Geometría Analítica

NOMBRE DE LA MATERIA

Bachillerato

Nombre de la Licenciatura

Tercer semestre /cuatrimestre

Cuatrimestre

Mayo – Agosto

Periódo

Mtro. Juan José Ojeda Trujillo

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad

- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Matemáticas aplicadas

Objetivo de la materia:

Representación gráfica de fenómenos naturales y/o sociales de su entorno

Ubicación de objetos en sistemas coordenados, cálculo de superficies, distancias, pendientes y ángulos

UNIDAD 1

Introducción a la Geometría Analítica

1.1 Antecedentes Históricos
1.2 Sistema de coordenadas cartesianas
1.3 Localización de un punto en el plano
1.4 Distancia entre dos puntos
1.5 División de un segmento en una razón dada

UNIDAD 2

2.1 Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices

2.2 Grafica de una ecuación y lugares geométricos

2.3 Pendiente y ángulo de inclinación

2.4 Determinación de la ecuación de una recta

2.5 Ecuación de la recta en la forma normal

UNIDAD 3

3.1 Forma polar de la ecuación de la recta

3.2 Angulo de intersección entre dos rectas

3.3 Familia de rectas

3.4 Aplicación de la forma normal de la ecuación de la recta

3.5 Determinación de la ecuación de la circunferencia y su grafica

3.6 ¿Una ecuación de la forma x2 + y2 + Dx + Ey + F = 0 representa a una circunferencia?

UNIDAD 4

4.1 Determinación de la ecuación de la circunferencia a parir de tres coordenadas dadas

4.2 Determinación de los diferentes casos de relación entre la circunferencia y la recta

4.3 Posición relativa de dos circunferencias

4.4 Determinación de la ecuación de la parábola y su grafica

4.5 ¿Una ecuación de la forma x2 + y2 + Dx + Ey + F = 0 representa a una parabola?

Criterios de evaluación:

No	Concepto	Porcentaje
1	Trabajos Escritos	10%
2	Actividades web escolar	20%
3	Actividades Áulicas	20%
4	Examen	50%
Total de Criterios de evaluación		100%

INDICE

UNIDAD I

Introducción a la Geometría Analítica

1.1Antecedentes Históricos

La historia de las matemáticas considera a Rene Descartes el fundador del sistema matemático moderno y, por lo tanto, el padre de la geometría analítica.

Descartes provenía de una antigua y noble familia de Normandía. Su madre murió al nacer el, por lo que fue atendido en el colegio jesuita de La Fleche, donde recibió una formación cuidadosa y profunda en temas científicos fundamentada en los libros de Clavius, en los Elementos de Euclides y en temas de geometría practica y algebra.

Como voluntario del ejercito protestante, conoce en Ulm al maestro Faulhaber, quien le ayuda a plantear su filosofiaen un campamento invernal deNeuburgo en el Danubio; por aquel tiempo hace su primer descubrimiento matemático sobre Euler, que trata de los poliedros.

Después de abandonar el servicio militar, y con la influencia de Ramee y Montaigne, Rene Descartes deja de lado la filosofía natural tradicional por ser infructuosa, con clasificaciones sin contenido e interpretación que conduce, mediante conclusiones propias, de lo complejo a lo sencillo, de la hipótesis a la evidencia; lo que se propone es hacer una matemática sistematizada y severa, y parte únicamente de bases y conceptos estrictos, con lenguaje sencillo, claro y preciso para que pueda grabarse fácilmente en la memoria.

Su principal obj0etivo es unir la geometría con el algebra, actividad iniciada por Viete; Descartes sustituye las palabras enteras, abreviaturas y notaciones por un simbolismo puro, cuidadosamente ideados, que se ha podido conservar casi integro hasta nuestros días.

Descartes en su geometría analítica de 1637, considera el segmento como una unidad o como un numero y transforma así la geometría en aritmética; como la suma, la resta, la multiplicación y la división de segmentos da lugar a otro segmento, Descartes relaciona los números con las mismas operaciones, y enfrenta problemas puramente algebraicos, ya que sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático puede resolverse con reglas y compas, pues los considera problemas del plano. Descartes quiere resolver gráficamente ecuaciones de grado mayor por curvas algebraicas engendradas paso a paso por mecanismos lineales del movimiento, al usar elementos de referencia en posiciones especificas; resuelve el problema de las normales a las curvas algebraicas evitando operaciones infinitesimales; entre sus ejemplos aclaratorios figuran la concoide y el llamado ovalo de Descartes; habla de la tangente, creyendo haber resuelto todas las ecuaciones principales de la matemática y que sus métodos de tangentes y normales son los más sencillos.

Descartes y Fermat son los inventores de la geometría sobre ejes de coordenadas, donde el algebra y la geometría se reúnen en el trazo de graficas de ecuaciones y desigualdades.

El calculo y la geometría analítica marcan el comienzo de las matemáticas modernas en el siglo XVII.

Geometría Analítica

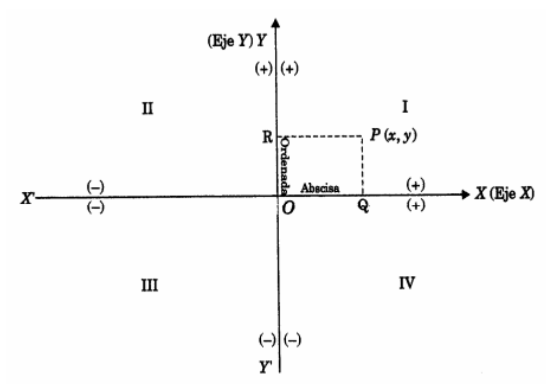
Estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y resuelve los problemas geométricos por métodos algebraicos; las coordenadas se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones.

1.2 Sistema de coordenadas cartesianas

Sistema de coordenadas rectangulares

Este sistema también se denomina Cartesiano en honor a Rene Descartes, por haber sido quien lo empleara en la unión del algebra y la geometría plana para dar lugar a la geometría analítica.

Este sistema de coordenadas rectangulares consta de dos rectas dirigidas XX^1 y YY^1 llamadas ejes de coordenadas y que son perpendiculares entre sí; la recta XX^1 se llama eje de las X, y la recta YY^1 se le llama eje de las Y; su punto de intersección 0 es el origen del sistema.



En general, un punto cualquiera por ejemplo el punto A, cuya abscisa es x y la ordenada y se designa mediante la notación A(x, y). Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes, llamada cada una cuadrante; los cuadrantes se numeran con números romanos I, II, III, IV como se indica en la figura anterior.

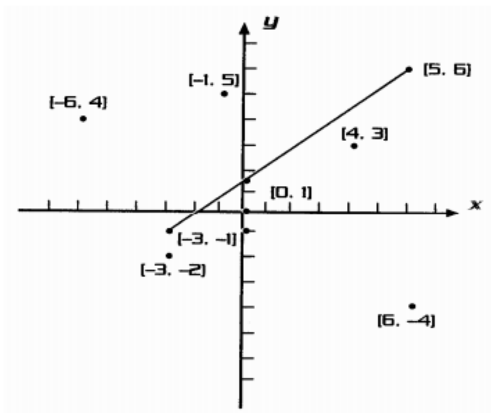
1.3 Localización de un punto en el plano

En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que a cada par de números reales (x, y) le corresponde un punto definido del plano, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x, y). En el proceso graficador hay que tomar en cuenta loa signos de las coordenadas del punto para ubicarlo en los cuadrantes; para ello se emplea el papel cuadriculado o de coordenadas rectangulares, ya que facilita la localización y el marcado de puntos en el plano.

Ejemplo:

Traza un sistema coordenado rectangular y señala los puntos siguientes:

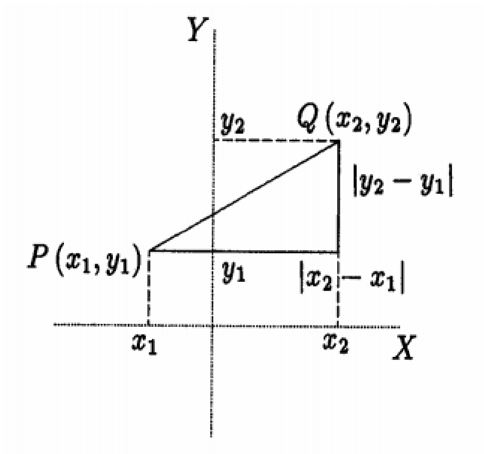
(4, 3), (-1, 5), (-3, -2), (0, 1), (6, -4), (-6, 4). Traza, además, el segmento de recta que une los puntos (-3, -1) con (5, 6).



1.4 Distancia entre dos puntos

Para encontrar la distancia entre dos puntos P(X1,Y1) y Q(X2, Y2) que no estén en la misma recta vertical u horizontal, construimos un triángulo rectángulo que tenga al segmento PQ por hipotenusa, como se muestra en la figura, las longitudes de los lados de los catetos son X2 - X1 y Y2 – Y1.

La distancia entre P y Q es la longitud de la hipotenusa del triángulo. Recordemos que el teorema de Pitágoras dice que "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"



Entonces:

$$d(P,Q)^2 = (x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2,$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}}$$

Observa que si los puntos están en la mismo vertical o en la mismo horizontal, uno de los dos sumandos de la formula vale cero, pero el resultado sigue siendo cierto.

La fórmula anterior, además de permitirnos obtener la distancia entre dos puntos, nos capacita para solucionar, entre otros, los siguientes problemas:

1. Determinar el perímetro de un triángulo o de algunas otras figuras geométricas.

2. Comprobar que un triángulo es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a las distancias obtenidas al verificar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

3. Comprobar que un triángulo es isósceles, si dos de las distancias obtenidas son iguales.

4. Comprobar que un triángulo es equilátero, si sus tres lados son iguales. Para resolver un problema y de ser posible, se recomienda en todas las casas graficar los datos disponibles antes de realizar cualquier operación.

Ejercicios:

1.- Encontrar la distancia entre P(3,5) y Q(-1,6).

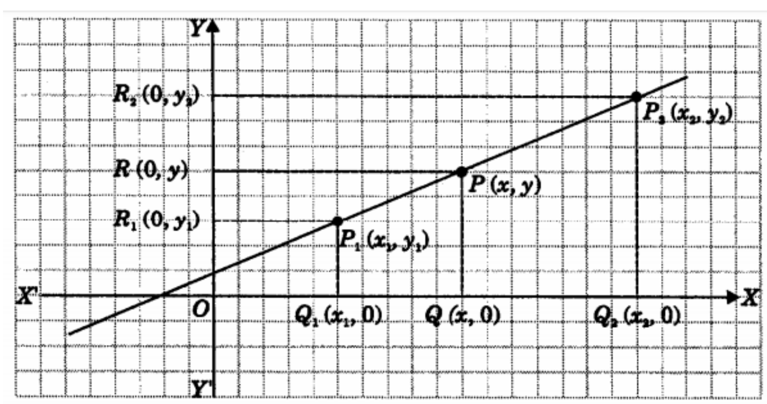
2.- Encontrar la distancia entre P(-3, -4) y Q(-3,2).

3. ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje X que equidista de A (0,6) y B (5,1)?

1.5 División de un segmento en una razón dada

Para determinar las coordenadas de un punta P que divide a un segmento cuyos extremos son: P1(X1,Y1 y P2(X2,Y2) en la razón r = P1P / PP2 , se aplica el siguiente procedimiento.

Por los puntos P1 P, y P2 se trazan perpendiculares a loa ejes coordenados; como las rectas paralelas P1Q1 , PQ y P2 Q2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P1 p2 y Q1 Q2 se establece que P1P / PP2 = Q1Q / QQ2 .



Las coordenadas de los puntos trazados sobre el eje x son: $Q_1(x_1,0)$, $Q(x,0)$ y $Q_2(x_2,0)$ y sobre el eje y son: $R_1(0,y_1)$, $R(0,y)$ y $R_2(0,y_2)$.

La distancia dirigida de cada segmento $Q_1Q = x - x_1$ y $QQ_2 = x_2 - x$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r.$$ Al despejar para x tenemos:

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1+r) = x_1 + rx_2$$

$$\therefore x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad \text{Es } r \neq -1$$

Las rectas paralelas P_1R_1, PR y P_2R_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y R_1R_2; por lo anterior $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2}$.

La distancia dirigida de cada segmento $R_1R = y - y_1$ y $RR_2 = y_2 - y$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r.$$

Al despejar para y, tenemos:

$$y - y_1 = r(y_2 - y)$$

$$y - y_1 = ry_2 - ry$$

$$y + ry = y_1 + ry_2$$

$$y(1+r) = y_1 + ry_2$$

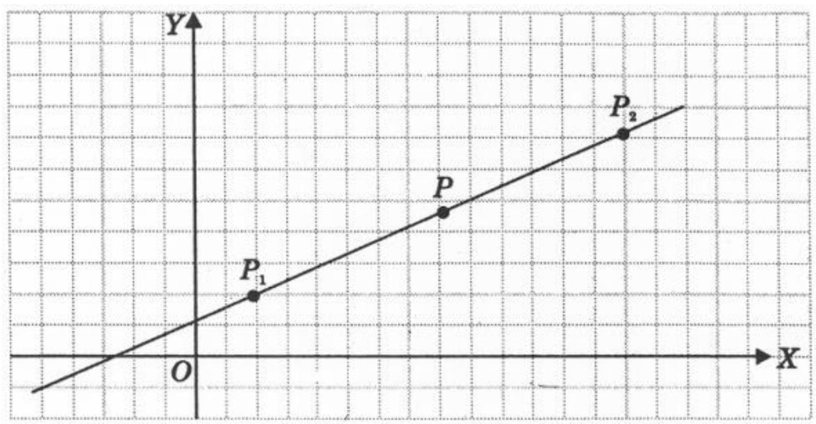
$$\therefore y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \quad \text{Es } r \neq -1$$

Teorema

Las coordenadas de un punto P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón dada $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \qquad \text{Siendo } r \neq -1.$$

Si P(X,Y) es el punto medio del segmento P1P2, la razon es igual a la unidad.



Si $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y como $P_1P = PP_2$, resulta: $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1P}{P_1P} = \frac{PP_2}{PP_2} = 1$

Al sustituir $r = 1$ en las siguientes ecuaciones, tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1+1} \qquad y = \frac{y_1 + (1)y_2}{1+1}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Corolario

Las coordenadas de un punto P que es el punto medio de un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejecicios.

1.- Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A(8,2) y B(-5,7) en la razón 3 / 4.

