BLOQUE I

APLICAS LA DIFERENCIAL EN ESTIMACIÓN DE ERRORES Y APROXIMACIONES DE VARIABLES EN LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

BLOQUE I

APLICAS LA DIFERENCIAL EN ESTIMACIÓN DE ERRORES Y APROXIMACIONES DE VARIABLES EN LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:

- Calcula e interpreta aproximaciones de la derivada de modelos matemáticos relativos a diversas disciplinas, a partir de su representación gráfica y la determinación de su diferencial.
- Aplica la diferencial para determinar el error presente en el resultado de la medición de una magnitud en diferentes situaciones.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

- Interpreta gráficamente el modelo matemático de fenómeno de su entorno y aproxima el comportamiento de su derivada a partir del cálculo de la diferencial.
- Analiza el error obtenido mediante la aplicación de la diferencial para determinar la precisión en la medición de una magnitud y como afecta la confiabilidad de ésta en situaciones reales de su contexto.
- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores fortalezas y debilidades al trabajar con aproximaciones y estimación de errores.

OBJETOS DE APRENDIZAJE:

- La diferencial
- Aproximaciones de variables
- Estimación de errores

INTRODUCCIÓN

El *Cálculo Integral* es una rama de las Matemáticas relacionada con una clase de operación llamada *integral*. El Cálculo Integral tiene una gran cantidad de aplicación en una amplia variedad de campos del conocimiento como son: Matemáticas, Ingeniería, Química, Biología, Física, Economía, entre otras.

Tanto el Cálculo Integral como el Cálculo Diferencial se utilizaban de manera intuitiva desde la antigua Grecia pero sin que tuvieran una relación aparente tan estrecha como la que hoy en día se conoce; hasta que en el siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Leibniz de manera independiente formularon el *Teorema fundamental del cálculo* el cual hace evidente que la integral y la derivada sean operaciones inversas.

La diferencial

La diferencial representa la variación que tiene la variable dependiente (y=f(x)) cuando la variable dependiente (x) también sufre un cambio. En otras palabras la diferencial indica que tanto cambia “y” cuando “x” ha cambiado.

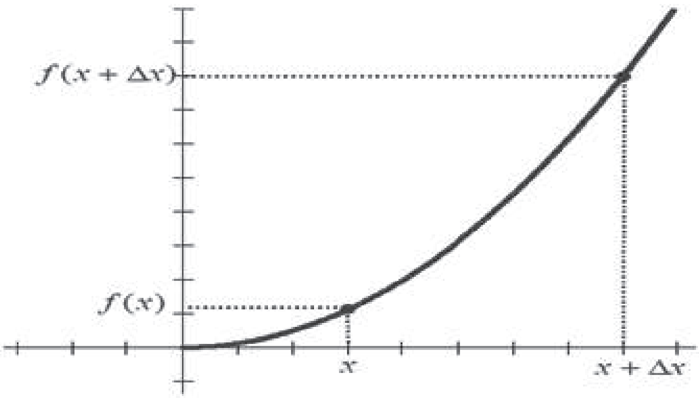
Existen muchas situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar un cambio o variación, como por ejemplo:

- En las aproximaciones de valores de funciones.
- En el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado).
- Calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente varía "un poco", etc.

En estas situaciones es donde cobra importancia la diferencial.

Definición de diferencial

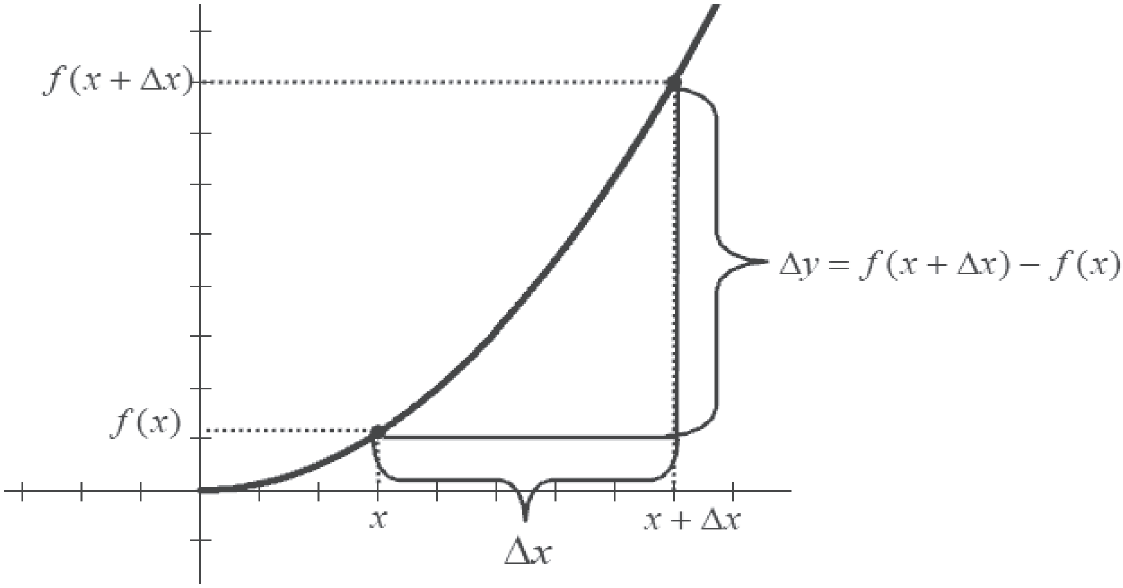
Sea $y=f(x)$ una función real. Considera los puntos sobre la gráfica de la función, $(x,f(x))$ y $(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ como se muestra en la siguiente figura:



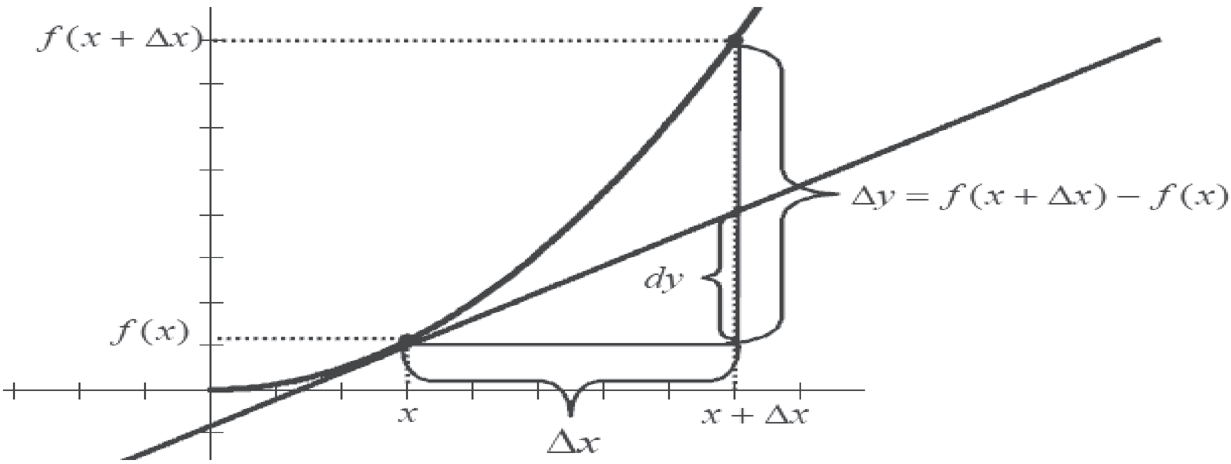
El valor Δx representa la variación en la variable independiente x. Denotaremos como Δy al cambio real que sufre la función $f(x)$, es decir:

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

Dicha variación, lo podemos apreciar en la siguiente figura:



Al trazar una recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x, se observa una variación aproximada a través de la recta tangente al cual denominaremos dy, como se puede observar en la figura:



Cuando el valor de Δx se aproxima a cero renombramos Δx como dx. Como se observa en la figura, la pendiente de la recta tangente se calcula mediante la razón que existe entre dy y dx $(\Delta x \to 0)$, lo cual representa la derivada de la función por lo que podemos decir que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Despejando dy obtenemos:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

A dy lo llamaremos ***la diferencial*** de f en el punto x, con respecto la variación $dx = \Delta x$.

Actividad 1

Consulta los siguientes enlaces y escribe un reporte donde describas los aspectos que consideres más importantes de cada enlace para después discutirlos en plenaria.

http://www.youtube.com/watch?v=bb9z6m3S7Io&NR=1&feature=endscreen
http://www.youtube.com/watch?v=a-J70vXe87k&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=A6Vp18ctfWc&feature=related

Estimación de errores mediante la diferencial

El **error de aproximación** es una medida del ajuste o cálculo de una magnitud con respecto al valor real o teórico que dicha magnitud tiene. Un aspecto importante de los errores de aproximación es su estabilidad numérica. El error de aproximación se obtiene de la diferencia que existe entre el valor real y el valor aproximado, es decir:

$$\boldsymbol{E.A} = |\,\Delta \boldsymbol{y} - \boldsymbol{dy}\,|$$

Ejemplo 1. Calcular $\Delta y, dy$ y E.A, cuando $x = 1$ y $\Delta x = dx = 0.1$, si $f(x) = x^2$
Solución: Como $y = f(x) = x^2$, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, calculamos:

$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = (1 + 0.1)^2 = (1.1)^2 = 1.21$
$f(x) = x^2 = (1)^2 = 1$

Al sustituir estos valores en $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ obtenemos $\Delta y = (1.21) - (1) = 0.21$

Este valor corresponde al **incremento real** que sufre la función $f(x) = x^2$, cuando x se incrementa de 1 a 1.1.

Como la diferencial está dada por $dy = f'(x)dx$ y la función es $f(x) = x^2$, se obtiene que $dy = 2xdx$. Al sustituir valores de $x = 1$ y $\Delta x = dx = 0.1$ en la diferencial obtenida, entonces

$$dy = 2(1)(0.1) = 0.2$$

Este valor corresponde al **valor aproximado** de la función $f(x) = x^2$, a través de la recta tangente cuando x se incrementa de 1 a 1.1. Al calcular el error aproximado partiendo de que E.A.= $|\,\Delta \boldsymbol{y} - \boldsymbol{dy}\,|$ y sustituir se obtiene que:

$$\text{E.A} = |\,0.21 - 0.2\,| = 0.01$$

Ejemplo 2. Hallar $\Delta y, dy$ y E.A, cuando $x = 1$ y $\Delta x = dx = 0.05$, si $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Solución: Como $y = x^2 + 2x - 3$, entonces

$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 3$,
= (1 + 0.05)^2 + 2(1+ 0.05) - 3
= (1.1025) + (2.1) - 3
= 0.2025

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ = (1)^2 + 2(1) - 3= 0

Al sustituir estos valores en $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ obtenemos $\Delta y = (0.2025) - 0 = 0.2025$

Este valor corresponde al incremento real que sufre la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, cuando x se incrementa de 1 a 1.05.

Como la diferencial está dada por $dy = f'(x)dx$ y la función es $f(x) = x^2 + 2x - 3$, se obtiene que $dy = (2x + 2)dx$. Al sustituir valores de $x = 1$ y $\Delta x = dx = 0.05$ en la diferencial obtenida, entonces:

$$dy = (2(1) + 2)(0.05) = 0.2$$

Este valor corresponde al **valor aproximado** de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, a través de la recta tangente cuando x se incrementa de 1 a 1.05.

Al calcular el error aproximado partiendo de que E.A= | $\Delta y - dy$ | y sustituir se obtiene:

E.A= | $0.2025 - 0.2$ | $= 0.0025$

Completar el siguiente cuadro usando el método planteado, a partir del ejemplo anterior cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.5, 0.1, 0.01$

X	Δx	$f(x + \Delta x)$	$f(x)$	Δy	dy	E.A
1						
1						
1						

Ejemplo 3. Hallar $\Delta y, dy$ y E.A, cuando $x = \frac{\pi}{6}$ y $\Delta x = dx = 0.5$, si $f(x) = sen\ x$
Solución: Como $y = f(x) = sen\ x$, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, calculamos:

$f(x + \Delta x) = sen(x + \Delta x) = sen\left(\frac{\pi}{6} + 0.5\right)$ = 0.50753
$f(x) = sen\ x = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = 0.5

Al sustituir estos valores en $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ obtenemos $\Delta y = (0.50753) - (0.5) = 0.00753$

Este valor corresponde al **incremento real** que sufre la función $f(x) = sen\,x$, cuando x se incrementa de $\frac{\pi}{6}$ a $\left(\frac{\pi}{6} + 0.5\right)$.

