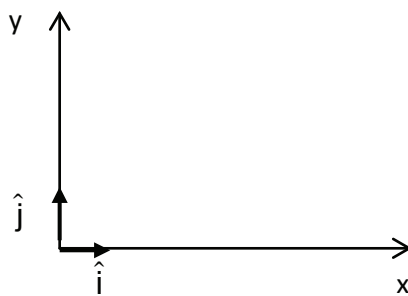
Las magnitudes de  $V_x$  y  $V_y$ , se llaman componentes del vector y son números reales.

De esta forma un vector lo podemos escribir como:

Par ordenado:  $\vec{V} (v_x, v_y)$ .

Forma polar:  $\vec{V}: |\vec{V}| \alpha$

En término de vectores unitarios. Un vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene módulo igual a uno. Sirven para especificar una dirección determinada. Se usan los símbolos  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  para representar vectores unitarios que apuntan en la dirección del eje x y en la dirección del eje y positivas, respectivamente.



$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j}$$

El vector suma lo podremos escribir como:  $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$

Donde  $R_x$  es la suma de las componentes en la dirección x de todos los vectores a ser sumados y  $R_y$  es la suma de las componentes en la dirección y de todos los vectores a ser sumados.

Para hallar el módulo del vector resultante se utiliza el Teorema de Pitágoras y para calcular su dirección la función tangente.

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$tg \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

---

## CONSEJOS ÚTILES

---

Las componentes de un vector son magnitudes escalares. En caso de representar una magnitud física las componentes están afectadas por unidades de medida.

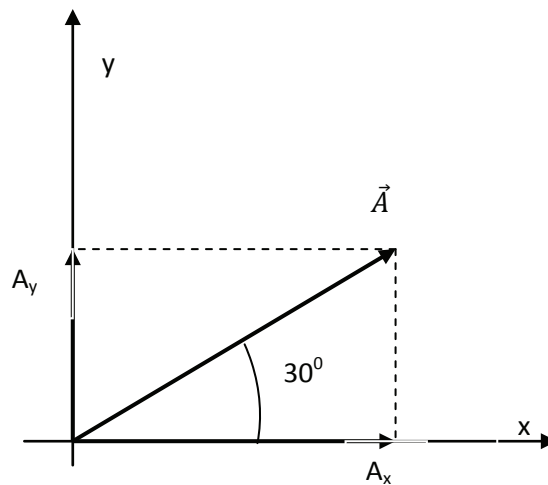
El módulo de un vector es un número positivo acompañado de una unidad en caso de representar una magnitud física.

### A MODO DE EJEMPLO

• Enunciado

Sea el vector  $\vec{A}$  de módulo = 5 que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Hallá las componentes horizontal y vertical del vector dado.

• Resolución



Proyectando el vector  $\vec{A}$  sobre la horizontal se obtiene el vector componente  $A_x$  cuyo valor es:

$$A_x = A \cdot \cos 30^\circ = 5 \cdot 0,86 = 4,33$$

Para la componente vertical se tiene:

$$A_y = A \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5$$

• Enunciado

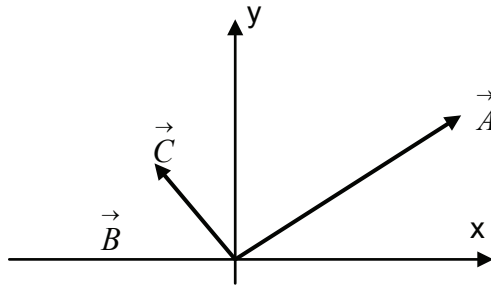
Sean tres vectores coplanares: el vector  $\vec{A}$  de módulo 50 unidades que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, el vector :

$$\vec{B} \text{ a } 15_{180}^\circ \text{ y } \vec{C} = -10 \hat{i} + 17 \hat{j}.$$

Hallá el vector suma:

• Resolución

Vamos a realizar un esquema de la situación:



Proyectamos los vectores sobre los ejes x e y, para obtener las componentes de los vectores dados sobre los respectivos ejes.

