Matemáticas Administrativas

Segundo Cuatrimestre

Enero – Abril

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1978 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra universidad inició sus actividades el 19 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a las instalaciones de carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de educación que promueva el espíritu emprendedor, basados en Altos Estándares de calidad Académica, que propicie el desarrollo de estudiantes, profesores, colaboradores y la sociedad.

Visión

Ser la mejor Universidad en cada región de influencia, generando crecimiento sostenible y ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Pasión por Educar"

Balam

Es nuestra mascota, su nombre proviene de la lengua maya cuyo significado es jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen a los integrantes de la comunidad UDS.

Objetivo de la materia:

El alumno evaluará los modelos financieros aplicando los principios matemáticos referentes a la variación del dinero en el tiempo.

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS ADMINISTRATIVAS Y FUNCIONES MATEMÁTICAS

1.1. Introducción

1.1.1-Conceptos básicos

1.1.2- Relación con otras áreas de estudio básicas

1.1.3- Aplicaciones generales

1.2. Funciones matemáticas

1.2.1 Conceptos básicos

1.2.2 Relación con otras áreas de estudio básicas

1.2.3 Aplicaciones generales

1.2.4 Representación a través de gráficos

1.2.5-Tipos de gráficos

1.3.- La recta

1.3.1- Pendiente

1.3.2- Tipos de pendiente

1.3.3- Ecuación de la recta

1.4.- Funciones lineales

1.4.1.- Aplicaciones

UNIDAD II

ÁLGEBRA MATRICIAL

2.- Introducción y conceptos básicos

2.1.- Definición de matrices

2.2.- Vectores

2.3- Tipos especiales de matrices

2.4.-Matriz diagonal

2.5.- Matriz identidad

2.6.- Matriz nula

UNIDAD III

3.- Modelos de equilibrio

3.1- Modelos para la determinación del precio de equilibrio de la oferta y la demanda

3.2.- Modelo para la determinación del punto de equilibrio de las ventas y los gastos

3.3.- Casos en que no se puede determinar o encontrar un punto de equilibrio

3.4.- Criterios para aplicar un modelo de equilibrio adecuado

3.5.- Repercusión de los costos en la obtención del punto de equilibrio

3.6.- Efectos del punto de equilibrio en los informes administrativo-contables

UNIDAD IV

4. OPERACIONES DE MATRICES

4.1.- Adición y sustracción de matrices

4.2.- Producto de matrices

4.3.- Transpuesta de una matriz

4.4.- Matrices particionadas

4.5.- Determinantes de una matriz

4.6.- Inversa de una matriz

4.7.- Ecuaciones lineales

Unidad 1

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS ADMINISTRATIVAS Y FUNCIONES MATEMÁTICAS

1.1. Introducción

Las matemáticas, son una herramienta que nos permite verificar mediante modelos gráfico-numéricos los efectos que pueden generar las variaciones de los elementos o factores que intervienen en los fenómenos y sucesos que se presentan a lo largo de nuestra vida. En esta primera unidad, presentamos el concepto de función, así como las diversas formas para su representación. Se analizarán también los tipos de funciones, la traficación y las operaciones que puede haber entre ellas, con el fin de crear bases sólidas que permitan dar solución práctica a los diversos problemas que se presentan en el área económico-administrativa. Todo esto se podrá realizar a través del análisis de situaciones de optimización, costo total, ingreso, oferta y demanda y mediante el uso de los diferentes tipos de funciones y modelos gráficos.

1.1.1-Conceptos básicos

La matematización de la economía se realiza a través del concepto de número real, que nos permite asignar un valor numérico —cuantificar— cualquier magnitud económica. Una realidad económica puede tratarse matemáticamente a partir del momento en que encontramos un medio de describirla mediante magnitudes numéricas cuyo comportamiento y relaciones mutuas podemos estudiar (precios, salarios, réditos, probabilidades, tasas de inflación, de desempleo, beneficios, costes, etc.). Sin embargo, es muy raro que un problema venga determinado por un ´único dato numérico. Lo usual es que sea necesario trabajar simultáneamente con muchos datos. En este tema veremos los conceptos básicos para trabajar sistemáticamente con "bloques" de números.

1.1.2- Relación con otras áreas de estudio básicas

Para comprender cualquier fenómeno se necesita la matemática, ésta forma parte de la construcción de las ciencias, todas ellas creaciones del ser humano; por lo que para poder interpretarlas en toda su dimensión y que muchas puedan existir es necesaria la ciencia lenguaje del universo; pero la relación matemática-ciencias muchas veces está ausente en la enseñanza, sus conocimientos se dan de manera aislada, sin mostrar su cultura y utilidad. Como recurso didáctico se puede utilizar tal reciprocidad de manera amena, en cualquiera de sus formas para enriquecer la enseñanza, la praxis y formación del docente de matemática. Todo esto se puede hacer desde una pedagogía integral que aboga por un proceso educativo vivo y transdisciplinar que muestre el concierto de fantasías que entrelazan todas las ciencias, en mayor o menor intensidad.

Las ciencias son un conjunto de conocimientos adquiridos por la humanidad, una necesidad del ser humano para su progreso y desarrollo, son un acto creativo del individuo. La gran mayoría de estas ciencias están relacionadas con la ciencia lenguaje del universo: la matemática. Ésta les ha aportado criticidad y les ha permitido el desarrollo de grandes teorías y aplicaciones; basta estudiar alguna de ellas en particular para ver su huella plasmada en el fantástico concierto de sus teorías, que da muestra del profundo poder de creación que tiene la figura más compleja del universo: el hombre.

Las ciencias tienen varias clasificaciones, en especial Carnap (2006) las divide en formales, naturales y sociales. Las primeras estudian las formas válidas de inferencia; las segundas tienen por objeto el estudio de la naturaleza y las terceras son todas las disciplinas que se ocupan de los aspectos del ser humano. En las primeras se encuentran la lógica y la matemática, que no tienen contenido concreto en oposición con el resto de las ciencias. En las naturales se encuentran la: astronomía, biología, física, geología, química, entre otras. Y en las ciencias sociales están la: filosofía, administración, antropología, política, demografía, economía, derecho, historia, psicología, sociología, entre otras.

1.1.3- Aplicaciones generales

La geometría de Euclides, trae consigo en sus investigaciones un estudio sobre la naturaleza del espacio, comenzando allí a emerger la física. Existió la necesidad de la construcción y la medida de terrenos, entre otras aplicaciones. La geometría de Euclides (325 a. C - 265 a. C.) es así de suma importancia y tiene su diversidad de aplicaciones. Aristóteles (384 a. C. - 322 a. C.), también un gran estudioso de la física, afirmaba que los cuerpos más pesados caen más rápido. Desde luego, se encuentran la geometría y la estática; Arquímedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C) escribió una tratado del equilibrio de los planos y de sus centros de gravedad, desarrolló la teoría de la palanca y de los centros de gravedad de varias figuras planas entre ellas la parábola. Mágicas teorías donde no se separan los saberes entre físicos y matemáticos, se insinúa que sería un éxito en cuanto a motivación si se mostraran de esta manera las teorías.

La matemática, la computación, la biología y la medicina

La relación de la matemática y la medicina es importantísima. Un ejemplo lo encontramos en dispositivos para realizar tomografías computarizadas, entre tantos avances. Hay que tener presente que el cuerpo humano es el sistema de procesamiento de información más complejo. Si se juntan todos los procesos humanos de información, los conscientes y los inconscientes involucraríamos el procesamiento de 1024 bits de información diariamente. Esta cantidad astronómica de bits es un millón de veces mayor que el total de conocimiento humano que es de 1018 bits almacenados en todas las bibliotecas del mundo.

La matemática y la música

La música es, con justa razón, la hija privilegiada de la matemática. Se estudiaba, en las enseñanzas clásicas de la época griega dentro del quadrivium, junto con la aritmética, la geometría y la astronomía, estas enseñanzas correspondían a los saberes exactos, de ahí que la música se pueda considerar, aparte de un arte, como una ciencia. No interesa en estos momentos la discusión en cuanto a su naturaleza, o no, de ciencia, esta discusión está fuera de estas reflexiones.
En este escrito se intenta rescatar la relación música-matemática ausente en una docencia de la ciencia formal carente de sentido en la vida de los discentes. Algunos educadores no muestran en clases que el creador de la escala música fue Pitágoras, utilizando un instrumento musical denominado monocordio.

1.2. Funciones matemáticas

Una función es una relación establecida entre dos variables que asocia a cada valor de la primera variable (variable independiente x), un único valor de la segunda variable (variable dependiente y). Esta relación se representa mediante y = f(x).
Una función real de variable real es una función en la que tanto los valores de la variable dependiente como los de la variable independiente son números reales. Se suele expresar mediante ( ) : x y f x f → = → R R . A f (x) se la denomina la imagen de x por la función f .

1.2.1 Conceptos básicos

El concepto de función matemática o simplemente función, es sin duda, el más importante y utilizado en Matemáticas y en las demás ramas de la Ciencia. No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa.

Desde los tiempos de Galileo, que fue uno de los primeros en usarlo (aunque no en la forma que nosotros lo conocemos actualmente), pasando por el gran Newton y Leibniz, que fue el primero que en 1673 usó la palabra "función" para referirse a la relación de dependencia de dos variables o cantidades, Euler, que le dio su formulación moderna $y = f(x)$, Cauchy, Dirichlet o Gauss, las mejores mentes de la Historia de la Humanidad le dedicaron su atención y sus desvelos.

El estudio de las propiedades de las funciones está presente en todo tipo de fenómenos que acontecen a nuestro alrededor. Así, podemos nombrar fenómenos sociales relacionados con crecimientos demográficos, con aspectos económicos, como la inflación o la evolución de los valores bursátiles, con todo tipo de fenómenos físicos, químicos o naturales, como la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la función de onda de una partícula a escala cuántica, la desintegración de sustancias radiactivas o la reproducción de especies vegetales y animales. Casi todo es susceptible de ser tratado a través del planteamiento y estudio de una o varias funciones que gobiernan los mecanismos internos de los procesos en todas las escalas y niveles. Otra cosa bien distinta y mucho más difícil, es determinar cuáles son las funciones que intervienen en cada proceso en concreto. Esta, en suma, es la tarea de los científicos: descubrir la dinámica rectora de cada fenómeno y expresarla en términos de una función

1.2.2 Relación con otras áreas de estudio básicas

Para comprender cualquier fenómeno se necesita la matemática, ésta forma parte de la construcción de las ciencias, todas ellas creaciones del ser humano; por lo que para poder interpretarlas en toda su dimensión y que muchas puedan existir es necesaria la ciencia lenguaje del universo; pero la relación matemática-ciencias muchas veces está ausente en la enseñanza, sus conocimientos se dan de manera aislada, sin mostrar su cultura y utilidad. Como recurso didáctico se puede utilizar tal reciprocidad de manera amena, en cualquiera de sus formas para enriquecer la enseñanza, la praxis y formación del docente de matemática. Todo esto se puede hacer desde una pedagogía integral que aboga por un proceso educativo vivo y transdisciplinar que muestre el concierto de fantasías que entrelazan todas las ciencias, en mayor o menor intensidad.

