Distribución de probabilidad normal estándar.

El número de distribuciones normales es ilimitado, y cada una posee diferentes medias μ,desviación estándar σ , o ambas. Mientras que es posible proporcionar tablas de probabilidad de distribuciones discretas, como la binomial y la de Poisson, es imposible elaborar tablas de una infinidad de distribuciones normales. Por fortuna, un miembro de la familia se utiliza para determinar las probabilidades de todas las distribuciones de probabilidad normal. Es la distribución de probabilidad normal estándar y es única, pues tiene una media de 0 y una desviación estándar de 1.

Cualquier distribución de probabilidad normal puede convertirse en una distribución de probabilidad normal estándar si se resta la media de cada observación y se divide esta diferencia entre la desviación estándar. Los resultados reciben el nombre de valores z o valores tipificados.

VALOR z

Distancia con signo entre un valor seleccionado, designado X, y la media, μ , dividida entre la desviación estándar, σ.

De esta manera, el valor z es la distancia de la media, medida en unidades de desviación estándar. En términos de una fórmula.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

En donde:

X es el valor de cualquier observación y medición.

μ es la media de la distribución.

σ es la desviación estándar de la distribución.

Aplicaciones de la distribución normal estándar.

Áreas de valores z seleccionados.

Valores z calculados	Área
2.84	.4977
1.00	.3413
0.49	.1879

Los ingresos semanales de los supervisores de turno de la industria del vidrio se rigen por una distribución de probabilidad normal con una media de $\$1\ 000$ y una desviación *estándar de* $\$100$. ¿Cuál es el valor z del ingreso X de un supervisor que percibe $\$1\ 100$ **semanales**? ¿Y de un supervisor que gana $\$900$ **semanales**?

De acuerdo con la fórmula, los valores z de los dos valores X ($\$1100$ y $\$900$) son:

*Para X=$*1100

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{1100 - 1000}{100}$$

$$z = \frac{100}{100} = 1$$

$Para\ X = 900$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{900 - 1000}{100}$$

$$z = \frac{-100}{100} = -1$$

El valor Z de 1 indica que un ingreso semanal de $1 100 está a una desviación estándar por encima de la media, y un valor Z de -1 muestra que un ingreso de $900 está a una desviación estándar por debajo de la media. Observe que ambos ingresos ($1 100 y $900) se encuentran a la misma distancia ($100) de la media.

Realiza la siguiente actividad

De acuerdo con la información del ejemplo anterior ($\mu = \$1\ 000$ y $\sigma = \$100$), convierta:

a) El ingreso semanal de $1 225 en un valor z.

b) El ingreso semanal de $775 en un valor z.

Uso de la distribución muestral de la media.

Cálculo de valor z de $\bar{X}$ cuando se desconoce la desviación estándar de la población.

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

El departamento de control de calidad de Cola, Inc., conserva registros sobre la cantidad de bebida de cola en su botella gigante. La cantidad real de bebida en cada botella es de primordial importancia, pero varía en una mínima cantidad entre botellas. La empresa no desea llenar botellas con menos líquido del debido, pues tendría problemas en lo que se refiere a la confiabilidad de la marca. Por otra parte, no puede colocar líquido de más en las botellas porque regalaría bebida, lo cual reduciría sus utilidades. Los registros indican que la cantidad de bebida de cola tiene una distribución de probabilidad normal. La cantidad media por botella es de 31.2 onzas, y la desviación estándar de la población, de 0.4 onzas. Hoy, a las 8 de la mañana, el técnico de calidad seleccionó al azar 16 botellas de la línea de llenado. La cantidad media de bebida en las botellas es de 31.38 onzas. ¿Es un resultado poco probable? ¿Es probable que el proceso permita colocar demasiada bebida en las botellas? En otras palabras, ¿es poco común el error de muestreo de 0.18 onzas?

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Aplicando la fórmula y sacar nuestros datos:

$\bar{X} = 31.38$ onzas

$\mu = 31.2$ onzas.

$\sigma = 0.4$ onzas.

