MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

Segundo Cuatrimestre

Enero – Abril

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1978 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra universidad inició sus actividades el 19 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a las instalaciones de carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de educación que promueva el espíritu emprendedor, basados en Altos Estándares de calidad Académica, que propicie el desarrollo de estudiantes, profesores, colaboradores y la sociedad.

Visión

Ser la mejor Universidad en cada región de influencia, generando crecimiento sostenible y ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Pasión por Educar"

Balam

Es nuestra mascota, su nombre proviene de la lengua maya cuyo significado es jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen a los integrantes de la comunidad UDS.

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

Objetivo de la materia:

Adquirir la disciplina y el rigor precisos para el trabajo intelectual. - Fomentar y desarrollar la capacidad para el razonamiento abstracto. - Adquirir los conocimientos matemáticos imprescindibles para un universitario. - Potenciar las habilidades de cálculo más allá de las reglas elementales. - Iniciar el estudio de los temas matemáticos con mayor aplicación en el campo de las humanidades y las ciencias sociales.

UNIDAD I

1.1.- Lógica: lenguaje.

1.2.-Calculo proporcional.

1.3.- Teoría deductiva

1.4.- Simbolización de proposiones.

UNIDAD II

2.1.- Rectas en el plano y desigualdades lineales.

2.1.- Rectas en el plano y desigualdades lineales.

2.2.- Sistemas lineales de ecuaciones.

2.2.- Sistemas lineales de ecuaciones.

UNIDAD III

3.1.- Parábolas y ecuaciones cuadráticas.

3.1.- Parábolas y ecuaciones cuadráticas.

3.2. Polinomios.

3.2. Polinomios.

UNIDAD IV

4.1. Funciones radicales y transcendentes

4.1.- Funciones radicales y transcendentes

4.2. Derivación

4.2.- Derivación

Unidad I

1.1 lógica: lenguaje

Álgebra, rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. La aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que 32 + 42 = 52). El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: a2 + b2 = c2. Un número multiplicado por sí mismo se denomina cuadrado, y se representa con el superíndice 2. Por ejemplo, la notación de 3 × 3 es 32; de la misma manera, a × a es igual que a2. El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos

Símbolos y lenguaje

Entre los símbolos algebraicos se encuentran números, letras y signos que representan las diversas operaciones aritméticas. Los números son, por supuesto, constantes, pero las letras pueden representar tanto constantes como variables. Las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables. Operaciones y agrupación de símbolos La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basa en los símbolos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales —también llamadas vínculos— que suelen usarse para representar la división y las raíces, como en el siguiente ejemplo:

(Ax + B) / (C – DX)

Lenguaje común expresado en lenguaje algebraico

Los enunciados de un problemas de planteo conllevan un lenguaje simbólico entregado por la Lógica y Matemática, este lenguaje nos permite plantear y resolver los problemas siguiendo los pasos que nos permite el Algebra en la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones simultáneas. Algunos expresiones más comunes son:

Un número aumentado en n unidades: $x + n$

El doble de un número : $2x$

El triple de un número disminuido en k unidades: $3x - k$

El doble de un número aumentado en 5 : $2x + 5$

La tercera parte de un número : $3/x$

La cuarta parte de un número aumentado en p : $p/x + 4$

La quinta parte de diferencia entre un número y 8 : $(x - 8)/5$

El doble de la suma entre un número y 7 : $2(x + 7)$

Un número multiplicado por si mismo : x^2

Un número aumentado en 7 y multiplicado por el mismo número disminuido en 6 : $(x + 7)(x - 6)$

La diferencia de dos números es 6 : $(x - y) = 6$

La suma de 2 números es 15 : $(x + y) = 15$

El recíproco de un número : $1/X$

1.2 calculo proporcional

El desarrollo de la Lógica proposicional (tipo de lógica simbólica) se da por insuficiencias o limitaciones de la lógica clásica. Recordemos que la Lógica clásica (lógica aristotélica) toma a las proposiciones universales como proposiciones que no implican un compromiso existencial. Por lo tanto cuando decimos "Los monos son ratones gordos", que puede ser expresado bajo la forma S es P no me comprometo con que existan ni los monos ni los ratones gordos. En cambio cuando digo que Algún mono es un ratón gordo, me comprometo con la creencia en la existencia de al menos un individuo que sea mono y que también sea una ratón gordo. Este abordaje se preocupa por la relación entre las clases que integran los enunciados, independiente de la verdad o falsesd de sus componentes.

La lógica proposicional, por su parte, se concentra en el análisis de las proposiciones de los argumentos y las relaciones que existen entre ellas. Este análisis se conoce como veritativo funcional pues el valor de verdad de los argumentos depende ahora del valor de verdad de sus enunciados y de la forma en que estos se conectan, que ya no es de la forma dada por la tercera persona del indicativo del verbo ser, como usaba el esquema aristotélico. Dicho de otra manera la lógica proposicional estudia las relaciones entre las proposiciones sin analizar, sin tener en cuenta la estructura interna de las mismas.

Es en el siglo XX, recién, cuando la lógica conoce un desarrollo enorme a partir del cálculo proposicional. En verdad, si bien el interés inicial de la lógica fue el análisis de los argumentos concretos el desarrollo enorme que tuvo esa disciplina hizo que se fuera alejando de ese interés primero y se centrara luego en las propias estructuras, independientemente de si servían al análisis argumental o no. Algo parecido puede pensarse en el desarrollo de la matemática que comenzara como matemática aplicada y, sin dejar ese costado, desarrollara fuertemente lo que se conoce como matemática pura, es decir, una matemática cuyo valor de estudio y desarrollo no es directamente su aplicación, sino el estudio de las verdades matemáticas. Algo similar pasó con la lógica que empezó como lógica aplicada y desarrolló enormemente lo que podemos llamar lógica pura.

El cálculo proposicional (la lógica proposicional) forma sólo una parte de la lógica simbólica. Pero su funcionamiento es lo suficientemente importante y fundamental como para centrarnos en ella afin de comprender algunos procedimientos básicos de la lógica simbólica.

Lenguaje del Cálculo Proposicional:

Como ya dijimos anteriormente la lógica es un lenguaje formal, y como tal está constituido por un conjunto de signos y reglas característico: signos del lenguaje (tabla de símbolos), reglas sintácticas (reglas para la construcción de expresiones del lenguaje) y reglas semánticas (reglas que nos permiten encontrar un valor de verdad para las expresiones del lenguaje a partir de los valores de verdad de sus componentes)

La lógica proposicional permite la realización de cálculos, para lo cual traduce el lenguaje ordinario a fórmulas lógicas, transforma tales fórmulas en otras, es decir deduce unas de otras.

Los valores de verdad que usará la el cálculo proposicional serán solamente el de verdad (o verdadero) simbolizado por una "v" y el de falsedad (o falso) simbolizado por una "f".

Cuando hablamos de cálculo nos estamos refiriendo a un sistema de relaciones entre símbolos no interpretados que permite realizar operaciones con ellos.

El lenguaje del cálculo proposicional recibirá el nombre de Lenguaje L.

Signos del lenguaje:

Cuando hablamos de símbolos formales en el contexto del cálculo proposicional (a veces llamados signos elementales) nos referimos a tres tipos de signos:

1. Variables proposicionales o letras enunciativas: son letras que simbolizan proposiciones atómicas (proposiciones que no contienen conectivos binarios, las que los contienen reciben el nombre de proposiciones moleculares). Se llaman variables porque cada una de ellas puede representar de forma indistinta cualquier proposición. Dichas 3 letras se utilizan en minúscula y en orden alfabético, vale recordar que por una convención en la literatura lógica se utiliza a partir de la p. (p, q, r, s, t...)

2. Operadores o constantes lógicas: son símbolos que sirven para relacionar las proposiciones entre sí. Se los conoce con el nombre de conectivas. El conjunto de los conectivos es un conjunto finito. Se considerarán conectivos del cálculo proposicional a los siguientes símbolos:

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \text{ (Condicional)}\\ \leftrightarrow \text{ (Bicondicional)}\\ \wedge \text{ (Conjunción)}\\ \text{v (Disyunción)}\end{array}\right\}\text{Conectivos Binarios}$$

$$\left.\neg \text{ (Negación)}\right\}\text{Conectivo unario}$$

3. Símbolos auxiliares: son símbolos que sirven para indicar como se agrupan los componentes de una fórmula y cuál es la conectiva principal o dominante. Estos signos auxiliares serán los paréntesis (,). Podría usarse una gama más amplia de signos (corchetes, etc.), pero no resulta imprescindible.

Reglas sintácticas:

La misión del conjunto de estas reglas de formación es establecer la combinación correcta de signos elementales brindando una adecuada noción de expresión bien formada o formula bien formada del cálculo proposicional. De esta manera tenemos un test que nos permite decidir ante una cadena dada de signos del lenguaje L bajo qué condiciones esa cadena puede ser considerada correcta y por lo tanto ser tenida como una expresión del lenguaje en cuestión.

Mientras que no siempre los hablantes de los lenguajes naturales formulan explícitamente las reglas que rigen esos lenguajes, necesariamente deben formularse en los lenguajes formales. Las reglas que indican qué cosas serán tenidas por fórmulas bien formadas o fórmulas, serán tres.

La primera regla es que toda letra proposicional será considerada una fórmula.

La segunda indica que si algo es considerado fórmula, entonces la negación de ese algo también será una fórmula del lenguaje L.

La tercera regla señala que si dos cosas son fórmulas entonces la unión de ellas encerradas entre paréntesis y unidas a través de un conectivo binario, también será considerado una fórmula.

Digámoslo ahora de manera un poco más formalizada: Sea For el conjunto de las fórmulas del lenguaje L

1°) Toda letra proposicional $\subset$ For.

2°) Si $\alpha \in$ For entonces $\neg\alpha \in$ For.

3°) Si α, $\beta \in$ For entonces $(\alpha * \beta) \in$ For, donde $* \in$ CB, siendo CB el conjunto de los conectivos binarios.

Por lo tanto, para formar correctamente las fórmulas en este cálculo, es preciso tener en cuenta los siguientes requisitos:

• El negador (en tanto que conectivo unario) se antepone tanto a fórmulas atómicas (una variable), como a fórmulas moleculares. Por ejemplo:

$\neg$ p,

$\neg$ (p ∨ q)

$\neg$ ((p ∨ q) ∧ (p ∧ q))

• Las restantes conectivas unen dos fórmulas cualesquiera (esto es, dos variables proposicionales, dos fórmulas, una formula y una variable proposicional). Por ejemplo:

(p ∨ q),

(p ∨ q) ∧ (p ∧ q)

((p ↔ q) → q)

Si bien una de las regla de formación de expresiones obliga a la utilización de los paréntesis para toda fórmula molecular, en el curso evitaremos aquellos paréntesis cuya omisión no genere problema de ambigüedad en la fórmula.

