UDS

# LIBRO

# GEOMETRÍA ANALÍTICA

*BACHILLERTAO EN RECURSOS HUMANOS*

*TERCER CUATRIMESTRE*

# Marco Estratégico de Referencia

## ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

## MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

## VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

## ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

## ESLOGAN

"Mi Universidad"

## ALBORES


Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

# GEOMETRÍA ANALÍTICA

**Objetivo de la materia:** Que el estudiante intérprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.

# INDICE

## Unidad I: Sistema de coordenadas

La palabra geometría es de origen griego, y proviene de las raíces geo (tierra) y metrón (medir). Es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades y medidas de las figuras en el plano o en el espacio, e incluye puntos, rectas, curvas, planos, etcétera.

Algunas ramas de la geometría son geometría analítica, geometría descriptiva, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal y geometría euclidiana, que tienen sus orígenes en científicos griegos como Euclides.

En este curso conocerás la geometría analítica, donde estudiaremos las propiedades de la recta, la parábola, el círculo y la elipse.

En el siglo XVII, el filósofo y matemático francés Rene Descartes publico la obra la geometría, donde introdujo el concepto de coordenadas rectangulares, ya que represento por medio de líneas rectas, una en forma horizontal y otra en forma vertical, un plano donde se podían realizar trazos.

Este sistema se denomina sistema de coordenadas cartesianas, en honor de su creador, y en este es posible resolver una inmensa variedad de problemas geométricos en combinación con otros de índole algebraico.

En la actualidad, algunas ciudades del mundo organizan el sistema de tránsito vehicular de manera similar a la de un plano cartesiano, para facilitar el flujo de los automóviles.

En matemáticas se utilizan distintos sistemas de referencia para ubicar puntos en el espacio o bien en el plano. Un ejemplo claro de éste último son los planos o mapas de pueblos, ciudades o estados, donde los referentes son indispensables para localizar un lugar, objeto o persona con cierta precisión. Algunos de estos sistemas son:

**La rosa de los vientos:** indica la dirección de los cuatro puntos cardinales. Por lo general el norte dela rosa de los vientos coincide con la orientación al norte de los mapas.

**Escala:** establece la proporción entre longitudes reales y las que se muestran en el mapa.

**Orientación al Norte:** por lo regular los mapas hacen coincidir el Norte con la parte superior de la página en la que se imprime. Este elemento está de más cuando la rosa de los vientos aparece indicando el norte del mapa.

**Sistemas de coordenadas:** se utilizan para ubicar puntos en el plano o espacio a través de parejas o ternas ordenadas.

## Sistemas de coordenadas

Existen varios tipos de sistemas de coordenadas:

A) SISTEMA DE COORDENADAS CELESTE

B) SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRAFICAS

C) SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

D) SISTEMA DE COORDENADAS ESPACIALES

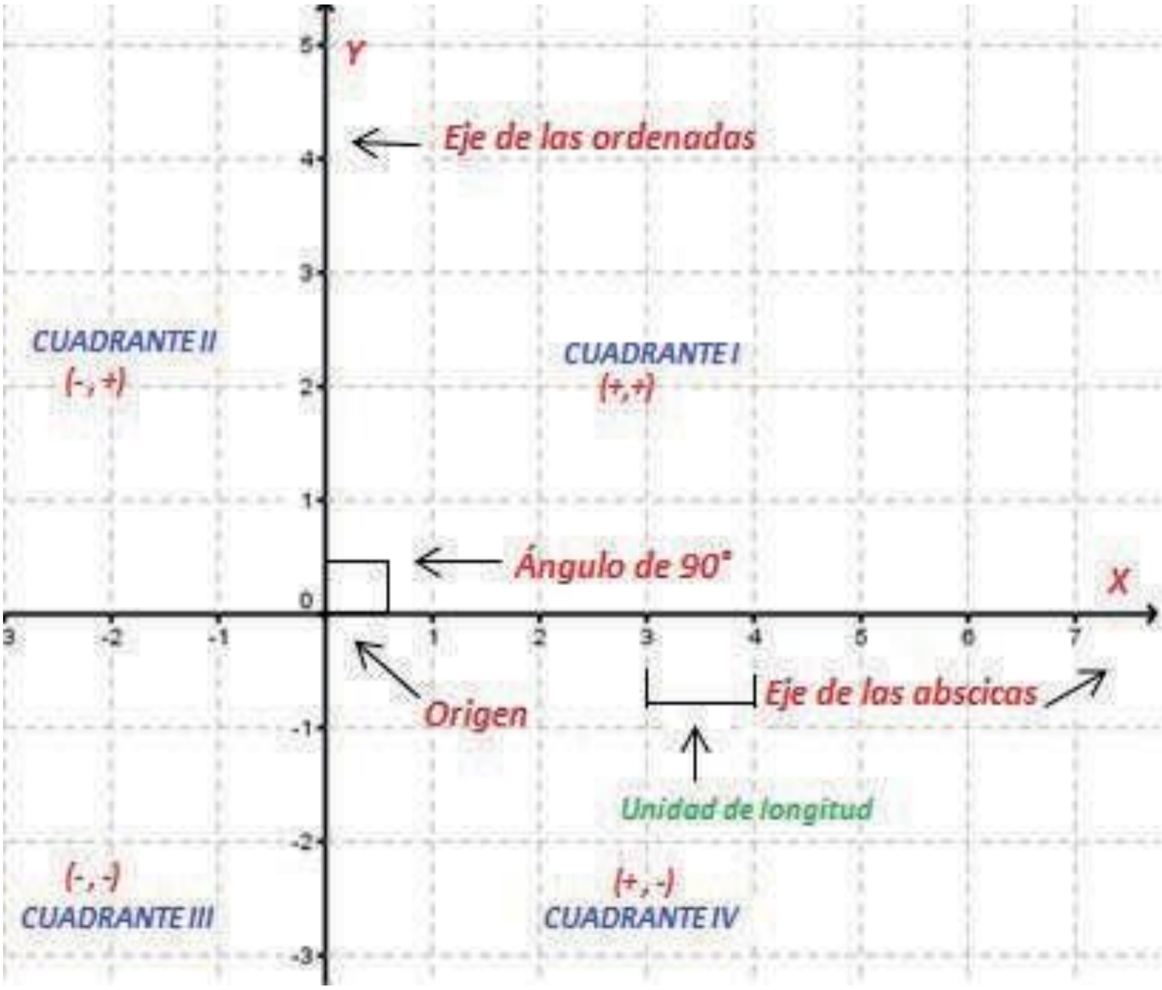
E) SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

## 1.1 Sistema de coordenadas rectangulares

El sistema de coordenadas rectangulares o plano cartesiano se conforma de **dos rectas perpendiculares** que se **intersectan** en un punto llamado **origen**, formando cuatro cuadrantes que se enlistan o enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A la **recta horizontal** se le conoce como **eje x**, también nombrado **eje de las abscisas**, los valores positivos de este eje se encuentran a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. A la **recta vertical** se le conoce como **eje y**, también nombrado **eje de las ordenadas**, los valores positivos de este eje se encuentran arriba del origen, mientras que los valores negativos están hacia abajo del origen.

De esta manera se establecen los signos en cada cuadrante como se observa en el siguiente gráfico.



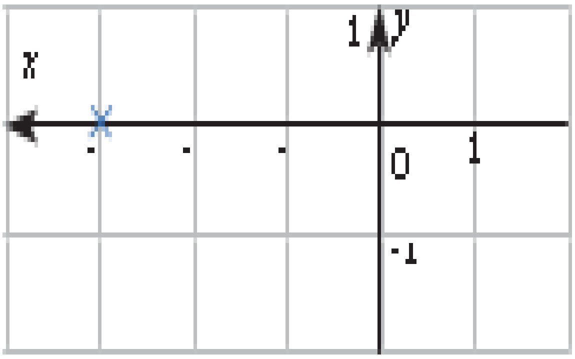

## 1.2. Puntos en el plano

Para ubicar un punto en el plano cartesiano se utilizan un par de números que llamaremos coordenadas las cuales están asignadas en un par ordenado $P(x,y)$. La letra mayúscula $P$ refiere al nombre del punto, el par de números se dice ordenado porque siempre se escribe primero el valor de la abscisa $x$ seguido del valor de la ordenada $y$.

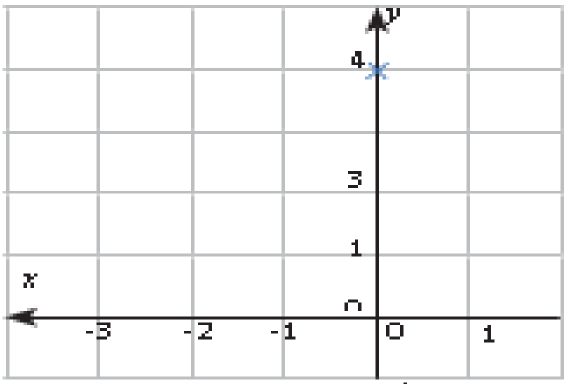
Para localizar un punto en el plano debemos considerar la pareja de números del par ordenado. En primer lugar se identifica el valor que representa la abscisa y se localiza en el eje *x*, luego se identifica el valor que representa la ordenada y se localiza en el eje *y*. Por cada uno de estos números se trazan líneas perpendiculares a los ejes; la intersección de estas rectas es el punto que se desea localizar.

**Ejemplo: para ubicar en el plano cartesiano el punto Q(-3,4) hacemos lo siguiente:**

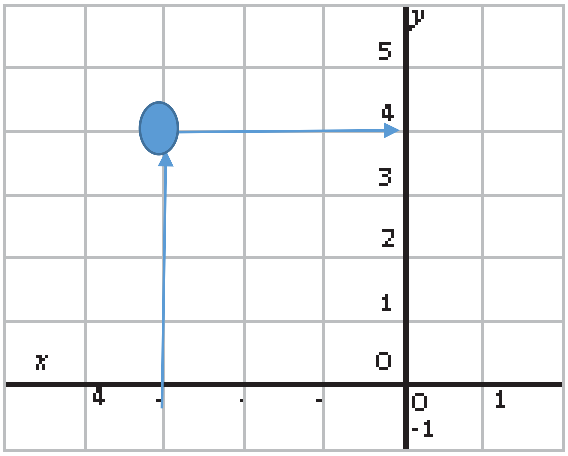
1.- Ubicamos sobre el eje *x* el valor de -3.



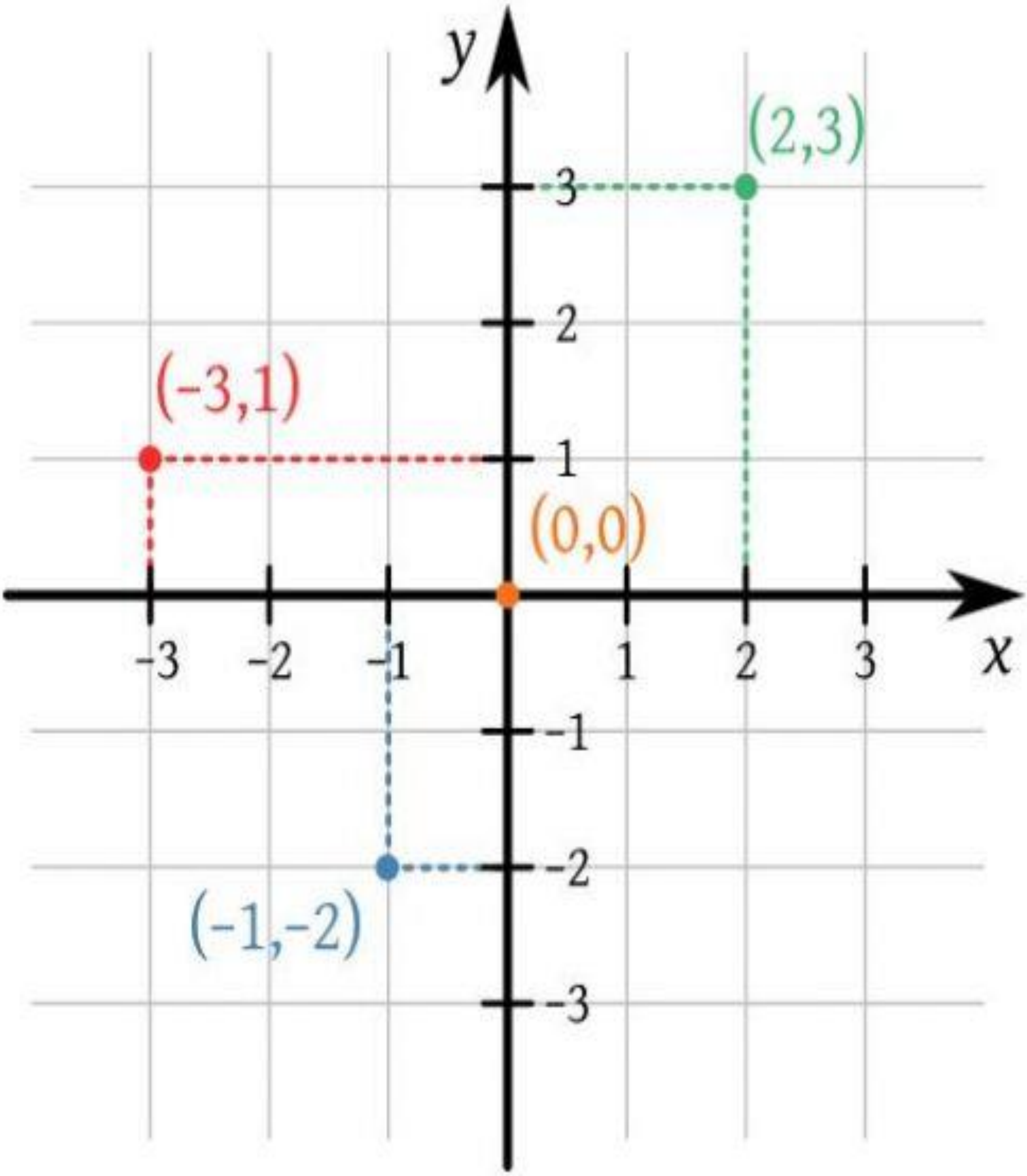

2.- Ubicamos sobre el eje *y* el valor de 4.




3.- Traza segmentos de rectas auxiliares perpendiculares a los ejes de tal manera que éstos se crucen. Q(-3,4)




**Ejemplos: Localizar los siguientes pares ordenados en elplano cartesiano: (2,3), (-3,1), (0,0), (-1,-2).**


y
x
(2,3)
(-3,1)
(0,0)
(-1,-2)
-3
-2
-1
1
2
3
3
2
1
-1
-2
-3

## 1.3. Distancia entre dos puntos en una dimensión

Como te habrás dado cuenta el plano cartesiano se usa como un sistema de referencia para localizar puntos en un plano. Otra de las utilidades radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos es posible calcular la distancia entre ellos.

La distancia (en línea recta) a la que se hallan dos lugares en un plano, puede determinarse mediante la longitud del segmento que los une.

Tanto los mapas de zonas o regiones específicas del país, como los planos topográficos de terrenos o de minas y yacimientos que elaboran los ingenieros, hacen uso de ejes coordenados para la ubicación de lossitios y de una escala o equivalencia para las distancias reales.

El cálculo de estas distancias, así como la ubicación relativa de puntos intermedios entre dos sitios, puedeobtenerse a partir de sus coordenadas.

Cuando los puntos se encuentran sobre el eje *x* (de las abscisas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

Retomando el plano de la actividad anterior, el cruce de las calles Mayo y Miguel Alemán, de acuerdo al sistema de referencia indicado, tiene como coordenadas la pareja de números (210,0); el otro punto de referencia es el origen cuyas coordenadas son (0,0).

RECODEMOS EL SIGUIENTE CONCEPTO

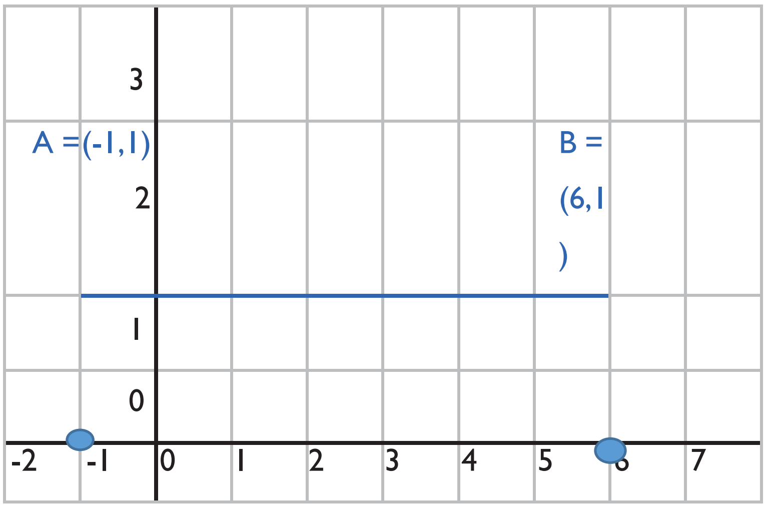
**Valor absoluto:**

El valor absoluto de un número real consiste en su valor, sin importar su signo. De esta manera, 5 es el valorabsoluto de +5 o – 5. Ya que es la distancia que hay del número al cero en la recta numérica.
Considerando que la distancia entre este par de puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas, esta diferencia se expresade la siguiente manera:

$|210 - 0| = |0 - 210| = 210.$

Se considera el valor absoluto porque es indistinto calcular la distancia del cruce del par de calles al origen o viceversa; la distancia es la misma.

Consideremos ahora un par de puntos que se encuentren en un segmento de recta paralelo al eje ***x***, como se muestra en la Figura 1.




Ya que la distancia del punto A al punto B es la misma que de B a A el cálculo se escribe de la siguiente manera $|6 - (-1)| = |6 + 1| = 7.$

Observa que se ha escrito primeo la abscisa del punto B menos la abscisa del punto A, solo por mera preferencia, considerando que el punto B está a la derecha del punto A.

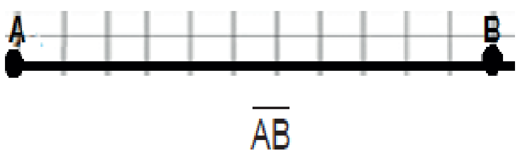
Generalizando el cálculo de cualquier distancia horizontal entre dos puntos A(x1, y1) B(x2, y2) la distancia queda expresada de la siguiente manera $|x2 - x1|$ donde x2 es la abscisa del punto B, x1 es la abscisa del punto A.

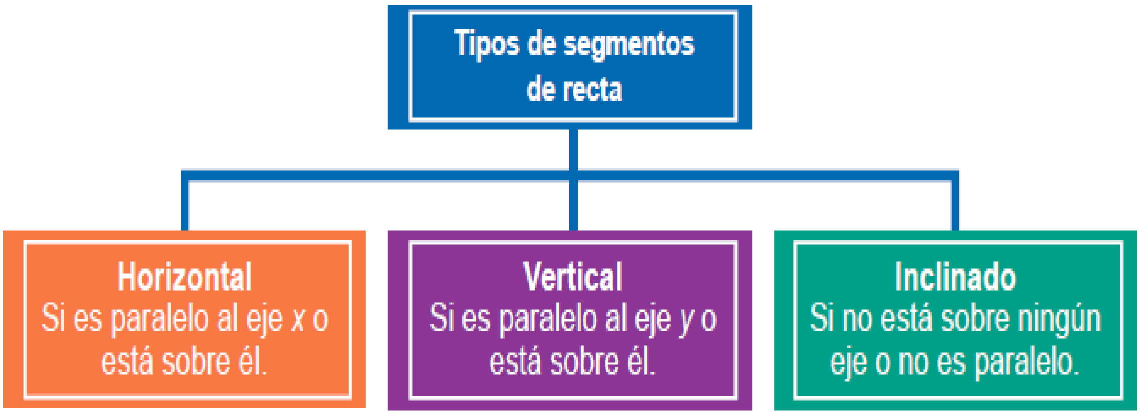
Cuando los puntos se encuentran sobre el eje Y (de las ordenadas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de las diferencias de sus ordenadas.

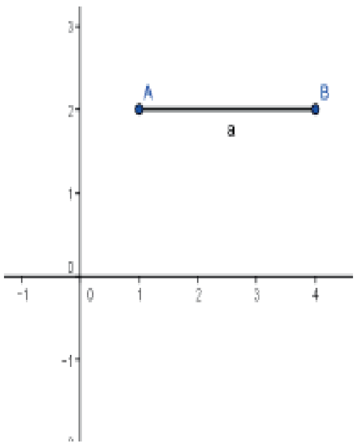
De la misma manera generalizando el cálculo de cualquier distancia vertical entre dos puntos A(x1,y1) y B(x2, y2), la distancia queda expresado de la siguiente manera $|y2 - y1|$ donde y2 es la ordenada del punto B, y1 es la ordenada del punto A.

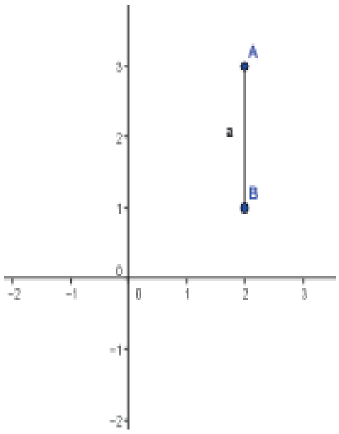
## Segmento rectilíneo

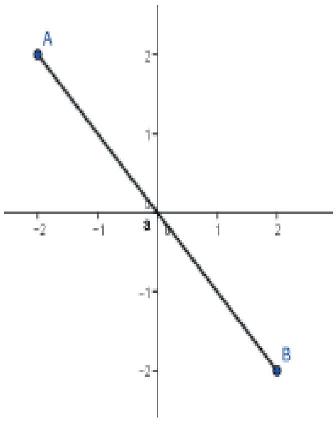
Uno de los conceptos más utilizados en la geometría analítica es el segmento de recta, que es la distancia comprendida entre dos puntos A y B, representada como $\overline{AB}$.



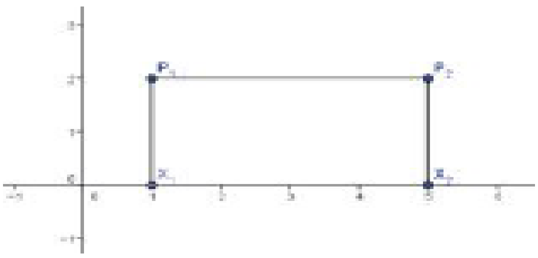



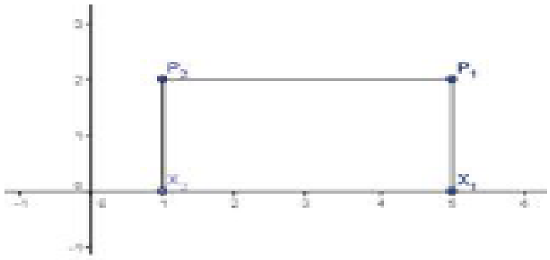



En algunas ocasiones no se indica el sentido del segmento de recta, y a este segmento se les considera como no dirigido. Por el contrario, cuando tiene su dirección bien definida, se considera como un segmento de recta dirigido, donde hay que tomar en cuenta lo siguiente:

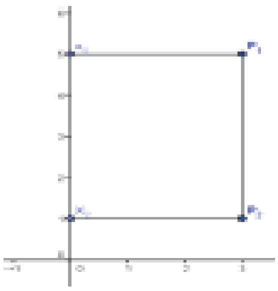
- Si el segmento de recta es horizontal, la longitud se medirá restando el punto de la izquierda de la abscisa menos el punto de la derecha de la abscisa.