1.2.3 Aplicaciones generales

Se suele aceptar como un absoluto incuestionable que la matemática juega un papel importante en el desarrollo de las ciencias, en la tecnología y para interpretar la vida cotidiana. Sin embargo, el proceso académico enseñanza - aprendizaje se realiza, en ocasiones, con unos grados de abstracción que alejan la ciencia formal de la realidad de los estudiantes, de sus intereses. Es menester que los profesionales, matemáticos y docentes de la ciencia se formen para recobrarla en las aulas, es así como Uzuriaga, Vivian y Martínez (2006, p.269) afirman que:

La educación matemática debe ser valorada y rescatada por los matemáticos, pues es claro que debe combinar una muy buena solidez y conocimientos matemáticos con las teorías pedagógicas y centrar nuestra atención en desarrollar, o por lo menos usar adecuada y críticamente, metodologías que le permitan a nuestros alumnos un aprendizaje a lo largo de la vida, a aprender a aprender, aprender a emprender, aprender a ser, aprender a conocer, aprender a trabajar en colaboración, a valorar el contexto histórico cultural.

La utilidad y concepción de las teorías matemática, sus saberes se utilizaban en las otras ciencias existentes en cada época, tales como la astronomía y la música, por ejemplo. Los resultados matemáticos obtenidos dan pie y utilidad al estudio en diversos ámbitos. Sin la matemática, el ser humano no hubiera alcanzado los niveles de desarrollo necesarios.

Desde luego cada ciencia tiene su trascendental importancia en saberes; y bajo el punto de vista de su influencia en el bienestar social, cada una ha dado su aporte valioso; pero si es cierto que el conocimiento es uno de los elementos que ayudan en el destino de las sociedades para que las necesidades fundamentales de la vida sean satisfechas, se admite que la matemática puede con toda justicia demandar uno de los lugares más privilegiados en el sistémico concierto de las fantasías de la inteligencia, integrada a todos los saberes de las ciencias.

Lo anterior, lleva a mirar los puntos de vista de la ciencia matemática, desde el comienzo de la historia, a fin de que sean apreciados los aportes de la ciencia lógica. Han existido diversas maneras de concebirla; en la antigüedad en los filósofos presocráticos ya existía inquietud por encontrar la naturaleza de las cosas más allá de sus apariencias múltiples. Pitágoras (582 a. C. - 507 a. C) y sus seguidores denominados los pitagóricos afirmaban que a toda materia se le asociaba un número. Estos estudiosos le dieron suma importancia a las proporciones y se consideran los precursores de la matemática. En su época entonces no se enseñaban las ciencias de manera separadas (ni separadas de la filosofía) y el fin último de la educación era la formación integral del individuo; ideales plasmados en la Paideia griega.

Más adelante, al surgir el positivismo con Comte (1798-1857), después de la revolución industrial, se execra en las aulas a la matemática de las ciencias y la filosofía. Se rechazan conocimientos provenientes de la psicología, sociología, considerándolas a todas estas fuera de los cánones de la ciencia; como se puede notar se reduce el estudio a meros asuntos probables y la educación entra en decadencia, porque es esta convergen aspectos claramente humanos fuera de las pruebas científicas.

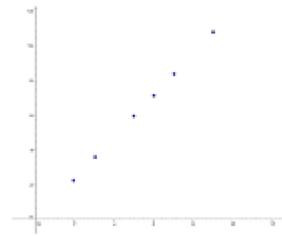
De esta manera se impone el espíritu positivista como único conocimiento válido, reduciendo y supeditando la cultura a la ciencia, execrando la filosofía, abandonando el sentido común crítico, exigiendo inclusive el percibir la realidad sólo desde un punto de vista. Predomina, en consecuencia, una visión empirista, aproblemática, ahistórica, acumulativa y lineal; desprovista antes los ojos del mundo de subjetividad y dinamismo.

1.2.4 Representación a través de gráficos

Fundamentalmente, existen 3 formas de expresar una función: por medio de una tabla de valores, una gráfica o por una fórmula (también llamada ecuación). Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, pero podemos avanzar que la fórmula es la mejor forma de expresar la función, ya que con ella podemos obtener las otras dos expresiones mediante una serie de procedimientos establecidos.

Veamos un ejemplo de la vida diaria en el que aparecen las 3 formas de expresar una función: Manolito compra pan todos los días; desea saber el importe de las barras de pan que va a comprar dependiendo del nº de barras adquiridas. Para ello, ha recogido los datos de varios días distintos en los que ha adquirido distinto número de barras y ha formado una tabla de valores:

Nº de barras	2	3	5	6	7	9
Precio (en €)	2'40	3'60	6	7'20	8'40	10'8



1.2.5-Tipos de gráficos

La gráfica de una función es el dibujo, sobre unos ejes coordenados, de todos los pares (x,f(x)) donde x recorre todos los valores del dominio de la función. Como ya quedó claro y = f(x), así que la 2ª coordenada y de cada uno de estos puntos no es más que la correspondiente imagen de la 1ª coordenada x.

Gráfica -> dibujo de {(x,f(x))/ x Dominio f}

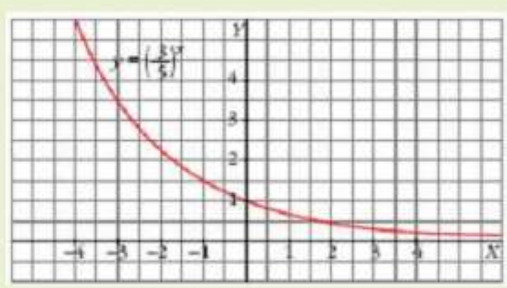
Sobre el eje OX representamos los valores de la variable independiente x y sobre el eje OY los valores de f(x) = y que es la variable dependiente.

Gráfica de f(x) = $\left(\frac{3}{5}\right)^x$

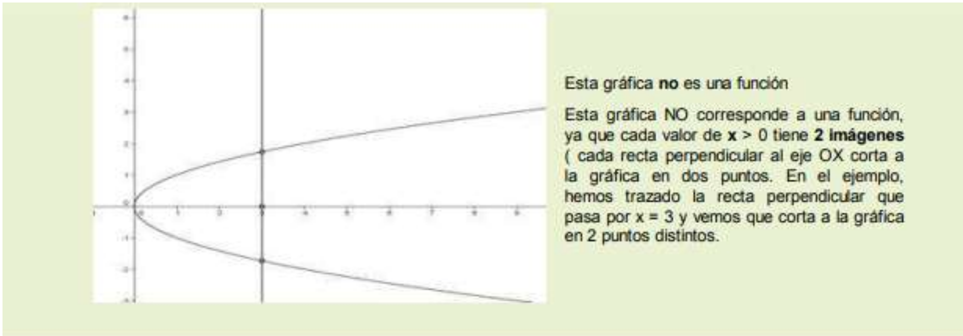
Dominio = $(-\infty, +\infty)$

La gráfica pasa por el punto (0,1) como se observa si miramos el plano coordenado, luego: 0 (f(0) = 1. En efecto: $(3/5)^0 = 1$

También se ve que pasa por (1,0'6) ya que f(1) = $(3/5)^1$ = 3/5 = 0'6

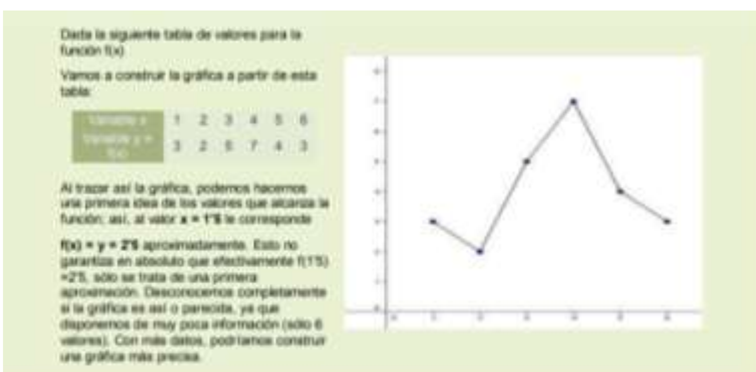


Para determinar a partir de la gráfica el valor de y = f(x) que corresponde a un valor de x concreto, debemos trazar la recta perpendicular al eje OX que pase por ese valor de x y el punto en el que esta recta corte a la gráfica es el valor de f(x). Cada recta perpendicular debe cortar en un único punto a la gráfica, ya que en otro caso habría algún valor de x que tendría dos imágenes, lo cual no debe suceder.



La gran ventaja de la gráfica como forma de representar a una función es que proporciona una gran cantidad de información de un vistazo: nos dice cuál es el comportamiento global de la función, la tendencia que tiene, etc. Por el contrario, como inconveniente podemos citar que, en general, es muy difícil obtener la gráfica precisa de una función cualquiera. De hecho, se necesita una herramienta matemática poderosísima para ello: el cálculo diferencial, combinado con el cálculo de límites funcionales. Este estudio se escapa del objetivo del presente curso.

Como primera aproximación al dibujo de una gráfica, podemos utilizar una tabla de valores para marcar cada punto de la tabla, formado por 2 coordenadas x e y, sobre los ejes y unir entre sí, bien mediante rectas o curvas, los puntos dibujados, como se indica en el siguiente ejemplo:



1.3.- La recta

Analíticamente hablando, una recta se define como una ecuación de primer grado en dos variables de la forma:

$Ax + By + C = 0$

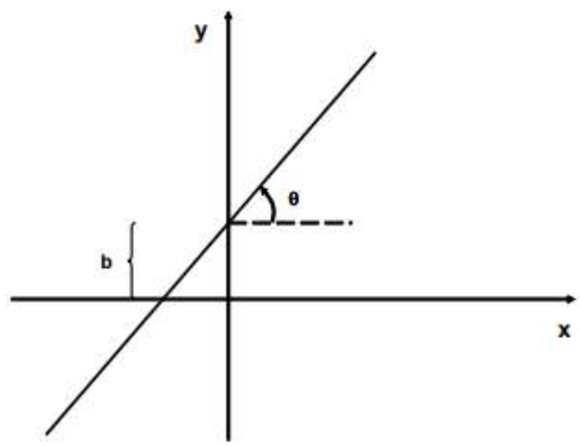
Donde, A ,B C son coeficientes numéricos y las variables son x y y .

La recta es el lugar geométrico de los puntos P(y,x) que cumplen con la ecuación Ax + By + C = 0 . Las características de una recta son la pendiente y la ordenada al origen.

• La pendiente (m) se define como su grado de inclinación y es la tangente del ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) que forma la recta con el eje x .

m = tan θ = CO / CA

• La ordenada al origen (b) es la distancia que existe del origen al punto donde la recta cruza al eje y .



De acuerdo a la figura anterior, una recta es el lugar geométrico de los puntos que poseen una misma pendiente.

1.3.1- Pendiente

Se sugiere que tengas una calculadora científica para que vayas siguiendo la secuencia de las operaciones que se van realizando.