$n = 16$ botellas.

$$z = \frac{31.38 - 31.2}{\frac{0.4}{\sqrt{16}}} \rightarrow z = \frac{0.18}{\frac{0.4}{4}} \rightarrow z = \frac{0.18}{0.1} = 1.8$$

El 0.18 es el error muestral y el 0.1 es el error estándar de distribución muestral de la de la media.

Después, calcule la probabilidad de un valor z mayor que 1.80. En el apéndice B.1 localice la probabilidad correspondiente a un valor z de 1.80. Este valor es de 0.4641.

La probabilidad de un valor z mayor que 1.80 es de 0.0359 de 4% de probabilidad que seleccione una muestra de 16 observaciones de una población normal con una media de 31.2 onzas y una desviación estándar poblacional de 0.4 onzas, y determine que la media de la muestra es igual o mayor que 31.38 onzas.

La conclusión es que en el proceso se vierte demasiada bebida de cola en las botellas. El técnico de control de calidad debe entrevistarse con el supervisor de producción para sugerir la reducción de la cantidad de bebida en cada botella.

Actividad de aprendizaje.

Una población normal tiene una media de 60 y una desviación estándar de 12. Usted selecciona una muestra aleatoria de 9. Calcule la probabilidad de que la media muestral:

a) Sea mayor que 63.

b) Sea menor que 56.

c) Se encuentre entre 56 y 63.

Intervalos de confianza de una media poblacional.

INTERVALO DE CONFIANZA

Conjunto de valores que se forma a partir de una muestra de datos de forma que exista la posibilidad de que el parámetro poblacional ocurra dentro de dicho conjunto con una probabilidad específica. La probabilidad específica recibe el nombre de nivel de confianza.

Para calcular el intervalo de confianza, consideraremos dos situaciones:

• Utilizamos los datos de la muestra para calcular $\boldsymbol{\mu}$ con $\overline{\boldsymbol{X}}$, mientras que la desviación estándar de la población $\boldsymbol{\sigma}$ es conocida.

• Utilizamos los datos de la muestra para calcular $\boldsymbol{\mu}$ con $\overline{\boldsymbol{X}}$, mientras que la desviación estándar de la población es desconocida. En este caso, sustituimos la desviación estándar de la(s) muestra(s) por la desviación estándar de la población $\boldsymbol{\sigma}$. Existen diferencias importantes en las suposiciones entre estas dos situaciones. Consideraremos primero el caso donde se conoce $\boldsymbol{\sigma}$.

Desviación estándar de la población conocida $\boldsymbol{\sigma}$.

Los resultados del teorema central del límite permiten afirmar lo siguiente con respecto a los intervalos de confianza utilizando el estadístico $\boldsymbol{Z}$:

1. $\mathbf{95\%}$ Noventa y cinco por ciento de las medias muestrales seleccionadas de una población se encontrará dentro de $\mathbf{1.96}$ errores estándares (desviación estándar de las medias muestrales de la media poblacional, $\boldsymbol{\mu}$.

2. $\mathbf{99\%}$ Noventa y nueve por ciento de las medias muestrales se encontrará a $\mathbf{2.58}$ errores estándares de la media poblacional.

Los intervalos calculados de esta manera proporcionan ejemplos de los niveles de confianza y reciben el nombre de intervalo de confianza de 95% e intervalo de confianza de 99%. Por lo tanto, 95% y 99% son los niveles de confianza y se refieren al porcentaje de intervalos similarmente construidos que incluirían el parámetro a calcular, en este caso, μ.

Nivel de confianza	Probabilidad media más cercana	Valor z
80%	.3997	1.28
94%	.4699	1.88
96%	.4798	2.05

INTERVALO DE CONFIANZA DE LA MEDIA POBLACIONAL CON UNA CONOCIDA.

$$\bar{X} = \pm Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La American Management Association desea información acerca del ingreso medio de los gerentes de la industria del menudeo. Una muestra aleatoria de $256\ gerentes$ revela una media muestral de $\$45\ 420$. La desviación estándar de esta muestra es $de\ \$2\ 050$. A la asociación le gustaría responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la media de la población?
2. ¿Cuál es un conjunto de valores razonable de la media poblacional?
3. ¿Cómo se deben interpretar estos resultados?