1.3 teoría deductiva

Este curso se ocupa de las cadenas deductivas, dentro y fuera de las matemáticas, como un arte a practicar, no como una teoría. Es la ´única manera conocida de embarcar en el pensamiento deductivo a la mayoría de la clase. En el primer capítulo se aprende a pensar matemáticamente sin pensar en matemáticas, gracias a las afirmaciones sobre veraces y mitómanos, y a los silogismos categóricos, que son los primeros teoremas que hay que saber demostrar, antes de demostrar en matemáticas.

El arte de demostrar no se aprende fácilmente dentro de las matemáticas, ya que toda demostración matemática es una disertación conducida por el autor, según cierta línea de pensamiento que suele no corresponder al esquema mental del lector, quien al sentirse marginado del tema se desconecta.

Eso no ocurrirá en las demostraciones de este curso ya que, desde la primera lección, sobre demostración indirecta, las inferencias se hacen según patrones establecidos, al alcance de todos los participantes, sin obligarlos a adoptar estilos ajenos. Su ensayo paciente y repetido hará que cada alumno capte la idea de demostración.

Para garantizar el ´éxito correspondiente, hay que concederle a cada tema el tiempo requerido para su maduración, según la tabla siguiente:

1. Demostración Indirecta (2 semanas)
2. Esquema Deductivo (Una clase)
3. Demostración Directa (3 semanas)
4. Otros Ejemplos (2 semanas)

Este intento debe desarrollarse en forma de taller, donde los alumnos participen activamente y el profesor se concrete a hacer preguntas como las siguientes:

¿Qué significa eso?

– ¿Adónde queremos llegar?
– ¿Que sabemos al respecto?
– ¿Por qué ya está demostrada esa afirmación?

Para esta ´última pregunta, la respuesta obligada es:

– Porque hemos partido de la hipótesis, que es el paso tal, y hemos llegado a la tesis, que es el paso tal.

O bien:

– Porque hemos partido de su negación, que es el paso tal, y hemos llegado a una contradicción, que está en los pasos tal y tal.

Para imprimir dinamismo y gracia a las demostraciones hay que valerse de ciertas palancas, como definir sobre la marcha cuando se llegue a una existencial, proceder por casos, o por exclusión, cuando se llegue a una disyunción, y demostrar sobre la marcha cuando el paso considerado no se desprenda fácilmente de los pasos anteriores.

En los apartados 1, 2, 3, 4 se adquieren los hábitos y la disciplina que permiten avanzar en materia de demostraciones. De ahí se puede saltar al apartado 13, si se quiere, regresando a 8, 10 y 12, según se vayan necesitando. Los tiempos recomendados para estos temas son:

8. Negaciones (1 semana)
10. Demostración por Casos (2 semanas)
12. Definición de igualdad (2 clases)
13. Conjuntos (2 clases)
14. Unión e Intersección (2 semanas)

Aunque este libro contiene material suficiente para un curso anual de licenciatura, en el caso de un curso semestral debe optarse por alguna selección de temas. He aquí algunas recomendaciones:

Licenciatura en humanidades: capítulo I, completo.
Licenciatura en matemáticas: secciones marcadas con asterisco.
Licenciatura en ciencias: capítulo II, precedido de los asteriscos de I.

No importa tanto la cantidad de temas que se cubran, como la intensidad de las vivencias adquiridas. Hay que vivir las demostraciones, tal como se vive un relato agradable.

Los frutos de este curso no surgen tanto de la simple lectura de sus páginas, como de su mejor laboratorio, que es la participación de un grupo frente al pizarrón, en presencia del profesor. Esto aporta experiencias inéditas acerca del quehacer deductivo, y de sus múltiples tropiezos con el credo común.

1.4 simbolización de proposiciones

Proposiciones Con el estudio de la Lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso. La Lógica tiene un lenguaje exacto. Pero aunque así sea, vamos a intentar construir un vocabulario para este lenguaje preciso utilizando el lenguaje cuotidiano algunas veces un tanto confuso. Es necesario redactar un conjunto de reglas que sean perfectamente claras y definidas y que estén libres de las vaguedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente. Para realizar este trabajo se utilizarán proposiciones en lengua castellana, de la misma manera que se usa la lengua castellana para explicar las reglas precisas de un juego a alguien que no ha jugado a ese juego. Por supuesto, la lógica es algo más que un juego. Puede ayudarnos a aprender una forma de razonar que es exacta y a la vez muy útil.

Para empezar, consideremos las proposiciones en lengua castellana. Cada proposición tiene una forma lógica a la que se le dará un nombre. En primer lugar, se consideran y simbolizan dos clases de proposiciones en Lógica; unas se denominan proposiciones atómicas y otras proposiciones moleculares. En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra atómico muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, atómicas son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición molecular.

En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra atómico muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, atómicas son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición molecular. Una proposición atómica es una proposición completa sin términos de enlace. Se utilizan términos de enlace para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Por ejemplo, considérense dos proposiciones atómicas,

Hoy es sábado.

No hay clases

Ambas proposiciones son atómicas. Mediante un término de enlace se pueden unir y se tendrá una proposición molecular. Por ejemplo, se puede decir:

Hoy es sábado y no hay clase.

Esta proposición molecular se ha construido con dos proposiciones atómicas y el término de enlace «y». Cuando analizamos una proposición molecular la descomponemos en las más pequeñas proposiciones atómicas completas. En el ejemplo anterior se puede descomponer la proposición molecular en dos proposiciones atómicas. El término de enlace «y» no forma parte de ninguna de las proposiciones atómicas. Se ha añadido a las proposiciones atómicas para construir una proposición molecular.

Términos de enlace Las palabras de enlace, por cortas que sean, no deben subestimarse, pues son de gran importancia. Tanto es así, que se estudiarán algunas reglas muy precisas para el uso de esta clase de términos. Gran parte de lo que se tratará en el estudio de la Lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace. El término de enlace en la proposición del ejemplo «Hoy es sábado y no hay clase» es la palabra «y». Hay otros, pero antes de considerar cada uno de ellos separadamente, les daremos el nombre lógico correcto. Se les denominará términos de enlace de proposiciones. Este nombre será fácil de recordar, porque indica efectivamente cuál es el papel que desempeñan. Enlazan proposiciones. Forman proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Los términos de enlace que se utilizarán en este capítulo son las palabras «y», «o», «no», y «si..., entonces». En la gramática castellana se les da a veces otros nombres, pero en Lógica los denominaremos, como ya hemos indicado, términos de enlace de proposiciones o simplemente términos de enlace. Recuérdese que al añadir un término de enlace a una o dos proposiciones atómicas se ha formado una proposición molecular. Los tres términos de enlace considerados, «y», «o», «si..., entonces», se usan para enlazar dos proposiciones atómicas, pero el otro se agrega a una sola proposición atómica para formar una molecular. Este término de enlace es la palabra «no». Se puede decir que el término de enlace «no» cada vez actúa sobre una sola proposición atómica y que los otros términos de enlace actúan sobre dos proposiciones atómicas a la vez. Recuérdese que el término de enlace «no», es el único que no conecta realmente dos proposiciones. Cuando a una sola proposición se le agrega «no» se forma una proposición molecular.

Se dan a continuación algunos ejemplos de proposiciones moleculares que utilizan los términos de enlace considerados.

La proposición:

La luna no está hecha de queso verde

Es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». En este caso, el término de enlace actúa sólo sobre una proposición atómica: «La luna está hecha de queso verde».

Un ejemplo de una proposición en la que se utiliza el término de enlace «o» es:

El viento arrastrará las nubes o lloverá hoy con seguridad.

El término de enlace «o» actúa sobre dos proposiciones atómicas. Son «El viento arrastrará las nubes» y «Lloverá hoy con seguridad».

La proposición molecular:

Si estamos en diciembre entonces llegará pronto Navidad

Ilustra sobre el uso del término de enlace «si..., entonces», que también actúa sobre dos proposiciones atómicas. ¿Cuáles son?

Ya se ha dado un ejemplo de proposición que utiliza el término de enlace «y». Otra es:

El terreno es muy rico y hay suficiente lluvia.

¿Cuáles son las dos proposiciones atómicas contenidas en esta proposición molecular??

Los ejercicios que se ponen a continuación ofrecen una oportunidad para comprobar la habilidad del lector para reconocer proposiciones atómicas, proposiciones moleculares y términos de enlace. Recuérdese que cada proposición que contiene un término de enlace es molecular.

EJERCICIO 1

A. Señalar cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M. Escribir junto a cada proposición molecular e) término de enlace utilizado.

1. La comida será hoy a las tres en punto.
2. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.
3. La música es muy suave o la puerta está cerrada.
4. A este perro grande le gusta cazar gatos.
5. Él pregunta por su pipa y pregunta por su escudilla.
6. Luis es un buen jugador o es muy afortunado.
7. Si Luis es un buen jugador, entonces participará en el partido del colegio.
8. California está al oeste de Nevada y Nevada al oeste de Utah.
9. Muchos estudiantes estudian Lógica en el primer año de carrera.
10. Los gatitos no acostumbran a llevar mitones.
11. Si los gatitos llevan mitones, entonces los gatos pueden llevar sombreros.
12. Se puede encontrar a Juana en casa de Susana.
13. A las focas no les crece el pelo.
14. Si María canta, entonces es feliz.
15. Los alumnos mayores no están en la lista antes que los jóvenes.
16. La asignatura preferida de Jaime es Matemáticas.

17. Si aquellas nubes se mueven en esa dirección, entonces tendremos lluvia.
18. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.
19. Esta proposición es atómica o es molecular.
20. El sol calentaba y el agua estaba muy agradable.
21. Si * = 0 entonces *+>>=1.
22. x+y>2.
23. x=\ o y + z = 2.
24. y = 2 y 2 = 10.

B. Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando una o dos de las proposiciones escritas a continuación junto con un término de enlace. Por ejemplo, se puede poner el término de enlace «y» entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición atómica más de una vez. Utilícese cada uno de los cuatro términos de enlace una sola vez, de manera que cada una de las proposiciones moleculares tenga distinto término de enlace.