Eje x:

$$A_x = A \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot 0,86 = 43$$

$$B_x = 15 \cdot \cos 180^\circ = 15 \cdot (-1) = -15$$

$$C_x = -10$$

Eje y:

$$A_y = A \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot 0,5 = 25$$

$$B_y = 0$$

$$C_y = 17,3$$

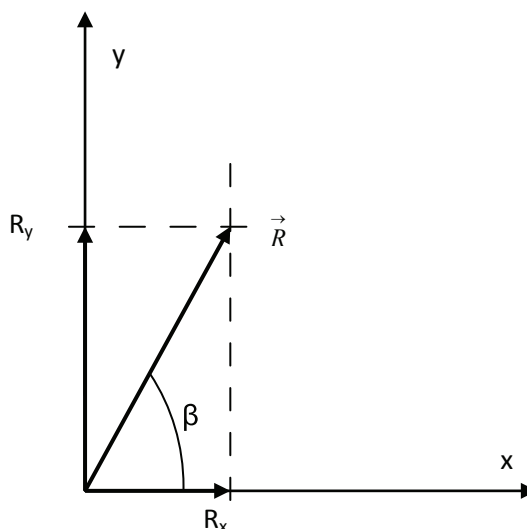
Para obtener el vector suma, sumamos las componentes en cada eje:

$$R_x = A_x + B_x + C_x = 43 - 15 - 10 = 18$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = 25 + 0 + 17 = 42$$

El vector suma será:  $\vec{R} = 18 \hat{i} + 42 \hat{j}$ .

Que también se puede expresar en función de su módulo y el ángulo que forma con el eje x.



Para calcular el módulo:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{18^2 + 42^2} = 45,7$$

Para obtener la dirección del vector resultante se calcula el ángulo  $\beta$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{42}{18} = 2,33 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg} 2,33 = 66,8^\circ$$

## SITUACIONES PROBLEMÁTICAS



### Situaciones Problemáticas

9) Si  $\vec{u} = (4, -2)$ ,  $\vec{v} = (-1, 5)$  y  $\vec{w} = (0, 3)$ , calculá:

a)  $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} =$

b)  $3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} =$

c)  $\frac{\vec{u}}{2} + \vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w} =$

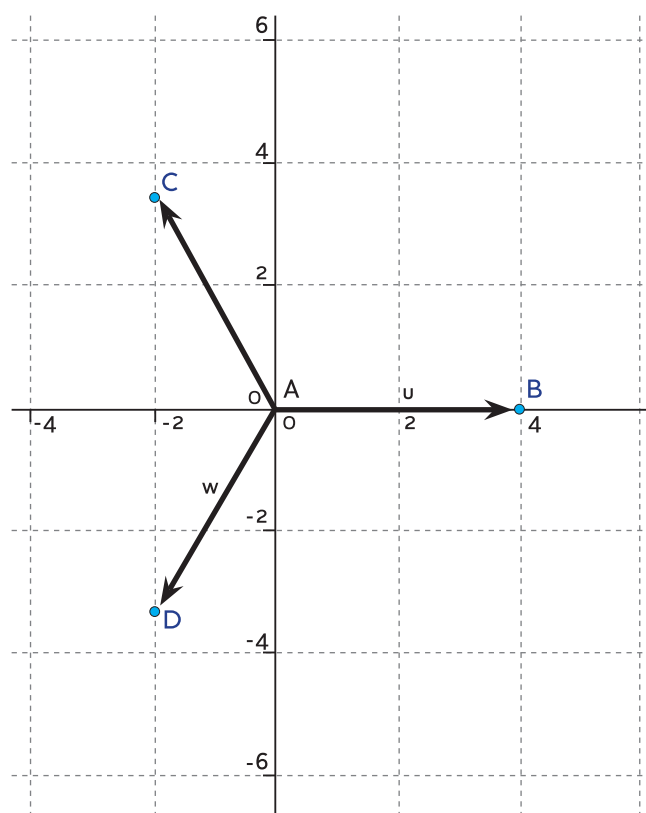
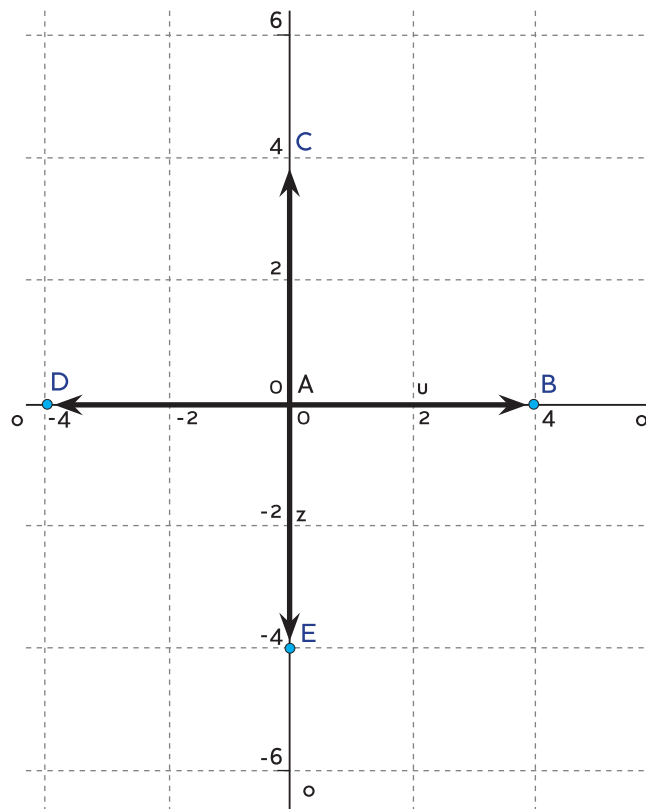
d)  $\frac{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}{3} =$