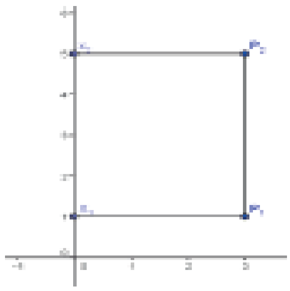
En este ejemplo, al punto $P_1$, que se se encuentra en 1, se le restaría el punto punto $P_2$, que se ubica en 5, dando como resultado -4.
$P_1 - P_2 = 1 - 5 = -4$



En este ejemplo, al punto $P_2$, que encuentra en 1, se le restaría el punto $P_1$, que se ubica en 5, dando como resultado -4.
$P_2 - P_1 = 1 - 5 = -4$



En este ejemplo, al punto $P_1$, que se se encuentra en 5, se le restaría el punto punto $P_2$, que se ubica en 1, dando como resultado 4.
$P_1 - P_2 = 5 - 1 = 4$



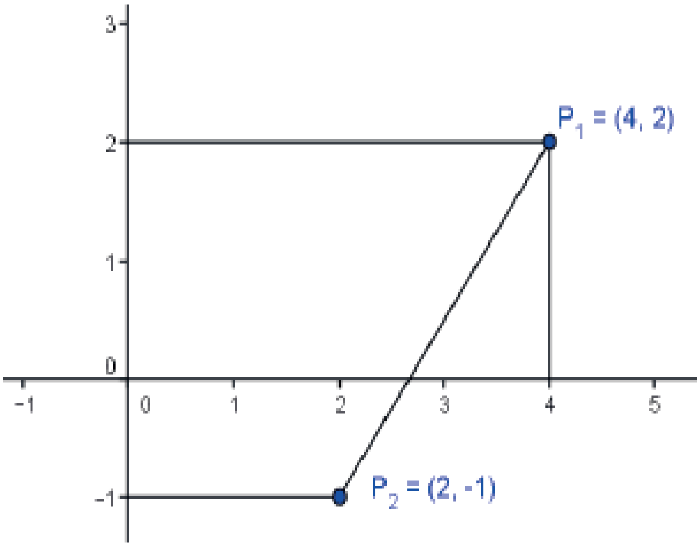
En este ejemplo, al punto $P_2$, que encuentra en 5, se le restaría el punto $P_1$, que se ubica en 1, dando como resultado 4.
$P_2 - P_1 = 5 - 1 = 4$

Entonces, la magnitud de un segmento de recta sin importar su dirección está dada por:

- $\overline{P_1P_2} = |x_2 - x_1|$ si se trata de un segmento horizontal, donde $|\ \ |$ significa valor absoluto, es decir, el valor positivo de la diferencia entre los dos puntos.
- $\overline{P_1P_2} = |y_2 - y_1|$ si se trata de un segmento vertical.

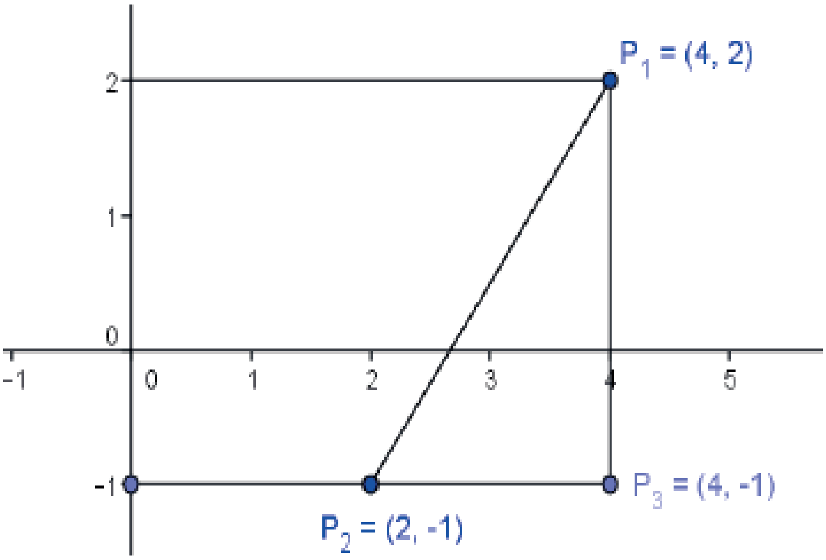
## 1.4. Distancia entre dos puntos en dos dimensiones

Para un segmento de recta inclinado como el siguiente ejemplo veremos cómo se calcula la distancia entre dos puntos $P_1$ y $P_2$ dados:




Las coordenadas de los puntos extremos $P_1$ y $P_2$ de la figura están dadas por $P_1(4,2)$ y $P_2(2,-1)$.

Si formamos un triángulo rectángulo tomando el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ como la hipotenusa y el punto 3 con coordenadas $P_3(4,-1)$ como el tercer vértice del triángulo tenemos:



Recordando el teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$

La longitud del segmento de recta $\overline{P_2P_3}$ es un segmento horizontal, por lo que se calcula con:

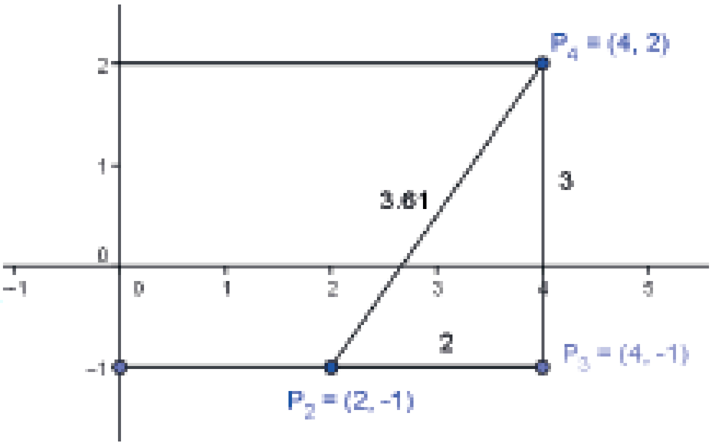
$$\overline{P_2P_3} = |x_2 - x_1| = |4 - 2| = 2$$

La longitud del segmento de recta $\overline{P_1P_3}$ es un segmento vertical, por lo que se calcula con:

$$\overline{P_1P_3} = |y_2 - y_1| = |2 - (-1)| = |2 + 1| = 3$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del teorema de Pitágoras:

$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_2P_3})^2 + (\overline{P_1P_3})^2$
$(\overline{P_1P_2})^2 = (2)^2 + (3)^2$
$(\overline{P_1P_2})^2 = 4 + 9$
$(\overline{P_1P_2})^2 = 13$
$\overline{P_1P_2} = \sqrt{13}$
$\overline{P_1P_2} = 3.61$
Por lo tanto, la longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ es de 3.6 unidades.




Del anterior ejemplo podemos deducir que:

**Distancia entre dos puntos**
La distancia $\overline{P_1P_2}$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ está dada por la fórmula:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O también podemos invertir el orden de los puntos de las coordenadas $(x,y)$

$$\overline{P_2P_1} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

En el siguiente ejemplo, calcula la distancia entre los puntos A(4,1) y B(1,-3)

$A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$

Tomando el punto A como el punto $P_1(x_1,y_1)$ y el punto B como el punto $P_2(x_2,y_2)$ y sustituyendo estos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-1)^2}$$

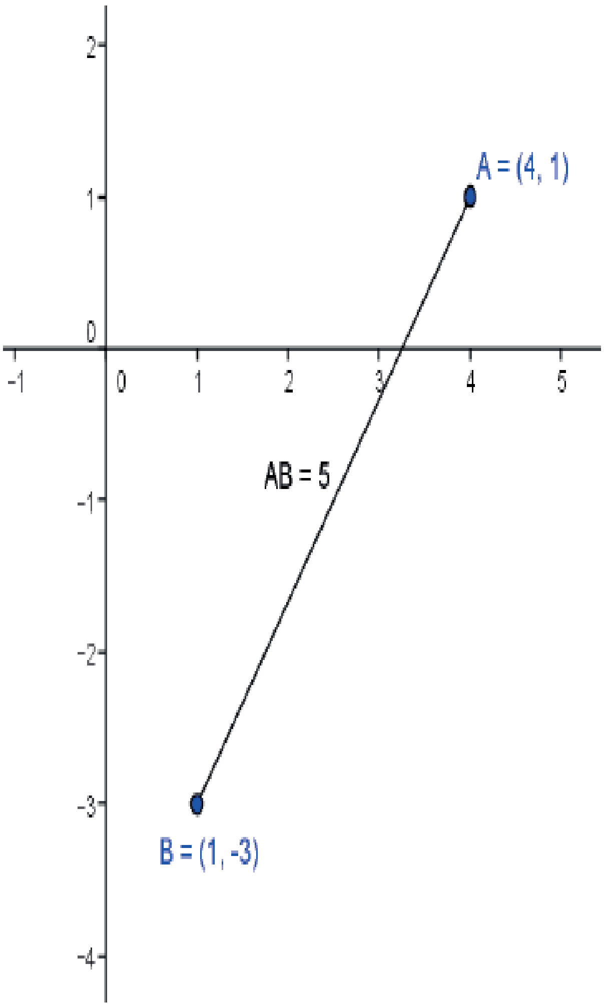
$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{9+16}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25}$$

$$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{5}$$

Gráficamente, tenemos:




Si hubiésemos tomado el punto A como el punto $P_2(x_2,y_2)$ y el punto B como el punto $P_1(x_1,y_1)$ y sustituyendo estos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{9+16}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25}$$

$$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{5}$$

# 1.5. División de un segmento en una razón dada

División de un segmento en una razón dada.

El resultado de la comparación de dos cantidades de la misma especie, se llama razón o relación de dichas cantidades. Las razones o relaciones pueden ser razones por cociente o geométricas.

La razón por cociente o geométrica es el resultado de la comparación de dos cantidades homogéneas con el objeto de saber cuántas veces la una contiene a la otra.

Observación: En geometría analítica las razones deben considerarse con su signo o sentido porque se trata de segmentos de recta dirigidos.

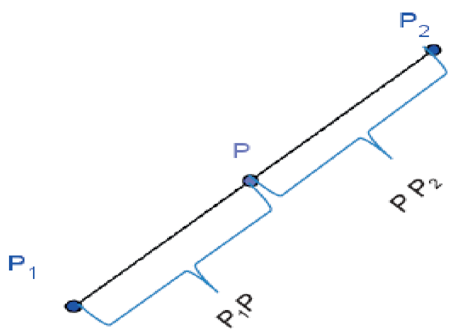
Consideramos como el proceso de "Dividir un segmento en una razón dada" aquel el cual consiste en determinar un punto (P) el cual se encuentra dentro de un segmento dado, entre dos puntos ($P_1$) y ($P_2$), de tal manera que el segmento ($P_1P$) dividido entre el segmento ($PP_2$) da como resultado la razón.

## Razón de un segmento de recta

El punto P(*x*,*y*) que divide a un segmento de recta en una razón dada se llama *punto de división*, y se calcula con la fórmula:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

Si tenemos un segmento de recta y por el pasan dos puntos $P_1$ y $P_2$, y se traza también un punto P, éste divide al segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ en la razón *r*, como se presenta en la siguiente figura.



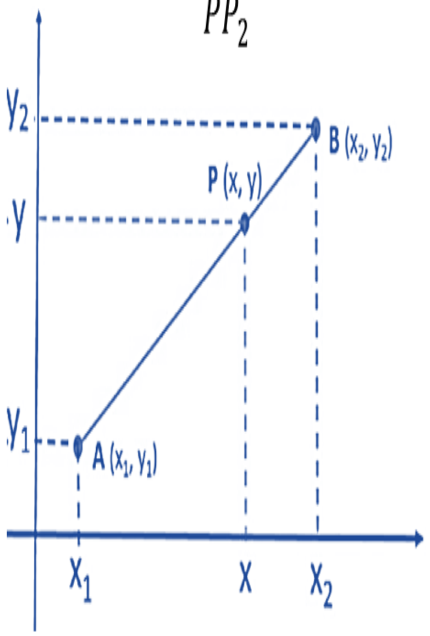

Si se establece la distancia $P_1P_2$ como positiva y *el punto P está entre los puntos $P_1$ y $P_2$*, las distancias $P_1P$ y $PP_2$ serán positivas y también *la razón será positiva.*

## 1.6 Determinación de las fórmulas para obtener las coordenadas de un punto de división de una razón dada.

**DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR UNA RAZÓN DADA**

Dados 2 puntos en el plano $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ que son los extremos de una recta, la razón que divide al segmento de recta se define como:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$




Para determinar la razón dados los extremos de la recta y el punto de división se utiliza la siguiente fórmula:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \text{o} \quad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

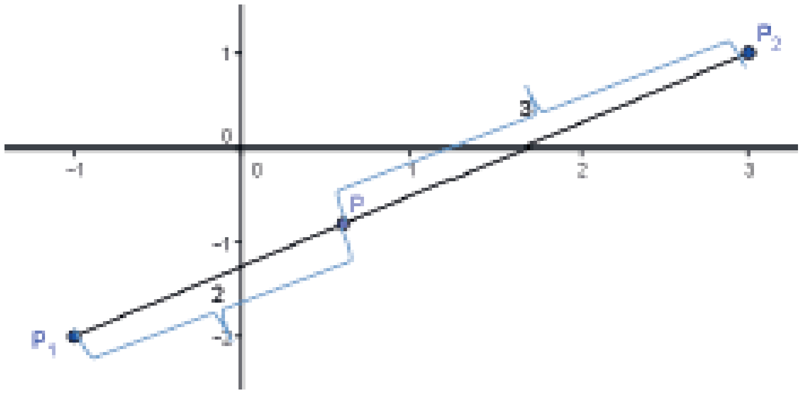
Para encontrar el punto en el plano de la división dados los extremos de la recta y la razón se utilizan las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

## EJEMPLOS

Veamos los siguientes ejemplos:

El segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ tiene una longitud de 5, el segmento de recta $\overline{P_1P}$ tiene una longitud de 2 y la distancia del segmento $\overline{PP_2}$ es igual a 3. Calcula la razón.

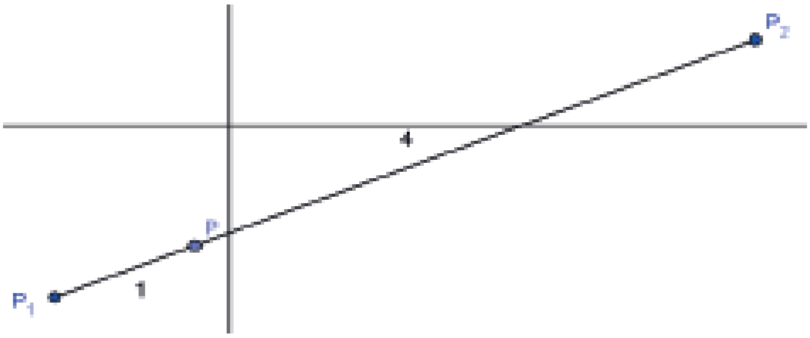



**Solución**

Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$

Y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos una razón positiva, es decir: $r = \frac{2}{3}$. Podemos observar que como el punto P está entre los puntos $P_1$ y $P_2$ la razón r es positiva.

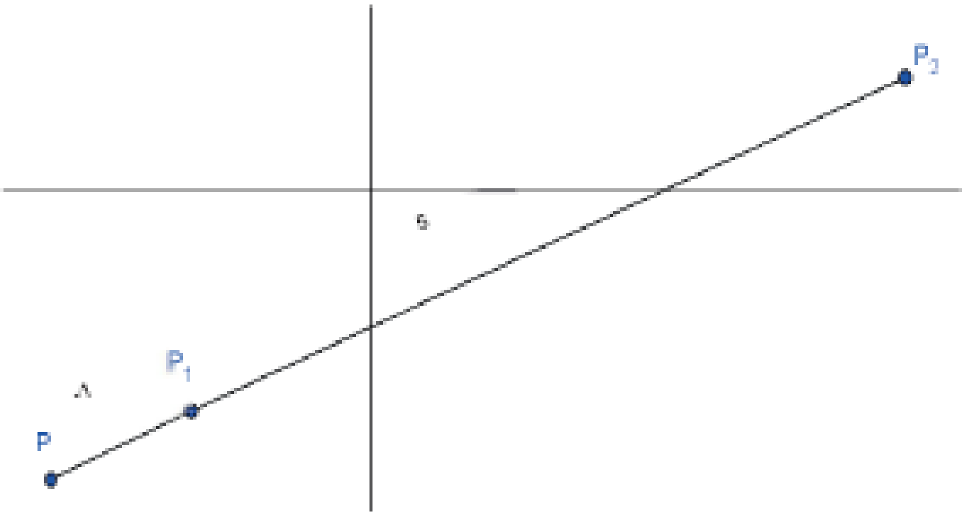
Calcula la razón en el siguiente caso:




**Solución**

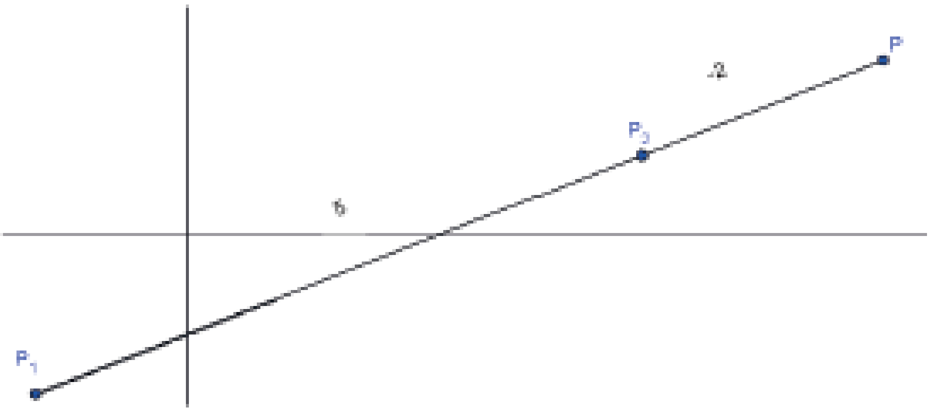
Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos: $r = \frac{1}{4}$

Calcula la razón para los siguientes casos:




**Solución**

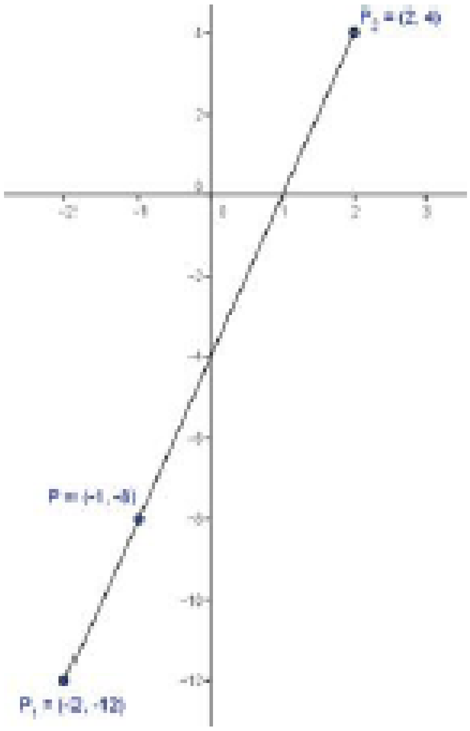
En este caso, el punto P está *fuera del segmento* $\overline{P_1P_2}$, y el segmento $\overline{PP_1}$ es *negativo*. Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos: $r = \frac{-1}{6}$




**Solución**

En este caso el punto P está fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$, y el segmento $\overline{PP_2}$ es negativo. Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos: $r = \frac{7}{-2}$

Indica la razón en la que el punto P(-1,-8) divide al segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos puntos extremos son $P_1(-2,-12)$ y $P_2(2,4)$




Solución:

Se calcula la distancia entre los puntos $P_1$ y P:

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-12-(-8))^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-12+8))^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{1+16}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{17}$

Ahora se calcula la distancia entre P y $P_2$:

$\overline{PP_2} = \sqrt{(-8-4)^2 + (-1-2)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(-12)^2 + (-3)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{144+9}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{153} = \sqrt{9(17)}$

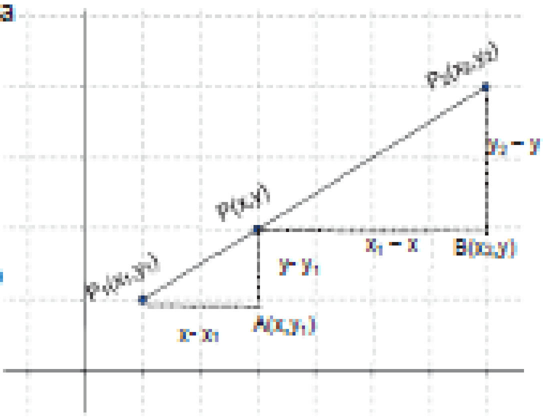
Utilizando la fórmula $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ se sustituyen estos valores:

$r = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{9(17)}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{9}\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ $\quad r = \frac{1}{3}$

Si un punto $P(x,y)$ es un punto que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$, cuyos extremos tienen coordenadas $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en una razón $r$ dada, entonces, para calcular las coordenadas del punto P utilizaremos las siguientes fórmulas:

Coordenadas del punto $x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r}$ $\qquad$ Coordenadas del punto $y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r}$

Tomando en cuenta el teorema de Tales acerca de triángulos semejantes:




$\frac{P_1A}{PB} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{P_1P}{PP_2} = r \qquad \frac{AP}{BP_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{P_1P}{PP_2} = r$

Tomando $\frac{x-x_1}{x_2-x} = r$ para despejar $x$ tenemos:

$x - x_1 = r(x_2 - x)$ Multiplicando el lado derecho

$x - x_1 = rx_2 - rx$ Pasando las $x$ del lado izquierdo y las $x_1$ del lado derecho.

$x + rx = rx_2 + x_1$ Factorizando el lado izquierdo.

$x(1 + r) = rx_2 + x_1$ Despejando $x$ de la izquierda.

$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ De igual manera se calcula para $y$.