1. El viento sopla muy fuerte.

2. Pablo podría ganar fácilmente.

3. La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.

4. Veremos qué planes hay para mañana.

5. Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.

6. El amigo de Juan tiene razón.

7. Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta.

Unidad 2

2.1 Rectas en el plano y desigualdades lineales

Conceptos básicos.

Como ya has podido observar, existen muchos ejemplos donde la línea recta es de utilidad, y uno de los primeros pasos que vamos a seguir para iniciar con el estudio del tema es definir lo que es la línea recta.

Una primera idea de manera intuitiva es que la recta está formada por una sucesión de puntos que son coloniales.

Otra idea es que la línea recta es aquella que se forma cuando a partir de dos puntos, la distancia más corta entre estos es precisamente la recta.

Ahora bien desde la definición formal en matemáticas podemos afirmar que es un lugar geométrico, pero este lugar geométrico significa que todos los puntos que forman la recta cumplen con las mismas condiciones. En este caso la condición es que entre cualesquiera dos puntos que se tomen de ésta recta, la pendiente que se obtiene es la misma.

De esta última descripción vemos que surge otro concepto que ya nos resulta familiar, el cual es la pendiente y que nos lleva a considerar la inclinación que tiene una recta.

Al respecto podemos decir entonces que una característica de cualquier recta es que tiene una pendiente y con esa pendiente se puede conocer el ángulo de inclinación.

Es importante mencionar entonces que debemos distinguir entre rectas:

a) Horizontales

b) Verticales

c) Con pendiente positiva

d) Con pendiente negativa.

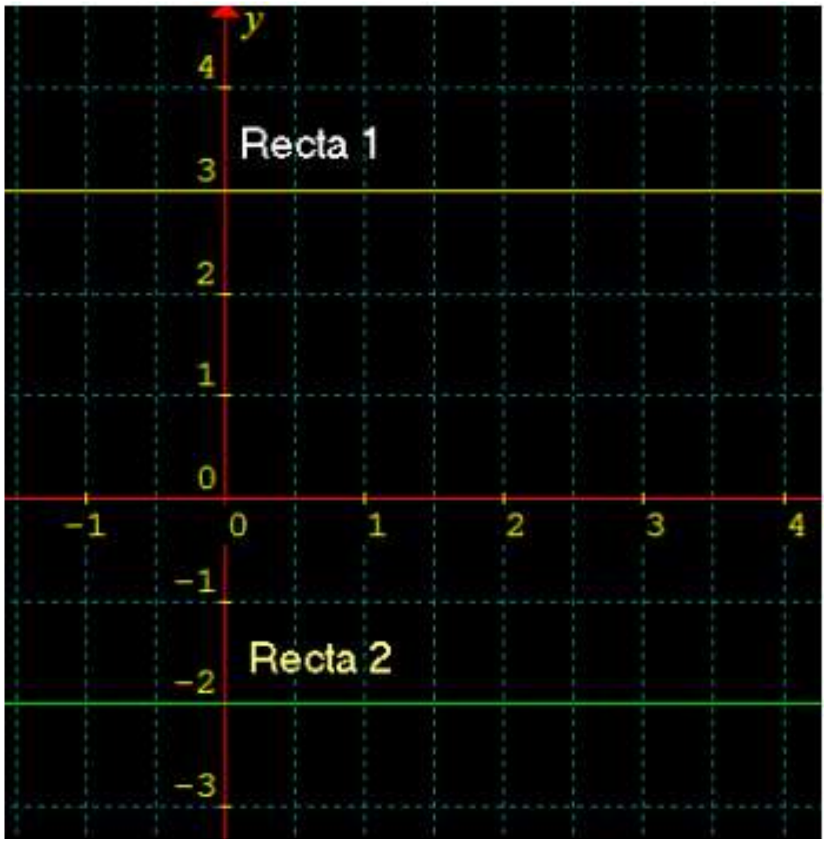
Veamos ahora cuales son los tipos de recta que identifican a cada una.

a) La recta horizontal.

Es aquella que no forma ningún ángulo, es decir si realizamos un trazo de una recta en un plano cartesiano, entonces cualquier recta que sea paralela aleje “x” es horizontal, y por tanto su pendiente es cero.

La siguiente grafica nos muestra dos ejemplos de rectas cuya pendiente es cero. La primer recta su ecuación es: y= 3

La segunda recta tiene por ecuación: y=-2

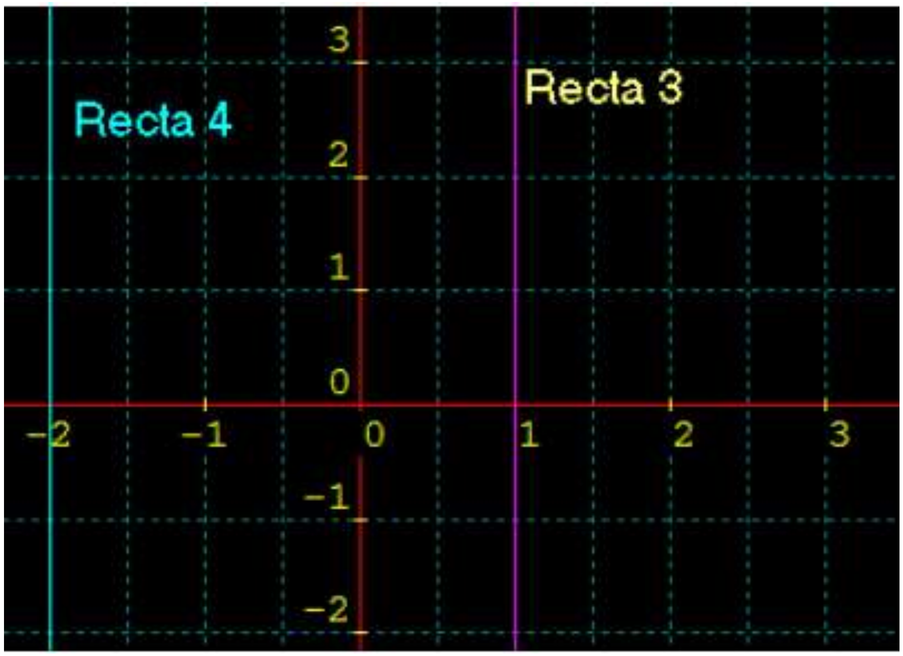


b) La recta vertical.

Es aquella cuya que al trazarla se obtiene una recta paralela al eje "y", y desde la definición formal diremos que su pendiente es infinita.

La ecuación de la recta 3 vertical es: x=1

La ecuación de la recta 4 vertical es x=-2



c) Recta con pendiente positiva.

Se caracteriza porque tiene un ángulo de inclinación menor a 90 grados con respecto a la horizontal. Es decir con el eje "x".

La siguiente grafica nos muestra un ejemplo de recta con pendiente positiva.

La ecuación de esta recta es:

x-y-3=0

Que también podemos escribir en forma de: y= x-3 que se conoce como ecuación pendiente, ordenada al origen.

d) Recta con pendiente negativa.

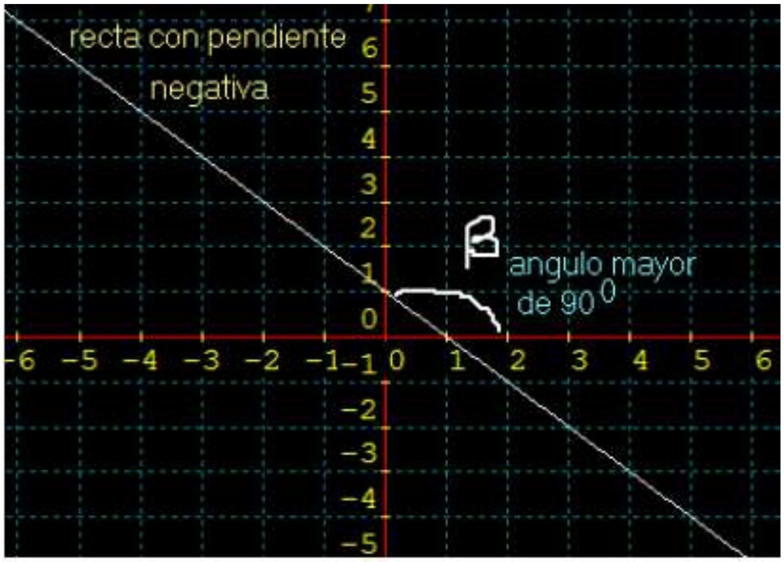
Se caracteriza por tener un ángulo de inclinación mayor a 90 grados con respecto al eje “x”.

En la siguiente grafica se muestra un ejemplo de recta con pendiente mayor a 90 grados.

la ecuación que representa a esta recta es:

x+y-1= 0 o bien como:

y= 1-x



De estos dos últimos incisos hay que recordar entonces que la pendiente entonces está relacionada con el ángulo de inclinación, y que este puede ser entonces mayor o menor de 90 grados.

Ahora bien ¿cómo podemos calcular el ángulo de inclinación de una recta?.

