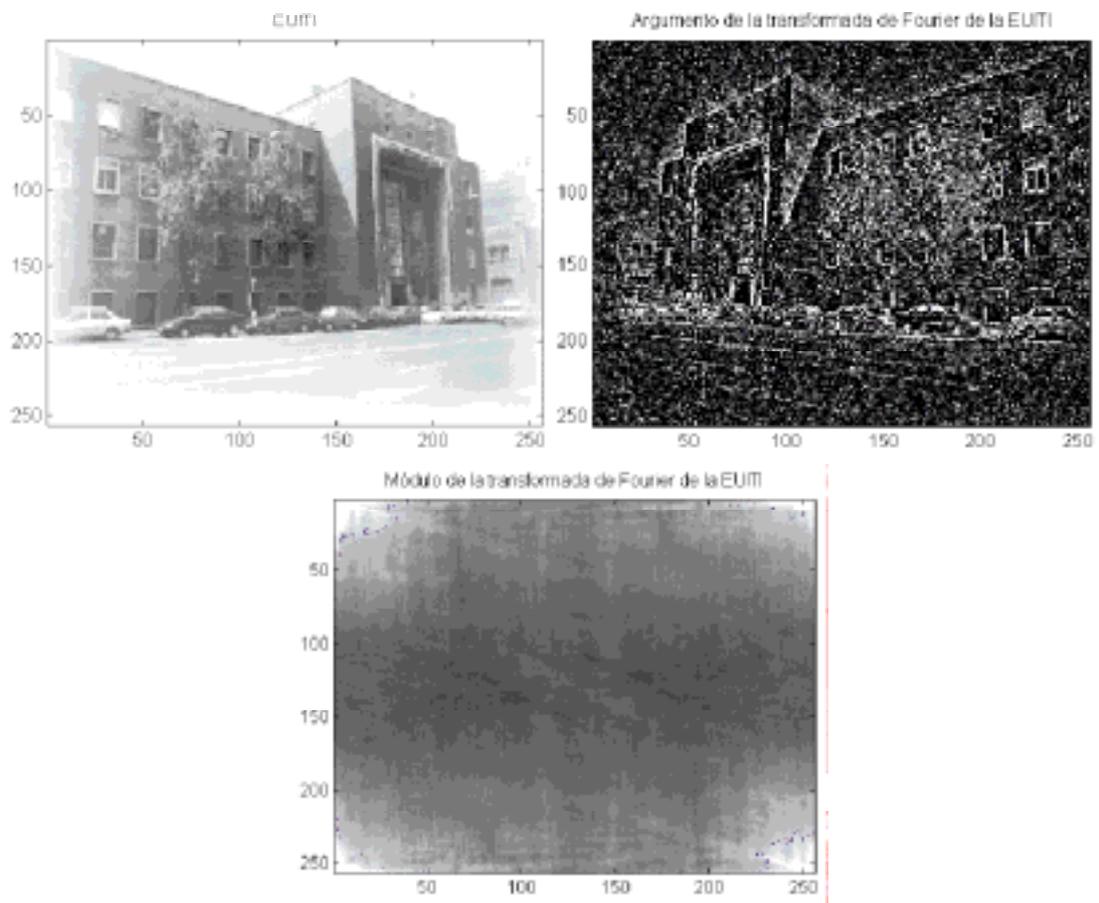


# UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

## DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, AUTOMÁTICA E INFORMÁTICA INDUSTRIAL

### Capítulo 12:

### Introducción al Procesamiento digital de Señales



|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES .....</b>       | <b>3</b>  |
| <b>12.1 CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE SISTEMAS DISCRETOS .....</b>        | <b>6</b>  |
| 12.1.1 ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DISCRETO .....                     | 12        |
| 12.1.2 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA DISCRETO .....         | 12        |
| 12.1.3 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA SECUENCIA .....               | 17        |
| 12.1.4 TRANSFORMADAS Z.....   | 19        |
| 12.1.5 MUESTREO DE SEÑALES .....                                    | 23        |
| <b>12.2 FILTROS DIGITALES .....</b>                                 | <b>30</b> |
| 12.2.1 CLASES DE FILTROS DIGITALES .....                            | 31        |
| 12.2.2 FILTROS DE FASE LINEAL O NO DISPERSIVOS.....                 | 33        |
| 12.2.3 CAUSALIDAD Y SUS IMPLICACIONES .....                         | 34        |
| <b>12.3 DISEÑO DE FILTROS NO RECURSIVOS (FIR) .....</b>             | <b>39</b> |
| 12.3.1 FILTROS FIR SIMÉTRICOS Y ANTISIMÉTRICOS.....                 | 39        |
| 12.3.2 DISEÑO DE FILTROS FIR DE FASE LINEAL USANDO VENTANAS.....    | 41        |
| <b>12.4 DISEÑO DE FILTROS RECURSIVOS (IIR) .....</b>                | <b>52</b> |
| 12.4.1 DISEÑO DE FILTROS IIR MEDIANTE TRANSFORMADAS BILINEALES..... | 52        |
| <b>12.5 IMPLEMENTACIÓN DE LOS FILTROS DIGITALES.....</b>            | <b>59</b> |
| <b>12.6 EFECTOS DE LA CUANTIFICACIÓN EN LOS FILTROS.....</b>        | <b>62</b> |
| 12.6.1 EFECTOS DE TRUNCAMIENTO Y REDONDEO .....                     | 62        |
| 12.6.2 CUANTIFICACIÓN DE SEÑALES .....                              | 65        |
| 12.6.3 CUANTIFICACIÓN DE LOS COEFICIENTES .....                     | 66        |
| 12.6.4 CUANTIFICACIÓN DE RESULTADOS DE OPERACIONES .....            | 67        |
| <b>12.7 BIBLIOGRAFÍA .....</b>                                      | <b>69</b> |

# 12 Introducción al Procesamiento Digital de Señales

---

El Procesamiento de Señales posee una larga y rica historia. Es una tecnología que se entronca con un inmenso conjunto de disciplinas entre las que se encuentran las telecomunicaciones, el control, la exploración del espacio, la medicina y la arqueología, por nombrar solo unas pocas. Hoy en día, esta afirmación es incluso más cierta con la televisión digital, los sistemas de información y el entretenimiento multimedia. Es más, a medida que los sistemas de comunicación se van convirtiendo cada vez más en sistemas sin hilos, móviles y multifunción, la importancia de un procesamiento de señales sofisticado en dichos equipos se hace cada vez más relevante.

El Procesamiento de señales trata de la representación, transformación y manipulación de señales y de la importancia que contienen. Cuando se refiere al procesamiento digital de señales, se refiere a la representación mediante secuencias de números de precisión finita y el procesamiento se realiza utilizando un computador digital.

A menudo es deseable que estos sistemas funcionen en tiempo real, lo que significa que el sistema en tiempo discreto se implementa de forma que las muestras de salida se calculan a la misma velocidad a la que se muestrea la señal en tiempo continuo. Son muchas las aplicaciones que requieren esta especificación. El tratamiento en tiempo

discreto y en tiempo real de señales en tiempo continuo es práctica común en sistema de control, comunicaciones, radar, sonar, codificación y realce de voz y vídeo, ingeniería biomédica y un largo etcétera.

Otro tipo de problemas del tratamiento de señales al que se enfrenta es la interpretación de señales. Por ejemplo, en un sistema de reconocimiento de voz el objetivo es comprender la señal de entrada. Típicamente, un sistema como éste aplicará un procesado digital previo (filtrado, estimación de parámetros, etc.) seguido por un sistema de reconocimiento de patrones que produzca una representación simbólica.

Los problemas de tratamiento de señales no están confinados, por supuesto, a señales unidimensionales. Aunque hay algunas diferencias fundamentales entre las teorías del tratamiento de señales unidimensionales y multidimensionales, una buena parte del material que se presenta aquí tiene su contrapartida en sistemas multidimensionales. Entre ellas destaca las aplicadas al procesamiento de imágenes digitales.

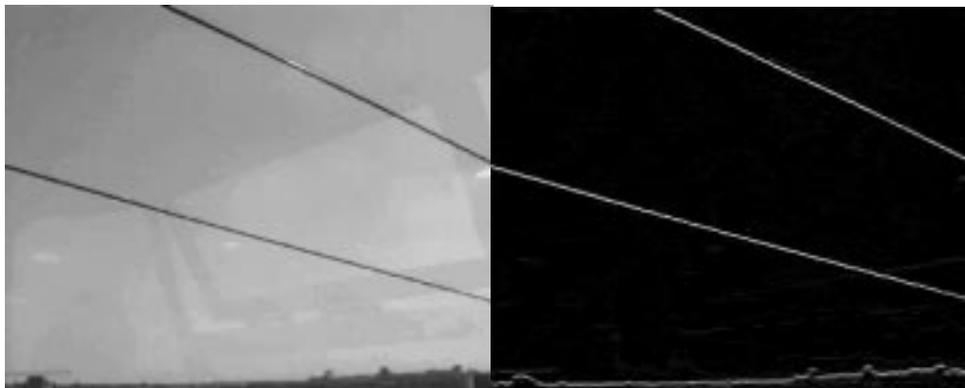
El tratamiento de señales en tiempo discreto ha avanzado con pasos desiguales durante un largo periodo de tiempo. Hasta principios de los años cincuenta el tratamiento de señales se realizaban con circuitos electrónicos o incluso con dispositivos mecánicos. Aunque los computadores digitales ya estaban disponibles en entornos de negocios y en laboratorios científicos, éstos eran caros y de capacidad relativamente limitada. Uno de los primeros usos de los computadores digitales en el tratamiento de señales fue en la prospección petrolífera. Se grababan los datos sísmicos en cintas magnéticas para su procesamiento posterior. Este tipo de tratamiento de señales no se podía realizar generalmente en tiempo real. Aunque el procesamiento de señales mediante computadores digitales ofrecía tremendas ventajas de flexibilidad, sin embargo, el procesado no se podía realizar en tiempo real. Las aportaciones de Cooley y Tukey (1965) de un algoritmo eficiente para el cálculo de las transformadas de Fourier aceleró el uso del computador digital. Muchas aplicaciones desarrolladas requerían del análisis espectral de la señal y con las nuevas transformadas rápidas se redujo en varios órdenes de magnitud el tiempo de cómputo. Además, se dieron cuenta de que el nuevo algoritmo se podría implementar en hardware digital específico, por lo que muchos algoritmos de tratamiento digital de señales que previamente eran impracticables comenzaron a verse como posibles.

Otro desarrollo importante en la historia del Procesamiento de Señales ocurrió en el terreno de la Microelectrónica. Aunque los primeros microprocesadores eran demasiado lentos para implementar en tiempo real la mayoría de los sistemas en tiempo discreto, a mediados de los ochenta la tecnología de los circuitos integrados había avanzado hasta el nivel de permitir la realización de microcomputadores en coma fijo y coma flotante con arquitecturas especialmente diseñadas para realizar algoritmos de procesamiento de señales en tiempo discreto. A estos procesadores se les conoce por el acrónimo de DSP (*Digital Signal Processor*). Con esta tecnología llegó, por primera vez, la posibilidad de una amplia aplicación de las técnicas de tratamiento de señales en tiempo discreto. Aun más, hoy en día los diseños de los microprocesadores genéricos son ampliados en registros e instrucciones para poderlos destinarlos a tareas de procesamiento de señales, sea el caso más llamativo el conjunto de instrucciones MMX insertadas en la familia INTEL a partir del mítico PENTIUM.

De las diferentes materias que involucra el tratamiento digital de señales, en este tema sólo se va a versar sobre los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo, abreviados por la sigla LTI (*Linear Time Invariant*). La elección por estos filtros viene dada por su gran difusión actual, por ser un capítulo iniciático al procesado digital de señales y por corresponder con la evolución natural del temario de Electrónica Industrial. No obstante, el Procesamiento Digital es por si misma una propia asignatura, lo que indica el carácter básico de este capítulo. Para profundizar más sobre los filtros digitales y conocer en amplitud esta disciplina, el alumno puede empezar por elegir alguno de los libros recomendados en el apartado de bibliografía.

Los filtros digitales LTI son, por ejemplo, usuales en el procesamiento del audio. Los equipos de música vienen dotados con filtros que le permite al oyente modificar las cantidades relativas de energía de baja frecuencia (graves) y la energía de alta frecuencia (agudos). Estos filtros varían sus respuestas en frecuencias mediante la manipulación de los controles de tono.

Otra clase común de filtros LTI son aquellos en los que la salida del filtro es una aproximación de la derivada de su entrada. Los filtros diferenciadores son útiles para acentuar las transiciones rápidas de una señal, y una aplicación en la que se emplea a menudo es en la intensificación de los bordes. La figura 12.1 ilustra el efecto de un filtro diferenciador en una imagen. La figura muestra dos imágenes, la original y el resultado del procesamiento con un filtro que tiene una respuesta en frecuencia lineal. Como la derivada en los bordes de la imagen es mayor que en las regiones donde la intensidad varía con lentitud en el espacio, el efecto de los filtros diferenciadores es resaltar los bordes.



**Figura 12. 1. Procesamiento de un filtro diferencial sobre una señal bidimensional**

Los filtros selectivos en frecuencia que permiten el paso de señales sin distorsión en una o en un conjunto de bandas de frecuencia, y atenúan o eliminan totalmente las señales en el resto de las bandas son otra clase importante de filtros LTI. Una importante aplicación de los filtros selectivos están en los sistemas de comunicaciones. Son la base para los sistemas de modulación en amplitud (AM), en la cual la información de cada canal se pone en una frecuencia separada y luego en el receptor se extrae los canales mediante filtros selectivos en frecuencia.

Es común emplear filtros de tiempo discreto en el análisis de secuencias de datos económicos tales como el índice del mercado de valores. A menudo las variaciones de largo plazo (las cuales corresponden a bajas frecuencias) tienen un significado diferente al de variaciones de corto plazo ( las cuales corresponden a altas frecuencias), y es útil analizar estos componentes por separado. La separación de estos componentes casi siempre se lleva a cabo mediante filtros selectivos en frecuencia. El filtrado de secuencias de datos económicos también se usa para suavizar los datos y eliminar las fluctuaciones aleatorias (que son por lo general de alta frecuencia) sobrepuestas a los datos significativos.

Se acaban de citar algunas de las muchas aplicaciones del filtrado digital LTI que en este capítulo serán tratados. En detalle, el tema del filtrado abarca muchos problemas, tales como los que involucran su diseño y su implementación. El principal objetivo de este capítulo es introducir el concepto básico del filtrado de tiempo discreto. Los conceptos primarios provienen directamente de las nociones básicas de los sistemas discretos y de las propiedades de las transformadas de Fourier. Entonces, además de la introducción de una importante área de aplicación, la discusión servirá, también, para una mejor comprensión de las propiedades y de la importancia de los sistemas discretos y de la transformada de Fourier. El capítulo se inicia con un repaso a la naturaleza de los sistemas discretos, analizando detenidamente las transformadas de Fourier de las secuencias y el proceso de muestreo de las señales continuas. En el apartado 12.2 las diferencias entre filtros analógicos y digitales serán tratadas y posteriormente se procederá a la clasificación de los filtros de tiempo discreto. Antes de entrar en el diseño se analizará las implicaciones de la causalidad. Las secciones 12.3 y 12.4 presentarán las técnicas de diseño de los filtros no recursivos y recursivos respectivamente. Mientras que 12.5 y 12.6 tratarán sobre las problemáticas de la implementación de estos filtros y de los efectos producidos de la cuantificación de la señal. Por último, señalar que para una mejor comprensión de la unidad temática se han elaborado algunos ficheros en MATLAB. Éstos serán presentados a lo largo del capítulo, el alumno puede adquirirlos en el servidor WEB de departamento ([www.elai.upm.es](http://www.elai.upm.es)).

## 12.1 Conceptos básicos sobre sistemas discretos

---

Posiblemente lo primero en preguntarse sería ¿ qué es un filtro digital ?, pues bien, según se estudió en el anterior capítulo sobre Tratamiento Analógico de la Señal, los filtros tratan de extraer alguna característica de la señal de entrada; en términos frecuenciales, se hablaba del paso de una determinada banda del espectro de la señal de entrada. Por lo tanto, los filtros digitales son sistemas discretos que tratan de extraer alguna característica frecuencial de una señal muestreada.

Pero ante esta definición, aparecen los vocablos típicos del Procesamiento Digital, tales como señal muestreada o sistema discreto. Por lo que se va a proceder a describir los conceptos básicos sobre los sistemas discretos. Las señales en tiempo discreto surgen si el sistema involucra la operación de muestreo de señales en tiempo continuo. La señal muestreada es  $x_0, x_T, x_{2T}, \dots$ , donde  $T$  es el periodo de muestreo. Dicha secuencia de valores

que aparecen de la operación de muestreo normalmente se escribe como  $x_k$ . Si el sistema incluye un proceso iterativo realizado por una computadora digital, la señal involucrada es una secuencia de números  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . La secuencia de números normalmente se escribe como  $\{x_k\}$  en donde  $k$ , entero asociado al elemento, es el índice del mismo. Este índice podrá ser positivo o negativo.

$$\{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} \Leftrightarrow \{x_k\} \quad (12.1)$$

El índice 0 es el origen de la secuencia. Aunque  $\{x_k\}$  es una secuencia de números, ésta se puede considerar como una señal muestreada de  $x(t)$  cuando el periodo de muestreo  $T$  es de 1 segundo.

### Ejemplo 12.1

Obtener la secuencia discreta de un armónico de 100 Hz, de amplitud 0.5 V que ha sido muestreado con una frecuencia de 1kHz, sabiendo que el desfase en la adquisición es de  $30^\circ$  y el tiempo total de muestreo ha sido de 20 ms. No considere los efectos de cuantificación de la señal.

Una senoide de tiempo continuo viene dada por la fórmula matemática siguiente:

$$u_e(t) = U_{\max} \text{sen}(2\pi ft + \varphi) \quad (12.2)$$

Si se obtiene una señal de tiempo discreto tomando regularmente muestras  $\{x_k\}$  a la frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T$ , se obtendrá:

$$u_k = U_{\max} \text{sen}(2\pi f(kT) + \varphi) = U_{\max} \text{sen}\left(2\pi \frac{f}{f_s} k + \varphi\right) \quad (12.3)$$

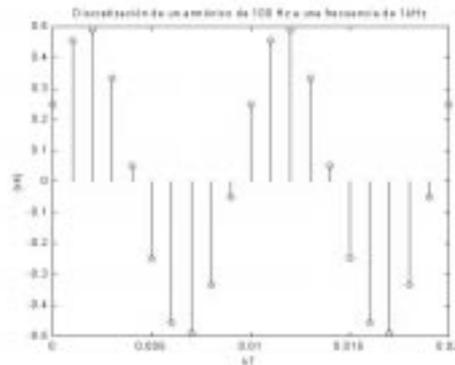
Para los valores indicados del ejercicio, la secuencia muestreada tendrá como resultado:

$$\{u_k\} = \{.25 \ .45 \ .48 \ .33 \ .05 \ -.25 \ -.45 \ -.48 \ -.33 \ -.05 \ .25 \ .45 \ .48 \ .33 \ .05 \ -.25 \ -.45 \ -.48 \ -.33 \ -.05 \ }$$

A continuación se presenta la resolución mediante MATLAB.