Solución

¿Cuál es la media de la población?

En este caso se ignora. Sí se sabe que la media de la muestra es de $45 420. De ahí que la mejor estimación del valor de población sea el estadístico de la muestra correspondiente. Por consiguiente, la media de la muestra de $45 420 constituye un estimador puntual de la media poblacional desconocida.

¿Cuál es el conjunto de valores razonable de la media poblacional?

La asociación decide utilizar un nivel de confianza de 95%. Para determinar el intervalo de confianza correspondiente, se aplica la fórmula: $\bar{X} = \pm Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Datos: $\bar{X} = 45\ 420; Z = 1.96, n = 256\ y\ \ \sigma = 2\ 050$

Sustituyendo

$$45\,420 \pm 1.96\left(\frac{2\,050}{\sqrt{256}}\right) = 45\,420 + 1.96\left(\frac{2\,050}{\sqrt{256}}\right) \ y \ 45\,420 - 1.96\left(\frac{2\,050}{\sqrt{256}}\right)$$

$$= 45\,420 + 1.96(128.125) \ y \ 45\,420 - 1.96(128.125)$$

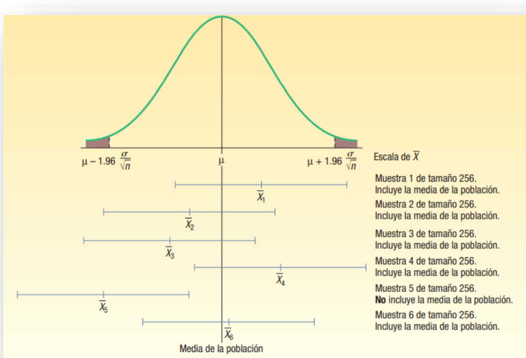
$$= 45\,420 + 251.125 \ y \ 45\,420 - 251.125$$

$$= 45\,671.125 \ y \ 45\,168.875$$

$$\approx 45\,671 \ y \ 45\,168.$$

¿Cómo se deben interpretar estos resultados?

Suponga que selecciona varias muestras de 256 gerentes, tal vez varios cientos. Para cada muestra, calcula la media y después construye un intervalo de confianza de 95%, como en la sección anterior. Puede esperar que alrededor de 95% de estos intervalos de confianza contenga la media de la población. Cerca de 5% de los intervalos no contendrán el ingreso anual medio poblacional. No obstante, un intervalo de confianza particular contiene el parámetro poblacional o no lo contiene. El siguiente diagrama muestra los resultados de seleccionar muestras de la población de gerentes de la industria del menudeo: se calcula la media de cada una y, posteriormente, se determina un intervalo de confianza de 95% de la media poblacional. Observe que no todos los intervalos incluyen la media poblacional. Los dos puntos extremos de la quinta muestra son inferiores a la media poblacional. Esto se debe al error de muestreo, que constituye el riesgo que se asume cuando se selecciona el nivel de confianza.



REALIZA LA SIGUIENTE ACTIVIDAD

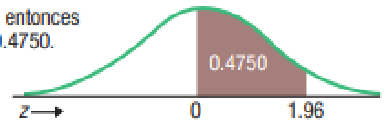
Bun-and-Run es una franquicia de comida rápida de la zona noreste, la cual se especializa en hamburguesas de media onza, y sándwiches de pescado y de pollo. También ofrece refrescos y papas a la francesa. El departamento de planeación de la firma informa que la distribución de ventas diarias de los restaurantes tiende a seguir la distribución normal. La desviación estándar de la distribución de ventas diarias es de $3 000. Una muestra de 40 mostró que las ventas medias diarias suman $20 000.

a) ¿Cuál es la media de la población?

b) ¿Cuál es la mejor estimación de la media de la población? ¿Qué nombre recibe este valor?

c) Construya un intervalo de confianza de 99% de la media poblacional.

Ejemplo:
Si $z = 1.96$, entonces
$P(0 \text{ a } z) = 0.4750$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990