## Ejemplo

Sea $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$ los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$ ; encuentra las coordenadas del punto $P(x,y)$ que lo divide en una razón $r = \frac{1}{3}$

**Solución**

Sustituyendo los valores en las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

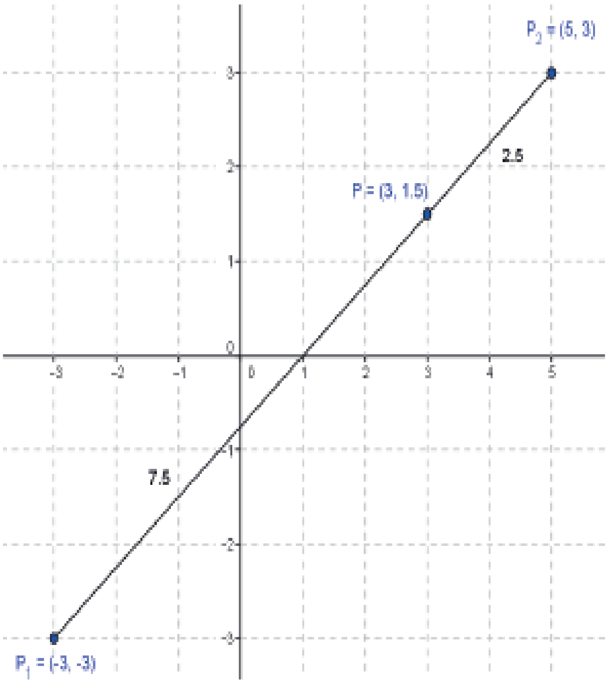
$$x = \frac{5 + \left(\frac{1}{3}\right)(-3)}{1 + \frac{1}{3}} \qquad y = \frac{3 + \left(\frac{1}{3}\right)(-3)}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{5-1}{\frac{4}{3}} \qquad y = \frac{3-1}{\frac{4}{3}}$$

$$x = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{4}{3}} \qquad y = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{3}}$$

$$x = \frac{12}{3} \qquad y = \frac{6}{4}$$

$$x = 3 \qquad y = 1.5$$




Las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r = \frac{1}{3}$ son P(3,1.5), tal como se muestra en la figura.

Para comprobarlo, calculamos las distancias de los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$:

$$\overline{P_1P} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-3-1.5)^2} \qquad \overline{PP_2} = \sqrt{(3-5)^2 + (1.5-3)^2}$$

$$\overline{P_1P} = \sqrt{(-6)^2 + (-4.5)^2} \qquad \overline{PP_2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1.5)^2}$$

$$\overline{P_1P} = \sqrt{36 + 20.25} \qquad \overline{PP_2} = \sqrt{4 + 2.25}$$

$$\overline{P_1P} = \sqrt{56.25} \qquad \overline{PP_2} = \sqrt{6.25}$$

$$\overline{P_1P} = 7.5 \qquad \overline{PP_2} = 2.5$$

## 1.7 Punto Medio de un Segmento

## 1.8 Fórmula

El punto medio de un segmento representa al punto que se ubica exactamente en la mitad de los dos puntos extremos del segmento. El punto medio puede ser encontrado al dividir a la suma de las coordenadas $x$ por 2 y dividir a la suma de las coordenadas $y$ por 2.
A continuación, conoceremos la fórmula que podemos usar para calcular el punto medio de un segmento. Además, usaremos esa fórmula para resolver algunos ejercicios de práctica.

**¿Qué es el punto medio?**

El punto medio es un punto que se ubica exactamente en la mitad de un segmento de línea que une a dos puntos. Por ejemplo, si es que tenemos dos puntos y los unimos con un segmento de línea, el punto medio se ubicará en la mitad de ese segmento y será equidistante a ambos puntos.
En el siguiente diagrama tenemos los puntos A y B, los cuales están unidos por un segmento. El punto C es el punto medio, ya que está exactamente en la mitad del segmento. Para calcular la ubicación del punto medio, simplemente tenemos que medir la longitud del segmento y dividir por 2.

Un punto medio puede ser calculado solo cuando tenemos a un segmento que une a dos puntos, ya que tiene una ubicación definida. El punto medio no puede ser calculado para una línea o un rayo, ya que una línea tiene dos extremos que se extienden indefinidamente y un rayo tiene un extremo que se extiende indefinidamente.
La fórmula para el punto medio de un segmento es derivada usando las coordenadas de los puntos extremos del segmento. El punto medio es igual a la mitad de la suma de las coordenadas en $x$ de los puntos y a la mitad de las coordenadas en $y$ de los puntos.

Ejemplos

El punto medio de un segmento de recta es aquel que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos y divide al segmento en una razón de 1.

La coordenada del punto medio de un segmento de recta es igual a la semisuma de las coordenadas correspondientes de sus puntos extremos, mediante las fórmulas:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y2}{2}$$

Ejemplo:

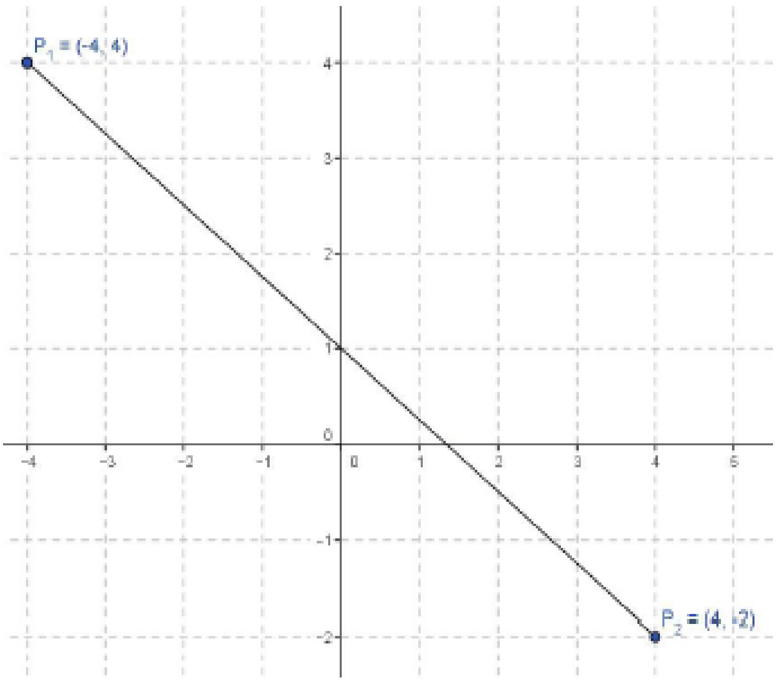
Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos extremos tiene coordenadas $P_1(-4,4)$ y $P_2(4,-2)$.

**Solución**

Sustituyendo los valores en las fórmulas: $x_M = \frac{-4+4}{2} = \frac{0}{2}$ $\quad x = 0$

$$y_M = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} \quad y = 1$$

Las coordenadas del punto medio son PM = (0,1)



EJEMPLO:

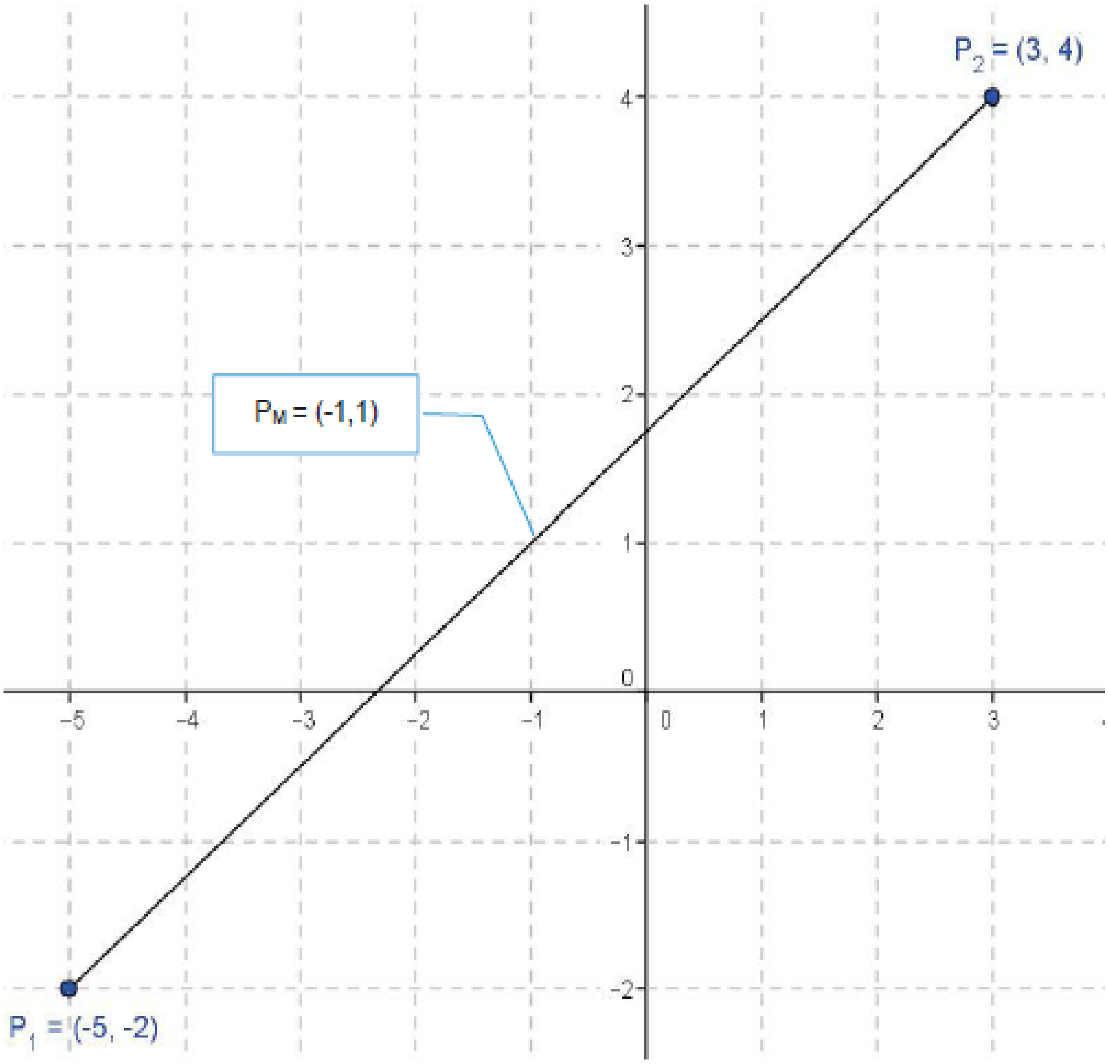
Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos extremos tiene coordenadas $P_1(-5,-2)$ y $P_2(3,4)$

**Solución**

Sustituyendo los valores en las fórmulas: $x_M = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2}$ $\quad x = -1$

$y_M = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2}$ $\quad y = 1$

Las coordenadas del punto medio son $P_M = (-1,1)$



**EJEMPLO**

Encuentra las coordenadas del punto $P_2$, sabiendo que $P_M(2,-2)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ y el otro extremo tiene coordenadas $P_1(-3,1)$.

**Solución**

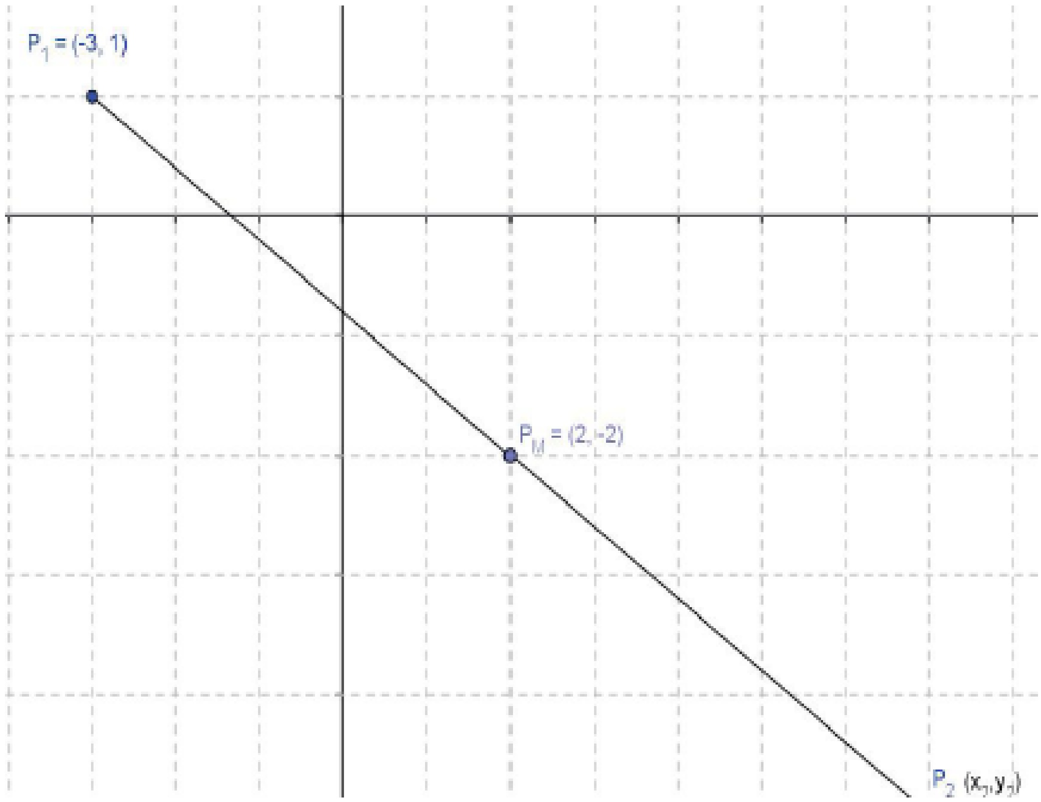
Las fórmulas para el punto medio son:

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_M = \frac{y_1 + y}{}$

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_M = \frac{y_1 + y2}{2}$ ıadas del punto $P_2(x_2,y_2)$, despejamos ambas:

| | |
|---|---|
| $2x_M = x_1 + x_2$ | $2y_M = y_1 + y_2$ |
| $2x_M - x_1 = x_2$ | $2y_M - y_1 = y_2$ |
| $2(2) - (-3) = x_2$ | $2(-2) - 1 = y_2$ |
| $4 + 3 = x_2$ | $-4 - 1 = y_2$ |
| $\mathbf{x_2 = 7}$ | $\mathbf{y_2 = -5}$ |

Las coordenadas del punto 2 son $P_2(7,-5)$



## 1.10 Calculo de perímetros y áreas de polígonos a partir de coordenadas de sus vértices

Recuerda que el *perímetro* (del griego *peri* “alrededor”- y *metro* “medida”) de un polígono o cualquier figura, es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica, es decir, la longitud del contorno de la figura.

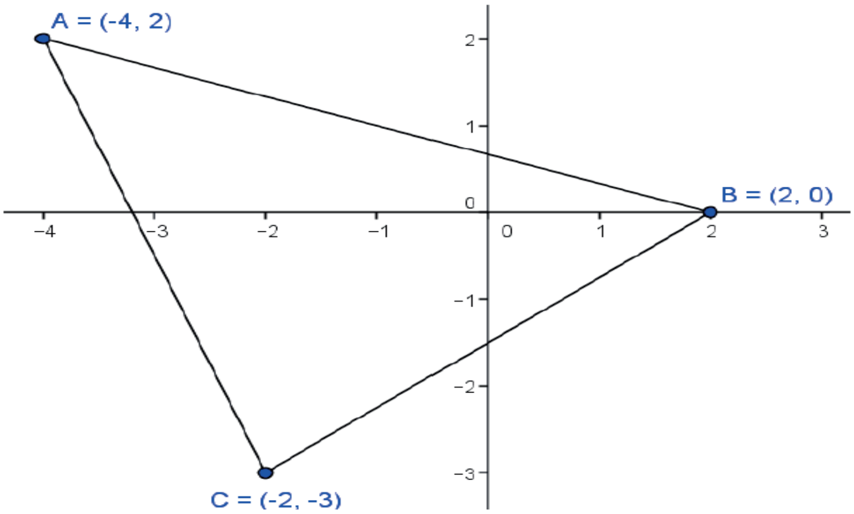
### Sabías que…

Hacia el año 250 a.C., el matemático y filósofo Eratóstenes de Alejandría hizo la primera medición del perímetro de la Tierra, con una exactitud asombrosa y un margen de error muy pequeño. Empleando un método trigonométrico, midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía y comparó la distancia entre las ciudades de Siena y Alejandría, haciendo el equivalente a 5000 estadios (cuya longitud era de 184.8 m) y deduciendo así la circunferencia de la Tierra en 252,000 estadios.

En Grecia se utilizaba el término *estadio* como una unidad de longitud, que tomaba como patrón la longitud del estadio de Olimpia.

Para calcular el perímetro de un polígono, podemos encontrar la distancia entre dos de sus vértices y, después, sumar cada uno de los segmentos, como veremos en los siguientes ejemplos:

Calcula el perímetro de la siguiente figura:




**Solución:**

Se calcula primero la distancia de los 3 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-(-4))^2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{4+36}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{40}$

$\overline{\mathbf{AB}}$ **= 6.32**

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-2)^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{9+16}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{25}$

$\overline{\mathbf{BC}}$ **= 5**

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2-(-4))^2}$

segmentos,

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2}$

manera:

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{25+4}$

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{29}$

Una vez calculada la longitud de los 3

el perímetro se obtiene de la siguiente

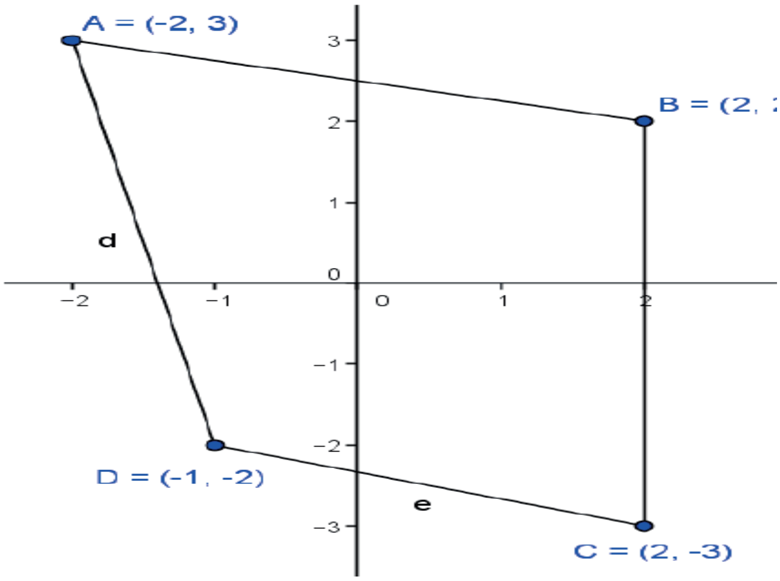
P = $\overline{\mathrm{AB}}$ + $\overline{\mathrm{BC}}$ + $\overline{\mathrm{CD}}$ = 6.32 + 5 + 5.86

**P = 17.18**

**El perímetro es igual a 17.18 unidades**

$\overline{\mathbf{CD}}$ **= 5.86**

Otro ejemplo: calcula el perímetro de la siguiente figura.




Solución:

Se calcula primero la distancia de los 3 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$

$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-2))^2+(2-3)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(4)^2+(-1)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{16+1}$

$\overline{AB} = \sqrt{17}$

$\overline{AB} = 4.12$

$\overline{BC} = \sqrt{(-3-2)^2+(2-2)^2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-5)^2+(0)^2}$

$\overline{BC} = \sqrt{25+0}$

$\overline{BC} = \sqrt{25}$

$\overline{BC} = 5$

$\overline{CD} = \sqrt{(-3-(-2))^2+(2-(-1))^2}$

$\overline{CD} = \sqrt{(-1)^2+(3)^2}$

$\overline{CD} = \sqrt{1+9}$

$\overline{CD} = \sqrt{10}$

$\overline{CD} = 3.16$

$\overline{DA} = \sqrt{(-2-3)^2+(-1-(-2))^2}$

$\overline{DA} = \sqrt{(-5)^2+(1)^2}$

$\overline{DA} = 1$

$\overline{DA} = \sqrt{26}$

$\overline{DA} = 5.10$

Una vez calculada la longitud de los cuatro segmentos, el perímetro se obtiene de la siguiente manera:

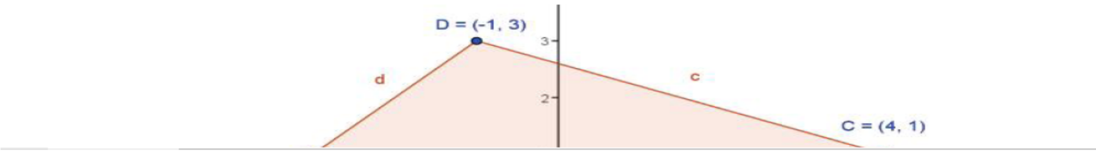
$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 4.12 + 5 + 3.16 + 5.10$

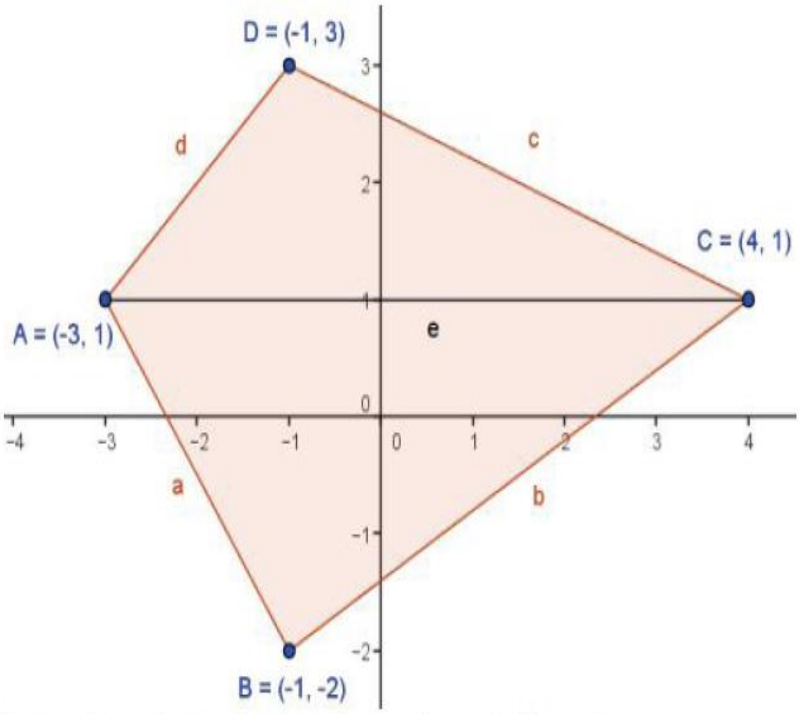
$P = 17.38$ El perímetro es igual a 17.38 unidades

Ahora revisemos lo que es el *área* de un polígono, que se refiere a la cantidad de superficie que se encuentra dentro de una figura.
Apliquemos el concepto: calcula el área del siguiente paralelogramo, dividiéndolo en dos triángulos y sumando sus áreas, que se pueden obtener utilizando la fórmula de Herón, que dice $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es el semiperímetro, que se calcula mediante la fórmula $s=\frac{a+b+c}{2}$, siendo *a, b, c* y *d* las longitudes de cada uno de los lados del triángulo.

**Solución:**

Se divide primero el polígono en dos triángulos.