Como la diferencial está dada por $dy = f'(x)dx$ y la función es $f(x) = x^2$, se obtiene que $dy = cos\,xdx$. Al sustituir valores de $x = \frac{\pi}{6}$ y $\Delta x = dx = 0.5$ en la diferencial obtenida, entonces:

$$dy = Cos\left(\frac{\pi}{6}\right)0.5 = 0.4330$$

Este valor corresponde al **valor aproximado** de la función $f(x) = sen\,x$, a través de la recta tangente cuando x se incrementa de $\frac{\pi}{6}$ a $\left(\frac{\pi}{6} + 0.5\right)$. Al calcular el error de aproximación se obtiene:

$$\text{E.A} = |\,0.00753 - 0.4330\,| = 0.4254$$

Actividad 2

En equipos de 2 integrantes calcula el error de aproximación E.A. para las siguientes funciones.

1. $f(x) = 2x - 1$, cuando x= 2 y $\Delta x = dx = 0.01$

Solución:

2. $f(x) = sen\,2x$, cuando $x = \frac{\pi}{6}$ y $\Delta x = dx = 0.2$

Solución:

3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$, cuando x = 3 y $\Delta x = dx = 0.5$

Solución:

4. $f(x) = Ln\ 2x$, cuando x= 4 y $\Delta x = dx = 0.01$

Solución:

5. $f(x) = \sqrt{2x}$, cuando x= 8, $\Delta x = dx = 0.1$

Solución:

6. $f(x) = Cos\ x$ cuando x=0, $\Delta x = dx = 0.1$

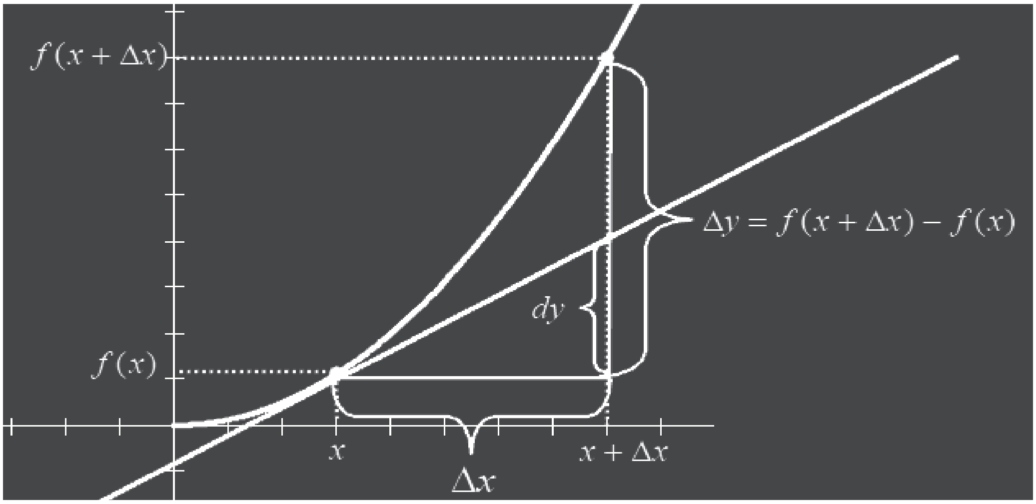
Solución:

7. $f(x) = e^{x}$ cuando x = 1, $\Delta x = dx = 0.2$

Solución:

Aproximación de funciones utilizando la diferencial

Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para ello, supóngase que la gráfica de y = f (x) corresponde siguiente la figura:



Cuando se da a $\mathbf{x}$ un incremento Δx, la variable y recibe un incremento Δy, que puede considerarse como un valor aproximado de dy a la función $y = f(x)$ alrededor del punto de tangencia x_0, lo que nos permite obtener la ecuación de aproximación:

$$\boldsymbol{f(x) \cong f(x_0) + dy = f(x_o) + f'(x)dx}$$

Ejemplo 1. Encontrar el valor aproximado de $\sqrt{16.4}$.

Solución: Podemos definir una función que nos permite aproximar dicho valor, ésta es $f(x) = \sqrt{x}$ y de igual manera elegir un punto x_o para el cual podemos conocer con exactitud el valor de la función evaluada en dicho punto. Por conveniencia y para este caso $x_0 = 16$. De lo anterior tenemos que $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, entonces:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Por otro lado $x = 16.4$ y $x_0 = 16$. Así deducimos $dx = x - x_0 = 16.4 - 16$. Entonces sustituimos en la ecuación de aproximación:

$$\begin{aligned} f(x) &\cong f(x_o) + f'(x)dx \\ \sqrt{16.4} &\cong \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.4) \\ &\cong 4 + \frac{1}{(2)(4)}(0.4) \\ &\cong 4 + 0.05 = 4.05 \\ \sqrt{16.4} &\cong 4.05 \end{aligned}$$

El valor de $\sqrt{16.4} = 4.04969$, por lo que el error de aproximación sería:

E.A= $|\, Valor\ real - Valor\ aproximado|$

= | 4.03969 - 4.05| = 0.000159

Esto nos permite observar que la aproximación difiere del valor real en una cantidad muy pequeña.

Ejemplo 2: Encuentra un valor aproximado de $Sen\ 30.5$.
Solución: Como la función es $f(x) = Sen\ x$, la derivada de esta función es $f´(x) = cosx$. Si $x = 30.5^0$ y $x_0 = 30$ entonces $dx = 30.5^0 - 30^0 = 0.5$, al expresarla en radianes $dx = \frac{\pi}{360}rad$.
Entonces:

$$f(x) \cong f(x_o) + f^{'}(x)dx$$

$$sen\ 30.5^0 \cong Sen\ 30^0 + Cos\ 30^0 \left(\frac{\pi}{360}\right)$$

$$\cong \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{360}\right)$$

$$\cong \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\ \pi}{720}$$

$$Sen\ 30.5^0 \cong \frac{360 + \sqrt{3}\,\pi}{720} = 0.507557$$

El valor real de $Sen\ 30.5^0 = 0.507538$

Por lo que el E.A= | 0.507557 - 0.507538|= 0.000019

Actividad 3

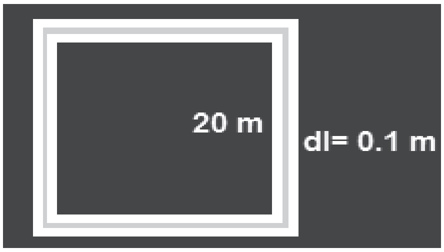
Encuentra una aproximación de las siguientes funciones en equipo de 2 personas.

1. $Ln1.1$
2. $\sqrt{9.5}$
3. $e^{0.5}$
4. Cos 30.5^0
5. $\sqrt{17}$
6. $\frac{1}{3.33}$

Aplicaciones de la diferencial

Las aplicaciones de las funciones reales son muy diversas debido a que modelan la relación existente entre una variable independiente con una variable dependiente. En muchas situaciones es de interés saber cómo influye una variación en la variable independiente (dx) sobre el valor de la variable dependiente. En seguida se presentan algunos ejemplos de estas situaciones donde un incremento conocido en una variable tiene una influencia medible en otra variable.

Ejemplo 1: El lado de un cuadrado mide 20 m. Calcula el incremento aproximado del área si su lado se incrementa 0.1 m.



Solución

Datos:

$A = l^2$ Fórmula del área de un cuadrado.

$l = 20\ m$

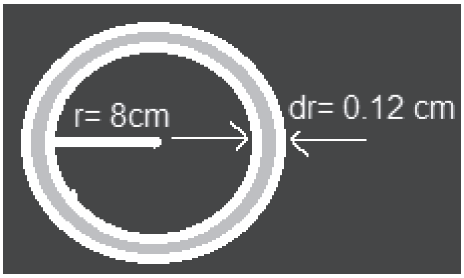
$dl = \ \Delta l = 0.1\ m$

Para calcular dA, se tiene que $A = l^2$ y su diferencial es $dA = 2l\ dl$.

Al sustituir los datos tenemos que: $dA = 2(20\ m)(0.1\ m)$, por lo tanto $dA = 4\ m^2$.

En conclusión, se tiene un incremento de en el área de 4 metros cuadrados.

Ejemplo 2: Un cascarón esférico, cuyo radio inferior es de 8 cm y con un espesor de 0.12 cm, se somete a presión de tal manera que incrementa su volumen. ¿Cuál es el volumen de incremento al someterlo a presión?



Solución

Datos:

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$ fórmula del volumen de una esfera.

$r = 8\ cm$

$dr = \ \Delta r = 0.12\ cm$

Se tiene que $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ y su diferencial es $dV = \frac{4\pi 3r^2\ dr}{3} = 4\pi r^2 dr$

Al sustituir los datos tenemos que:

$dV = 4(3.1416)(8)^2(0.12)$, por lo tanto $dV = 30.72\ \pi cm^3$. Esto es $dV = 96.51\ cm^3$

En conclusión, se tiene un incremento en el volumen de 96.54 centímetros cúbicos.

Actividad 4

Resuelve en equipo de 3 personas los siguientes ejercicios.

1. La pared lateral de un depósito cilíndrico de radio 30 cm y una altura de 100 m, debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es la cantidad aproximada de concreto que se requiere, si el volumen del cilindro se obtiene por $v = \pi r^2 h$?

2. Si el lado de un cubo mide 4 cm, calcula el incremento aproximado del volumen si su lado aumenta 0.02 cm.

3. Calcula la disminución aproximada del área de una quemadura de forma circular cuando el radio disminuye de 2 a 1.98 cm.

4. Un tumor de forma esférica, presenta un radio de 3 cm y aumenta a 3.2 cm en 6 meses. ¿Cuál es el incremento del volumen de dicho tumor en ese tiempo?

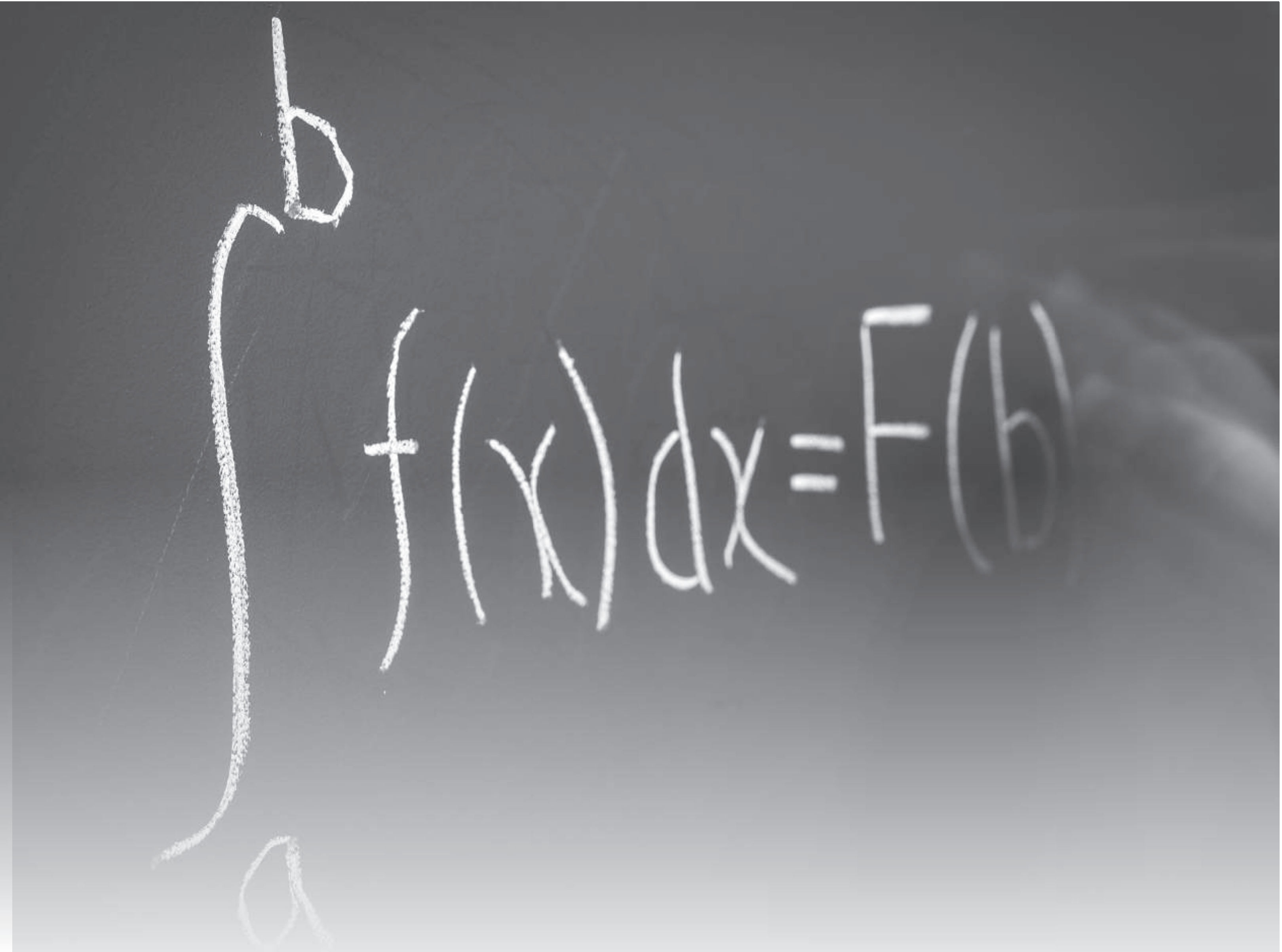
5. Una pelota de beisbol consta de un material elástico forrado por cuero de 1.2mm de espesor. Si el radio de la pelota es de 5.2 cm, calcula el valor aproximado de volumen de material de la pelota.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS GENÉRICAS

Autoevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓a los siguientes cuestionamientos.				
Nombre del alumno: **Semestre:** **Corte:**				
Grupo:	**Siempre**	**A veces**	**Difícilmente**	**Observaciones**
Indicador de desempeño:				
Asumo comportamientos y decisiones que me ayudan a lograr mis metas académicas.				
Soy consciente de mis hábitos de consumo y conductas de riesgo, favoreciendo mi salud física, mental y social.				
Puedo expresar mis ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.)				
Utilizo las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.				
Formulo hipótesis y compruebo su validez para la solución de problemas planteados en diversas asignaturas.				
Consulto diversas fuentes informativas y utilizo las más relevantes y confiables.				
Realizo trabajos donde aplico saberes de varias asignaturas.				
Me integro con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.				
Respeto las opiniones, creencias e ideas de mis compañeros.				
Contribuyo con acciones para la solución de problemas ambientales de mi comunidad.				

Coevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓a los siguientes cuestionamientos respecto al compañero asignado.				
Nombre del compañero: **Semestre:** **Corte:**				
Grupo:				
Tu compañero:	**Siempre**	**A veces**	**Difícilmente**	**Observaciones**
Asume comportamientos y decisiones que contribuyen a lograr las metas del grupo.				
Lleva a cabo hábitos de consumo que favorecen su salud física, mental y social.				
Expresa sus ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).				
Utiliza las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.				
Propone soluciones a problemas planteados en diversas asignaturas.				
Consulta diversas fuentes informativas y utiliza las más relevantes y confiables.				
Realiza trabajos donde aplica saberes de las asignaturas.				
Se integra con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.				
Respeta las opiniones, creencias e ideas de los compañeros.				
Participa en acciones para la solución de problemas ambientales de su entorno.				

MIS NOTAS:



BLOQUE II

DETERMINAS LA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN E INTEGRAS FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES COMO UNA HERRAMIENTA A UTILIZAR EN LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

BLOQUE II

DETERMINAS LA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN E INTEGRAS FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES COMO UNA HERRAMIENTA A UTILIZAR EN LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:

- Determina la primitiva de una función, como antecedente de la integral en el campo de las Ciencias Exactas, Naturales, Sociales y Administrativas.
- Aplica el cálculo de las primitivas a problemas de su entorno referentes al ámbito de las ciencias.
- Obtiene integrales indefinidas de funciones algebraicas y trascendentes de manera inmediata y mediante el uso de técnicas de integración, en un contexto teórico como herramienta en la resolución de problemas reales.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

- Resuelve problemas que involucren la obtención de la primitiva de una función y la interpreta en situaciones reales de su entorno.
- Desarrolla la habilidad en el manejo de técnicas de integración en un contexto teórico.
- Valora el trabajo en equipo como una alternativa para mejorar sus habilidades operacionales en el cálculo de integrales indefinidas.

OBJETOS DE APRENDIZAJE:

- Funciones primitivas
- Integral indefinida

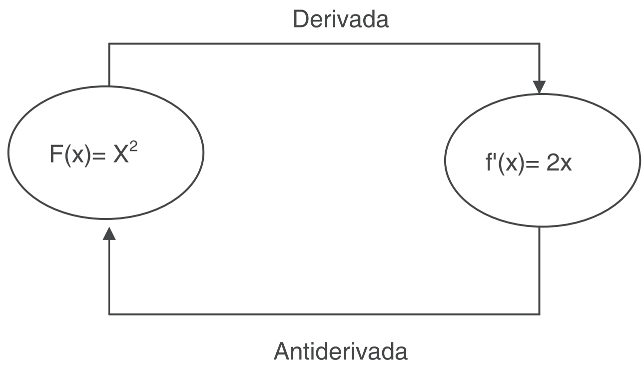
Antiderivada

Al aplicar fuerza sobre una liga, ésta se estira, al dejarle de aplicar fuerza regresa a su estado original. La segunda operación anuló la primera, así de la misma manera hay operaciones que son inversas tales como la multiplicación y la división, la suma y la resta.

En Cálculo Diferencial se estudia el problema de la derivada de una función, ahora veremos la operación inversa es decir, dada una función $f(x)$ buscaremos una función $F(x)$ tal que $F´(x) = f(x)$. A $F(x)$ se le conoce como la antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo: Encuentra la antiderivada de $f(x) = 2x$.

Si buscamos a la función $F(x)$ que satisfaga a la igualdad $f^{'}(x) = 2x$, entonces



Sin embargo sabemos que no es la única función que cumple la propiedad buscada, pues si se derivan otras funciones que tengan una constante el resultado es el mismo. Por ejemplo: $F(x) = x^2 + 2$, $F(x) = x^2 - \frac{2}{3}$.

Actividad 1

Obtén la antiderivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x$

2. $f(x) = 3x - 1$

3. $f(x) = 5 - x^3$

4. $f(x) = 3$

5. $f(x) = -2x^2$

Primitiva de una función

Considerando que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces si C es una constante, también $F(x) + C$ es antiderivada de $f(x)$. A la función $F(x) + C$ llama **función primitiva.** Como se ha mencionado, la ***integral*** es la operación inversa de la derivada y la denotamos de la siguiente forma:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx}$$

El símbolo $\int f(x)dx$ se lee como: *Integral Indefinida de* $f(x)$. Conjugando la idea de antiderivada, función primitiva y la notación de la integral concluimos que:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$$

A la literal C la llamaremos constante de integración.

Como la integración y la derivación son operaciones inversas, a cada fórmula de derivación le corresponde una fórmula de integración. Las siguientes fórmulas y propiedades facilitan la integración:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int adx = ax + C$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)$
4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, para\ n \neq -1$

Ejemplos:

1. $\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C.$
2. $\int 3xdx = 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = 3\ \frac{x^2}{2} + C.$
3. $\int 5x^2dx = 5\int x^2dx = 5\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + C = 5\frac{x^3}{3} + C.$
4. $\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$
5. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$
6. $\int 3dx = 3x + C.$
7. $\int (x-1)^2dx = \int (x^2 - 2x + 1)dx = \int x^2dx - \int 2xdx + 1\int dx =$

$\frac{x^3}{3} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + x + C.$, por lo que el resultado es $\frac{x^3}{3} - x^2 + x + C.$

8. $\int 4x^3 dx = 4\frac{x^{3+1}}{3+1} + C = 4\frac{x^4}{4} + C.$

9. $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

10. $\int \frac{dx}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + C.$

11. $\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1) dx = \int 4x^2 dx + \int 4x dx + 1\int dx = \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x + C.$

Actividad 2

Resuelve las siguientes integrales de manera individual. Justifica tus respuestas.

1. $\int 2x dx$

2. $\int \frac{x^3}{4} dx$

3. $\int (x+3) dx.$

4. $\int (x^3 - 5\frac{x^2}{3}) dx$

5. $\int \sqrt[3]{4x}\, dx.$

6. $\int (x+3)(x-1) dx$

7. $\int \frac{(x-6)}{2} dx$

8. $\int 3x^2 dx$

9. $\int \frac{x^2}{3} dx$

10. $\int (2x+6)dx$.

Actividad 3

Resuelve los siguientes ejercicios en equipo de 2 personas.

1. $\int (x^4 - x)dx$

2. $\int \frac{5}{3}x^2 dx$

3. $\int x^2(x+2)dx$

4. $\int 4\sqrt{x^3}\, dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2}$

6. $\int (x^2 + \ x)^2 dx$

7. $\int \left(x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4x - \sqrt{x}\right) dx$

8. $\int (x^2+2x+5)dx$

9. $\int x(x^2-3)dx$

10. $\int (3-x)(x^2-3)dx$

11. $\int (2x^2-x)(2x^2+x)dx$

12. $\int \frac{3}{x^5}dx$

13. $\int \left(5-\frac{3x}{4}\right)dx$

14. $\int (2x^2-\ x)^3dx$

Métodos de integración

Supón que se quiere calcular la integral de una función $f(x)$, pero no se puede determinar de forma inmediata como hasta ahora, aunque sabemos que existe. Para estos casos aplicaremos diversos métodos de integración tales como cambio de variable, integración por partes y fracciones parciales. La idea fundamental de los métodos de integración es transformar la integral en cuestión, en otra que podamos integrarla de manera directa.

Cambio de variable

La importancia de la sustitución en la integración es comparable con la regla de la cadena en la derivación $(d(uv)=udv+vdu)$. Las fórmulas que a continuación se presentan nos serán útiles para aplicar los métodos de integración.

1. $\int du = u + c$

2. $\int adu = au + c$

3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \, ; n \neq -1$

4. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$

5. $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c$

6. $\int cosudu = senu + c$

7. $\int senudu = -cosu + c$

8. $\int sec^2 udu = tanu + c$

9. $\int csc^2 udu = -cotu + c$

10. $\int secutanudu = secu + c$

11. $\int cscucotudu = -cscu + c$

12. $\int e^u du = e^u + c$

13. $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + c$

Pasos para integrar utilizando cambio de variable:

1. Selecciona la parte de la integral que representará a la variable “u”.
2. Encuentra la diferencial de “u” (*du*)
3. Compara la diferencial *du* con respecto a la diferencial de la función original. En caso de que no sean iguales, busca un coeficiente que multiplicado, dividido o ambas nos iguale la diferencial *du* con la diferencial original.
4. Realiza el cambio de variable.
5. Integra con respecto a “u” con alguna de las fórmulas fundamentales.
6. Sustituye “u” por su equivalente en función de “x”.

Ejemplo 1: Calcula la integral $\int(2x+1)^2dx$.

Solución: A simple vista podríamos pensar en desarrollar el binomio $(2x+1)^2$ y encontrar la primitiva de la función para obtener su respuesta. Sin embargo; si te preguntas ¿qué pasaría si “n” es igual a 100? Es obvio que desarrollarlo sería un trabajo excesivo. Por ello, es conveniente utilizar una técnica de integración, para este caso emplearemos el método de **cambio de variable.**

A continuación, se muestra paso a paso la forma en que se resuelve la integral propuesta.

1. Selecciona la parte de la integral que representará a la variable “u”.

Como la función que se desea integrar es $\int(2x+1)^2dx$, te preguntarás cuál es “u”, en este caso:

$$u = 2x + 1.$$

2. Encuentra la diferencial de “u” (du)

$$u = 2x + 1.$$
$$du = 2dx$$

3. Compara la diferencial de “u” con respecto a la diferencial de la función original. En caso de que no sean iguales, busca un coeficiente que multiplicado, dividido o ambas nos iguale la diferencial de “u” con la diferencial original.

$$\int(2x+1)^2dx \qquad\qquad du = 2dx$$

¿Son iguales?