Como ya se ha dicho, se requiere de 2 puntos, y tratándose de puntos en el plano cartesiano entonces se debe conocer sus coordenadas. Por lo tanto la formula a usar es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde
(x_1, y_1) son las coordenadas del punto 1
(x_2, y_2) son las coordenadas del punto 2

Con el fin de obtener practica sobre la aplicación de la formula veamos el siguiente ejemplo. Es importante poner atención a la secuencia de los pasos para llegar al resultado. Ejemplo 1. Obtener la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2,-3) y B(-4,1) El primer paso es definir el cual es el punto 1 el que será A y el punto 2 el B, por lo que al sustituir en la formula tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{-4-2} = \frac{1+3}{-6} = \frac{4}{-6}$$

que simplificando y escribiendo el signo en el numerador resulta:

$$m = \frac{-2}{3}$$

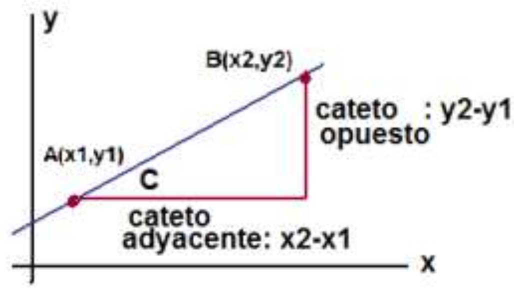
Ahora lo que sigue es darle significado a nuestro resultado. Para esto debemos emplear los conocimientos de trigonometría, respecto a cálculo de ángulos. La función trigonométrica que nos permite obtener el ángulo de inclinación es: tangente ya que usando un sistema de coordenadas podemos ver que en un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es nuestra recta en cuestión, entonces los puntos1 y 2 forman los lados que se llaman catetos por lo que conocidas las coordenadas podemos usar la función tangente que se define como:

$$\text{tang } C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

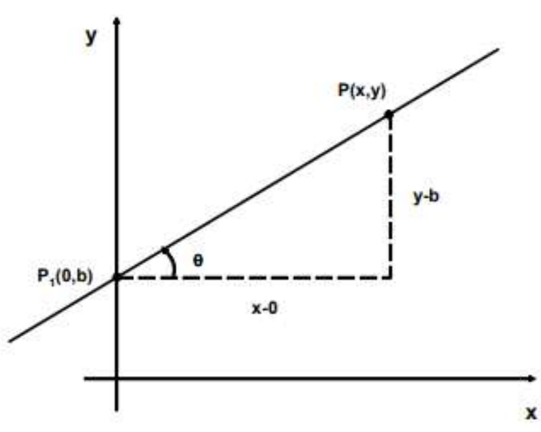
Que es la pendiente buscada.

Todo ello lo observamos en la figura siguiente:



1.3.2- Tipos de pendiente

Si en el caso anterior, el punto P1 se desplaza hasta que coincida con el eje y, se tiene:



Se advierte que el punto P1(x1 y1), se convierte en P (0 b,) , donde b es la ordenada al origen.

Para este caso la pendiente es:

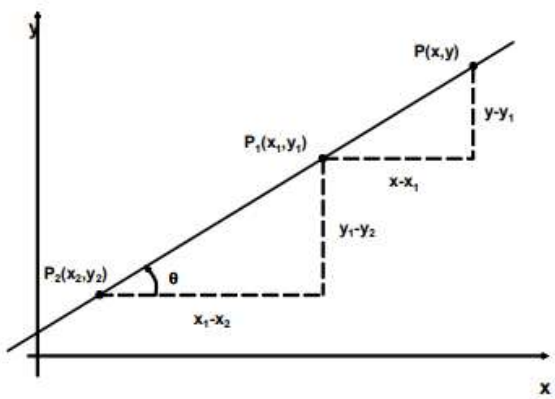
M = y – b / x – 0

Ahora, si se despeja y − b : y − b = m(x − 0) ⇒ y − b = mx , es decir: y = mx + b

Que es la ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta.

DOS PUNTOS (CARTESIANA)

Dados los puntos P(y,x), ( ) P1(x1 y2)   y P2(x2 y2), de una recta:



Se observa que la pendiente que une a los puntos P y P1 es:

m = y – y1 / x – x1

y que la pendiente que une a los puntos P1 y P2 es:

m = y1 – y2 / x2 – x2

Pero como la pendiente es la misma se pueden igualar:

y – y1 / x – x1 = y – y2 / x – x2, que equivale a:

y – y1 = y1 – y2 / x2 – x2 (x – x1)

Que es la ecuación conocida como de dos puntos o cartesiana de la recta.

1.3.3- Ecuación de la recta

Conociendo un punto cuyas coordenadas son (x, y) y si conocemos su pendiente; podemos encontrar su ecuación de la recta, la cual la podemos representar como ecuación particular y general, esta ecuación representa el movimiento realizado con las condiciones antes mencionado, tú puedes realizar tu ecuación cuando realizas un movimiento en línea recta, a continuación te explico como:

Palabras clave

Inclinación: Un ángulo formado por una línea horizontal y una línea de visión por arriba de ella que mide menos de 90 grados.

Pendiente: se refiere a la inclinación de la tangente en un punto. Recta: es una sucesión infinita de puntos, situados en una misma dirección.

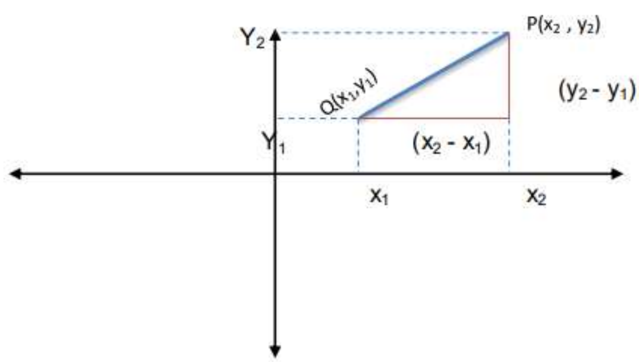
Trigonometría: Rama de las matemáticas que estudia a los triángulos por sus lados y ángulos. Segmento: es un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos.

Tangente: Se aplica a la línea o superficie que se toca en un único punto con otra línea o superficie sin llegarla a cortar.

Punto: es adimensional: no tiene longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional. No es un objeto físico. Describe una posición en el espacio.

Ecuación de la recta en forma de punto pendiente

Una recta está determinada por su pendiente (m) con sus coordenadas (x1 y1) de un punto de ella misma. Se determina la ecuación en X y Y que satisfaga las coordenadas (X, Y) de cualquier punto de la recta y que no satisfaga por ningún otro para cualquiera de números reales. Si P (x, y) es un punto cualquiera del plano x y:



La pendiente de la recta que une P con el punto dado Q (x_1 y_1) es: $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

y esto es un m (pendiente), si P(x, y) está sobre la recta específica, por lo tanto tenemos que: $\boldsymbol{m} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

Y la ecuación de la recta es: $y - y_1 = \boldsymbol{m}(x - x_1)$

Recordar que la pendiente es igual a l grado de inclinación, se representa:

$$\boldsymbol{m} = tg\,\theta$$

Como la $\boldsymbol{tg}\,\theta = \frac{c.o}{c.a}$ y acorde a la figura anterior: $c.o = (y_2 - y_1)$ y se tiene: $c.a = (x_2 - x_1)$, se sustituye en la función tangente y nos queda:

$tg\,\emptyset = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ y como $\boldsymbol{m} = tg\,\theta$

La pendiente es: $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

1.4.- Funciones lineales

Definición

Se llama función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x,y). Su ecuación tiene la forma:

y = mx ó f(x) = mx

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

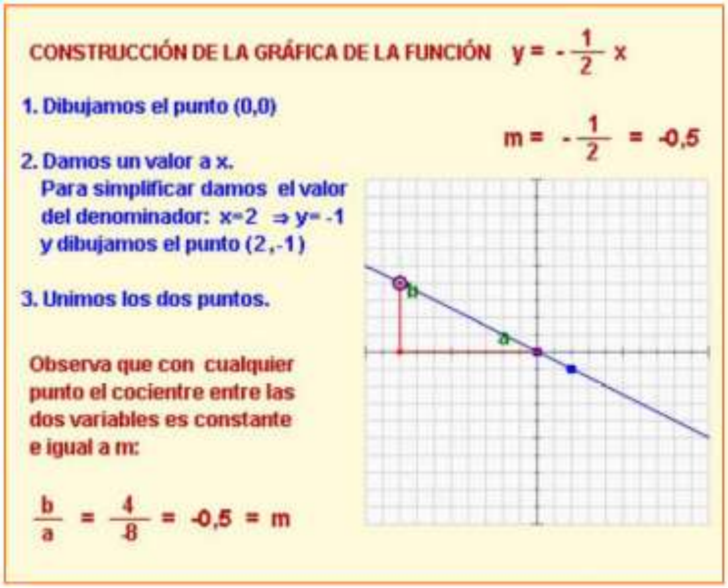
Recuerda: dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.

Representación gráfica

Como has visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como y=mx, si x=0 entonces y=0; por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0).

Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0).

Si x=1, entonces y=m, por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o pendiente de la recta. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.


CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = -\frac{1}{2}x$
1. Dibujamos el punto (0,0)
$m = -\frac{1}{2} = -0,5$
2. Damos un valor a x.
Para simplificar damos el valor del denominador: $x=2 \Rightarrow y=-1$ y dibujamos el punto (2,-1)
3. Unimos los dos puntos.
Observa que con cualquier punto el cocientre entre las dos variables es constante e igual a m:
$\frac{b}{a} = \frac{4}{-8} = -0,5 = m$
b
a

EJERCICIOS resueltos

1. Determina si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes son lineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona.
   a. Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
   b. Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
   c. Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20€. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.
   d. Relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

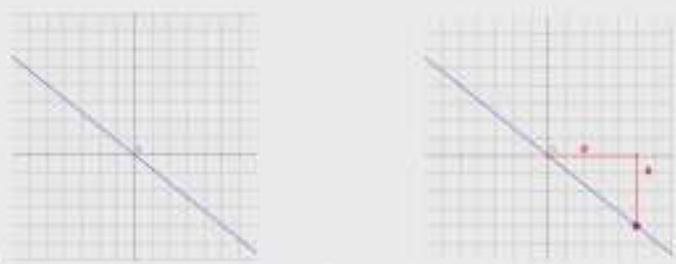
Solución:

a) Si el descuento es 10% pago el 90%: PRebajado = 0'9 · PInicial (SÍ es lineal)
b) La relación entre peso (P) y volumen (V) es la densidad (d), que es constante si no cambian las condiciones de presión y temperatura: P = d·V (SÍ es lineal)
c) Si C es la cantidad invertida e I son los intereses I = 0'05 · C – 20 (NO es lineal, pero casi lo es. En realidad es una función afín que veremos en el siguiente capítulo)
d) $A = long^2$ (NO es lineal)

2. Determina las ecuaciones de las funciones lineales cuyas gráficas son:

a.

Buscamos un punto de coordenadas enteras (no es estrictamente necesario pero es más cómodo si es posible). a = 2, b = 7. La pendiente es m=7/2 y la ecuación es $y = \frac{7}{2}x$



b.