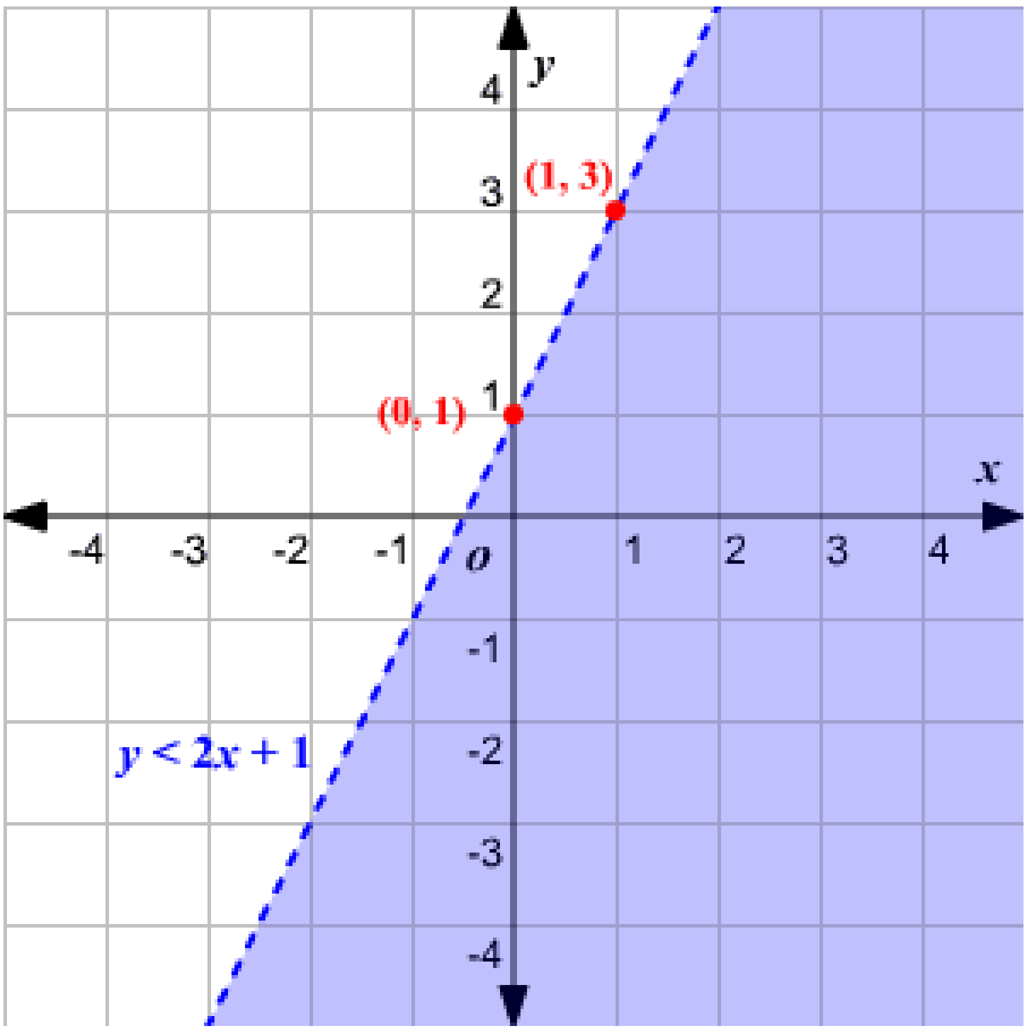
La respuesta a esta pregunta la vamos a dar con un ejemplo práctico que seguramente ya has visto en alguna parte donde realizan trabajos de construcción.

Sistemas de desigualdades lineales

Una desigualdad lineal con dos variables divide el plano en dos medios planos. Para graficar la desigualdad, grafique la ecuación del límite. Use una línea continua si el símbolo ≤ o ≥ es usado porque el límite está incluido en la solución. Use una línea punteada si < o > es usado para indicar que el límite no es parte de la solución. Sombree la región apropiada. A menos que esté graficando una línea vertical el signo de la desigualdad le hará saber que medio plano debe sombrear. Si el símbolo ≥ o > es usado, sombree arriba de la línea. Si el símbolo ≤ o < es usado sombree debajo de la línea. Para una línea vertical, las soluciones grandes están a la derecha y las soluciones pequeñas están a la izquierda. Un sistema de dos o más desigualdades lineales pueden dividir el plano en formas más complejas.

Ejemplo:

Grafique $y < 2x + 1$



Ejemplo:

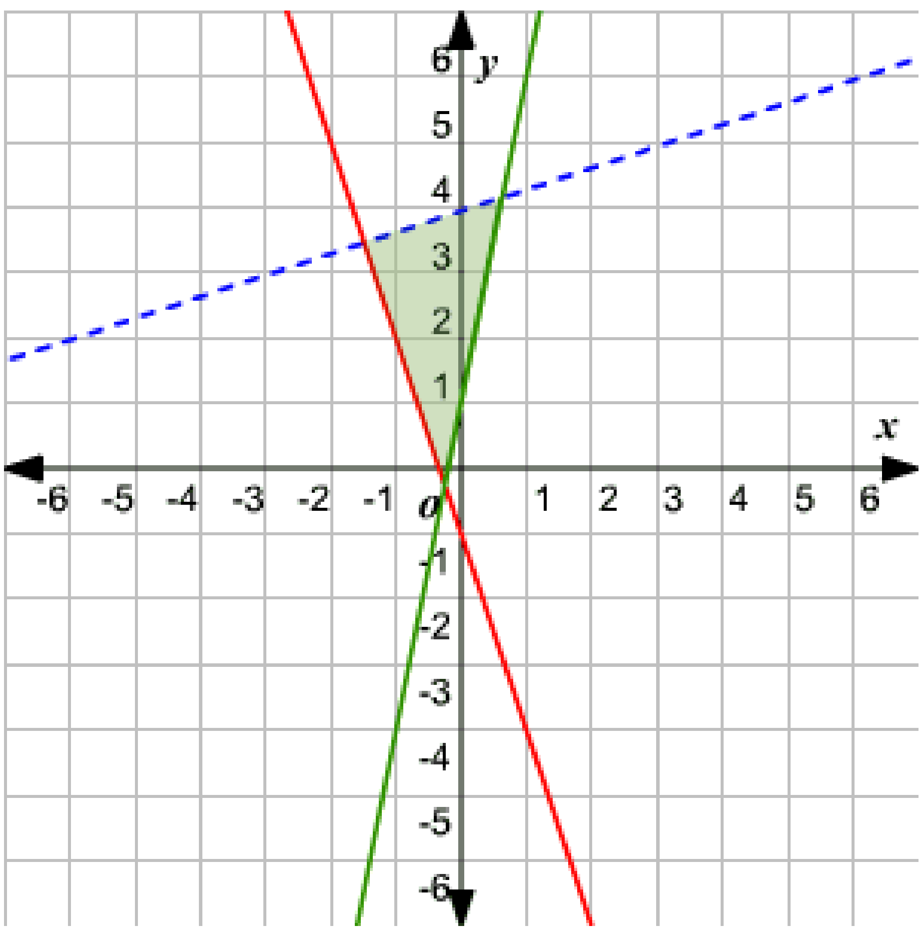
Grafique el sistema de desigualdades lineales.

$$y < \frac{1}{3}x + 4$$

$$y \geq -3x - 1$$

$$y \geq 5x + 1$$

Graficando las tres líneas y sombreando la región encerrada, obtenemos la figura siguiente.



2.2 sistemas lineales de ecuaciones

Introducción

Estas notas están basadas en las realizadas por el profesor Manuel Jesús Gago Vargas ´ para la asignatura Métodos matemáticos: ´ Algebra lineal ´ de la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas.

Un problema fundamental que aparece en matemáticas y en otras ciencias es el análisis y resolución de m ecuaciones algebraicas con n incógnitas. El estudio de un sistema de ecuaciones lineales simultaneas esta ´íntimamente ligado al estudio de una matriz rectangular de números definida por los coeficientes de las ecuaciones. Esta relación parece que se ha notado desde el momento en que aparecieron estos problemas.

El primer análisis registrado de ecuaciones simultaneas lo encontramos en el libro chino Jiu zhang Suan-shu (Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas ´), (v´ease McTutor y Carlos Maza) escrito alrededor del 200 a.C. Al comienzo del capítulo VIII, aparece un problema de la siguiente forma:

Tres gavillas de buen cereal, dos gavillas de cereal mediocre y una gavilla de cereal malo se venden por 39 pesos. Dos gavillas de bueno, tres mediocres y una mala se venden por 34 pesos. Y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 pesos. ¿Cuál es el ´ precio recibido por cada gavilla de buen cereal, cada gavilla de cereal mediocre, y cada gavilla de cereal malo?

Hoy en día, este problema lo formularíamos como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:
$3x + 2y + z = 39,$
$2x + 3y + z = 34,$
$x + 2y + 3z = 26,$

Donde x, y y z representan el precio de una gavilla de buen, mediocre y mal cereal, respectivamente. Los chinos vieron el problema esencial. Colocaron los coeficientes de este sistema, representados por cañas de bambú de color, como un cuadrado sobre un tablero de contar (similar a un ´Abaco), y manipulaban las filas del cuadrado según ciertas reglas establecidas. Su tablero de contar y sus reglas encontraron su camino hacia Japón y finalmente aparecieron en Europa, con las cañas de color sustituidas por números y el tablero reemplazado por tinta y papel.

En Europa, esta técnica llegó a ser conocida como eliminación Gaussiana ´ , en honor del matemático alemán Carl F. Gauss.

Como la técnica de eliminación es fundamental, empezamos el estudio de nuestra materia aprendiendo como aplicar este método para calcular las soluciones de los sistemas lineales. Después de que los aspectos computacionales se manejen bien, profundizaremos en cuestiones más teóricas.

Eliminación Gaussiana y matrices ´

En lo que sigue consideraremos fijado un cuerpo k de coeficientes. En el texto nos referiremos a los elementos del cuerpo como números ´ o escalares. El lector bien puede pensar que k es el cuerpo Q de los números racionales, R de los reales o incluso C de los complejos. Aunque debe tener en cuenta que todo lo dicho sobre sistemas de ecuaciones lineales y matrices es cierto en general para cualquier cuerpo k.

Sea $n \geq 1$ un número natural. Una ecuación lineal ´ es una expresión de la forma

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$

Donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son números conocidos y x_1 $x_2, \ldots, x_n$ son incógnitas. Los números a_i se denominan coeficientes de la ecuación, mientras que b es el término independiente.

Una solución´ de la ecuación lineal anterior es una serie de números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que la satisfacen, es decir, que verifican

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$

Definición:

Sean $m \geq 1$ y $n \geq 1$ números naturales. Un sistema lineal es un conjunto de m ecuaciones lineales y n incógnitas de la forma

$11x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

Donde las x_i son las incógnitas y los a_{ij} , b_i son números. Los números a_{ij} se denominan coeficientes del sistema, y el conjunto de los b_i términos independientes ´ del sistema.

Una solución´ del sistema lineal anterior es una serie de números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ que satisface cada ecuación del sistema, es decir, que verifica

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$ para $i = 1, \dots, n$.

El problema es calcular, si es posible, una solución común a un sistema lineal como el anterior. Para estos sistemas, existen tres posibilidades:

Solución única:

Existe uno y solo un conjunto de valores para las incógnitas x_i que satisfacen las ecuaciones simultáneamente. Se dice entonces que el sistema es compatible determinado. Por ejemplo el sistema formado por la ´única ecuación lineal $2x_1 = 3$ es compatible determinado, su ´única solución es $x_1 = 3/2$.

Infinitas soluciones:

Existen infinitos conjuntos de valores para las incógnitas x_i que satisfacen las ecuaciones simultáneamente. No es difícil probar que si el sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas si k, el cuerpo de números, es infinito. En este caso se dice que el sistema lineal es compatible indeterminado. Por ejemplo, el sistema formado por la ecuación lineal $2x_1 + x_2 = 3$ tiene como soluciones $x_1 = a$, $x_2 = 3 - 2a$, donde a es cualquier elemento de k, luego es compatible indeterminado.