10) Dado el triángulo de vértices A(4,2), B(10,5) y C (2,6), calculá:

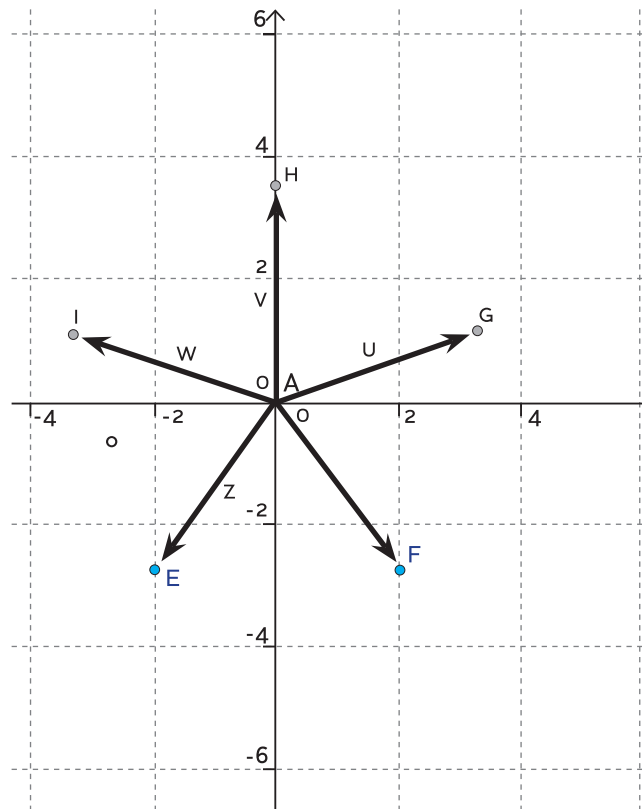
$$\overrightarrow{AB} = \quad \quad \quad \overrightarrow{AC} = \quad \quad \quad |\overrightarrow{BC}| =$$

$$\overrightarrow{BC} = \quad \quad \quad |\overrightarrow{AB}| = \quad \quad \quad |\overrightarrow{AC}| =$$

11) Determiná el vector resultante de las siguientes configuraciones. ¿Qué característica tienen estas figuras? A partir del resultado obtenido ¿podrías deducir una conclusión general para distintas representaciones que tengan la misma característica? Proponé algún otro ejemplo.







12) Si  $\vec{a} = 4_{30^\circ}$  y  $\vec{b} = 3_{120^\circ}$  calcúlalo un vector  $\vec{x}$  que verifique  $\vec{x} - 2\vec{b} = \vec{a}$ .

Da el resultado en forma polar.

13) Completá la siguiente tabla, según corresponda:

| Forma: en componentes | Forma: en función de $\vec{i}$ , $\vec{j}$ | Forma: polar    |
|-----------------------|--|-----------------|
| (-2,5)                |  |                 |
|                       | $6\vec{i} + 2\vec{j}$                      |                 |
|                       |  | $5_{270^\circ}$ |
|                       |  | $10_{30^\circ}$ |
|                       | $-4\vec{i}$                                |                 |
| (0,-1)                |  |                 |
|                       |  | $5_{135^\circ}$ |
|                       | $6\vec{j}$                                 |                 |

|       |  |                 |
|-------|--|-----------------|
| (3,5) |  |                 |
|       |  | $1_{270^\circ}$ |
|       | $5(\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j})$ |                 |

14 ) Tenemos tres vectores de las siguientes características:  $\vec{A}$  tiene módulo 4 y dirección  $150^\circ$ ;  $\vec{B}$  tiene módulo 2 y dirección  $250^\circ$  y  $\vec{C}$  tiene módulo 6 y dirección  $0^\circ$ . Hallá el vector:

a)  $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$

b)  $\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}$

c)  $-\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$

Realizá los cálculos gráfica y analíticamente. Dar los resultados en las tres formas posibles.