Resolución del ejercicio en MATLAB

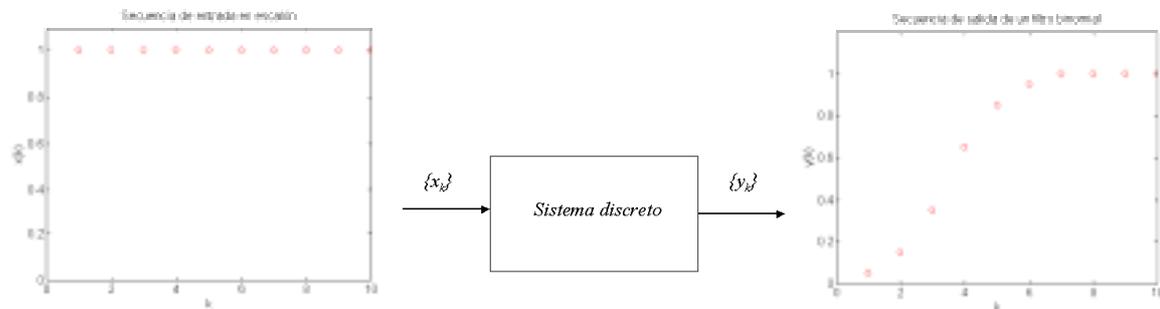
```
>> k = 0:20; T = 1/1000;
>> uk = 0.5 * sin ( (2*pi*100*( k*T)) + pi/6 );
>> stem ( kT, uk );
```



Habiendo definido el concepto de secuencia, al que se ha asociado con el resultado del muestreo, el término de sistema discreto puede ser entendido. Un sistema discreto es un algoritmo que permite transformar una secuencia en otra.

$$\{y_k\} = f\{x_k\} \quad (12.4)$$

Como ejemplo de sistema discreto se podría considerar cualquier programa de computador que transforme una tabla de valores en otra, por ejemplo, la obtención de cuadrados, la suma de los  $k$  primeros números, la media de una serie de muestras, etc. Los sistemas discretos pueden clasificarse en estáticos o dinámicos. Un sistema discreto es estático cuando el elemento de la secuencia de salida de un cierto índice depende únicamente del elemento de la secuencia de entrada del mismo índice. Por ejemplo, el sistema que genera una secuencia cuyos elementos son los cuadrados de los correspondientes elementos de una secuencia de entrada. En caso contrario, el sistema se denomina dinámico, esto es, la secuencia de salida de un cierto índice depende de las secuencias de entrada y de salida de órdenes distintos al suyo. En la figura 12.2 el sistema discreto es dinámico, ya que ante una entrada en escalón unitario la secuencia de salida no sólo depende del índice de la secuencia de entrada sino también de los estados anteriores.



**Figura 12. 2 Sistema discreto dinámico**

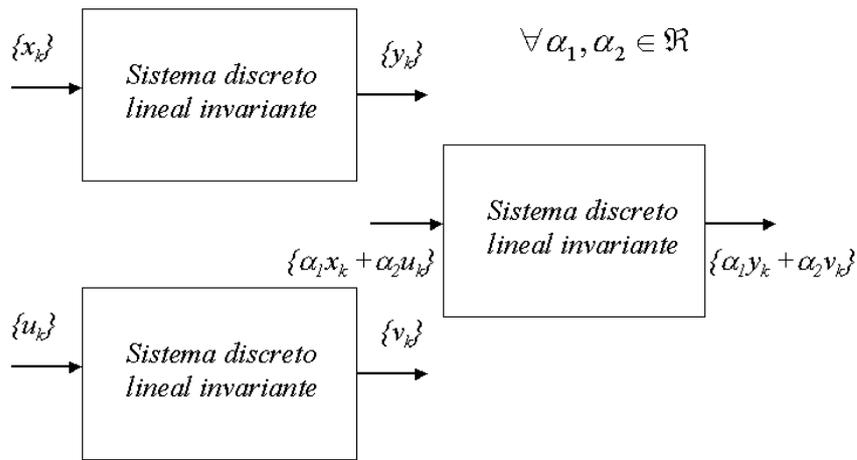
Un sistema discreto es causal si el valor de un elemento de la secuencia de salida depende únicamente de la secuencia de entrada y de salida de menor o igual índice.

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots) \quad (12. 5)$$

Los sistemas discretos que no verifiquen esta propiedad se denominan no causales. Si la función que relaciona cada elemento de la secuencia de salida es lineal, el sistema se denomina asimismo lineal. Centrados en los sistemas dinámicos causales, un sistema será lineal, si la función expresada en (12. 5) es lineal, es decir, de la forma:

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (12. 6)$$

Cuando  $a_i$  y  $b_i$  son constantes se dice que el sistema lineal es invariante en el tiempo. A éstos se les conoce por el acrónimo de LTI (*Linear Time Invariant*). Un sistema lineal invariante verifica el principio de linealidad, es decir, que, en idénticas condiciones iniciales, a entradas suma de entradas o producto por una constante, le corresponden salidas sumas o productos de la misma constante. La figura 12.2 ilustra este principio.



**Figura 12. 3 Linealidad de los sistemas discretos dinámicos lineales e invariantes**

En el presente tema sólo van a ser considerados los filtros digitales que sean sistemas discretos dinámicos lineales e invariantes por lo que normalmente se omitirán los adjetivos para su definición. Las ecuaciones usadas para definir estos sistemas se denominan “ecuaciones en diferencias” y juegan un papel similar al de las ecuaciones diferenciales lineales en los sistemas continuos.

Se denomina secuencia de ponderación a la que se obtiene en la salida del sistema cuando se aplica a la entrada una secuencia tipo impulso.

$$\{g_k\} = \{\dots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \dots\} \tag{12. 7}$$

Si el sistema es causal  $g_k$  es igual a cero para  $k < 0$ .

Para obtener la secuencia de salida sobre un sistema lineal ante una secuencia de entrada dada habrá de aplicar el operador convolución discreta; este operador se define como:

$$\{y_k\} = \{g_k\} * \{x_k\} = \{x_k\} * \{g_k\} \tag{12. 8}$$

donde  $\{g_k\}$  representa la secuencia de ponderación. En ellas cada elemento de la secuencia de salida es calculada por la expresión:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{k-n} x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{k-n} g_n \tag{12. 9}$$

**Ejemplo 12.2**

Dada la ecuación en diferencia:

$$y_k = \frac{3}{4}y_{k-1} - \frac{1}{8}y_{k-2} + x_k - \frac{1}{2}x_{k-1} \quad (12. 10)$$

obtener la secuencia de ponderación y determinar la salida ante una entrada en escalón.

Para obtener la secuencia de ponderación habrá de aplicarle una entrada impulsional, de forma que la entrada será del tipo  $\{x_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ . La evolución de la salida puede ser realizada a través de una tabla, en las que se van obteniendo los resultados temporales al aplicar la ecuación en diferencias:

| $k$ | $x_k$ | $x_{k-1}$ | $y_{k-1}$ | $y_{k-2}$ | $y_k$  |
|-----|-------|-----------|-----------|-----------|--------|
| 0   | 1     | 0         | 0         | 0         | 1      |
| 1   | 0     | 1         | 1         | 0         | 0.25   |
| 2   | 0     | 0         | 0.25      | 1         | 0.0625 |
| 3   | 0     | 0         | 0.0625    | 0.25      | 0.0156 |
| 4   | 0     | 0         | 0.0156    | 0.0625    | 0.0039 |
| 5   | 0     | 0         | 0.0039    | 0.0156    | 0.0010 |
| 6   | 0     | 0         | 0.0010    | 0.0039    | 0.0002 |
| 7   | 0     | 0         | 0.0002    | 0.0010    | 0.0001 |
| 8   | 0     | 0         | 0.0001    | 0.0002    | 0.0000 |

Luego la secuencia de ponderación del sistema LTI es:

$$\{g_k\} = \{1 \quad 0.25 \quad 0.0625 \quad 0.0156 \quad 0.0039 \quad 0.0010 \quad 0.0002 \quad 0.0001\}$$

Para calcular la respuesta en escalón se aplicará el operador convolución, (12. 9), donde la señal de entrada será  $\{x_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ . La secuencia de salida corresponderá a:

$$y_0 = \sum_{n=0}^7 g_{k-n} x_n = 1$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^7 g_{k-n} x_n = 1 + 0.25 = 1.25$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^7 g_{k-n} x_n = 1 + 0.25 + 0.0625 = 1.3125$$

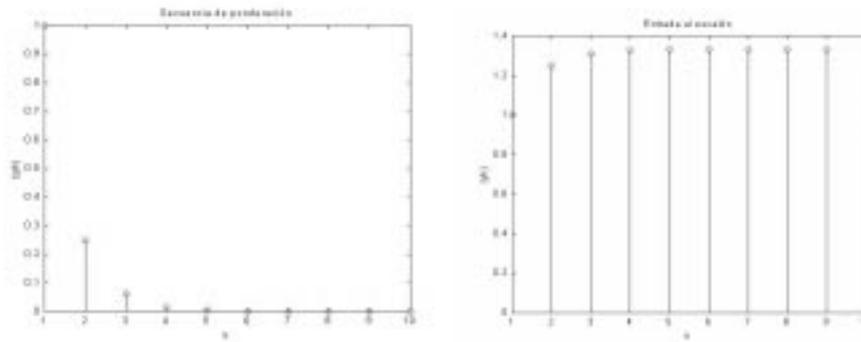
...

**Resolución en MATLAB**

```

>> x = zeros (10,1); x(1) = 0;
>> y = filter( [1;-0.5],[1;-0.75;0.125],x);
>> stem (1:10, y);
>> x = ones(10,1);
>> y = filter( [1;-0.5],[1;-0.75;0.125],x);
>> stem (1:10, y);

```

**12.1.1 Estabilidad de un sistema discreto**

Se dice que un sistema discreto es estable si, ante cualquier secuencia de entrada acotada la secuencia de salida es también acotada.

Para sistemas lineales, la condición de suficiencia de estabilidad debe cumplir que la secuencia de ponderación sea absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty \quad (12.11)$$

**12.1.2 Respuesta en frecuencia de un sistema discreto**

Tal como se estudió en el capítulo 2, al excitar un sistema continuo LTI con señales sinusoidales, este experimento permite desarrollar el análisis en el dominio de la frecuencia para dichos sistemas. De manera paralela, en los sistemas discretos se va a ver como se puede obtener una representación frecuencial de los mismos que sirvan para caracterizarlos.

Antes de entrar en la obtención de la respuesta en frecuencias se requiere analizar las propiedades de las señales exponenciales discretas. Tras su estudio se estará en condiciones de comprender mejor los mecanismos inherentes a la respuesta en frecuencia de los sistemas discretos.

### 12.1.2.1 Propiedades de periodicidad de exponenciales discretas

Así como existen muchas similitudes entre las señales continuas y las discretas, también hay importantes diferencias. Una de éstas concierne a la señal exponencial discreta  $e^{j\omega kT}$ . En señales continuas,  $e^{j\omega t_0}$ , mientras más grande sea la magnitud de  $\omega$ , mayor será la velocidad de oscilación de la señal, en cambio, las señales discretas  $e^{j\omega kT}$  son periódicas cada  $2\pi$ :

$$e^{j(\omega T + 2\pi)k} = e^{j2\pi k} e^{j\omega T k} = e^{j\omega kT} \quad (12. 12)$$

De la ecuación (12. 12) se observa que la exponencial de frecuencia  $\omega T + 2\pi$  es la misma que aquella con  $\omega T$ . Por tanto, al considerar las exponenciales complejas, se tomará en cuenta un intervalo de frecuencia  $2\pi$ . Aunque de acuerdo con la anterior expresión, cualquier rango de longitud  $2\pi$  sería adecuado, en la mayoría de las ocasiones se suele usar el intervalo  $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ .

Debido a la periodicidad que implica la ecuación (12. 12), la señal no tiene un incremento continuo en la velocidad de oscilación. Por el contrario, conforme se incrementa  $\omega$  a partir de 0, se obtiene que la señal oscila más rápido hasta que se alcanza  $\pi/T$ . Conforme aumente la frecuencia a partir de este punto disminuirá la velocidad de oscilación hasta llegar a  $2\pi/T$ , la cual produce la misma secuencia constante que  $\omega = 0$ .

### 12.1.2.2 Respuesta de un sistema discreto ante una exponencial periódica

Para facilitar el estudio se considerará que el periodo de muestreo es 1,  $T = 1$ . Sólo se considerará el carácter de la secuencia, independizándolo de  $T$ . Sea un sistema de secuencia de ponderación  $\{g_k\}$  y considérese que su entrada es excitada por una secuencia exponencial periódica:

$$\{x_k\} = \{e^{jk\omega}\} \quad (12. 13)$$

Cuyos elementos son función de un parámetro de  $\omega$ . La secuencia de salida según la aplicación de la convolución discreta, (12. 9), será:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k e^{j\omega(k-n)} = e^{j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k e^{-j\omega n} \quad (12. 14)$$

El índice de la secuencia es  $k$ , con lo que el sumatorio es un factor independiente de este índice, por tanto:

$$\{y_k\} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\omega} \right) \{e^{j\omega k}\} \tag{12.15}$$

Si se define la función

$$G(\omega) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\omega} \right) \tag{12.16}$$

La expresión queda:

$$\{y_k\} = G(\omega) \{e^{j\omega k}\} \tag{12.17}$$

Esta expresión permite ver como, cuando el sistema es excitado ante la secuencia de una exponencial discreta de frecuencia angular  $\omega$ , (12. 13), los elementos de la secuencia de salida son calculados multiplicando el valor de la entrada por el operador  $G(\omega)$ .

Este operador  $G(\omega)$ , definido por (12. 16), se denomina respuesta en frecuencia del sistema discreto considerado. Es una función del parámetro real  $\omega$  y periódica respecto a él, como puede apreciarse observando (12. 16). Su periodo es  $2\pi$ . La respuesta en frecuencia es así mismo una función compleja, la cual requiere cualquier representación gráfica de la misma en dos curvas, por ejemplo, haciendo uso del diagrama de Bode.

### **Ejemplo 12.3**

Determinar la respuesta frecuencia de un filtro binomial cuya secuencia de ponderación es  $\{1/4, 1/2, 1/4\}$ .

Al aplicar (12. 16) sobre la secuencia de ponderación dada:

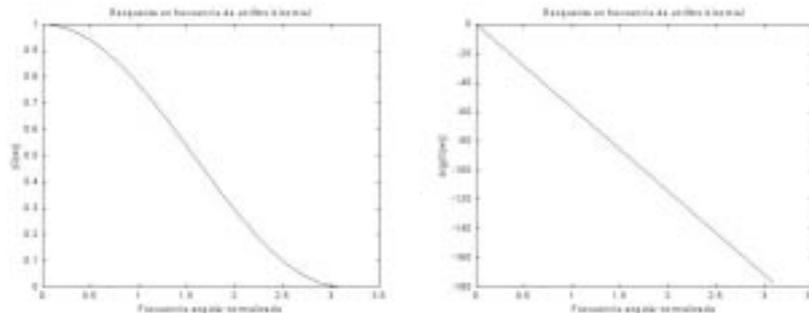
$$G(\omega) = \sum_0^2 g_k e^{-j\omega k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}$$

dando valores de 0 hasta  $\pi$  se conseguirá la respuesta. Aunque  $G(\omega)$  es una función continua, con el propósito de representarla en el diagrama de Bode se hacen, por ejemplo, 64 intervalos entre 0 y  $\pi$ , confeccionándose la tabla siguiente:

| $\omega$ | $G(\omega)$      | $ G(\omega) $ | $\arg(G(\omega))$ |
|----------|------------------|---------------|-------------------|
| 0        | 1                | 1             | 0                 |
| 1/64     | 0.99-j0.049      | 0.999         | -2.81°            |
| 2/64     | 0.99-j0.097      | 0.997         | -5.62°            |
| ...      | ...              | ...           | ...               |
| 63/64    | -0.0006-j0.00003 | 0.0006        | -178°             |

## Resolución en MATLAB

```
>> [G,W] = freqz ([1/4,1/2,1/4], 1,64);
>> plot(W,abs(G));
>> plot(W,angle(G).*(180/pi));
```



Imponiendo las condiciones adecuadas a la función de periódica  $G(\omega)$ , continuidad a trazos con derivadas de variación acotada en los intervalos de continuidad, entonces la expresión (12. 16) es el desarrollo en series de Fourier de  $G(\omega)$ , siendo los elementos de la secuencia de ponderación,  $\{g_k\}$ , los coeficientes de dicho desarrollo. Este hecho permite utilizar la expresión del cálculo de los coeficientes del desarrollo para obtener el valor de la secuencia de ponderación a partir de la respuesta frecuencial. Se tiene así que:

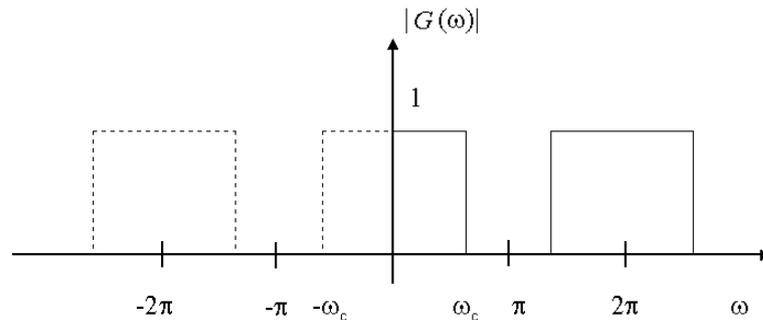
$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (12. 18)$$

Esta expresión (12. 18) permite realizar la operación inversa a la efectuada en (12. 16). Antes, de la secuencia de ponderación,  $\{g_k\}$ , se obtenía la respuesta en frecuencia  $G(\omega)$ , mientras que ahora, con (12. 18), de esta función  $G(\omega)$  se obtiene la secuencia de ponderación.

De igual forma que se vio en el diseño de filtros analógicos, se puede establecer una estrategia de definición del filtro digital mediante la respuesta frecuencial deseada. De manera que se puede plantear la determinación de su secuencia de ponderación a partir del conocimiento de su respuesta frecuencial y mediante el uso de (12. 18) obtener los coeficientes del filtro.

**Ejemplo 12.4**

En la figura 12.4 se representa la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo normalizado, cuya frecuencia de corte es  $\omega_c$  con valor de 2. Determinar la secuencia de ponderación del filtro.



**Figura 12. 4** Respuesta frecuencia de un filtro paso bajo discreto

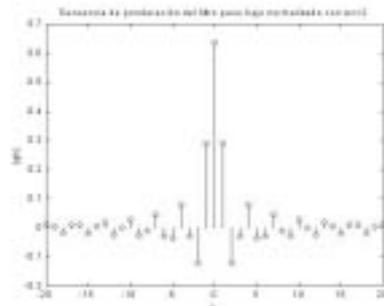
Usando la expresión (12. 18) y extendiéndola entre  $\pm \omega_c$  quedará con:

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1e^{j\omega k} d\omega = \frac{\text{sen}(\omega_c k)}{\pi k}$$

cuyos valores serán:  $\{g_k\} = \{.. -0.03 -0.12 0.29 0.63 0.29 -0.12 -0.03 ..\}$ . Nótese que el filtro es no causal.

**Resolución en MATLAB**

```
>> k=-20:20; wc = 2;
>> gk=sin(wc*k)./(pi*k); g(21) = wc/pi;
>> stem(k,gk);
```



### 12.1.3 Transformada de Fourier de una secuencia

La forma de asociar la secuencia de ponderación  $\{g_k\}$  a la función  $G(\omega)$ , puede ser extendida a cualquier secuencia que cumpla determinadas propiedades. Así se construye lo que se denomina la transformada discreta de Fourier de una secuencia, a ésta se la conoce por las siglas DFT (*Discrete Fourier Transform*). De este modo, dada una secuencia,  $\{x_k\}$ , se define su transformada de Fourier como la función:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k} \tag{12. 19}$$

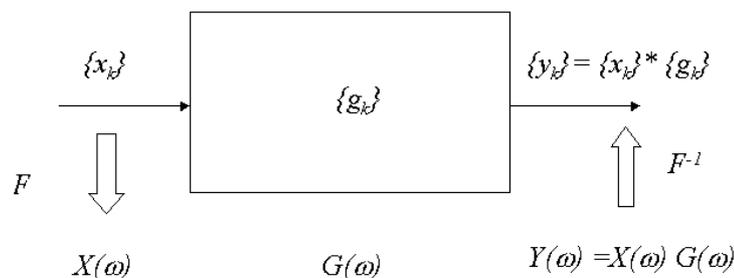
Ésta es igualmente periódica, de ciclo  $2\pi$ , y en las condiciones antes indicadas es un desarrollo en serie de Fourier, lo que permite definir la transformada inversa:

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega k} d\omega \tag{12. 20}$$

La transformada de Fourier de una secuencia es una función compleja, siendo usualmente representada gráficamente por sus curvas de módulo y de argumento. Al igual que ya se vio en los sistemas continuos, la utilidad más importante que se va a hacer de la transformación de Fourier es la que se deriva de la relación existente entre las transformadas de Fourier de las secuencias de entrada y de salida de un sistema LTI y su respuesta en frecuencia, de manera que:

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega) \tag{12. 21}$$

Esta relación permite tratar a los sistemas discretos de una manera similar con lo que se procedía con los continuos; dando un procedimiento para determinar la secuencia de salida a partir de la respuesta en frecuencia, ver figura 12.5. Conocida la respuesta en frecuencia del sistema y la transformada discreta de la secuencia de entrada, se determinará la transformada de la secuencia de salida según (12. 21), y posteriormente se aplicará la transformada inversa, obteniendo la secuencia de la salida.