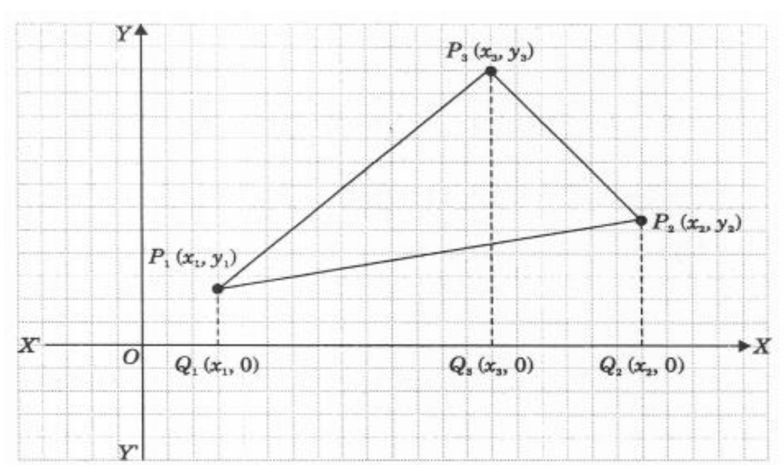
2.- El extremo del diámetro de una circunferencia de centro P1(7, 6) − es P2 (2,2); encontrar las coordenadas p(X,Y) del otro extremo. Gráficamente suponemos que: Como P1P y PP2 son de sentido opuesto la relación r debe ser negativa; r = - 1 / 2.

UNIDAD 2

2.1 Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices

Área de una región triangular

Sean P1(X1,Y1), P2(X2,Y2) y P3(X3,Y3) los vértices de un triángulo, su área se puede obtener sumando las áreas de los trapecios Q1Q3P3P1 y Q3Q2P2P3, y restando el área del trapecio Q1Q2P2P1. Dichos trapecios se forman trazando perpendiculares de los vértices del triángulo al eje x.



El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases (lados paralelos); por lo tanto, el área del triángulo P1P2P3 es:

A = área del trapecio $Q_1Q_3P_3P_1$ + área del trapecio $Q_3Q_2P_2P_3$ - área del trapecio $Q_1Q_2P_2P_1$.

$$A = (x_3 - x_1)\left(\frac{1}{2}\right)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)\left(\frac{1}{2}\right)(y_3 + y_2) - (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{2}\right)(y_1 + y_2)$$

$$A = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1)$$

El área resultante se expresa en una forma mas fácil por:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \\ X3 & Y3 \\ X1 & Y1 \end{vmatrix} \begin{matrix}(-)\\(-)\\(-)\\(+)\\(+)\\(+)\end{matrix} \qquad = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1)$$

Esta fórmula también se emplea para determinar el área de cualquier polígono. Se hace notar que el primer renglón se ha repetido al final con el fin de facilitar la operación.

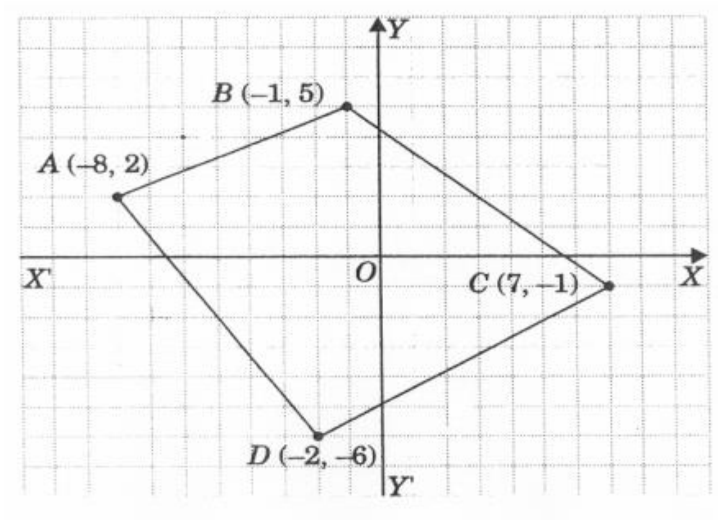
Si los vértices se ordenan en la fórmula en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el área resultante es de signo positivo; en caso contrario será negativa.

Ejercicios:

1.- Calcular el área del triángulo cuyos vértices son: D(3, 4) , E(2, -1) , F(-3, 5).

2.- Hallar el área del polígono si las coordenadas de sus vértices son:

A(-8,2) , B(-1,5) , C(7,-1) y D(-2,-6).



Con base en la gráfica, los vértices se ordenan en la fórmula en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, es decir:

2.2 Grafica de una ecuación y lugares geométricos

En el estudio de la geometría analítica se nos presentan dos problemas básicos que son inversos entre sí:

1. Dada una ecuación, determinar el lugar geométrico que representa, es decir, trazar la gráfica correspondiente.

2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

Un lugar geométrico es el punto o conjunto de puntos que satisfacen una o varias condiciones.

El conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación, se llama gráfica de la ecuación, o bien, su lugar geométrico.

Otra definición importante establece: si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, dicho punto pertenece a la gráfica de la ecuación; o si un punto esta sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Para trazar la gráfica de una ecuación dada, es necesario tener una idea de su forma y conocer alguna de sus propiedades características, como la intersección con los ejes coordenados; la simetría; el campo de variación de las variables o extensión de una curva; las asíntotas; el cálculo del dominio y rango de la función y el trazado de la curva.

En consecuencia, frecuentemente se define a una curva como el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve cumpliendo una determinada condición o condiciones que se expresan en forma narrativa o en forma de una ecuación.

Ejemplo:

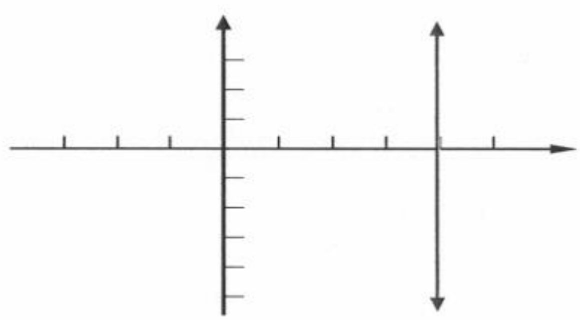
Una circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado centro.

Ejemplo:

La bisectriz de un ángulo se define como el lugar geométrico de los puntos de un ángulo que equidistan de sus lados.

Ejemplo:

Traza el lugar geométrico de los puntos de abscisa constante igual a 4.



Si los valores de una variable y dependen de los de otra variable x y realizadas las operaciones que se indiquen, si a cada valor asignado a x le corresponde uno o más a y, decimos que hay una relación entre x y y. Si a cada valor de x le corresponde solo uno a y, entonces decimos que y es una función de x.

A la variable x se le llama variable independiente, y a la variable y, se le llama variable dependiente o función.

Ejemplo:

Sea la ecuación $y = 3x + 6$;

expresándola como función queda como $y = f(x)$

$y = f(x) = 3x + 6$

El caso más general es similar al del ejemplo anterior, en que escogimos la letra x como variable independiente, pero nada impide escoger la letra y como variable independiente, a condición de que en el desarrollo de un problema continúe como tal hasta su solución.

En el ejemplo:

$y = 3x+6$

Entonces;

$x = (y - 6) / 3$

Expresándolo como función queda:

$X = f(x) = (y - 6) / 3$

También podemos escoger otras letras cualesquiera, como sucede frecuentemente en física y química. Una ecuación en que intervienen solo dos variables reales se puede representar gráficamente en el plano cartesiano; procederemos de la forma siguiente:

Ejemplo:

Expresa la gráfica de la ecuación $2\ y = x$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$

Resolución:

$y = x^2$

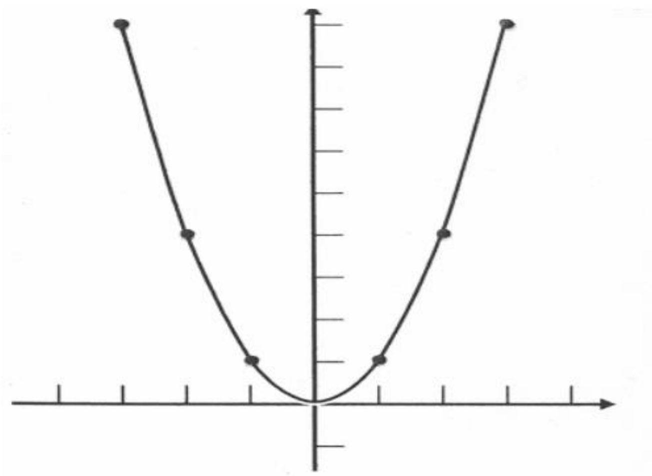
$f(x) = x^2$

Asignamos valores a la variable independiente x, realizamos las operaciones necesarias para obtener el valor de y; luego tabulamos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Los puntos cuyas coordenadas son las parejas ordenadas de la tabla anterior se localizan en el plano cartesiano, y a continuación se obtiene la gráfica de la ecuación uniendo esos puntos, mediante un trazo continuo. A la curva obtenida se le llama grafica o lugar geométrico de la ecuación, en este caso de $y = x^2$.

Observa que el intervalo de la variable independiente osciló entre -3 y 3, que consideramos suficiente para obtener la gráfica.



Ecuaciones en forma explícita y en forma implícita.

Si están indicadas las operaciones que hay que realizar con la variable independiente para obtener la función, se dice que está en forma explícita. En caso contrario, que es implícita.

Ejemplo:

La ecuación $y = 3x - 2$ está expresada en forma explícita. La misma ecuación expresada en forma implícita es $3x - y - 2 = 0$.

Ejemplo:

Expresa la gráfica de la ecuación $3x - y - 2 = 0$.

Resolución:

$3x - y - 2 = 0$

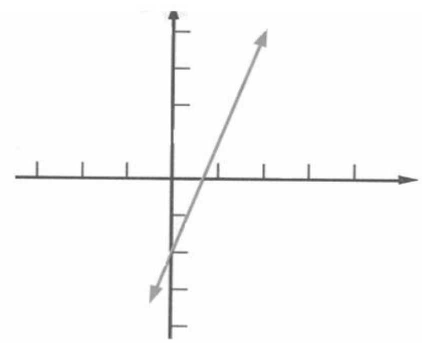
Ahora la expresamos en forma explícita:

$y = 3x - 2$

$f(x) = 3x - 2$

Como se trata de una recta, es suficiente tabular dos puntos, uno de ellos cuando $x = 0$; pero para comprobar, calculamos otro punto.

x	–1	0	1
y	–5	–2	1



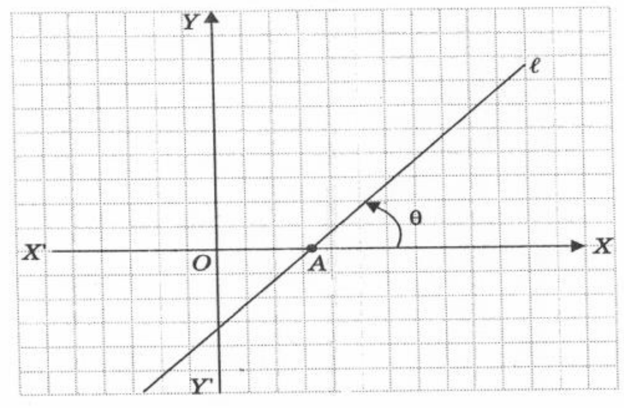
2.3 Pendiente y ángulo de inclinación

Todos tenemos la idea intuitiva de lo que es una recta. Las propiedades fundamentales de la recta, de acuerdo a los Axiomas de Euclides, son: Por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta. Dos rectas distintas se cortan en un sólo punto o son paralelas.

Ángulo de inclinación

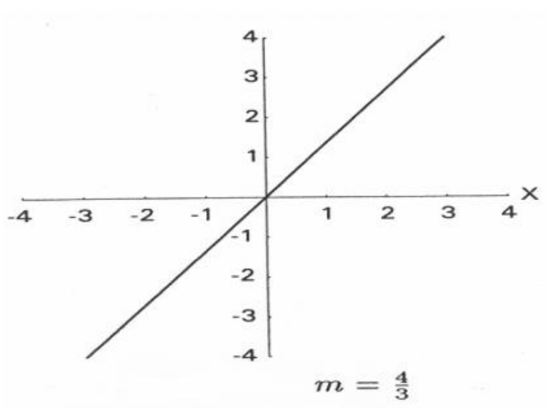
Sea l una recta no paralela al eje x y que lo intersecta en el punto A.

La dirección de la recta en relación con los ejes coordenados puede indicarse si se conoce el ángulo $\theta < 180°$ que se obtiene al girar la semirrecta AX en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta coincidir con la recta l. Por lo tanto, este ángulo (θ) se denomina inclinación de la recta l.



La pendiente de una recta.

La pendiente de una recta no vertical es un número que mide que tan inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada. La recta de la figura por cada 3 unidades que avanza hacia la derecha, sube 4 unidades

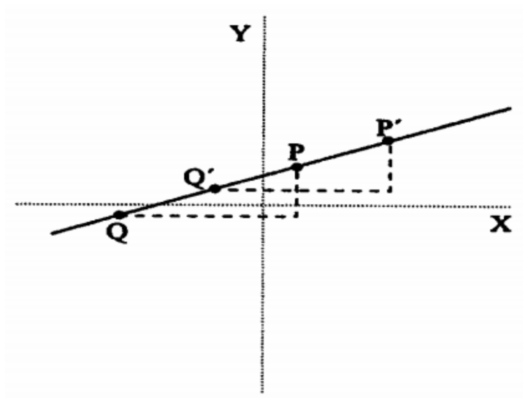


decimos que la pendiente de la recta es 4 / 3

Usualmente se denota con la letra m a la pendiente. Para encontrar la pendiente de una recta no vertical, tomamos dos puntos P(X1,Y1) y Q(X2,Y2) de la recta y calculamos el cociente:

$$m = (Y2 - Y1) / (X2 - X1)$$

Si tomamos otro par de puntos P' y Q' en la misma recta, como se muestra en la figura, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes, y por lo tanto, la razón de sus catetos es la misma. Es decir, la pendiente de una recta puede determinarse usando dos puntos cualesquiera.



Si la recta es vertical, todos los puntos de la recta tienen la misma primera coordenada, entonces el denominador de la expresión anterior vale cero y por lo tanto, no puede evaluarse m, así que las rectas verticales no tienen pendiente.

0bservaciones:

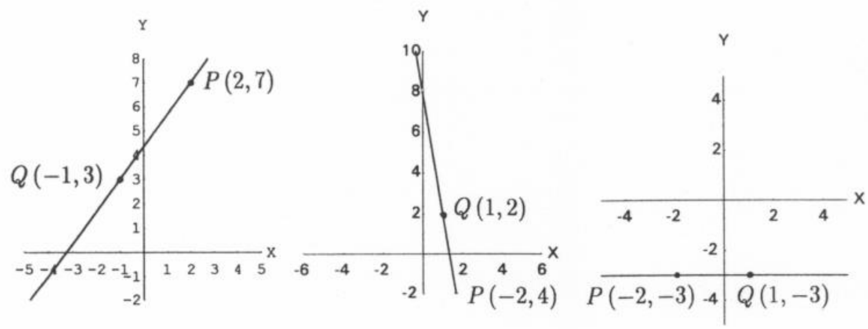
o La pendiente es positiva cuando la recta esta inclinada hacia la derecha.

o La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.

o La pendiente es negativa cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.

o Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada.

o Una recta vertical no tiene pendiente.



$$m = \frac{7-3}{2-(-1)} = \frac{4}{3} \quad m = \frac{-4-2}{2-1} = -6 \quad m = \frac{-3-(-3)}{-2-1} = 0$$

Ejemplos de pendientes de rectas

2.4 Determinación de la ecuación de una recta

Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto de ella. Como ya hemos visto antes las ecuaciones en dos variables representan lugares geométricos en el plano. Empezaremos nuestro estudio de lugares geométricos con las rectas, que son los más sencillos.