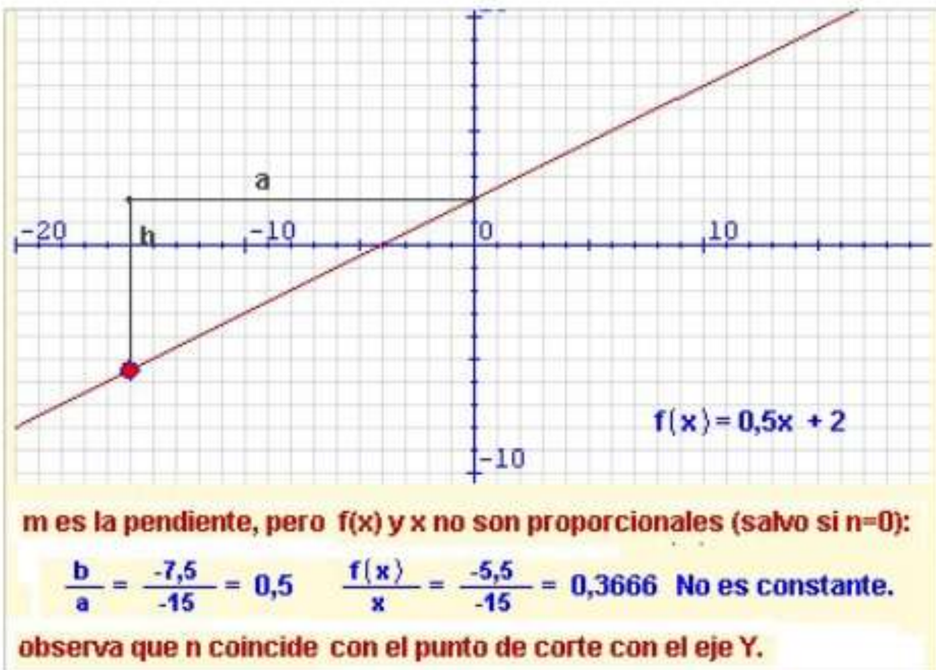
En este caso a = 5 y b = -4 (le asignamos un valor negativo porque la recta es decreciente). La pendiente es, pues, m = -4/5 y la ecuación $y = -\frac{4}{5}x$

Función afín

Definición

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (las magnitudes ya no son proporcionales). Se dice que es una función afín y su forma es:

y = mx + n ó f(x) = mx + n



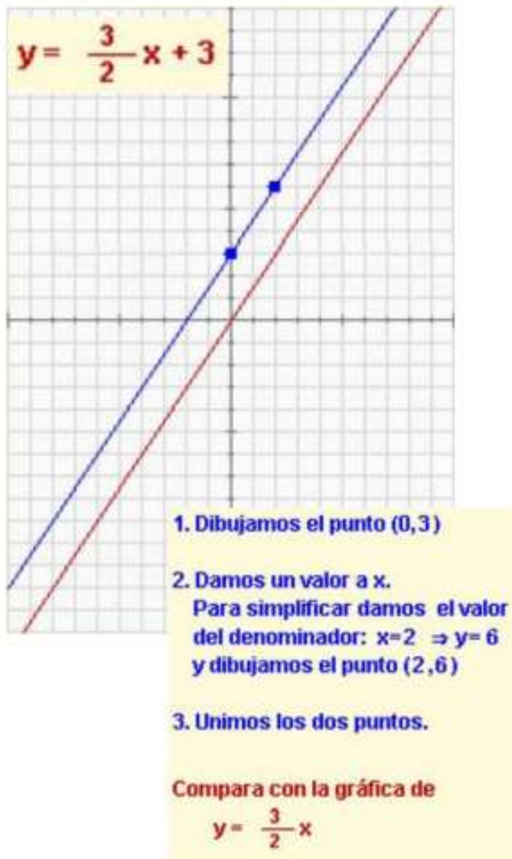
Representación gráfica

Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos.

• Uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, como hemos visto, la ordenada en el origen, n, nos indica que la recta pasa por el punto (0,n).

• El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función.



Ecuación de la recta

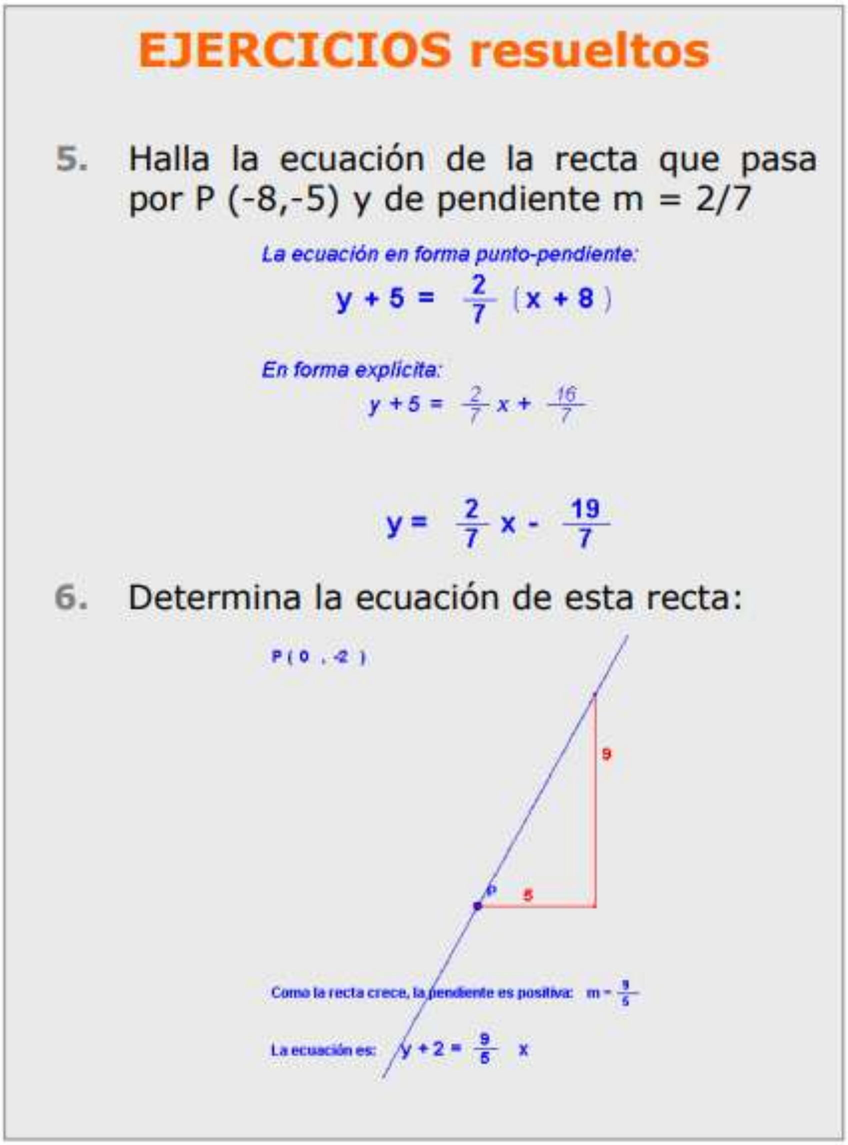
Forma punto-pendiente

La ecuación $y = mx + n$ que hemos visto se denomina forma explícita de la ecuación de la recta, y nos permite hallar dicha ecuación cuando conocemos la pendiente y la ordenada en el origen.

Cuando sólo conocemos la pendiente, m, y las coordenadas de otro de los puntos de la recta, (xo,yo), su ecuación es:

y - yo = m (x - xo)

Esta ecuación recibe el nombre de forma punto-pendiente de la ecuación de la recta. En la secuencia siguiente se explica cómo se obtiene.

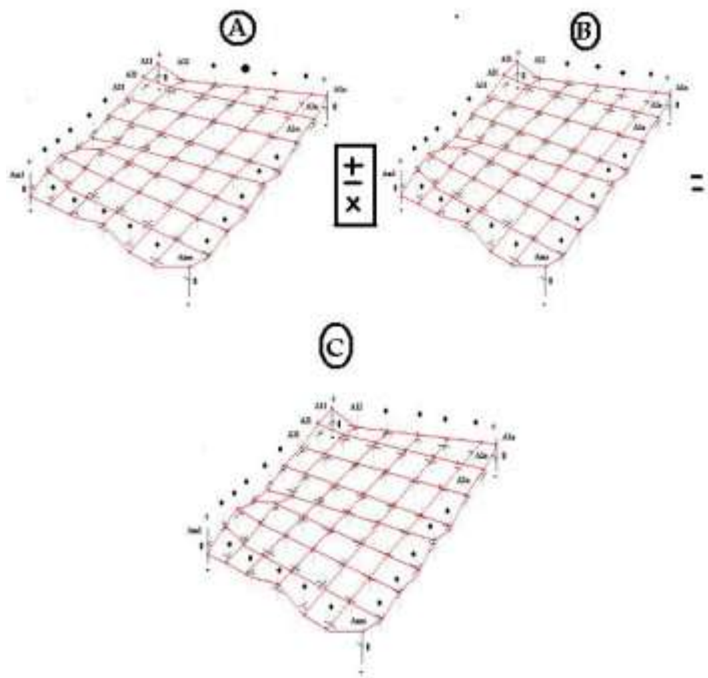


UNIDAD II

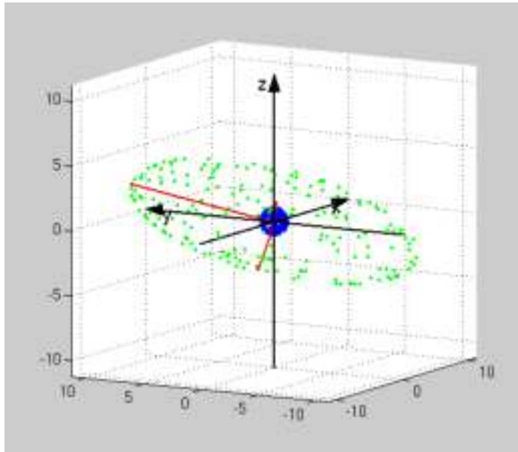
ÁLGEBRA MATRICIAL

2.- Introducción y conceptos básicos

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.
Una matriz es una tabla bidimensional de números en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse.



Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, y registrar los datos que dependen de varios parámetros.
Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices. Pueden descomponerse de varias formas.



2.1.- Definición de matrices

Una matriz es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados elementos) ordenados en filas y Columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m-por-n (escrito m×n), y a m y n dimensiones de la matriz.

2.2.- Vectores

En Octave los vectores se pueden crear introduciendo una lista de valores separados por espacios o comas y encerrados entre corchetes. Veamos un ejemplo a continuación:

≫t = [4 8 -2 3 5]

t = 4 8 -2 3 5

En numerosas ocasiones, nos interesarán listas de valores en las que sus elementos guarden una cierta estructura, relación u orden. Por ejemplo, podríamos estar interesados en un vector con los enteros comprendidos entre 0 y 10:

≫t = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]

t = 0 1 2 3 4 5 6 7 8 910

Los valores de los elementos de t los hemos introducido uno a uno porque no son muchos pero, ¿y si hubiéramos querido introducir una lista de valores de 0 a 100?. Para facilitar esta tarea, Octave introduce la notación de dos puntos (:). Si escribimos dos números enteros separados por dos puntos, Octave genera todos los enteros comprendidos entre ellos. Ası, podrıamos crear el vector t como sigue:

≫t = [0:10] ;

Es decir, la orden [i:j] crea el vector [i i+1 i+2 ... j-2 j-1 j]. Si quisiéramos que el intervalo entre los elementos fuera distinto de 1, utilizaríamos tres números separados por ':', siendo el número central el incremento:

≫s = [0:2:10]

s = 0 2 4 68 10

En este ejemplo, el vector creado contiene los valores entre 0 y 10 separados por 2 Unidades. Este valor de incremento puede poseer cualquier valor entero, real e incluso Negativo:

≫s = [10:-2:0]

s = 10 8 6 4 2 0

2.3- Tipos especiales de matrices

2.4.-Matriz diagonal

Una ***matriz es cuadrada*** cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es ***(nxn)***

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6.- Matriz identidad

En álgebra lineal, la **matriz identidad** es una matriz que cumple la propiedad de ser el elemento neutro del producto de matrices. Esto quiere decir que el producto de cualquier matriz por la matriz identidad (donde dicho producto esté definido) no tiene ningún efecto. La columna *i*-ésima de una matriz identidad es el vector unitario de una vectorial inmersa en un espacio Euclídeo de dimensión *n*. Toda matriz representa una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. La **matriz identidad** se llama así porque representa a la aplicación identidad que va de un espacio vectorial de dimensión finita a sí mismo.