**Figura 12. 5 Relación fundamental de los sistemas discretos**

**Ejemplo 12.5**

Dado la respuesta en frecuencia de un filtro binomial de orden 2 (ver ejemplo 12.3):

$$G(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}$$

y siendo  $\{x_k\} = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$  la excitación al sistema, calcular la secuencia de salida.

En primer lugar se procederá a calcular la DFT de la secuencia de entrada:

$$X(\omega) = \sum_0^1 x_k e^{-j\omega k} = 1 + e^{-j\omega}$$

Aplicando la relación fundamental visto en (12. 21) se tendrá que:

$$Y(\omega) = (1 + e^{-j\omega}) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega} \right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{3}{4} e^{-j2\omega} + \frac{1}{4} e^{-j3\omega}$$

Por tanto, la secuencia de salida valdrá:

$$\{y_k\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

**Resolución en MATLAB**

```
>> Xw = fft( [1;1], 64);
>> Gw = fft( [1;2;1]/4, 64);
>> Yw = Xw .* Gw;
>> yk = ifft( Yw )
    0.25
    0.75
    0.75
    0.25
    0
    ...
```

### 12.1.4 Transformadas $z$

La variable compleja  $z$  es una transformación no lineal de la variable  $\omega$  de Fourier, con el propósito de que la función de transferencia del sistema discreto obtenida de esta transformación sea racional. Dada una secuencia real  $\{x_k\}$  se define su transformada en  $z$  como una función compleja:

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad z \in C \quad (12.22)$$

En estas expresiones se pueden observar las ventajas de, por una parte, no ser funciones periódicas, y por otra, de ser racionales. Además, es fácil ver que la definición de transformada de Fourier a  $z$ , se consigue haciendo:

$$z = e^{j\omega} \quad (12.23)$$

Así, por ejemplo, la transformada en  $z$  de una secuencia impulso será:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\} \Rightarrow \Delta(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1 \quad (12.24)$$

La transformada de la secuencia en escalón resultará:

$$\{X_k\} = \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (12.25)$$

Otro ejemplo típico, generalización del anterior, es la secuencia exponencial:

$$\{x_k\} = \{1, a, a^2, a^3, \dots\} \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k \quad (12.26)$$

que, por ser una serie geométrica, será convergente para  $|az^{-1}| < 1$ , es decir  $|z| > |a|$ , y su suma valdrá:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (12.27)$$

Por último, la transformada del desplazamiento será:

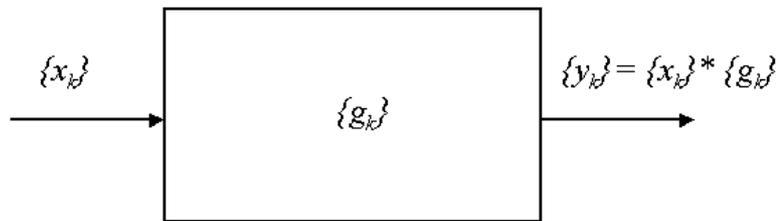
$$Z(x_{k-n}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-n} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-n} z^{-(k-n)} z^{-n} = z^{-n} X(z) \tag{12. 28}$$

**12.1.4.1 Función de transferencia en z**

Dado un sistema discreto definido por su secuencia de ponderación  $\{g_k\}$ , cabe considerar, si existe, su transformación z,  $G(z)$ . Teniendo en cuenta la relación de la convolución entre entrada, ponderación y salida y la relación entre la convolución de dos secuencias y sus transformadas, un sistema como el de la figura 12.5, verifica que:

$$Y(z) = G(z)X(z) \tag{12. 29}$$

El operador  $G(z)$ , transformada z de la secuencia de ponderación del sistema se denomina función de transferencia en z del sistema considerado.



**Figura 12. 6 Condición de relación de transformadas**

Esta función de transferencia del sistema puede ser calculada a partir de la ecuación en diferencias que lo determina. Partiendo de la ecuación que define el comportamiento de un sistema dinámico lineal:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \tag{12. 30}$$

Y calculando ahora la transformada z de las dos partes de la igualdad y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento, se obtiene:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z) \tag{12. 31}$$

Entonces la relación entrada/salida del sistema será:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} X(z) \quad (12.32)$$

Y por tanto la función de transferencia del sistema será:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (12.33)$$

#### 12.1.4.2 Transformada inversa

Se plantea el problema inverso, obtener la secuencia  $\{x_k\}$  a partir de su transformada en  $z$ ,  $X(z)$ . Para el caso de tener  $X(z)$  en forma de función racional, se puede calcular de forma sencilla a partir del teorema de los residuos, estableciendo que:

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum [\text{residuos de } X(z) z^{n-1} \text{ para los polos interiores de } C] \quad (12.34)$$

siendo  $C$  una curva cerrada que envuelve el origen.

En el caso de secuencias con términos únicamente de índice positivo, o únicamente negativo, se puede utilizar el cálculo de los coeficientes mediante el método de la división larga.

Una posibilidad más de cálculo de la transformada inversa es por descomposición en fracciones simples. Si  $X(z)$  es racional, con todos sus polos simples y el grado del numerador inferior al del denominador, entonces:

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - a_i z^{-i}} \quad (12.35)$$

y la transformada inversa será la suma de las transformaciones inversas, que, en el caso de secuencias de índice positivo, será transformada en una suma de secuencias exponenciales y por tanto en este caso:

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i=1}^n A_i a_i^k & \text{para } k \geq 0 \\ x_k &= 0 & \text{para } k < 0 \end{aligned} \quad (12.36)$$

**Ejemplo 12.6**

Un sistema discreto está definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_k = 3x_k - \frac{5}{6}x_{k-1} + \frac{7}{12}y_{k-1} - \frac{1}{12}y_{k-2}$$

calcular la FDT en transformadas en  $z$  y calcular la respuesta del sistema ante una entrada en escalón. Utilícese el método de fracciones simples.

Al aplicar las transformadas en  $z$  sobre la ecuación en diferencias quedará:

$$G(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}} z$$

Para calcular la secuencia de salida se aplicará (12. 29):

$$Y(z) = X(z)G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}$$

Es fácil de obtener los dos polos de  $G(z)$ , uno en  $z = 1/3$  y otro en  $z = 1/4$ . La descomposición en fracciones simples de  $Y(z)$  resultará a :

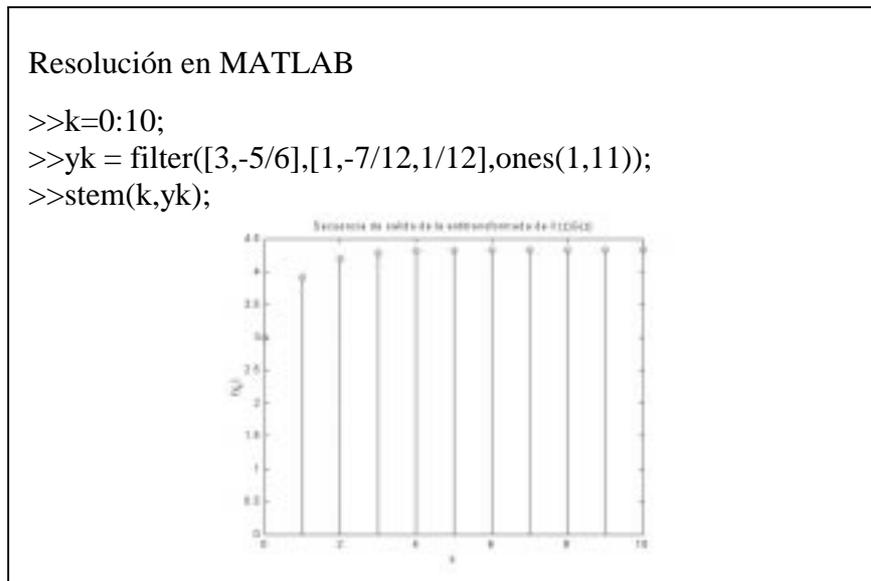
$$Y(z) = -\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{13}{3}}{1 - z^{-1}}$$

La antitransformada será inmediata (ver (12. 35) y (12. 36) ):

$$y_k = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{13}{3}$$

y los valores de la secuencia serán:

$$y_k = \{3 \quad 3.91 \quad 4.2 \quad 4.29 \quad 4.31 \quad 4.32 \quad 4.33\}$$

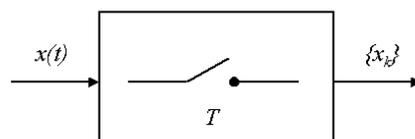


### 12.1.5 Muestreo de señales

La idea de muestras referidas a un sistema basado en un computador digital, se concreta en la toma de valores de una señal continua en sucesivos instantes de tiempo. El muestreo de señales consiste en la construcción de secuencias a partir de señales continuas. Un problema que salta a la vista es la pérdida de información. En este punto se analizará fundamentalmente este problema, dándose las condiciones en las que el proceso de muestreo/reconstrucción, (CAD/CDA), no signifique pérdida de información.

El caso más interesante de muestreo es el periódico, que se caracteriza por que los instantes de toma de las muestras están regularmente espaciados en el tiempo y a éste se le llama periodo de muestreo,  $T$ , y a su inversa, frecuencia de muestreo,  $f_s$ . El elemento que realiza este proceso se denomina “muestreador”, siendo la forma usual de representarlo en los diagrama de bloques la indicada en la figura 12.7. En este bloque la salida está relacionada con la entrada por la expresión:

$$x_k = x(kT) \quad (12.37)$$



**Figura 12. 7 Símbolo del muestreador**

Intuitivamente se puede apreciar que el periodo de muestreo va a jugar un papel fundamental en este proceso. La elección de la frecuencia de muestro es un problema fundamental en el sistema de datos muestrados. Conviene muestrear los datos con la menor frecuencia posible, pero que sea lo suficientemente grande como para poder evitar la pérdida de información y que sea posible reconstruir la función continua a través de las muestras. Justamente, el teorema del muestreo es el que puede ayudar a determinar la frecuencia óptima del convertidor analógico/digital.

Para poder establecer las conclusiones del teorema del muestreo, se va a recurrir al estudio frecuencial. Si una señal continua,  $x(t)$ , con transformada de Fourier continua,  $X_c(\omega)$ , entonces las relaciones señal/transformada serán del tipo:

$$\begin{aligned} X_c(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (12.38)$$

La relación existente entre la señal continua y la secuencia procedente del muestreo estará dada por (12.37), por lo tanto, el ligazón entre la transformada de Fourier continua y la secuencia será del tipo:

$$x_k = x(kT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\omega) e^{j\omega kT} d\omega \quad (12.39)$$

Si la secuencia  $\{x_k\}$  tiene asimismo transformada discreta de Fourier  $X_d(\omega)$ , entonces estará relacionada con su transformada por medio de:

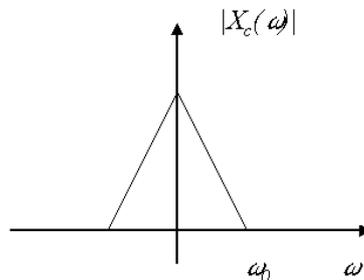
$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_d(\omega) e^{j\omega kT} d\omega \quad (12.40)$$

El problema es estudiar si existe alguna relación entre estas dos transformadas, la de la señal continua  $X_c(\omega)$  y la de la secuencia  $X_d(\omega)$ . Se puede demostrar que la relación existente es:

$$X_d(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right) \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

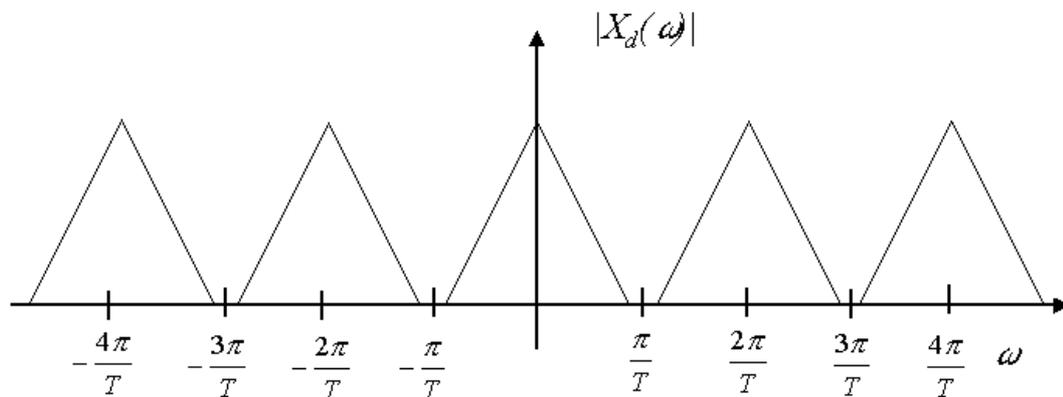
(12. 41)

Por tanto, si la señal continua tiene una transformada de Fourier, cuya curva de módulos, por ejemplo, se representa en la figura 12.8.



**Figura 12. 8 Transformada de Fourier de una señal continua determinada**

Entonces la curva de módulos de la transformada de la secuencia obtenida por muestreo, será periódica  $2\pi/T$  tal como queda reflejado en la figura 12.9



**Figura 12. 9 Transformada discreta de Fourier de la señal continua con un muestreador de periodo T**

Llegando así a las condiciones que se deben de cumplir en el proceso de muestreo para que se pueda realizar sin pérdida de información. Suponiendo que la señal continua  $x(t)$  con transformada de Fourier  $X_c(\omega)$  sea nula a partir de una determinada frecuencia  $\omega_0$ .

$$X_c(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_0 \quad (12. 42)$$

Las señales que cumplen esta condición se denominan de banda limitada. Si una señal de este tipo se muestrea con un periodo que verifique:

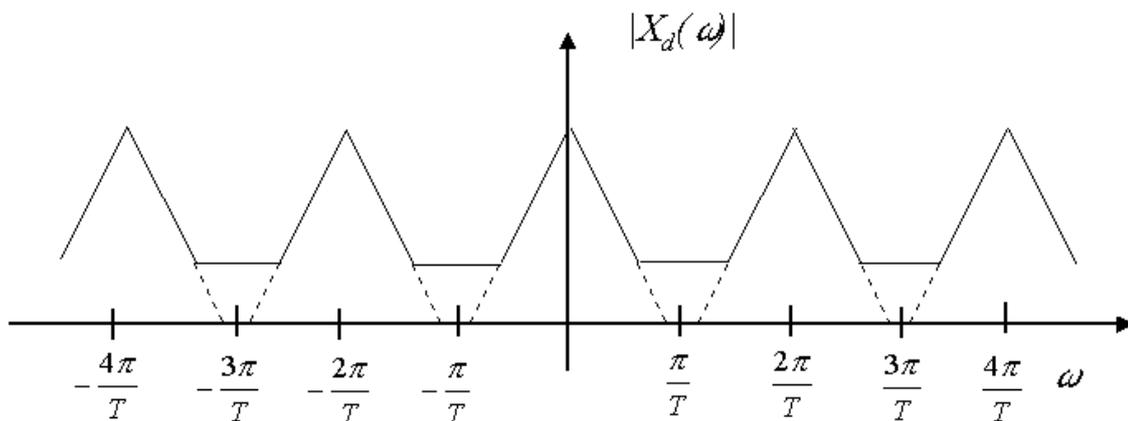
$$\frac{\pi}{T} > \omega_0 \tag{12.43}$$

Es decir:

$$T < \frac{\pi}{\omega_0} \tag{12.44}$$

La transformada de Fourier será, siguiendo el ejemplo, de la forma indicada en la figura 12.9. A  $\pi/T$  se la llama frecuencia angular de Nyquist.

Si por el contrario, el periodo de muestreo es superior a este valor,  $T > \pi/\omega_0$ , la transformada de la secuencia del ejemplo será de la forma indicada en la figura 12.10, donde se puede apreciar que  $X_c(\omega)$  y  $X_d(\omega)$  no coinciden, y por lo tanto el conocimiento de la transformada de la secuencia no permite obtener la transformada de la señal continua. A este fenómeno se llama solapamiento en frecuencias o *aliasing*.



**Figura 12. 10 Efecto de solapamiento en frecuencia o aliasing**

Recuérdese cómo en el capítulo anterior se mencionaba el diseño de filtros *antialiasing* en la propagación de la señal continua al convertidor A/D, con el objeto de tener señales de banda limitada y que cumplan con (12. 42) y (12. 43).

Por acabar con este resumen, hay que citar que además del problema del muestreo, habría de estudiar el efecto tanto de la cuantificación como el de reconstrucción. El primero analiza cómo afecta el problema del convertidor A/D en la transformación de una señal analógica de infinitos valores a otra de valores finitos; mientras el segundo estudia

los problemas de la reconstrucción debido a los convertidores D/A. Éstos serán analizados en el último punto del capítulo.

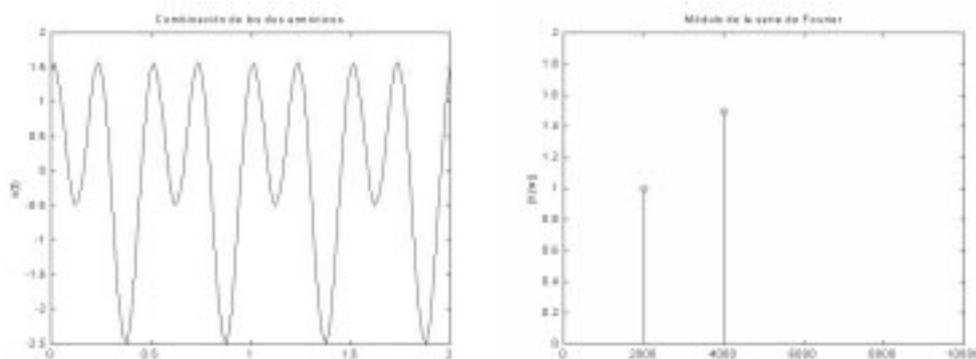
### **Ejemplo 12.7**

Una señal continua está constituido por la siguiente expresión:

$$x(t) = \text{sen}(4000\pi t) + 1.5 \cos(8000\pi t)$$

Determinar la serie de Fourier de la señal. Esta señal posteriormente es muestreada a 10 kHz y a 6 kHz durante 2 ms con desfase nulo, obtener las DFT de las secuencias obtenidas.

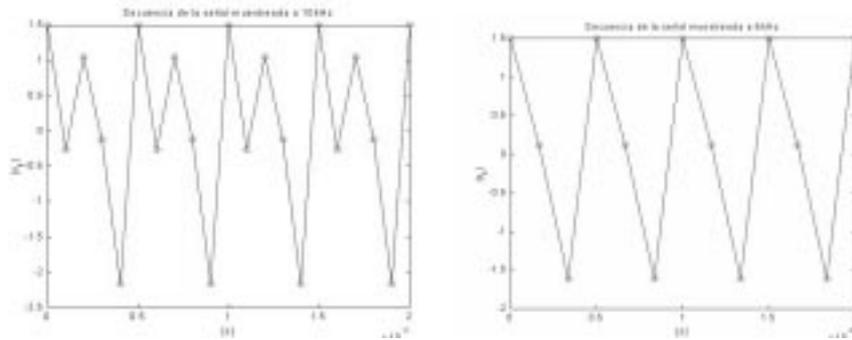
Al ser dos armónicos puros la serie de Fourier continua estará constituida por dos componentes, una a 2 kHz y la otra a 4 kHz, con amplitudes de 1 y 1.5 respectivamente. En la figura adjunta se representa la señal continua durante 2 ms y el módulo de su serie de Fourier.



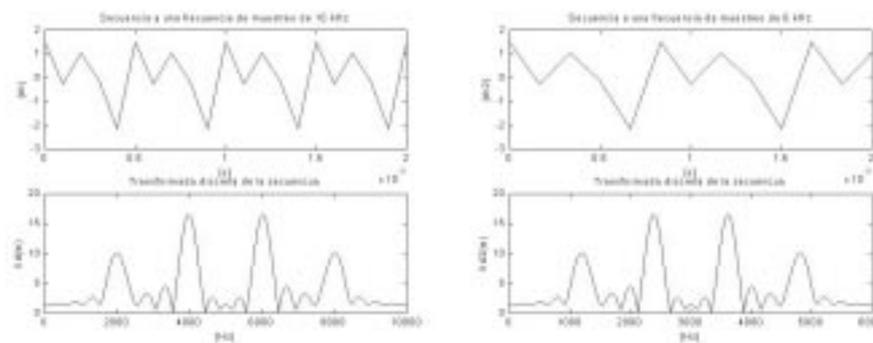
Las muestras obtenidas dependerán de la frecuencia de muestro y sus valores estarán relacionados con las siguientes expresiones:

$$x_k^1 = \text{sen}\left(\frac{4000}{10000}\pi k\right) + 1.5 \cos\left(\frac{8000}{10000}\pi k\right) \quad x_k^2 = \text{sen}\left(\frac{4000}{6000}\pi k\right) + 1.5 \cos\left(\frac{8000}{6000}\pi k\right) \quad k = 0,1,2$$

Los valores de las secuencias  $x_k^1$  corresponden a una frecuencia de 10kHz y  $x_k^2$  de 6kHz. Ambas son representadas en la figura de abajo.