---

## RECURSOS

---

Para profundizar contenidos

[http://www.educ.ar/recursos/ver?rec\\_id=70276](http://www.educ.ar/recursos/ver?rec_id=70276)

<http://rafaelroyero.wordpress.com/vectores/>

<http://yesan.galeon.com/vectores.htm>

Para visualizar animaciones que favorecen la comprensión de operaciones algebraicas con vectores

<http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/Add2Vectors/Add2Vectors.html>

<http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/VectorAddComponents/VectorAddComponents.html>

<http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/Add3Vectors/Add3Vectors.html>

<http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/Subtract2Vectors/Subtract2Vectors.html>

<http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/UnitVectors/UnitVectors.html>

<http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/DotProduct/DotProduct.html>

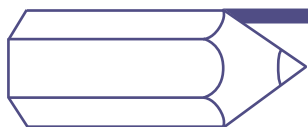
Para situaciones de resolución numérica

Son útiles los programas de cálculo como por ejemplo el Dr. Geo cuya finalidad es brindar una herramienta de fácil uso, en español y gratis, para ejercitar, experimentar y comprobar operaciones con vectores.

[http://www.educ.ar/recursos/ver?rec\\_id=70334](http://www.educ.ar/recursos/ver?rec_id=70334)

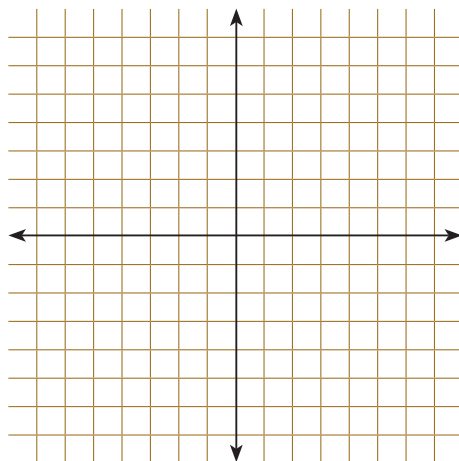
Otro programa es el llamado GeoGebra

<http://www.geogebra.org/cms/>



**PARA SEGUIR  
PENSANDO**

1) Mauricio sale de su casa para hacer ejercicio caminado en línea recta 3 km en dirección E, después 4 km en dirección NE y finalmente 8 km en dirección S.



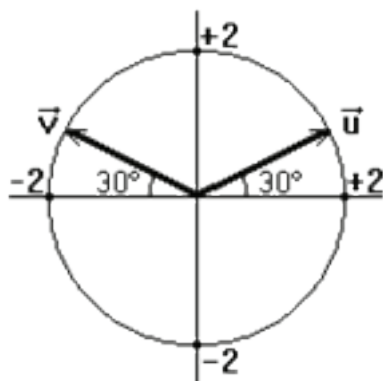
a) Hacé un esquema aproximado del itinerario que hizo, tomando como origen del sistema de coordenadas su casa.

b) Calculá cuántos km se alejó de su casa.

2) Completá la siguiente tabla, según corresponda:

| Forma: en componentes | Forma: polar        |
|-----------------------|---------------------|
| (5,3)                 |                     |
| (40,-30)              |                     |
|                       | $5_{270^\circ}$     |
|                       | $5,6569_{45^\circ}$ |
| (0 , 6)               |                     |
| (0,-1)                |                     |
|                       | $4_{120^\circ}$     |
|                       |                     |
| (-12,5)               |                     |
|                       | $1_{180^\circ}$     |

3) Calculá la suma y la resta entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de la figura.



4) Un barco viaja 100 km hacia el norte en el primer día de su viaje, 60 km hacia el Noreste en el segundo día y 120 km en el tercer día de viaje. Encontrá el desplazamiento total realizado por el barco.