Consideremos el problema de encontrar la ecuación de la recta no vertical que pasa por un punto P(x,y) y tiene pendiente m.

Si Q(x, y) es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer

$$\mathbf{m = (Y2 - Y1) / (X2 - X1)}$$

puesto que Q ≠ P y la recta no es vertical, 1 x ≠ x , multiplicando por 1 x – x1 , obtenemos:

ecuación **1** **Y – Y1 = m (X – X1)**

Esta forma de la ecuación de la recta se llama ecuación punto-pendiente de la recta, ya que la obtuvimos conociendo la pendiente y un punto de ella, y recíprocamente si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber por qué punto pasa la recta y que pendiente tiene.

Ejemplos 1.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (4, -1) y tiene pendiente -2.

Solución:

m = -2 y (X,Y) = (4,-1).

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

Y – (-1) = -2 (X – 4)

Y +1 = -2 (X – 4)

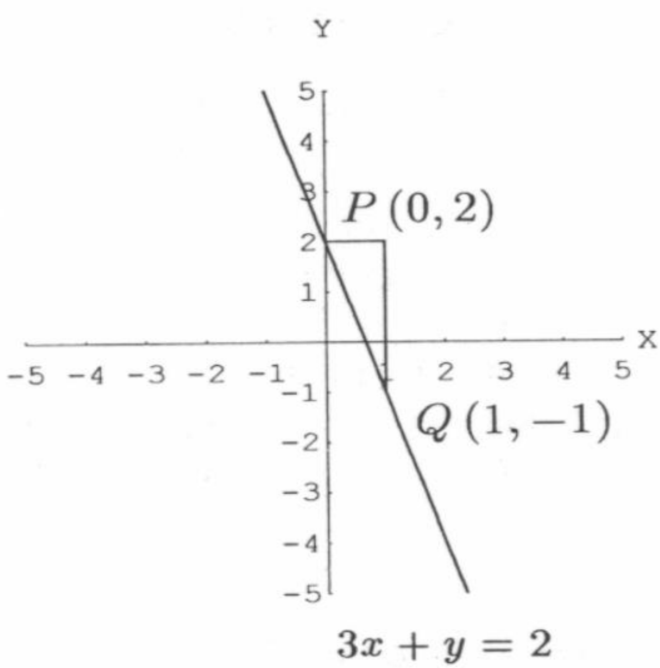
Ejemplo 2.

Dibujar la recta cuya ecuación es 3x + y = 2. Escribimos la ecuación en la forma (1):

$$3x + y = 2$$

$$y - 2 = -3x$$

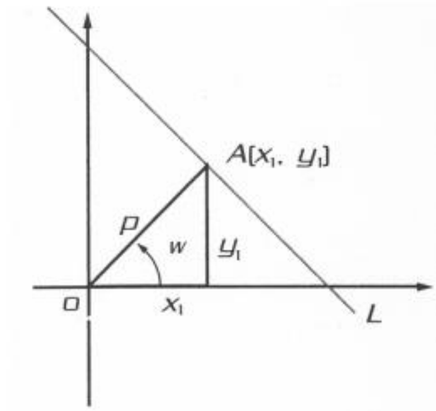
$$y - 2 = -3(x - 0).$$



2.5 Ecuación de la recta en la forma normal

La recta L queda determinada por la longitud de su perpendicular trazada desde el origen y el ángulo positivo W que la perpendicular forma con el eje de las x. La perpendicular OA a la recta L, representada por P, se considera siempre positiva por ser una distancia. El ángulo W engendrado por OA varia de 0°≤ W < 360°.

Si damos valores a p y W, la recta L trazada por A(x1 , y,) queda determinada por la ecuación de la recta en su forma normal que se obtiene en la forma siguiente:



Observando la figura anterior, tenemos:

$$\cos w = \frac{x_1}{p} \qquad \operatorname{sen} w = \frac{y_1}{p}$$

Despejamos: $x_1 = p \cos w$

Despejamos: $y_1 = p \operatorname{sen} w$

Sustituimos los dos valores anteriores en A = (x1 , y1), con lo cual obtenemos las coordenadas del punto A, que son:

A = (p cos W, p sen w)

Par su parte, la pendiente m de OA es:

m =tan w

Como la recta L es perpendicular a la recta GA, sus pendientes están relacionadas con;

m1 = - 1 / m2

es decir, la recíproca con signo cambiado. Como ya sabemos que la pendiente de OA es tan w, la inversa de esta función con signo cambiado de la recta L perpendicular a GA es:

-cot w

de donde,

m = - cot w = cos w / sen w

Sustituyendo en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente los valores de x1 , y1 y de m, queda:

y – y1 = m (x – x1)

$$y - p \sin w = -\frac{\cos w}{\sin w}(x - p\cos w)$$

Quitamos el denominador sen w y desarrollamos:

$$y \text{ sen w} - p \text{ sen}^2 \text{ w} = -\cos \text{w}(x - p \cos \text{w}\}$$
$$= -x \cos \text{w} + p \cos^2 \text{w}$$

Agrupando:

$x \cos \text{w} + \text{y sen w} = p \text{ sen}^2 \text{ w} + p \cos^2 \text{w}$

Factorizamos el segundo miembro:

$x \cos \text{w} + \text{y sen w} = p\ (\text{sen2 w} + \cos 2 \text{ w})$

Aplicamos la identidad pitagórica:

$\text{sen}^2 \text{ w} + \cos^2 \text{w} = 1$

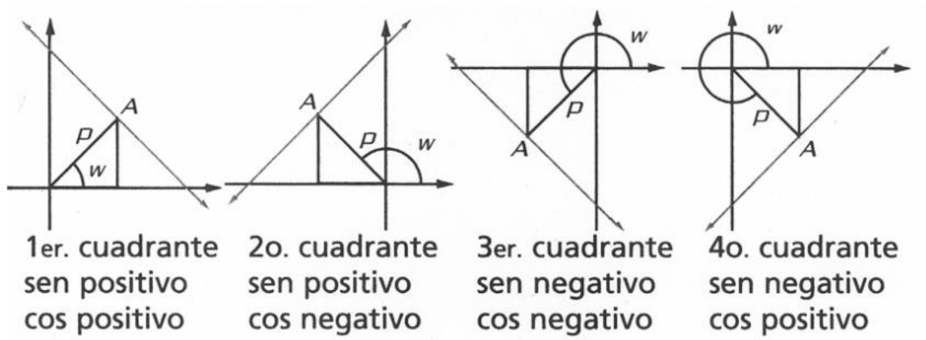
sustituimos:

$x \cos \text{w} + \text{y sen w} = p$

De donde

$\boxed{\text{x} \cos \text{w} + \text{y sen } w - p = 0}$ *Forma normal de la ecuación de la recta.*

Relación en la que w y p son las constantes arbitrarias o parámetros, y el valor de sen w y cos w puede ser positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante en que este el lado terminal del ángulo w. Recordando el círculo geométrico, tenemos:



Ejemplo:

1. Determina la ecuación de la recta en su forma normal, con w = 60° y p = 3 y grafica.

Solución:

Sustituimos en:

X cos w + y sen w – p = 0

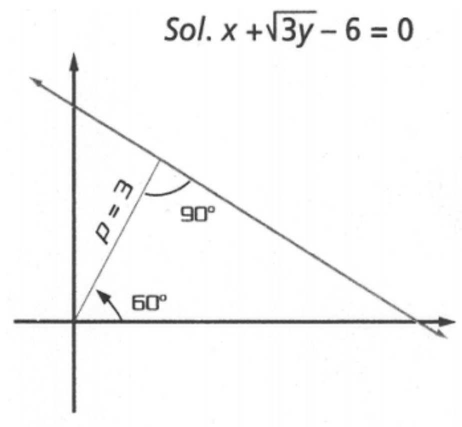
X cos 60° + y sen 60° - 3 = 0

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\text{Sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3=0$

$x+\sqrt{3}y-6=0$



UNIDAD 3

3.1 Forma polar de la ecuación de la recta

El sistema de coordenadas polares se construye dibujando una serie de circunferencias concéntricas de radio conocido, a intervalos regulares, así como rayos, también a intervalos regulares, tal como se muestra abajo en la Figura 1.

Este proceso es similar al que se sigue en un sistema de coordenadas rectangulares, donde se dibujan rectas verticales y horizontales a intervalos regulares en cada caso.

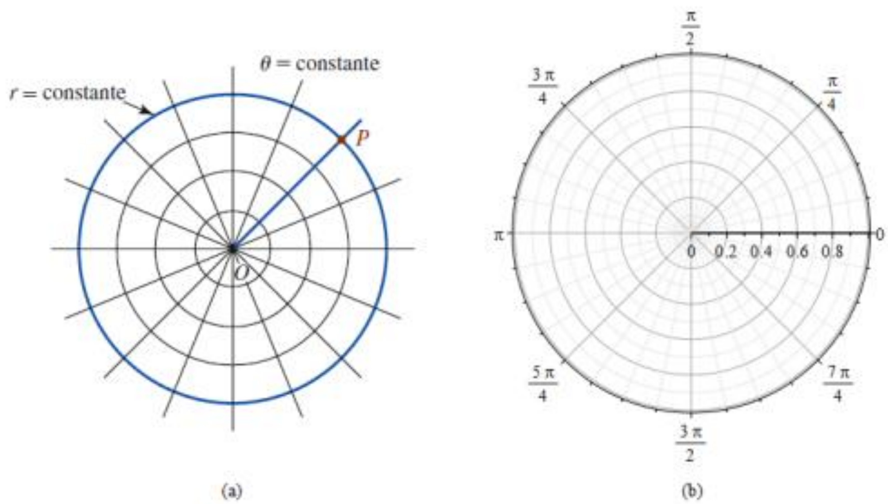


Figura 1.

En (a) se muestra el sistema de coordenadas polares, formado por una serie de circunferencias de radio uniformemente separadas, así como una serie de rayos Ø distribuidas también en forma uniforme.

En (b) se muestran valores asignados a las distintas circunferencias y rayos para un sistema de coordenadas polares arbitrario.

Convenio para la localización de puntos en coordenadas polares

El eje a partir del cual se mide los ángulos se denomina eje polar. Como se muestra en la Figura 2, un punto P en coordenada polares se representa como un par de la forma (r, Ø), donde Ø › 0 si se mide en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, y Ø ‹ 0 en caso contrario.

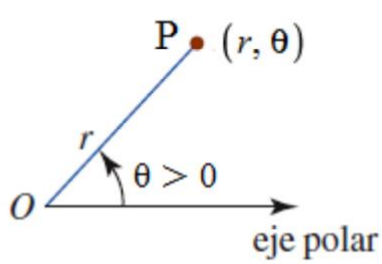
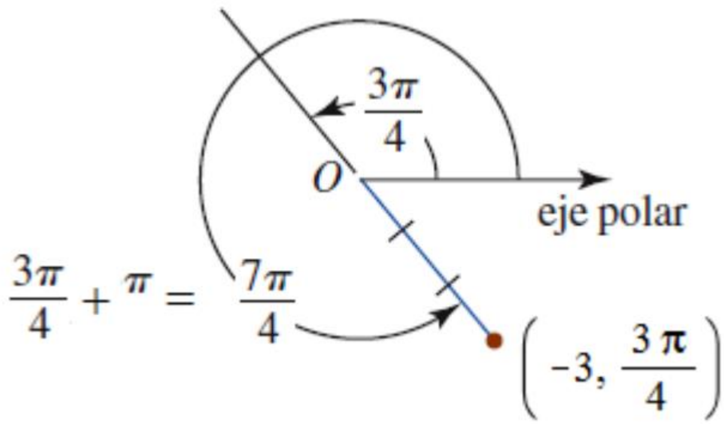


Figura 2. Localización de un punto P con coordenadas polares (r, θ).

Es posible considerar puntos en coordenadas polares de la forma $(-r, \theta)$, $-r < 0$, midiendo $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$. Esto es muy importante tomar en cuenta al momento de construir los gráficos de ecuaciones en coordenadas polares.

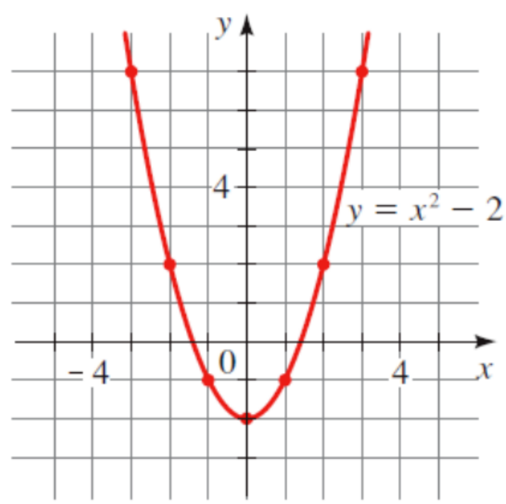
Así, por ejemplo, el punto $\left(-3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ se dibuja como un punto que está a 3 unidades sobre un rayo que se encuentra a un ángulo $\dfrac{3\pi}{4} + \pi = \dfrac{7\pi}{4}$, tal como se ilustra en la siguiente figura:



Construcción de graficas en coordenadas polares.

En su curso de Precálculo usted aprendió que un posible procedimiento para construir la gráfica de una función $y = f(x)$ es utilizar una tabla, como se ilustra abajo en la Figura 4, para el caso de $f(x) = x^2 - 2$.

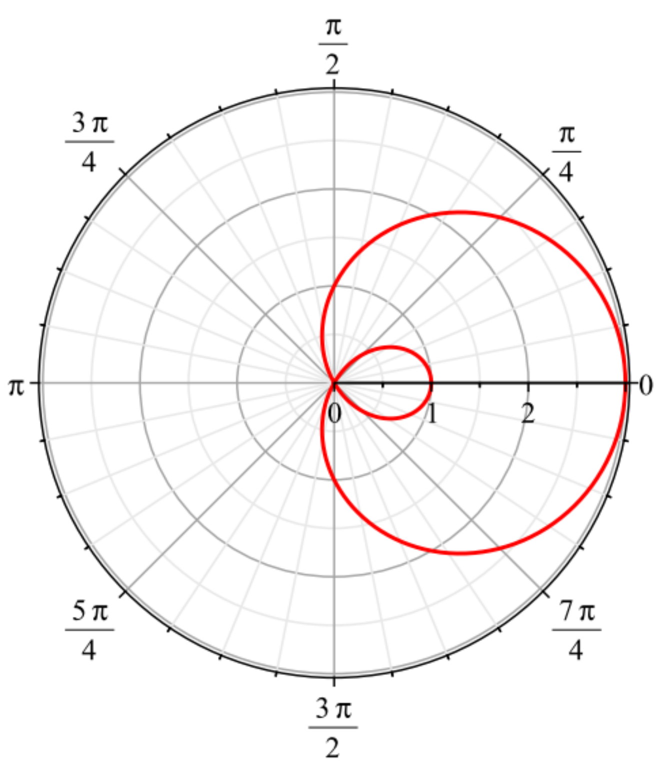
x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$



Por lo general, se acostumbran utilizar valores "fáciles" de x para valuar en $f(x)$, tales como los valores enteros mostrados en la Figura 2.