Resalta a la vista la pérdida de información en el segundo muestreo, compare estas gráficas con la forma de la señal continua. Aplicando a estas secuencias la transformada de Fourier, el resultado es el esperado. En el primer caso no hay solapamiento en frecuencias, mientras en el segundo el espectro de la secuencia ha perdido la información de la señal continua.



**Resolución en MATLAB**

```
>>fs1=10000;fs2=6000;
>>i=0:1/fs:2e-3;
>>j=0:1/fs2:2e-3;
>>xk1=sin(2*pi*2000*i)+1.5*cos(2*pi*4000*i);
>>xk2=sin(2*pi*2000*j)+1.5*cos(2*pi*4000*j);
>>figure(1);subplot(2,1,1);
>>plot(0:1/fs:2e-3,xk);
>>subplot(2,1,2);
>>Xw1=fft(xk,2048);
>>plot(1/fs:fs/2048:fs,abs(Xw1));
>>figure(2);subplot(2,1,1);
>>plot(0:1/fs2:2e-3,xk(1:13));
>>subplot(2,1,2);
>>Xw2=fft(xk2,2048);
>>plot(1/fs2:fs2/2048:fs2,abs(Xw));
```

Para ejercitarse y experimentar con el teorema del muestreo se propone variar la frecuencia de muestreo de ficheros WAV. Estos registros se caracterizan por ser un formato digital de sonidos. El proyecto que se propone es abrir un fichero de audio y tomar sólo una muestra de cada  $n$  valores leídos. Posteriormente, el fichero será reproducido. Este experimento no sólo mostrará a través de su audición la pérdida de calidad sino también el espectro de la señal con el formato original y el submuestreado.

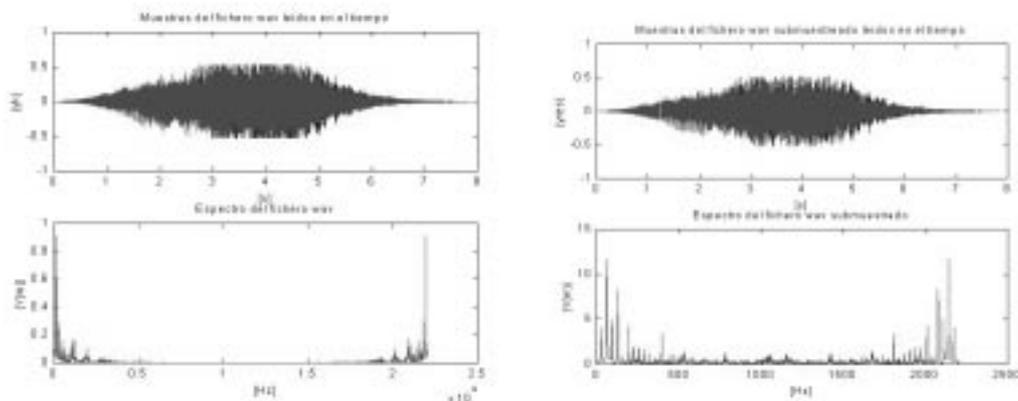
### Proyecto 12.1

Hacer una aplicación que permita abrir ficheros tipo WAV y que elija una única muestra de cada  $n$ . Reproducir ambos sonidos, la del fichero original y la del fichero creado. Igualmente mostrar la evolución temporal de las secuencias y sus espectros.

Este proyecto se ha resuelto con MATLAB v5.3 y con el toolbox de *Signal Processing*. Se ha creado una función que tiene como argumentos el camino del fichero WAV y el valor de  $n$ . La función devuelve el path al fichero de salida creado, el cuál se ha generado del submuestro del fichero fuente.

#### Resolución en MATLAB

```
>>FichEntr = 'c:\tmp\The Microsoft Sound.wav';
>>n=10;
>>FichSal = proy_12_1(FichEntr,n);
```



## 12.2 Filtros digitales

Los filtros digitales son una clase de sistemas discretos LTI utilizados para extraer características desde el dominio de la frecuencia sobre señales muestreadas. El diseño de los filtros requiere de las siguientes etapas: (1) especificaciones de las propiedades deseadas del sistema, (2) aproximaciones de las especificaciones mediante un sistema causal en tiempo discreto y (3) la realización del sistema. El primero es altamente dependiente de la aplicación y el tercero de la tecnología utilizada para la implementación. En términos prácticos, el filtro deseado se realiza utilizando cómputo digital y se emplea para una señal que proviene de tiempo continuo seguido por una conversión analógico-digital.

Cuando se utiliza un filtro digital para realizar el tratamiento de señales en tiempo continuo, empleando una configuración como la indicada en la Figura 12. 11, tanto las especificaciones del filtro en tiempo discreto como las que se indica en tiempo continuo se suelen dar en el dominio de la frecuencia. Como se demostró en la sección anterior, si se usa un sistema LTI y si la entrada es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta para evitar el solapamiento, el sistema completo se comporta como un sistema LTI continuo en el tiempo cuya respuesta en frecuencia es:

$$G_c(\omega) = \begin{cases} G_d(\omega) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (12.45)$$



**Figura 12. 11. Arquitectura del filtro digital**

En estos casos es inmediato convertir las especificaciones del filtro efectivo de tiempo continuo,  $G_c(\omega)$ , en especificaciones del filtro en tiempo discreto,  $G_d(\omega)$ . La arquitectura presentada parece evidente que es más compleja y costosa que el uso de células Sallen-Key para implementar filtros analógicos. Sin embargo, los filtros digitales exhiben abrumadoras ventajas respecto a los sistemas de tiempo continuo, una enumeración de los beneficios puede enmarcarse dentro de la comparación entre estos dos tipos de filtros:

- Respuesta dinámica: El ancho de banda del filtro digital está limitado por la frecuencia de muestreo, mientras que en los filtros analógicos con componentes activos suelen estar restringidos por los amplificadores operacionales.
- Intervalo dinámico: En los filtros analógicos aparecen derivas que limitan por abajo el rango y se saturan con la alimentación. En cambio en los filtros digitales es fijado por el número de bits que representa la secuencia, y el límite inferior por el ruido de cuantificación y por los errores de redondeo.
- Conmutabilidad: Si los parámetros de un filtro se conservan en registros, los contenidos de dichos registros pueden ser modificados a voluntad. De esta forma, estos filtros se pueden transformar, pudiéndose multiplexar en el tiempo para procesar varias señales de entradas a la vez.
- Adaptabilidad: Un filtro digital puede ser implementado en soporte físico (*hardware*) o mediante un programa de ordenador (*software*).
- Ausencia de problemas de componentes: Los parámetros de los filtros se representan por medio de números binarios y no derivan con el tiempo. Al no haber componentes, no hay problemas de tolerancia o deriva de componentes, y ningún otro problema asociado con un comportamiento no ideal de resistencias, condensadores, bobinas o amplificadores. Tampoco existen problemas de impedancia de entrada ni salida, ni efectos de adaptación de impedancias entre etapas.
- Complejidad: la potencia de cálculo de los computadores actuales y de los algoritmos desarrollados, permiten implementar prestaciones casi imposibles de diseñar con filtros analógicos.

### 12.2.1 Clases de filtros digitales

Una distinción fundamental en los sistemas discretos dinámicos lineales e invariantes, y en particular en los filtros digitales, es la duración de la respuesta ante el impulso. Se habla de sistemas de respuesta de pulso finito o no recursivo (*FIR*, *Finite Impulse Response*) y de sistemas de respuesta infinita o recursivo (*IIR*, *Infinite Impulse Response*). Partiendo de la ecuación en diferencias que modela el comportamiento dinámico de estos sistemas:

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (12.46)$$

en el caso de tener todos los coeficientes  $a_i$  iguales a cero se tendrá un filtro FIR, con lo que quedará la ecuación reducida a:

$$y_k = b_0x_k + b_2x_{k-1} + \dots + b_mx_{k-m} \tag{12. 47}$$

siendo m el orden del filtro y tendrá una función de transferencia en z del tipo:

$$G(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m} \tag{12. 48}$$

Obsérvese que en estos tipos de filtros cada valor de la secuencia de salida sólo dependerá de un número finito de valores de la secuencia de entrada. Además también se desprende la carencia de polos en la función de transferencia. Por contra, las expresiones de los filtros recursivos corresponden a:

$$y_k = a_1y_{k-1} + a_2y_{k-2} + \dots + a_ny_{k-n} + b_0x_k + b_2x_{k-1} + \dots + b_mx_{k-m} \tag{12. 49}$$

Y su función de transferencia en z a:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} \tag{12. 50}$$

En estos casos, la secuencia de salida depende tanto de la entrada como de la salida. De estas ecuaciones se deducen las siguientes propiedades. Primera, la secuencia de ponderación es infinita para los filtros IIR, aun teniendo un número finito de coeficientes. Mientras la respuesta al impulso de un filtro no recursivo es siempre finita e igual al orden del filtro. En segundo lugar, los filtros FIR prácticos son siempre estables, esto es, la secuencia de salida tiene todos sus valores acotados. No es el caso de los filtros recursivos, su estabilidad depende de la función de transferencia, por lo que habrá de utilizar alguno de los procedimientos algebraicos, como el de Jury, para analizar su estabilidad. Tercera, cualquier filtro recursivo puede ser reemplazado por otro no recursivo con infinitos coeficientes, sus valores vendrán dados por la secuencia de ponderación del IIR. La conclusión inversa no se cumple.

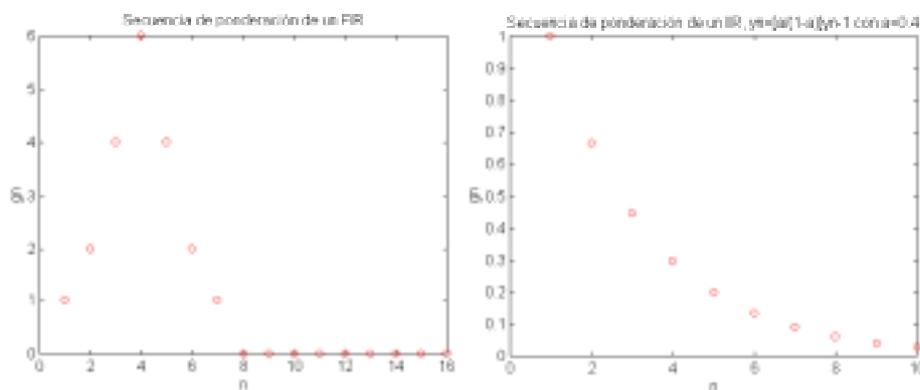
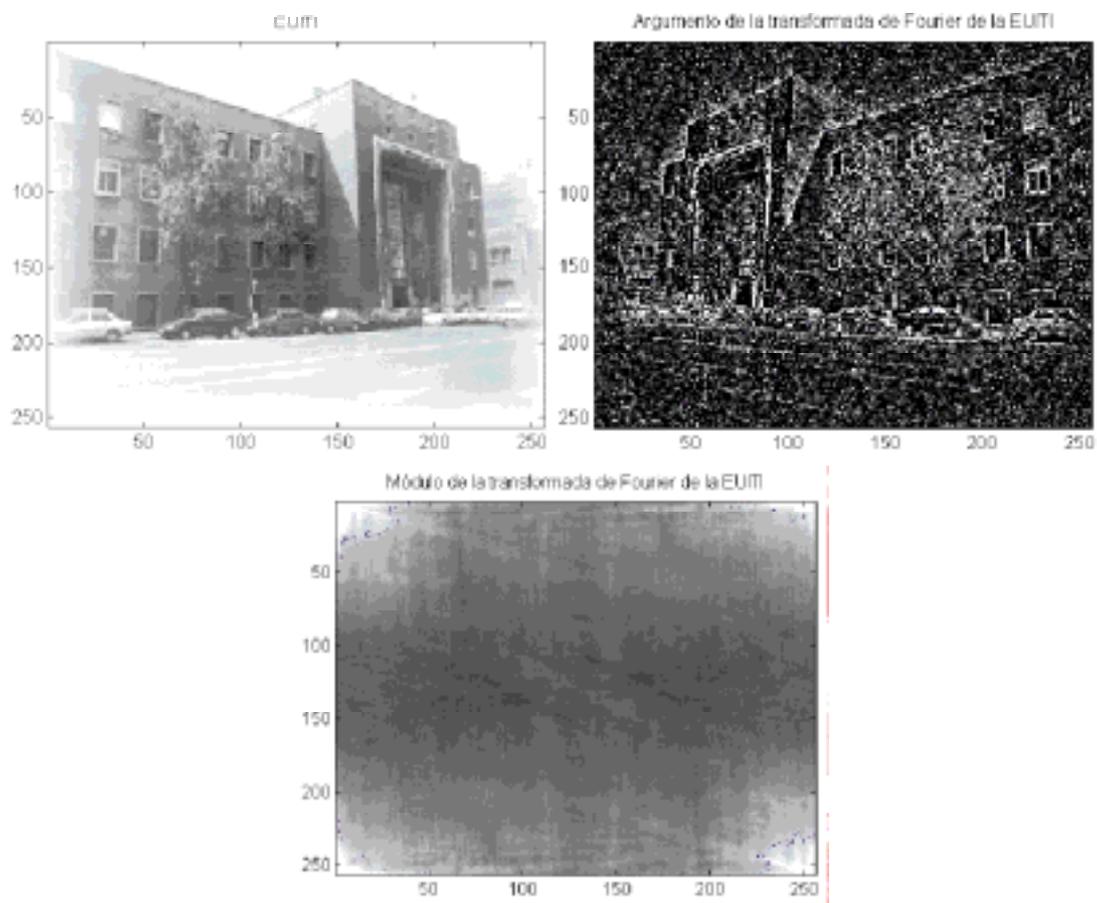


Figura 12. 12. a) Respuesta ante el impulso de un FIR b) Respuesta ante el impulso de un IIR

### 12.2.2 Filtros de fase lineal o no dispersivos

Existen muchas aplicaciones del procesamiento de señales en las cuales las relaciones de fase son importantes y no deben ser perturbadas por el filtrado. Por ello se deben diseñar filtros de fase lineal. Éstos tienen como característica la introducción de un desfase en la respuesta en frecuencia de la secuencia de salida que sea proporcional a la frecuencia. A estos filtros se les llaman de fase lineal o no dispersivos.

Para justificar la importancia de los filtros de fase lineal, se propone realizar el siguiente experimento. Se toma una imagen digital, por ejemplo el pórtico de entrada de la Escuela, recuérdese que ésta es una secuencia bidimensional, y se calcula su transformada de Fourier discreta 2D. Del resultado se hace separar el módulo y el argumento de la transformación, para proceder por separado a la aplicación de la transformada inversa.

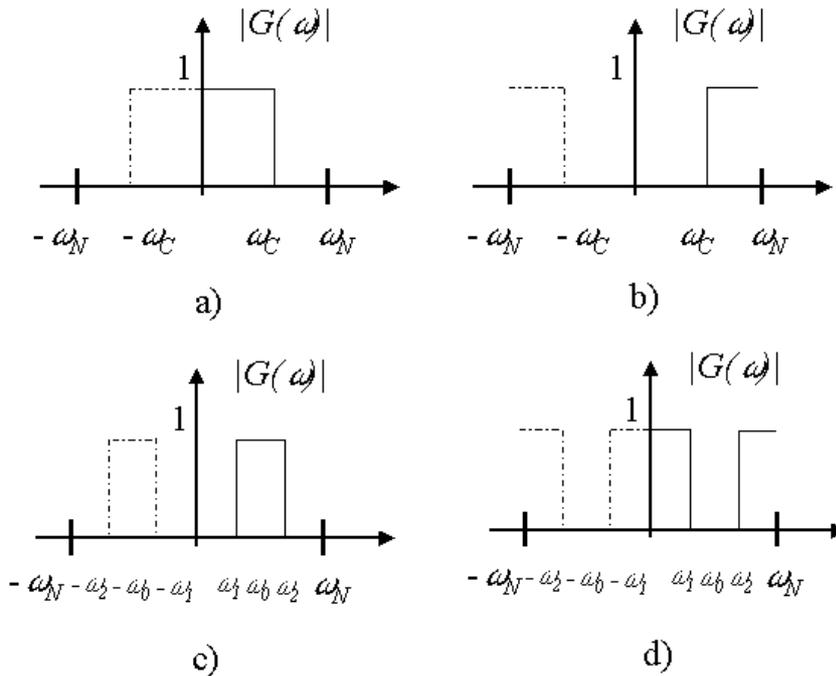


**Figura 12. 13 Imagen de la EUITIM 256x256 píxeles b) Transformada inversa del argumento de la transformada c) Transformada inversa del módulo de la transformada**

Resultan obvias las conclusiones del experimento, el argumento lleva casi toda la información de la secuencia. Por lo tanto, si se desea transmitir sólo algunas de las propiedades de la secuencia sin distorsionarla habrá de diseñar filtros que no perturben la fase de la señal muestreada. Justificando de esta manera el énfasis puesto en los filtros de desfase nulo o lineal.

### 12.2.3 Causalidad y sus implicaciones

Los filtros digitales suelen ser caracterizados en términos de rangos de frecuencia, tanto de la banda pasante como de la supresora. Los cuatro tipos básicos de filtros supresores son ilustrados en la figura 12.14. Al ser éstos sistemas discretos, sus respuestas frecuenciales son periódicas con la frecuencia de Nyquist,  $\omega_N$ , por lo que sólo se considerará el intervalo  $[-\omega_N, \omega_N]$ .



**Figura 12. 14 Especificaciones de los filtros digitales a) Paso bajo b) Paso alto c) Pasa banda d) Rechazo de banda**

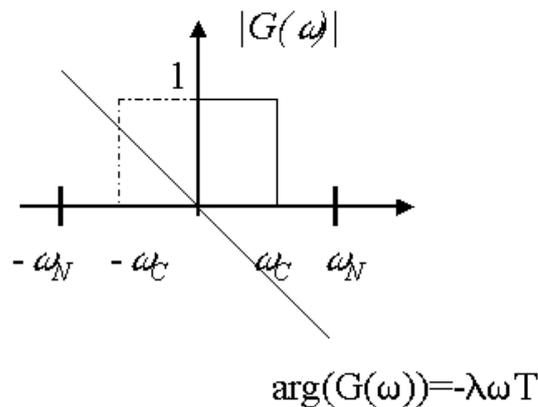
En las figuras sólo se muestran la respuestas en frecuencias del módulo sin que aparezca el argumento. Sin embargo, como se acaba de comentarse (ver párrafo 12.2.2), es deseable que en la banda pasante no se introduzcan desfases o que sean de fase lineal. Con tal propósito se parte de la realización de un filtro con variación lineal del argumento respecto a la frecuencia, esto es, se tendrá que el desfase introducido es del tipo  $\varphi = -\lambda\omega T$ , donde  $\lambda$  es una constante. El caso particular de desfase nulo será  $\lambda$  igual a cero. Luego si ante una señal de entrada periódica con las condiciones de Fourier, ésta se separa en forma de sumas de sinusoides del tipo  $sen(\omega kT)$ , cada una de ellas producirá una respuesta del tipo:

$$|G(\omega)sen[\omega(kT - \lambda)] \tag{12. 51}$$

Por lo tanto, cada armónico de la señal de entrada estará desfasada  $-\lambda\omega$  veces, de forma que se obtendrá en la salida una versión no distorsionada de la señal de entrada en el

rango de frecuencias dependientes de la banda pasante. A razón de lo expuesto, el diseño de un filtro paso bajo deberá de cumplir con las condiciones mostradas en la figura 12.15. El módulo será constante en la banda pasante y nulo en la supresora, mientras el desfase tendrá que ser lineal con la frecuencia. Un posible modelo matemático que caracterice este tipo de respuesta correspondería a:

$$G(\omega) = \begin{cases} e^{-j\lambda\omega T} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases} \quad (12.52)$$



**Figura 12. 15 Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo**

de manera que si se aplica la transformada inversa de Fourier, la secuencia de ponderación del filtro quedará como:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{2\pi/T} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} G(\omega) e^{jk\omega T} d\omega = \frac{1}{2\pi/T} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j(k-\lambda)\omega T} d\omega \\ &= \frac{T}{\pi} \frac{\text{sen}[(k-\lambda)\omega_c T]}{(k-\lambda)T} = \frac{\omega_c}{\omega_N} \frac{\text{sen}[(k-\lambda)\omega_c T]}{(k-\lambda)\omega_c T} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (12.53)$$

Desprendiéndose que el filtro paso bajo es no causal y por lo tanto no realizable físicamente.