Como la diferencial *du* no es igual con respecto a la diferencial de la función original, será necesario utilizar una constante que afecte a ambas partes para poder llegar a su igualdad. En este caso, dividimos ambas partes entre 2, obteniendo:

$$\frac{du}{2} = \frac{2dx}{2}$$
$$\frac{1}{2}du = dx$$

Otra interpretación que se puede dar a esta idea es que: si $du = 2dx$ entonces, despejando: $dx = \frac{du}{2}$,o bien, $dx = \frac{1}{2}du$.

4. Realiza el cambio de variable.

$$\int \underbrace{(\ 2x+1\ )}_{u}{}^{2} \underbrace{dx}_{\frac{1}{2}du} =$$

$$\int (\ 2x+1\ )^2\ dx \quad \Longrightarrow \quad \int u^2\left(\tfrac{1}{2}du\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\int u^2 du$$

Las constantes que multiplican al diferencial siempre se pueden colocar antes del símbolo de integración como se muestra.

5. Integra con respecto a "u" con alguna de las fórmulas fundamentales.

   Utilizando la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\left(\frac{U^3}{3}\right) + C = \frac{U^3}{6} + C$$

6. Sustituye "u" por su equivalente en función de "x"

   Como u=$2x+1$ entonces

$$\int (2x+1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$

Ejemplo 2: Resuelve la integral $\int \sqrt{2x-1}\, dx$

Solución:
Tomemos: $u = 2x - 1$.
Después, calcula la derivada du que es $du = 2dx$. Posteriormente despejamos dx quedando $\frac{du}{2} = dx$.

Ahora, usamos $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}$ y $dx = \frac{du}{2}$, sustituye para obtener lo siguiente:

$$\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right)$$ Integral en términos de *u*.

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$ Antiderivada en términos de *u.*

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+c$$ Antiderivada en términos de *x*.

Ejemplo 3: Encuentra $\int sen^2 3x\cos 3x dx$.

Solución:

Como $sen^2 3x=(sen3x)^2$ y si es $u=sen3x$. Entonces $du=(Cos3x)(3)dx$.

Ahora, como $Cos3xdx$ es parte de la integral dada, se puede escribir $\frac{du}{3}=Cos3xdx$.

Si sustituyes ***u*** y $\frac{du}{3}$ en la integral dada produce lo siguiente:

$$\int sen^2 3x\cos 3x dx=\int u^2\frac{du}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\int u^2du=\frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right)+c=\frac{1}{9}sen^3 3x+c$$

Puedes comprobarlo mediante derivación.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}sen^3 3x\right]=\left(\frac{1}{9}\right)(3)(sen3x)^2(\cos 3x)(3)=sen^2 3x\cos 3x$$

En virtud de que la derivación produce el integrando original, sabes que has obtenido la antiderivada correcta.

Intégrate en equipo de tres personas, para resolver las siguientes tres actividades.

Actividad 4

Analiza detenidamente cada una de las opciones para seleccionar la respuesta correcta a la integral dada. Justifica tu repuesta.

1. $\int e^{5x}\,dx$

a) $e^{5x}+C$ b) $5e^{5x}+C$ c) $\frac{e^x}{5}+C$ d) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$

2. $\int Cos7xdx$

a) $7Sen7x+C$ b) $-7Sen7x+C$ c) $\frac{1}{7}Sen7x+C$ d) -$\frac{1}{7}Sen7x+C$

3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

a) $-\sqrt{4-x^2}+C$ b) $\sqrt{4-x^2}+C$ c) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4}+C$ d) $\frac{\sqrt{4-x^2}}{4}+C$

4. $\int \frac{dx}{5x+2}$

a) $\frac{1}{5} ln|5x+2| + C$ b) $ln|5x+2| + C$ c) $\frac{1}{(5x+2)^2} + C$ d) $\frac{1}{(5x+2)^2}$

5. $\int 2x(x^2+3)^5 dx$

a) $\frac{(x^2+3)^6}{3} + C$ b) $\frac{(x^2+3)^6}{6} + C$ c) $(x^2+3)^6 + C$ d) $\frac{(x^2+3)^6}{2} + C$

Actividad 5

Escribe el procedimiento necesario para calcular la respuesta a las integrales indicadas.

1. $\int x \sqrt[3]{x^2+7}\, dx$ Respuesta $\boxed{\frac{3}{8}(x^2+7)^{\frac{4}{3}} + C}$

Procedimiento:

2. $\int \frac{dx}{4x+1}$ Respuesta $\boxed{\frac{1}{4} ln|4x+1| + C}$

Procedimiento:

3. $\int e^{Senx} Cosx\, dx$ Respuesta $\boxed{e^{senx} + C}$

Procedimiento:

4. $\int e^{\frac{x}{5}}\, dx$ Respuesta $\boxed{5e^{\frac{x}{5}} + C}$

Procedimiento:

5. $\int \frac{dx}{(x+5)^2}$ Respuesta $\boxed{\frac{-1}{x+5} + C}$

Procedimiento:

Actividad 6

Resuelve las siguientes integrales. Justifica tus respuestas.

1. $\int \sqrt{2x+1}\, dx$
   Solución:

2. $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$
   Solución:

3. $\int 6x^2(3x^3+2)dx$
   Solución:

4. $\int 2e^{5x}dx$
   Solución:

5. $\int xe^{x^2}dx$
   Solución:

6. $\int \frac{2dx}{6x}$
   Solución:

7. $\int \frac{3x^2dx}{4x^3}$
   Solución:

8. $\int 2^{5x}\,dx$
   Solución:

9. $\int 4^{2x^2}x\,dx$
   Solución:

10. $\int xe^x\,dx$ “desafío”
    Solución:

Integración por partes

En el **desafío** $\int xe^x dx$ te diste cuenta que esta integral no es posible resolverla mediante el método cambio de variable. Si no es posible integrar una función con los métodos ya propuestos, entonces ¿cómo lo harías?

En esta sección estudiaremos la integración por partes, este método nos ayudará a resolver integrales donde no funcione cambio de variable. La fórmula que se utiliza para integrar por partes es la siguiente:

Fórmula para integrar por partes.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Retomando el desafío $(\int xe^x\, dx)$. Una parte de la integral la debes elegir como *u* y lo que resta como *dv,* de forma que coincida la integral que quieres resolver con la fórmula para integrar por partes como sigue,

$$\int udv = \int xe^x dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

A partir de tu elección de *u* y *dv,* calcula du derivando u y v integrando dv.

$$u = x \qquad\qquad dv = e^x dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

Deriva u | *Integra dv*

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$du = 1dx \qquad\qquad v = e^x$$

Aplicar la *fórmula para integrar por partes:*

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

Notarás que la integral “desafío” la hemos igualado a una multiplicación de funciones menos una nueva integral. Esta nueva integral ya no es tan “difícil”, se puede resolver directamente $\int e^x dx = e^x + C$. Entonces obtenemos la respuesta al desafío.

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

Ejemplo: Calcula $\int lnx\, dx$.

Solución: Elegimos u y dv para calcular du y v como sigue.

$$u = \ln x \qquad\qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad\qquad \int dv = \int dx$$

$$v = x$$

Sustituimos en la fórmula para integración por partes.

$$\int \ln x dx = \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{(x)}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du}$$

$$= x \ln x - \int \frac{x dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

$$\boxed{\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + c}$$

Actividad 7

Intégrate en equipos de tres personas y determina el procedimiento necesario para obtener la respuesta que se te indica.

1. Integrar: $\int x(x+1)^5\, dx$ Respuesta $\boxed{\frac{x}{6}(x+1)^6 - \frac{1}{42}(x+1)^7 + C}$

   Procedimiento:

2. Integrar: $\int x\sqrt{x+1}\, dx$ Respuesta $\boxed{\frac{2x\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C}$

   Procedimiento:

3. Integrar: $\int x^2 senx\, dx$ Respuesta $\boxed{Cosx(-x^2+2) + 2xSenx + C}$

   Procedimiento:

4. Integrar: $\int xe^{2x}\, dx$ Respuesta $\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}(x-1) + C}$

   Procedimiento:

5. Integrar: $\int x^2cos2x\,dx$ Respuesta $\boxed{\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)Sen2x+\frac{1}{2}xCos2x+C}$

Procedimiento:

6. Integrar: $\int e^{2x}sen3x\,dx$ Respuesta $\boxed{\frac{9e^{2x}}{39}\left(\frac{2}{3}Sen3x-Cos3x\right)+C}$

Procedimiento:

Actividad 8

En los siguientes ejercicios, analiza y selecciona la respuesta correcta. Justifica tu respuesta realizando el procedimiento.

1. $\int xlnxdx$

a) $\frac{x^2lnx-x^2}{2}+c$	b) $\frac{x^2lnx}{2}+\frac{x^2}{4}+c$	c) $\frac{x^2lnx}{2}+x^2+c$	d) $\frac{x^2lnx}{2}-\frac{x^2}{4}+c$

2. $\int xe^{4x}dx$

a)$-\frac{1}{4}xe^{4x}+\frac{1}{16}e^{4x}+c$	b)$\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+c$	c)$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{16}xe^{4x}+c$	d)$-\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{1}{16}xe^{4x}+c$

3. $\int x\sqrt{3x-6}dx$

a) $\frac{2x}{9}\sqrt{(3x-6)^3}-\frac{4}{135}\sqrt{(3x-6)^5+c}$	b) $\frac{2x}{9}\sqrt[3]{(3x-6)^2}-\frac{4}{135}\sqrt[5]{(3x-6)^2+c}$
c) $-\frac{2x}{9}\sqrt{(3x-6)^3}+\frac{4}{135}\sqrt{(3x-6)^5+c}$	d) $-\frac{2x}{9}\sqrt[3]{(3x-6)^2}+\frac{4}{135}\sqrt[5]{(3x-6)^2+c}$

4. $\int 3xcos3xdx$

a) $-xsen3x-\frac{1}{9}cos3x+c$	b) $-sen3x-\frac{x}{9}cos3x+c$
c) $xsen3x+\frac{1}{9}cos3x+c$	d) $sen3x+\frac{x}{9}cos3x+c$

Actividad 9

Resuelve las siguientes integrales aplicando integración por partes.

1. Integrar $\int 2x\sqrt{2x-4}\,dx$.
   Solución:

2. Integrar: $\int xcosxdx$
   Solución:

3. Integrar: $\int xsenxdx$
   Solución:

4. Integrar: $\int x^2e^x\,dx$
   Solución:

Fracciones parciales

¿Cómo integrarías una función racional?

El Álgebra nos enseña a combinar fracciones con un común denominador. Para integrar en ocasiones se requiere invertir este proceso; es decir, es necesario separar una función racional propia en una suma de fracciones simples que sean más fáciles de integrar.

Toda fracción racional propia se puede descomponer en la suma de fracciones simples, donde los factores del denominador determinan la forma de las fracciones simples.

Ejemplo 1. Si tenemos una integral: $\int \frac{dx}{(x+5)(x+2)}$, esto se descompone de la siguiente manera: $\frac{1}{(x+5)(x+2)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+2)}$

I. Calcular el valor de A y B, para ello necesitamos encontrar primeramente el valor para que se convierta en cero el denominador, en este caso los valores serán $x = -5$ y $x = -2$.

II. Para encontrar los coeficientes, se realizan las siguientes fracciones parciales:

$$A = \frac{1}{(x+2)},\ B = \frac{1}{(x+5)}$$

III. Se sustituye en A, $x = -5$

$$A = \frac{1}{(-5+2)},\ A = \frac{1}{-3}$$

IV. Se sustituye en B, $x = -2$

$$B = \frac{1}{(-2+5)},\ B = \frac{1}{3}$$

V. La nueva forma de la integral es:

$\int \left[\frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+2)}\right] dx$ y como ; $A = \frac{1}{-3}$ y $B = \frac{1}{3}$

$$\int \left[\frac{\frac{1}{-3}}{(x+5)} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+2)}\right] dx = \frac{1}{-3}\int \frac{dx}{x+5} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

VI. Aplicando la fórmula $\int \frac{du}{U} = ln|u| + C$

$$\frac{1}{-3} ln|x+5| + \frac{1}{3} ln|x+2| + C$$

Ejemplo 2. Si tenemos una integral: $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx$, esto se descompone de la siguiente manera, $\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$

I. Calcular el valor de A y B, para ello necesitamos encontrar primeramente el valor para que se convierta en cero el denominador, en este caso los valores serán $x = 3$ y $x = -2$.