2.8.- Matriz nula

Se llama ***matriz nula*** a la que tiene todos los elementos cero, Por ejemplo:

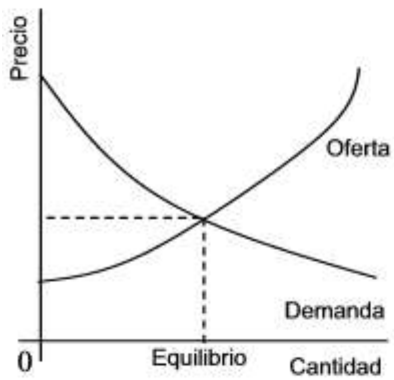
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

UNIDAD III

3.- Modelos de equilibrio

3.1- Modelos para la determinación del precio de equilibrio de la oferta y la demanda.

En una situación normal, el mercado se encuentra equilibrado. Se oferta tanto como se demanda. Es decir que todo lo que hay para vender se vende (nadie demanda más ni menos de ese determinado bien o servicio de lo que está ofertado en el mercado).

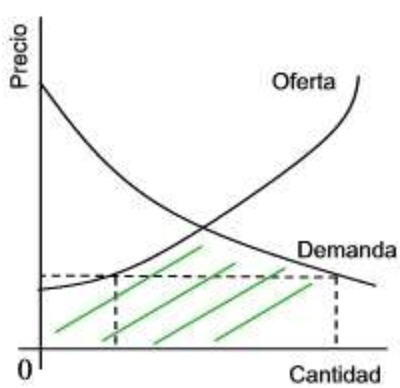


Exceso de demanda

Si por ejemplo bajase mucho el precio de un bien, aumentaría su demanda (más interesados sobre el mismo) y al mismo tiempo también descendería la cantidad ofrecida (sería menos rentable y por lo tanto habría menos interesados en ofrecerlo).

Se produce entonces un exceso de demanda, es decir muchos compradores interesados en comprar y al mismo tiempo un mercado que ofrecerá menos cantidad.

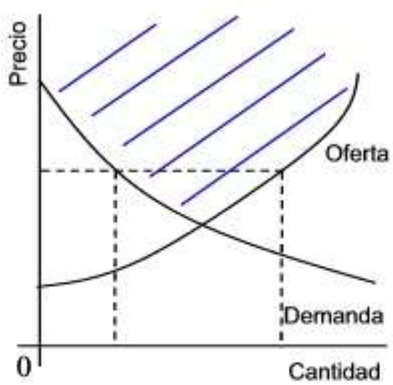
En ese caso no estará equilibrado hasta que se llegue a un nuevo punto de equilibrio del mercado.



Exceso de oferta

Si el precio de un bien sube, nuevamente se deja el equilibrio. Habrá más vendedores interesados en vender (ya que la rentabilidad será mayor) pero al mismo tiempo menos compradores interesados en comprar (porque el precio es más alto). Esta situación se conoce como exceso de oferta.

De la misma manera que en el caso anterior el mercado no estará equilibrado hasta llegar a un nuevo punto de equilibrio en el que se oferte tanto como se demanda.



3.2- Modelo para la determinación del punto de equilibrio de las ventas y los gastos

La determinación del punto de equilibrio es uno de los elementos centrales en cualquier tipo de negocio pues nos permite determinar el nivel de ventas necesarias para cubrir los costes totales o, en otras palabras, el nivel de ingresos que cubre los costes fijos y los costes variables. Este punto de equilibrio (o de apalancamiento cero), es una herramienta estratégica clave a la hora de determinar la solvencia de un negocio y su nivel de rentabilidad. Parte de esta importancia la daremos a conocer en el Concepto de Economía de esta semana.

Para comenzar, definiremos algunos aspectos básicos. Por Coste Fijo**,** denotaremos todos aquellos costes que son independientes a la operación o marcha del negocio. Aquellos costes en los que se debe incurrir independientemente de que el negocio funcione, por ejemplo alquileres, gastos fijos en agua, energía y telefonía; secretaria, vendedores, etc. Exista o no exista venta, hay siempre un coste asociado. Por costes variables, denotaremos todo aquello que implica el funcionamiento vivo del negocio, por ejemplo, la mercadería o las materias primas. A diferencia de los costes fijos, los costes variables cambian en proporción directa con los volúmenes de producción y ventas. Para que el negocio tenga sentido, el precio de venta debe ser mayor que el precio de compra. Esta diferencia es lo que se conoce como margen de contribución**.**

Como muestra la gráfica, los costos fijos (CF) tienen un importe constante en el tiempo (línea horizontal) dado que los factores involucrados en este ítem se han fijado por contrato: arriendos, salarios, depreciaciones, amortizaciones, etc. El coste variable (CV), se incrementa de acuerdo a la actividad del negocio (parte desde el origen y tiene pendiente positiva). La suma de ambos costos (CF + CV) corresponde a los Costos Totales (CT). Nótese que en el origen del diagrama cartesiano, tanto las ventas totales como los costos variables son iguales a cero. Sin embargo, para ese nivel de actividad igual a cero, tenemos la existencia de los Costos Fijos.

Es de interés hacer esta distinción porque una vez iniciada la operación del negocio comienza la carrera por cubrir los costes fijos primero (alquileres, salarios) y luego los costes variables (mercadería, materias primas). En la parte izquierda de la gráfica los costes totales son mayores a los ingresos totales, de ahí que la denominemos "área deficitaria" (color naranja). Cuando los ingresos alcanzan el punto en que se cubren todos los costes (fijos y variables) se dice que se está en el punto de equilibrio. Este punto también se conoce como punto de quiebre, dado que al cruzarlo abandonamos el área deficitaria y pasamos al área de beneficios (área verde). Para obtener el Punto de Equilibrio o punto de quiebre podemos emplear las siguientes fórmulas:

Determinación del Punto de equilibrio en Valor:

A

$$P.E. \equiv \frac{\text{Costos Fijos}}{1 - \dfrac{\text{Costos Variables}}{\text{Ventas Totales}}}$$

Determinación del Punto de Equilibrio en Volumen:

B

$$P.E. \equiv \frac{\text{Costos Fijos}}{\text{Ventas Totales - Costos Variables}}$$

www.elblogsalmon.com

En el primer caso, obtenemos el punto de equilibrio en Valor (eje vertical), mientras que en el segundo obtenemos el Punto de Equilibrio en Volumen de ventas. Nótese que esta segunda ecuación presenta en el denominador el **Margen de Contribución** (la diferencia entre el Precio de Venta y el Costo del producto). Esta segunda ecuación nos ofrece una forma sencilla de conocer el punto de equilibrio para toda empresa o negocio que aplica un margen de contribución estandarizado. Aquí la fórmula se reduce a PE=CF/Mg, donde Mg es el margen de contribución. Si el margen de contribución del producto es el 30% de su valor (se compra a 70 euros y se vende a 100 euros), y los costos fijos son de 5.000 euros, el punto de equilibrio se obtiene de esta sencilla manera: PE=5.000/0,3: es decir, cuando se alcanza la venta de 16.667 euros (o 167 unidades), se ha llegado al Punto de Equilibrio.

De acuerdo a este ejemplo, y a como consideremos la información, podemos calcular el punto de equilibrio en volumen de ventas, o el punto de equilibrio en términos de valor, o el punto de equilibrio para proyectos de largo plazo. Sin embargo, más allá de estas consideraciones, hay un aspecto que, como en toda actividad económica, tiene particular relevancia: **el factor tiempo**. Si en el eje de las absisas (Volumen de ventas) consideramos el factor Tiempo, podemos ver que la realidad de un negocio es muy diferente dependiendo del **momento en que llegue al punto de equilibrio**. En el caso del ejemplo, este punto se alcanza cuando se venden 167 unidades. El elemento que hay que tener en cuenta es **¿en qué momento se alcanza el punto de equilibrio?**. Este dato nos permite conocer **la solvencia del negocio**: si el negocio alcanza el punto de equilibrio a mediados de mes (vendiendo, según el ejemplo, a razón de 12 unidades diarias), obtendrá utilidades bastante mayores que si lo alcanza en los últimos días del mes. Puede también darse el caso que termine el mes y que no alcance a cubrir plenamente los costos totales. En este caso, deberá recurrir al crédito para financiarse y no enfrentar dificultades de liquidez.

La determinación del punto de equilibrio permite comprobar la viabilidad del negocio. Si hay constancia en el ritmo de los ingresos también lo habrá en el rango o momento en que se alcanzará el punto de equilibrio (o "punto de quiebre"). Si la actividad económica se desestabiliza y se hace más volátil, también el punto de equilibrio tendrá volatilidad, desplazándose hacia fuera del rango habitual y provocando problemas de liquidez que obligarán a postergar o refinanciar los créditos o los pagos de materias primas. Todas estas señales de comportamiento son posibles de determinar con el análisis del **punto de equilibrio**.

Para terminar, el punto de equilibrio le permite conocer el nivel de beneficios. En el caso del ejemplo, una vez alcanzado el punto de equilibrio, no todo lo que se venda es utilidad neta. De cada nueva unidad vendida (desde la unidad número 168 en adelante, siguiendo con el ejemplo) la utilidad neta es solo el margen de contribución, el 30% que ya está determinado. Este margen de contribución se llama así porque **contribuye al financiamiento de los costos fijos**. Una vez cubiertos los costes fijos, este margen de contribución se convierte en utilidad neta. Es decir que si se venden 100 unidades adicionales al mes, la utilidad neta es de 3.000 euros.

3.2- Modelo para la determinación del punto de equilibrio de las ventas y los gastos

El punto de equilibrio es un indicador necesario para calcular no solo la eficiencia de las operaciones de una empresa, sino el volumen de ventas netas necesarias para que en un negocio no se gane ni se pierda.
Recordemos que el punto de equilibrio es considerado un indicador necesario para calcular no solo la eficiencia de las operaciones de una empresa, sino el volumen de ventas netas necesarias para que en un negocio no se gane ni se pierda. Con ello se puede fijar, por ejemplo, el margen de ganancia que tendrá el precio del producto o servicio ofrecido.

Gino administra Misouvenir.pe, un portal de ventas online de souvernirs tecnológicos que los oferta a S/ 50 cada uno. El manufacturar, promocionar, facturar (vía electrónica) y enviar por courier a los clientes estos souvenirs cuesta por unidad unos S/ 35 y durante el mes tiene costos fijos totales por (luz, Internet, agua, alquileres, sueldos de administrativos) gasta S/7,500. El mes pasado vendió 1,000 souvenirs con amplias expectativas de crecimiento. Calculemos el punto de equilibrio de la empresa de nuestro amigo.

- IT= Ingresos totales
- CT= Costos totales
- Pv = Precio de venta unitario
- Cv= Costo variable unitario
- CF= Costos fijos
- **X = CF / Pv-Cv = Punto de Equilibrio**
-

Para el caso de análisis

Costos Fijos	S/ 7,500
Costo variable unitario	S/ 35
Precio de venta unitario	S/ 50
Punto de equilibrio	500

Para ventas de 500 unidades al mes, la utilidad antes de intereses e impuestos debe ser igual a cero, si produce menos de 500 tiene 'pérdida operativa' y si produce y vende más de 500 unidades va a comenzar a obtener utilidades.