**Ejemplo 12.8**

Obtener la secuencia de ponderación de un filtro paso bajo de desfase nulo y que la banda pasante sea un octavo de la frecuencia de muestreo.

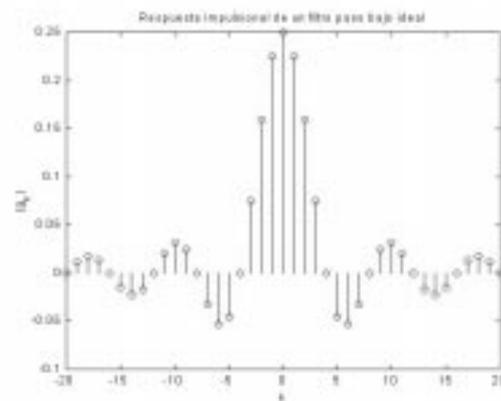
Los datos del ejercicio supone que  $\lambda$  sea nulo y que la frecuencia de corte sea un cuarto de la frecuencia de Nyquist,  $\omega_c = \omega_N / 4$ . Al aplicar (12. 53) se obtendrá la secuencia de ponderación de este filtro digital:

$$g_k = \frac{1}{4} \frac{\text{sen}(k\pi/4)}{(k\pi/4)} \quad (12. 54)$$

cuyos valores serán:

$$\{g_k\} = \{\dots 0.07 \quad -0.16 \quad 0.22 \quad 0.25 \quad 0.22 \quad 0.16 \quad 0.07 \dots\}$$

La respuesta al impulso de la secuencia está representada en la figura 12.16. Dos aspectos destacan. Primero, el filtro no es causal, ya que para  $k < 0$  los valores de  $\{g_k\}$  no son nulos, por lo que no pueden ser implementados en tiempo real. En segundo lugar, la respuesta al impulso no es finita, esto significa que la respuesta del filtro tardaría infinito tiempo en calcularlo, incluso asumiendo que pudiera tener infinitos coeficientes. De estos aspectos, se concluye que la realización de un filtro ideal es imposible de realizar físicamente; habiendo de aceptar criterios de compromiso para el diseño. Por ejemplo, si se trunca la respuesta al impulso se tendrá un filtro digital realizable físicamente, pero éste sólo será una aproximación al comportamiento ideal.



**Figura 12. 16** Respuesta impulsional con desfase nulo

**Resolución en MATLAB**

```
>>k=-20:20; w_cn=1/4;
>>disp('Secuencia de ponderación del filtro paso bajo anticausal');
>>gk=w_cn*sinc(k*w_cn)
>>stem(k,gk);
```

### Ejemplo 12.9

Diseñar un filtro paso bajo FIR con una frecuencia de muestreo de 1.6 kHz, frecuencia de corte de 200 Hz y con  $\lambda$  igual a 5, sabiendo que el orden del filtro es 10.

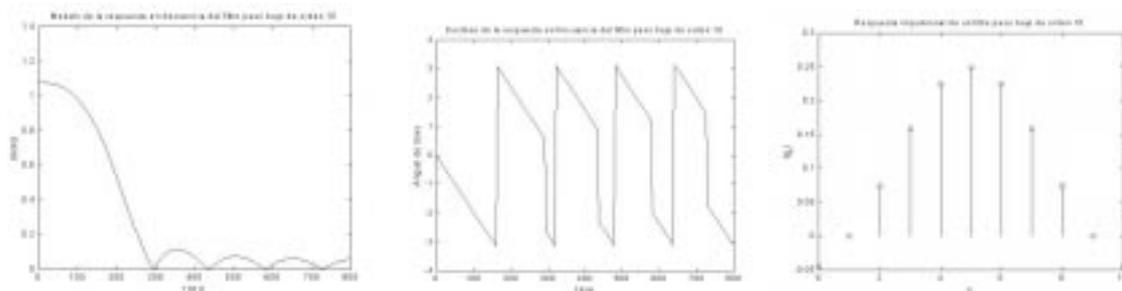
De aplicar (12. 53) con las condiciones dadas en el ejercicio da los siguientes coeficientes:

$$\{g_k\} = \{-0.045 \ -0.001 \ 0.073 \ 0.157 \ 0.224 \ 0.250 \ 0.224 \ 0.157 \ 0.073 \ -0.001 \ -0.045\}$$

y según (12. 56) su respuesta en frecuencia será:

$$G(\omega) = e^{-j5\omega T} \left\{ g_5 + 2 \sum_{i=0}^4 g_i \cos[(5-i)\omega T] \right\} \quad (12. 55)$$

Cuya respuesta en frecuencia y al impulso se encuentran representado en la figura 12.17.



**Figura 12. 17 a) Respuesta en frecuencia b) Respuesta impulsional**

#### Resolución en MATLAB

```
>>n=10;fs=1.6e3;fc=200;
>>w_cn= fc/(fs/2);
>>disp('Secuencia de ponderación del filtro paso bajo causal');
>>b=firl(n,w_cn,boxcar(n+1))
>>stem(0:n,b);
>>[H,F]=freqz(b,1,2048,fs);
>>subplot(2,1,1);
>>plot(F,abs(H));
>>subplot(2,1,2);
>>plot(F,angle(H));
```

Del ejemplo se muestra cómo el truncamiento del orden del filtro hace dejar de comportarse como filtro ideal, apareciendo tanto rizado en la banda pasante como en la supresora. A este efecto se le denomina fenómeno de Gibbs. También se desprende de la figura el carácter lineal del desfase.

Aunque esta discusión se limita a la realización de un filtro paso bajo, las conclusiones se mantienen en general para todos los filtros selectivos. En resumen, ninguno de los filtros mostrados previamente en la Figura 12.14 son causales y, por tanto, son físicamente irrealizable.

Una pregunta que aflora naturalmente en este punto es la siguiente: ¿ Cuáles son las condiciones suficientes y necesarias que debe satisfacer la respuesta frecuencial para que el filtro sea causal ?. La respuesta a esta pregunta viene dada por el teorema de Paley-Wiener. Del teorema se extraen varias conclusiones:

- Los filtros causales tienen un módulo,  $|G(\omega)|$  que puede ser cero en algunas frecuencias, pero no puede ser cero sobre cualquier banda finita de frecuencias.
- La amplitud de la banda pasante no puede ser constante en un rango finito de frecuencias y la transición de la banda de paso a la de rechazo no puede ser infinitamente abrupta ( esto es una consecuencia del fenómeno de Gibbs, causado por el truncamiento de  $g_k$  para lograr causalidad ).
- La parte real e imaginaria de  $G(\omega)$  no son independientes y están relacionadas por la transformada de Hilbert discreta. En consecuencia, la magnitud y la fase de  $G(\omega)$  no se pueden elegir arbitrariamente.

Aunque las características de respuesta en frecuencia que poseen los filtros ideales son deseables, no son absolutamente necesarias en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Si se relajan estas condiciones es posible realizar filtros causales que se aproximan a los ideales con tanta precisión como se desee. En particular, no es necesario insistir en que la ganancia en la banda pasante sea constante. Se puede tolerar un pequeño rizado e igualmente se puede tolerar un valor pequeño distinto de cero en la banda de rechazo. La transición de la banda de paso a la supresora no será nula y existirá una banda de transición. En cualquier problema de diseño de filtros selectivos se podrá especificar: (1) el rizado de la banda pasante,  $\delta_1$ , (2) el rizado tolerable de la banda de rechazo,  $\delta_2$ , (3) la frecuencia de la banda de paso,  $\omega_B$ , y (4), la frecuencia de la banda supresora,  $\omega_S$ . Basándose en estas especificaciones se seleccionarán los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  de la ecuación en diferencias del sistema LTI, de la manera que mejor se aproxime a la respuesta en frecuencia deseada. El grado con el que  $G(\omega)$  se aproxime a las especificaciones depende del criterio usado en la determinación de los coeficientes así como del orden del polinomio de la FDT del sistema.

## 12.3 Diseño de filtros no recursivos (FIR)

Los filtros no recursivos tienen ventajas muy interesantes que les hacen ser ampliamente utilizados en múltiples aplicaciones. La característica más destacable es su facilidad de diseño para conseguir una respuesta en frecuencias de fase lineal. Los FIR son por su propia constitución estables, no habiendo problemas en su diseño o en su fase de implementación. Aunque el diseño de los FIR requiera de una gran cantidad de operaciones de sumas y multiplicaciones, tanto su estructura de programación como su realización en soporte físico resulta fácil y escalable.

En la práctica, los filtros FIR se emplean en problemas de filtrado donde hay un requisito de fase lineal dentro de la banda de paso del filtro. Si no existe este requisito se pueden emplear tanto filtros FIR como IIR. Sin embargo, como regla general, un filtro IIR tiene menos rizado y el corte es más abrupto que un FIR con el mismo grado de polinomio. Por esta razón, si se puede tolerar alguna distorsión de fase o ésta no es importante, se prefiere un IIR, principalmente porque su implementación involucra menos parámetros, requiere menos memoria y tiene menor complejidad computacional.

Básicamente hay dos métodos para el diseño de filtros no recursivos. El primero trata de definir la respuesta en frecuencia del filtro para luego determinar los coeficientes del filtro mediante la transformada inversa de Fourier; mientras que la segunda estrategia utiliza métodos de optimización capaz de ir modificando los coeficientes del filtro para aproximarlos a la respuesta en frecuencia deseada. Sólo se va a tratar el primer método.

### 12.3.1 Filtros FIR simétricos y antisimétricos

Un filtro FIR tiene fase lineal si su respuesta impulsional satisface la condición de simetría o antisimetría de sus coeficientes. Para su demostración se partirá de la respuesta en frecuencia de un filtro no recursivo que tenga un orden  $m$ . Además, para facilitar su comprensión se va a suponer que el filtro sea de orden par, definiéndose que  $m$  sea igual a  $2N$ , por tanto, la respuesta en frecuencia de los filtros de orden par quedará como:

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{2N} g_k e^{-jk\omega T} = e^{-jN\omega T} \{ g_0 e^{jN\omega T} + g_1 e^{j(N-1)\omega T} + \dots + g_N + \dots + g_{2N} e^{-jN\omega T} \} \quad (12.56)$$

Si se imponen las condiciones de simetría o antisimetría:

$$\begin{aligned} g_0 &= \pm g_{2N} \\ g_1 &= \pm g_{2N-1} \\ &\vdots \\ g_{N-1} &= \pm g_{N+1} \end{aligned} \quad (12.57)$$

El signo + indicará simetría en los coeficientes y el – para la antisimetría. Suponiendo primero que existe simetría y agrupando alrededor de los coeficientes  $e^{\pm j(N-i)\omega T}$ , la respuesta en frecuencia del filtro quedará como:

$$G(\omega) = e^{-jN\omega T} \left\{ g_N + 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \cos[(N-i)\omega T] \right\} \quad (12. 58)$$

observándose que el contenido de entre las llaves es real y que el desfase introducido por el filtro es  $-N\omega T$ , siendo por tanto el argumento lineal con la frecuencia. De igual manera se actuará con los coeficientes antisimétricos, sin embargo, hay que destacar que si el filtro es de orden par el punto central de la antisimetría será nulo. Es fácil demostrar que la respuesta en frecuencia del un filtro FIR de orden par con una respuesta impulsional antisimétrica se puede expresar como:

$$G(\omega) = e^{-jN\omega T + \pi/2} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \text{sen}[(N-i)\omega T] \right\} \quad (12. 59)$$

La característica de fase del filtro será  $\frac{\pi}{2} - (N-1)\omega T$ . Igualmente las expresiones de las respuestas en frecuencias para filtros de orden impar con simetría o antisimetría son sencillas de obtener, proponiendo al lector que lleve a las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} G(\omega) &= e^{-j\frac{m}{2}\omega T} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{((m+1)/2)-1} g_i \cos\left[\left(\frac{m}{2}-i\right)\omega T\right] \right\} && \text{simetría de orden impar} \\ G(\omega) &= e^{-j\frac{m}{2}\omega T + \pi/2} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{((m+1)/2)-1} g_i \text{sen}\left[\left(\frac{m}{2}-i\right)\omega T\right] \right\} && \text{antisimetría de orden impar} \end{aligned} \quad (12. 60)$$

Estas formulas de respuesta en frecuencia generales se pueden usar para diseñar filtros FIR de fase lineal con respuestas impulsionales simétricas y antisimétricas. Nótese que para un filtro simétrico, el número de coeficientes del filtro que especifican la respuesta es  $m/2$  cuando  $m$  es par o  $((m+1)/2)-1$  si  $m$  es impar. Por otro lado, si la respuesta impulsional es antisimétrica y el orden es par, el punto central de la antisimetría será nulo y habrá  $m/2$  coeficientes que lo definan, en caso de ser orden impar, cada coeficiente tiene un término emparejado de signo opuesto y estará definido por  $((m+1)/2)-1$ .

La elección de una respuesta impulsional simétrica o antisimétrica depende de la aplicación. Por ejemplo, si el filtro tiene antisimetría,  $G(\omega)$  tanto para bajas frecuencias como para frecuencias alrededor de la frecuencia de Nyquist tiene valores próximos a cero, por lo que no es posible utilizarlos ni para filtros paso bajos ni paso alto. Por otro lado, la condición de simetría produce un filtro FIR de fase lineal con una respuesta distinta de cero para bajas frecuencias. En resumen, el problema de diseño de filtros FIR es simplemente el del determinar  $m+1$  coeficientes, a partir de las especificaciones en las frecuencias deseadas.

### 12.3.2 Diseño de filtros FIR de fase lineal usando ventanas

Hasta este momento se ha observado que la causalidad del filtro requiere del truncamiento de la respuesta impulsional, y la característica más destacable de los filtros FIR (fase lineal), hizo introducir la condición de simetría o antisimetría en los coeficientes del FIR. Sin embargo, aunque el orden del filtro sea elevado y se impongan condiciones de simetría, los rizados tanto en la banda pasante como en la supresora se mantienen. Así, por ejemplo, en la figura 12.18 se muestra un filtro paso bajo de orden 51 con una frecuencia de corte normalizada de 0.4, evidenciando que aun siendo elevado el orden del filtro el efecto Gibbs se mantiene. Este fenómeno no desaparece con la longitud del filtro.

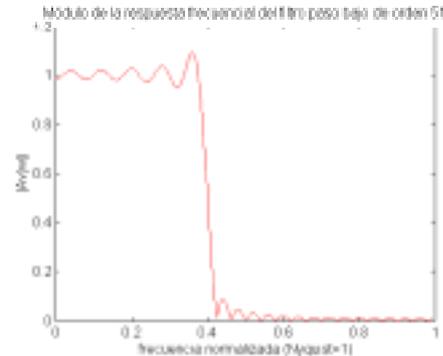


Figura 12. 18 Filtro paso bajo de orden 51

La causalidad del filtro obliga a definir un orden de filtro finito, de forma que una manera genérica de expresarla sería que la secuencia de ponderación del filtro ideal se multiplicase por una “ventana” de longitud finita, es decir,

$$g'_k = g_k w_k \quad (12. 61)$$

siendo  $g_k$  definida como (12. 53) y  $w_k$  una función ventana, donde el truncamiento más simple estaría definido por:

$$w_k = \begin{cases} 1 & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (12. 62)$$

tal que  $m$  marca el número de la secuencia de truncamiento y el orden del filtro. Además, a esta ventana y a otras que se verán más adelante se las impone la condición de simetría para hacer cumplir la característica de fase lineal.

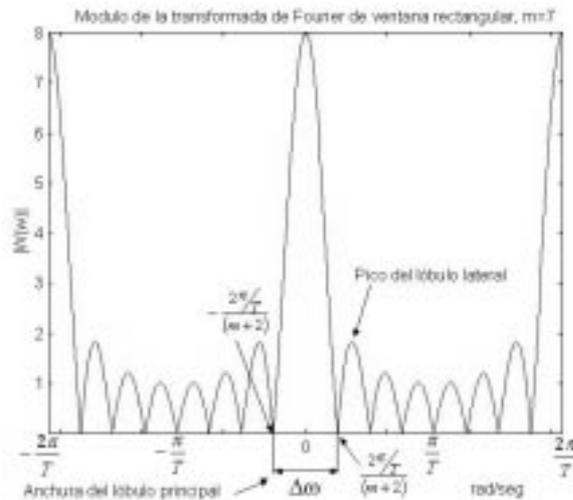
Es instructivo considerar el efecto de la función ventana en la respuesta en frecuencia deseada. Recuérdese que la multiplicación de la función ventana con  $\{g_k\}$  es equivalente a la convolución de  $G(\omega)$  con  $W(\omega)$ , donde  $W(\omega)$  es la transformada de Fourier de la función ventana. Así, la convolución de  $G(\omega)$  con  $W(\omega)$  produce la respuesta en frecuencia del filtro FIR (truncado). Esto es,

$$G'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G(v)W(\omega - v)dv \tag{12. 63}$$

La transformada de Fourier de una ventana rectangular es:

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^m 1e^{-j\omega kT} = \frac{1 - e^{-j\omega T(m+1)}}{1 - e^{-j\omega T}} = e^{-j\omega Tm/2} \frac{\text{sen}(\omega T(m+1)/2)}{\text{sen}(\omega T/2)} \tag{12. 64}$$

La respuesta en magnitud de la función ventana se ilustra en la figura 12.19 para  $m=7$ . Nótese que  $W(\omega)$  para la ventana rectangular tiene fase lineal, evidente por el carácter de simetría de sus coeficientes.

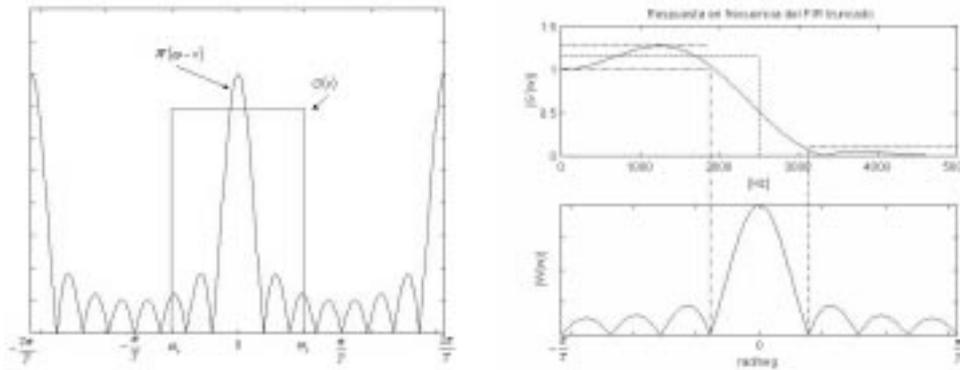


**Figura 12. 19. Módulo de la transformada de Fourier de una ventana rectangular**

A medida que el orden del filtro crece, el ancho del lóbulo principal decrece. Esta característica se relaciona con la región de transición entre la banda pasante y la supresora, esto es, cuando se aumente el orden del filtro, el corte entre estas bandas será más abrupto. Para el caso de ventanas rectangulares los lóbulos laterales son altos y de hecho, a medida que  $m$  crece las amplitudes del pico del lóbulo principal y de los lóbulos secundarios crecen de forma que el área encerrada en cada lóbulo permanece constante mientras que su anchura decrece con  $m$ . Como el área del lóbulo permanece constante al crecer  $m$ , las oscilaciones ocurren más rápidamente, pero no disminuye su amplitud al aumentar  $m$ .

Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del filtro FIR truncado,  $G'(\omega)$ , será la convolución de la respuesta deseada,  $G(\omega)$ , y de la transformada de Fourier de la ventana rectangular, tal cual fue recogido en (12. 63). Suponiendo el diseño de un filtro paso bajo

con una frecuencia de corte  $\omega_c$ , la figura 12.20 muestra  $G(\omega)$  y  $W(\omega)$ , como se usaría en la ecuación referenciada.