En el caso de coordenadas polares, la construcción de la gráfica de $r=f(\theta)$ auxiliándose de una tabla, como en el caso de coordenadas cartesianas, no es el más adecuado ya que al aplicar la misma idea de utilizar valores "fáciles" de θ puede dar lugar a que se pierdan detalles de la gráfica de $r=f(\theta)$.
Por ejemplo, construya una tabla similar a la tabla mostrada en la Figura 4, con valores que usted considere adecuados, y construya en un sistema de coordenadas polares la gráfica de $r=1+2\,cos\theta$. Compare luego su gráfica con la solución que se indica a continuación:

Grafica de r = 1 + 2cos Ø.

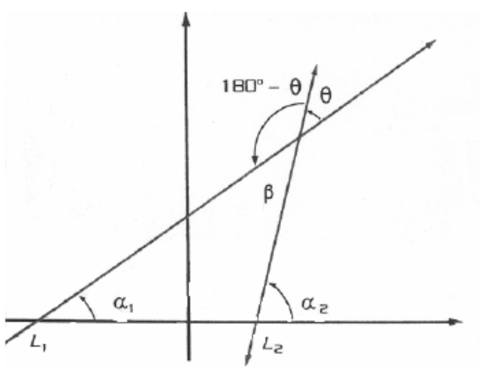


3.2 Angulo de intersección entre dos rectas

Si la recta *L1,* con ecuación y = m1x + *b1,* se interseca con la recta *L2,* con ecuación y = m2x + *b2,* se forman dos ángulos, el ángulo θ y su suplementario 180°- θ.

Para obtener el valor del ángulo θ procedemos en la forma siguiente:

Como "en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a el":



$\alpha_1 + \beta = \alpha_2$

Despejando:

$\beta = \alpha_2 - \alpha_1$

Como $\beta = \theta$ par ser opuestas por el vértice queda,

$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

el problema lo resolveremos usando la función tangente; en consecuencia, podemos indicar que;

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)\ .$$

En trigonometría se demostró que la tangente de la diferencia de dos ángulos es;

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + (\tan\alpha_1)(\tan\alpha_2)}\ .$$

como $\tan\alpha_2 = m_2$,

$\tan\alpha_1 = m_1$

Sustituyendo queda:

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}}$$

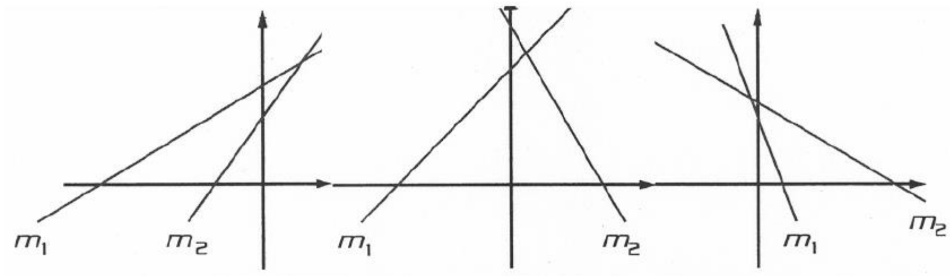
Fórmula para obtener el valor del ángulo θ.

Para aplicar esta relación se debe tener sumo cuidado al determinar cuál es la pendiente *m*1 y cual *m*2. Para ello se deben seguir las indicaciones siguientes:

A. Si las dos pendientes son *positivas,* $m2$ es la mayor y $m1$ la menor.

B. Cuando una pendiente es *positiva* y la otra *negativa,* $m2$ es la pendiente negativa y $m1$ la positiva.

C. Cuando las dos pendientes *son negativas,* $m2$ tiene mayor valor absoluto.



Observa: $m2$ es la pendiente de la recta que forma el ángulo mayor con el sentido positivo del eje de las x.

CONCLUSION:

1. Expresamos las ecuaciones de las rectas en su *forma común.*
2. Trazamos las gráficas.
3. Determinamos cual es $m1$ y cual $m2$. Sustituimos en la fórmula.
4. Obtenemos el valor del ángulo de la función tangente en las tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas.

Ejemplo:

Determina el valor del ángulo que forman las rectas 3x + y -6 = 0 con 2x -3y -4 = 0 (ángulo menor).

Solución:

Pendiente m de la recta $3x + y - 6 = 0$:

$y = -3x + 6$

de donde $m = -3$

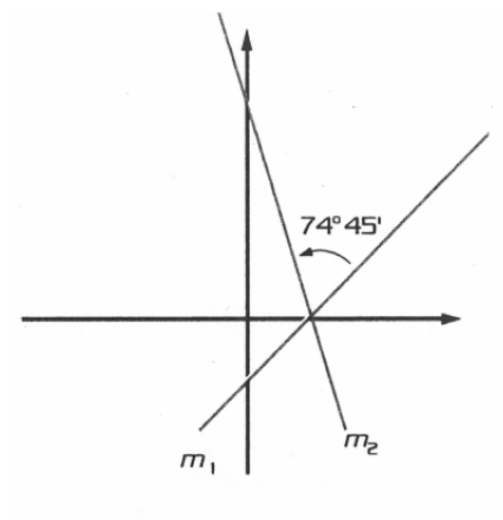
Pendiente m de la recta $2x - 3y - 4 = 0$:

$-3y = -2x + 4$

$$-y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

de donde $m = \dfrac{2}{3}$



Determinamos cual es m_1 y cual m_2.

Como una es positiva y la otra negativa,

m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva; en consecuencia:

$m_2 = -3$ y $m_1 = \frac{2}{3}$.

Sustituimos en la fórmula:

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{-3-\left(\frac{2}{3}\right)}{1+\left(\frac{2}{3}\right)(-3)} = \frac{-3-\frac{2}{3}}{1+(-2)} = \frac{\frac{-9-2}{3}}{-1} = \frac{\frac{-11}{3}}{-1} = \frac{-11}{-3} = 3.666$$

$\theta = 74°45'$

Ejemplo:

Si A(1, 6), C(4, -2), B(7,4), calcula el valor del ángulo C. Recordamos que en geometría, para designar un ángulo, entre otros procedimientos, la letra que esta al centro de las otras dos, en este caso la C, es la correspondiente al vértice.

Solución:

Pendiente de la recta (1 , 6), (4 , -2):

$$m = \frac{6-(-2)}{1-4} = \frac{6+2}{-3} = -\frac{8}{3}$$

Pendiente de la recta (4 , -2), (7 , 4):

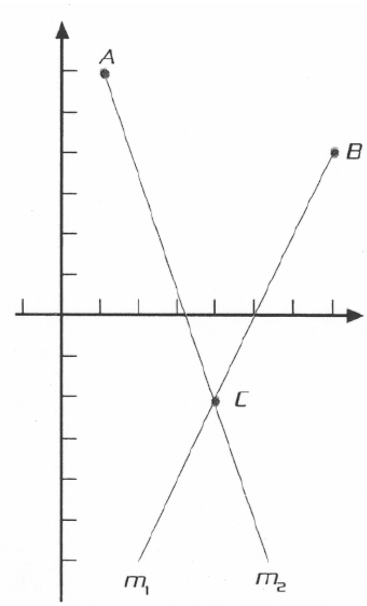
$$m = \frac{-2-(4)}{4-(7)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

de donde

$m_2 = -\frac{8}{3}$ y $m_1=2$.

Sustituyendo en la formula:

$$\tan C = \frac{-\frac{8}{3}-2}{1+2\left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{\frac{-8-6}{3}}{1-\frac{16}{3}} = \frac{\frac{-14}{3}}{-\frac{13}{3}} = \frac{\cancel{3}(-14)}{\cancel{3}(-13)} = 1.07$$



$C = 47°$

3.3 Familia de rectas

La ecuación de una recta, como ya lo estudiamos, queda determinada por dos condiciones independientes: dos puntos, la pendiente y un punto, la pendiente y su intersección con el eje, y la intersección de la recta con los dos ejes coordenados. En consecuencia, aceptamos que una recta que satisface una sola condición, *no es una recta única,* ya que hay infinidad de rectas que cumplen la misma condición.

Todas las rectas que satisfacen una condición geométrica previamente establecida forman una familia o haz de rectas.

En la ecuación de la recta $y = mx + b$, las constantes m y b son los parámetros. Si asignamos un valor particular a uno de los parámetros, se obtiene la ecuación de una familia de rectas del otro parámetro que identificaremos como K (K debe ser un número real).

Ejemplo:

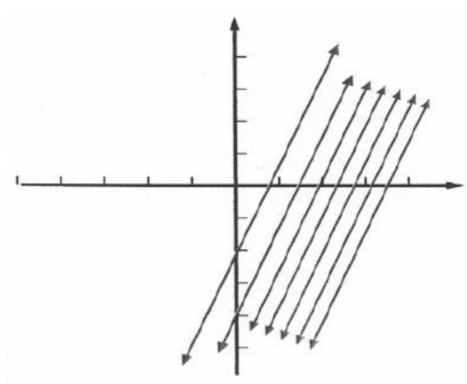
Si $m = 3$, resulta $y = 3x + K$, que es la familia de todas las rectas paralelas cuya pendiente m es igual a 3.

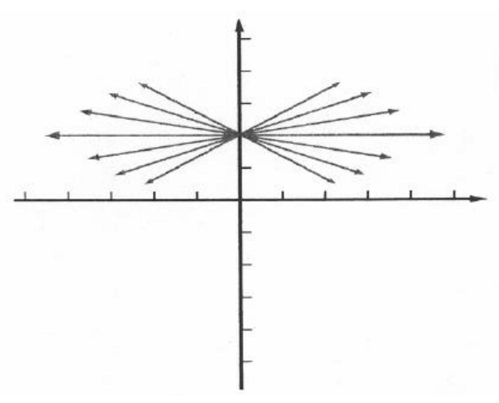
En forma semejante, si en la ecuación $y = mx + b$ ponemos $b = 2$, resulta $y = Kx + 2$, que es la ecuación de la familia o haz de rectas cuya intersección con el eje y es la misma, en este ejemplo.

Observa que hay una recta $x = 0$ (el eje y) que no está incluida en $y = Kx + 2$, puesto que se necesitaría que $K = \infty$, lo cual no está permitido puesto que indicamos que K debe ser un número real.

Sol. $y = Kx + 2$, con la recta $x = 2$, que también forma parte de la familia.

A veces, una familia de rectas tiene excepciones, que deben indicarse para hacer las notar en la solución, como en el ejemplo que se acaba de analizar.





Ejemplo:

Determina la ecuación de la familia de rectas que pasan a través de (1 , 2). Bosqueja la gráfica.

Solución: ***Sol.*** **$y - 2 = K(x - 1)$, con la recta $x = 1$.**

Utilizamos la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada:

$y - y1 = m(x - x1)$

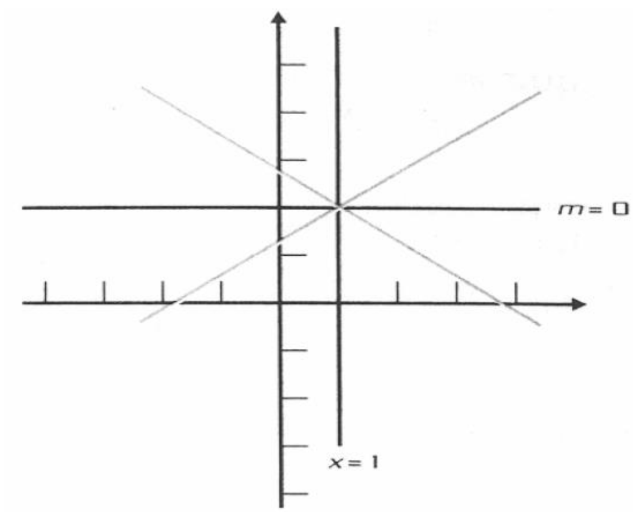
Esta familia se representa analíticamente con la ecuación:

$y - 2 = m(x - 1)$

Como a m se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$y - 2 = K(x - 1)$

m no está definida para una recta paralela al eje y; por ello, la ecuación anterior no incluye a la recta x = 1, que también pasa por el punto (1, 2) y, por consiguiente, pertenece a la familia.



Ejemplo:

Determina la ecuación de la familia de las rectas que son paralelas a $3x + 4y + 2 = 0$. Haz la gráfica.

Solución: *Sol.* $3 / 4\ y = - x - K$

Utilizamos la ecuación de la recta pendiente-intersección

$y = mx + b$

Quitamos el denominador 4 y queda:

$3x + 4y + K = 0$

Como a b se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$y = mx + K$

$3x + 4y + 2 = 0$

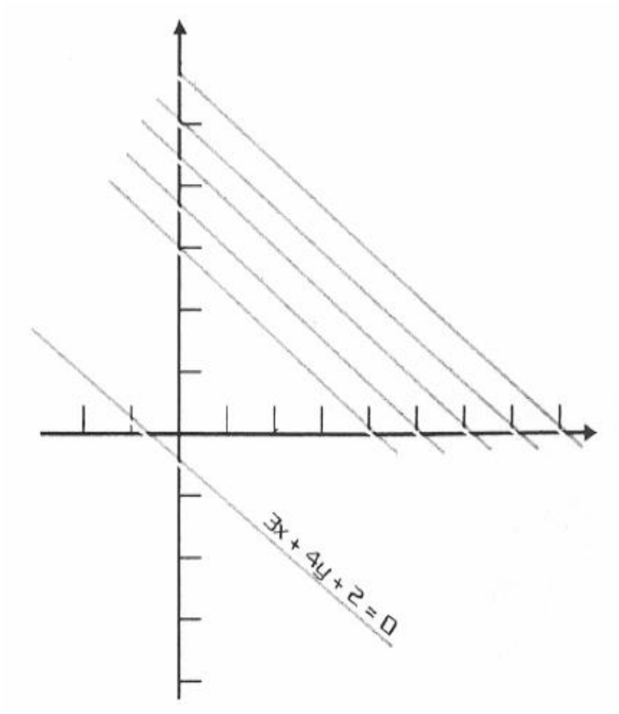
$4y = -3x - 2$

$Y = - \frac{3}{4} x - 2/4$

$Y = - \frac{3}{4} x - \frac{1}{2}$

de donde la pendiente de cada miembro de la familia debe ser: 3 / 4 y el valor de *K* arbitrario. De esta forma la familia se representa con:

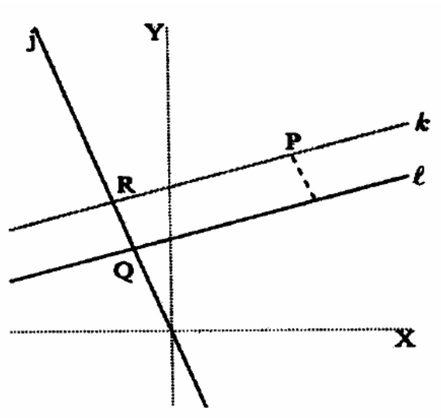
y = 3 / 4 x − *K* o en la forma general *3x* + 4y + *K* = O.