Nuestro amigo Gino reporta ventas de 1,000 souvenirs al mes, por lo que sus ingresos ascienden a S/ 50,000 (1,000 souvenir x S/ 50), pero sus costos totales ascienden a S/ 42,500 (S/ 35x1,000 + S/ 7,500), es decir obtendría una utilidad operativa antes de impuestos y pago de intereses de deudas de S/ 7,500.

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 50 = S/ 50,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x1,000 + S/ 7,500 = S/

42,500

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 50,000 – S/ 42,500 = S/ 7,500

Llegó la competencia

Como el negocio es tan bueno, la competencia no tardó en llegar al segmento donde operaba tranquilamente Gino. Al mes siguiente apareció Turegalitotecnologico.pe, con una campaña muy agresiva y con un costo promedio de souvenirs de S/ 40 más el costo de envío y otras promociones. El impacto se sintió inmediatamente y las ventas de Gino con Misouvenir.pe bajaron a 750 unidades, es decir 25% menos y más de un cliente le advirtió inclusive que los diseños de la competencia eran más innovadores.

Gino inmediatamente hizo cuentas y determinó que sus ingresos en el mes se redujeron de S/ 50,000 a S/ 37,500 y si bien aún operaba por encima del punto de equilibrio y obtenía utilidades (S/ 3,750), estas se habían reducido en 50% (desde S/ 7,500). ¿Qué debía hacer?

Ingresos Totales = Pv(X) = 750 souvenir x S/ 50 = S/ 37,500

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x750 + S/ 7,500 = S/ 33,750

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 37,500 – S/ 33,750 = S/ 3,750

Lo primero que pensó Gino es equiparar sus precios con los de la competencia, reducirlos de S/ 50 a S/ 40 y con ello esperar recuperar a su clientela pérdida, es decir lograr nuevamente 1,000 productos vendidos. Veamos cómo cambian sus ingresos, costos, utilidades y su punto de equilibrio.

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 40 = S/ 40,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x1,000 + S/ 7,500 = S/ 42,500

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 40,000 – S/ 42,500 = - S/ 2,500

Gino se da cuenta que aunque ha recuperado su clientela, ahora obtiene pérdidas (-S/ 2,500). Calculemos su nuevo punto de equilibrio.

Punto de equilibrio: X = CF / Pv-Cv

Costos Fijos	S/ 7,500
Costo variable unitario	S/ 35
Precio de venta unitario	S/ 40
Punto de equilibrio	**1,500**

El punto de equilibrio de Misouvenir.pe ha aumentado de 500 a 1,500 unidades. Es decir la empresa de Gino tendría que vender más de 1,500 unidades (500 más que su venta normal) para conseguir utilidad.

¿Qué hacer?

A nuestro amigo le quedan entonces dos caminos inmediatos para no seguir perdiendo más ventas.

Bajar costos sin sacrificar calidad

Diferenciar totalmente su producto de la competencia para mantener el precio de S/ 50 y evitar que las ventas por lo menos no caigan más.

Como se trata de souvenirs para regalo, la calidad del producto y el tiempo de envío no pueden sacrificarse. Si apuesta a una política de reducción de costos, debe apuntar a lo más duro de reducir, los costos fijos. Haciendo una rápida revisión de su flujo de caja y el detalle de sus facturas de servicios, ve con mucho esfuerzo puede reducir sus costos fijos en 15%, es decir de S/ 7,500 a S/ 6,375. Veamos cómo cambian sus utilidades para ventas proyectadas de 1,000 unidades, a un precio de venta de S/ 40 y el nuevo punto de equilibrio.

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 40 = S/ 40,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 35x1,000 + S/ 6,375 = S/ 41,375

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 40,000 – S/ 41,375 = - S/ 1,375

Aún seguiría reportando perdidas (-S/ 1,375). El nuevo punto de equilíbrio es: 1,275 unidades, 275 más de las que vendería normalmente.

Punto de equilibrio: X = CF / Pv-Cv

Costos Fijos	S/ 6,375

Costo variable unitario	S/ 35
Precio de venta unitario	S/ 40
Punto de equilibrio	**1,275**

La única manera de vender las 1,000 unidades a S/ 40 sin ganar ni perder es que los costos fijos se reduzcan de S/ 7,500 a S/ 5,000 por mes, es decir en la tercera parte.

Si opta por la segunda alternativa el diferenciar totalmente el producto implicaría elevar el costo variable unitario, pues se estaría ofreciendo una mejor calidad e incorporando algún detalle promocional con el envío a cada souvenir. Todo ello con el fin de mantener el precio unitario de S/ 50. Veamos qué pasa con el punto de equilibrio si el costo variable sube de S/ 35 a S/ 45, pero los costos fijos se reducen en 15%, es decir a S/ 6.375 mensuales.

Punto de equilibrio: X = CF / Pv-Cv

Costos Fijos	S/ 6,375
Costo variable unitario	S/ 45
Precio de venta unitario	S/ 50
Punto de equilibrio	**1,275**

Se mantendría el mismo nivel requerido de ventas que si solo redujéramos los costos fijos y el precio de venta, 1,275, muy lejos de su punto de equilibrio inicial (500 unidades).

La solución final

Pero, a estas alturas Gino ha notado que puede reducir sus costos fijos en 15% y que difícilmente puede vender por encima del precio que ofrece la competencia.

Por ello, revisa nuevamente su estructura de costos y los procesos y diseños que ha venido lanzando al mercado. Luego de varios días y sus noches de cálculos y sesiones creativas, encontró que diseñar una nueva colección (totalmente diferenciada de lo que vende la competencia) con materiales reciclados, podría reducir sus costos variables unitarios de S/ 35 a S/ 30. Veamos cómo cambian sus cuentas.

Punto de equilibrio: X = CF / Pv-Cv

Costos Fijos	S/ 6,375
Costo variable unitario	S/ 30
Precio de venta unitario	S/ 40
Punto de equilibrio	**638**

Gino descubre finalmente que su punto de equilibrio con esta estructura se reduce a 638 unidades y frente a las 1,000 que normalmente tiene en ventas mensuales, podría obtener una utilidad mensual de S/ 3,625

Ingresos Totales = Pv(X) = 1,000 souvenir x S/ 40 = S/ 40,000

Costos totales = Cv(X) + CF = S/ 30x1,000 + S/ 6,375 = S/ 36,375

Utilidad operativa = IT – CT = S/ 40,000 – S/ 36,375 = S/ 3,625

Esta utilidad es inferior al escenario de caída de ventas en 25% (S/ 3,750), pero Gino y Misouvenirs.pe ya equilibró sus precios con la competencia –si no lo hacía los ingresos seguirían cayendo– y ofrecerá un producto diferenciado, que le puede dar un mejor margen de ventas incluso que las 1,000 unidades que normalmente reportaba al mes.

3.3- Casos en que no se puede determinar o encontrar un punto de equilibrio

El punto de equilibrio

En términos de contabilidad de costos, es aquel punto de actividad (volumen de ventas) donde los ingresos totales son iguales a los costos totales, es decir, el punto de actividad donde no existe utilidad ni pérdida. Hallar el punto de equilibrio es hallar el número de unidades a vender, de modo que se cumpla con lo anterior (que las ventas sean iguales a los costos). Pasos para hallar el punto de equilibrio Veamos a continuación los pasos necesarios para hallar y analizar nuestro punto de equilibrio:

1. **Definir costos**

   En primer lugar debemos definir nuestros costos, lo usual es considerar como costos a todos los desembolsos, incluyendo los gastos de administración y de ventas, pero sin incluir los gastos financieros ni a los impuestos.

2. **Clasificar los costos en Costos Variables (CV) y en Costos Fijos (CF)**

   Una vez que hemos determinados los costos que utilizaremos para hallar el punto de equilibrio, pasamos a clasificar o dividir éstos en Costos Variables y en Costos Fijos:

   Costos Variables:

   Son los costos que varían de acuerdo con los cambios en los niveles de actividad, están relacionados con el número de unidades vendidas, volumen de producción o número de servicios realizado, por ejemplo, materia prima, combustible, salario por horas, etc.

   Costos Fijos:

   Son costos que no están afectados por las variaciones en los niveles de actividad, por ejemplo, alquileres, depreciación, seguros, etc.

3. **Hallar el costo variable unitario**

   En tercer lugar determinamos el Costo Variable Unitario (Cvu), el cual se obtiene al dividir los Costos Variables totales entre el número de unidades a producir (Q).

4. Aplicar la fórmula del punto de equilibrio

La fórmula para hallar el punto de equilibrio es:

(P x U) – (Cvu x U) – CF = 0

Dónde:

P: precio de venta unitario.

U: unidades del punto de equilibrio, es decir, unidades a vender de modo que los ingresos sean iguales a los costos.

Cvu: costo variable unitario.

CF: costos fijos.

El resultado de la fórmula será en unidades físicas, si queremos hallar el punto de equilibrio en unidades monetarias, simplemente multiplicamos el resultado por el precio de venta.

5. Comprobar resultados

Una vez hallado el punto de equilibrio, pasamos a comprobar el resultado a través del uso del Estado de Resultados.

6. Analizar el punto de equilibrio.

Y, por último, una vez hallado el punto de equilibrio y comprobado a través del Estado de Resultados, pasamos a analizarlo, por ejemplo, para saber cuánto necesitamos vender para alcanzar el punto de equilibrio, cuánto debemos vender para lograr una determinada utilidad, cuál sería nuestra utilidad si vendiéramos una determinada cantidad de productos, etc.

Ejemplo de cómo hallar el punto de equilibrio

Una empresa dedicada a la comercialización de camisas, vende camisas a un precio de US$ 40, el costo de cada camisa es de US$ 24, se paga una comisión de ventas por US$ 2, y sus gastos fijos (alquiler, salarios, servicios, etc.), ascienden a US$ 3.500. ¿Cuál es el punto de equilibrio en unidades de venta?

1. Hallando el punto de equilibrio:

P = 40 Cvu: 24 + 2 = 26

CF = 3500

Aplicando la fórmula:

(P x U) – (Cvu x U) – CF = 0

40X – 26X – 3500 = 0

14X = 3.500

Qe = 250 und.

Qe = US$ 10.000

Comprobando:

Ventas (P x Q): 40 x 250 = 10000

(-) C.V (Cvu x Q): 26 x 250 = 6500

(-) C.F 3500

Utilidad Neta US$ 0

Conclusiones: nuestro punto de equilibrio es de 250 unidades, es decir, necesitamos vender 250 camisas para que las ventas sean iguales a los costos; por tanto, a partir de la venta de 251 camisas, recién estaríamos empezando a obtener utilidades.

2. Utilidades si vendiéramos 800 camisas:

Ventas (P x Q): 40 x 800 32000

(-) C.V (Cvu x Q): 26 x 800 20800

(-) C.F 3500 Utilidad Neta US$7700

Conclusiones: al vender 250 camisas, nuestras ventas igualarían nuestros cotos y, por tanto, tendríamos una utilidad de 0; pero si vendiéramos 800 camisas, estaríamos obteniendo una utilidad de US$ 7.700.