**Figura 12. 20. a) Convolución entre la respuesta ideal y la ventana rectangular. b) Resultado de la convolución.**

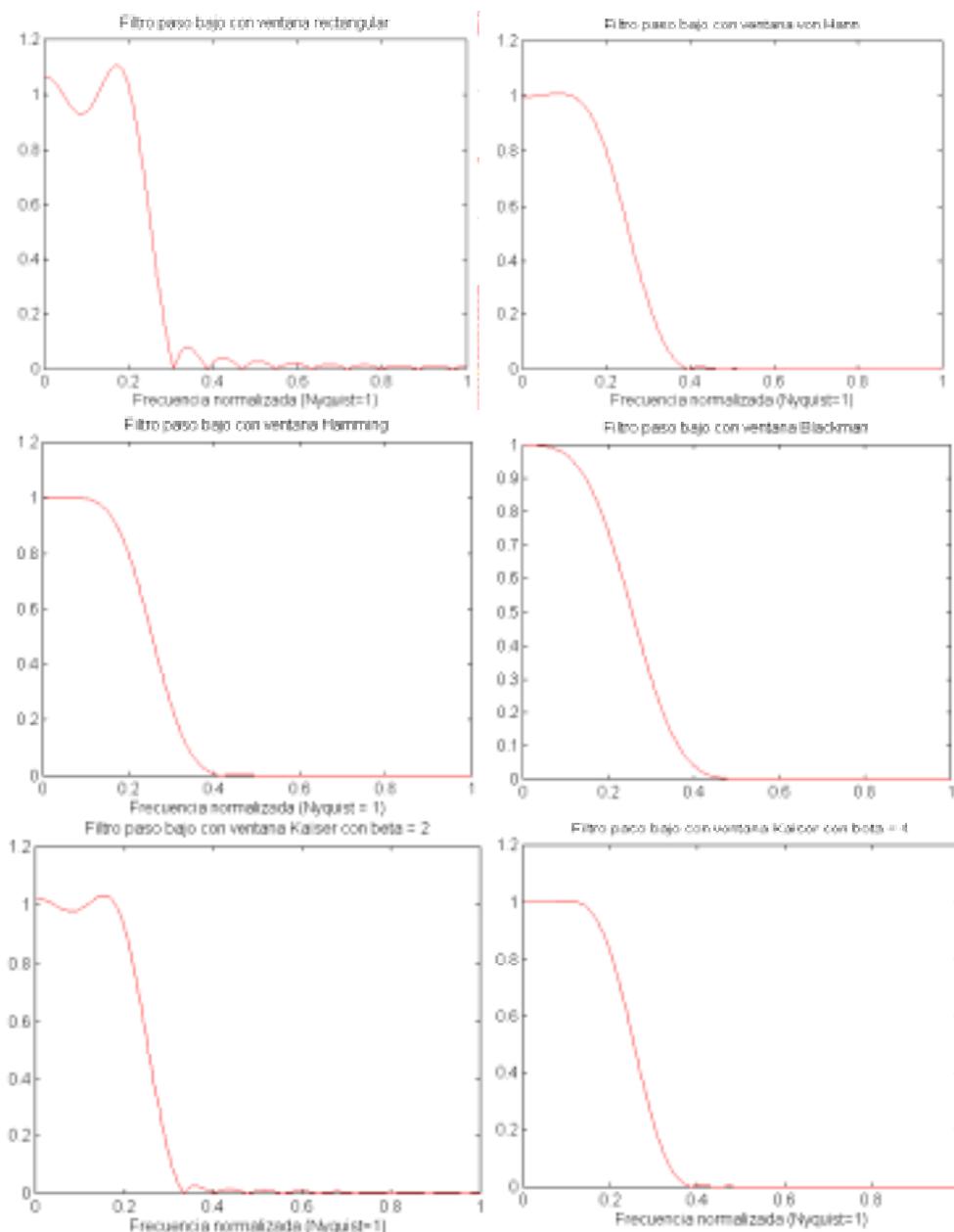
El resultado no hace más que confirmar las conclusiones del teorema de Paley-Wiener (ver figura 12.20b). Se puede constatar la existencia de rizado tanto en la banda pasante como en la supresora y, además, no es posible el corte abrupto entre ambas banda. Sin embargo, la aplicación de ciertas funciones ventanas permiten suavizar estos inconvenientes no deseado. Para evitarlo existen varios tipos de funciones ventanas, así por ejemplo se tiene:

$$w_k = \begin{cases} \alpha - (1 - \alpha)\cos(2\pi k / m) & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (12. 65)$$

Donde para  $\alpha = 0.5$  es llamada la ventana de *von Hann* y cuando  $\alpha = 0.54$  es la denominada ventana de *Hamming*. La ventana de *Blackman* está definida por:

$$w_n = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(\pi k / m) + 0.08\cos(2\pi k / N) & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (12. 66)$$

Para ilustrar las características de la respuesta en frecuencia de las ventanas de von Hann, Hamming y Blackman se muestran en la figura 12.21 un ejemplo. Se trata de comparar las respuestas frecuenciales de un filtro FIR truncado por una ventana rectangular y los resultados de aplicar estas funciones ventanas. El orden del filtro es 21 y la frecuencia de corte es un cuarto de la frecuencia de Nyquist.



**Figura 12. 21 a) Respuesta con ventana rectangular b) con ventana von Hann c) ventana de Hamming d) ventana de Blackman e) Kaiser  $\beta=2$  f) Kaiser  $\beta=4$**

Todas estas funciones ventana tienen lóbulos laterales significativamente más bajos comparados con la ventana rectangular. Sin embargo, para el mismo valor del orden del filtro, el ancho del lóbulo principal es también más amplio para estas ventanas comparado con la ventana rectangular. Consecuentemente, estas funciones ventana proporcionan mayor suavizado a través de la operación de convolución en el dominio de la frecuencia, y como resultado la región de transición en la respuesta del filtro FIR es más amplia. Para

reducir el ancho de esta región de transición se tendrá que elevar el valor de  $m$ , lo cual resulta un filtro más caro. La tabla 12.1 resumen estas importantes características del dominio de la frecuencia de las distintas funciones ventana.

| Tipo de ventana | Ancho de transición del lóbulo principal | Pico de lóbulos laterales |
|-----------------|--|---------------------------|
| Rectangular     | $4\pi/(m+1)$                             | -13dB                     |
| von Hann        | $8\pi/(m+1)$                             | -32dB                     |
| Hamming         | $8\pi/(m+1)$                             | -43dB                     |
| Blackman        | $12\pi/(m+1)$                            | -58dB                     |

**Tabla 12. 1 Características frecuenciales más importantes de algunas funciones ventana**

### 12.3.2.1 El método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser.

El compromiso entre la anchura del lóbulo principal y el área de los lóbulos laterales se puede cuantificar buscando la función de ventana que esté concentrada de forma máxima alrededor de  $\omega = 0$  en el dominio de la frecuencia. Este asunto se ha considerado en profundidad durante largo tiempo. Entre 1966 a 1974, Kaiser descubrió que se puede formar una venta cuasi-óptima utilizando la función de Bessel modificada de primera especie. La ventana de Kaiser se define como:

$$w_k = \begin{cases} I_0 \left( \beta \left( 1 - \left( \frac{n - \alpha}{\alpha} \right)^2 \right)^{1/2} \right) / I_0(\beta) & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (12. 67)$$

donde  $\alpha = (m+1)/2$  e  $I_0(\ )$  es la función de Bessel de primera especie, definida por la serie:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^k \right)^2 \quad (12. 68)$$

A diferencia de las otras ventanas, la ventana de Kaiser tiene dos parámetros: el orden del filtro,  $m$ , y el parámetro de forma  $\beta$ . Variando  $m$  y  $\beta$  se puede ajustar la amplitud de los lóbulos laterales y el ancho del lóbulo principal. Se demuestra que si se aumenta el orden del filtro y  $\beta$  se mantiene constante, la banda de transición disminuye manteniéndose la amplitud de los lóbulos laterales. De hecho, Kaiser obtuvo, mediante amplias experimentaciones numéricas, una pareja de fórmulas que permiten al diseñador de filtros

predecir los valores del orden del filtro y del factor de formas necesarias para cumplir unas determinadas especificaciones en frecuencia. Además, también demostró que, sobre un intervalo suficientemente amplio de condiciones, el nivel de rizado,  $\delta$  (ver figura 12.20), está determinado por la selección de  $\beta$ . Supuesto fijo el nivel de rizado, la frecuencia de la banda del filtro paso bajo se define como la máxima frecuencia para la que  $|G'(\omega_B)| = 1 - \delta_1$ . La frecuencia de la banda supresora,  $\omega_S$ , se define como la mínima frecuencia para la que  $|G'(\omega_S)| \leq \delta_2$ . Debido al carácter simétrico de los coeficientes resulta que  $\delta_1 = \delta_2$ . De otro lado, la anchura normalizada de la región de transición es

$$\Delta\omega_n = \frac{\omega_S - \omega_B}{2\omega_N} \quad (12.69)$$

para la aproximación del filtro paso bajo. Definiendo

$$A_{\min} = -20 \log_{10} \delta_2 \quad (12.70)$$

Kaiser determinó empíricamente que el valor de  $\beta$  necesario para cumplir un valor específico de  $A_{\min}$  está dado por:

$$\beta \begin{cases} 0.1102(A_{\min} - 8.7) & A_{\min} > 50 \\ 0.5842(A_{\min} - 21)^{0.4} + 0.07886(A_{\min} - 21) & 21 \leq A_{\min} \leq 50 \\ 0 & A_{\min} < 21 \end{cases} \quad (12.71)$$

Para el caso de que  $\beta$  sea cero, la ventana es igual a la rectangular. Además, Kaiser descubrió que para cumplir unos valores específicos de  $A_{\min}$ ,  $\Delta\omega_n$  y  $m$  debe satisfacer:

$$m = \frac{A_{\min} - 8}{2.285\Delta\omega_n} \quad (12.72)$$

la expresión permite predecir el valor de  $m$  con una precisión de  $\pm 2$  para un amplio margen de valores de  $A_{\min}$  e  $\Delta\omega_n$ . Por tanto, con estas fórmulas, el método de diseño basado en la ventana de Kaiser casi no requiere iteraciones de prueba y error.

Con el uso de las fórmulas de diseño de la ventana de Kaiser, es inmediato diseñar un filtro FIR paso bajo que cumpla unas determinadas especificaciones. El procedimiento de diseño sigue los siguientes pasos:

- Se establece la respuesta de frecuencia deseada para un filtro paso bajo. Esto significa seleccionar los valores deseados de  $\omega_B$ ,  $\omega_S$  y el rizado tolerable.

- Hay que determinar la frecuencia de corte del filtro paso bajo ideal. Debido a la simetría de la aproximación en la discontinuidad de  $G(\omega)$ , sería:

$$\omega_c = \frac{\omega_c + \omega_s}{2} \quad (12.73)$$

- Si se elige una ventana de Kaiser se podrán calcular los parámetros del orden del filtro y del factor de forma  $\beta$ , utilizando los valores de  $A_{min}$  e  $\Delta\omega_n$  y las expresiones (12.71) y (12.72). En caso contrario, esto es, si se utiliza ventanas de von Hann, Hamming, Blackman o rectangular habrá de ir iterando con el orden del filtro, pues no se puede determinar con ninguna expresión empírica la longitud del filtro. Como semilla para el orden del filtro se podría utilizar la ecuación de Kaiser para el orden del filtro (12.73).
- Una vez definida el orden del filtro se determinará la secuencia de ponderación del filtro ideal por medio de:

$$g_k = \frac{\omega_c \operatorname{sen}[(k - \lambda)\omega_c T]}{\omega_N (k - \lambda)\omega_c T} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12.74)$$

- La respuesta al impulso del filtro se calcula multiplicando la secuencia del filtro ideal por la secuencia de la función ventana,

$$g'_k = g_k w_k \quad (12.75)$$

- Por ultimo, si el filtro selectivo no es paso bajo se realiza la transformación al tipo de filtro deseado, haciendo uso de las indicaciones del cuadro 12.1 (ver siguiente sección).

### 12.3.2.2 Transformaciones sobre los filtros

Aunque el método expuesto se ha centrado en los filtros paso bajo, también es posible diseñar los otros tipos de filtros selectivos, esto es, paso alto, pasa banda y rechazo de banda. Para ello se podría utilizar el mismo procedimiento que se vio anteriormente, pero en vez de aplicar la banda pasante a las bajas frecuencias se puede realizar para cualquier otra forma de banda pasante. Sin embargo, y de igual manera que ya se vio en el anterior capítulo sobre filtros analógicos, aquí también existen transformaciones de paso bajo a cualquiera de los otros tipos.

Así por ejemplo, si  $g_{k(PB)}$  son los coeficientes de la respuesta al impulso de un filtro paso bajo con una frecuencia de corte  $(\omega_C)_{PB}$  y una frecuencia de Nyquist,  $\omega_N$ , entonces:

$$g_{k(PA)} = (-1)^k g_{k(PB)} \tag{12.76}$$

siendo éstos los coeficientes de la respuesta al impulso del filtro paso alto con una frecuencia de corte de:

$$(\omega_c)_{PA} = (\omega_N) - (\omega_c)_{PB} \tag{12.77}$$

La demostración de la validez de esta transformación es bastante sencilla y es como sigue:

$$g_{k(PA)} = \frac{1}{2\pi/T} \int_{(\omega_c)_{PA}}^{\omega_N} e^{jk\omega T} d\omega + \frac{1}{2\pi/T} \int_{-\omega_N}^{-(\omega_c)_{PA}} e^{jk\omega T} d\omega \tag{12.78}$$

Haciendo el cambio de variables en la primera integral de  $\omega = \omega' + \omega_N$  y en la segunda de  $\omega = \omega' - \omega_N$

$$\begin{aligned} g_{k(PA)} &= \frac{1}{2\pi/T} \int_{(\omega_c)_{PA} - \omega_N}^0 e^{jk(\omega' + \omega_N)T} d\omega' + \frac{1}{2\pi/T} \int_0^{\omega_N - (\omega_c)_{PA}} e^{jk(\omega' - \omega_N)T} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi/T} (\cos[k\pi]) \int_{-(\omega_c)_{PB}}^{(\omega_c)_{PB}} e^{jk\omega'T} d\omega' = (-1)^k g_{k(PB)} \end{aligned} \tag{12.79}$$

Por tanto, el diseño del filtro paso alto con frecuencia de corte  $(\omega_c)_{PA}$  pasa por un diseño inicial de filtro paso bajo con frecuencia de corte  $(\omega_N) - (\omega_c)_{PA}$  y multiplicando el resultado por  $(-1)^n$ .

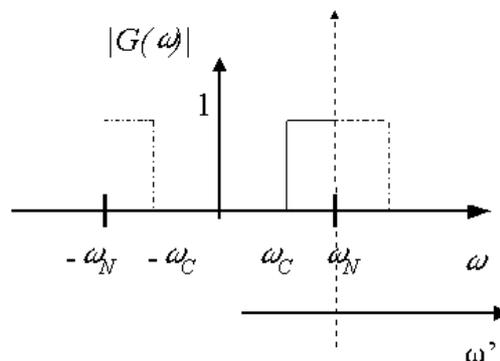


Figura 12. 22 Cambio de variables de ω a ω'

Las relaciones entre paso bajo con pasa banda y rechazo de banda quedan recogidas en el cuadro resumen 12.1.

| Conversión         | Transformación  | Parámetros   |
|--------------------|---|--|
| A paso alto        | $g_{k(PA)} = (-1)^n g_{k(PB)}$  | $(\omega_c)_{PA} = (\omega_N) - (\omega_c)_{PB}$   |
| A paso banda       | $g_{k(PBANDA)} = (2 \cos(k\omega_0 T))g_{k(PB)}$  | $\omega_0 = \text{frecuencia central}$<br>$\omega_1 = \omega_0 - (\omega_c)_{PB}$<br>$\omega_2 = \omega_0 + (\omega_c)_{PB}$ |
| A rechazo de banda | $g_{k(RB)} = 1 - g_{0(PBANDA)}$<br>$g_{k(RB)} = -g_{k(PBANDA)} \quad n = +1, +2, \dots$ |  |

**Cuadro 12. 1 Transformaciones de paso bajo a otro tipo de filtro**

### Ejemplo 12.10

Diseñar un filtro paso bajo con ventana de Kaiser si la frecuencia de banda es de 6kHz y 9kHz la frecuencia supresora, sabiendo que se admite un rizado en la banda pasante de 0.1 y en la supresora es de 0.01. La frecuencia de Nyquist es de 15kHz.

Como el método de diseño de la ventana implica que los rizados deben ser idénticos se elige el más restrictivo, esto es, se toma  $\delta_2 = 0.01$ . Hay que determinar la frecuencia de corte del filtro paso bajo ideal, que debido a la simetría de la aproximación en la discontinuidad de la respuesta en frecuencia del ideal, sería:

$$\omega_c = 2\pi \left( \frac{6000 + 9000}{2} \right) = 2\pi 7500 \quad (12.80)$$

Para determinar los parámetros de la ventana de Kaiser habrá de calcular

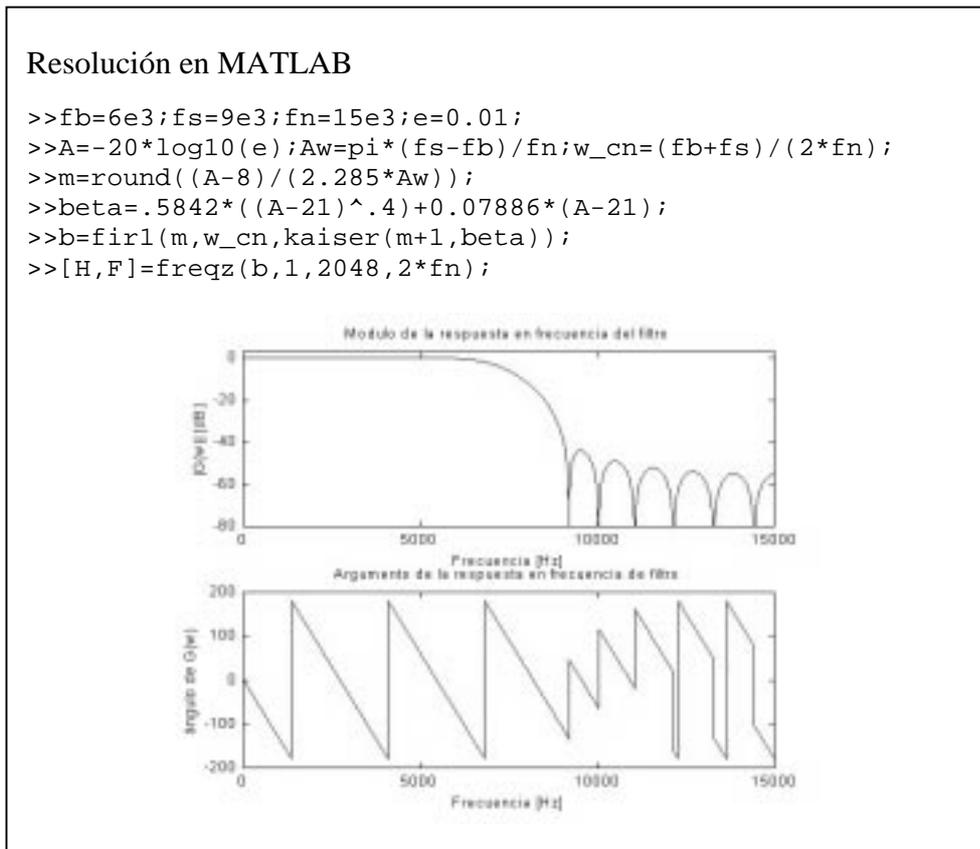
$$\Delta\omega_n = 2\pi \left( \frac{9000 - 6000}{2 \times 15000} \right) = 0.2\pi \quad A_{\min} = -20 \log_{10}(\delta_2) = 40dB \quad (12.81)$$

Al sustituir estos dos valores en las ecuaciones del orden del filtro y del factor de forma resulta,

$$m = 22 \quad \beta = 3.4 \tag{12.82}$$

Los coeficientes de la ventana de Kaiser estarán determinados y la secuencia de ponderación del filtro paso bajo ideal responderán a la ecuación:

$$g_k = 0.5 \frac{\text{sen}[(k-11)0.5\pi]}{(k-11)0.5\pi} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



**Ejemplo 12.11**

Construir un filtro paso banda con ventana de von Hann de orden 8 cuyas frecuencias de bandan sea de 10 kHz y 20 kHz, sabiendo que la frecuencia de muestreo es de 100 kHz.