3.4 Aplicación de la forma normal de la ecuación de la recta.

Distancia de un punto a una recta.

Consideremos una recta *l* cualquiera y un punto P(Xl, Yl) que no este en la recta. La distancia de la recta *l* a *P* se define como la *distancia* de *P* al punto de *l* que esté más cercano a él. Construyamos una recta *k,* paralela a *l* que pase por *P y* la recta *j*, perpendicular a *l* que pasa por el origen.



La recta *j* corta a *l* y a *k* en *Q* y *R* respectivamente. Observa en la figura que la distancia de *P* a *l* es la misma que la distancia de *Q* a *R.* Para encontrar esta distancia debemos encontrar las coordenadas de *Q* y de *R* y aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Para encontrar las coordenadas de *Q* y *R,* escribimos las ecuaciones de *l, k* y j:

$$l : Ax + By + C = 0$$

$$k : Ax + By + C' = 0$$

$$j : Bx - Ay = 0$$

En la ecuación de *k* aparece una constante *C'* que determinaremos posteriormente. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *l* y j, obtenemos las coordenadas de *Q:*

$$Q\left(\frac{-AC}{A^2+B^2}, \frac{-BC}{A^2+B^2}\right)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *k* y j, obtenemos las coordenadas de *R:*

$$R\left(\frac{-AC'}{A^2+B^2}, \frac{-BC'}{A^2+B^2}\right)$$

Calculamos ahora el cuadrado de la distancia de *R* a *Q:*

$$d^2 = \frac{\left(AC - AC'\right)^2}{\left(A^2+B^2\right)^2} + \frac{\left(BC - BC'\right)^2}{\left(A^2+B^2\right)^2},$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$d^2 = \frac{\left(C - C'\right)^2}{A^2+B^2},$$

extrayendo raíz cuadrada, encontramos:

$$d = \frac{(C - C')}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Para determinar C' , usamos el hecho de que I I $P(x , y)$ pertenece a K, así que I I (x , y) satisface la ecuación de k:

$Ax + By + C' = 0$

de donde,

$C' = -Ax - By$.

Sustituyendo el valor de C' en la fórmula de la distancia, obtenemos;

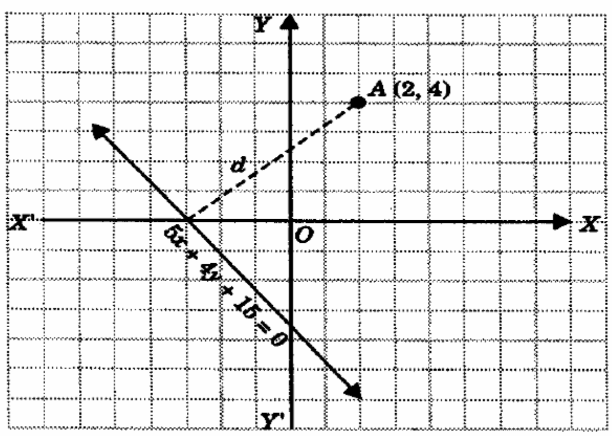
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Como la distancia debe ser un número no negativo, el signo de la raíz se escoge para que d sea positiva.

Ejemplo:

1. Determinar la distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto A (2, 4).

Al graficar los datos dados, tenemos:



La distancia pedida se considera absoluta, es decir, no dirigida. Al sustituir los datos en la ecuación para distancia absoluta, obtenemos:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$d = \frac{|5x + 4y + 15|}{\sqrt{(5)^2 + (4)^2}}.$$

La distancia de la recta 5*x* + 4*y* +15 = 0 al punto A (2, 4) es:

$$d = \frac{|5(2)+4(4)+15|}{\sqrt{25+16}}$$

$$d = \frac{|10+16+15|}{\sqrt{41}}$$

$$\therefore d = \frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

Y al sustituir las coordenadas del punto A(2, 4), tenemos:

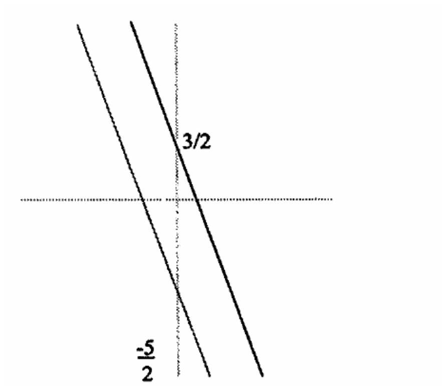
$$d = \frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

Distancia entre rectas paralelas

Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, tomamos un punto en una de ellas y encontramos la distancia de ahí a la otra recta.

Ejemplo:

Encontrar la distancia entre las rectas 6x + 2y - 3 = 0 y 6x + 2y + 5 = 0.



$$6x + 2y - 3 = 0 \text{ y } 6x + 2y + 5 = 0$$

Solución:

Las rectas son paralelas, pues mediante un cálculo directo se ve que la pendiente de ambas es *m* = -3. Elegimos un punto cualquiera en la primera recta. Para ello, tomamos cualquier valor de *x,* por ejemplo *x* = 1, lo sustituimos en la ecuación y encontramos el valor de *y* correspondiente:

6 (1) + 2y – 3 = 0

Y = - 3 / 2

Así que el punto (1, 3 / 2) pertenece a la primera recta. Calculamos ahora la distancia de *P* a la segunda recta:

$$d = \frac{6(1)+2\left(-\frac{3}{2}\right)+5}{\sqrt{6^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{40}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}},$$

así que la distancia entre las rectas es: $\frac{4}{\sqrt{10}}$.

3.5 Determinación de la ecuación de la circunferencia y su grafica

Aplicando el método de los lugares geométricos, tendremos:

1. Sea P (x, y) un punto cualquiera de la circunferencia.

2. La condición que establece que P es de la circunferencia es:

$$OP=r$$

3. Traduciendo analíticamente (formula de 1a distancia entre dos puntos):

$$x^2 + y^2 = r .$$

4. Transformando:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(A)}$$

Que es 1a ecuación cartesiana de 1a circunferencia de centro e1 origen y radio r.

Ejemplos.

1. La ecuación de 1a circunferencia de centro el origen y radio 4 es:

$$x^2 + y^2 = 16$$

2. La ecuación $x^2 + y^2 = 25$, representa una circunferencia de centro e1 origen y radio r = 25 = 5.

Ecuación cartesiana de una circunferencia de centro en uno de los ejes de coordenadas y radio r.

Primer caso.

El centro está en el eje de las x. Si llamamos h a la abscisa del centro, sus coordenadas serán (h , 0).

Si P (x, y) es un punto cualquiera de la circunferencia (fig.2), tendremos:

$$CP = r.$$

Traduciendo analíticamente:

$$\sqrt{}\ (x - h)^2 + y^2 = r \therefore (x - h)^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(B)}$$

Que es la ecuación de la circunferencia de centro en un punto del eje x y radio r.

Ejemplos.

1. La ecuación de la circunferencia de centro C(4,0) y radio 3 es:

$(x-4)^2 + y^2 == 9$.'. $x^2 + y^2 -8x + 7 = 0$

2. La ecuación $(x -3)^2 + y^2 = 16$ representa una circunferencia de centro C (3, 0) y radio 4.

3. La ecuación $(x + 5)^2 + y^2 = 2$, representa una circunferencia de centro C.{-5, 0) y radio 2 .

Segundo caso:

El centro está en el eje de las y. Si llamamos k a la ordenada del centro, sus coordenadas son de la forma C (0, k). Procediendo análogamente al caso anterior se obtiene la ecuación:

$$x^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \text{(C)}$$

Ejemplos. 1. La ecuación de la circunferencia de centro C (0, -4) y radio 5 es,

$$x^2 + (y+4)^2 = 25 \therefore x^2+ y^2+8y -9 = 0.$$

2. La ecuación x^2 + (y -1)2 = 7, representa una circunferencia de centro C (0,1) y radio 7.

Ecuación cartesiana de la circunferencia, cuando el centro es un punto cualquiera del plano. Forma orinaría de la ecuación de la circunferencia. Sea C (h , k) el centro, r el radio y P (x , y) un punto cualquiera de la circunferencia figura 3 por definición:

CP == r.

O sea, analíticamente:

$$\sqrt{\ } (x - h)^2 + (y - k)^2 = r \ (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \text{(D)}$$

que es la *ecuación cartesiana de una circunferencia de radio r y centro* un *punto cualquiera C (h, k) del plano.*

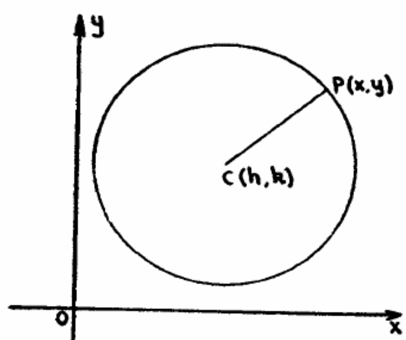


Fig. 3

La ecuación (D) que comprende como pasos particulares a las ecuaciones (A), (B), y (C) se conoce como *forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.*

Ejemplos. 1. La ecuación $(x -2)^2 + (y -3)^2 = 25$ representa una circunferencia de radio, $r = 5$ y centro C (2,3).

2. La ecuación de la circunferencia de centro C (-4, 2) y radio 4 es:

$$(x + 4)^2 + (y -2)^2 == 16.$$

3. Hallar 1a ecuación de la circunferencia que tiene como centro C (-2, -3) y pasa por e1 punto A (2,4.).

El radio será la distancia CA. = $\sqrt{(-2-2)^2+(-3-4)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

y aplicando la ecuación *(D):*

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 == 65.$$

Condiciones para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia. Forma general de la circunferencia. La ecuación general de segundo grado con dos variables es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + f = 0 \qquad (1)$$

y 1a ecuación de una circunferencia de centro (h , k) y radio r es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Y desarrollando:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0, \qquad (2)$$

Para que 1a ecuación (1) representa una circunferencia, sus coeficientes y los de 1a (2) de los términos del mismo grado deben ser proporcionales.

Como la (2) carece de término xy, resulta: $B = 0$. (3)

Además, tendremos:

$$\frac{A}{1} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2h} = \frac{E}{-2k} = \frac{F}{h^2 + k^2 - r^2} \qquad (4)$$

Luego:

$A = C \neq 0$ para que la ecuación sea de segundo grado (5)

De las igualdades (3) y (5) resulta que, para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia es necesario:

1. Que no tenga término en xy
2. Que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales y del mismo signo.

Si una circunferencia viene dada por una ecuación de 1a forma:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se dice que viene dada en su *forma general.*

Ejemplos. Las ecuaciones:

1. $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 4 = 0$;
2. $2x^2 + 2y^2 + x + 4x + 1 = 0$;
3. $3x^2 + 3y^2 - x + y + 10 = 0$;
4. $-4x^2 - 4y^2 + 5x + y - 3 = 0$,

representan circunferencias dadas en su forma general.

Dada la ecuación e una circunferencia en su forma general, hallar su centro y radio. El problema puede resolverse de dos maneras.

Primera manera: Convirtiendo la ecuación dada a la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

por el método de completar cuadrados. El centro es C (h, k) y el radio es r.

Segunda manera. A partir de la serie de razones iguales (4) del articulo anterior, tomando como incógnitas h, k y r.

Ejemplos: 1. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0.$$

Primer método. Completando cuadrados se tiene:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -9 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 - (y + 3)^2 = 4$$

$$\therefore\ h = -2,\quad k = -3, r = \sqrt{4} = 2.$$

$$\therefore C\ (-2, -3),\ r = 2\ .$$

Segundo método. En este caso:

$$A = C = 1, D = 4, E = 6,\ F = 9.$$

De (4) resulta:

$$1 = \frac{4}{-2h} = \frac{6}{-2k} = \frac{9}{h^2 + k^2 - r^2}$$

$$\therefore h = -2, k = -3, \frac{9}{4 + 9 - r^2} = 1, r = 2$$

El centro es C (- 2, -3) y el radio $r = 2$.

2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0.$$

Primer método. Completando cuadrados, resulta:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$C\ (2, 1),\ \ r = 3.$$

Segundo método. Se tiene:

$A = C == 1$, $D = -4$, $E = -2$, $F = -4$

De (4) resulta:

$$1 = \frac{-4}{-2h} = \frac{-2}{-2k} = \frac{-4}{h^2 + k^2 - r^2},$$

$$\therefore h = 2, k = 4, r = 3, \quad C(2\ ,\ 1)\ \ y\ r = 3.$$

Nota: Si el coeficiente de x^2 y y^2 no es la unidad, antes de completar cuadrados se divide toda la ecuación por dicho coeficiente.

Ejemplo. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$$

Primer método. Dividiendo toda la ecuación entre 4, queda:

$$x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$$

Completando cuadrados:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} + 4 = 9$$

$$\left[x - \frac{1}{2}\right]^2 + \left(y + 2\right)^2 = 9$$

$$\therefore C\left[\frac{1}{2}, -2\right], r = 3.$$

Segundo método. En este caso:

A = C = 4, D = - 4, E = 16, F = -19

De (4) resulta:

$$4 = \frac{-4}{-2h} = \frac{16}{-2k} = \frac{-19}{h^2 + k^2 - r^2}$$

$$\therefore h = \frac{1}{2}, k = -2, r = 3, \quad C(\frac{1}{2}\ , -2)\ \ y\ \ r = 3.$$

Nota. El procedimiento general para determinar el centro y el radio por el método de completar cuadrados es el siguiente:

La ecuación general de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(Si A = C $\neq$ 1, se divide toda la ecuación entre A).

Completando cuadrados, se tiene:

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

$$\left[x + \frac{D}{2}\right]^2 + \left[y + \frac{E}{2}\right]^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

$$\therefore h = -\frac{D}{2}, k = -\frac{E}{2}, r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

luego el centro es:

$$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right) \text{ y el radio } r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$

Para que exista circunferencia, el radio debe ser un número real positivo, luego:

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la circunferencia se reduce a un solo punto.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, el radio es imaginario y no existe circunferencia real.

Ejemplos:

1. La ecuación $x^2 + y^2 + 6x -2y + 6 = 0$ representa una circunferencia real.

En efecto: D = 6, E = -2, F = 6

D2 + E2- 4F = 36 + 4 – 24 = 16 > 0

Calculando sus elementos se encuentra: C (- 3, 1) r = 2.