Sin solución:

No hay ningún conjunto de valores para las incógnitas ´ x_i que satisfagan todas las ecuaciones simultáneamente. El conjunto de soluciones es vacío. Decimos que estos sistemas son incompatibles. Por ejemplo, el sistema dado por las ecuaciones $2x_1 = 3$, $x_1 = 1$ es incompatible, pues no hay ningún valor de x_1 que satisfaga ambas ecuaciones.

Gran parte del trabajo acerca de los sistemas de ecuaciones es decidir cuál de estas tres posibilidades es la que se presenta. La otra parte de la tarea es calcular la solución si es ´única o describir el conjunto de soluciones si hay más de una.

Definición. Dos sistemas lineales con n incógnita se dicen equivalentes si tienen los mismos conjuntos de soluciones.

Ejercicio:

Dar un ejemplo de dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes con distinto número de ecuaciones.

La eliminación Gaussiana es una herramienta que nos permitirá tratar las dos primeras Situaciones. Es un *algoritmo* que sistemáticamente transforma un sistema en otro más Simple, pero ***equivalente***. La idea es llegar a un sistema lo más sencillo posible, eliminando Variables, y obtener al final un sistema que sea fácilmente resoluble. Por ejemplo, uno triangular1 para el caso m = n. El proceso de eliminación descansa sobre tres operaciones Simples que transforman un sistema en otro equivalente. Para describir estas operaciones, Sea Ek la k-´esima ecuación

$$E_k : a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

Y escribamos el sistema como

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}$$

Dado un sistema lineal S, cada una de las siguientes ***transformaciones elementales*** produce un sistema equivalente S.

1. Intercambio de las ecuaciones i-´esima y j-´esima (1 _ i _ j _ m). Esto es, si

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}, \text{ entonces } \mathcal{S}' = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

2. Reemplaza la i-´esima ecuación por un múltiplo no nulo de ella. Esto es,

$$S' = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ \alpha E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}, \text{ donde } \alpha \neq 0.$$

3. Reemplaza la j-´esima ecuación por la suma de ella misma con un múltiplo de la i-´esima ecuación. Esto es,

$$S' = \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j + \alpha E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 1.2.2. Comprobar que estas operaciones no cambian el conjunto de soluciones. Es decir, que los sistemas S y S0 son equivalentes. El problema más común en la práctica es la resolución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas, lo que se conoce como un ***sistema cuadrado***, con solución única. En este caso, la eliminación Gaussiana es directa, y más tarde estudiaremos las diferentes posibilidades. Lo que sigue es un ejemplo típico.

Ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ 6x + 2y + z &= -1, \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

En cada paso, la estrategia es centrarse en una posición, llamada ***posición pivote***, y eliminar todos los términos por debajo de la posición usando las tres operaciones elementales. El coeficiente en la posición pivote se denomina ***pivote***, mientras que la ecuación en donde se encuentra el pivote se llama ***ecuación pivote***. Solamente se permiten números no nulos como pivotes. Si un coeficiente en una posición pivote es cero, entonces la ecuación pivote se intercambia con una ecuación por *debajo* para producir un pivote no nulo. Esto siempre es posible para sistemas cuadrados con solución única. A menos que sea cero, el primer coeficiente de la primera ecuación se toma como el primer pivote. Por ejemplo, el elemento 2 del sistema es el pivote del primer paso:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ 6x + 2y + z &= -1, \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

Paso 1. Elimina todos los términos por debajo del pivote. Resta tres veces la primera ecuación de la segunda para generar el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ -y - 2z &= -4, \qquad (E2 - 3E1) \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

Suma la primera ecuación a la tercera para formar el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ -y - 2z &= -4, \\ 3y + 2z &= 8 \quad (E3 + E1). \end{aligned}$$

Paso 2. Selecciona un nuevo pivote. De momento, seleccionamos un nuevo pivote buscando para abajo y a la derecha. Más adelante veremos una mejor estrategia. Si este coeficiente no es cero, entonces es nuestro pivote. En otro caso, intercambiamos con una ecuación que este por *debajo* de esta posición para colocar el elemento no nulo en la posición pivote. En Nuestro ejemplo, -1 es el segundo pivote:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ -1\,y - 2z &= -4, \\ 3y + 2z &= 8. \end{aligned}$$

Paso 3. Elimina todos los términos por debajo del pivote. Suma tres veces la segunda ecuación a la tercera para llegar al sistema equivalente:

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 1,\\
-1\,y - 2z &= -4,\\
-4z &= -4 \qquad (E3 + 3E2).
\end{aligned}
$$

En general, en cada paso nos movemos abajo y hacia la derecha para seleccionar el nuevo pivote, y entonces eliminar todos los términos por debajo de ´el hasta que ya no podamos seguir. En este ejemplo, el tercer pivote es −4, pero como ya no hay nada por debajo que eliminar, paramos el proceso.

En este punto, decimos que hemos ***triangularizado*** el sistema. Un sistema triangular se resuelve muy fácilmente mediante el método de ***sustitución hacia atrás***, en el que la ´ultima ecuación se resuelve para la ´ultima incógnita y se sustituye hacia atrás en la penúltima ecuación, la cual se vuelve a resolver para la penúltima incógnita, y continuamos así hasta llegar a la primera ecuación. En nuestro ejemplo, de la ´ultima ecuación obtenemos

$z = 1.$

Sustituimos $z = 1$ en la segunda ecuación, y tenemos:

$y = 4 - 2z = 4 - 2(1) = 2.$

Por ´ultimo, sustituimos $z = 1$ y $y = 2$ en la primera ecuación para obtener:

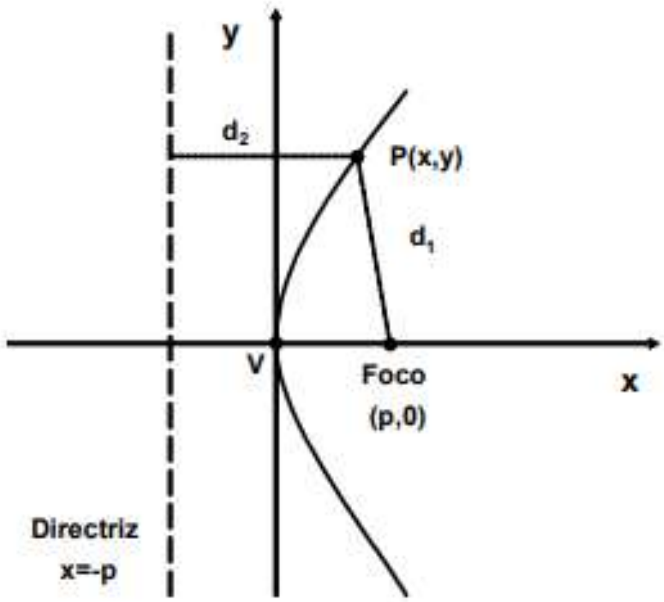
$x = 1/\,2\,(1 - y - z) = 1/\,2\,(1 - 2 - 1) = -1,$

Unidad 3

3.1 parábolas y ecuaciones cuadráticas.

Definición de parábola

La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el plano llamado foco y de una recta también fija en el plano llamada directriz. El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice. La distancia del vértice al foco o de del vértice a la directriz se le denota mediante la letra p . La siguiente figura muestra a una parábola que es paralela al eje x y que se abre a la derecha:



La distancia que existe de cualquier punto P(y,x) que pertenezca a la parábola al foco es:

$$d_1 = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Por su parte, la distancia que existe de cualquier punto P(y,x) que pertenezca a la parábola a la directriz es:

d = x + p 2

Ahora, por definición: $d_1 = d_2$

sustituyendo queda:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = x+p$$

ahora, elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

desarrollando:

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

eliminando términos queda:

$$-2xp + y^2 = 2xp$$

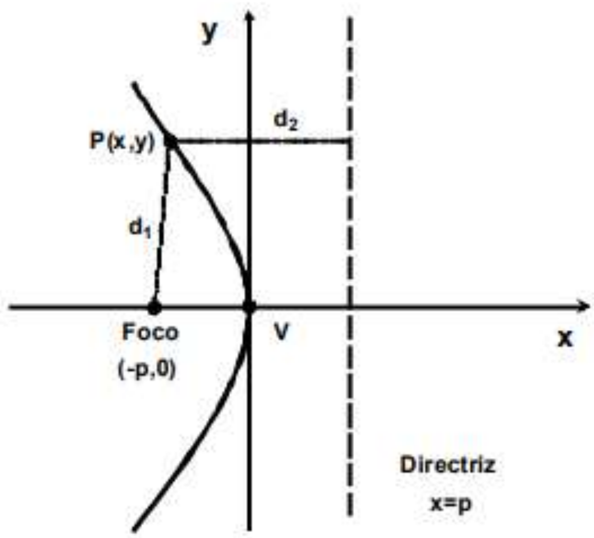
o bien:

$$y^2 = 2xp + 2xp$$

que es igual a:

$$y^2 = 4px$$

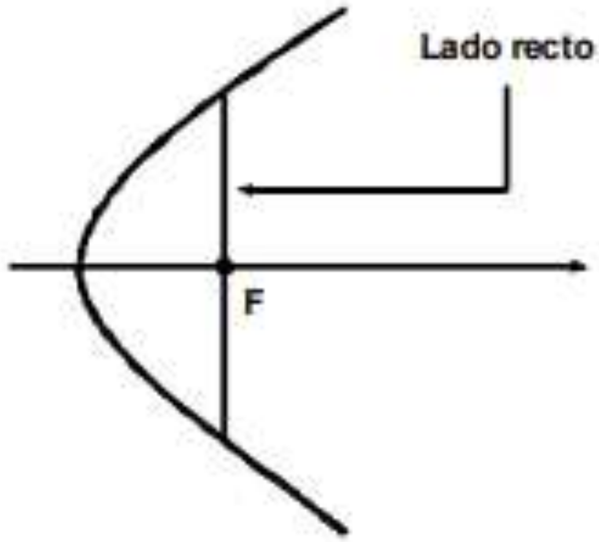
Ecuación conocida como ecuación ordinaria o canónica de la parábola con vértice en el origen. A la recta que pasa por el vértice y el foco se le conoce como eje de la parábola (EP). Cabe señalar que en una parábola la excentricidad siempre es uno porque la distancia que hay del vértice al foco es igual a la que hay del vértice a la directriz. Similarmente, si el eje de la parábola también es el eje x , pero se abre para la izquierda entonces el foco se ubica en F (0,− p) y la directriz tiene ecuación x = p , gráficamente esto es:



Haciendo un análisis similar al anterior se obtiene que su ecuación canónica es:

$$y^2 = -4px$$

Se conoce como lado recto (LR) de cualquier parábola a la longitud de una recta perpendicular al EP y que pasa por su foco y que incluye a la parábola en ambos extremos.