Atendiendo al cuadro habrá de determinar cual es la frecuencia de corte del filtro paso bajo ideal. Por la simetría de la transformación la frecuencia central será de 15 kHz y la frecuencia del filtro paso bajo ideal de 5 kHz. La ventana de von Hann para m igual a 8 será,

$$w_k = \{0.095 \quad 0.345 \quad 0.654 \quad 0.904 \quad 1 \quad 0.904 \quad 0.654 \quad 0.345 \quad 0.09\}$$

La secuencia de ponderación del filtro paso bajo ideal para una frecuencia de corte de 5kHz estará dada por:

$$g_k = 0.1 \frac{\text{sen}[(k-4)0.5\pi]}{(k-4)0.5\pi} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ y } \pm 4.$$

cuyos valores serán:

$$g_k = \{0.075 \quad 0.085 \quad 0.093 \quad 0.098 \quad 0.1 \quad 0.098 \quad 0.093 \quad 0.085 \quad 0.075\}$$

Al multiplicarlos por la ventana resultarán:

$$g'_{k(PB)} = \{0.0072 \quad 0.029 \quad 0.061 \quad 0.089 \quad 0.1 \quad 0.089 \quad 0.061 \quad 0.029 \quad 0.0072\}$$

Ya se dispone del filtro paso bajo, por tanto, se procederá a convertirlo en pasa banda según la transformación que se vio en el cuadro:

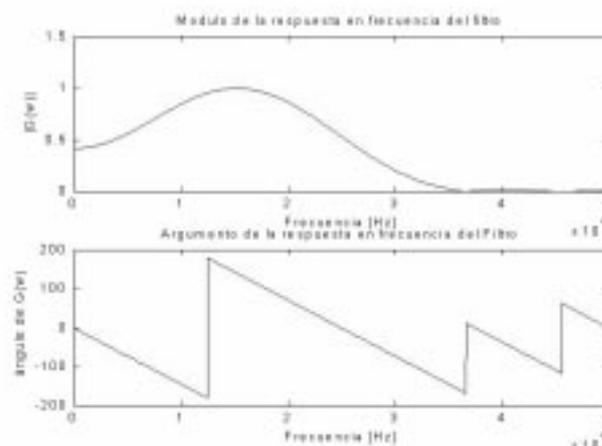
$$g_{k(PBANDA)} = \left( 2 \cos \left( k 2\pi \frac{15}{100} \right) \right) g'_{k(PB)}$$

resultando la secuencia de ponderación deseada:

$$g'_{k(PBANDA)} = \{0.0145 \quad 0.035 \quad -0.038 \quad -0.169 \quad -0.161 \quad 0 \quad 0.099 \quad 0.056 \quad 0.0045\}$$

#### Resolución en MATLAB

```
>>m=8; f1=1e4; f2=2e4; fn=5e4;
>>b=fir1(m, [f1/fn f2/fn], hanning(m+1));
>>[H, F]=freqz(b, 1, 2048, 2*fn);
```



## 12.4 Diseño de filtros recursivos (IIR)

---

El método tradicional de diseño de filtros IIR en tiempo discreto se basa en la transformación de un filtro analógico en un filtro digital que cumpla las especificaciones preestablecidas. Esta solución es razonable por varios motivos:

- El arte del diseño de filtros IIR analógicos está muy avanzado, y como se pueden obtener resultados útiles, es ventajoso utilizar los procedimientos de diseño que ya se han desarrollado para los filtros en tiempo continuo.
- Muchos métodos útiles de diseño de filtros IIR en tiempo continuo dan como resultado fórmulas de diseño simples en forma cerrada. Por tanto, los métodos de filtros IIR digitales que se basan en esas fórmulas estándar de diseño de filtros IIR continuos son fáciles de realizar.

El hecho de que los diseños de filtros en tiempo continuo se puedan trasladar a diseños de filtros digitales no quiere decir que tengan la misma respuesta frecuencial. Generalmente sucede que el filtro analógico empleado para la aproximación tiene una respuesta en frecuencia diferente de la respuesta en frecuencia efectiva del filtro digital. Esta circunstancia indica que al diseñar un filtro digital se parte de un conjunto de especificaciones en tiempo discreto; mientras las características del filtro en tiempo continuo se obtienen de la transformación. Al realizar esta conversión se desea que la respuesta en frecuencia del filtro digital preserve las propiedades esenciales del filtro analógico. Esto implica concretamente que se espera que el eje imaginario del plano  $s$  se transforme en la circunferencia unidad del plano  $z$ . Una segunda condición es que un filtro estable analógico se debe de transformar en un filtro estable de tiempo discreto. Esto significa que si el filtro continuo tiene los polos en el semiplano negativos de  $s$ , el filtro digital tiene que tener los polos dentro del círculo unidad del plano  $z$ . Estas restricciones son básicas para las técnicas de diseño de los filtros digitales IIR.

### 12.4.1 Diseño de filtros IIR mediante transformadas bilineales

Los filtros recursivos pueden ser diseñados por varios métodos, siendo el más común el basado en las transformaciones bilineales. Este procedimiento requiere del conocimiento de la función de transferencia en el tiempo continuo del filtro a diseñar. Los coeficientes del filtro en el dominio  $s$  son transformados a uno equivalente en el dominio  $z$ . Los coeficientes de la discretización formarán el filtro IIR.

El origen de este proceder viene dado por la cantidad de experiencia acumulada en el diseño de filtros analógicos. Por tanto, todos los polinomios, tablas, métodos analíticos y gráficos para definir el filtro analógico, empleados en el anterior capítulo, serán usados en el diseño de los filtros recursivos.

Si bien hay varios métodos de discretización, la mayoría de ellos tienen problemas de solapamientos en frecuencias, por realizar una relación entre el plano  $s$  a  $z$  de varias regiones del dominio  $s$  a una sola  $z$ . Sin embargo, la transformación bilineal consigue una transformación unívoca entre el dominio  $s$  a  $z$ . Esta transformación se define como:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (12. 83)$$

Y su relación inversa es del tipo:

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s} \quad (12. 84)$$

y sustituyendo  $s = \sigma + j\omega_a$  en la anterior expresión quedará:

$$z = \frac{1 + \sigma(T/2) + j\omega_a(T/2)}{1 - \sigma(T/2) - j\omega_a(T/2)} \quad (12. 85)$$

Si  $\sigma < 0$ , entonces, de la (12. 85) se deduce que  $|z| < 1$  para cualquier valor de  $\omega_a$ . Del mismo modo, si  $\sigma > 0$ ,  $|z| > 1$  para todo valor de  $\omega_a$ . Es decir, si los polos del filtro analógico están en el semiplano izquierdo de  $s$ , su imagen en el plano  $z$  está en el interior de la circunferencia unidad. Por tanto, los filtros en tiempo continuo causales y estables se transforman en filtros en tiempo discreto causales y estables. Seguidamente, para demostrar que el eje  $j\omega_a$  se transforma en la circunferencia unidad se procede a sustituir  $s = j\omega_a$  en la ecuación (12. 85), con lo que se obtiene:

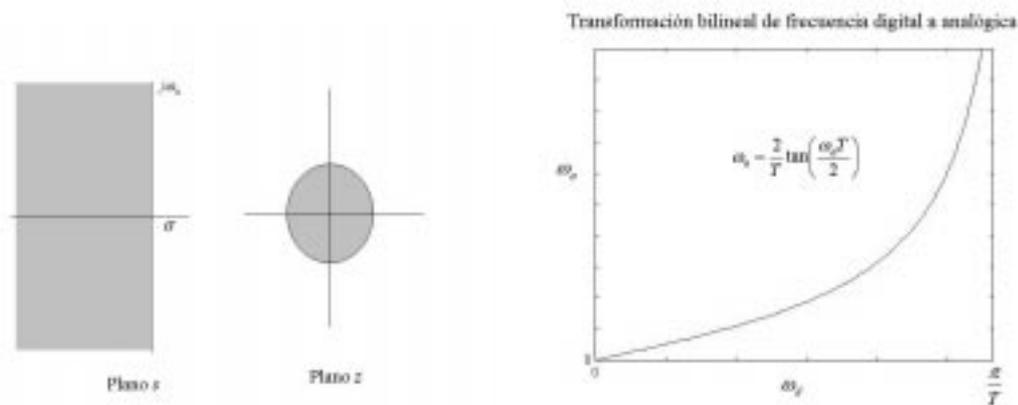
$$z = \frac{1 + j\omega_a(T/2)}{1 - j\omega_a(T/2)}$$

con lo que se puede ver que el módulo de  $z$  es unitario para cualquier valor de  $\omega_a$ . De hecho, para obtener la relación de sus respuestas en frecuencias se sustituye  $s$  por  $j\omega_a$  y  $z$  por  $e^{j\omega_d T}$  con lo que queda después de operar que:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \quad \text{o} \quad \omega_d = 2 \arctan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) \quad (12. 86)$$

Las figuras 12.23 resumen las propiedades de la transformación bilineal. Observando la ecuación (12. 86) y la figura 12.23 hay que notar cómo el intervalo de la frecuencia digital  $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$  se transforma en el intervalo de frecuencia analógica  $0 \leq \omega_a \leq \infty$ . Las transformaciones bilineales evitan el problema de solapamiento entre  $s$  y

$z$ , pero el precio que se paga es la compresión no lineal del eje de las frecuencias. Por consiguiente, el diseño de filtros en tiempo discreto mediante transformación bilineal sólo será útil cuando esta compresión se tolera. Así, el uso de la transformación bilineal está limitado al diseño de aproximaciones a filtros con respuesta en amplitud constante a intervalos, como los filtros paso bajo, paso alto o pasa banda. Por otra parte, la distorsión del eje de la frecuencia también se manifiesta en una compresión de la respuesta de fase del filtro, esto es, si el filtro analógico es de fase lineal la transformación bilineal no conserva esta propiedad. Esta afirmación es más cierto sobre todo si la banda pasante se encuentra cerca de la frecuencia de Nyquist.



**Figura 12. 23. a)Transformación bilineal del plano s a z, b)Transformación de la frecuencia digital a frecuencia analógica**

El método de diseño de los filtros recursivos mediante transformadas bilineales comienza por especificar las características del filtro en el dominio de las frecuencias digitales ( $\omega_{d1}, \omega_{d2}, \dots, \omega_{dk}$ ). Estas especificaciones se pasarán al dominio de las frecuencias analógicas mediante la expresión (12. 86) y que permitirán obtener las frecuencias del filtro analógico:

$$\omega_{ai} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_{di} T}{2}\right) \quad 1 \leq i \leq k \tag{12. 87}$$

A este proceso se le conoce el *prewarping* del filtro analógico. Seguidamente, mediante las soluciones ya tratadas en el anterior capítulo se obtendrá la función de transferencia del filtro analógico. Sólo restará convertir de  $s$  a  $z$  empleando (12. 84), consiguiendo  $G(z)$  del filtro digital. Para facilitar su desarrollo se expone un resumen del procedimiento a seguir:

1. Definir las características del filtro digital  $\omega_{d1}, \omega_{d2}, \dots, \omega_{dk}$ .
2. Realizar la operación de *prewarping* de acuerdo con (12. 87) obteniendo las frecuencias analógicas  $\omega_{a1}, \omega_{a2}, \dots, \omega_{ak}$ .
3. Diseñar el filtro analógico con las frecuencias definidas en el punto 2.
4. Reemplazar  $s$  en el filtro analógico por la expresión dada en (12. 84).

| <i>Tipo de bloque</i>             | $G(s)$                                  | $G(z)$ (Transformación bilineal)   |
|-----------------------------------|---|--|
| Paso bajo de primer orden         | $G(s) = \frac{k}{1+s\tau}$              | $G(z) = \frac{k + kz^{-1}}{a_0 + a_1z^{-1}}$<br>$a_0 = 1 + \frac{2\tau}{T}; a_1 = 1 - \frac{2\tau}{T}$   |
| Paso alto de primer orden         | $G(s) = k \frac{s\tau}{1+s\tau}$        | $G(z) = \frac{b_0 - b_0z^{-1}}{a_0 + a_1z^{-1}}$<br>$b_0 = k \frac{2\tau}{T}; a_0 = 1 + \frac{2\tau}{T}; a_1 = 1 - \frac{2\tau}{T}$  |
| Red de adelanto/retraso de fase   | $G(s) = k \frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2}$  | $G(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{a_0 + a_1z^{-1}}$<br>$b_0 = k \left(1 + \frac{2\tau_1}{T}\right); b_1 = k \left(1 - \frac{2\tau_1}{T}\right)$<br>$a_0 = 1 + \frac{2\tau_2}{T}; a_1 = 1 - \frac{2\tau_2}{T}$ |
| Paso bajo de segundo orden        | $G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + 1}$        | $G(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$<br>$a_0 = 1 + \frac{4a}{T^2} + \frac{2b}{T}; a_1 = 2 - \frac{8a}{T^2}; a_2 = 1 + \frac{4a}{T^2} - \frac{2b}{T}$                          |
| Paso alto de segundo orden        | $G(s) = \frac{as^2}{as^2 + bs + 1}$     | $G(z) = \frac{b_0 - 2b_0z^{-1} + b_0z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$<br>$b_0 = \frac{4a}{T^2}; a_0, a_1, a_2 \Rightarrow$ Ver PASO BAJO 2°  |
| Paso banda de segundo orden       | $G(s) = \frac{bs}{as^2 + bs + 1}$       | $G(z) = \frac{b_0 - b_0z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$<br>$b_0 = \frac{2a}{T}; a_0, a_1, a_2 \Rightarrow$ Ver PASO BAJO 2°   |
| Rechazo de banda de segundo orden | $G(s) = \frac{as^2 + 1}{as^2 + bs + 1}$ | $G(z) = \frac{b_0 - 2b_1z^{-1} + b_0z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$<br>$b_0 = 1 + \frac{4a}{T^2}; b_1 = 1 - \frac{4a}{T^2}; a_0, a_1, a_2 \Rightarrow$ Ver PASO BAJO 2°                              |

**Cuadro 12. 2 Transformaciones de G(s) a G(z)**

Para facilitar las transformaciones de  $s$  a  $z$ , se exponen en el cuadro 12.2 las relaciones existentes de filtros comunes de primer y segundo orden mediante la transformada bilineal.

### Ejemplo 12.12

Diseñar un filtro digital paso bajo de Butterworth con una frecuencia de muestreo de 10 kHz, con una frecuencia de corte de 1 kHz y, al menos, una atenuación de 10 dB a la frecuencia de 2 kHz.

En primer lugar se realizaría la operación de *prewarping* a las frecuencias de 1kHz y 2kHz, quedando a:

$$f_{ca} = 1.034Hz \quad f_{sa} = 2.312Hz \quad (12.88)$$

Aplicando la expresión matemática del orden de un filtro de Butterworth, visto en el anterior capítulo, queda  $n = 1.368$  por lo que se debe de tomar el valor entero superior, esto es, orden del filtro 2. La función de transferencia en el dominio  $s$  será:

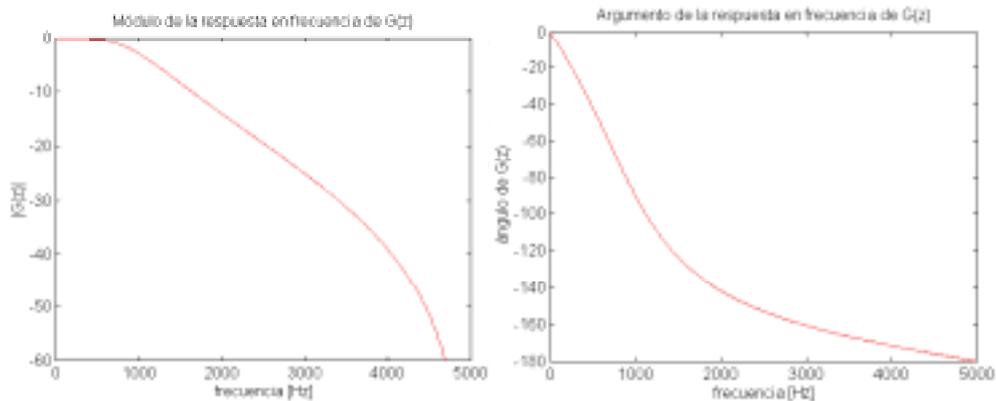
$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{2\pi 1034}\right)^2 + 1.41\left(\frac{s}{2\pi 1034}\right) + 1} \quad (12.89)$$

Utilizando las expresiones del cuadro de transformaciones de  $G(s)$  a  $G(z)$  para filtros paso bajo de segundo orden quedará:

$$a_0 = 14.81; a_2 = -16.95; a_3 = 6.13$$

$$G(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{14.81 - 16.95z^{-1} + 6.13z^{-2}} \quad (12.90)$$

La respuesta en frecuencia de  $G(z)$  es indicada en la figura 12.19



**Figura 12. 24** Respuesta en frecuencia de  $G(z)$

Es de destacar la aproximación de fase lineal en la zona de banda pasante.

#### Resolución en MATLAB

```
>>fd=[1e3 2e3];T=1e-4;fn=1/(2*T);
>>fa=1/(pi*T)*tan(pi*fd*T);
>>n=buttord(2*pi*fa(1),2*pi*fa(2),3,10,'s');%orden filtro
>>[p,q]=butter(n, 2*pi*fa(1),'s');
>>disp('FDT del filtro analógico');
>>g1=tf(p,q)
>>[b,a]=butter(n, fd(1)/fn); %frecuencias normalizadas
>>disp('FDT del filtro digital');
>>g2=tf(b,a,T)
>>[H,F]=freqz(b,a,2048,1/T);
```

#### Ejemplo 12.13

Diseñar un filtro paso alto digital de Chebychev con un nivel de atenuación de 40dB, selectividad del filtro de 0.25, ganancia de tensión unitaria y frecuencia de corte de 1kHz.

Las frecuencias analógicas tras el warping resultarán ser:

$$f_{ca} = 1034Hz \quad f_{sa} = 250.5Hz$$

Aplicando las expresiones del anterior capítulo para determinar el orden del filtro sale que:

$$D = \frac{10^4 - 1}{10^{0.1} - 1} = 3.86 \times 10^4 \quad n \geq \frac{5.97}{2.06} \Rightarrow 3$$

Tomando el polinomio de grado 3 de Chebychev para un rizado en la banda pasante de 1dB y pasándolo a filtro paso alto se obtendrá su FDT normalizado:

$$G(s) = \frac{s}{(s + 2.04)} \times \frac{s^2}{(s^2 + 0.494s + 1.01)}$$

Trasladando a la frecuencia de la banda del filtro quedará:

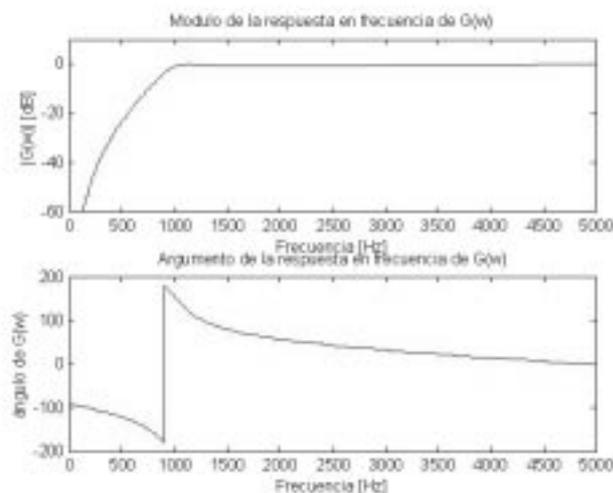
$$G(s) = \frac{\frac{s}{12823}}{\left(\frac{s}{12823} + 1\right)} \times \frac{\left(\frac{s}{6314}\right)^2}{\left(\left(\frac{s}{6314}\right)^2 + 0.4915 \frac{s}{6314} + 1\right)}$$

Aplicando la transformación bilineal al sistema LTI de primer y segundo orden:

$$G(z) = \frac{1.51(1 - z^{-1})}{(2.51 - 0.51z^{-1})} \times \frac{9.38(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{(11.89 - 16.76z^{-1} + 8.88)}$$

### Resolución en MATLAB

```
>>fc=1e3;k=1/4;Amin=40;Amax=1;fs=1e4;
>>fd=[fc k*fc];T=1/fs;
>>fa=1/(pi*T)*tan(pi*fd*T);
>>n=cheblord(2*pi*fa(1),2*pi*fa(2),Amax,Amin,'s')
>>[p,q]=cheby1(n,Amax,2*pi*fa(1),'high','s')
>>[b,a]=cheby1(n,Amax,fc/(fs/2),'high');
>>[H,F]=freqz(b,a,2048,fs);
```

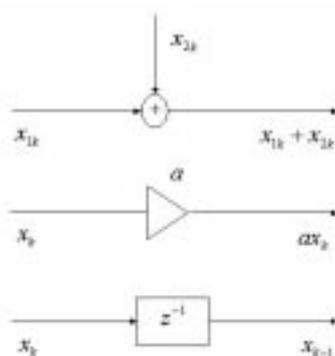


## 12.5 Implementación de los filtros digitales

Una vez calculada la FDT del filtro es posible su construcción. La ecuación en diferencias exige que estén disponibles los valores retrasados de la salida, de la entradas y de las secuencias intermedias. El retardo de los valores de la secuencia implica la necesidad de almacenar los valores pasados de la misma. Además, hay que proporcionar medios para multiplicar por los coeficientes los valores retrasados de la secuencia, así como para sumar los productos resultantes.