II. Para encontrar los coeficientes, se realizan las siguientes fracciones parciales:

$$A = \frac{7x-1}{(x+2)},\ B = \frac{7x-1}{(x-3)}$$

III. Se sustituye en A, $x = 3$

$$A = \frac{7(3)-1}{(3+2)},\ A = \frac{20}{5},\ A = 4$$

IV. Se sustituye en B, $x = -2$

$$B = \frac{7(-2)-1}{(-2-3)},\ B = \frac{-15}{-5}, B = 3$$

V. La nueva forma de la integral es:

$\int \left[\frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}\right] dx$ y como ; $A = 4$ y $B = 3$

$\int \left[\frac{4}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)}\right] dx = 4\int \frac{dx}{x-3} + 3\int \frac{dx}{x+2}$

VI. Aplicando la fórmula $\int \frac{du}{U} = ln|u| + C$

$4ln|x-3| + 3ln|x+2| + C$

Actividad 10

Resuelve las siguientes integrales, aplicando fracciones parciales.

1. $\int \frac{x+3}{(2x+1)(x-1)}dx$

2. $\int \frac{3x-1}{(x+1)(5x+4)}dx$

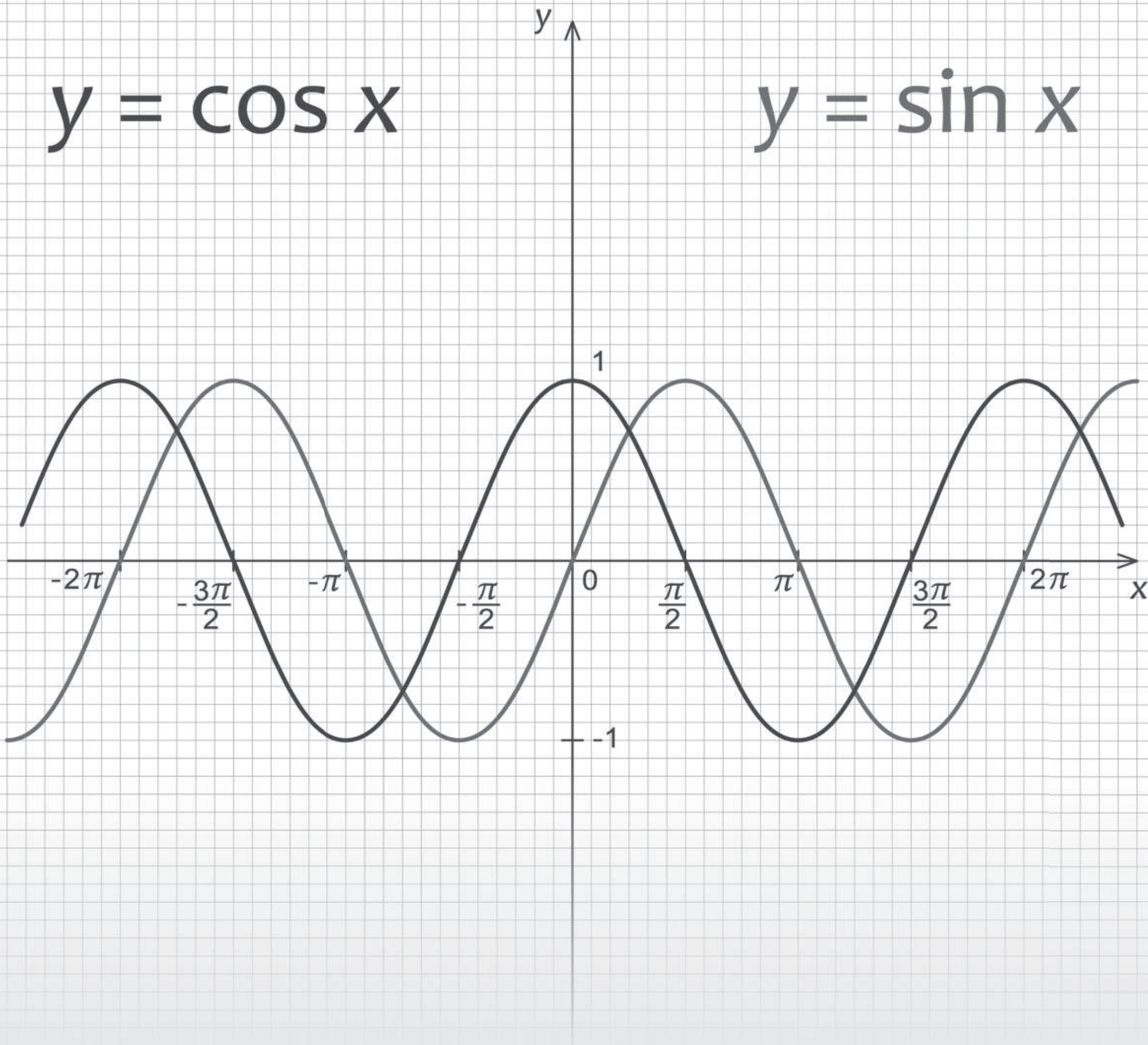
3. $\int \frac{3x+2}{(2x+1)(x+2)(x-1)}dx$

4. $\int \frac{5x+7}{x^2+x-2}dx$

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS GENÉRICAS

Autoevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓a los siguientes cuestionamientos.				
Nombre del alumno:	**Semestre:**		**Corte:**	
Grupo:	**Siempre**	**A veces**	**Difícilmente**	**Observaciones**
Indicador de desempeño:				
Asumo comportamientos y decisiones que me ayudan a lograr mis metas académicas.				
Soy consciente de mis hábitos de consumo y conductas de riesgo, favoreciendo mi salud física, mental y social.				
Puedo expresar mis ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.)				
Utilizo las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.				
Formulo hipótesis y compruebo su validez para la solución de problemas planteados en diversas asignaturas.				
Consulto diversas fuentes informativas y utilizo las más relevantes y confiables.				
Realizo trabajos donde aplico saberes de varias asignaturas.				
Me integro con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.				
Respeto las opiniones, creencias e ideas de mis compañeros.				
Contribuyo con acciones para la solución de problemas ambientales de mi comunidad.				

Coevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓a los siguientes cuestionamientos respecto al compañero asignado.				
Nombre del compañero:	**Semestre:**		**Corte:**	
Grupo:				
Tu compañero:	**Siempre**	**A veces**	**Difícilmente**	**Observaciones**
Asume comportamientos y decisiones que contribuyen a lograr las metas del grupo.				
Lleva a cabo hábitos de consumo que favorecen su salud física, mental y social.				
Expresa sus ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).				
Utiliza las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.				
Propone soluciones a problemas planteados en diversas asignaturas.				
Consulta diversas fuentes informativas y utiliza las más relevantes y confiables.				
Realiza trabajos donde aplica saberes de las asignaturas.				
Se integra con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.				
Respeta las opiniones, creencias e ideas de los compañeros.				
Participa en acciones para la solución de problemas ambientales de su entorno.				



BLOQUE III

CALCULAS E INTERPRETAS EL ÁREA BAJO LA CURVA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

BLOQUE III

CALCULAS E INTERPRETAS EL ÁREA BAJO LA CURVA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:

- Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno teórico.
- Compara el método de las Sumas de Riemann con las áreas obtenidas mediante la integral definida y determina las fortalezas y debilidades de ambos métodos, comprobándolo mediante software graficador (GeoGebra, mathgv, graph).
- Obtiene integrales definidas de funciones algebraicas y trascendentes en un contexto teórico y las visualiza como herramientas en la resolución de problemas reales.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

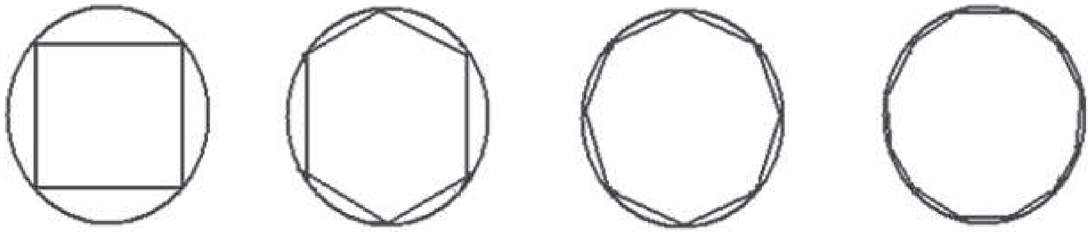
- Resuelve problemas de áreas mediante la sumas de Riemann en cualquier disciplina que tenga relación con su entorno.
- Resuelve problemas de áreas mediante la integral definida en cualquier disciplina que tenga relación con su entorno.
- Asume una actitud constructiva y congruente con las competencias con las que cuenta en el uso de las TIC como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de áreas bajo la curva en el contexto de la física, la geometría y la química.

OBJETOS DE APRENDIZAJE:

- Sumas de Riemann
- Integral definida

Se debe a Augustin Louis Cauchy la idea de basar el Cálculo en la definición del concepto de límite, y a partir de ello, los principales problemas a resolver por el Cálculo se han fundamentado en este concepto; la pendiente de una recta tangente a una curva, la velocidad instantánea de un móvil y los problemas relacionados con el cálculo de áreas limitadas por curvas, de las longitudes de arcos, volúmenes, trabajo, entre otras aplicaciones. En esencia, este proceso de límites, es el que el matemático alemán Bernhard Riemann utilizó para calcular numéricamente integrales definidas.

Hace más de 2000 años, Arquímedes ya había trabajado en el cálculo del área de una región limitada por una curva, mediante la inscripción de polígonos que ocuparan la mayor cantidad de región. Observando que el área exacta debía ser aquella que incluyera la mayor cantidad de polígonos en su interior para que se desperdiciara la menor área. Arquímedes inscribió diversos polígonos regulares en una circunferencia, aumentando cada vez el número de lados, para aumentar así la precisión del área.

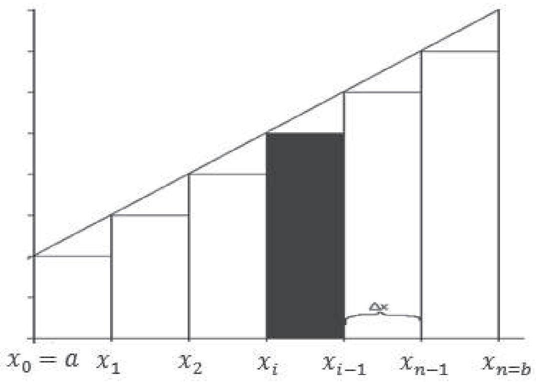


El filósofo Brison, contemporáneo de Sócrates, trató de calcular el área de un círculo por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

A este método se le conoce como proceso de reducción o exhaustivo porque a medida que el número de lados aumenta, la diferencia entre las áreas se va reduciendo.

Sumas de Riemann

Las sumas de Riemann aplicadas al cálculo de regiones planas, se pueden definir como la suma de “n” rectángulos que se pueden inscribir en una región definida en parte por una función f(x), en el intervalo [a, b], siempre que el número de rectángulos tienda a valer infinito (n→∞) como se muestra en las siguientes gráficas.



1. Seleccionamos el rectángulo con base $[x_i, x_{i-1}]$:

2. Establecemos el área del rectángulo ($A_i = base * altura$). Considerando que $f(x_i) = altura \;\; y \;\; \Delta x = base$ tenemos que:

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

Donde:

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

3. Si $n \to \infty$ entonces el área bajo la curva es $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$:

Propiedades de la notación sigma (Σ)

A continuación se te enlistan las propiedades de la notación sigma para desarrollar los ejemplos posteriores.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$

2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4. $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

De igual manera, se te enlistan algunas fórmulas para el cálculo de sumas especiales que te serán muy útiles al resolver ejemplos posteriores.

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

En los ejemplos siguientes aprenderás a aplicar las propiedades de la notación sigma así como el uso de fórmulas antes mencionadas para el cálculo de áreas de las regiones indicadas.

Ejemplo: Encuentra el área bajo la curva $f(x) = x + 1$ en el intervalo [0,2] por cualquier método y compara con el método de Riemann y construye su gráfica.