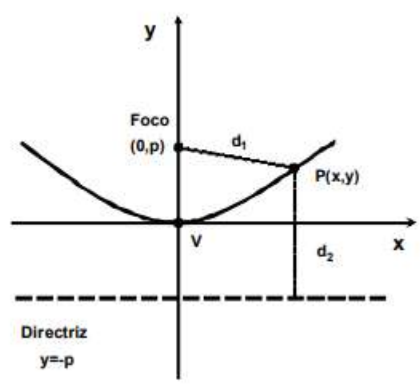


Sustituyendo p en la ecuación se tiene: $y^2 = 4p(p) = 4p^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4p^2} = \pm 2p$, por lo tanto cada ordenada tiene un longitud de $2p$, eso significa que el lado recto se calcula como:

$$LR = |4p|$$

Por otra parte, si el eje de la parábola es el eje y, se tienen dos casos:

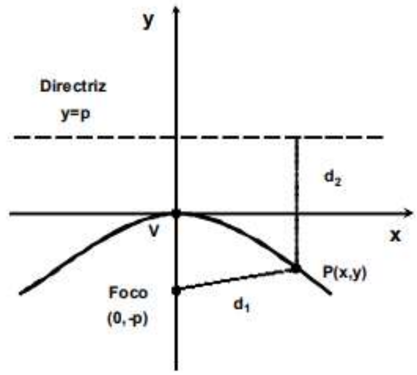
Si se abre hacia arriba se tiene que el foco se ubica en $F(0, p)$ y su directriz es: $y = -p$, tal y como se muestra en la figura:



Su ecuación ordinaria es:

$$x^2 = 4py$$

Si se abre hacia abajo con foco en F (0,− p) y directriz en y = p , se tiene:



Su ecuación ordinaria es:

$$x^2 = -4py$$

Ejemplos.
Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de las siguientes parábolas:

1) $y^2 = 8x$
Solución.

$4p = 8 \ \Rightarrow \ p = \frac{8}{4} = 2$. $EP: eje\, x$. Signo (+), por lo que se abre hacia la derecha.

El foco se ubica en $F(2,0)$. La ecuación de la directriz es: $x = -2$. El lado recto es: $LR = |4(2)| = 8\ u.$

2) $y^2 = -12x$
Solución.

$4p = -12 \ \Rightarrow \ p = \frac{-12}{4} = -3$. $EP: eje\, x$. Signo (-), por lo que se abre hacia la izquierda. El foco se ubica en $F(-3,0)$. La ecuación de la directriz es: $x = 3$. El lado recto es: $LR = |4(-3)| = 12\ u.$

3) $x^2 = 16y$
Solución.

$4p = 16 \ \Rightarrow \ p = \frac{16}{4} = 4$. $EP: eje\, y$. Signo (+), por lo que se abre hacia arriba. El foco se ubica en $F(0,4)$. La ecuación de la directriz es: $y = -4$. El lado recto es: $LR = |4(4)| = 16\ u.$

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma:

$$aX^2 + bX + C = 0 \qquad a \neq 0$$

1. Identificación de coeficientes: Al empezar con las ecuaciones de segundo grado, resulta complicado identificar los coeficientes a, b y c. Sin embargo, es muy fácil. Presta atención a los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1) En las siguientes ecuaciones de segundo grado identifica los coeficientes a, b y c:

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow$ solución: $a = 2$; $b = 3$; $c = 1$.

b) $x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow$ solución: $a = 1$; $b = -2$; $c = 5$.

c) $-5x^2 + 4x - 2 = 0 \rightarrow$ solución: $a = -5$; $b = 4$; $c = -2$.

d) $-2x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow$ solución: $a = -2$; $b = 1$; $c = -4$.

e) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow$ solución: $a = 1$; $b = 0$; $c = -9$.

f) $x^2 + 5x = 0 \rightarrow$ solución: $a = 1$; $b = 5$; $c = 0$.

Las ecuaciones como las a), b), c) y d), se dice que son completas porque ninguno de sus coeficientes es cero. Las ecuaciones como la e) y la f), se dice que son incompletas porque alguno de sus coeficientes es cero. (Nota: el coeficiente 'a' nunca puede ser cero pues si lo fuera, la ecuación no sería de segundo grado)

3. Tipos de ecuaciones de segundo grado: Una ecuación de segundo grado puede ser completa o incompleta. En el siguiente cuadro puede verse claramente la clasificación de ecuaciones de segundo grado

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$

$$\begin{cases} \text{Incompletas} \begin{cases} 1)\ b=0 \rightarrow ax^2+\ c=0 \\ 2)\ c=0 \rightarrow ax^2+bx=0 \end{cases} \\ \\ \text{Completas: } b\neq 0 \text{ y } c\neq 0 \end{cases}$$

Vamos a empezar por resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas. Los métodos de resolución son distintos según que sea b=0 ó c=0.

4. Resolución de la ecuación incompleta

3.1 La ecuación ax 2 + c = 0.

Para resolver:

1º) despejamos x^2

2º) tomamos la raíz cuadrada de ambos miembros.

$$ax^2+c=0 \rightarrow ax^2=-c \rightarrow x^2=\frac{-c}{a} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

3.2 La ecuación $ax^2 + bx = 0$.

Para resolver:

1º) extraemos factor común

2º) igualamos a cero cada factor.

$$ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 & \leftarrow \text{PRIMERA SOLUCIÓN} \\ ax+b=0 \rightarrow x_2=\dfrac{-b}{a} & \leftarrow \text{SEGUNDA SOLUCIÓN} \end{cases}$$

Veamos ahora casos concretos de resolución de ecuaciones de los dos tipos.

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x=\pm\sqrt{4} \longrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $x^2 - 9 = 0 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x=\pm\sqrt{9} \longrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

c) $x^2 + 25 = 0 \longrightarrow x^2 =-25 \longrightarrow x=\pm\sqrt{-25} \longrightarrow$ **NO HAY SOLUCIÓN.**

d) $2x^2 - 32 = 0 \longrightarrow 2x^2 = 32 \longrightarrow x^2 = 16 \longrightarrow x=\pm\sqrt{16}$

y por tanto $\longrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{cases}$

e) $x^2 - 3x = 0 \longrightarrow x(x - 3) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x-3=0 \rightarrow x_2=3 \end{cases}$

f) $x^2 + 5x = 0 \longrightarrow x(x+5) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x+5=0 \rightarrow x_2=-5 \end{cases}$

3.2 polinomios

Un polinomio en la variable x es una expresión algebraica formada solamente por la suma de términos de la forma ax^n , donde a es cualquier número y n es un número entero no negativo.

♦ Ejemplos:

1) $3x - 2$

2) $x^4 + 5$

3) $2n^2 - 5n + 3$

4) $5y^3 + 4y^2 - 3y + 1$

Nota: Los polinomios son expresiones algebraicas pero no toda expresión algebraica es un polinomio.
Término: Un término es una parte de una expresión algebraica. Los términos se separan entre sí por los signos de suma (+) o resta (-).

♦ Coeficiente numérico: es el factor numérico del mismo.

♦ Término constante: es el coeficiente numérico que no contiene variable.

Los polinomios se clasifican de acuerdo al número de términos.

♦ Un polinomio que tiene un solo término se llama monomio.

♦ Si el polinomio tiene dos términos se llama un binomio

♦ Si tiene tres términos se llama trinomio

♦ Los polinomios formados por más de tres términos no reciben ningún nombre en especial, simplemente son polinomios con la cantidad de términos que contiene.

Si el polinomio es en una variable, el grado del polinomio está determinado por el término que contiene el mayor exponente.

♦ Si tiene más de una variable, se suman los exponentes de cada término y la suma más alta determina el grado del polinomio.

Polinomios	Grado
$9y^4 - 5y^3 + 3y^2 + 7y - 2$	Es de grado cuatro
$x^3 - 4x^2 - 6$	Es de grado tres
$2n^2 - 3n + 1$	Es de grado dos
$5x - 1$	Es de grado uno
8	Es de grado cero
$3x^3y^5 + 5x^2y^4 - 7xy^2 + 6$	Es de grado ocho

Los polinomios se ordenan escribiendo los exponentes en orden ⁄ descendente, es decir, de mayor a menor ⁄ ascendente, es decir, de menor a mayor.

Polinomio	Orden
$3x^2 - 5x + 8$	Orden descendente
$8 - 5x + 3x^2$	Orden ascendente

Terminos semejantes

Dos términos son semejantes cuando ambos son numéricos o cuando tienen las mismas variables y sus exponentes son respectivamente iguales

Semajentes	No semejantes
6 ; -11	6 ; -11x
x ; 3x	x ; $3x^2$
-3x ; 11x	-3x ; 11xy

Evaluacion de polinomios

Para evaluar un polinomio hacemos lo mismo que evaluar una expresión algebraica.

Simplemente sustituimos el valor asignado a la variable y efectuamos las operaciones indicadas en el polinomio.

Evalúa cada polinomio para los valores asignados:

1) 2x4 – 3x3 + 6x – 8 cuando x = -2

2) x 2 +5x – 6 cuando x = -3

3) 3xy –xy +4 cuando x = 1 y y = -2

Unidad 4

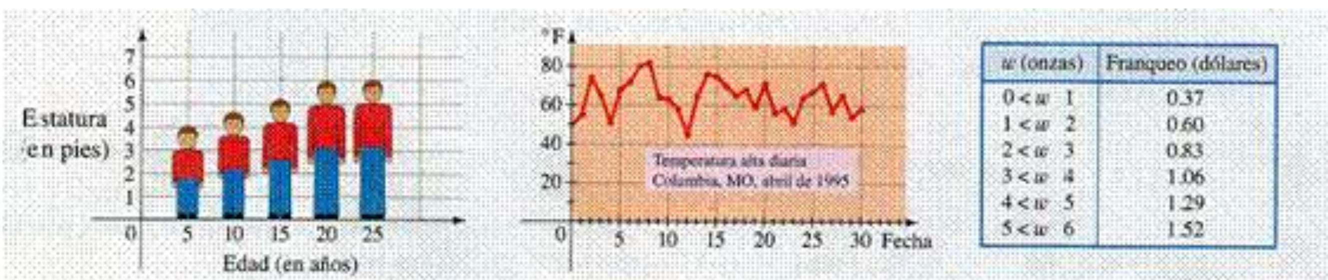
4.1 funciones radical y trascendente

Funciones en nuestro entorno

En casi todo fenómeno físico se observa que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura depende de la edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso (véase figura 1). Se usa el término función para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra. Es decir, se expresa lo siguiente.