Se calculan las distancias de los lados de ambos triángulos, denotados con *a, b, c, d, e.*

$\bar{a} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-(-3))^2}$
$\bar{a} = \sqrt{(-3)^2 + (-1+\ 3)^2}$
$\bar{\mathbf{a}}$ **= 3.6**

$\bar{b} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-4)^2}$
$\bar{b} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$
$\bar{b} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$
$\bar{\mathbf{b}}$ **= 5.8**

$\bar{c} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-4)^2}$
$\bar{c} = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2}$
$\bar{c} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$
$\bar{\mathbf{c}}$ **= 5.4**

$\bar{d} = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-(-1))^2}$
$\bar{d} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$
$\bar{d} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$
$\bar{\mathbf{d}}$ **= 2.8**

$\bar{e} = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-4)^2}$
$\bar{e} = \sqrt{(0)^2 + (-7)^2}$
$\bar{e} = \sqrt{0+49} = \sqrt{49}$
$\bar{\mathbf{e}}$ **= 7**

Se calcula $s_1$ para el triángulo superior (*d-c-e*)

$s_1 = \frac{d+c+e}{2} = \frac{2.8+5.4+7}{2} = \frac{15.2}{2}$ $\boldsymbol{s_1}$ **= 7.6**

y luego su área con la fórmula:

$A_1 = \sqrt{s(s-d)(s-c)(s-e)}$
$A_1 = \sqrt{7.6(7.6-2.8)(7.6-5.4)(7.6-7)}$
$\boldsymbol{A_1}$ **= 6.9 u²**

Se calcula $s_2$ para el triángulo inferior (*a-b-e*)

$s_2 = \frac{a+b+e}{2} = \frac{3.6+5.8+7}{2} = \frac{16.4}{2}$ $\boldsymbol{s_2}$ **= 8.2**

y luego su área con la fórmula:

$A_2 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$
$A_2 = \sqrt{8.2(8.2-3.6)(8.2-5.8)(8.2-7)}$
$\boldsymbol{A_1}$ **= 10. 4 $\mathbf{u^2}$**

Se suman ahora las áreas $A_1$ y $A_2$
$A_t = A_1 + A_2 = 6.9\ u^2 + 10.4\ u^2$
$\boldsymbol{A_t}$ **= 17.3 $\mathbf{u^2}$**

Por lo que el área del polígono es 17.3 $u^2$

## Unidad II: La recta

Para empezar esta unidad vamos a definir  lo que es una línea recta. Pareciera un concepto muy simple pero en geometría tiene mucho sentido, pues de ella parte todo el conocimiento matemático en esta área.

La línea recta: conjunto infinito de puntos unidos en una misma dirección y de una sola dimensión, que se compone de segmentos infinitos, que son las pequeñas líneas que unen dos puntos.

Una línea recta analíticamente es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables, recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular).

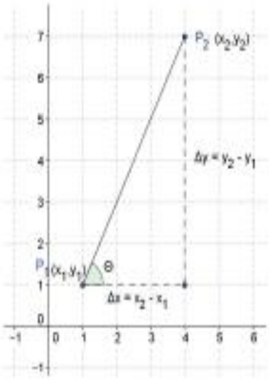
## 2.1 Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Cuando vas subiendo por una montaña, cuanto más inclinada este, mayor será el esfuerzo que tendrás que hacer para llegar a la cúspide. Esto se debe a que el ángulo de inclinación entre el piso y la montaña es muy grande a dicha inclinación se le llama pendiente y cuanto mayor sea el ángulo de inclinación, mayor será la pendiente.

Cuando estas subiendo por la montaña se dice que tiene pendiente positiva. Al llegar a la cúspide y caminar unos pasos, el desplazamiento es horizontal, por lo que allí no hay inclinación, es decir no hay pendiente (esta tiene valor 0). Al descender de la montaña se dice que tiene una pendiente negativa.

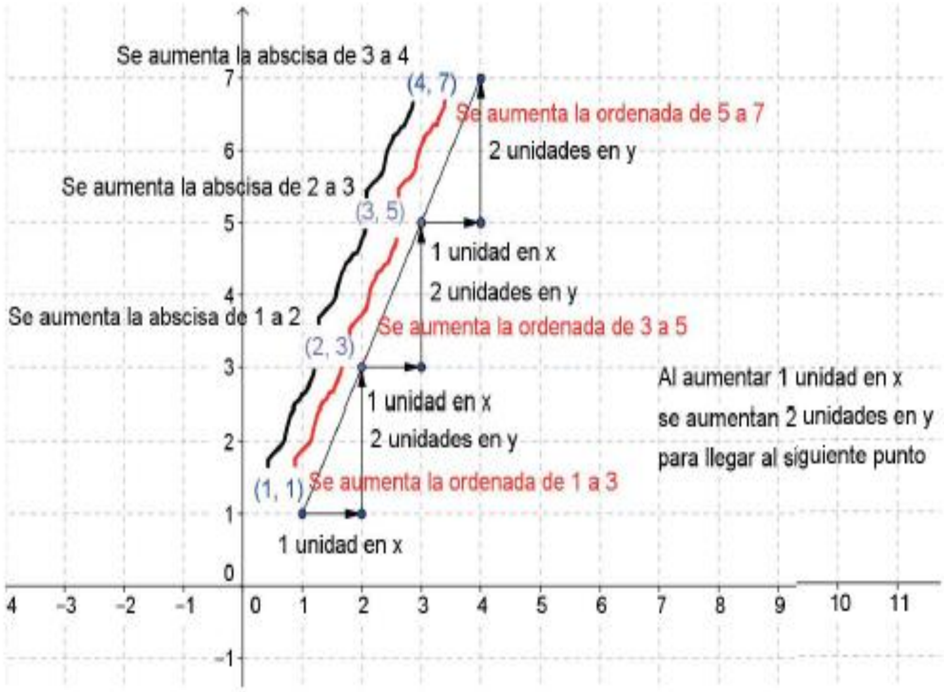
PENDIENTE DE UNA RECTA: Es el grado (medida) de inclinación de una recta. Si lo vemos en una gráfica como en la imagen inferior, es el cambio en el eje Y con respecto al cambio en el eje X. La pendiente se representa con la letra m.

Si una recta pasa por dos puntos distintos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces su pendiente (*m*) está dada por:




$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde $x_1$ tiene que ser diferente de $x_2$.

Esto es, $m = \dfrac{\text{cambio vertical (elevación)}}{\text{cambio horizontal (recorrido o desplazamiento)}}$

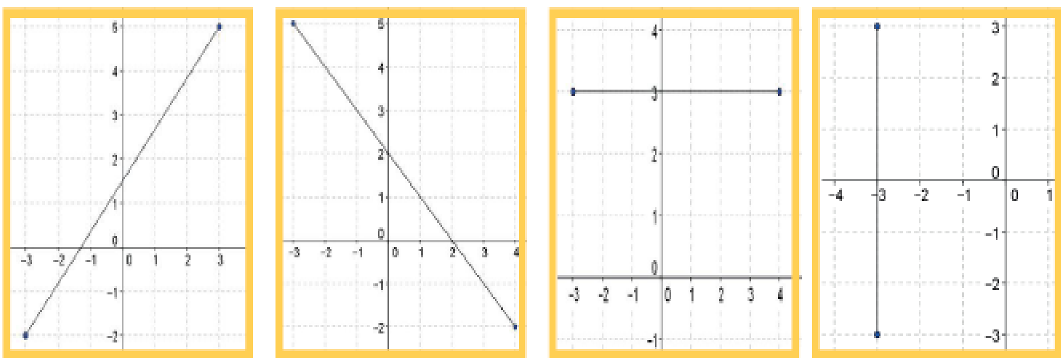


## 2.2 Pendientes positivas, negativas y nulas.

La pendiente puede ser de varios tipos.

**Tipos de pendiente**

| Positiva | Negativa | Cero | Indefinida |
|---|---|---|---|
| Al aumentar la variable independiente ($x$) aumenta también la variable dependiente ($y$). Va de izquierda a derecha. | Al aumentar la variable independiente ($x$) disminuye la variable dependiente ($y$). Va de derecha a izquierda. | No existe inclinación de la recta al ser completamente horizontal, por lo que el valor de la pendiente es cero. | La recta es completamente vertical y el ángulo de inclinación es de 90º. Se extiende hasta el infinito de manera indefinida. |



## 2.3 Pendiente y ángulo de inclinación

ANGULO DE INCLINACION DE UNA RECTA: Es el menor de los ángulos que forma una recta con el eje horizontal X, medido siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de una recta siempre varía de 0° a 180° y se pueden presentar los siguientes casos.

Si la pendiente es positiva, el ángulo de inclinación siempre será agudo (menor a 90°).

Si la pendiente es negativa, el ángulo de inclinación siempre será obtuso (más de 90° y menos de 180°).

La pendiente es igual a cero si el ángulo es de 0° (no hay inclinación).

La pendiente es indefinida o infinita si el ángulo es recto (igual a 90°).

Se le llama pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación, la relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación es:

$$m = tan\theta$$

Es decir, la pendiente es igual a la tangente del ángulo de inclinación. Para los siguientes ejercicios es necesaria una calculadora científica donde utilizaran la función tan.

**Ejemplo 1: Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 60°**

Solución

m= tan 60°

m=1.732

Ejemplo 2: Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 75°

Solución

m= tan75°

m=3.732

Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 120°

**Solución**

$m$ = tan 120°
$m$ = - 1.732

**Ejemplo 4**

Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 160°

**Solución**

$m$ = tan 160°
$m$ = - 0.364

Ahora encontraremos el ángulo de inclinación:

**Ejemplo 5**

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es 3

**Solución**

$m = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(3)$

$\theta = 71.56°$

**Ejemplo 6**

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es 1.5

**Solución**

$m = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(1.5)$

$\theta = 56.31°$

## Ejemplo 7

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es -2

**Solución**

$m = \tan\theta$
$\theta = \tan^{-1} m$
$\theta = \tan^{-1}(-2)$
$\theta = -63.43°$

Como el ángulo es negativo, indica que se ha medido en contra de las manecillas del reloj, por lo tanto $\theta = 180° - 63.43°$ $\quad \theta = 116.57°$

## Ejemplo 8

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es $-\frac{3}{2}$

**Solución**

$m = \tan\theta$
$\theta = \tan^{-1} m$
$\theta = \tan^{-1}(3/2)$
$\theta = -56.30°$

Como el ángulo es negativo, indica que se ha medido en contra de las manecillas del reloj, por lo tanto, $\theta = 180° – 56.30°$ $\quad \theta = 123.7°$

## Ejemplo 9

Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-2,4) y B(4,-3)

**Solución**

Podemos tomar el punto A como el punto 1 de coordenadas $P_1(x_1,y_1)$ y el punto B como el punto 2 de coordenadas $P_2(x_2,y_2)$. Se puede tomar también al revés los puntos A y B, es decir, no importa qué punto tomamos como $P_1$ y $P_2$.

Primero se calcula la pendiente:

Tomando el punto $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-4}{4-(-2)} = \frac{-7}{6}$$

$m = -1.17$

Tomando el punto $B(x_1,y_1)$ y $A(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-(-3)}{-2-4} = \frac{7}{-6}$$

$m = -1.17$

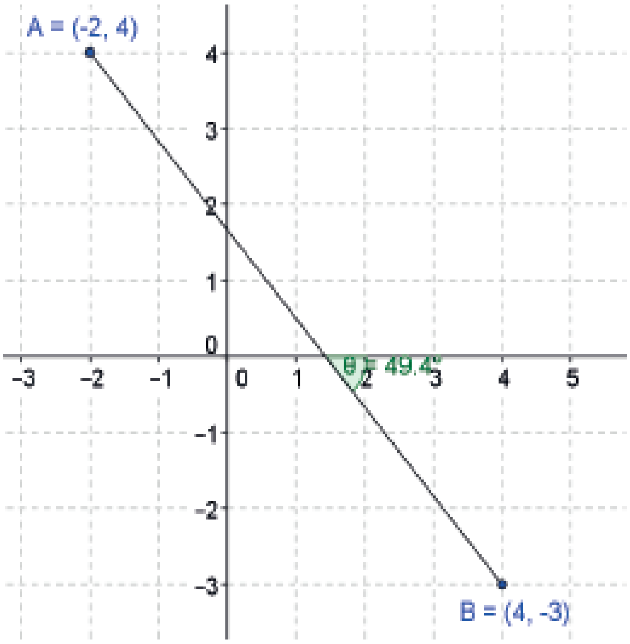
Luego calculamos el ángulo de inclinación:

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(-1.17)$

$\theta = -49.48$ (indica que es medido en contra de las manecillas del reloj)

Gráficamente:



Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-2,-1) y B(1,5)

**Solución**

Calculamos primero la pendiente

Tomando el punto A($x_1$,$y_1$) y B($x_2$,$y_2$)

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-(-1)}{1-(-2)} = \frac{6}{3}$$

m = 2

Tomando el punto B($x_1$,$y_1$) y A($x_2$,$y_2$)

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-1-5}{-2-1} = \frac{-6}{-3}$$

m = 2

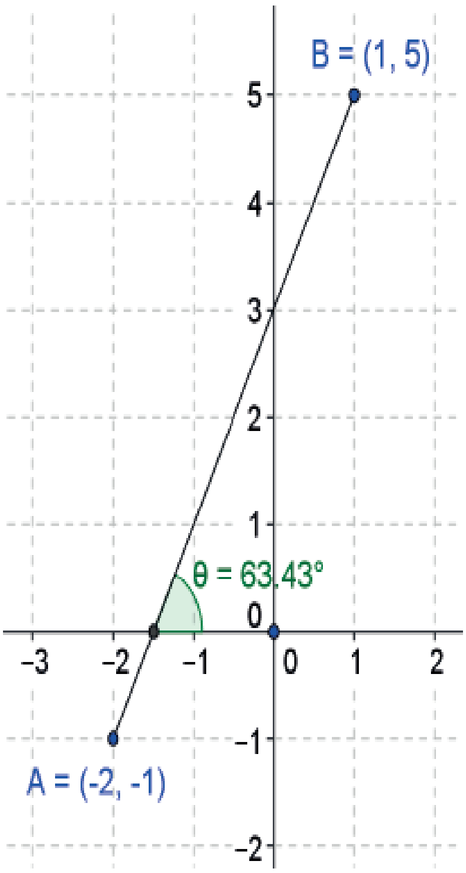
Luego calculamos el ángulo de inclinación

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(2)$

$\theta = 63.43°$

Gráficamente:



Una empresa tuvo ventas en 2009 por $ 6'500,000 y en 2013 tuvo ventas por $ 8'250,000. ¿Cuál fue su tasa de crecimiento anual?

**Solución**

Es conveniente definir primero cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente. Nos hacemos las siguientes preguntas:

¿El valor de las ventas depende del tiempo que transcurre?
¿El tiempo que transcurre depende del valor de las ventas?

La respuesta es que el valor de las ventas depende del tiempo que transcurre, por lo que asignaremos a *x* el tiempo y a *y* el valor de las ventas.
Una vez definido esto, asignamos a $P_1(\underset{x_1}{2009},\underset{y_1}{6'500,000})$ y $P_2(\underset{x_2}{2013},\underset{y_2}{8'250,000})$.

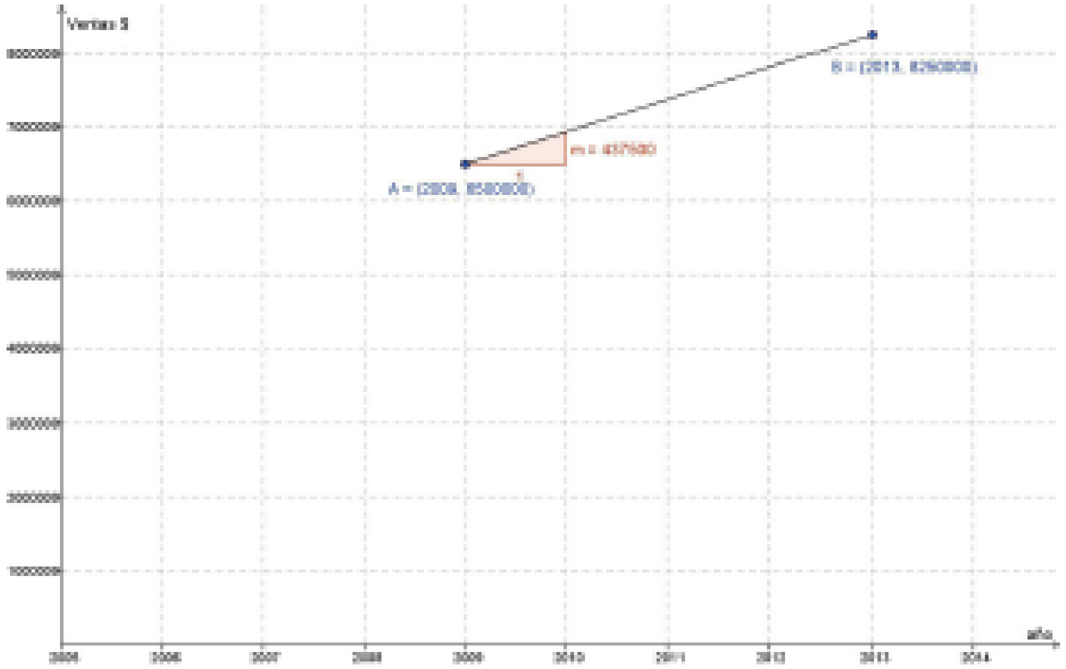
Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8\,250\,000 - 6\,500\,000}{2013 - 2009} = \frac{1\,750\,000}{4}$$

$m = 437\,500$

Por lo que la empresa crece $ 437,500 cada año

Gráficamente:



## 2.4. Formas de la ecuación de la recta y sus transformaciones

Como ya se registró, se pueden tener tres ecuaciones diferentes para definir una recta: **y = mx + b** conocida con ecuación normal u ordinaria conocida como ecuación simétrica o canónica **Ax + By + C = 0** conocida como ecuación general En este apartado se analiza cómo, de una de las tres ecuaciones se obtienen las otras dos, mediante transformaciones algebraicas.

## 2.5 Forma punto pendiente (forma común o simplificada)

### Ecuación de la recta determinada por uno de sus puntos y su pendiente

Cuando queremos determinar la ecuación de una recta $r$, que pasa por un punto $P_1(x_1,y_1)$ que tiene una pendiente $m$, si existe un punto $P(x,y)$ cualquiera de la recta y es distinto de $P_1$, utilizando la fórmula de la pendiente tenemos:

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ y pasando el término $x - x_1$ que está dividiendo hacia el otro lado

multiplicando, resulta:

$m(x - x_1) = y - y_1$, lo que es lo mismo:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ésta es la ecuación de la recta expresada en su forma punto-pendiente, que se utiliza cuando conocemos un punto de la recta y su pendiente.

Recuerda que la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = mx + b$$

donde:

y = variable dependiente
m = pendiente de la recta
x = variable independiente
b = intersección con el eje de las ordenadas y

Por lo que después de haber sustituido las coordenadas del punto $P_1$ y la pendiente $m$ en la forma punto-pendiente, se pasa la ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen.

**Ejemplo 1**

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto A(5,6) y cuya pendiente es 3.

**Solución**

- Se sustituyen las coordenadas del punto A y la pendiente en la forma punto-pendiente:

Ésta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

$$y - 6 = 3(x - 5)$$

- Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha

$$y - 6 = 3x - 15$$

- Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término -6 hacia el lado derecho

$$y = 3x - 15 + 6$$

- Se simplifican los términos semejantes -15 + 6

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = 3x - 9$

**Ejemplo 2**

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto B(-3,4) y cuya pendiente es -2.

**Solución**

- Se sustituyen las coordenadas del punto B y la pendiente en la forma punto-pendiente:

$$y - 4 = -2(x - (-3))$$
$$y - 4 = -2(x + 3)$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.

- Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha

$$y - 4 = -2x - 6$$

- Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término -4 hacia el lado derecho

$$y = -2x - 6 + 4$$

- Se simplifican los términos semejantes -6 + 4

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = -2x - 2$

## Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto C(6,-3) y cuya pendiente es $-\frac{2}{3}$.

**Solución**

- Se sustituyen las coordenadas del punto C y la pendiente en la forma punto-pendiente:

$$y - (-3) = -\frac{2}{3}(x - 6)$$

$$y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 6)$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

- Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha

$$y + 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{12}{3}$$

- Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término +3 hacia el lado derecho

$$y = -\frac{2}{3}x + 4 - 3$$

- Se simplifican los términos semejantes $+ 4 - 3$

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = -\frac{2}{3}x + 1$

## Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya pendiente es 3 y la ordenada al origen es - 4.

**Solución**

- Se sustituyen los valores de la pendiente ($m$) y la ordenada al origen ($b$) en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$

$$y = 3x + (-4)$$

$$y = 3x - 4$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen

**Ejemplo 5**

Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es 3 y es paralela a la recta cuya ecuación es $y = -4x + 5$

**Solución**

- Como las rectas son paralelas, el valor de sus pendientes es igual; por lo tanto, el valor de la pendiente de la ecuación de la recta que queremos encontrar también es -4
- Se sustituye este valor y el de $b$ en la ecuación $y = mx + b$

$$y = -4x + 3$$

$$y = -4x + 3$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen

**Ejemplo 6**

Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es -4 y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $y = 3x - 6$

**Solución**

- Como las rectas son perpendiculares, el valor de sus pendientes son recíprocos y de signos contrarios. Por lo tanto, como la pendiente es igual a 3, su recíproco inverso es $-\frac{1}{3}$
- Se sustituye este valor y el de $b$ en la ecuación $y = mx + b$

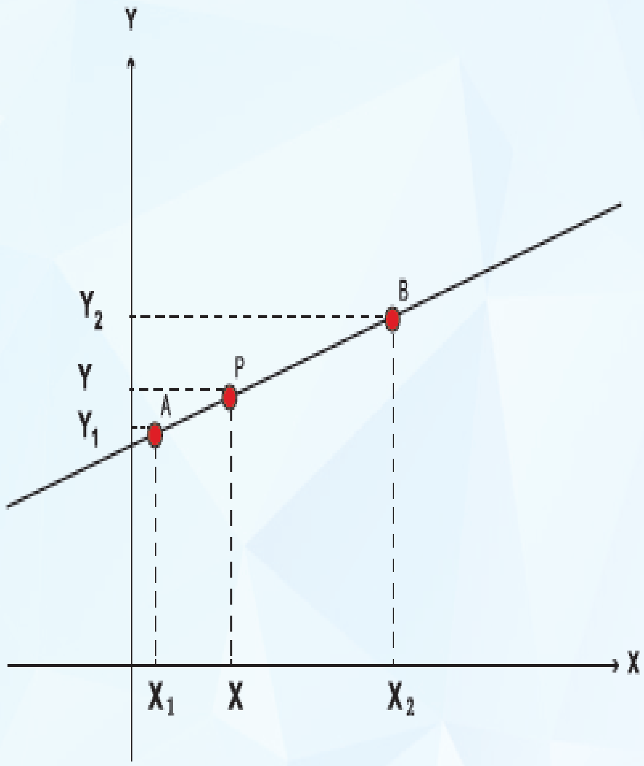
$$y = -\frac{1}{3}x - 4$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 4$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen

## 2.6 Forma dada dos puntos (forma cartesiana)

Ahora veamos en lenguaje matemático como se puede representar a este lugar geométrico, es decir proporcionar su expresión algebraica. Sean dos puntos con coordenadas conocidas, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ y considerar un punto $P(x,y)$ cualesquiera sobre la recta que une estos puntos como se muestra en la siguiente imagen:




Entonces se puede calcular la pendiente entre cada pareja de puntos, obteniendo así:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y

$$m_{AP} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Como los puntos forman parte de una línea recta, entonces satisfacen la condición o propiedad de tener la misma pendiente, de esta manera: $m_{AP} = m_{AB}$

Así,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A esta última expresión algebraica se le conoce como la ***forma cartesiana*** de una línea recta.