Área a calcular

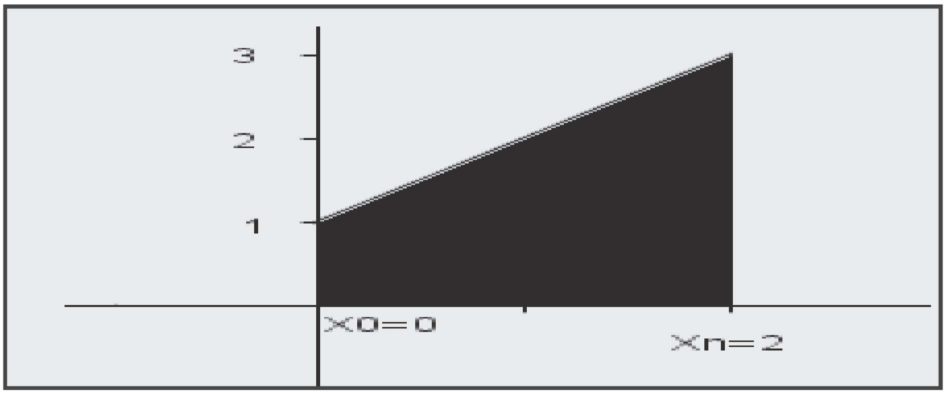


Figura 1

En la figura 2 observamos que el área que buscamos la podemos seccionar en un triángulo de área A_1 y en un rectángulo de área A_2. Así, mediante geometría elemental tenemos que:

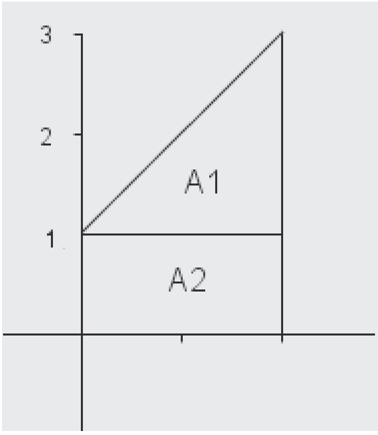


Figura 2

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{bh}{2}}$$

$$A_1 = \frac{(2)(2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boldsymbol{A_2 = bh}$$

$$A_2 = (2)(1) = 2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = 2 + 2$$

$$\boldsymbol{A_T = 4U^2}$$

Por otro lado, las sumas de Riemann se aplican como sigue:

Primero calculamos el valor de Δx, utilizando la fórmula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ de la siguiente manera. Tomamos los valores $a = 0$ y $b = 2$ de la figura 2 y la sustituimos en la fórmula anterior;

$$\Delta x = \frac{2-0}{n}$$

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

Entonces, se sabe que $x_i = a + i\Delta x$, entonces sustituimos el valor de "a" para conocer el valor de x_i.

$$x_i = 0 + i\Delta x$$
$$x_i = i\Delta x$$

Ahora sustituimos en la fórmula para calcular el área de la región indicada.

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Recordemos que $f(x)$ representa a la función original $[f(x) = x + 1]$.

Sustituyendo $f(x)$ $\quad A = \sum_{i=1}^{n}(x_i + 1)\,(\Delta x)$

Cambiando x_i por $i\Delta x$ $\quad A = \sum_{i=1}^{n}(i\Delta x + 1)\,(\Delta x)$

Multiplicando $\quad A = \sum_{i=1}^{n}(i\Delta x + 1)\,(\Delta x)$

$$A = \sum_{i=1}^{n}(i\Delta x^2 + \Delta x)$$

Sustituyendo Δx por $\frac{2}{n}$ $\quad A = \sum_{i=1}^{n}\left[i\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n}\right]$

Elevando al cuadrado $\quad A = \sum_{i=1}^{n}\left[i\left(\frac{4}{n^2}\right) + \frac{2}{n}\right]$

Aplicando la propiedad $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$, tenemos:

$$A = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{4}{n^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$

Reacomodamos: $A = \left(\frac{4}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$

Luego aplicamos la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$ y la propiedad $\sum_{i=1}^{n} c = cn$

$$A = \left(\frac{4}{n^2}\right)\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + \frac{2}{n}(n)$$

Multiplicando $A = \frac{4n^2+4n}{2n^2} + \frac{2n}{n}$

Simplificando tenemos $A = 2 + \frac{2}{n} + 2$

Recordemos que $n \to \infty$, entonces $\frac{2}{n} \to 0$

Así tenemos $A = 2 + 0 + 2$

$$A = 2 + 0 + 2$$

$$A = 4\,U^2$$

Actividad 1

En equipos de tres integrantes resuelvan los siguientes ejercicios.

1. Encuentra el área bajo la curva $f(x) = 3$ en el intervalo [1,3] por cualquier método, compara tu resultado con el método de Riemann y construye su gráfica.
   Solución:

2. Encuentra el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,3] con el método de Riemann y construye su gráfica.
   Solución:

3. Encuentra el área bajo la curva $f(x) = \frac{x}{2}$ en el intervalo [1,5] con el método de Riemann y construye su gráfica.
   Solución:

4. Encuentra el área bajo la curva $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + 1$ en el intervalo [-1,2] con el método de Riemann y construye su gráfica.

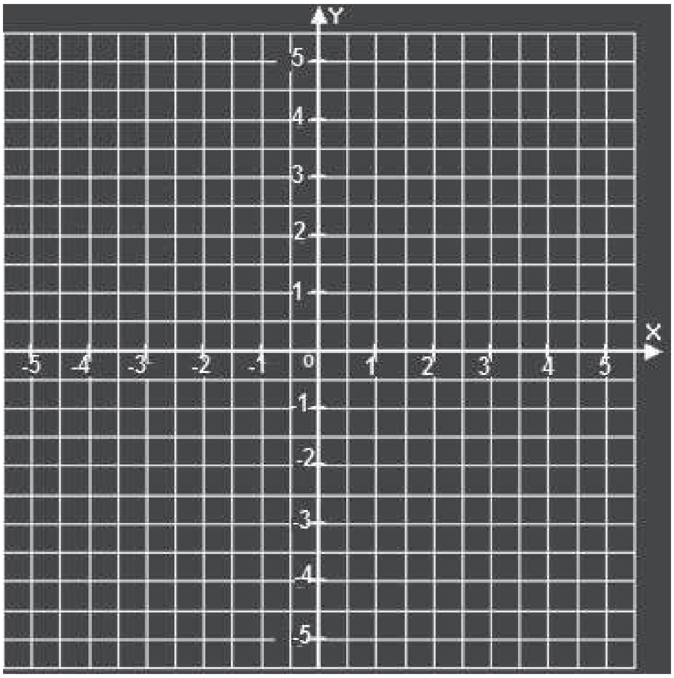
Teorema fundamental del Cálculo.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, el área bajo la curva descrita por $f(x)$ en $[a, b]$ se calcula como:

$$Area = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$. Los elementos a y b representan los límites de integración, que son los valores de x en orden creciente que permiten limitar el área.

a) Encuentra el área limitada por la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1,2]$, identificando en una gráfica el área de integración.



La primitiva de $f(x)$ se calcula mediante la integral $\int x^2 dx$. Como se mostró en el cálculo de las integrales indefinidas $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Para C=0 aplicamos el *teorema fundamental del cálculo* con $F(x) = \frac{x^3}{3}$ en el intervalo $[a, b] = [1,2]$.

$$F(b) - F(a) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Lo cual resulta ser el área bajo la curva: $\frac{7}{3}u^2$

Actividad 2

Mediante el teorema fundamental del cálculo, calcula el área bajo la curva en los intervalos señalados y traza las gráficas correspondientes.

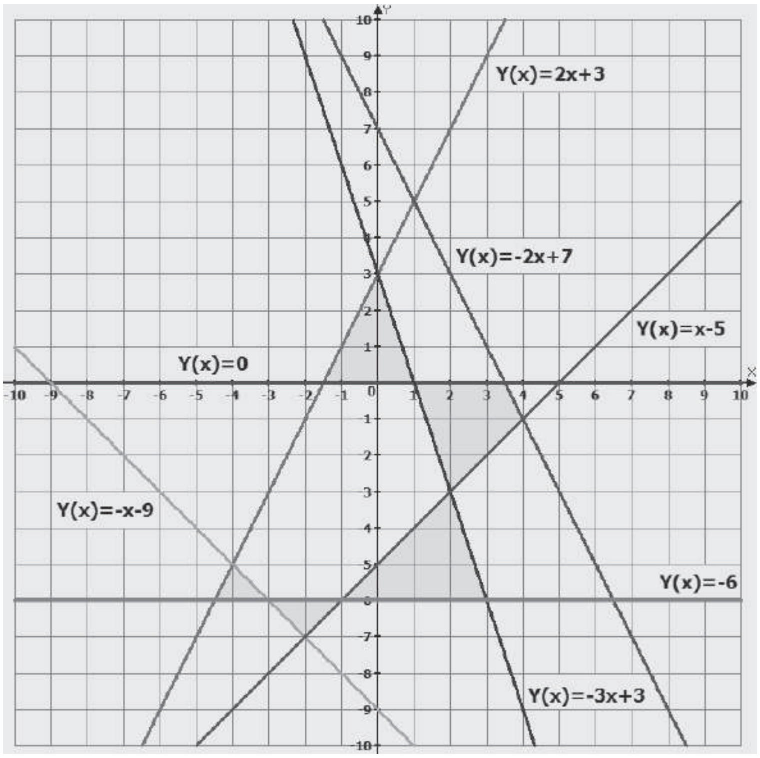
Recuerda que: $\int_a^b f(x)dx = -$ $baf(x)dx$

No.	$función$	$[a,b]$	Área=$\int_a^b f(x)dx$
1	$f(x) = x^3$	$[1,3]$	
2	$f(x) = \dfrac{2}{x^2}$	$[2,3]$	
3	$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$	$[-3,5]$	
4	$f(x) = 1 - x^2$	[-1,1]	

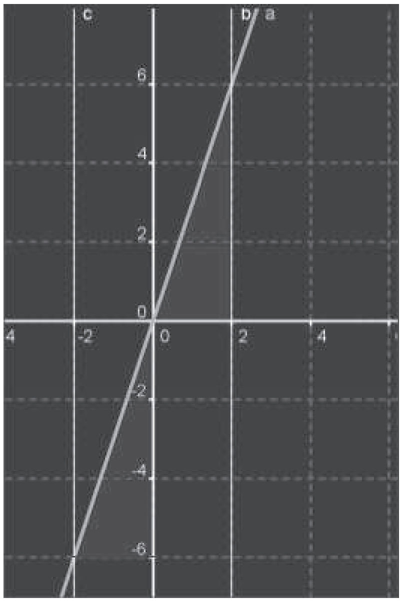
Es importante resaltar que utilizando el teorema fundamental de cálculo pueden obtenerse valores negativos de área como se muestra en la figura. Las áreas sombreadas que aparecen en la parte *inferior del eje x* tienen signo negativo cuando se calculan mediante el teorema fundamental del cálculo.

En algunos casos se pueden obtener áreas “cero” porque las áreas positivas y negativas son equivalentes y al realizar la suma de las mismas, éstas se cancelan.

Por eso, es muy importante que tengas cuidado con la localización que tiene el área que calculas.