- La altura es una función de la edad
- La temperatura es una función de la fecha
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso

La Oficina Postal de Estados Unidos emplea una regla simple para determinar el costo de enviar un paquete con base en su peso. Pero es fácil describir la regla que relaciona el peso con la edad o la temperatura con la fecha



La estatura es una función de la edad. La temperatura es una función de la fecha. El franqueo es una función del peso.

¿Puede pensar en otras funciones? Aquí hay algunos ejemplos.

- El área de un circulo es una función de su radio
- El número de bacterias en un cultivo es una función del tiempo.
- El peso de un astronauta es una función de su elevación.
- El precio de un artículo es una función de la demanda de ese artículo.

La regla que describe cómo el área A de un circulo depende de su radio r está dada por la formula $A = \pi . r^2$. Incluso cuando no está disponible una regla o formula precisa que describe una función, se puede todavía describir la función mediante una gráfica. Por ejemplo, cuando se abre la llave del agua caliente, la temperatura del agua depende del tiempo que el agua haya estado corriendo. Así, se puede decir

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo

En la figura 2 se muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que se abrió la llave. En la gráfica se muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente.

Cuando el agua del depósito de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua se incrementa con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua en el depósito. Cuando se vacía el depósito, t disminuye a la temperatura del suministro de agua fría.

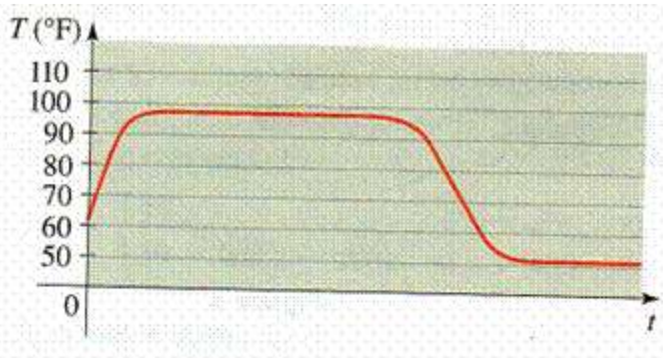


Figura 2
Gráfica de la temperatura T del agua como una función del tiempo t

Definición de función

Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letra como f, g, h…. para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra "f" para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "cuadrado del Número"

Cuando se escribe f (2), se entiende "aplicar la regla f al número 2". Al aplicar la regla Se obtiene f (2) = 2^2 = 4. De manera similar, f (3) = 3^2 = 9, f (4) = 4^2 = 16,

Y en general f (x) = x^2.

“Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A Exactamente un elemento, llamado f(x), en un conjunto B.”

Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo f(x) se lee “f de x” o “f en x” y se llama el valor de f en x, o la imagen de x bajo f. El conjunto de A se llama dominio de la función. El rango de f es el conjunto de los valores posibles de f(x) cuando x varía a través del dominio, es decir

Rango de f = $\{f(x) | x \in A\}$

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. Así, si se escribe y= f(x), entonces (x) es la variable independiente y (y) es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una máquina. Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando se introduce x en la máquina, es aceptada como una entrada y la máquina produce una salida f(x) de acuerdo con la regla de la función. Así, se puede considerar al dominio como el conjunto de las entradas posibles y al rango como el conjunto de las salidas posibles.

Función racional (asíntotas verticales y horizontales)

Una función racional tiene la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son polinomios. Se supone que P(x) y Q(x) no tienen factor en común. Aunque las funciones racionales se construyen de polinomios, sus gráficas se ven bastante diferentes de las gráficas de funciones poligonales.

Funciones racionales asíntotas

El “dominio” de una función racional consiste en los números reales x excepto aquellos para los que el denominador es cero. Al graficar una función racional, se debe poner atención especial al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores. Se comienza por graficar una función racional muy simple

Ejemplo. Una función racional simple.

Bosqueje una gráfica de la función racional $f(x)=\frac{1}{x}$.

Solución: La función f no está definida para x=0. En las tablas siguientes se muestra que cuando x es cercana a cero, el valor de $|f(x)|$ es grande, y mientras x se aproxime más a cero $|f(x)|$ se vuelve más grande

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100\,000$
Tiende a 0^-	Tiende a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	$100\,000$
Tiende a 0^+	Tiende a ∞

Este comportamiento se describe en palabras y símbolos como sigue. En la primera tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ disminuyen sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to -\infty . cuando ... x \to 0^-$$

“Y atiende a menos infinito cuando x tiende a 0 por la izquierda”

En la segunda tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la derecha, los valores de f(x) se incrementan sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to \infty .. cuando .. x \to 0^+$$

"Y atiende a infinito cuando x tiende a 0 por la derecha"

En las dos tablas siguientes se muestra cómo cambia f(x) cuando $|x|$ se vuelve grande

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100\,000$	-0.00001
Tiende a $-\infty$	Tiende a 0

x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
$100\,000$	0.00001
Tiende a ∞	Tiende a 0

En estas dos tablas de muestra que cuando $|x|$ se vuelve grande, el valor f(x) se aproxima cada vez más a cero. Se describe esta situación en símbolos escribiendo

$f(x) \to 0 \ldots cuando \ldots x \to -\infty$ Y $f(x) \to 0 \ldots cuando \ldots\ldots x \to \infty$

Usando la información de estas tablas y graficando algunos puntos más, se obtiene la gráfica mostrada en la siguiente figura

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

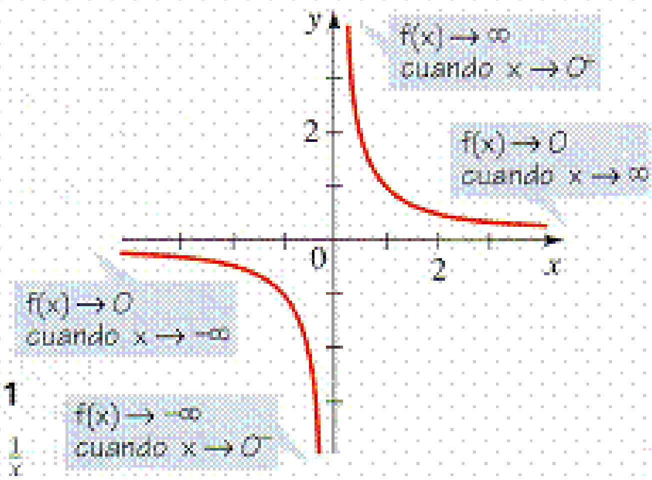


Figura 1
$f(x) = \frac{1}{x}$

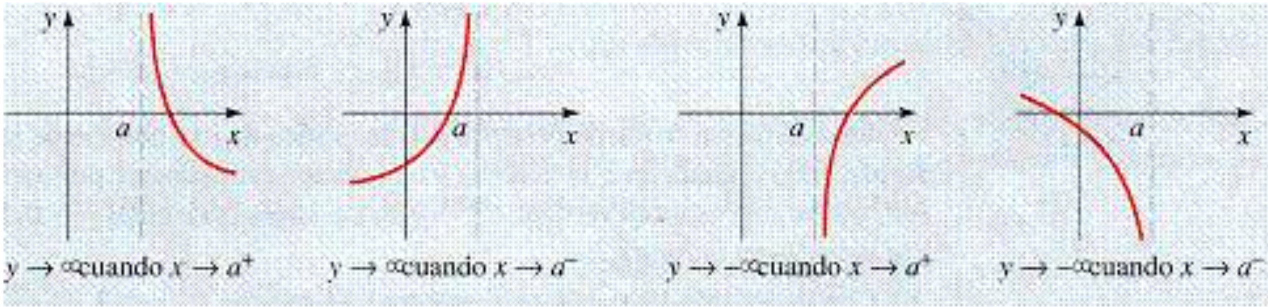
En el ejemplo se usó la siguiente notación de fechas.

Símbolo	Significa
$x \to a^-$	x tiende a a por la izquierda
$x \to a^+$	x tiende a a por la derecha
$x \to -\infty$	x tiende a menos infinito; es decir, x disminuye sin cota
$x \to \infty$	x tiende a infinito; es decir, x se incrementa sin cota

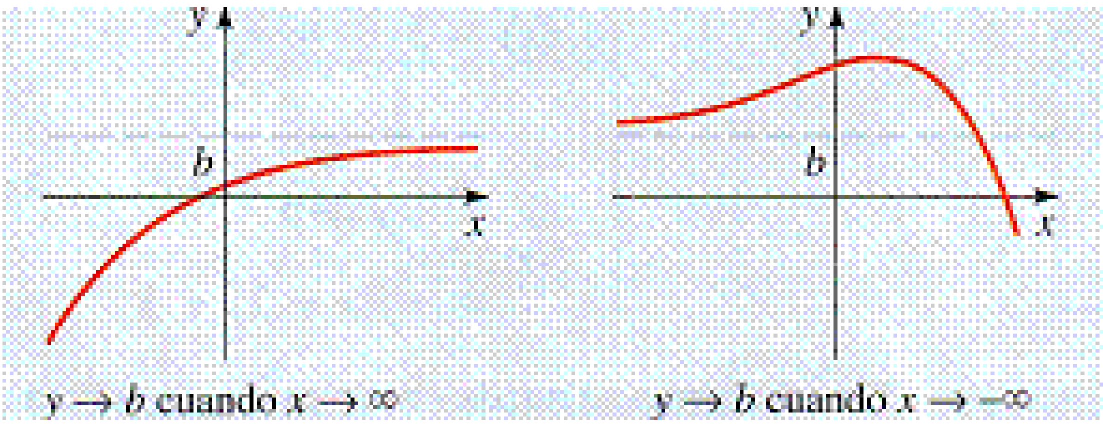
La recta x=0 se llama "asíntota vertical" de la gráfica de la figura anterior, y la recta y=0 es una "asíntota horizontal". En términos informales, una asíntota de una función es una línea a la que la gráfica de la función se aproxima cada vez más cuando se va a lo largo de esta línea.

Definición de asíntotas verticales y horizontales

1. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ se y tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende a a por la derecha o la izquierda



2. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$



Funciones irracional

Las funciones irracionales son aquellas cuya expresión matemática f(x) presenta un radical:

$$\sqrt[n]{g(x)}$$

Donde g(x) es una función polinómica o una función racional.