3.4- Criterios para aplicar un modelo de equilibrio adecuado

Toda empresa se desenvuelve entre dos mercados: de proveedores y de consumidores; se encarga de transformar insumos en productos, generando valor agregado que justifique la inversión realizada. La estructura de costos y gastos durante la operación de la empresa permite visualizar, en un mercado definido, el esfuerzo mínimo que es necesario desarrollar para cubrir dicho esfuerzo, de modo que toda producción adicional constituirá una ganancia monetaria. Dicho nivel mínimo es el punto de equilibrio, el cual depende del costo de los insumos y el precio de venta de los productos.

El efecto de la variación de los factores que determinan el punto de equilibrio no es uniforme, depende de la estructura de costos y gastos y del margen de contribución variable unitario, la sensibilidad del volumen de equilibrio facilita priorizar las decisiones que la empresa debe tomar en forma adecuada y oportuna.

Introducción

La concepción de una empresa industrial puede simplificarse mediante un conjunto de actividades que permita transformar los insumos en productos. Los insumos son proporcionados a la empresa por los proveedores, según las condiciones de cantidad y precio del mercado. Los productos son colocaciones por la empresa en volumen y precio que fije el mercado, según las condiciones de la oferta y demanda del período analizado. La diferencia entre los ingresos por ventas y el costo de los insumos representa la utilidad del negocio. Este tipo de análisis es igualmente válido para una empresa de servicios.

El costo de los insumos se refleja en la estructura de los costos y gastos de la empresa, la cual a su vez depende de las condiciones del mercado, la tecnología y la gestión aplicada. Igualmente, los ingresos por ventas dependen de la mixtura de los productos que se comercializan y del precio de venta que se obtiene según las condiciones del mercado.

Si bien el objetivo básico de una empresa es maximizar las utilidades, existen situaciones en que el empresario debe adoptar decisiones que en el corto plazo impliquen trabajar con pérdidas, pero que permitirán la permanencia competitiva del negocio en el mediano y largo plazo.

En este contexto, lo que a continuación se desarrolla es un modelo que permite representar la situación económica mínima que permita a la empresa generar utilidades a una determinada fecha, y que a su vez permita simular diferentes escenarios de comportamiento futuro del negocio, lo cual facilita la toma de decisiones efectiva y eficiente.

Dicho instrumento de análisis se denomina "Modelo de Punto de Equilibrio", el cual es una aproximación, que se basa en premisas o supuestos, los mismos que en cada situación en particular se debe revisar.

La ventaja de este modelo es que permite predecir los resultados futuros del negocio en forma anticipada, lo cual es un soporte fundamental para la gestión de los negocios. El artículo se desarrolla acompañado de un ejemplo hipotético, con la finalidad de mostrar de manera objetiva los alcances de un instrumento de gestión útil en todo tipo de actividad empresarial, sea productora de bienes o de prestación de servicios.

Factores a considerar

El análisis de un negocio utilizando el modelo de punto de equilibrio considera los siguientes factores: capacidad instalada, estructura de costos y gastos y precio de ventas. En este análisis, los costos y precios unitarios se llevan a cabo sin considerar el impuesto general a las ventas (IGV), toda vez que el impuesto pagado por la empresa al realizar las compras se recupera al concretarse la venta de la producción, proceso que se define como crédito fiscal. En el caso que la empresa no esté obligada a retener el IGV resultante de sus ventas, el IGV pagado en las compras se constituye en costo. En esta última situación, debido a normas del comercio internacional, el Estado a sus empresas exportadoras le devuelve el impuesto pagado, facilitando que las mismas sean competitivas en el exterior.

3.5-Repercusión de los costos en la obtención del punto de equilibrio

Según los datos de nuestro ejemplo, se puede observar que la utilidad del negocio depende del volumen de ventas que demande el mercado, pudiendo registrarse resultados positivos o negativos. A continuación, con los datos del ejemplo, se presenta una simulación de diferentes volúmenes de ventas, desde cero hasta la capacidad instalada:

Se tiene que para volúmenes menores de producción, los resultados netos son desfavorables, por ejemplo para producción de 100 unidades anuales el margen de pérdida representa el 67% de las ventas del período; pero, para mayores volúmenes, dichos resultados son satisfactorios, tal es el caso de operar a plena capacidad, en que la utilidad del año equivale al 30% de las ventas. Para alcanzar una utilidad nula, de modo que los ingresos totales cubran la totalidad de los costos, la producción anual debe superar a 200 unidades y según, los valores simulados, ser menor de 400 unidades; pero más cerca al primero de ellos.

En la gráfica inferior, se puede apreciar la evolución de los ingresos totales y los costos totales para los diferentes volúmenes de producción anual.

Gráficamente, se puede observar que para una producción de 250 unidades anuales, la utilidad es nula y dicha cantidad de producción representa el volumen de equilibrio. Si esta cifra se relaciona con la capacidad instalada (750 unidades / año), se tiene que para cubrir la totalidad de costos la empresa debe operar al 33,3% de dicha capacidad. Si la empresa opera a un ritmo menor a la tercera parte de la capacidad instalada, se registran pérdidas; para obtener ganancias, debe operar por encima de dicho nivel.

Otro manera de determinar el volumen de equilibrio es a base del margen de contribución variable unitario (mcvu), el cual es la diferencia entre el precio de ventas (p) y el costo variable unitario (cvu); este margen, en nuestro ejemplo, es de 400 nuevos soles por cada unidad de producto terminado.

mcvu = p - cvu = 900 - 500 = 400 S/. / Unidad

Dicho margen, toda vez que está expresado sólo en términos variables, permite que la empresa cubra los costos fijos y genere ganancias, lo cual depende del volumen de producción. Para llegar al equilibrio, debe cubrir costos fijos (S/.100 000 al año), para lo cual se tendría la siguiente relación:

1 unidad ________	S/. 400
Xo unidades ________	S/.100 000

De donde, se obtiene que Xo es igual a 100 000 / 400 = 250 unidades anuales, que es el valor del volumen de equilibrio.

Otra manera de expresar la condición de equilibrio (utilidad igual a cero), es que los ingresos totales: p (X), sean iguales al costo total: CF + cvu (X); de donde:

Xo = CF / (p - cvu)

3.6- Efectos del punto de equilibrio en los informes administrativo-contables

O cálculo del punto de equilibrio es uno de los métodos más importantes para un buen control financiero de cualquier negocio. Con él es posible entender la cantidad de ventas que necesitan ser realizadas para que los ingresos igualen los costos y gastos, resultando en beneficio cero.

Sin embargo, existen 3 variaciones del cálculo de punto de equilibrio que puede ser importante conocer. Vea abajo:

- Punto de equilibrio contable
- Punto de equilibrio financiero
- Punto de Equilibrio Económico

Para calcular estos 3 métodos, puede tomar en cuenta sus datos contables o gerenciales, de acuerdo con su realidad y disponibilidad de información.

Antes de entrar en las diferencias de cada uno, vale la pena recordar el concepto de margen de contribución, esencial para el cálculo de esas 3 variaciones *punto de equilibrio*, que es el precio de venta unitario menos los costes directos para la producción de un producto o la prestación de un servicio.

Vamos a ver las características de cada uno ahora:

Punto de equilibrio contable

Este es el método más utilizado y muestra para usted la cantidad de ventas necesarias para que su beneficio sea cero.

- **Lucro** = Cero

- **Fórmula**: PEC = Gastos fijos / márgenes de contribución

- **Vantagem**: Tenga en cuenta sus estados financieros para mostrarle exactamente cuánto necesita vender para obtener un beneficio cero. Es decir, cualquier cantidad por debajo de ese valor deberá ser inaceptable para su negocio, ya que resultará en perjuicio.

Punto de equilibrio financiero o de caja

También es conocido como punto de equilibrio de caja por algunos autores y no toma en consideración la depreciación y la amortización, factores que disminuyen el beneficio contable, pero que de manera gerencial no representan la salida de caja de su negocio.

- **Lucro** = Cero - Depreciación
- **Fórmula**: PEF = (Gastos fijos - Gastos no desembolsables) / Margen de contribución
- **Vantagem**: El cálculo no tiene en cuenta gastos que no van a salir de su caja, mostrándole exactamente cuánto usted necesita vender para quedarse con el beneficio cero. El único problema de este enfoque es que no te prepara para momentos de cambio de máquinas o equipos que necesitará ser cambiados en el futuro.

Punto de Equilibrio Económico

En este caso, la empresa determina una ganancia mínima deseada para incrustarse en el cálculo, representando una remuneración al capital invertido en ella. En la práctica, ese cálculo siempre debería ser utilizado en conjunto con el punto de equilibrio contable, ya que existen siempre dos parámetros de análisis financiero, como vender para no tener perjuicio y cuánto vender para lucrar lo deseado.

- **Lucro** = Cero + Remuneración del Capital Propio
- **Fórmula**: PEE = (gastos fijos + beneficio deseado) / Margen de contribución
- **Vantagem**: El cálculo ya tiene en cuenta cuánto quiere de lucro, ayudándole a entender la cantidad de productos o servicios que necesitan ser vendidos para que usted tenga retorno.

UNIDAD IV

4. operaciones de matrices

4.1 Adición y sustracción de matrices

Suma.

Dadas dos matrices del mismo orden, A y B, se define su suma como otra matriz, C, del mismo orden que las matrices sumando cuyos elementos se obtienen sumando a cada elemento de la primera matriz, A, el correspondiente elemento de la segunda matriz sumando, B:

$$A = [a_{ij}]_{mxn};\ B = [b_{ij}]_{mxn} \Rightarrow C = A + B = [c_{ij}]_{mxn}$$

$$\text{con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 & 3+(-1) & 0+0 \\ -1+0 & (2/3)+(1/3) & 3+5 \\ 0+2 & 3+3 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

La resta de dos matrices del mismo orden A y B, se define como la suma de A más la matriz opuesta de B, por lo que resultará ser otra matriz del mismo orden, D, cuyos elementos se obtienen de restar a cada elemento de la primera matriz A (minuendo) el elemento correspondiente de la matriz que resta, B (sustraendo). A

$$A = [a_{ij}]_{mxn};\ B = [b_{ij}]_{mxn} \Rightarrow D = A - B = [d_{ij}]_{mxn}$$

$$\text{con } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo:

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 & 3-(-1) & 0-0 \\ -1-0 & (2/3)-(1/3) & 3-5 \\ 0-2 & 3-3 & 4-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1/3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.2 Producto de matrices

Dada una matriz A = [aij]mxn y número real α∈R, se define el producto de un número por esa matriz como otra matriz B del mismo orden cuyos elementos se obtienen de multiplicar cada uno de los elementos de A por el número α:

$$\alpha \cdot A = B = [b_{ij}]_{mxn}$$

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i = 1,2,\ldots,m; \forall j = 1,2,\ldots,m$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ \alpha = -2$$

$$\alpha \cdot A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 7 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 0 \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot(2/3) & (-2)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -6 & 0 \\ 2 & -4/3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Para poder multiplicar dos matrices A y B, (B A ·), el número de columnas de la matriz que Multiplica en primer lugar, A, debe ser igual al número de filas de la matriz que multiplica en segundo lugar, B. Así pues, dadas dos matrices Amxn, Bnxp, el resultado de multiplicar A por B, B A · , es otra matriz C = B A · , con tantas filas como la matriz que multiplica en primer lugar y tantas columnas como la matriz que aparece en el producto en segundo lugar, Cmxp. Los elementos de la matriz C se obtienen de multiplicar las filas de la primera matriz por las columnas de la segunda matriz. Ese producto consiste en multiplicar un elemento de la fila por el correspondiente de la columna y sumar el resultado al resto de productos de elementos de esa fila por esa columna.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \forall i = 1, \ldots, m; \forall j = 1, \ldots, p$$

Este producto de vectores fila por vectores columna se ilustra con el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} ; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

4.3 Transpuesta de una matriz

A partir de conocer las operaciones básicas con matrices y el concepto de matriz traspuesta, está demostrado lo siguiente:

1.- La matriz traspuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de las matrices traspuestas de las matrices sumando:

(A + B)’ = (A’ + B’)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 3+0\\ 0+2 & 1-1\\ 1+0 & 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 0+2 & 1+0\\ 3+0 & 1-1 & 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4.4.- Matrices particionadas

Este capítulo consta de tres secciones. Las dos primeras versan sobre matrices particionadas. La tercera sección trata sobre la traza de una matriz. En este capítulo se consignarán los principales resultados sobre la traza de una matriz. Existen razones para querer particional una matriz A, algunas de ellas son: (i) La partición puede simplificar la escritura de A. (ii) La partición puede exhibir detalles particulares e interesantes de A. (iii) La partición puede permitir simplificar cálculos que involucran la matriz A.