2. La ecuación $x^2 + y^2 -4x + 2y + 5 = 0$ representa una circunferencia que se reduce a un solo punto.

En efecto: D = -4, E = 2, F = 5,

$D^2 + E^2 -4F == 16 + 4 -20 = 0$

Hallando sus elementos el punto es C (2, -1) y el radio cero.

68

3. La ecuación: $x^2 + y^2 - 6x -2y + 14 = 0$ representa una circunferencia de radio imaginario.

En efecto: D = -6, E = -2, F = 14.

$D^2 + E^2 - 4F = 36 + 4- 56 = -16 < 0$

Calculando sus elementos resulta C (3, 1) y r = $\sqrt{-4}$ (imaginario).

Ejercicios:

Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

1. Centro (0, 0) y radio 3.
2. Centro (2, -3) y radio 5.
3. Centro (3, -1/2) y radio 3.
4. Centro (- 1/2, 4) y radio 3/2.
5. Centro (-2/3, -1/2) y radio 2/3.
6. Centro (- 1/2, -1/3) y radio 3.
7. Centro (3, -1) y tangente al eje *Y*.

Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

8. *x*2 + *y*2 = 4.
9. *x*2 + *y*2 = 4/9.
10. (*x*-3)2+ (*y*-2)*2=4.*
11. (*x* +3)2 + (*y* + 2)2 = 4.

12. $(x + 3)2 + (y - 2)2 = 25/4$.

13. $x2 + (y - 1)2 = -2$.

14. $2x2 + 2y2 + 8x - 6y + 7 = 0$.

15. $9x2 + 9y2 - 36x - 54y + 113 = 0$.

16. $4x2 + 4y2 - 16x + 24y + 27 = 0$.

3.6 ¿Una ecuación de la forma x2 + y2 + Dx + Ey + F = 0 representa a una circunferencia?

Como 1a ecuación e una circunferencia, en su forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

o en la forma ordinaria,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

tiene tres parámetros (D, E, F) 0 (h, k, r) se necesitan tres condiciones para determinarlos.

Para hallar la ecuación de una circunferencia que cumple tres condiciones dadas (independientes) se expresaran estas analíticamente. Cada condición se traduce en una ecuación entre las coordenadas del centro, el radio y los datos, o bien, entre los coeficientes de la forma general y los datos. Se llega finalmente a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que permite calcular los parámetros.

En algunos problemas es conveniente encontrar gráficamente el centro y el radio y expresar analíticamente las construcciones utilizadas.

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2 , 0), (1 , -1), (-1 , 3).

Sea x2 + y2 + Dx + Ey + F = 0 la ecuación buscada.

Expresando que pasa por cada uno de los puntos, es decir, que las coordenadas de los puntos dados satisfacen la ecuación de la circunferencia se tiene:

1) Por pasar por el punto (2, 0),

$$4 + 2D + F = 0 \therefore 2D + F = -4$$

2) Por pasar por el punto (1, -1),

$$1 + 1 + D - E + F = 0 \therefore D - E + F == -2$$

3) Por pasar por el, punto (-1, 3),

$$1 + 9 - D + 3E + F = 0 \therefore -D + 3E + F = -10$$

4) Resolviendo e1 sistema de las tres ecuaciones, se obtiene:

$$D = 0, E = -2, F = -4.$$

5. Sustituyendo estos valores en la forma general se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes en los puntos (-4,0) y (0,4) fig. 4.

El centro es el punto (- 4, 4) y el radio es igual a 4. Luego, aplicando la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, resulta:

$$(x + 4)^2 + (y-4)^2 = 16.$$

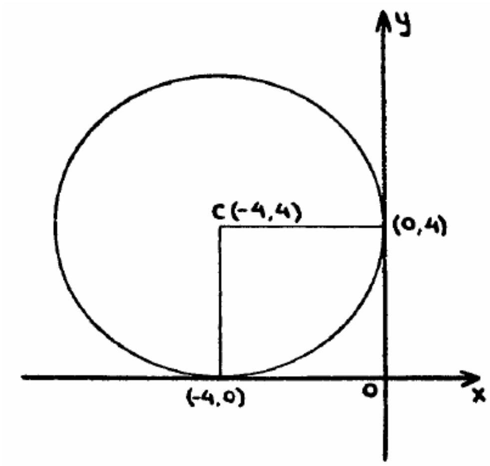


Fig. 4

UNIDAD 4

4.1 Determinación de la ecuación de la circunferencia a parir de tres condiciones dadas

Circunferencias que satisfacen tres condiciones

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ contiene tres constantes independientes h, k y r; de la misma manera, la ecuación en su forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, depende de tres constantes independientes D, E y F. Esto sugiere que la ecuación de la circunferencia en cualquiera de sus formas se obtiene a partir de tres condiciones independientes que relacionen las tres constantes involucradas en cada caso.

Puede demostrarse que tres condiciones gráficas independientes, relacionadas con el trazo de la circunferencia, son suficientes para que la circunferencia quede perfectamente determinada.

Las tres condiciones que podrían determinar la ecuación de una circunferencia son:

a) Tres puntos.

b) Dos puntos y una recta.

c) Un punto y dos rectas.

d) Tres rectas.

Dependiendo de las condiciones dadas, el aplicar una forma de las ecuaciones de la circunferencia puede ser más conveniente que la otra.

Determina la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(-2,2)$, $B(4,1)$ y $C(1,-6)$.

Solución

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde las constantes D, E y F deben ser determinadas.

Con base en lo anterior, se tienen las tres ecuaciones siguientes correspondientes a los puntos dados.

Al sustituir el punto $A(-2,2)$ en la ecuación general, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ (-2)^2 + (2)^2 + D(-2) + E(2) + F &= 0 \\ 4 + 4 - 2D + 2E + F &= 0 \\ -2D + 2E + F &= -8 \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Al sustituir el punto $B(4,1)$ en la ecuación general, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ (4)^2 + (1)^2 + D(4) + E(1) + F &= 0 \\ 16 + 1 + 4D + E + F &= 0 \\ 4D + E + F &= -17 \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Al sustituir el punto $C(1,-6)$ en la ecuación general, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ (1)^2 + (-6)^2 + D(1) + E(-6) + F &= 0 \\ 1 + 36 + D - 6E + F &= 0 \\ D - 6E + F &= -37 \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

Si la ecuación (**1**) se multiplica por 2, resulta:

$$-4D + 4E + 2F = -16$$

Al resolver simultáneamente con la ecuación (**2**), resulta:

$$\begin{aligned} \cancel{-4D} + 4E + 2F &= -16 \\ \cancel{4D} + E + F &= -17 \\ \hline 5E + 3F &= -33 \quad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

Si la ecuación (**3**) se multiplica por 2, resulta:

$$2D - 12E + 2F = -74$$

Al resolver simultáneamente con la ecuación (**1**), resulta:

$$\begin{aligned} \cancel{-2D} + 2E + F &= -8 \\ \cancel{2D} - 12E + 2F &= -74 \\ \hline -10E + 3F &= -82 \quad \textbf{(5)} \end{aligned}$$

Si la ecuación (**4**) se multiplica por -1, resulta:

$$-5E-3F=33$$

Al resolver simultáneamente con la ecuación (**5**), se tiene:

$$\begin{aligned}-5E-\cancel{3F}&=33\\ \underline{-10E+\cancel{3F}}&\underline{=-82}\\ -15E&=-49\\ E=\frac{-49}{-15}&=\frac{49}{15}\end{aligned}$$

Se sustituye el valor de E en (**4**) o (**5**), es decir:

$$5\left(\frac{49}{15}\right)+3F=-33$$

$$\frac{49}{3}+3F=-33$$

$$3F=-33-\frac{49}{3}=\frac{-99-49}{3}$$

$$3F=\frac{-148}{3}$$

$$F=\frac{-\frac{148}{3}}{3}=-\frac{148}{9}$$

Al sustituir los valores de E y F en cualquiera de las ecuaciones originales en este caso (**3**), resulta:

$$D-6\left(\frac{49}{15}\right)-\frac{148}{9}=-37$$

$$D-\frac{294}{15}-\frac{148}{9}=-37$$

$$D=-37+\frac{294}{15}+\frac{148}{9}$$

$$D=\frac{-4\ 995+2\ 646+2\ 220}{135}$$

$$D=\frac{-129}{135}=-\frac{43}{45}$$

Al sustituir los valores de las constantes D, E y F en la ecuación general de la circunferencia, resulta:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$x^2+y^2-\frac{43}{45}x+\frac{49}{15}y-\frac{148}{9}=0$$

$$\frac{45x^2+45y^2-43x+147y-740}{45}=0$$

$$45x^2+45y^2-43x+147y-740=0 \quad \Big\} \ \text{Ecuación general de la circunferencia.}$$

Transformando la ecuación general de la circunferencia a su forma ordinaria, y al dividir toda la ecuación entre 45, resulta:

$$\frac{45x^2+45y^2-43x+147y-740}{45}=0$$

$$x^2+y^2-\frac{43}{45}x+\frac{147}{45}y-\frac{740}{45}=0$$

$$\left(x^2-\frac{43}{45}x\right)+\left(y^2-\frac{147}{45}y\right)=\frac{740}{45}$$

Para completar los cuadrados, se suman el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros de la ecuación:

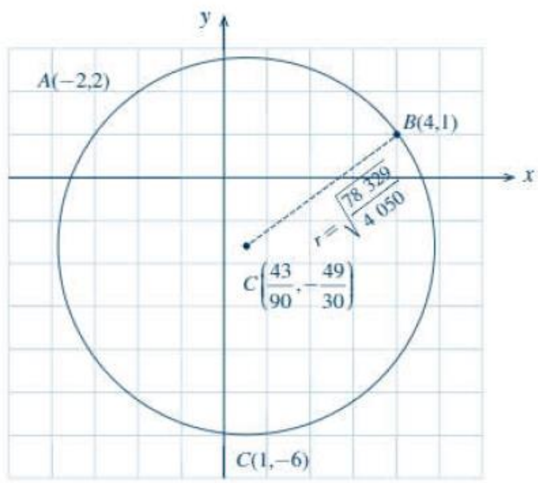
$$\left[x^2-\frac{43}{45}x+\left(\frac{-\frac{43}{45}}{2}\right)^2\right]+\left[y^2+\frac{147}{45}y+\left(\frac{\frac{147}{45}}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{-\frac{43}{45}}{2}\right)^2+\left(\frac{\frac{147}{45}}{2}\right)^2+\frac{740}{45}$$

$$\left(x^2-\frac{43}{45}x+\frac{1\,849}{8\,100}\right)+\left(y^2+\frac{147}{45}y+\frac{21\,609}{8\,100}\right)=\frac{1\,849}{8\,100}+\frac{21\,609}{8\,100}+\frac{740}{45}$$

$$\left.\left(x-\frac{43}{90}\right)^2+\left(y+\frac{49}{30}\right)^2=\frac{78\,329}{4\,050}\quad\right\}\text{ Ecuación ordinaria de la circunferencia.}$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C\left(\frac{43}{90},-\frac{49}{30}\right)$, su radio es $r=\sqrt{\frac{78\,329}{4\,050}}$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



4.2 Determinación de los diferentes casos de relación entre la circunferencia y la recta

Definición de tangente a una curva

Se reconoce la tangente a una circunferencia como aquella recta que tiene un solo punto en común con la curva, pero existen curvas para las cuales este criterio no es suficiente, ya que la recta tangente a una curva, en un punto dado de la misma, puede tocarla en otros puntos.

Sea la ecuación de una curva plana cualquiera $f(x,y)=0$. Sean $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos distintos de la curva, de tal manera que, P_2 se puede aproximar continuamente a P_1 el cual permanece fijo (Figura 3.10).

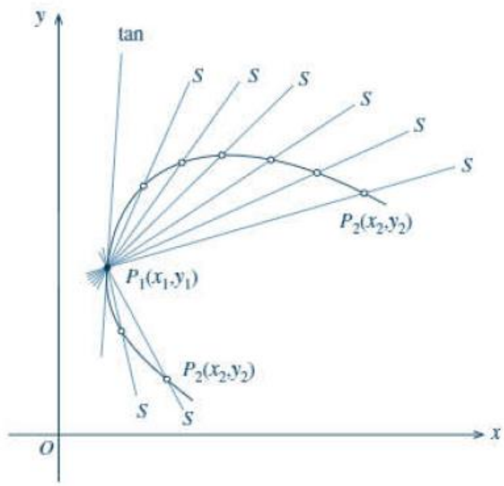


Figura 3.10

Una recta S, que pasa por los puntos P_1 y P_2 de una curva dada, es una secante a la curva que se mueve con P_2. Cuando P_2 se aproxima a P_1, por cualquiera de los dos lados, la secante se aproxima a la recta tangente. De esta manera puede definirse a la ***recta tangente a una curva en el punto P_1***, como la recta secante límite cuando un segundo punto P_2 se aproxima a P_1 sobre la curva. Al punto P_1 se le llama ***punto de tangencia***. La ***pendiente de la curva*** $f(x,y) = 0$ en P_1 es la pendiente de la recta tangente en ese punto. Debe notarse que ***si en P_1 la curva tiene un "pico", la recta tangente en ese punto no existe***, porque las rectas límites difieren dependiendo del lado por donde se acerque P_2 a P_1.

Ecuación de la tangente a una curva dada, en un punto particular de la misma

Se puede determinar la ecuación de la recta tangente a una curva, conociendo el punto donde hace contacto con la curva y su pendiente. Como el punto de contacto $P_1(x_1,y_1)$ es dado de antemano, debe calcularse la pendiente en ese punto, la cual es el valor límite de la pendiente de la secante $\overline{P_1P_2}$, cuando P_2 se aproxima a P_1.

La pendiente de la secante es

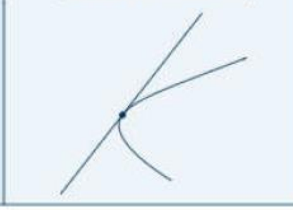
$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$

por ello, la pendiente de la tangente es

$$m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre que el límite exista, es decir, si en P_1 la curva no tiene un pico.

En nuestro caso, trabajaremos con curvas que son representadas por expresiones analíticas de segundo grado, por lo que no será necesario calcular en forma explícita el límite anterior. Como la recta secante pasa por el punto dado $P_1(x_1,y_1)$ y tiene pendiente m, su ecuación es $y = m(x - m_1) + y_1$; por otro lado, la curva se representa por la ecuación cuadrática $f(x,y) = 0$; así, los puntos donde la secante corta a la curva serán solución de la ecuación $f(x,m(x - x_1) + y_1) = 0$, que se obtiene sustituyendo $y = m(x - x_1) + y_1$ en $f(x,y) = 0$. Dicha ecuación será de segundo grado en la variable x, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Dependiendo del signo que tenga el discriminante de dicha ecuación, $D = b^2 - 4ac$, reconoceremos alguna de tres situaciones, a saber:

Si	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
La ecuación tiene:	dos soluciones reales distintas	dos soluciones reales iguales (o una solución real)	ninguna solución real
Significado gráfico:			

Como el discriminante D depende del valor de m, resolviendo la ecuación $D = 0$, obtendremos el valor de m para el cual la recta toca a la curva en un solo punto, es decir, obtendremos la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado. Al aplicar este procedimiento se dice que se está "anulando el discriminante".