**Ejemplo:**

1. Considerar los puntos $A(-2,1)$ y $B(3,5)$ y encontrar la ecuación de la recta en su forma cartesiana.

Está solicitando la ecuación de la línea recta en la forma cartesiana y su expresión algebraica es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De esta manera, sustituyendo los valores de los puntos A y B en la ecuación, se tiene:

$$\frac{y - 1}{x - (-2)} = \frac{5 - 1}{3 - (-2)}$$

Ahora, realizando aritmética obtenemos la forma cartesiana:

$$\frac{y - 1}{x + 2} = \frac{4}{5}$$

Más aún, se puede encontrar la ecuación general de esta recta haciendo realizando los cálculos necesarios correspondientes a una proporción.

$$5(y - 1) = 4(x + 2)$$

Multiplicando

$$5y - 5 = 4x + 8$$

Transponiendo todos los términos de un lado de la igualdad, se tiene:

$$4x - 5y + 5 + 8 = 0$$

Obteniendo,

$$4x - 5y + 13 = 0$$

Siendo esta la ecuación general de la recta.

## 2.7 Forma simétrica (canónica)

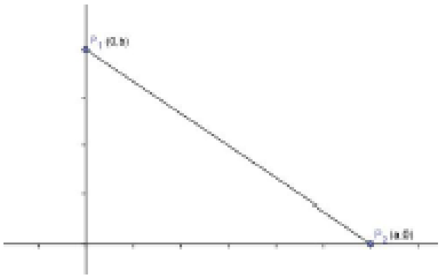
En los temas anteriores aprendiste a calcular la ecuación de la recta cuando se conocen dos de sus condiciones: un punto y la pendiente. Las formas que calculaste fueron:

- Forma pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$
- Forma punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

**Forma simétrica**

Cuando conocemos las intersecciones de la recta con los ejes coordenados, podemos expresarla en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, donde:
$a$ es el valor de la abscisa en el origen, que es el valor de $k$ cuando $y = 0$;
$b$ es el valor de la ordenada al origen, que es el valor de $y$ cuando $x = 0$.

Esto lo observamos en la siguiente figura:



De esta figura calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} = \frac{-b}{a}$$

Ahora sustituimos el valor de la pendiente y el punto $P_1$ en la forma punto- pendiente:

$$y - b = \frac{-b}{a}(x - 0) \qquad y - b = \frac{-bx}{a}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por $a$ para quitarla del denominador del lado derecho:

$$a(y - b) = \frac{-bx}{\cancel{a}}(\cancel{a}) \qquad ay - ab = -bx$$

Y pasando $-bx$ al lado izquierdo y $ab$ a la derecha: $ay + bx = ab$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre $ab$: $\frac{a\cancel{y}}{a\cancel{b}} + \frac{b\cancel{x}}{a\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}}{a\cancel{b}}$

Resulta $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$, lo que es lo mismo $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, que es la forma simétrica de la recta.

**Ejemplos**

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $y = 3x - 6$

**Solución**

Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de $y = 0$

$0 = 3x - 6 \quad 6 = 3x \quad \frac{6}{3} = x \quad x = 2 \quad a = 2$

Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de $x = 0$

$y = 3(0) - 6 \quad y = 0 - 6 \quad y = -6 \quad b = -6$

Se sustituyen estos valores en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$

## Ejemplo 13

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $8x - 2y - 16 = 0$

**Solución**

Se pasa primero a la forma $y = mx + b \qquad -2y = -8x + 16 \qquad y = \frac{-8x + 16}{-2} \qquad y = 4x - 8$

Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de $y = 0$

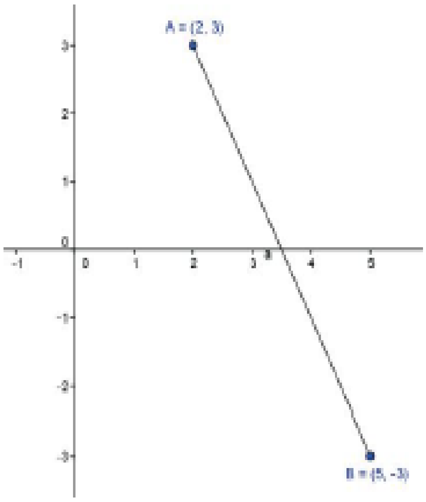
$0 = 4x - 8 \quad 4x = 8 \quad \frac{8}{4} = x \quad x = 2 \quad a = 2$

Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de $x = 0$

$y = 4(0) - 8 \quad y = 0 - 8 \quad y = -8 \quad b = -8$

## Ejemplo 14

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados en la gráfica.




**Solución**

Se calcula la pendiente: $m = \frac{-3 - 3}{5 - 2} = \frac{-6}{3}$ $m = -2$

Se sustituye esta valor junto con las coordenadas del punto 1:

$y - 3 = -2(x - 2)$ $y - 3 = -2x + 4$ $y = -2x + 4 + 3$ $y = -2x + 7$

Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de $y = 0$

$0 = -2x + 7$ $2x = 7$ $\frac{7}{2} = x$ $x = 3.5$ $a = 3.5$

Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de $x = 0$

$y = -2(0) + 7$ $y = 0 + 7$ $y = 7$ $b = 7$

Se sustituyen estos valores en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\frac{x}{3.5} + \frac{y}{7} = 1$

## 2.8 Ecuación general de la recta

La ecuación cuya forma es $Ax + By + C = 0$ se llama forma general de la recta, donde A, B y C son números reales, y los valores de A y B no pueden ser cero.

**Ejemplo 15**

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,2) y tiene una pendiente de -0.5

**Solución**

Se sustituyen el valor de la pendiente y el punto en la ecuación de la forma punto pendiente:

$y - 2 = -0.5[x - (-3)]$

$y - 2 = -0.5(x + 3)$

$y - 2 = -0.5x - 1.5$

Se pasan todos los términos del lado izquierdo para que quede el valor de x positivo:

$y - 2 + 0.5x + 1.5 = 0$

$0.5x + y - 0.5 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

**Ejemplo 16**

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-4,-4) y B(1,6).

**Solución**

Se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{-4 - 6}{-4 - 1} = \frac{-10}{-5}$ $m = 2$

Se sustituyen las coordenadas del punto A y el valor de la pendiente en la ecuación de la forma punto pendiente:

$y - (-4) = 2[x - (-4)]$

$y + 4 = 2(x + 4)$

$y + 4 = 2x + 8$

Se pasan todos los términos del lado derecho para que quede el valor de $x$ positivo:

$2x + 8 - y - 4 = 0$

$2x - y + 4 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

**Ejemplo 17**

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

**Solución**

Se calcula el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores 3 y 4; mcm = 12

Se multiplican ambos miembros de la ecuación original por el mcm:

$$12\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) = 1(12) \qquad \frac{12x}{3} + \frac{12y}{4} = 12 \qquad 4x + 3y = 12$$

$4x + 3y - 12 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

## Determinación de la pendiente y la ordenada al origen a partir de la ecuación general

Despejamos la variable $y$ de la ecuación general de la recta, cuya forma es $Ax + By + C = 0$, siendo $A$ y $B$ diferentes de cero:

$$By = -Ax - C \qquad y = \frac{-Ax - C}{B} \qquad y = \frac{-Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

Esta es la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada al origen:

$y = mx + b$, por lo que:

**Ejemplo 18**

Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x - 4y - 6 = 0$

**Solución**

Se identifican los valores de A, B y C de la forma general:

$A = 3$, $B = -4$ y $C = -6$

Se sustituyen en los valores de $m$ y $b$:

$m = \frac{-3}{-4}$ $\quad b = \frac{-6}{-4}$ Simplificando términos y signos resulta:

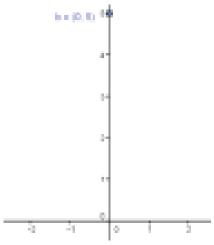
La pendiente es $m = \frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es $b = \frac{3}{2}$

## 2.9 Algoritmo para trazar la gráfica de una recta a partir de su pendiente y ordenada al origen.

Para trazar la gráfica de una función lineal, se utilizan los parámetros *b* y *m* de la ecuación *y* = *mx* + *b*, mediante el siguiente algoritmo:

**Ejemplo 10.**

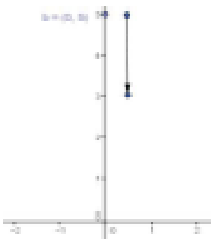
Paso 1 Se identifican la pendiente (-2) y la ordenada al origen (5).



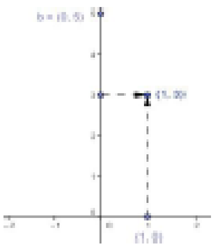
Paso 2 Se ubica en un plano cartesiano la intersección con el eje *y* (5), con coordenadas (0,5). La pendiente se define como:

$$m = \frac{\text{cambio vertical (elevación)}}{\text{cambio horizontal (recorrido o desplazamiento)}} = \frac{-2}{1}$$

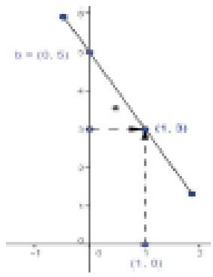
por lo que en este ejemplo la pendiente baja 2 unidades en *y* cada que *x* se desplaza una unidad.



Paso 3 Como el cambio vertical fue -2, nos desplazamos 2 unidades hacia abajo, con lo que llegamos al punto (0,3).



Paso 4 A partir del punto (0,3) nos desplazamos un lugar a la derecha, ya que el desplazamiento horizontal fue de 1. Con este desplazamiento llegamos al punto (1,3).

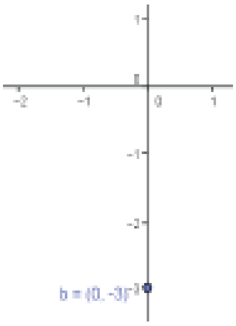


Paso 5 Se unen los puntos formados por la ordenada al origen (0,5) y el desplazamiento (1,3), con lo cual se forma la recta que pertenece a la ecuación *y* = -2*x* + 5.

## Ejemplo 11

Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = \frac{4}{3}x - 3$

**Solución**

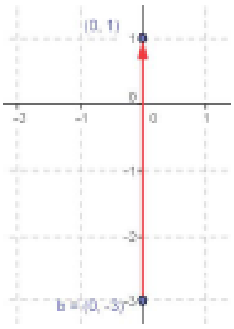



**Paso 1** Se identifican la pendiente $\left(\frac{4}{3}\right)$ y la ordenada al origen (-3).

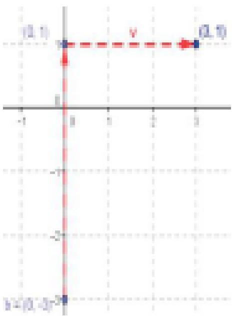
**Paso 2** Se ubica en un plano cartesiano la intersección con el eje *y* (-3), con coordenadas (0,-3). La pendiente se define como:

$$m = \frac{\text{cambio vertical (elevación)}}{\text{cambio horizontal (recorrido o desplazamiento)}} = \frac{4}{3}$$

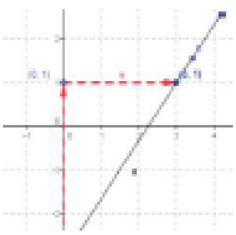
por lo que en este ejemplo la pendiente sube 4 unidades en *y* cada que *x* se desplaza tres unidades.




**Paso 3** Como el cambio vertical fue 4, nos desplazamos 4 unidades hacia arriba, con lo que llegamos al punto (0,1).



**Paso 4** A partir del punto (0,1) nos desplazamos tres lugares a la derecha, ya que el desplazamiento horizontal fue de 3. Con este desplazamiento llegamos al punto (3,1).



**Paso 5** Se unen los puntos formados por la ordenada al origen (0,-3) y el desplazamiento (3,1), con lo que se forma la recta que pertenece a la ecuación $y = \frac{4}{3}x - 3$.

## Unidad III. Las cónicas

La primera definición conocida de sección cónica surge en la Antigua Grecia, cerca del año 340 a. C., (Menecmo) donde fueron definidas como secciones «de un cono circular recto».[1] Los nombres de hipérbola, parábola y elipse se deben a Apolonio de Perge.

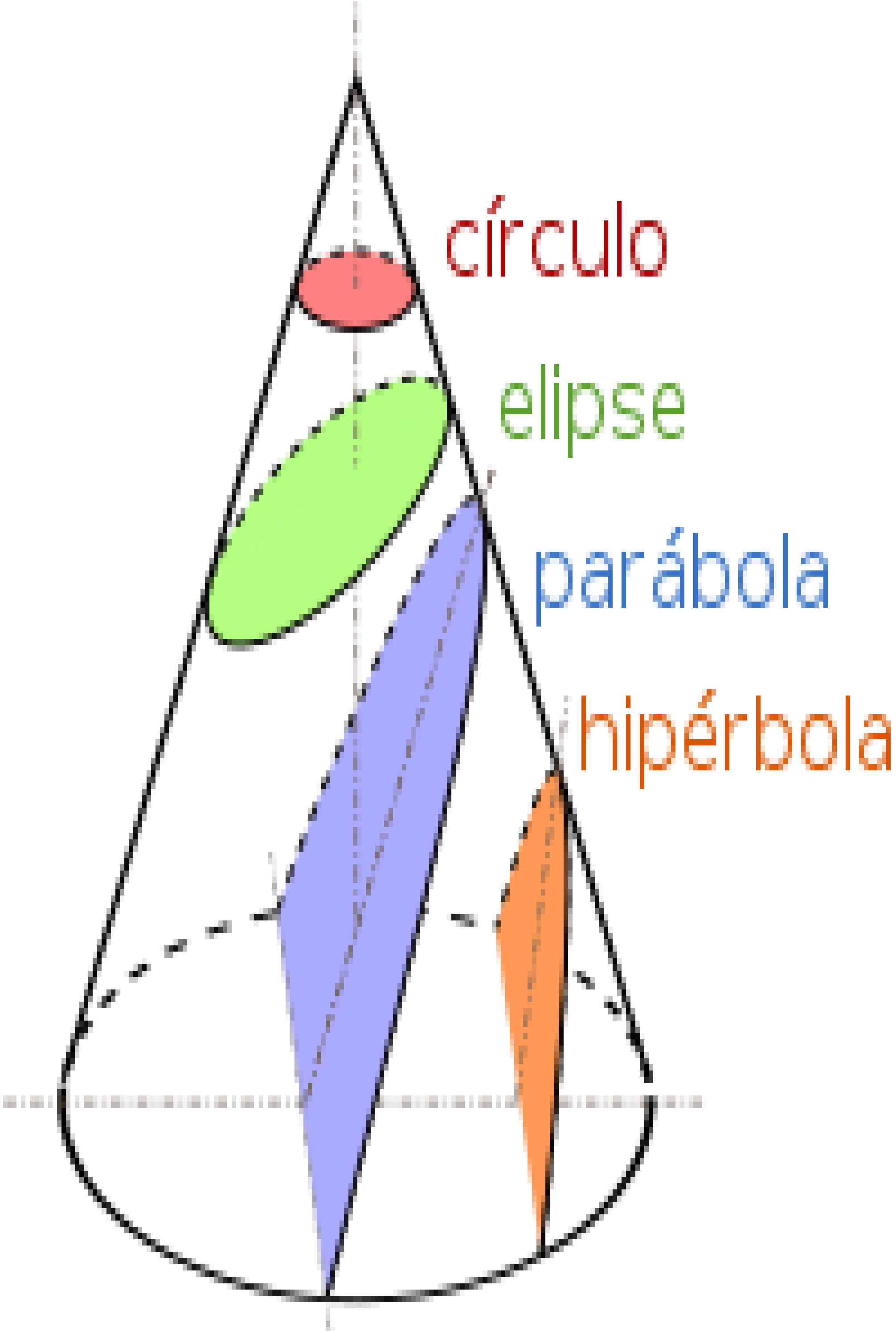
Actualmente, las secciones cónicas pueden definirse de varias maneras; estas definiciones provienen de las diversas ramas de la matemática como la geometría analítica, la geometría proyectiva, etc.

En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad (α) y la inclinación del plano respecto del eje del cono (β), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas, a saber:

- $\beta < \alpha$ : Hipérbola (naranja)
- $\beta = \alpha$ : Parábola (azul)
- $\beta > \alpha$ : Elipse (verde)
- $\beta = 90°$: Circunferencia (un caso particular de elipse) (rojo)
- $\beta = 180°$ : Triangular

Si el plano pasa por el vértice del cono, se puede comprobar que:

- Cuando $\beta > \alpha$ la intersección es un único punto (el vértice).
- Cuando $\beta = \alpha$ la intersección es una recta generatriz del cono (el plano será tangente al cono).
- Cuando $\beta < \alpha$ la intersección vendrá dada por dos rectas que se cortan en el vértice.
- Cuando $\beta = 90°$, el ángulo formado por las rectas irá aumentando a medida β disminuye, cuando el plano contenga al eje del cono ($\beta = 0$).


círculo
elipse
parábola
hipérbola

## 3.1. Secciones cónicas

**En geometría analítica, las secciones cónicas (o simplemente cónicas) son todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano, cuando ese plano no pasa por el vértice del cono. Existen cuatro tipos de secciones cónicas: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.**

A continuación tienes representadas gráficamente las 4 secciones posibles que se pueden obtener a partir de cualquier cono:

### Tipos de secciones cónicas

Una vez visto el concepto de sección cónica, veamos cuáles son los cuatro tipos de secciones cónicas que existen: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

### La circunferencia

La circunferencia es una sección cónica que se puede hallar cortando un cono con un plano perpendicular a su eje de revolución (paralelo a la base).

También, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

### Elipse

La elipse es una línea curva, cerrada y plana muy parecida a la circunferencia, pero su forma es más ovalada. En particular, es el resultado de cortar la superficie de un cono con un plano oblicuo cuyo ángulo respecto al eje de revolución es mayor que el de la generatriz.

Además, todos los puntos de una elipse cumplen con una condición: la elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos (llamados focos F y F') es constante.

## Parábola

En matemáticas, una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (llamado foco) y de una recta fija (denominada directriz).

Geométricamente, la parábola es el resultado de cortar un cono con un plano con un ángulo de inclinación respecto al eje de revolución equivalente al ángulo de la generatriz del cono. Por lo tanto, el plano que contiene la parábola es paralelo a la generatriz del cono.

Un rasgo muy importante de esta sección cónica es la ecuación de la parábola, ya que según cómo sea esta permite identificar qué tipo de parábola se trata. En este enlace hallarás todas las ecuaciones de la parábola, cuáles son los elementos de la parábola, sus propiedades, ejemplos, ejercicios resueltos,… entre otras características de las parábolas.

## Hipérbola

Como sección cónica, se consigue una hipérbola cuando se corta un cono mediante un plano con un ángulo menor que el ángulo que forma la generatriz del cono respecto a su eje de revolución.

Matemáticamente, una hipérbola se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen la siguiente propiedad: el valor absoluto de la diferencia de las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola hasta dos puntos fijos (llamados focos) debe ser constante.

Además, el valor de la resta de esas dos distancias siempre es equivalente a la distancia entre los dos vértices de la hipérbola.

## 3.2 Circunferencia

En el bloque anterior estudiamos las distintas formas de expresar la ecuación de una recta, cómo calcular la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas paralelas.

En este bloque aprenderás a:

- Identificar y distinguir los diferentes tipos de rectas y segmentos asociados con la circunferencia.
- Reconocer los tipos de ecuaciones de la circunferencia y las transformaciones de una forma a otra.
- Aplicar los elementos y las ecuaciones de la circunferencia en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

La circunferencia es un elemento geométrico de mucha importancia. Está presente en todas partes, gracias a ella se pueden realizar muchas técnicas de gran precisión en una diversidad de productos.

Muchos objetos que utilizamos frecuentemente utilizan la circunferencia de manera precisa para su buen funcionamiento, por ejemplo, un reloj, una llanta, una moneda; todos estos objetos se fabrican utilizando adecuadamente las medidas del radio y del diámetro, pues una falla haría que no quedaran bien. Las partes deben estar perfectamente divididas y las medidas tienen que ser exactas, ya que si existe alguna falla, por muy pequeña que sea, la circunferencia no será perfecta y estos objetos no servirían para lo que se utilizan.

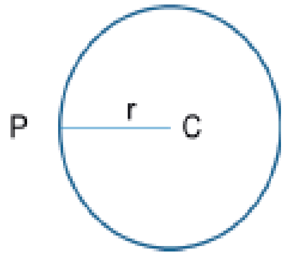
En muchos aspectos de la vida se puede observar la presencia de la circunferencia, por ejemplo, en las ruedas de varios tipos de transporte como la bicicleta.

La bicicleta es un ejemplo claro de lo que estudiarás en este bloque. Está formada por unos tubos que sostienen sus dos ruedas, ahí se aplican varios conceptos de geometría. Cada rueda (arco) está perfectamente formada desde un centro del cual salen los rayos (radios de la circunferencia). Al medir exactamente lo mismo forman el aro de la circunferencia, que es el diámetro. Conoceremos ahora cada uno de estos elementos.

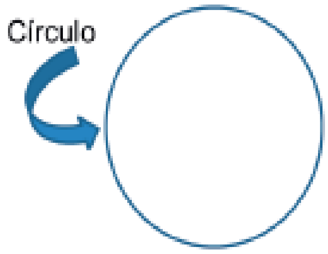
Conforme a la Real Academia de la Lengua Española, la circunferencia es: U*na curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, el centro, situado en el mismo plano.*

## 3.3. Elementos de la circunferencia

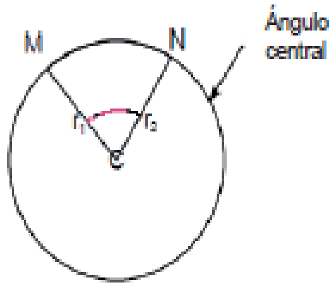
Se denomina *radio* a cualquier segmento que une el centro, con un punto P de la circunferencia; así en la siguiente figura se muestra una circunferencia de centro C y radio r = CP



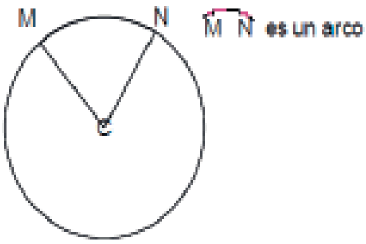

El *círculo* es la superficie limitada por la circunferencia:



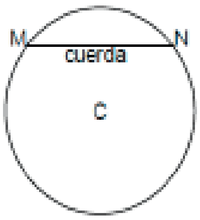

El *ángulo central* es el ángulo formado por dos radios.



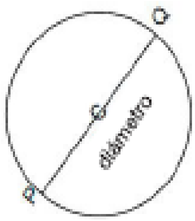

Un arco es una porción de circunferencia, cuya representación es con el símbolo ⌒



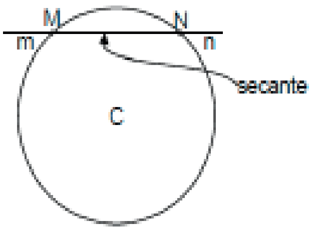

Una *cuerda* es el segmento que une a dos puntos de la circunferencia.