Hay dos formas de implementar los filtros digitales: mediante un programa de ordenador o bien por diseño en soporte físico. Para la ejecución en *software* se elaborará un algoritmo que necesitará almacenar los valores anteriores de la salida y de la entrada y realizar los productos y las sumas correspondientes. En el caso de utilizar lenguajes de alto nivel, se suele usar aritmética de punto flotante, con el objeto de evitar los efectos asociados de la cuantificación con la aritmética de punto fijo, ya que pueden conducir a la inestabilidad y a cambios significativos en la función de transferencia, tal como se verá más adelante (ver párrafo 12.6).

Si se usa Electrónica Digital, los elementos básicos necesarios para la realización de un filtro digital son sumadores, multiplicadores y memoria para almacenar los valores retrasados de la secuencia. La interconexión de estos elementos básicos se representan de forma conveniente utilizando diagramas de bloques con los símbolos básicos que se muestran en la figura 12.25.



**Figura 12. 25. Símbolos del diagrama de bloques: a) suma de dos secuencias, b) multiplicación de una secuencia por una constante, c) Retardo unidad**

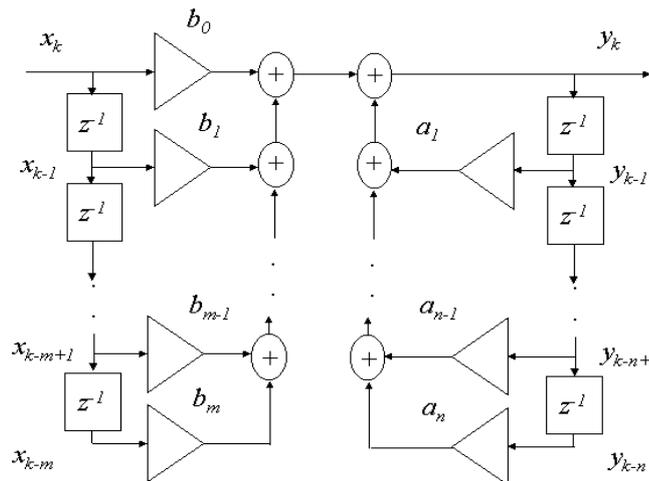
En la notación general de diagramas de los bloques, un sumador puede tener cualquier número de entradas. Sin embargo, en casi todas las realizaciones prácticas, los sumadores tienen dos entradas. En los diagramas que aquí se exponen esto se indica de forma explícita. En las realizaciones digitales la operación de retardo se puede hacer utilizando un registro de almacenamiento por cada unidad de retardo que se necesite. Si la realización utiliza circuitos integrados, los retardos podrían hacerse empleando un registro

de desplazamiento temporizado con la frecuencia de muestreo de la señal de entrada. En una realización *software*, los retardos en cascada se realizarán con registros de memoria consecutiva.

La realización sistemática en cualquiera de estos dos medios, SW o HW, se ve considerablemente facilitada representando el filtro en diagrama de bloques. Partiendo de las ecuaciones en diferencias del filtro:

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (12.91)$$

esta expresión se puede representar por el diagrama de la figura 12.26. Al utilizar sólo sumadores con dos entradas, las sumas se realizan en un orden específico. Es decir, la figura 12.26 indica que deben calcularse los productos  $a_n y_{k-n}$  y  $a_{n-1} y_{k-(n-1)}$ , sumarlos posteriormente y la suma resultante añadirse a  $a_{n-2} y_{k-(n-2)}$ , y así sucesivamente. Tras calcular  $y_k$ , las variables de retardo se deben actualizar introduciendo  $y_{k-(n+1)}$  en el registro que tiene  $y_{k-n}$ , y así sucesivamente.

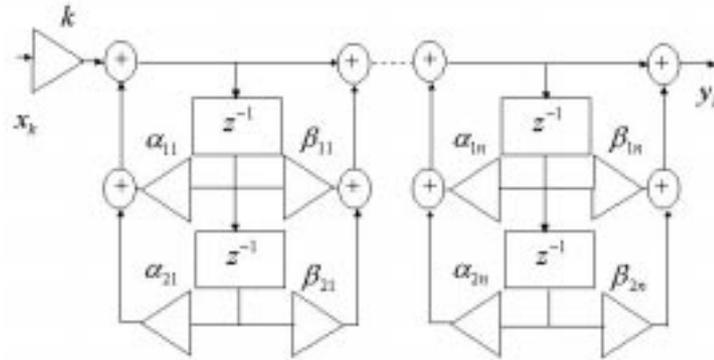


**Figura 12. 26 Representación genérica de los filtros a partir de la ecuación en diferencias**

Los diagramas de bloques se pueden reestructurar o modificar de diversas maneras sin cambiar la función de transferencia global. Cada reestructuración representa un algoritmo computacional diferente para realizar el mismo sistema. Una forma más adecuada de implementación se basa en la estructura en serie obtenida por la factorización en sistemas de segundo orden de la función de transferencia del filtro:

$$G(z) = k \prod_{i=1}^n \frac{1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2}}{1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2}} \quad (12.92)$$

La figura 12.27 muestra un diagrama de bloques de un filtro IIR implementado con cascadas de segundo orden. Esta realización tiene cuatro sumas, cuatro multiplicaciones y dos retardos por cada sección de segundo orden. Esta forma de implementación resulta la más efectiva para un rango variado de procesadores de propósito general así como de procesadores específicos DSP.



**Figura 12. 27 Filtro IIR en cascada**

Una realización en cascada se denomina comúnmente implementación en forma canónica. La realización del diagrama de bloques en forma no canónica que muestra la figura 12.26 se denomina implementación en forma directa.

### Ejemplo 12.14

Sea un filtro cuya ecuación en diferencias es,

$$y_k = x_k + 2x_{k-1} + 1.5y_{k-1} + 0.9y_{k-2}$$

obtener el diagrama a bloques de la forma canónica y en forma directa.

Como se requiere de una factorización de sistemas de segundo orden de la función de transferencia del filtro, se aplica la transformada en  $z$  a la ecuación en diferencias, resultando:

$$G(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}}$$

Las figuras adjuntas muestran la forma directa y canónica respectivamente.

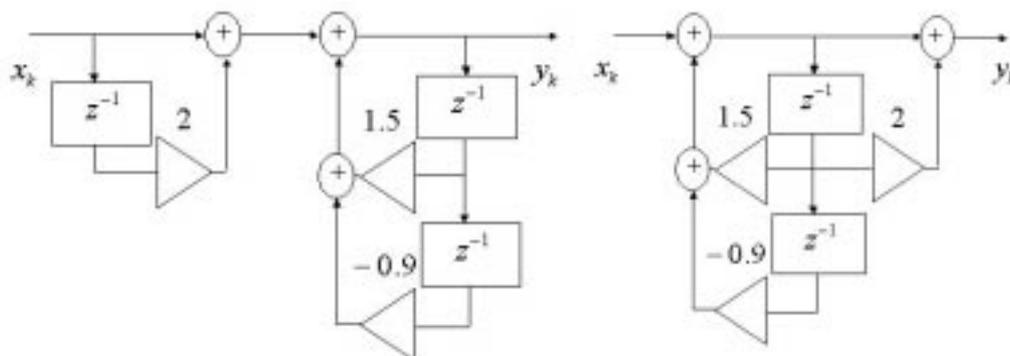


Figura 12. 28. Estructuras de implementación, a) Forma directa, b) Forma canónica

## 12.6 Efectos de la cuantificación en los filtros

Hasta el momento, en el estudio de los filtros digitales, se ha supuesto que tanto las variables como los coeficientes de los filtros pueden tomar cualquier valor; ahora bien, la realización de estos sistemas se efectúa con dispositivos digitales de cálculo, es decir con computadores, en los que tanto el almacenamiento como la medida de las señales se realiza con números finitos de dígitos. La operación de transformación de los valores de variables y constantes, con un número infinito de cifras, a un número concreto de bits se denomina cuantificación. Este proceso, imprescindible en el tratamiento de información con computador, produce errores que en este último punto se van a analizar y acotar.

En la implantación de los filtros digitales aparecen tres procesos de cuantificación:

1. Cuantificación de la señal de entrada
2. Cuantificación de los coeficientes de los filtros
3. Errores en el redondeo de las operaciones

### 12.6.1 Efectos de truncamiento y redondeo

En el análisis de error de cuantificación, hay que tener en cuenta la forma de representación de los valores en el computador, según se haga en coma fija o en coma flotante, y, asimismo, también tendrá influencia la forma de realizar el paso de un número cualquiera, equivalente a infinitos dígitos, a un número finito de dígitos, según sea por truncamiento o por redondeo.

En general la representación de los números en computadores se realiza en base 2, es decir en representación binaria, por dos métodos distintos: en coma fija, donde se utiliza

un número determinado de dígitos para la parte entera y otra para la parte decimal, por ejemplo 4 y 6:

$$1001.011010 \quad (12.93)$$

o en coma flotante, donde la representación es de la forma:

$$M2^c \quad (12.94)$$

donde  $M$ , mantisa, es un número que verifica:

$$\frac{1}{2} \leq M < 1 \quad (12.95)$$

y  $c$ , exponente, es un número entero, positivo o negativo; ambos,  $M$  y  $c$ , se representan por un número fijo de bits.

La forma de representación de los números negativos tiene su importancia según se haga por signo y magnitud, por complemento a dos o por complemento a uno.

Tanto en coma fija como flotante se va a considerar que la parte fraccionaria o mantisa tiene  $b$  bits, entonces los números se representan en saltos de  $2^{-b}$ , es decir la mínima diferencia entre dos representaciones distintas es de  $2^{-b}$ .

Dado un número de infinitos dígitos, se entiende por truncamiento del mismo la operación de tomar los  $b$  primeros bits más significativos, despreciando el resto, mientras que su redondeo es tomar la representación del valor más próximo al mismo.

En la figura 12.29 a) se representan los valores de la señal cuantificada  $Q(x)$  en función de los posibles valores de  $x$  para el caso de representación por redondeo y coma fija. Como se puede observar en la misma, el error en dicha cuantificación es:

$$\varepsilon = Q(x) - x \quad (12.96)$$

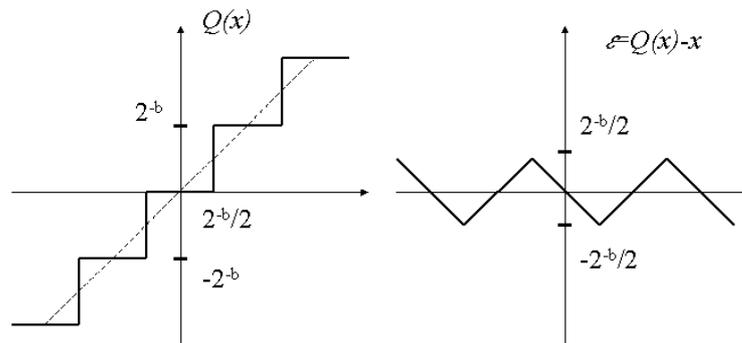


Figura 12. 29 Técnicas de redondeo a) Cuantificación b) Error

En valor absoluto, el error será, como máximo, de medio salto, es decir:

$$-\frac{1}{2}2^{-b} < Q(x) - x < \frac{1}{2}2^{-b} \tag{12. 97}$$

El caso de truncamiento y coma fija, utilizando el complemento a 2 para los negativos, viene representado en la figura 12.23, donde el error está acotado entre los valores:

$$-2^{-b} < Q(x) - x < 0 \tag{12. 98}$$

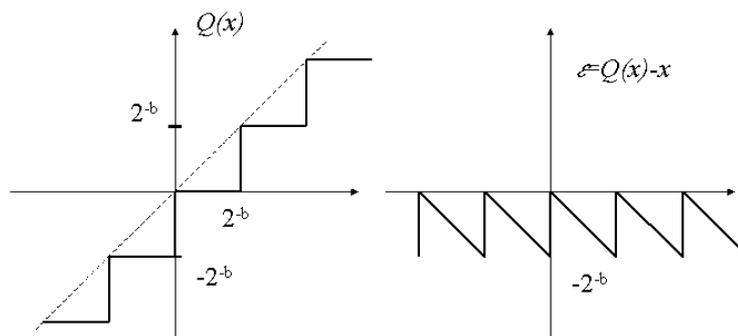


Figura 12. 30 Técnicas de truncamiento a) Cuantificación b) Error

### 12.6.2 Cuantificación de señales

En la conversión analógica/digital de una señal para su tratamiento con computador además del proceso de muestreo hay que tener en cuenta el de cuantificación, efecto éste debido a la limitación del número de cifras de los registros en los que se almacenan sus valores.

Para el estudio del efecto que esta cuantificación de los elementos de la secuencia de entrada produce sobre los de la secuencia de salida de un filtro digital, se va a suponer, en primer lugar, como la forma más usual de trabajo de los convertidores A/D, la coma fija con  $b+1$  bits,  $b$  la parte fraccionaria y 1 de signo, utilizando técnicas de redondeo. Se considera igualmente la señal normalizada a 1, es decir:

$$-1 + \frac{1}{2}2^{-b} < x_k < 1 - \frac{1}{2}2^{-b} \quad (12.99)$$

Una representación equivalente al proceso de cuantificación es la derivada de considerar, según se indica en la figura 12.30b), su efecto como una secuencia de valores aleatorios añadidos a la original.

$$\hat{x}_k = Q(x_k) = x_k + e_k \quad (12.100)$$

Donde  $\{e_k\}$  es una secuencia denominada frecuentemente *ruido* cuyos elementos verifican:

$$-\frac{1}{2}2^{-b} < e_k < \frac{1}{2}2^{-b} \quad (12.101)$$

El proceso de redondeo se caracteriza por una distribución estadística, tal que la secuencia  $\{e_k\}$  se define como una variable aleatoria con una función de densidad uniforme,  $p(\xi)$ , entre  $-(2^{-b}/2)$  y  $(2^{-b}/2)$ , que se representa en la figura 12.31.

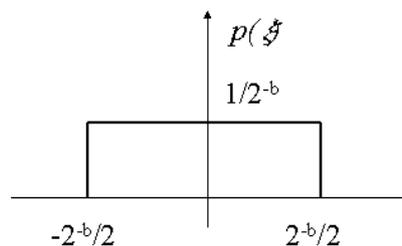


Figura 12. 31 Función de densidad del error por redondeo

Los parámetros estadísticos de la media y la varianza de la misma son:

$$\begin{aligned}\mu_e &= 0 \\ \sigma_e^2 &= \frac{2^{-2b}}{12}\end{aligned}\quad (12.102)$$

El valor que da una idea de la magnitud del error es su varianza. Ésta se suele referir a la amplitud de los valores de la secuencia a cuantificar  $x_k$ . Con el fin de comparar parámetros equivalentes se define sobre la secuencia  $\{x_k\}$  su varianza:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N x_k^2 \quad (12.103)$$

con  $N$  igual al número de elementos cuantificados en el proceso en curso de estudio. La medida de error de cuantificación, representada por  $SNR$  (*Signal to Noise Ratio*), se define como el cociente entre ambas desviaciones típicas:

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{\frac{2^{-2b}}{12}} = 12 \cdot 2^{2b} \sigma_x^2 \quad (12.104)$$

Como se ve en la expresión el índice  $SNR$  aumenta con cada incremento en el número de bits que se use para la representación de la señal.

### 12.6.3 Cuantificación de los coeficientes

Igual que ocurre con los valores de las muestras de la señal, en el proceso de realización de un filtro, los parámetros que lo definen sufren una cuantificación que puede afectar, en algunas ocasiones considerablemente, a las prestaciones del sistema.

Para abordar este problema es necesario centrarse en la ecuación característica del filtro y estudiar como varían sus raíces ante las variaciones en sus coeficientes. Por ejemplo, si un sistema tiene una ecuación en diferencias estimadas:

$$\hat{y}_k = (a + \Delta a) \hat{y}_{k-1} + u_k \quad (12.105)$$

donde  $a$  es el coeficiente que sufre un error de cuantificación,  $\Delta a$ , ésta tendrá por ecuación característica:

$$z - (a + \Delta a) = 0 \quad (12.106)$$

en la que es claro que, si se quiere situar un polo en  $z = 0.995$ , será necesario almacenar el valor de  $a$  con tres cifras decimales ya que la variación máxima de este parámetro,  $\Delta a$ , admisible para garantizar la estabilidad es 0.005.

En general este problema se podrá resolver con un análisis de sensibilidad de las raíces de la ecuación característica a los parámetros de la misma.

Las consecuencias prácticas de la cuantificación de los coeficientes son:

- Los filtros con poco ancho de banda son muy sensibles a la cuantificación. Este efecto se deriva por tener polos muy cerca de  $z = 1$ .
- El sobremuestreo (*oversampling*) incrementa la sensibilidad a la cuantificación.
- La estructura física del filtro influye mucho.

#### 12.6.4 Cuantificación de resultados de operaciones

A efectos de cuantificación, la operación de mayor interés es la multiplicación ya que el resultado de ésta ocupa el doble de números de cifras que de los factores, por lo que para almacenarlo o realizar otras operaciones habrá que reducir el número de sus cifras.

Este error de cuantificación aparece en cada iteración de la ecuación en diferencias con lo que su efecto se puede estudiar como una secuencia de números aleatorios independientes sumados a la secuencia de salida de los bloques en los que se realizan multiplicaciones. Por ello, la importancia de este error dependerá fuertemente de la estructura elegida para la implementación del filtro.

Utilizando el esquema típico de la construcción de un filtro, según se indicó en la figura 12.27, y siguiendo las propiedades estadísticas enunciadas sobre el error de cuantificación, los ruidos son aditivos, pudiéndose reemplazar por unos cuyos elementos representativos valgan:

$$e = \sum_{i=0}^m e_{b_i} + \sum_{i=0}^n e_{a_i} \quad (12. 107)$$

Si cada uno de los ruidos considerados tiene iguales propiedades estadísticas, dadas en (12. 102), las del total, suma de los referidos, serán:

$$\begin{aligned}\mu_e &= 0 \\ \sigma_e^2 &= (n+m) \frac{2^{-2b}}{12}\end{aligned}\tag{12.108}$$

indicando que a medida de que se aumente el orden del filtro mayor será el incremento del error cometido por redondeo en las multiplicaciones.

## 12.7 Bibliografía

---

- [Aracil91] Aracil, R., Jiménez, A., *Sistemas discretos de Control*, Servicio de Publicaciones de la ETS de Ingenieros industriales de Madrid, 1991.
- [Barahon97] Barahona, E., *¿Qué es un Pentium MMX?*, PC WORLD nº 132, pp135-139, 1997.
- [Banks90] Banks, S., *Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition*, Prentice Hall, 1990.
- [Burrus98] Burrus, C. S., McClellan, J. H., Oppenheim, A.V., Parks, T. W., Schafer, R.W., Schuessler, H., W., *Ejercicios de tratamiento de la señal utilizando MATLAB v.4*, Prentice Hall, 1998.
- [Embree91] Embree, P.M., Bruce, K., *C language algorithms for signal processing*, Prentice Hall, 1991.
- [Ifeachor96] Ifeachor, E.C., *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, 1996.
- [Krauss95] Krauss, T.P., Shure, L., Little, J.N., *Signal Processing Toolbox (User's Guide)*, The Math Works, Inc., 1995.
- [Miguel88] De Miguel, P., *Fundamentos de computadores*, Paranifo, 1988.
- [Oppenhe94] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., *Señales y Sistemas*, Prentice Hall Iberoamericana, 1994.
- [Oppenhe98] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., Nawab, S. H., *Señales y Sistemas*, Prentice Hall Iberoamericana, segunda edición, 1998.
- [Oppenhe00] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., Buck, J. R., *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Prentice Hall, 2000.
- [Proakis96] Proakis, J.G., Manolaski, D.G., *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Addison-Wesley, 1996.
- [Proakis98] Proakis, J.C., Manolakis, D.G., *Tratamiento digital de señales*, tercera edición, Prentice Hall, 1998.