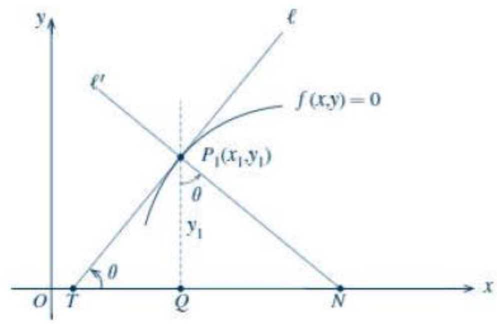


Figura 3.11

Si $P_1(x_1,y_1)$ es un punto cualquiera de la curva $f(x,y) = 0$ y ℓ es la recta tangente a la curva en dicho punto, cuya pendiente es m, de la ecuación punto-pendiente se obtiene la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

La recta ℓ, que pasa por P_1 y es perpendicular a la recta tangente es la **recta normal** a la curva en el punto P_1 y tiene por ecuación:

$$y_1 - y_2 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Longitudes de tangente, normal, subtangente y subnormal

Como se observa en la Figura 3.11, el punto T es la intersección de la recta tangente con el eje x, el punto N es la intersección de la recta normal con el eje x y el punto Q se encuentra sobre el eje x, justo abajo del punto de tangencia, por lo que la longitud del segmento P_1Q es y_1 la ordenada de P_1. A partir de estos puntos, se hacen las siguientes definiciones

a) La **longitud de la tangente** es la longitud del segmento $\overline{TP_1}$.
b) La **longitud de la subtangente** es la longitud del segmento $\overline{TQ}$ sobre el eje x.
c) La **longitud de la normal** es la longitud del segmento $\overline{NP_1}$.
d) La **longitud de la subnormal** es la longitud del segmento $\overline{QN}$ sobre el eje x.

En el triángulo $TP_1\,Q$, sea la hipotenusa (TP_1) la longitud de la tangente, por el teorema de Pitágoras, resulta:

$$\text{Longitud de la tangente } (TP_1) = \sqrt{(TQ)^2 + (RQ)^2}$$

$$\text{Si } \tan\theta = \frac{P_1Q}{TQ} = m_1$$

$$TQ = \frac{P_1Q}{m_1}; \text{ si } P_1Q = y_1, \text{ se tiene:}$$

$$\left. TQ = \frac{y_1}{m_1} \quad \right\} \text{ Longitud de la subtangente.}$$

Al sustituir $TQ = \dfrac{y_1}{m_1}$ y $P_1Q = y_1$ en la ecuación de la longitud de la tangente, se tiene:

$$TP_1 = \sqrt{(TQ)^2 - (P_1Q)^2}$$

$$TP_1 = \sqrt{\left(\frac{y_1}{m_1}\right)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{\frac{y_1^2}{m_1^2} + y_1^2} = \sqrt{\frac{y_1^2 + m_1^2 y_1^2}{m_1^2}}$$

$$\left. TP_1 = \sqrt{\frac{y_1^2(1+m_1^2)}{m_1^2}} = \frac{y_1}{m_1}\sqrt{1+m_1^2} \quad \right\} \text{ longitud de la tangente.}$$

En el triángulo QP_1N, sea la hipotenusa (P_1N) la longitud de la normal, por el teorema de Pitágoras, resulta:

$$\text{Longitud de la normal } (P_1N) = \sqrt{(QN)^2 + (P_1Q)^2}$$

$$\text{Si } \tan\theta = \frac{QN}{P_1Q} = m_1$$

$$QN = m_1(P_1Q); \text{ si } P_1Q = y_1, \text{ se tiene:}$$

$$\left. QN = m_1 y_1 \quad \right\} \text{ Longitud de la subnormal.}$$

Al sustituir $QN = m_1 y_1$ y $P_1Q = y_1$ en la ecuación de la longitud de la normal, resulta:

$$P_1N = \sqrt{(QN)^2 + (P_1Q)^2}$$

$$P_1N = \sqrt{(m_1 y_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{m_1^2 y_1^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1^2(m_1^2+1)}$$

$$\left. P_1N = y_1\sqrt{m_1^2+1} \quad \right\} \text{ Longitud de la normal.}$$

Debemos notar que las longitudes de la subtangente y la subnormal tienen signo, mientras que las longitudes de la tangente y la normal son siempre positivas. Las primeras serán positivas si m y y_1 tienen el mismo signo, y negativas cuando m y y_1 tienen signos contrarios. Lo anterior es equivalente a decir que la subtangente y la subnormal son positivas cuando $T < Q < N$ y negativas cuando $T > Q > N$. Por ejemplo, en la Figura 3.11 ambas son positivas porque $T < Q < N$ (notamos que m y y_1 son positivas).

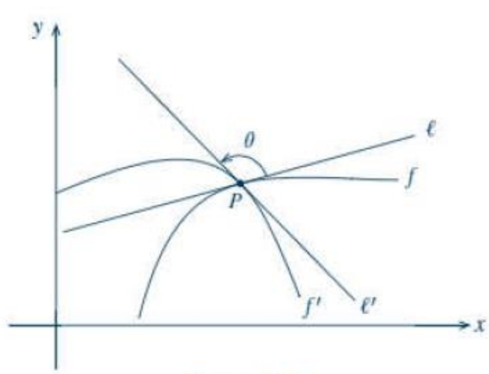


Figura 3.12

El ángulo entre dos curvas cuando se cruzan en un punto P se define como el ángulo entre sus rectas tangentes en ese punto, por lo tanto pueden formar dos ángulos que son suplementarios (Figura 3.12).

Si las rectas tangentes tienen pendientes m y m', los ángulos suplementarios entre las curvas satisfacen la relación

$$\tan = \pm\frac{m-m'}{1+mm'}, \text{ donde } m\,m' \neq -1.$$

Cuando $m'm \neq -1$, se tiene que ambos ángulos son rectos y se establece que las curvas dadas son **ortogonales** entre sí.

Tangente a una circunferencia

En ejercicios anteriores, la determinación de la ecuación de la tangente se obtuvo aplicando el principio que establece que la tangente a una circunferencia es la perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.

Ahora, se anulará el discriminante $D = b^2 - 4ac$ que se obtiene de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + C = 0$, que surge al combinar las ecuaciones de una recta y una circunferencia.

Cuando se conoce uno de dichos datos, el otro se determinará a partir de las condiciones dadas en el problema. Por lo anterior, consideremos los siguientes casos:

1. Se conoce el punto de tangencia
2. Se conoce la pendiente de la recta tangente
3. La tangente pasa por un punto exterior dado

El método de solución para cada uno de los casos es muy semejante: En cada uno se presenta una condición que define una familia de rectas, dependiendo de un parámetro, y se determina dicho parámetro anulando el discriminante de la ecuación cuadrática que resulta al combinar la ecuación de la circunferencia con la familia de rectas:

Se conoce el punto de tangencia	Se conoce la pendiente	Pasa por un punto exterior dado
		
Sólo un miembro de la familia anula el discriminante	Dos miembros de la familia anulan el discriminante	Dos miembros de la familia anulan el discriminante

5

Determina la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$ en el punto $A(4,5)$.

Solución

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $A(4,5)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = m(x - 4)$$

Donde, m representa la pendiente de la recta tangente por determinar; al despejar respecto a y, se tiene:

$$y - 5 = m(x - 4)$$
$$y - 5 = mx - 4m \qquad\qquad y = mx - 4m + 5$$

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$$
$$x^2 + (mx - 4m + 5)^2 + 2x - 2\,(mx - 4m + 5) - 39 = 0$$
$$x^2 + m^2 x^2 + 16m^2 + 25 - 8m^2x + 10mx - 40m + 2x - 2mx + 8m - 10 - 39 = 0$$
$$x^2 + m^2 x^2 - 8m^2x + 8mx + 2x + 16m^2 - 32m - 24 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 - (8m^2 - 8m - 2)x + (16m^2 - 32m - 24) = 0$$

Esta última ecuación tiene en la forma $ax^2 + bx + C = 0$, la condición de tangencia pide que se anule el discriminante, es decir, se impone $b^2 - 4ac = 0$:

$$[-(8m^2 - 8m - 2)]^2 - 4\,(1 + m^2)(16m^2 - 32m - 24) = 0$$
$$\cancel{64}m^4 + \cancel{64}m^2 + 4 - \cancel{128}m^3 - 32m^2 + 32m - \cancel{64}m^2 + 128m + 96 - \cancel{64}m^4 + \cancel{128}m^3 + 96m^2 = 0$$
$$64m^2 + 160m + 100 = 0$$
$$(8m + 10)\,(8m + 10) = 0$$

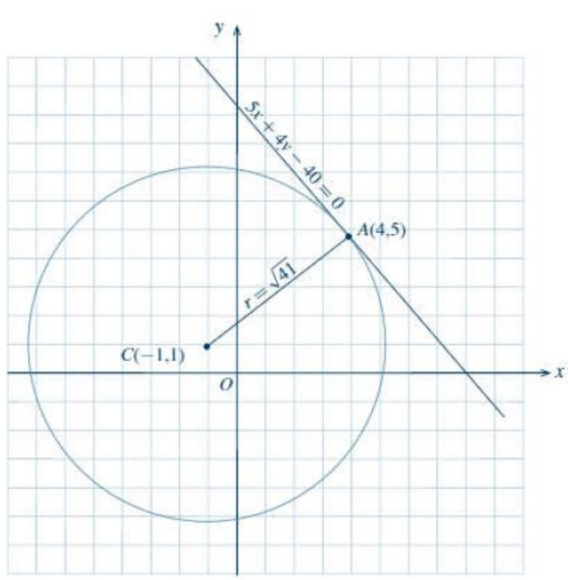
$$8m + 10 = 0 \qquad\qquad 8m + 10 = 0$$
$$8m = -10 \qquad\qquad 8m = -10$$
$$m_1 = -\frac{5}{4} \qquad\qquad m_2 = -\frac{5}{4}$$

Sólo un miembro de la familia de rectas que pasan por el punto $A(0,5)$ anula el discriminante, se ecuación es:

$$y - 5 = m(x - 4)$$
$$y - 5 = -\frac{5}{4}(x - 4)$$
$$5x + 4y - 40 = 0$$

La ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$ en el punto $A(4,5)$ es $5x + 4y - 40 = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



4.3 Posición relativa de dos circunferencias

Familias de circunferencias

La circunferencia que cumple con menos de tres condiciones independientes no es única, ya que la ecuación de la circunferencia que solamente satisface dos condiciones dadas, debe contener una constante arbitraria por determinar, la cual se denomina **parámetro**.

Por lo anterior, se establece que la ecuación representa a una familia o haz de circunferencias dependientes de un parámetro.

Ejemplos

1. ¿Cuál es la ecuación que representa a la familia de circunferencias cuyo centro común es $C(3,7)$?

   Aplicando la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, tenemos: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, sustituyendo las coordenadas del centro, resulta:

$$(x-3)^2+(y-7)^2=K^2$$

   La ecuación anterior representa la familia de circunferencias concéntricas, en donde el parámetro $K=r$ es cualquier número positivo.

2. ¿Cuál es la ecuación que representa a la familia de curvas que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas?

   Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes, son:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \quad (\boldsymbol{C_1})$$

$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \quad (\boldsymbol{C_2})$$

   De $(\boldsymbol{C_1})$ y $(\boldsymbol{C_2})$ se deduce la ecuación:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1\,y+F_1+K(x^2+y^2+D_2x+E_2\,y+F_2)=0 \quad (\mathbf{1})$$

   donde el parámetro K es cualquier número real.

Si las circunferencias dadas se intersecan en dos puntos diferentes $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, las coordenadas de cada punto satisfacen a $(\boldsymbol{C_1})$ y $(\boldsymbol{C_2})$, por lo que también satisfacen a (**1**), es decir: $0+k(0)=0$, que es verdadera para cualquier valor de K.

Por lo anterior, establecemos que la ecuación (**1**) representa la familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias $(\boldsymbol{C_1})$ y $(\boldsymbol{C_2})$, donde no es necesario que se determinen las coordenadas de los puntos de intersección.

Desarrollando la ecuación (**1**), se tiene:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+K(x^2+y^2+D_2x+E_2+\mathrm{F}_2)=0$$

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+Kx^2+Ky^2+KD_2x+KE_2y+KF_2=0$$

$$x^2+Kx^2+y^2+Ky^2+D_1x+KD_2x+E_1y+KE_2y+F_1+KF_2=0$$

$$(1+K)x^2+(1+K)y^2+(D_1+KD_2)x+(E_1+KE_2)y+F_1+KF_2=0 \quad (\mathbf{2})$$

Esta ecuación permite determinar la naturaleza de las curvas de dicha familia, es decir:

a) La ecuación (**2**) se simplifica a una de primer grado cuando $K=-1$, es decir, representa una línea recta que es la **cuerda** común entre las circunferencias $(\boldsymbol{C_1})$ y $(\boldsymbol{C_2})$.

b) Si las circunferencias $(\boldsymbol{C_1})$ y $(\boldsymbol{C_2})$ se intersecan en dos puntos distintos, la ecuación (**2**) representa, para cualquier valor de K diferente de -1, todas las circunferencias que pasan por dichos puntos de intersección de $(\boldsymbol{C_1})$ y $(\boldsymbol{C_2})$, con la única excepción de la circunferencia dos.

c) Si las circunferencias (C_1) y (C_2) son tangentes entre sí, la ecuación (**2**) representa, para cualquier valor de K diferentes de -1, todas las circunferencias que son tangentes a las circunferencias (C_1) y (C_2) en su punto de tangencia, con la única excepción de la circunferencia dos.

d) Si las circunferencias (C_1) y (C_2) no tienen ningún punto en común, la ecuación (**2**) representa una circunferencia, siempre y cuando K sea diferente de -1 y cumpla con las $D^2 + E^2 - 4F \geq 0$.

e) La ecuación (**2**) se simplifica a la ecuación de la circunferencia (C_1), cuando $K = 0$.

La línea recta que pasa por los centros de dos circunferencias no concéntricas, se denomina **recta de los centros**. La ecuación (**1**) que representa todas las circunferencias de la familia y que tienen su centro en la recta de los centros de las circunferencias (C_1) y (C_2), es decir, los centros de (C_1) y (C_2) son, respectivamente, $\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$ y la ecuación de la recta que contiene dichos puntos es:

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)\,y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0$$

La ecuación anterior se satisface por las coordenadas del centro $\left(-\frac{D_1 + KD_2}{2(1+K)}, -\frac{E_1 + KE_2}{2(1+K)}\right)$, para cualquier circunferencia que se represente por la ecuación (**1**).