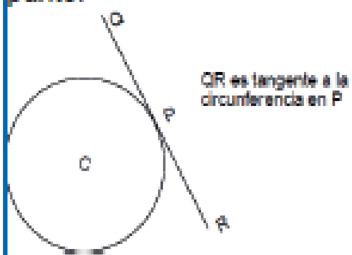

El diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, cuya longitud es el doble de la longitud del radio.



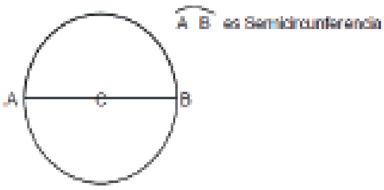

La *secante* de una circunferencia es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.



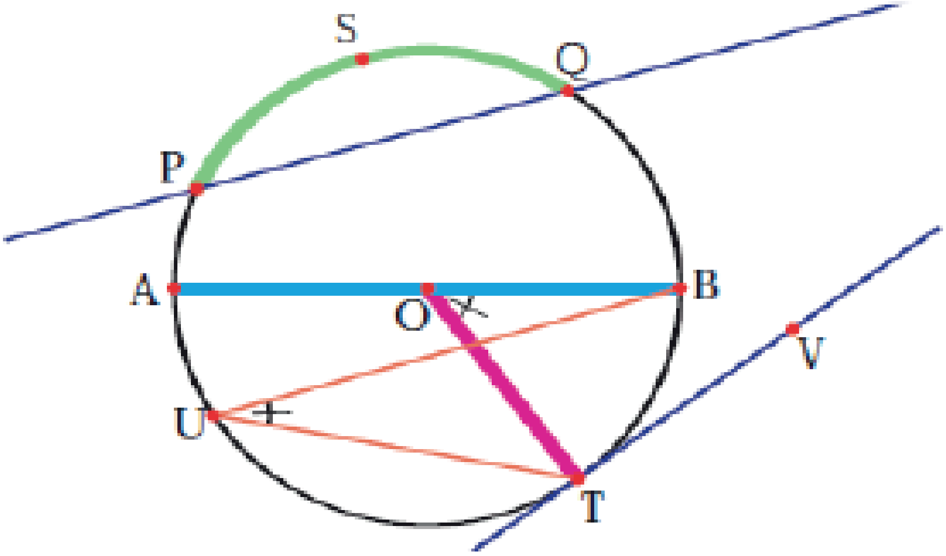

La *tangente* a una circunferencia es cualquier recta que toca la circunferencia en un solo punto.




La *semicircunferencia* es un arco igual a la mitad de la circunferencia.



4. Identifica los elementos que componen la circunferencia, siempre haciendo referencia a las variables.




5. Relaciona ambas columnas con los conceptos acerca de los elementos de la circunferencia, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

| | |
|---|---|
| a) Semicircunferencia | ( ) Es cualquier segmento que une el centro con un punto P de la circunferencia. |
| b) Arco | ( ) Es la superficie limitada por la circunferencia. |
| c) Diámetro | ( ) El ángulo formado por dos radios. |
| d) Ángulo central | ( ) Es una porción de circunferencia, cuya representación es con el símbolo ⌒ |
| e) Círculo | ( ) Es el segmento que uno a dos puntos de la circunferencia. |
| f) Cuerda | ( ) Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, cuya longitud es el doble de la longitud del radio. |
| g) Radio | ( ) Es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos. |
| h) Secante | ( ) Es cualquier recta que toca la circunferencia en un solo punto. |
| i) Tangente | ( ) Es un arco igual a la mitad de la circunferencia. |

## 3.4 Ecuación ordinaria de la circunferencia

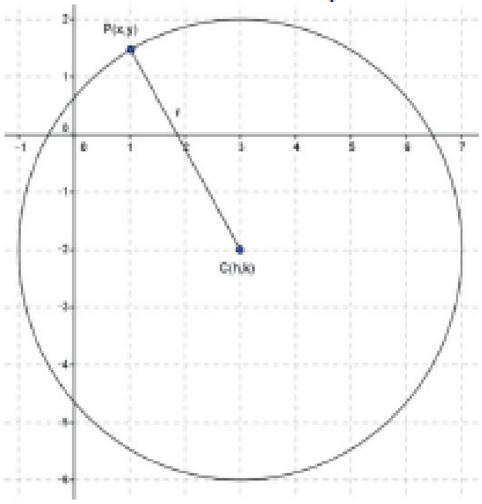
### Forma ordinaria

Una circunferencia cuyo centro está en el punto $C(h,k)$ y cuyo radio es $r$, tiene la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta ecuación se llama forma *ordinaria* o estándar de la circunferencia.

Recuerda que en el bloque II, cuando estudiaste la distancia entre dos puntos, ésta se definía como:




$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

Si observamos la siguiente figura:

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

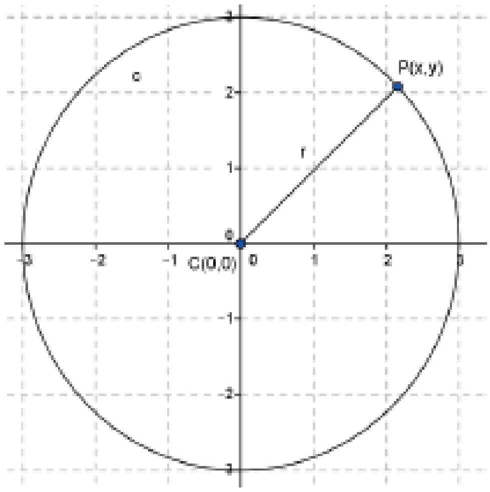
$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

y reacomodando términos:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

### Forma canónica.

Si el centro de la circunferencia se ubica en el origen:




$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

Si observamos la siguiente figura:

$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$r^2 = (x)^2 + (y)^2$

y reacomodando términos:

$x^2 + y^2 = r^2$

Esta es la ecuación de la circunferencia en su *forma canónica*.

## 3.5. Análisis de la ecuación ordinaria de la circunferencia y la general.

Como recordarás, la extensión de una ecuación a los intervalos de valores para los que las variables *x* y *y* son números reales.

Para la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

La extensión de la variable *x* está en el intervalo $-r \leq x \leq r$

La extensión de la variable y está en el intervalo $-r \leq x \leq r$

Por ejemplo, para la ecuación $x^2 + y^2 = 16$

$r^2 = 16$ $\qquad r = \pm\sqrt{16}$ $\qquad r = \pm 4$

La extensión de la variable *x* está en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$

La extensión de la variable y está en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$

### Forma general

Si desarrollamos los binomios al cuadrado en la forma ordinaria de la circunferencia, tenemos:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$

y reduciendo términos semejantes, tomando los valores de *h* y *k* como números reales:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

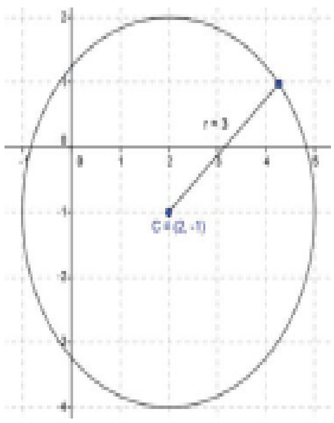
Esta ecuación es la *forma general* de la circunferencia.

Como habrás notado, en las tres formas de la circunferencia, los coeficientes numéricos de $x^2$ y $y^2$ siempre son 1.

## 3.6 Ejemplos

### Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la circunferencia de la siguiente figura:




**Solución**

Las coordenadas del centro indican que la circunferencia está fuera del origen, es decir, $C(h,k)$, por lo que está en la forma ordinaria $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Las condiciones que proporciona el problema son

$$C(2,-1) \text{ y } r = 3$$

Sustituimos los valores de $h = 2$, $k = -1$ y $r = 3$

$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = (3)^2$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ *Forma ordinaria*

Se desarrollan los binomios y se simplifican términos semejantes:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$

Se pasa todo al lado izquierdo:

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 + 1 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ *Forma general*

## Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen y tiene un radio de 5.

**Solución**

Las condiciones que proporciona el problema son $C(0,0)$ y r = 5

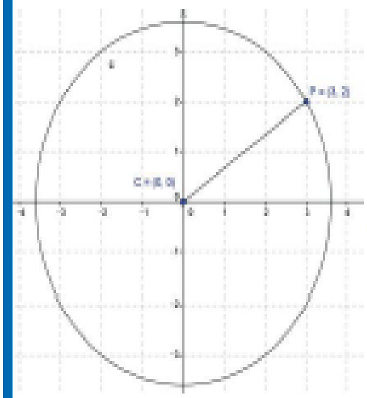
Sustituimos los valores de $h = 0$, $k = 0$ y $r = 5$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (5)^2$

$x^2 + y^2 = 25^2$ *Forma canónica*

## Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la circunferencia que presenta las siguientes condiciones:



**Solución**

Las coordenadas del centro indican que la circunferencia está en el origen, por lo que está en la forma canónica

$x^2 + y^2 = r^2$

Se sustituyen los valores del punto $P(3,2)$ en esta ecuación para determinar el valor del radio:

$(3)^2 + (2)^2 = r^2$ $9 + 4 = r^2$ $r = \sqrt{13}$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación es:

$x^2 + y^2 = 13$ *Forma general*

## Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(-2,1)$ cuyo centro está en $C(-3,-2)$.

**Solución**

La circunferencia está fuera del origen, por lo que utilizaremos la forma ordinaria. La longitud del radio es la distancia que existe entre el punto $P$ y el centro. Se sustituyen los valores del centro $C(-3,-2)$ y del punto $(-2,1)$ en esta ecuación para determinar el valor del radio:

$(x-(-3))^2+(y-(-2))^2=r^2 \qquad (x+3)^2+(y+2)^2=r^2 \qquad (-2+3)^2+(1+2)^2=r^2$

$(-1)^2+(3)^2=r^2 \qquad 1+9=r^2 \qquad 10=r^2 \qquad r=\sqrt{10}$

Con el valor del radio $r=\sqrt{10}$ y las coordenadas del centro, se sustituyen en

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-(-3))^2+(y-(-2))^2=(\sqrt{10})^2 \qquad (x+3)^2+(y+2)^2=10$ Forma ordinaria

Se desarrollan los binomios y se simplifican términos semejantes

$x^2+6x+9+y^2+4y+4=10$

Se pasa todo al lado izquierdo:

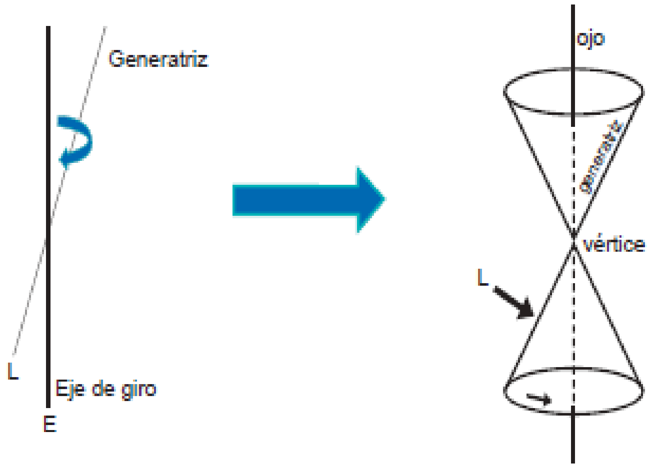
$x^2+y^2+6x+4y+9+4-10=0$

$x^2+y^2+6x+2y+13=0$ *Forma general*

# 3.7. Condiciones que debe existir para que se formen las cónicas.

## Secciones cónicas

El término cónica se deriva de la palabra *cono*, que en geometría es una figura que puede formarse a partir de una recta que se hace girar con respecto a un eje, como se muestra en la siguiente figura:




El cono circular recto doble es una superficie que se obtiene al girar la generatriz (recta generadora L) alrededor de otra recta o eje (E), manteniendo siempre el mismo ángulo de giro entre ambas rectas.

Las cónicas, o también llamadas secciones cónicas, son curvas que se forman cuando un cono doble circular recto se intersecta con un plano. Son lugares geométricos donde es constante un conjunto de todos los puntos en el plano cuya razón de distancia no dirigida a un punto y una recta fijos.

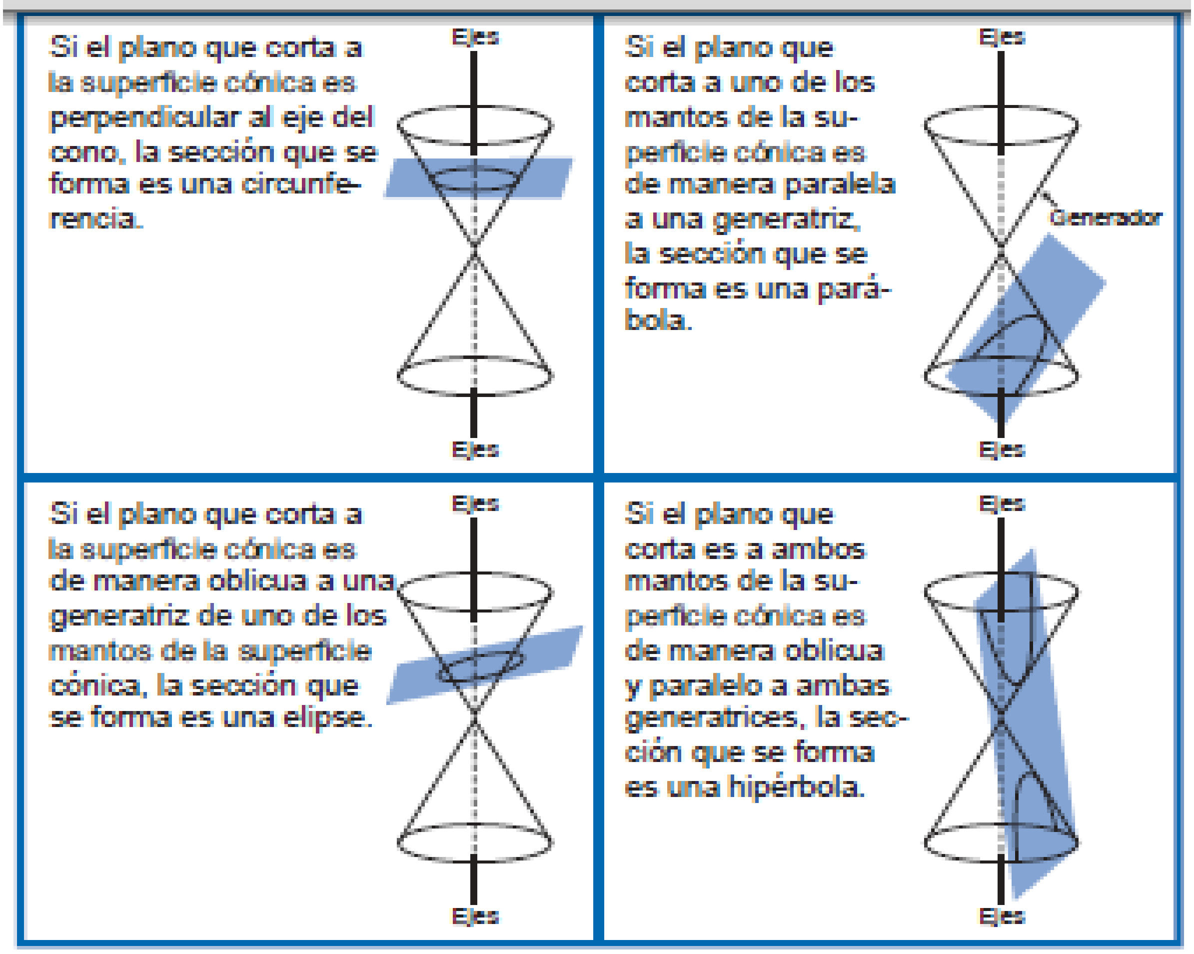
Dicha razón constante se llama excentricidad de la cónica, que se simboliza con la letra *e*. El punto fijo se llama eje de la cónica y la recta fija se llama directriz.

Si la directriz:

- $e = 1$, la cónica es una parábola
- $e < 1$, la cónica es una elipse
- $e > 1$, la cónica es una hipérbola

La recta perpendicular a la directriz que pasa por un foco de la cónica se llama eje de la cónica.

Los puntos de intersección de las dos partes del manto con el eje de la misma se denominan vértices.


Si el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje del cono, la sección que se forma es una circunferencia.
Ejes
Ejes
Si el plano que corta a uno de los mantos de la superficie cónica es de manera paralela a una generatriz, la sección que se forma es una parábola.
Ejes
Generador
Ejes
Si el plano que corta a la superficie cónica es de manera oblicua a una generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica, la sección que se forma es una elipse.
Ejes
Ejes
Si el plano que corta es a ambos mantos de la superficie cónica es de manera oblicua y paralelo a ambas generatrices, la sección que se forma es una hipérbola.
Ejes
Ejes

3. Condiciones que deben existir para que se formen las cónicas:

| Circunferencia | Parábola | Elipse | Hipérbola |
|---|---|---|---|
| Cuando el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje del cono. | Cuando el plano que corta de manera oblicua a uno de los mantos de la superficie cónica es paralelo a una generatriz. | Cuando el plano corta de manera oblicua cada generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica. | Cuando el plano corta de manera oblicua ambos mantos de la superficie cónica y es paralelo a ambas generatrices. |

### 3.8. Aplicaciones de las cuatro cónicas en la vida cotidiana

Una aplicación importante de la elipse es el descubrimiento de Kepler (1571-1630) uno de los hombres más extraños en la historia de la ciencia, le debemos el descubrimiento de las tres leyes planetarias que llevan su nombre. Las encontró después de años de búsquedas inútiles que lo llevaron primero a las leyes de la armonía musical, que él creyó que gobernaban el movimiento de los planetas (de donde viene la frase "la música de las esferas).

Resumiendo se tiene a continuación las diferentes aplicaciones que las secciones cónicas tienen en la vida real:

Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica (forman la envolvente de una parábola). Se creía hace tiempo que las cuerdas o cadenas que se suspenden agarradas únicamente por sus extremos también formaban parábolas (hoy sabemos que la curva que describen es un coseno hiperbólico).

Las trayectorias de los proyectiles tienen forma parabólica. Los chorros de agua que salen de un surtidor tienen también forma parabólica. Si salen varios chorros de un mismo punto a la misma velocidad inicial pero diferentes inclinaciones, la envolvente de esta familia de parábolas es otra parábola (llamada en balística parábola de seguridad, pues por encima de ella no es posible que pase ningún punto de las parábolas de la familia).

La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas. En los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en la lámpara, salen formando rayos paralelos. La nave espacial PLUTO de la NASA incorpora también un reflector parabólico. Recordar también el conocido efecto de quemar una hoja de papel concentrando los rayos solares mediante un espejo parabólico.

Un telescopio de espejo líquido es un telescopio reflectante (es decir, que usa la propiedad reflectante de la parábola) cuyo espejo principal está hecho de mercurio líquido. Un famoso ejemplo lo constituye el telescopio HUBBLE situado en el espacio exterior. El problema es cómo puede un líquido formar un espejo parabólico y por qué se quiere así. La respuesta es que si se tiene un contenedor giratorio de líquido, la superficie del mismo formaría un paraboloide perfecto, incluso si la superficie interior del contenedor tiene imperfecciones.

Las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas (el sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167. La de mayor excentricidad es la órbita de Plutón, 0,2481, que incluso es pequeña. Los cometas y los satélites también describen órbitas elípticas. En el extremo contrario está el cometa HALLEY cuya excentricidad es de 0,9675, muy pr´oxima a 1.

En el famoso Taj mahal, construido en el siglo XVII (1630-1652) en la India por el emperador Sah Yahan en honor de su esposa Mumtaz-i mahall, uno de los máximos logros de la arquitectura mogol, tiene una galería de los suspiros en donde anteriormente a la pareja en luna de miel se le colocaba en los respectivos focos, de tal forma que el novio murmuraba la frase: ***A la memoria de mi amada inmortal,*** la cual era solamente escuchada por su novia situada a una distancia de algo más de 15 m.

APOLO XIII. El 11 de Abril de 1970 el cohete Saturno V impulsó desde Cabo Kennedy a la nave espacial Apolo XIII en su misión hacia la Luna. Alrededor de 56 horas después el tanque de oxígeno número 2 del módulo de servicio explotó, causando una sucesión de daños mecánicos y eléctricos, forzando el final adelantado de la misión. Cuando la explosión tuvo lugar, los astronautas James Lovell, John Swigert y Fred Haise estaban a 200.000 millas de la Tierra. Se necesitaba entonces organizar un plan para devolverlos sanos y salvos a casa.

## Unidad IV: La parábola y la elipse

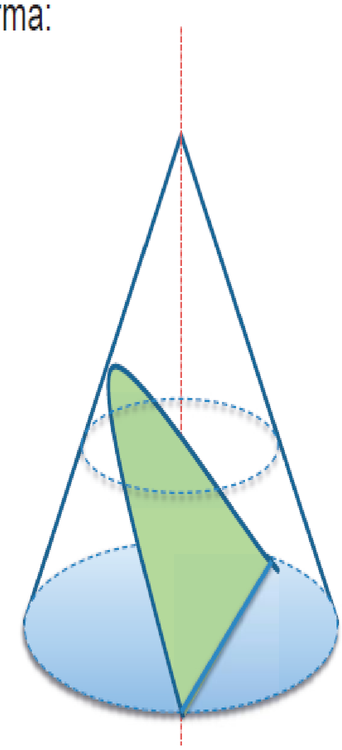
### 4.1. Parábola

Una **parábola** es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la parábola.

Lugar Geométrico significa "la figura que se forma con todos los puntos del plano que cumplen con la(s) condición(es) dada (s), o sea, la gráfica que se forma con los puntos que se definen al hablar del lugar Geométrico.

En el bloque anterior analizamos las secciones cónicas, que son curvas que se forman cuando un cono circular recto se intersecta con un plano, obteniendo con ello tres curvas, además de la circunferencia. Una de estas curvas es la parábola.