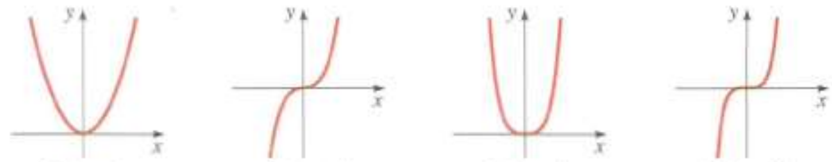
Ejemplos de esta se muestra en la tabla siguiente

Algunas funciones y sus gráficas

Funciones lineales
$f(x) = mx + b$

$f(x) = b$ $\qquad$ $f(x) = mx + b$

Funciones exponenciales
$f(x) = x^n$

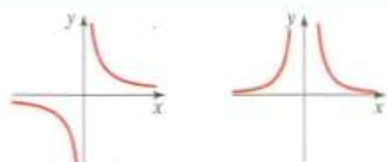


$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = x^3$ $\qquad$ $f(x) = x^4$ $\qquad$ $f(x) = x^5$

Funciones de raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$

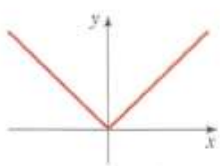
$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = 1/x^n$



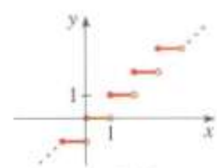
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero máximo
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

4.2 derivación

Introducción

En este capítulo vamos a investigar cómo varia el valor de una función al variar la variable independiente. El problema fundamental del Cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una amanera continua, llevó Newton al descubrimiento de los principios fundamentales del Cálculo infinitesimal, el instrumento científico más poderoso del matemático moderno

Incrementos

El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final. Un incremento de x se representa por el símbolo Δx, que se lee "delta x". El estudiante no debe leer este símbolo "delta veces x"

Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo según que la variable aumente o disminuya al cambiar de valor.

Asimismo

Δy Significa incremento de y

$\Delta \phi$ Significa incremento de ϕ

$\Delta f(x)$ Significa incremento de $f(x)$

Si en $y = f(x)$ la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicará el incremento correspondiente de la función $f(x)$ (O sea, de la variable dependiente y).

El incremento Δy siempre ha de contarse desde el valor inicial definido de y que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado de x desde el cual se cuenta el incremento Δx. Por ejemplo, consideremos la función

$$y = x^2$$

Si tomamos $x = 10$ como valor inicial de x, esto fija $y = 100$ como valor inicial de y

Supongamos que x aumenta hasta $x = 12$, es decir, $\Delta x = 2$

Entonces y aumenta hasta $y = 144$, y $\Delta y = 44$

Si se supone que x decrece hasta $x = 9$, es decir $\Delta x = -1$

Entonces y decrece hasta $y = 81$, y $\Delta y = -19$

En este ejemplo, y aumenta cuando x aumenta, y y decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes de Δx y Δy tienen un mismo signo. Puede acontecer que y decrezca cuando x aumenta, o viceversa; Δx y Δy tendrán entonces signos contarios

Comparación de incrementos

Consideremos la función

(1) $y = x^2$

Supongamos que x tiene un valor inicial fijo y le damos después un incremento Δx. Entonces y tomará un incremento correspondiente Δy, y tendremos

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

O sea $y + \Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

Restando (1) $\underline{y .... = x^2 ....}$

(2) $\Delta y = ...2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

Obtenemos el incremento Δy en función de x y Δx.

Para hallar la razón de los instrumentos, basta dividir los dos miembros de (2) por Δx, y resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Si el valor de x es 4, es claro que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

Observemos ahora con cuidada, mediante una tabla, cómo se comporta la razón de los incrementos de x y y cuando el incremento de x decrece

Esta tabla pone de manifiesto que al decrecer Δx también disminuye Δy, mientras que la razón de los dos incrementos toma los valores sucesivos 9, 8,8, 8,6 8,4 8,2 8,1 8,01. Esta sucesión de valores nos dice que podemos hacer que el valor de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sea tan próximo a 8 como deseemos con sólo tomar a Δx suficientemente pequeño.

Definición de derivada.

Derivada de una función de una variable

La definición fundamental del Cálculo diferencial es la siguiente:

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada.

La definición puede darse mediante símbolos, en la forma siguiente:

Dada la función

$$(1) \quad y = f(x)$$

Consideremos un valor inicial fijo de x

Demos a x un incremento Δx, siendo el valor final de la función

$$(2) \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Para hallar el incremento de la función, restamos (1) de (2); se obtiene

$$(3) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dividiendo los dos miembros por Δx, incremento de la variable independiente, resulta:

$$(4) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El límite del segundo miembro cuando $\Delta x \to 0$ es, por definición, la derivada de $f(x)$, o sea, según (1), de y, y se presenta por el símbolo $\frac{dy}{dx}$. Luego, la igualdad

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Define la derivada de y [o de $f(x)$] con respecto a x

De (4) obtenemos también

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Asimismo, si u es función de t, entonces,

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{derivada de } u \text{ con respecto a } t$$

La operación de hallar la derivada de una función se llama derivación

Símbolos para representar las derivadas

Puesto que Δy y Δx son siempre cantidades finitas y tienen valores definidos, la expresión

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Es una verdadera fracción. Pero el símbolo

$$\frac{dy}{dx}$$

Ha de mirarse no como una fracción, sino como el valor límite de una fracción. En muchos casos veremos que este símbolo sí tiene propiedades de fracción, y más adelante demostraremos el significado que puede atribuirse a dy y dx, pero, por ahora, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ ha de considerarse como conjunto.

Puesto que, en general, la derivada de una función de x es también función de x, se emplea también el símbolo $f'(x)$ para representar la derivada de $f(x)$. Luego, si

$$y = f(x)$$

Podemos escribir la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

Que se lee "la derivada de y con respecto a x es igual a f prima de x". El símbolo

$$\frac{d}{dx},$$

Considerado por sí mismo, se llama operador diferencial; indica que toda función que se escriba de él ha de derivarse con respecto a x. Así,

$$\frac{dy}{dx} \text{ O } \frac{d}{dx}y \text{ indica la derivada de } y \text{ con respecto a } x$$

$$\frac{dy}{dx} f(x) \text{ Indica la derivada de } f(x) \text{ con respecto a } x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2x^2+5\right) \text{ Indica la derivada de } 2x^2+5 \text{ con respecto a } x$$

El símbolo y' es una forma abreviada de $\frac{dy}{dx}$. Luego, si

$$y = f(x),$$

Podemos escribir las identidades

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = f'(x)$$

Debe hacerse hincapié en esto: en el paso esencial de hacer que $\Delta x \to 0$, la variable es Δx y no x. El valor de x se supone fijo desde el principio. Para hacer resaltar que $x = x_0$ desde el principio hasta el fin, podemos escribir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Funciones derivable

De la teoría de los límites se deduce que si existe la derivada de una función para cierto valor de la variable independiente, la función misma debe ser continua para aquel valor de la variable.

Sin embargo, la recíproca no es siempre cierta: se han descubierto funciones que son continuas y, a pesar de eso, no tienen derivada.

Pero tales funciones no son frecuentes en las Matemáticas aplicadas, y en este libro se consideran solamente las funciones derivables, es decir, las funciones que tienen derivada para todos los valores de la variable independiente, con excepción, a lo más, de valores aislados.

Regla de los cuatro pasos

Regla general para la derivación

Según la definición de derivada se puede ver que el procedimiento para derivar una función $y = f(x)$ comprende los siguientes pasos:

Regla general para la derivación

PRIMER PASO. Se sustituye en la función x por $x+\Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $x+\Delta y$

SEGUNDO PASO. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función)

TERCER PASO. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente)

CUARTO PASO. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada

El estudiante debe familiarizarse con esta regla, aplicando el procedimiento a muchos ejemplos. La resolución detallada de tres de estos ejemplos se da a continuación.

Ejemplo I Hallar la derivada de la función $3x^2+5$

Resolución. Aplicando los pasos sucesivos de la regla general, obtenemos, después de hacer

$$y=3x^2+5$$

Primer paso $y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5$

$$=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5$$

Segundo paso

$$\begin{array}{l} y+\Delta y=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5 \\ \underline{y.......=3x^2.........................+5} \\ ......\Delta y=......6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2 \end{array}$$

Tercer paso $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\cdot\Delta x$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x\to 0$. Según (A) resulta:

$$\frac{dy}{dx}=6x$$

O bien $y´=\dfrac{d}{dx}\left(3x^2+5\right)=6x$

Ejemplo 2 Hallar la derivada de $x^3 - 2x + 7$

Resolución. Hagamos $y = x^3 - 2x + 7$

Primer paso $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 7$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7$$

Segundo paso
$$\begin{array}{l} y + \Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7 \\ \underline{y \ldots\ldots = x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 7} \end{array}$$

$$\Delta y = \ldots\ldots 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \ldots\ldots\ldots - 2 \cdot \Delta x$$

Tercer paso $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (A) tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

O bien $y' = \dfrac{d}{dx}\left(x^3 - 2x + 7\right) = 3x^2 - 2$

Ejemplo 3 Hallar la derivada de la función $\dfrac{c}{x^2}$

Resolución Hagamos $y = \dfrac{c}{x^2}$

Primer paso $y + \Delta y = \dfrac{c}{(x + \Delta x)^2}$

Segundo paso $y + \Delta y = \frac{c}{(x+\Delta x)^2}$

$$\underline{y\ldots\ldots = \frac{c}{x^2}}$$

$$\Delta y = \frac{c}{(x+\Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{-c \cdot \Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (A) tendremos

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2x}{x^2(x)^2} = -\frac{2c}{x^3} \cdot \left[y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2c}{x^3} \right]$$

Criterios de evaluación:

No	Concepto	Porcentaje
1	Trabajos Escritos	10%
2	Actividades web escolar	20%
3	Actividades Áulicas	20%
4	Examen	50%
	Total de Criterios de evaluación	100%

Bibliografía básica y complementaria:

Lenguaje Algebraico Ing. Gerardo Sarmiento agosto 2009

Desarrollo del pensamiento matemático Rodrigo Andrés Vásquez

CAPITULO 1 SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

Algebra Lineal y Geómetra
Curso2010/11.Departamentode´Algebra.http://www.departamento.us.es/da

Pre cálculo Quinta Edición, Matemáticas para el cálculo; James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson; Editorial Thomson.