Escribe la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $C(4, -2)$; construye la gráfica de tres elementos de la familia, especifica el valor del parámetro en cada caso.

Solución

Al aplicar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, se tiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Al sustituir las coordenados del centro dado, resulta:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = K^2$$

Ésta es la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas, donde el parámetro $K = r$ es cualquier número positivo.

Si $K = 2$, la ecuación del miembro de la familia que corresponde es:

$$\left.\begin{aligned}(x - 4)^2 + (y + 2)^2 &= (2)^2\\ (x - 4)^2 + (y + 2)^2 &= 4\end{aligned}\right\}\ \text{Forma ordinaria de la circunferencia.}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 4 = 0$$

$$\left.x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0\ \right\}\ \text{Forma general de la circunferencia.}$$

Si $K = 3$, la ecuación del miembro de la familia que corresponde es:

$$\left.\begin{aligned}(x - 4)^2 + (y + 2)^2 &= (3)^2\\ (x - 4)^2 + (y + 2)^2 &= 9\end{aligned}\right\}\ \text{Forma ordinaria de la circunferencia.}$$

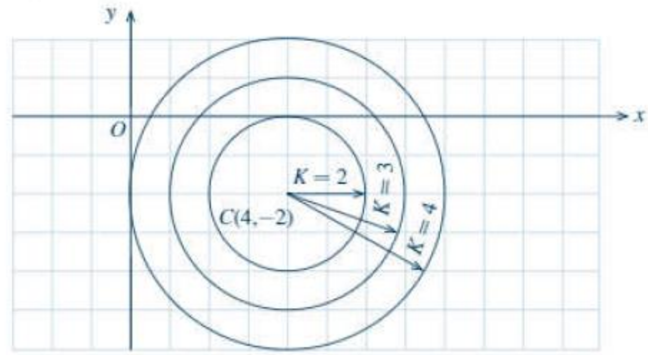
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 9 = 0$$

$$\left.x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0\ \right\}\ \text{Forma general de la circunferencia.}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 16 = 0$$
$$\left. x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0 \right\} \text{ Forma general de la circunferencia.}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



4.4 Determinación de la ecuación de la parábola y su grafica

Definición

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que se mueven en un plano, de tal manera que equidistan de un punto y una recta fijos en el plano. El punto fijo se denomina **foco** y la recta fija **directriz** de la misma.

Elementos de una parábola

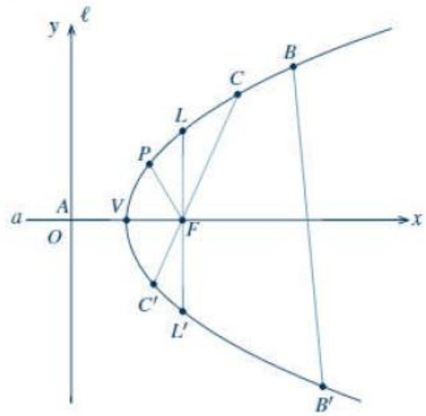


Figura 3.13

Si designamos al **foco** y la **directriz** por F y ℓ, respectivamente, la recta a que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje focal** o **eje de la parábola**; sea A el **punto de intersección** entre el eje de la parábola y la directriz; el punto V es el punto medio del segmento AF y por definición está sobre la parábola, dicho punto se denomina **vértice**; sea BB' el segmento de la recta que une dos puntos diferentes de la parábola, se denomina **cuerda**; particularmente si una cuerda pasa por el foco, tal como CC', se denomina **cuerda focal**; si la cuerda focal es perpendicular al eje de la parábola, tal como LL', se denomina **lado recto**; sea P un punto cualquiera de la parábola y la recta P que une al foco con dicho punto, se denomina **radio focal de P** o **radio vector** (Figura 3.13).

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal sobre alguno de los ejes coordenados

Si consideramos la parábola con vértice en el origen cuyo eje focal coincide con el eje x (Figura 3.14).

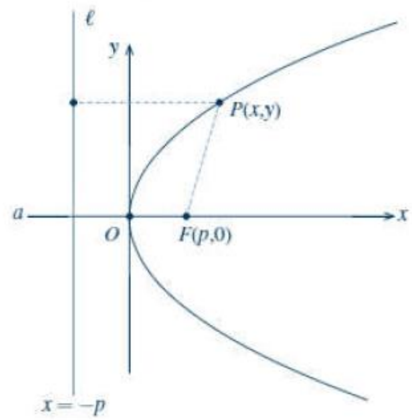


Figura 3.14

Si el foco dista p unidades del vértice, sus coordenadas son $F(p,0)$; como el vértice equidista del foco y de la directriz, la ecuación de esta última es $x = -p$.

Si $P(x,y)$, un punto cualquiera de la parábola por el que se traza el segmento $\overline{PA}$ perpendicular a la directriz: con base en la definición de parábola, dicho punto debe satisfacer la condición geométrica de $|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$.

Al aplicar la ecuación de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Se aplica la ecuación de distancia de una recta a un punto, es decir:

$$|\overline{PA}| = |x + p|$$

Analíticamente, la condición geométrica se representa como:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$$
$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |\overline{x+p}|$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y simplificando, resulta:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = (|x+p|)^2$$
$$(x-p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$y^2 = \cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2} - \cancel{x^2} + 2px - \cancel{p^2}$$
$$y^2 = 4px$$

Si extraemos raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{4px}$$
$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

Para valores reales y diferentes de cero de la variable y, los valores de p y x deben ser del mismo signo; por lo anterior se consideran dos casos:

1. Si $p > 0$, no deben tomarse en cuenta los valores negativos de x, por lo que la parábola se abre a la derecha del eje y y se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo del eje x. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$; las coordenadas de su foco son $F(p,0)$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$ (Figura 3.15).

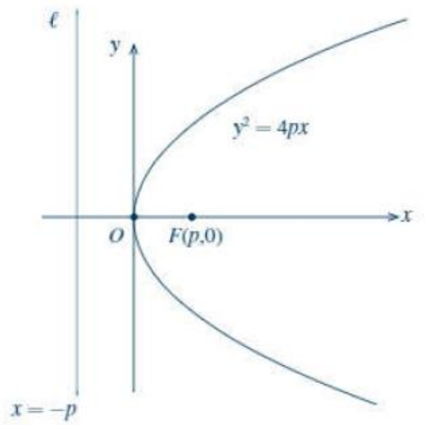


Figura 3.15

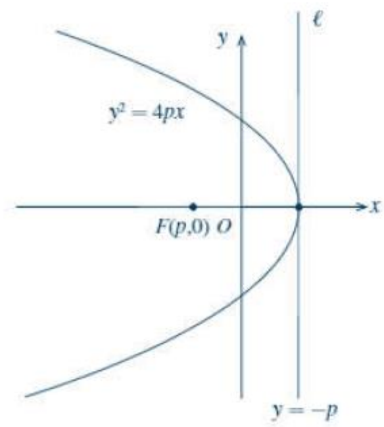


Figura 3.16

2. Si $p < 0$, no deben tomarse en cuenta los valores positivos de x, por lo que la parábola se abre a la izquierda del eje y y se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo del eje x. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$; las coordenadas con su foco son $F(p,0)$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$ (Figura 3.16).

Con base en la ecuación $y^2 = 4px$, la parábola no presenta asíntotas verticales ni horizontales.

En la ecuación $y = \pm 2\sqrt{px}$ se tienen dos puntos sobre la parábola cuya abscisa es p; uno de ellos tiene de ordenada $2p$ y el otro tiene la ordenada $-2p$, dado que la abscisa del foco es 1, se establece que la **longitud del lado recto** (LR) es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$, es decir: $LR = |4p|$.

Consideremos la parábola con vértice en el origen y cuyo eje coincide con el eje y (Figura 3.17).

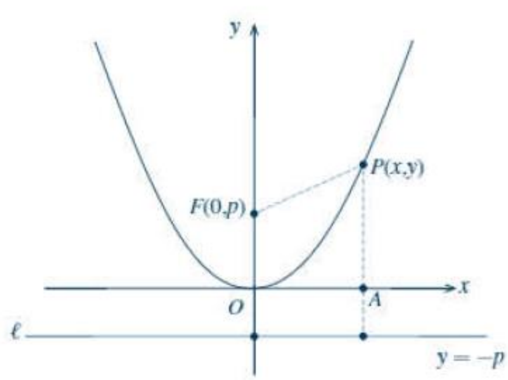


Figura 3.17

Como el foco está sobre el eje y, sus coordenadas son $F(0,P)$ y la ecuación de la directriz de acuerdo con la definición de parábola es $y = -p$.

Si $P(x,y)$ es un punto que se mueve libremente sobre la parábola, de acuerdo con la definición, sus distancias al foco y a la directriz se mantienen iguales, es dedir:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$$

Al aplicar las ecuaciones de distancia entre dos puntos y distancia de punto a recta, se tiene:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{PA}| = \frac{|y+p|}{\sqrt{0^2+1^2}} = |y+p|$$

Cada punto $P(x,y)$ de la parábola satisface la ecuación:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2} = |y+p|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y simplificando, resulta:

$$\left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2 = (|y+p|)^2$$
$$x^2+(y-p)^2 = y^2+2py+p^2$$
$$x^2+\cancel{y^2}-2py+\cancel{p^2} = \cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}$$
$$x^2-2py = 2py$$
$$x^2 = 4py$$

$$x = \pm 2\sqrt{py}$$

Para valores reales y diferentes de cero de la variable x, los valores de p y y deben ser del mismo signo; por lo anterior, se consideran dos casos.

3. Si $p > 0$, no deben tomarse en cuenta los valores negativos de y, por lo que la parábola se abre hacia arriba del eje x y se extiende indefinidamente hacia ambos lados del eje y. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, las coordenadas de su foco son $F(0,p)$ y la ecuación de su directriz es $y = -p$ (Figura 3.18).
4. Si $p < 0$, no deben tomarse en cuenta los valores positivos de y, por lo que la parábola se abre hacia abajo del eje x y se extiende indefinidamente hacia ambos lados del eje y. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$, las coordenadas de su foco son $F(0,p)$ y la ecuación de su directriz es $y = -p$ (Figura 3.19).

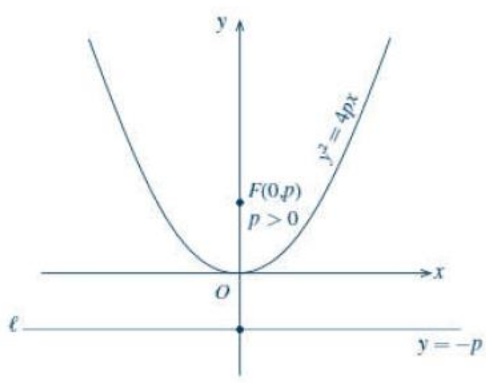


Figura 3.18

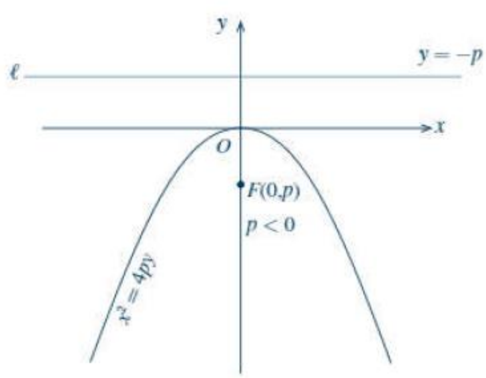


Figura 3.19

Con base en la ecuación $x^2 = 4py$, la parábola no presenta asíntotas verticales ni horizontales.

En la ecuación $x = \pm 2\sqrt{py}$, se tienen dos puntos sobre la parábola cuya ordenada es p; uno de ellos tiene de abscisa $2p$ y el otro tiene la abscisa $-2p$; dado que la ordenada del foco es p, se establece que la **longitud del lado recto** (LR) es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$, es decir: $LR = |4p|$.

Las expresiones $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$ son las ecuaciones en su forma más simple, por lo que se les denomina **primera ecuación ordinaria de la parábola** o **de forma canónica de la parábola**.

Una parábola cuyo vértice está en el origen y eje focal sobre el eje x, pasa por el punto $A(3,6)$; determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz, la longitud de su lado recto y traza la gráfica correspondiente.

Solución

De acuerdo con las condiciones dadas en el problema, la ecuación de la parábola es de la forma canónica $y^2 = 4px$.

Como un punto de la parábola es $A(3,6)$, sus coordenadas deben satisfacer a dicha ecuación, es decir:

$$y^2 = 4px$$

$$(6)^2 = 4p(3)$$

$$36 = 12p$$

$$p = \frac{36}{12}$$

$$p = 3$$

Como $p = 3$, la ecuación de la parábola es: $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

Las coordenadas del foco son: $F(p,0)$

$$F(3,0)$$

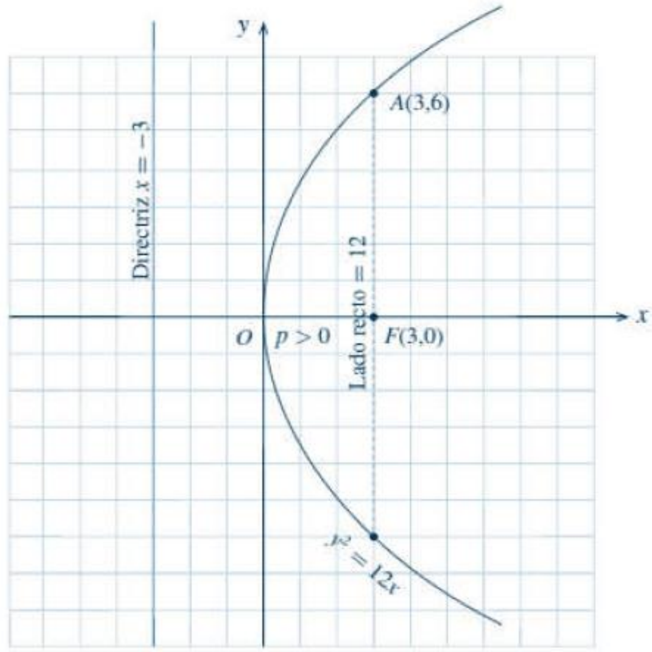
La ecuación de la directriz es: $x = -p$

$$x = -3$$

La longitud del lado recto es: $LR = |4p|$

$$LR = |4(3)| = 12$$

Apartir de $y^2 = 12x$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:



4.5 ¿Una ecuación de la forma x2 + y2 + Dx + Ey + F = 0 representa a una parabola?

(INVESTIGACION POR PARTE DEL ALUMNO)

BIBLIOGRAFIA

GEOMETRIA ANALITICA	Benjamín Garza Olvera	Primera Edición	Editorial Pearson
GEOMETRIA ANALITICA	Benjamín Garza Olvera	Primera Reimpresión	colección DGti
GEOMETRIA ANALITICA	Charles H. Lehmann	Primera Reimpresión	Ed. Limusa.

RED DE INTERNET