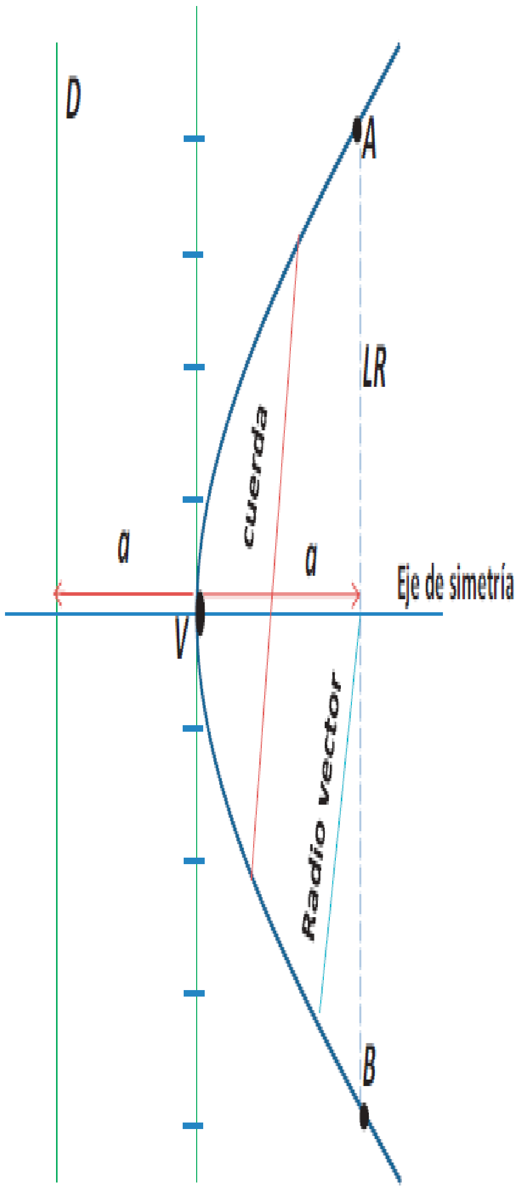
El corte es de la siguiente forma:



## 4.2 Elementos de la parábola

Elementos de la parábola:

- $V$ = vértice, punto de intersección entre la parábola y el eje principal.
- $F$ = foco, un punto fijo.
- $D$ = directriz.
- $a$ = parámetro, distancia entre el vértice y el foco o del vértice a la directriz.
- $AB = LR$ = lado recto = $|4a|$, la distancia que existe entre dos puntos simétricos de la parábola.
- Eje de la parábola o de simetría, recta que pasa por el vértice y el foco.
- Radio vector, recta del eje de la pará-bola a uno de sus puntos
- Cuerda, segmento de recta que une dos puntos de la de la parábola



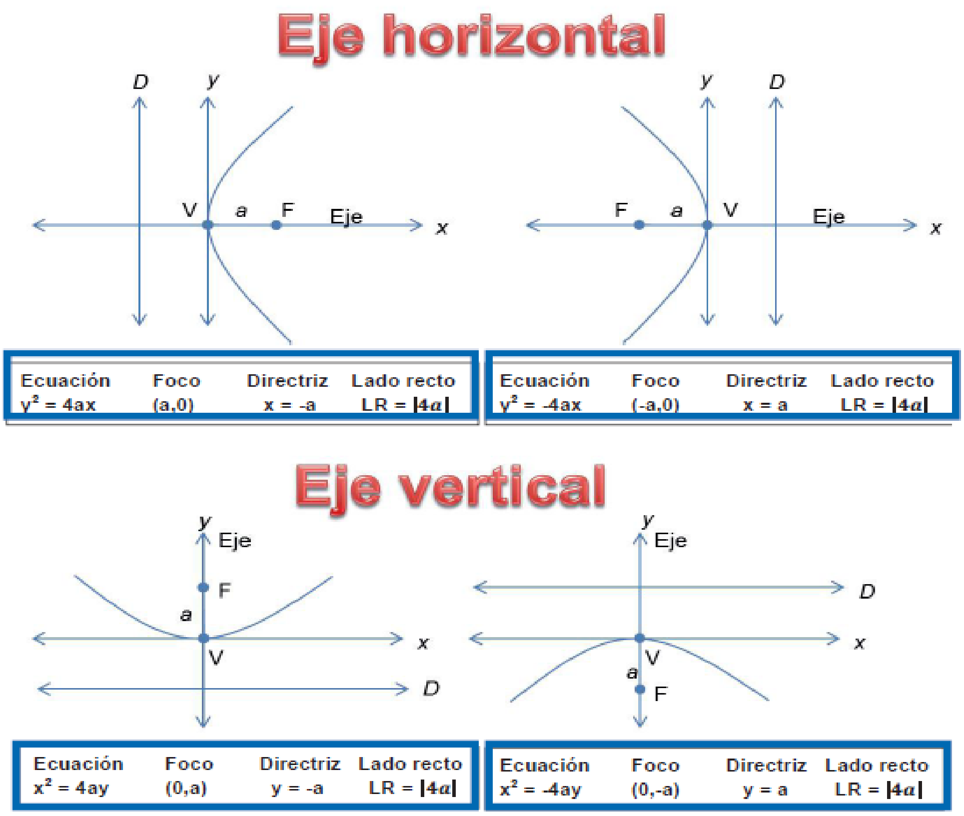
Hay dos características importantes de la parábola:

- La posición del eje determina la posición de la parábola; entonces, se generan parábolas horizontales, verticales o inclinadas.
- La parábola siempre es simétrica con respecto a su propio eje.

En la figura anterior, podemos describir la parábola como sigue:

- Pasa por el vértice y abre hacia el foco.
- Tiene la misma distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz, es decir, el mismo parámetro (*a*).
- El ancho focal o lado recto a la cuerda que pasa exactamente en el foco, que es perpendicular al eje de simetría y paralela a la directriz.
- Las coordenadas del vértice son V(0,0)

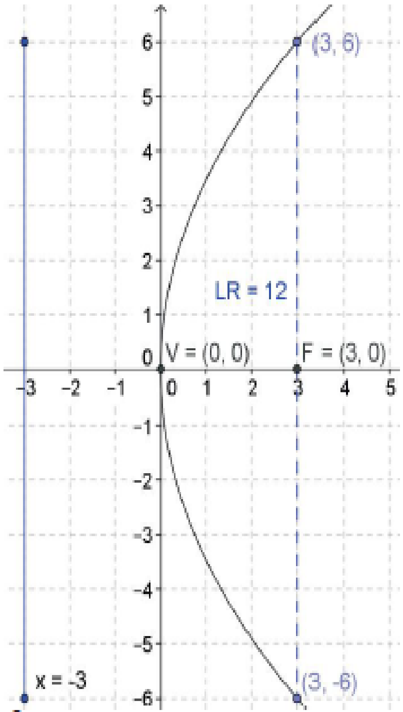
## Ecuación de una parábola con vértice en el origen



## 4.3. Ecuación ordinaria de la parábola

**Ejemplo 1**

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(3,0)$




**Solución**

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la derecha con foco $F(a,0)$ y tiene la forma:

| Ecuación | Foco | Directriz |
|---|---|---|
| $y^2 = 4ax$ | $(a,0)$ | $x = -a$ |

a) El parámetro $a = 3$

b) Su ecuación $y^2 = 4(3)x \qquad y^2 = 12x$

c) Su directriz está en $x = -(3) \qquad x = -3$

d) La longitud del lado recto $LR \qquad LR = |4(3)| \quad LR = 12$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = 3$

$y^2 = 4ax \qquad y^2 = 4(3)(3) \qquad y^2 = 36 \qquad y = \pm\sqrt{36} \qquad y = \pm 6$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (3,6) y (3,-6)

f) Su gráfica

## Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en F(0,-6)

**Solución**

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la abajo con foco $F(0,-a)$ y tiene la forma:

| Ecuación | Foco | Directriz |
|---|---|---|
| $x^2 = -4ay$ | $(0,-a)$ | $y = a$ |

a) El parámetro $a = 6$

b) Su ecuación $x^2 = -4(6)y$   $x^2 = -24y$

c) Su directriz está en $y = 6$   $y = 6$

d) La longitud del lado recto $LR$

$LR = |4(-6)|$   $LR = |-24|$   $LR = 24$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, y = 6

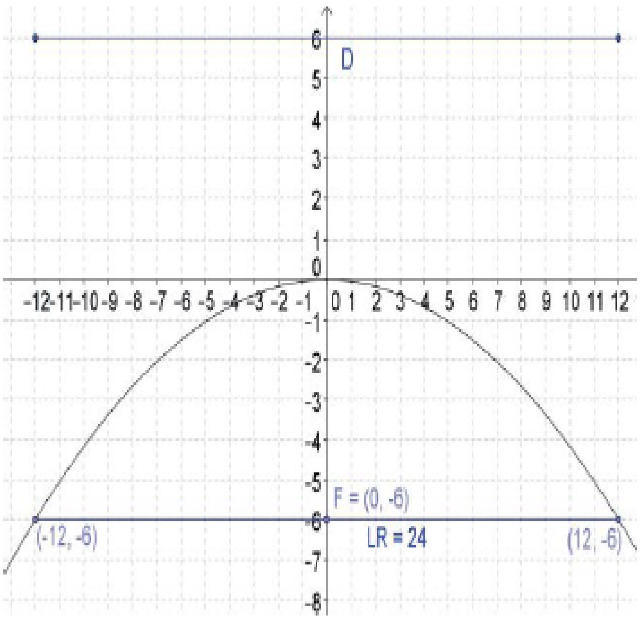
$x^2 = -4ay$   $x^2 = -4(-6)(6)$

$x^2 = 144$   $x = \pm\sqrt{144}$   $x = \pm 12$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son:

(12,-6) y (-12,-6)

f) Su gráfica



## Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuya longitud del lado recto es 8 y su gráfica abre hacia la izquierda.

**Solución**

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la izquierda:

| Ecuación | Foco | Directriz |
|---|---|---|
| $y^2 = -4ax$ | $(-a,0)$ | $x = a$ |

Como la longitud del lado recto $LR = |4a| = 8$

despejamos $a$ $\quad 8 = |4a| \quad a = \frac{8}{4} \quad a = 2$

a) El parámetro $a = 2$

b) Su ecuación $y^2 = -4(2)x \qquad y^2 = -8x$

c) Las coordenadas del foco son $F(-2,0)$

d) Su directriz está en $x = a \qquad x = 2$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

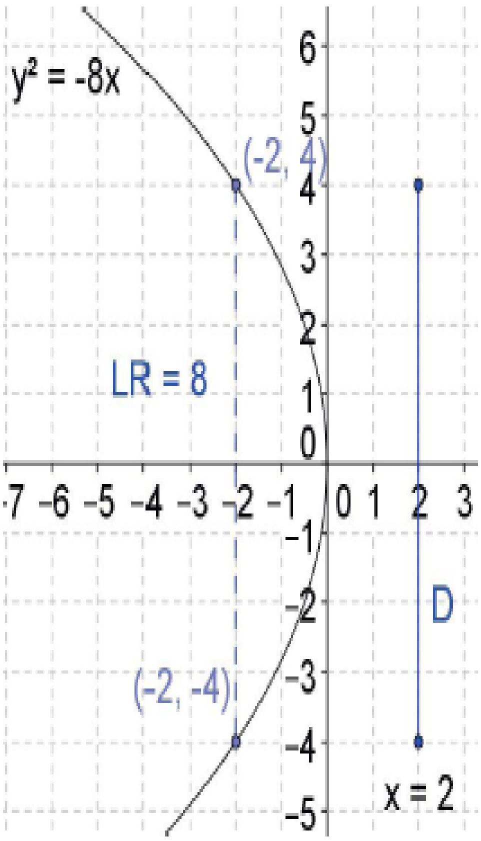
Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = -2$

$y^2 = -4ax \quad y^2 = -4(2)(-2)$

$y^2 = 16 \quad y = \pm\sqrt{16} \quad y = \pm 4$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (-2,4) y (-2,-4)

f) Su gráfica



## Ejemplo 4

Dada la ecuación de la parábola $x^2 = 20y$, calcula sus elementos.

**Solución**

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia arriba y tiene la forma:

| Ecuación | Foco | Directriz |
|---|---|---|
| $x^2 = 4ay$ | $(0,a)$ | $y = -a$ |

a) Su parámetro. Como la ecuación tiene la forma $x^2 = 4ay$, $4a = 20$.

Despejamos a: $a = \frac{20}{4} = 5$

El parámetro $a = 5$

b) Su foco está en $F(0,a)$ por lo que $F(0,5)$

c) Su directriz está en $y = -a$   $y = -5$

d) La longitud del lado recto

$LR = |4a|$   $LR = |4(5)|$   $LR = |20|$   $LR = 20$

## Ejemplo 4

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

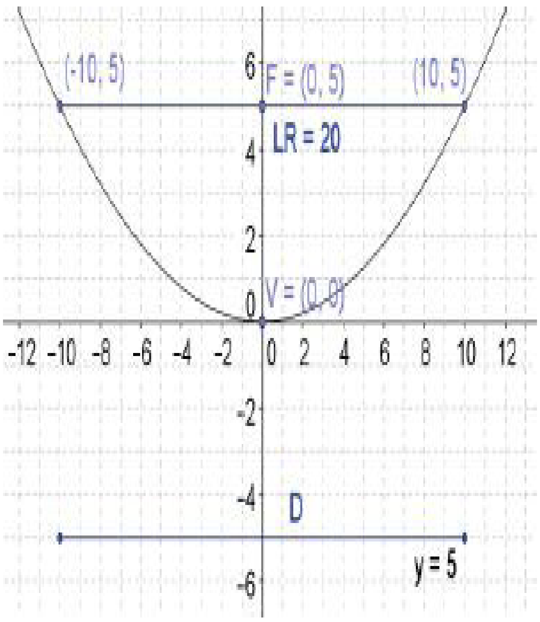
Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = 5$

$x^2 = 4ay$   $x^2 = 4(5)(5)$   $x^2 = 100$

$x = \pm\sqrt{100}$   $x = \pm 10$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (10,5) y (-10,5)

f) Su gráfica

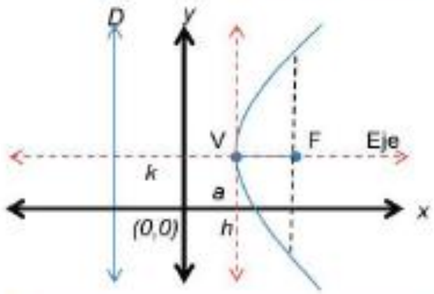


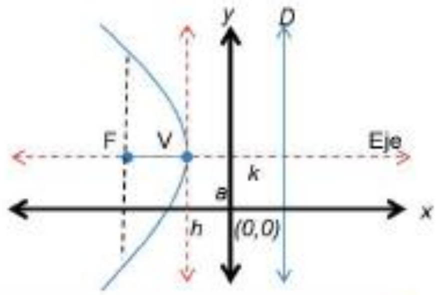
## 4.4. La parábola con vértice con vértice fuera del origen y eje focal a un eje coordenado

### Ecuación de una parábola con vértice fuera del origen

La ecuación de una parábola, ya sea horizontal o vertical, cuyo vértice está fuera del origen y que se encuentra en el punto $v(h,k)$, se obtiene reemplazando $x$ por $(x - h)$ y $y$ por $(y - k)$ en la ecuación básica de la parábola con vértice fuera del origen, al igual que se hizo con la circunferencia.

### Eje horizontal

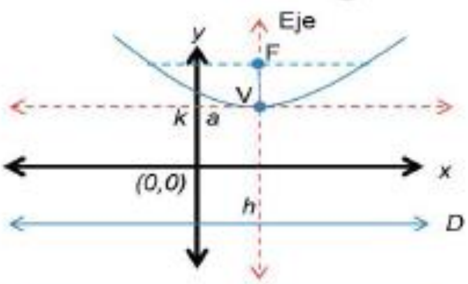


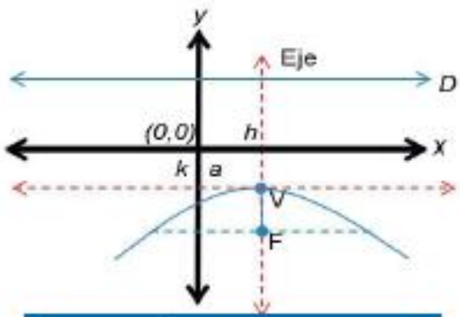




| Ecuación | Foco |
|---|---|
| $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ | $(h+a, k)$ |
| **Directriz** | **Lado recto** |
| $x = h - a$ | $LR = \lvert 4a \rvert$ |

| Ecuación | Foco |
|---|---|
| $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ | $(h+a, k)$ |
| Si $a$ es negativa | |
| **Directriz** | **Lado recto** |
| $x = h - a$ | $LR = \lvert 4a \rvert$ |

### Eje vertical




| Ecuación | Foco |
|---|---|
| $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ | $(h, k+a)$ |
| **Directriz** | **Lado recto** |
| $y = k - a$ | $LR = \lvert 4a \rvert$ |

| Ecuación | Foco |
|---|---|
| $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ | $(h, k+a)$ |
| **Directriz** | **Lado recto** |
| $y = k - a$ | $LR = \lvert 4a \rvert$ |

Por lo tanto, las ecuaciones de la parábola en su forma ordinaria con vértice fuera del origen son:

- $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ Si abre hacia la derecha o izquierda
- $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ Si abre hacia arriba o hacia abajo

Si desarrollamos, las ecuaciones de la parábola en su forma general con vértice fuera del origen son:

- $y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$ Si abre hacia la derecha o izquierda
- $x^2 \pm bx \pm cy \pm d = 0$ Si abre hacia arriba o abajo

Donde $b$, $c$ y $d$ son números reales.

## Ejemplo 5

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3, 2) y su foco en $F(5, 2)$

**Solución**

Como el foco está después del vértice, la parábola abre hacia la derecha, con condiciones:

| Ecuación | Foco | Directriz | Lado recto |
|---|---|---|---|
| $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ | $(h+a, k)$ | $x = h - a$ | $LR = \|4a\|$ |

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 5 - 3$ $\quad a = 2$

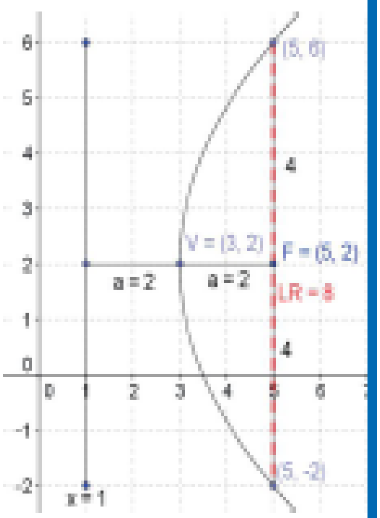
b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-2)^2 = 4(2)(x-3)$ $\quad (y-2)^2 = 8(x-3)$

c) Desarrollamos para la ecuación en forma general:
$y^2 - 4y + 4 = 8x - 24$ $\quad y^2 - 4y + 4 - 8x + 24 = 0$
Reduciendo términos: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a$ $\quad x = 3 - 2$ $\quad x = 1$

e) La longitud del lado recto $LR$ $\quad LR = |4(2)|$ $\quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos arriba de él y 4 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 4 a la ordenada del foco $k$, obteniendo $k + 4 = 2 + 4 = 6$ $k - 4 = 2 - 4 = -2$, por lo que las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (5,6) y (5,-2)




g) Su gráfica

**Ejemplo 6**

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (-2, -4) y su foco en $F$(-5, -4)

**Solución**

Como el foco está antes del vértice, la parábola abre hacia la izquierda, con condiciones:

| Ecuación | Foco | Directriz | Lado recto |
|---|---|---|---|
| $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ | $(h-a, k)$ | $x = h - a$ | $LR = \lvert 4a \rvert$ |

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = -5-(-2)$  $a = -5+2$  $a = -3$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-(-4))^2 = 4(-3)(x-(-2))$  $(y+4)^2 = -12(x+2)$

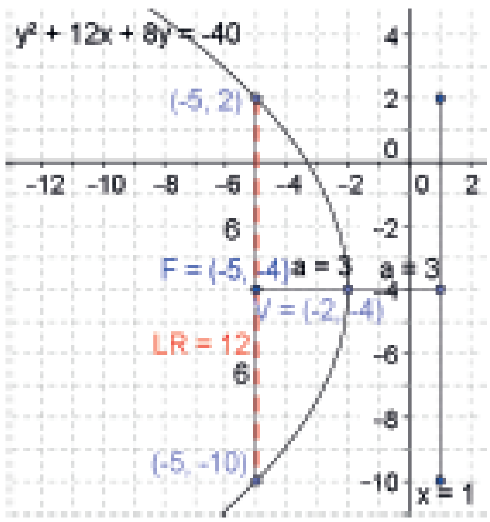
c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$y^2 + 8y + 16 = -12x - 24$  $y^2 + 8y + 16 + 12x + 24 = 0$
Reduciendo términos  $y^2 + 8y + 12x + 40 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a$  $x = -2-(-3)$  $x = 1$

e) La longitud del lado recto $LR$  $LR = \lvert 4(-3) \rvert$  $LR = 12$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 12, existen 6 puntos arriba de él y 6 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 6 a la ordenada del foco $k$,
obteniendo: $k + 6 = -4 + 6 = 2$
$k - 6 = -4 - 6 = -10$, por lo que las coordenadas son (-5, 2) y (-5, -10)

g) Su gráfica



## Ejemplo 7

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (5, 2) y su foco en F(5, 4)

**Solución**

Como el foco está arriba del vértice, la parábola abre hacia arriba, con condiciones:

| Ecuación | Foco | Directriz | Lado recto |
|---|---|---|---|
| $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ | $(h, k+a)$ | $y = k - a$ | $LR = \|4a\|$ |

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 4 - 2 \qquad a = 2$

b) Su ecuación en forma ordinaria:

$(x-5)^2 = 4(2)(y-2) \qquad (x-5)^2 = 8(y-2)$

c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:

$x^2 - 10x + 25 = 8y - 16 \qquad x^2 - 10x + 25 - 8y + 16 = 0$

Reduciendo términos : $\quad x^2 - 10x - 8y + 41 = 0$

d) Su directriz está en $y = k - a \qquad y = 2 - 2 \qquad y = 0$

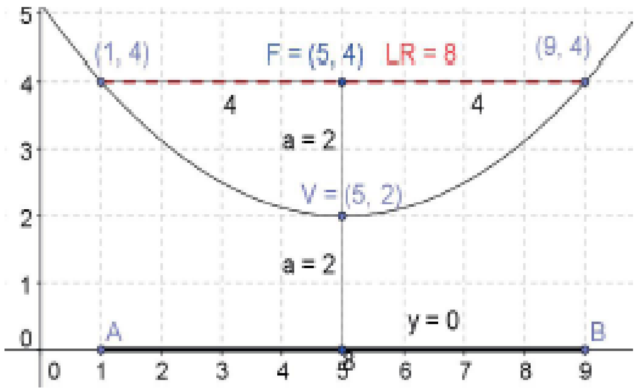
e) La longitud del lado recto $LR \qquad LR = |4(2)| \quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

Como el lado recto son 8, existen 4 puntos a la Izquierda y 4 puntos a la derecha de él, por lo que se suma y se resta 4 a la abscisa del foco h, obteniendo:

$h + 4 = 5 + 4 = 9$ y $h - 4 = 5 - 4 = 1$, las coordenadas son (1, 4) y (9, 4)

g) Su gráfica



## Ejemplo 8

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (4, 6) y su foco en $F(4, 1)$

**Solución**

Como el foco está abajo del vértice, la parábola abre hacia abajo, con condiciones:

| Ecuación | Foco | Directriz | Lado recto |
| --- | --- | --- | --- |
| $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ | $(h, k+a)$ | $y = k - a$ | $LR = \lvert 4a \rvert$ |

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 1 - 6$  $a = -5$

b) Su ecuación en forma ordinaria:

$(x-4)^2 = 4(-5)(y-6)$  $(x-4)^2 = -20(y-6)$

c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:

$x^2 - 8x + 16 = -20y + 120$  $x^2 - 8x + 16 + 20y - 120 = 0$

Reduciendo términos: $x^2 - 8x + 20y - 104 = 0$

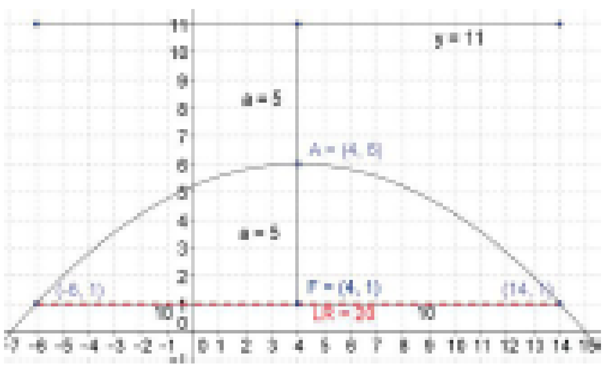
Su directriz está en $y = k - a$  $y = 6 - (-5)$  $y = 11$

e) La longitud del lado recto $LR = \lvert 4(-5) \rvert$  $LR = 20$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

Como el lado recto son 20, existen 10 puntos a la izquierda y 10 puntos a la derecha de él, por lo que se suma y se resta 10 a la abscisa del foco h, obteniendo: $h + 10 = 4 + 10 = 14$ y $h - 4 = 4 - 10 = -6$,
y las coordenadas son (-6, 1) y (14, 1)

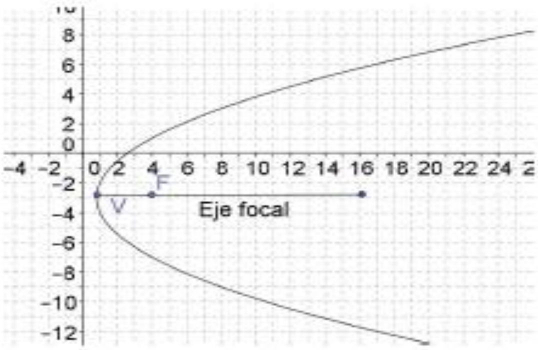
g) Su gráfica



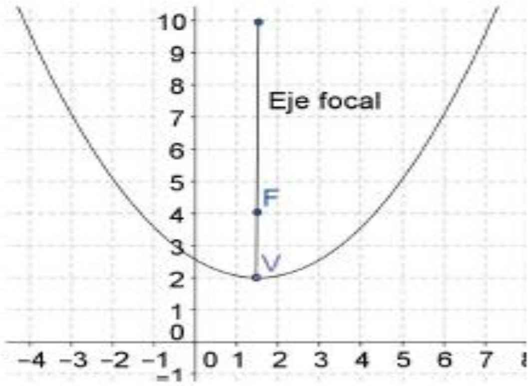
## 4.5. La ecuación general de la parábola

Revisemos las dos ecuaciones en su forma general considerando los ejes:

La ecuación general de la parábola se escribe de la forma $y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$ si su eje focal es paralelo al eje $x$, como se observa en la siguiente figura:




La ecuación general de la parábola se escribe de la forma $x^2 \pm bx \pm cy \pm d = 0$ si su eje focal es paralelo al eje $y$, como se observa en la siguiente figura:



Para transformar la ecuación de la parábola de su forma general a la forma ordinaria, hay que seguir el algoritmo:

1. Se separan los términos de *y* a la izquierda y los términos de *x* a la derecha.
2. Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en *y* entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando este término en ambos lados de la ecuación.
3. Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, con lo cual queda una ecuación de la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

Los elementos de la parábola se obtienen como sigue:

- Las coordenadas del vértice.
  Se pueden obtener fácilmente, ya que al quedar la ecuación en la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ se extraen de aquí los valores de $h$ y $k$.
- El parámetro *a*
  Se obtiene de dividir entre 4 el máximo común divisor que resultó del lado derecho de la factorización $4a(x-h)$, ya que el máximo común divisor es igual a $4a$.
- Las coordenadas del foco
  Están determinadas por la relación $(h + a, k)$
- El lado recto
  Están determinado por la relación $LR = |4a|$
- La directriz
  Se obtiene por la relación $x = h - a$
- Las coordenadas de los extremos del lado recto
  Se divide el lado recto entre 2, y se suma *y* resta el resultado a la ordenada del foco.

Con los elementos anteriores, se realiza un esbozo de la gráfica correspondiente.

De la misma manera se puede realizar todo este procedimiento cuando la variable que está elevada al cuadrado sea la *x*, intercambiando en el algoritmo las *x* por *y* y las *h* por *k*.

## Ejemplo 9

Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada la ecuación $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$, además de todos sus elementos.

**Solución**

a) Se separan los términos de $y$ a la izquierda y los términos de $x$ a la derecha.

$y^2 - 10y = 12x - 37$

b) Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en $y$ entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando este término en ambos lados de la ecuación.

$y^2 - 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12x - 37 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$ $\qquad$ $y^2 - 10y + (5)^2 = 12x - 37 + (5)^2$

$y^2 - 10y + 25 = 12x - 37 + 25$ $\qquad$ $y^2 - 10y + 25 = 12x - 12$

c) Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, quedando la ecuación de la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$

$(y - 5)^2 = 12(x - 1)$ Esta es la ecuación en su forma ordinaria.

- Las coordenadas del vértice. Como la ecuación está en la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ $k = 5$, $h = 1$. Por lo tanto, las coordenadas del vértice son $(h, k)$ $(1, 5)$

- El parámetro a.
  Extraemos el factor común de la parte derecha, que es 12 y se iguala con $4a$
  $4a = 12$ $\qquad$ $a = \frac{12}{4}$ $\qquad$ $a = 3$

- Las coordenadas del foco. Están determinadas por la relación $(h + a, k)$
  $(1 + 3, 5) = (4, 5)$

- El lado recto. Están determinadas por la relación $LR = |4a|$
  $LR = |4(3)|$ $\qquad$ $LR = 12$

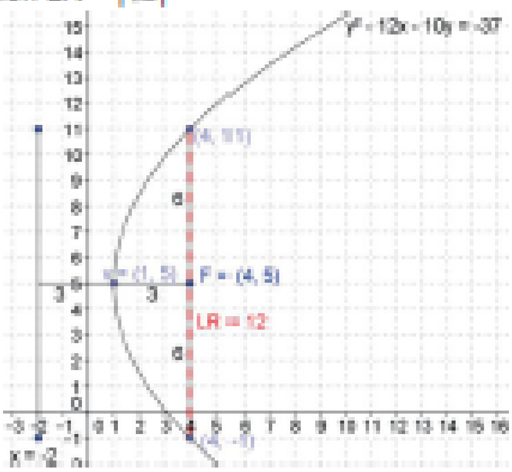
- La directriz.
  Están determinadas por la relación $x = h - a$
  $x = 1 - 3$ $\qquad$ $x = -2$

- Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto

  $$\frac{LR}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

  $5 + 6 = 11$ $\qquad$ $5 - 6 = -1$ $\quad$ $(4, 11)$ y $(4, -1)$

- La gráfica.



## Ejemplo 10

Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada la ecuación $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$, además de todos sus elementos.

**Solución**

a) Se separan los términos de $x$ a la izquierda y los términos de $y$ a la derecha.
$x^2 + 2x = -4y + 19$

b) Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en $x$ entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando éste término en ambos lados de la ecuación.
$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = -4y + 19 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$ $\qquad$ $x^2 + 2x + (1)^2 = -4y + 19 + (1)^2$
$x^2 + 2x + 1 = -4y + 19 + 1$ $\qquad$ $x^2 + 2x + 1 = -4y + 20$

c) Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, quedando la ecuación de la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$
$(x + 1)^2 = -4(y - 5)$ Ésta es la ecuación en su forma ordinaria.

- Las coordenadas del vértice. Como la ecuación está en la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$
$h = -1$, $y = 5$. Por lo tanto, las coordenadas del vértice son $(h, k)$ $(-1, 5)$

- El parámetro a.
Extraemos el factor común de la parte derecha, que es -4 y se iguala con $4a$
$4a = -4$ $\qquad a = \frac{-4}{4}$ $\qquad a = -1$

- Las coordenadas del foco. Están determinadas por la relación $(h, k + a)$
$(-1, 5 + (-1)) = (-1, 5 - 1)$ $\quad (-1, 4)$

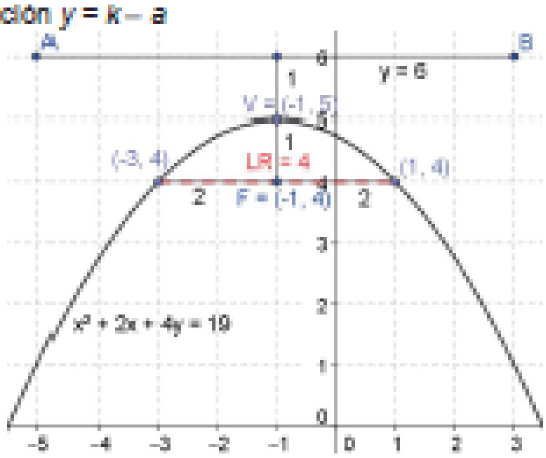
- El lado recto. Están determinadas por la relación $LR = |4a|$
$LR = |4(-1)| = |-4|$ $\qquad LR = 4$

- La directriz. Están determinadas por la relación $y = k - a$
$y = 5 - (-1)$ $\qquad y = 6$

- Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
$\frac{LR}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$-1 + 2 = 1$ $\qquad -1 - 2 = -3$ $\quad (-3, 4)$ y $(1,4)$

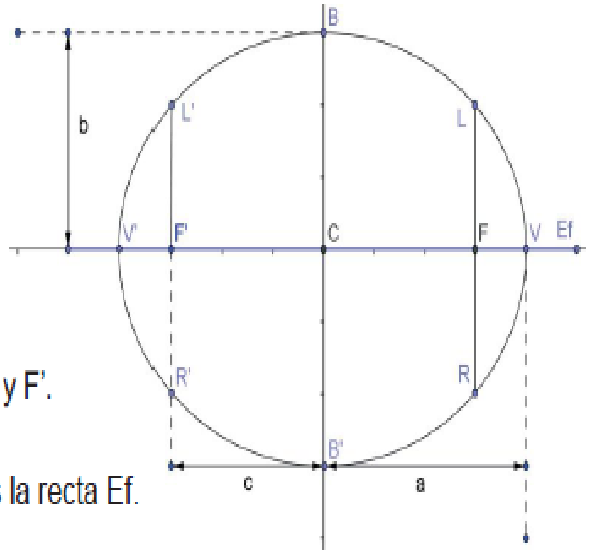
- La gráfica.



## 4.6. Elipse y sus elementos

**Elipse:** es el lugar geométrico de los puntos del plano cartesiano, cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante y mayor que la distancia entre los focos.

### Elementos de la elipse.




- **Vértices:** puntos de intersección de la elipse con su eje focal. Se representan con V y V'.
- **Focos:** puntos fijos. Se representan con F y F'.
- **Eje focal:** recta que pasa por los focos. Es la recta Ef.
- **Centro de la elipse:** punto medio del segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Se representa con C.

- **Eje mayor:** Segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Representado por $\overline{VV'}$.
- **Eje menor:** Segmento de recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal. Representado por $\overline{BB'}$.
- **Lado recto:** Segmento de recta perpendicular al eje focal y que pasa por uno de sus focos y cuyos puntos extremos están sobre la elipse. Existen dos lados rectos ya que hay dos focos. Están representados por $\overline{LR}$ y $\overline{L'R'}$.

## 4.7. La orientación de la elipse, tomando en cuenta el eje mayor en el plano cartesiano.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### Extensión de las variables *x* y *y*

Si tomamos la ecuación de la elipse en su forma ordinaria $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, para eliminar los denominadores se obtiene el mínimo común, que es $a^2b^2$, resultando:

$$\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2b^2} = 1$$

Se pasa el denominador del otro lado multiplicando al 1:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Se despeja la $x^2$:

$$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2 \quad x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2}$$

Se factorizan ambos términos del numerador con $a^2$

$$x^2 = \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2}$$

Se extrae raíz cuadrada a ambos miembros

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2}}$$

Se puede sacar raíz de $a^2$ y $b^2$ y quedan fuera de la raíz

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Para la variable y se realiza el mismo procedimiento, resultando:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

## Obtención de los elementos de la elipse

- Coordenadas de los vértices

Para ubicar las coordenadas de los vértices, se hace $y = 0$ y se sustituye en la forma ordinaria:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad x^2 = a^2 \qquad x = \pm\sqrt{a^2} \qquad x = \pm a$$

Por lo tanto, las coordenadas de los vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$.

- Coordenadas de los puntos extremos del eje menor

Para ubicar las coordenadas de los puntos extremos del eje menor, se hace $x = 0$ y se sustituye en la forma ordinaria:

$$\frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y^2 = b^2 \qquad y = \pm\sqrt{b^2} \qquad y = \pm b$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos extremos del eje menor son:

$B(0, b)$ y $B'(0, -b)$

- Longitud del lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

- La excentricidad de una elipse

Determina la forma de la curva, es decir, indica qué tan abierta o cerrada está la elipse. Se determina por la fórmula $e = \frac{c}{a}$. Cuanto más pequeña sea y se acerque a cero, se asemejará a una circunferencia (cuando $e = 0$ es una circunferencia).

A medida que el valor de $e$ crece, los focos se alejan del centro.

- Relación entre las cantidades $a$, $b$ y $c$ de una elipse

En una elipse, $a$ representa la longitud del semieje mayor, $b$ la longitud del semieje menor y $c$ la distancia de su centro a uno de los focos. Estos elementos están por la expresión: $c^2 = a^2 - b^2$

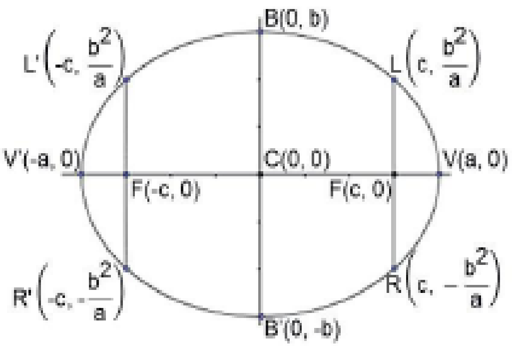
En resumen, la gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ donde } a^2 > b^2 \text{ y } c^2 = a^2 - b^2,$$

es una elipse que tiene las siguientes características:

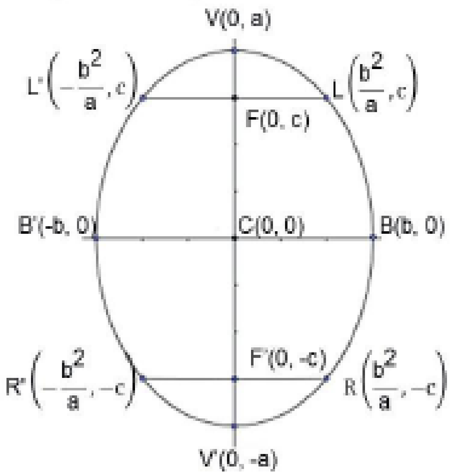
1. Su centro está en el origen $C(0,0)$.
2. Su eje focal está en el eje $x$.
3. Las coordenadas de sus vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$.
4. Las coordenadas de los puntos extremos de su eje menor son $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$.
5. Las coordenadas de sus focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.
6. La longitud de su eje mayor $\overline{VV'}$ es $2a$.
7. La longitud de su eje menor $\overline{BB'}$ es $2b$.
8. La longitud de su lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a}$.

**Eje mayor horizontal**




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Eje mayor vertical**




$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

## Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en *V(0, 5)* y *V'(0, -5)* y sus focos en *F(0, 4)* y *F'(0, -4)*.

**Solución**

Por los datos, concluimos que es una elipse con vértice en el origen y es vertical, ya que tanto los vértices como los focos tienen abscisa 0, lo que indica que su eje focal está sobre el eje *x*.

Por lo tanto, tiene la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, por lo que procedemos a calcular los valores de *a* y *b*.

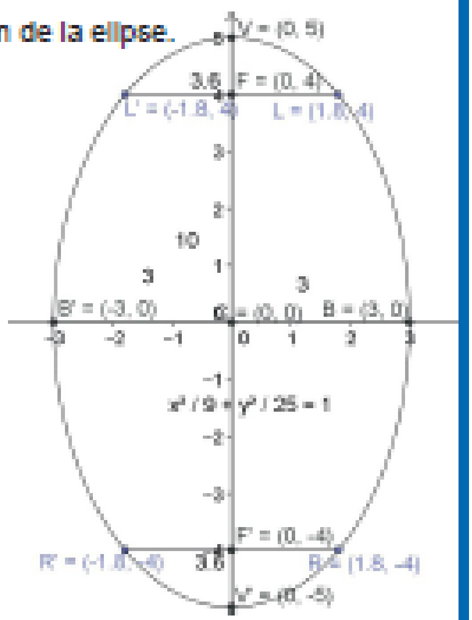
Como las coordenadas de sus vértices son *V*(0, *a*) y *V'*(0, -*a*),
el valor de *a* = 5 y por las coordenadas del foco *F*(0, *c*) y *F'*(0, -*c*), el valor de *c* = 4.

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ y despejamos $b^2$, obteniendo $c^2 - a^2 = -b^2$, que al multiplicar toda la ecuación por (-1) obtenemos: $b^2 = a^2 - c^2$
y sustituyendo los valores de a y c:

$b^2 = (5)^2 - (4)^2 \qquad b^2 = 25 - 16 \qquad b^2 = 9 \qquad b = \pm\sqrt{9} \qquad b = \pm 3$

Sustituyendo los valores de a y b en la forma ordinaria de la ecuación de la elipse:

$\frac{x^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(5)^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ que es la ecuación de la elipse.




Calculamos las coordenadas del lado recto:

$L = \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \qquad L = \left(\frac{9}{5}, 4\right)$

$L' = \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(-\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \qquad L' = \left(-\frac{9}{5}, 4\right)$

$R = \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(\frac{(3)^2}{5}, -4\right) \qquad R = \left(\frac{9}{5}, -4\right)$

$R' = \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(-\frac{(3)^2}{5}, -4\right) \qquad R' = \left(-\frac{9}{5}, -4\right)$

## Ejemplo 2

Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

**Solución**

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una elipse horizontal, puesto que *a* es mayor que *b*:

a) Las coordenadas de los focos

$a^2 = 16$ y $b^2 = 7$, por lo que calculamos

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 16 - 7 = 9$

$c = \pm\sqrt{9}$

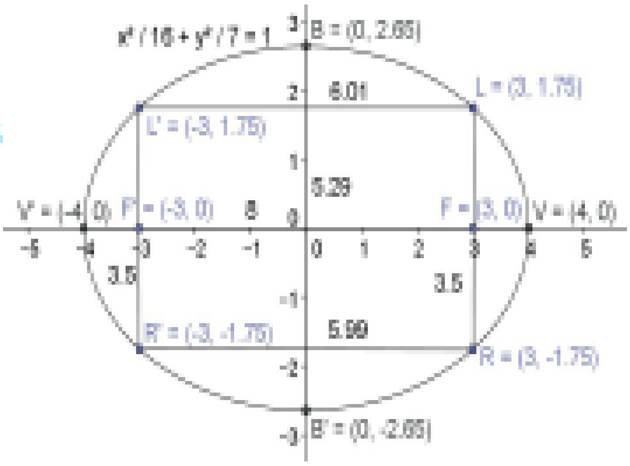
$c = \pm 3$

Como las coordenadas están en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y tenemos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$

b) Las coordenadas de sus vértices son

$V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, y como $a^2 = 16$  $a = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

tenemos $V(4, 0)$ y $V'(-4, 0)$




c) La longitud del lado recto *LR*

$LR = \frac{2b^2}{a}$ como $b^2 = 7$  $b = \pm\sqrt{7} = \pm 2.6$

$LR = \frac{2(2.6)^2}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$

d) Las coordenadas del lado recto

$L = \left(c, \frac{b^2}{a}\right)$    $L = \left(3, \frac{7}{4}\right)$

$L' = \left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$    $L' = \left(-3, \frac{7}{4}\right)$

d) Coordenadas de los extremos del eje menor:

$B(0, b)$ y $B'(0, -b)$    $B(0, 2.6)$ y $B'(0, -2.6)$

e) La longitud del eje mayor

$\overline{VV'} = 2a$    $\overline{VV'} = 2(4)$    $\overline{VV'} = 8$

f) La longitud del eje menor

$\overline{BB'} = 2b$    $\overline{BB'} = 2(2.6)$    $\overline{BB'} = 5.2$

## Ejemplo 3

Dada la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ determina todos sus elementos.

**Solución**

Se dividen ambos miembros de la ecuación anterior entre 36 y da como resultado:

$$\frac{4x^2 + 9y^2}{36} = \frac{36}{36} \qquad \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una elipse horizontal, puesto que $a$ es mayor que $b$:

a) Las coordenadas de los focos

$a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo que calculamos

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 9 - 4 = 5$

$c = \pm\sqrt{5}$

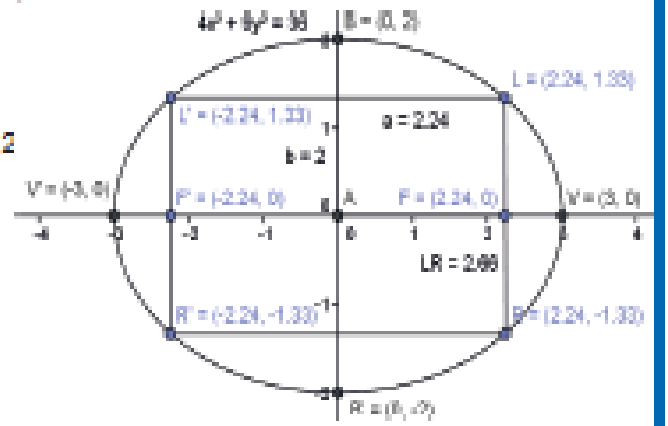
$c = \pm 2.2$

Como las coordenadas están en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ tenemos $F(2.2, 0)$ y $F'(-2.2, 0)$

b) Las coordenadas de sus vértices son:

$V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, y como $a^2 = 9$ $\;a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

y tenemos $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$




c) La longitud del lado recto $LR$

$LR = \frac{2b^2}{a}$ como $\;b^2 = 4 \quad b = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$LR = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3} = 2.7$

d) Las coordenadas del lado recto

$L = \left(c, \frac{b^2}{a}\right) \qquad L = \left(2.2, \frac{4}{3}\right)$

$L' = \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \qquad L' = \left(-2.2, \frac{4}{3}\right)$

e) Coordenadas de los extremos del eje menor

$B(0, b)$ y $B'(0, -b)$ $\quad B(0, 2)$ y $B'(0, -2)$

# Referencias bibliográficas

JOSEPH H.KINDLE, GEOMETRIA ANLITICA, EDICIONES SCHAUM

HERNADEZ, A (2012), GEOMETRIA ANLITICA, EDICIONES MABRA

CUELLAR, J, A, MATEMATICAS III, MC GRAW HILL. MEXICO

## Videos para reforzar lo aprendido

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: https://youtu.be/kDzTTOvv5dc

PENDIENTE Y ANGULO DE INCLINACION: https://youtu.be/MarxlS1l0fc

ECUACION CANONICA DE LA CIRCUNFERENCIA: https://youtu.be/jk9V5OkJlAg