Por ejemplo, al calcular el área de $f(x) = 3x$ en el intervalo $[-2,2]$ se verifica que $\int_{-2}^{2} 3x\, dx = 0$



$$\int_{-2}^{2} 3x dx$$

$$\left.\frac{3x^2}{2}\right|_{-2}^{2} =$$

$$\left(\frac{3(2)^2}{2}\right) - \left(\frac{3(-2)^2}{2}\right) =$$

$$6 - 6 = 0$$

O bien, el área total serán sus valores absolutos
A = 6 + 6 = 12 u^2

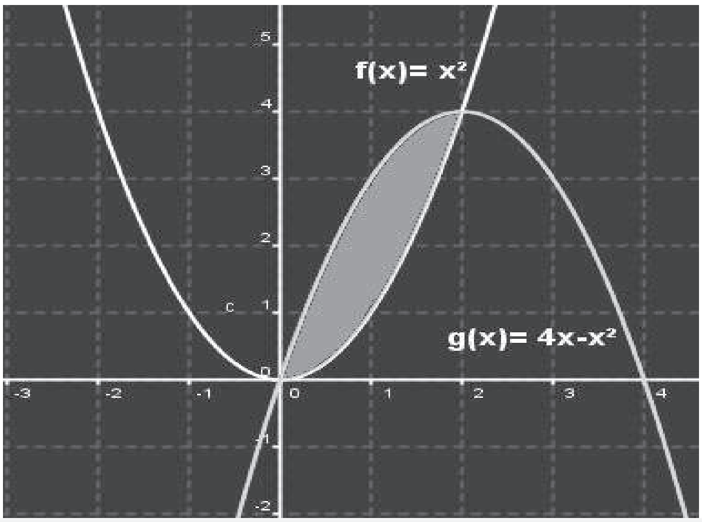
Área entre dos curvas

El teorema fundamental del cálculo se puede extender a dos o más funciones, aplicando las propiedades de la integral indefinidas:

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = [F(b) - G(b)] - [F(a) - G(a)]$$

Ejemplo: Encontrar el área entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$



Para encontrar el área que hay entre las 2 funciones, es necesario calcular los límites de integración $[a, b]$ y esto se hace igualando a las dos funciones para encontrar sus puntos de intersección cuando $f(x) = g(x)$, mediante los pasos siguientes:

Igualar ambas funciones	$x^2 = 4x - x^2$
Igualar a cero	$x^2 + x^2 - 4x = 0$
Simplificar	$2x^2 - 4x = 0$
Factorizar	$x(2x - 4) = 0$
Soluciones	$x_1 = 0,\ x_2 = 2$

Entonces el intervalo de integración es $[0,2]$, de tal manera que al sustituirlos en la función ya integrada:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_0^2 ((4x - x^2) - (x^2))\,dx$$

$$A = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx$$

$$A = \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^2 =$$

$$\left(\frac{4(2)^2}{2}\right) - \left(\frac{2(2)^2}{3}\right) - 0 =$$

$$A = 8 - \frac{16}{3} = 2.66u^2$$

Actividad 3

Calcula el área entre las curvas de las siguientes funciones. Justifica tus respuestas escribiendo tu procedimiento en los espacios en blanco.

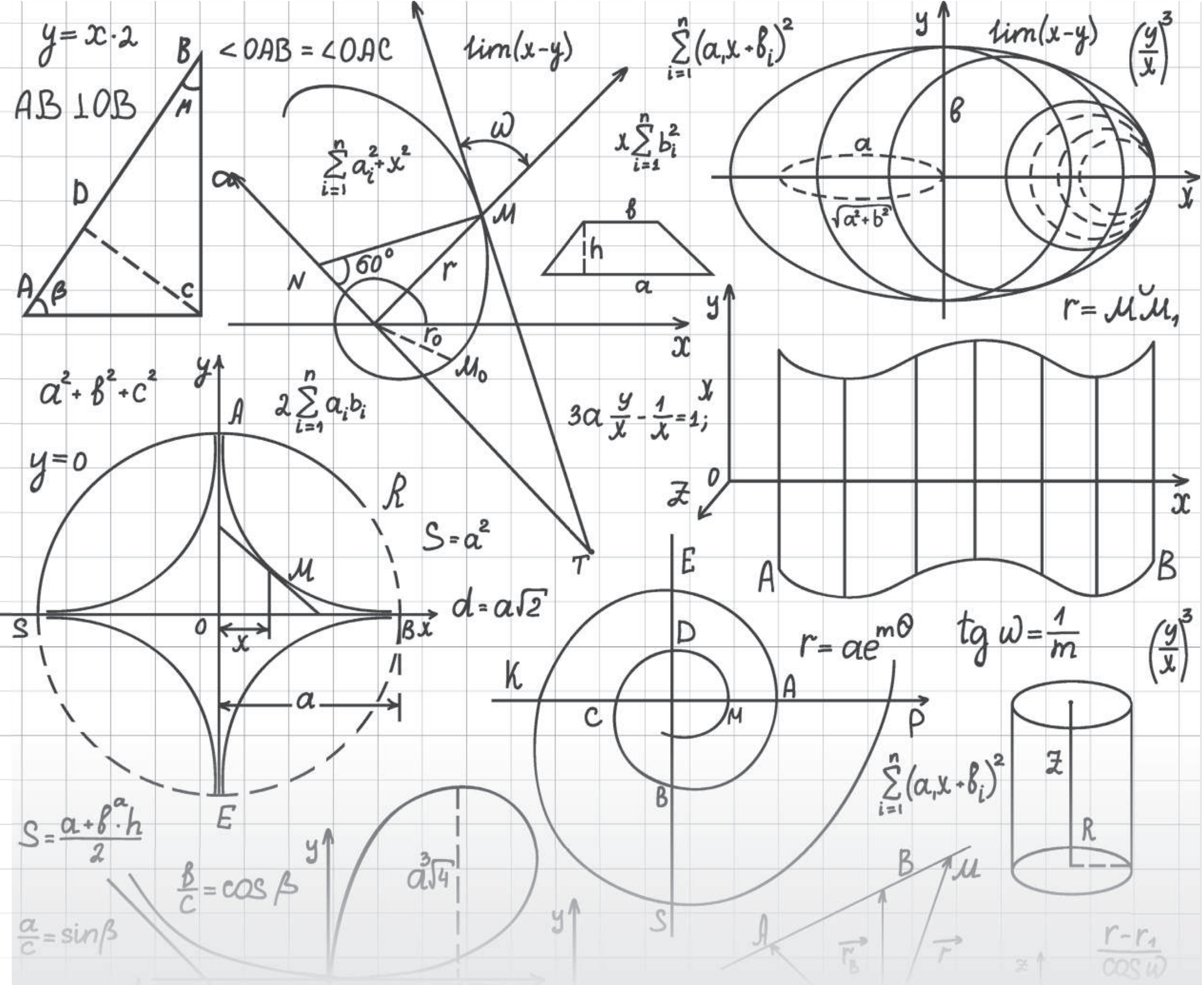
No.	Función F(x)	Función G(x)	Puntos de intersección (límites de la integral)	Área entre las curvas
1	$x^2 + 2$	$2x^2 - 7$		
2	$5 - x^2$	$3 - x$		
3	$\sqrt{x}$	x^2		
4	$x^2 - 1$	$1 - x^2$		

Solución No 1.

Solución No. 2

Solución No. 3

Solución No. 4



BLOQUE IV

RESUELVES PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN SITUACIONES REALES EN EL CAMPO DE LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

BLOQUE IV

RESUELVES PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN SITUACIONES REALES EN EL CAMPO DE LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:

- Aplica el concepto de sólido de revolución en el diseño de: envases, depósitos y contenedores en general, de formas homogéneas y heterogéneas.
- Aplica las integrales definidas en la solución de problemas de leyes de Newton (centro de masa, trabajo realizado por una fuerza, movimiento de partículas) o crecimientos exponenciales, resolviéndolos de manera autónoma utilizando los procesos aprendidos.
- Aplica las integrales definidas para resolver problemas de oferta y demanda de un bien (producto) o un servicio.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

- Identifica casos factibles de aplicación de la integral definida en el ámbito de las ciencias exactas, naturales y sociales.
- Aplica la integral definida para resolver problemas en el campo disciplinar de las matemáticas, física, biología y economía, administración y finanzas.
- Valora el uso de las TIC como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de aplicación de integrales definidas en cualquier contexto disciplinar.
- Asume una actitud constructiva, congruente a sus competencias para proponer maneras de solucionar un problema de su entorno mediante la aplicación de la integral diferenciada.

OBJETOS DE APRENDIZAJE:

- Áreas y volúmenes de sólidos de revolución
- Ley de Newton
- Crecimientos exponenciales
- Oferta y demanda

Las integrales se pueden utilizar también para resolver problemas de otras áreas del conocimiento, en donde el resultado puede interpretarse como un volumen, un centro de masa, la longitud de una curva, etc. A continuación encontrarás algunas de las aplicaciones más frecuentes de la integral.

Volumen de un sólido de revolución

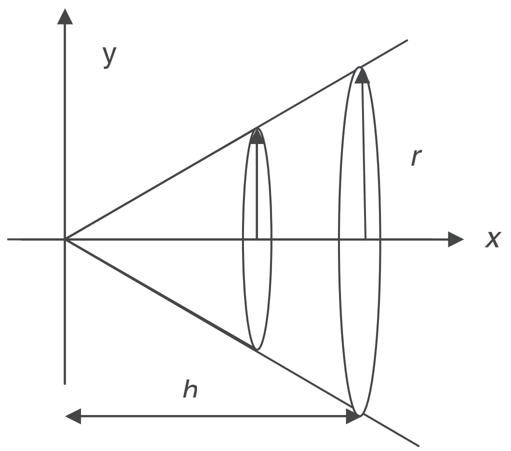
Cuando rotamos la región de área que está debajo de una función alrededor del eje x o algún otro eje determinado, lo que estamos obteniendo es un *sólido de revolución*. El volumen de este sólido se obtiene con la integral.

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$$

Esto es, porque vemos que gira una superficie y tendremos como elementos de secciones pequeñas cilindros de área, πr^2.

Ejemplo 1: Calcula el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *x* la región de área delimitada por el segmento de recta que pasa por el origen con pendiente $m=\frac{r}{h}$, el eje x y la recta x=h.

Solución: El sólido resultante al girar la región por debajo de la recta es un cono como se muestra en la figura. De modo que si $y=f(x)=\frac{r}{h}x$



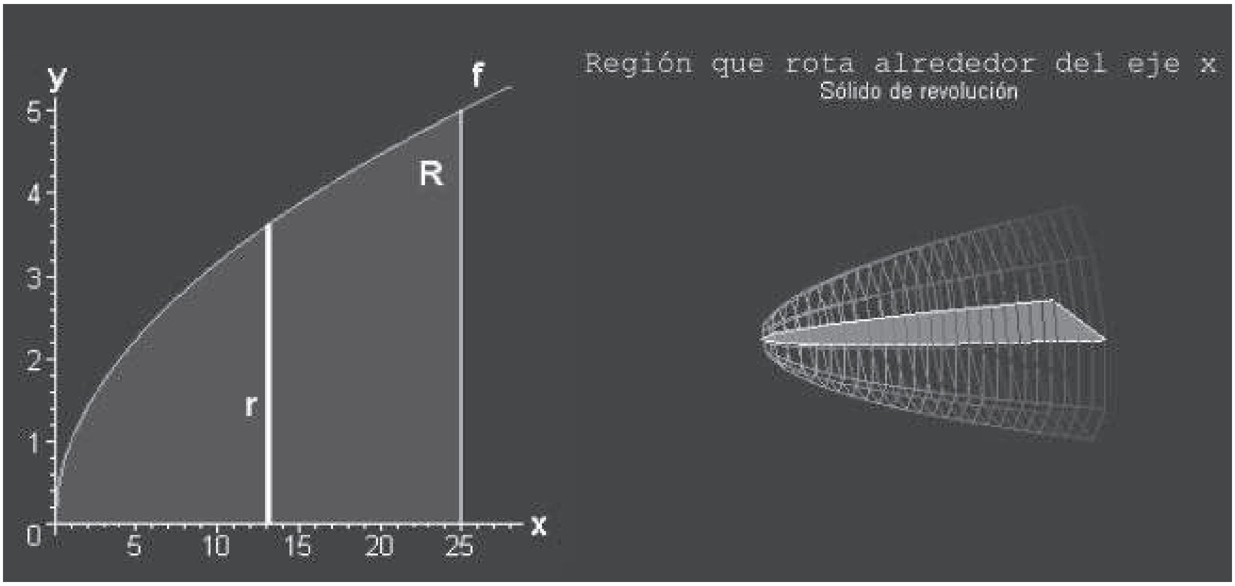
Entonces, el volumen es

$$V=\int_0^h \pi[f(x)]^2dx$$
$$=\int_0^h \pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2dx$$
$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$$
$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{0^3}{3}-\frac{h^3}{3}\right]=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

Lo cual demuestra que la fórmula para calcular el volumen de un cono de radio *r* y altura *h* es $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

Ejemplo 2: La región entre la curva $y = \sqrt{x}$ tal que $0 \leq x \leq 25$ y el eje x se gira alrededor del eje x para generar un sólido. Calcula su volumen.

Solución: La región y volumen que describen el problema son como sigue.