A veces es necesario considerar matrices que resultan de eliminar algunas filas y/o columnas de alguna matriz dada, como se hizo por ejemplo, al definir el menor correspondiente al elemento aij de una matriz A = [aij] m×n (véase el apartado 1.1.3 del capítulo 1). 2.1. Definición. Sea A una matriz. Una submatriz de A es una matriz que se puede obtener al suprimir algunas filas y/o columnas de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (suprimiendo en A la fila 2 y la columna 3)

$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (suprimiendo en A la fila 3)

$S_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ (suprimiendo en A la fila 3 y las columnas 1 y 4). □

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; mediante un sistema de rectas horizontales o verticales se puede "particionarla" en submatrices de A (Matriz particionada), como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right]$$

4.5.- Determinantes de una matriz

Cada matriz cuadrada A tiene asociado un número real llamado determinante de A, que representaremos por |A| o det A. No vamos a dar una definición explicita de determinante, sino que en su lugar daremos criterios para calcularlos en la práctica.

Matrices 1 × 1 Simplemente, $|a| = a$. Por ejemplo, $|-5| = -5$.

Matrices 2 × 2 La fórmula es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Matrices 3 × 3 La fórmula para calcular determinantes 3 × 3 se conoce como *regla de Sarrus:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

4.6.- Inversa de una matriz

Para algunas matrices se puede identificar otra matriz denominada matriz inversa multiplicativa, o más simplemente, la inversa. La relación entre una matriz A y su inversa (representada por A1) es que el producto de A y A1, en cualquier orden, da como resultado la matriz identidad, es decir:

$$\boxed{\mathbf{AA^{-1} = A^{-1}A = I}}$$

La inversa es similar al recíproco en el álgebra de los números reales. Multiplicar una cantidad b por su recíproco 1/b da como resultado un producto igual a 1. En el álgebra matricial, multiplicar una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad.

Observaciones importantes acerca de la inversa

I Para que una matriz A tenga una inversa, ésta debe ser cuadrada.

II La inversa de A también será cuadrada y tendrá la misma dimensión que A.

III No todas las matrices cuadradas tienen una inversa.

Una matriz cuadrada tendrá una inversa siempre y cuando todas las filas o columnas sean linealmente independientes; es decir, ninguna fila (o columna) es una combinación lineal (múltiplo) de las filas (o columnas) restantes. Si cualquiera de las filas (o columnas) es linealmente dependiente [son combinaciones lineales (múltiplos) de otras filas (columnas)], la matriz no tendrá una inversa. Si una matriz tiene una inversa, se dice que es una matriz no singular. Si una matriz no tiene una inversa, se dice que es una matriz singular.

4.7.- Ecuaciones lineales

Introducción

En esta unidad se aborda el estudio de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se analizan distintos métodos para resolverlos, lo que permite elegir el que resulte más conveniente en cada caso particular.

También se realiza la interpretación gráfica, considerando la importancia que tiene este recurso para facilitar la comprensión del problema e ilustrar las posibilidades que pueden presentarse al resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Se desea determinar el valor de dos números reales x e y , que verifican la siguiente condición: "el doble del número x , más el número y , es igual a 7 ".
La condición requerida establece que:
$2x + y = 7$

Se ha planteado una ecuación lineal con dos incógnitas.

Como ya se vio anteriormente el conjunto solución S1 de esta ecuación está formado por infinitos pares ordenados (, yx) que la verifican.

Simbólicamente: S1 ={(x; y)/ 2 +yx = 7}o bien S1 ={(x; y)/ = 2xy +7}

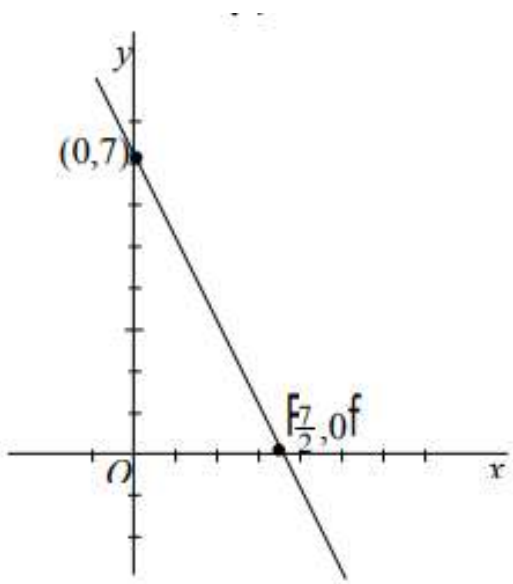
Para obtener algunos de estos pares que son solución de la ecuación planteada, se dan valores a x y se determinan los correspondientes para y , utilizando la expresión y = 2x +7 .

Por ejemplo: si x =1, y = 5 .

(1,5) es una de las soluciones de la ecuación, ya que 2 1+5 = 7 .

También son soluciones: (0,7) , (2,3),K

La representación gráfica de la ecuación 2x + y = 7 es una recta. Los puntos que pertenecen a la recta verifican la ecuación y por lo tanto son las soluciones de la misma.



84

Se desea determinar el valor de dos números reales x e y , que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

o "el doble del número x , más el número y , es igual a 7 "
o "la diferencia entre x e y es igual a 2 ".

Las condiciones planteadas pueden expresarse algebraicamente del siguiente modo:

= + = 2 2 7 x y x y

Han resultado dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Estas ecuaciones deben satisfacerse simultáneamente, por eso se dice que forman un sistema de ecuaciones lineales.

Se observa que cada una de las ecuaciones del sistema se representa gráficamente mediante una recta.

Es importante tener en cuenta que:

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas significa hallar, si es que existen, todos los pares (, yx) que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero en este capítulo sólo se verán los siguientes: método de igualación, método de sustitución y método de reducción.

Método de igualación

Sea el sistema = + = 2 2 7 x y x y .

Se indican a continuación los pasos a seguir para resolver este sistema empleando el método de igualación.

1º) Se despeja la misma incógnita en cada ecuación.

= = + 2 2 7 y x y x

2º) Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación con una incógnita que se formó.

x 2 = 2x +7 x +2x = 7 +2 3x = 9 x = 3

3º) Se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el primer paso, el valor de la incógnita que se ha determinado, y así se calcula el valor de la otra incógnita.

En y = x 2 se reemplaza x por el valor obtenido y resulta:

y = 3 2 =1

La solución del sistema es el par ordenado (3,1) .

Resulta conveniente verificar si la solución hallada satisface las ecuaciones del sistema.

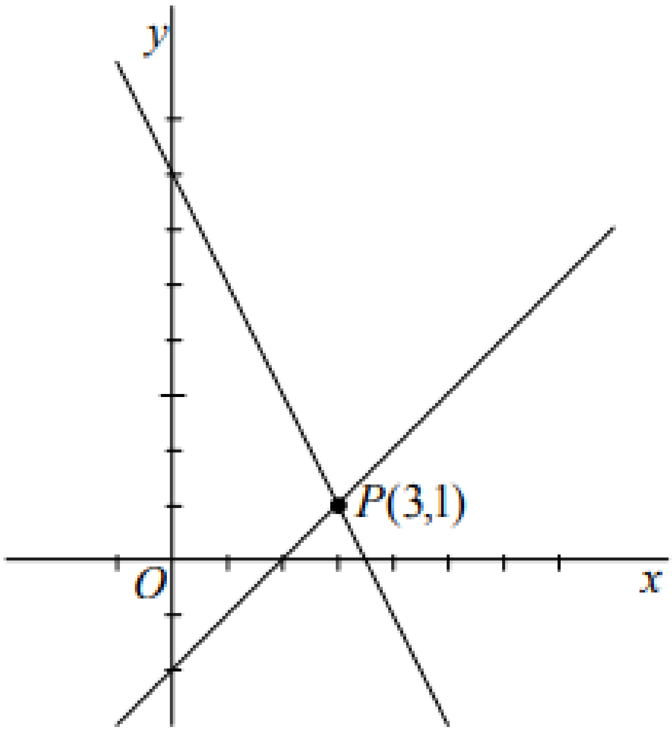
= + = 3 1 2 2 3 1 7

Ahora se puede afirmar que el conjunto solución es S ={(3,1)}.

El sistema tiene sólo una solución. El conjunto solución tiene un único elemento, por lo tanto el cardinal de S es igual a 1: S =1 (ver Apéndice A – Conjuntos).

Gráficamente:
y = 2x +7 es la ecuación de la recta 1 r y = x 2 es la ecuación de la recta 2r

Las dos rectas tienen en común el punto P(3,1). Ese punto representa gráficamente la solución del sistema.



Son las ecuaciones de la forma

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Se resuelven haciendo el cambio de variable $y(x) = u(x)v(x)$.

Ejemplo *Resuelve la ecuación diferencial lineal* $y' + 2xy = x$.

SOLUCIÓN: Hacemos el cambio $y = uv$, con lo que $y' = u'v + uv'$. Resulta:

$$u'v + uv' + 2xuv = x.$$

Sacamos factor común u y queda

$$(*) \qquad u(v' + 2xv) + u'v - x = 0.$$

Ahora elegimos v de modo que anule el paréntesis, es decir,

$$v' + 2xv = 0.$$

Esta ecuación es de variables separables

$$dv = -2xv\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx,$$

Criterios de evaluación:

No	Concepto	Porcentaje
1	Trabajos Escritos	10%
2	Actividades web escolar	20%
3	Actividades Áulicas	20%
4	Examen	50%
Total de Criterios de evaluación		100%

Bibliografía básica y complementaria:

Marketing Centro de Diseño Industrial

Abramovich, S. y Leonov, G. (2008). Fibonacci numbers revisited: technology-motivated inquiry into a two-parametric difference equation. International journal of mathematical education in science and technology, 39(6), 746-766.

Juárez, M. A. (2010). Geometría analítica. En M. A. Juárez, Geometría analítica (págs. 47-56). México: Esfinge. linares, I. S. (2011). Geometría Analítica. En I. S.

Linares, Geometría Analítica (págs. 48-52). México: Book Mart.

Camas, I., Fernández, S. y Núñez, J. (2007). Nancy Kopell: una vida dedicada a la Biomatemática. Matematicalia: Revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española, 3(2).

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla recerca in Matematica Educativa: un programma emergente. La matemática e la sua didattica, 3, 258 – 270.