Para aplicar la fórmula que auxilia en el cálculo del volumen de revolución, tenemos que identificar quién es la función a sustituir y el intervalo de integración. Para el presente ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$, a = 0 y b = 25. Entonces tenemos que:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{25} \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{25} x dx$$

$$V = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{25}$$

$$V = \pi \left[\frac{(25)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right] = \frac{625\pi}{2}\ u^3$$

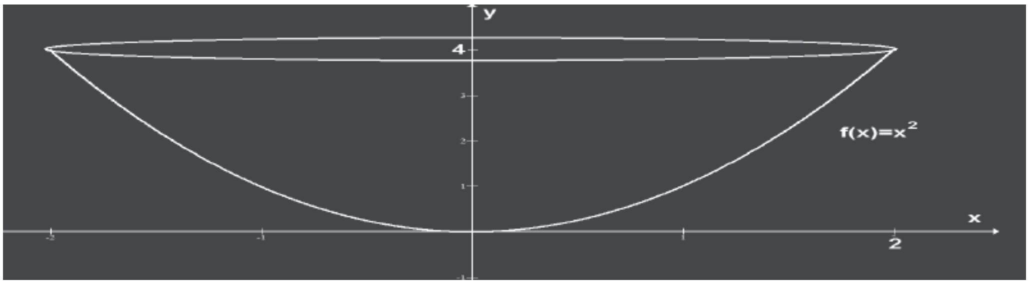
Actividad 1

Intégrate en equipos de tres alumnos para calcular el volumen de los sólidos que se describe en cada ejercicio.

1. Considera el segmento de recta que une el origen *O(0,0)* y el punto *P(2,4).* Calcula el volumen que se genera al hacer girar el segmento $\overline{OP}$ alrededor del eje *x.*
   Solución:

2. Calcula el volumen de un bote de soda de 12 cm de alto y 3 cm de radio aplicando la fórmula de la integral para un sólido de revolución. Posteriormente aplica la fórmula para calcular el volumen del sólido de revolución para determinar el volumen de un cilindro de radio *r* y altura *h*.
   Solución:

3. Calcula el volumen del sólido que se genera al hacer girar la curva $f(x) = x^2$ definida en el intervalo [0,2] alrededor del *eje y*.



Solución:

Movimiento rectilíneo

La velocidad y la aceleración de un móvil están relacionadas con el desplazamiento a través de las siguientes fórmulas:

$$S(b) - S(a) = \int_a^b v(t)dt \qquad \text{y} \qquad v(b) - v(a) = \int_a^b a(t)dt$$

Donde: *S(t)* es el desplazamiento al instante t.
v(t) es la velocidad al instante t.
a(t) es la aceleración instante t .

Ejemplo: Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ en metros por segundo. Encuentra el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo $1 \leq t \leq 4$.
Solución.

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 (t^2 - t - 6)dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = \left[\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6(4)\right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 6(1)\right] = -\frac{9}{2} = -4.5\ m$$

Esto significa que la partícula se desplazó 4.5 m hacia la izquierda.

Actividad 2

Intégrate en parejas para resolver correctamente los siguientes problemas.

1. Un cuerpo inicia su movimiento desde el reposo en una trayectoria recta con una aceleración constante de 2 m/s^2. ¿Cuál es su velocidad a los 2.5 segundos de iniciado su movimiento?
   Solución:

2. Un objeto se mueve de forma rectilínea tal que su velocidad en el instante t es $v(t) = e^{-t} + 4$ metros por segundo. Encuentra el desplazamiento del objeto durante los tres primeros segundos.
   Solución:

3. Calcula el desplazamiento de un móvil con velocidad $v(t) = 2t^2 + t - 3$ desde los k segundo de haber iniciado su trayectoria rectilínea hasta los $k + 1$ segundos.
   Solución:

Oferta y demanda

Ganancia de productores y consumidores.

La integral definida también se utiliza en la Administración y Economía para hacer modelos de situaciones de mercado, en el estudio de las funciones de oferta y demanda.

Función de oferta:

Una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad.

Se puede decir que en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún periodo específico. Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida; esto permite asegurar que la función de oferta es una función creciente.

Función de demanda:

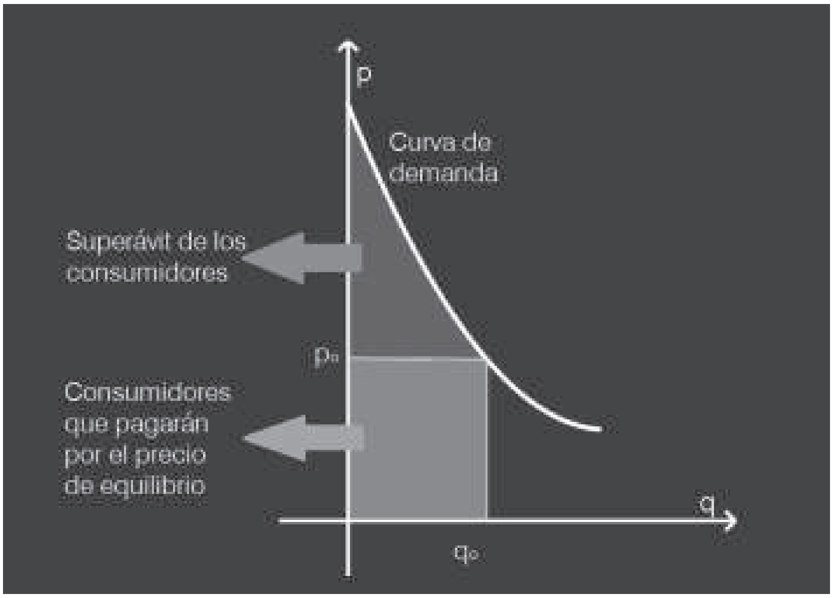
La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandada por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda.

En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo. La demanda disminuye al aumentar el precio por eso esta función es una función decreciente.

Superávit de consumidores y productores

El mercado determina el precio al que un producto se vende. El punto de intersección de la curva de la demanda y de la curva de la oferta para cada producto da el precio de equilibrio. En el precio de equilibrio, los consumidores comprarán la misma cantidad de producto que los fabricantes quieren vender. Sin embargo, algunos consumidores aceptarán gastar más en un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas las personas aceptan pagar se considera como un ahorro de esas personas y se llama superávit de los consumidores.

El área entre la curva que describe la función demanda $d(q)$ y la recta $p = p_0$ es el superávit de los consumidores y el área delimitada por debajo de la recta $p = p_0$ y la función demanda, es la cantidad de consumidores que gastarán en el precio de equilibrio, como se muestra en la siguiente gráfica.



Entonces el valor del superávit de los consumidores está dado por la integral definida de esta forma:

$$\int_0^{q_0} [p(q) - p_0]dq$$

Donde $p(q)$ es una función demanda con precio de equilibrio p_0 y demanda de equilibrio q_0

Ejemplo: La demanda de un producto, en dólares, es

$$p(q) = 1200 - 0.2q - 0.0001q^2$$

Encuentra el superávit del consumidor, cuando el nivel de venta es de 500.

Solución: Puesto que la cantidad de productos vendidos es de $q_o = 500$, el precio correspondiente,

$$p(q = 500) = p_o = 1200 - (0.2)(500) - (0.0001)(500)^2 = 1075$$

Por tanto, a partir de la definición el superávit del consumidor es:

$$\int_0^{500} [p(q) - p_0]dq = \int_0^{500} (1200 - 0.2q - 0.0001q - 1075)dq$$

$$= \int_0^{500} (125 - 0.2q - 0.0001q^2)dx = 125q - \frac{0.2q^2}{2} - 0.0001\frac{q^3}{3} = \$33{,}333.33$$

Actividad 3

Resuelve cada uno de las siguientes situaciones.

1. Se da una curva de demanda por $p(q) = \frac{1000}{q+20}$. Halla el superávit del consumidor cuando el precio de venta es de $20 dólares.
   Solución:

2. La función de demanda para cierto artículo es $p(q) = 5 - \frac{q}{10}$. Encuentra el superávit del consumidor cuando el nivel de venta es 30.
   Solución:

3. Si s(q) es una función de oferta con precio p_o de equilibrio y oferta q_o de equilibrio, entonces el superávit de los productores es $\int_o^{q_o} p_o - s(q)\, dq$. Se conoce que la curva de la oferta para un producto es $s(x) = \frac{x}{2} + 7$. Encuentra la ganancia de los productores si la producción asciende a diez artículos.
   Solución:

Actividad final. Resuelve los siguientes problemas en equipos de 3 o 4 personas.

1. La región entre la función y=x tal que $o \leq x \leq 3$ y el eje x gira alrededor del eje x. Calcula el volumen del sólido que se genera.

2. Se conoce que la curva de la oferta para un producto es $s(q) = 4 - q^2$. Encuentra la ganancia de los productores si la producción asciende a 10 artículos.

3. La empresa *Pager* se encarga de distribuir libros de matemáticas y su costo marginal está dado por la función $Cm(q) = \frac{1}{20}q^2 - 2q + 60$, donde x indica el número de libros que se producen al día. La distribuidora tiene costos fijos Cf = $1,000 pesos diarios. Calcula el costo total $Ct(q) = \int Cm\,(q)dq + Cf$ de producir x unidades por día.

4. Juan lanza una pelota hacia arriba desde una altura de 3 m sobre el nivel del suelo, le imprime a la pelota una velocidad inicial de 4 m/seg. Gracias a la física se sabe que la velocidad respecto al tiempo está dada por la función $f(t) = v_o - gt$, donde $g = 9.8 \ {}^{m}/_{s^2}$ es el valor de la gravedad de la Tierra. Encuentra $s(t)$ la función que da la altura de la pelota en un tiempo t.

5. El huevo de un águila cae desde el nido que se encuentra en un risco a 300 m de altura. Su velocidad inicial a los t segundos está determinada por la función $v(t) = -9.8 \ km/s$. Encuentra $s(t)$ la altura de la posición del huevo desde el suelo al tiempo t.

6. La fábrica de llantas *La Rueda* tiene una producción $P(t)$ después de t horas de trabajo. Asume que la tasa de producción está dada por la función $f(t) = 30 + 2t - \frac{1}{2}t^2$ llantas por hora. Encuentra la función de la producción total. *Pista:* Identifica $P'(t)$ y considera $P(0) = 0$

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS GENÉRICAS

Autoevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓a los siguientes cuestionamientos.				
Nombre del alumno:	**Semestre:**		**Corte:**	
Grupo:	**Siempre**	**A veces**	**Difícilmente**	**Observaciones**
Indicador de desempeño:				
Asumo comportamientos y decisiones que me ayudan a lograr mis metas académicas.				
Soy consciente de mis hábitos de consumo y conductas de riesgo, favoreciendo mi salud física, mental y social.				
Puedo expresar mis ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).				
Utilizo las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.				
Formulo hipótesis y compruebo su validez para la solución de problemas planteados en diversas asignaturas.				
Consulto diversas fuentes informativas y utilizo las más relevantes y confiables.				
Realizo trabajos donde aplico saberes de varias asignaturas.				
Me integro con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.				
Respeto las opiniones, creencias e ideas de mis compañeros.				
Contribuyo con acciones para la solución de problemas ambientales de mi comunidad.				

Coevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓a los siguientes cuestionamientos respecto al compañero asignado.				
Nombre del compañero:	**Semestre:**		**Corte:**	
Grupo:				
Tu compañero:	**Siempre**	**A veces**	**Difícilmente**	**Observaciones**
Asume comportamientos y decisiones que contribuyen a lograr las metas del grupo.				
Lleva a cabo hábitos de consumo que favorecen su salud física, mental y social.				
Expresa sus ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).				
Utiliza las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.				
Propone soluciones a problemas planteados en diversas asignaturas.				
Consulta diversas fuentes informativas y utiliza las más relevantes y confiables.				
Realiza trabajos donde aplica saberes de las asignaturas.				
Se integra con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.				
Respeta las opiniones, creencias e ideas de los compañeros.				
Participa en acciones para la solución de problemas ambientales de su entorno.				

BIBLIOGRAFÍA

1. De Oteyza, Elena. Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral. Pearson. 2006.
2. Leithold, L. El Cálculo. México: Oxford University Press. 2009.
3. Stewart, J. Cálculo Diferencias e Integral. México: CENGAGE Learning. 2007.

COMPETENCIAS GENÉRICAS QUE EXPRESAN EL PERFIL DEL EGRESADO

Se autodetermina y cuida de sí

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
- Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.
- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

- Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.
- Participa en prácticas relacionadas con el arte.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

- Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
- Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.
- Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

Se expresa y se comunica

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
- Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Piensa crítica y reflexivamente

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende de forma autónoma

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Trabaja en forma colaborativa

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Participa con responsabilidad en la sociedad

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

- Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
- Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
- Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
- Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
- Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
- Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

- Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.
- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
- Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.

11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

- Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
- Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
- Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

MIS NOTAS: