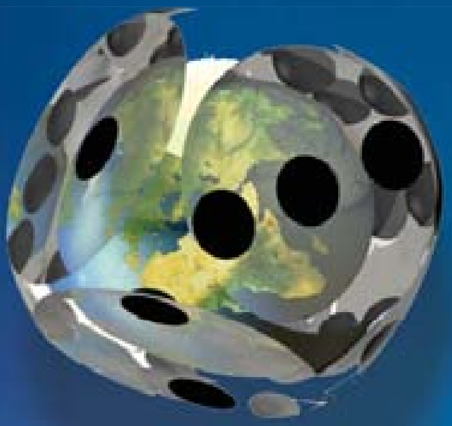
CENGAGE Learning



Introducción a la probabilidad y estadística

Mendenhall • Beaver • Beaver

Décima tercera edición

Introducción a la probabilidad y estadística

13a. EDICIÓN

William Mendenhall
University of Florida, Emeritus

Robert J. Beaver
University of California, Riverside, Emeritus

Barbara M. Beaver
University of California, Riverside

Traductor
Jorge Humberto Romo Muñoz
Traductor Profesional

Revisión técnica
Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Universidad La Salle Morelia

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Introducción a la probabilidad y estadística
Décima tercera edición
William Mendenhall, Robert J. Beaver y Barbara M. Beaver.

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Pedro Turbay Garrido

Director editorial y de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora editorial:
María Rosas López

Editor de desarrollo:
Sergio R. Cervantes González

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Editor de producción:
Omar A. Ramírez Rosas

Coordinador de producción:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Mariana Sierra Enríquez

Imagen de portada:
Dreamstime.com
Torian Dixon

Composición tipográfica:
Editec, S.A. de C.V.

Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.

Traducido del libro *Introduction to Probability and Statistics*, 13th ed.
William Mendenhall, Robert J. Beaver and Barbara M. Beaver.
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una Compañía de Cengage Learning © 2006
ISBN-13: 978-0-495-38953-8
ISBN-10: 0-495-38953-6

Datos para catalogación bibliográfica:
Introducción a la probabilidad y estadística
Décima tercera edición
Mendenhall, William, Robert J. Beaver y Barbara M. Beaver.
ISBN-13: 978-607-481-466-8
ISBN-10: 607-481-466-X

Visite nuestro sitio web en:
http://latinoamerica.cengage.com

Prefacio

Cada vez que toma un periódico o una revista, cuando ve un programa por televisión o navega en Internet, aparece la estadística. Cada vez que llena un cuestionario, se registra en un sitio Web o desliza su tarjeta de puntos en algún supermercado por el lector electrónico, sus datos personales pasan a una base de datos que contiene su información estadística personal. No puede evitar el hecho de que en esta era de la información, la recolección y análisis de datos son una parte integral de nuestras actividades cotidianas. A fin de ser un cliente y un ciudadano educado, necesita entender cómo se emplea día con día y, si es el caso, se da un mal uso a la estadística en nuestras vidas. Para ese fin es necesario "entrenar su cerebro" en el pensamiento estadístico, un tema que se subraya en la décima tercera edición, al proporcionarle un "entrenador personal".

EL SECRETO DE NUESTRO ÉXITO

En el primer curso universitario de estadística introductoria que alguna vez tomamos se empleó el libro *Introducción a la probabilidad y la estadística* de William Mendenhall. Desde esa ocasión, este texto, en la actualidad en la décima tercera edición, ha ayudado a varias generaciones de alumnos a entender lo que es la estadística y cómo sirve de herramienta en sus áreas particulares de aplicación. El secreto del éxito de *Introducción a la probabilidad y la estadística* es su capacidad para combinar lo viejo con lo nuevo. En cada revisión se tratan los puntos fuertes de ediciones previas, y siempre buscamos formas nuevas para motivar, alentar e interesar a los alumnos en el uso de nuevas herramientas tecnológicas.

CARACTERÍSTICAS DISTINTIVAS DE LA DÉCIMA TERCERA EDICIÓN

La décima tercera edición mantiene la descripción tradicional para la cobertura de los temas de la estadística descriptiva e inferencial. Esta revisión conserva la presentación directa de la décima segunda edición. En este sentido, se ha continuado con la simplificación y claridad del lenguaje con un estilo más legible y "amigable", sin sacrificar la integridad estadística de la presentación. Se ha hecho un gran esfuerzo por "entrenar su cerebro" y no sólo cómo aplicar procedimientos estadísticos, sino también para explicar:

- cómo describir de modo significativo conjuntos reales de datos;
- qué significan los resultados de las pruebas estadísticas en términos de sus aplicaciones prácticas;
- cómo evaluar la validez de los supuestos detrás de las pruebas estadísticas; y
- qué hacer cuando se han violado los supuestos estadísticos.

Ejercicios

Continuando con la tradición de las ediciones previas, la variedad y el número de aplicaciones reales en los conjuntos de ejercicios es la mayor fortaleza de esta edición. Se han revisado los conjuntos de ejercicios para darle nuevas e interesantes situaciones del mundo real y conjuntos de datos reales, muchos de ellos extraídos de periódicos y revistas científicas recientes. La décima tercera edición contiene más de 1 300 problemas, muchos de los cuales son nuevos para esta edición. Todos los ejercicios de las ediciones anteriores que fueron eliminados en ésta, se encuentran disponibles para el profesor como *Classic Exercices* en el Instructor´s Companion Website (academic.cengage.com/statistics/mendenhall). Los ejercicios se gradúan según su nivel de dificultad; algunos, relacionados con técnicas básicas, se pueden resolver por casi todos los alumnos, mientras que otros, moldeados para aplicaciones prácticas e interpretación de resultados, harán que los alumnos usen un razonamiento y entendimiento estadísticos más complejos.

Organización y cobertura

En los capítulos 1-3, se presenta el análisis descriptivo de datos para una y dos variables, con las gráficas actualizadas de *MINITAB*. Creemos que los capítulos del 1 al 10, con excepción del 3, deben ser cubiertos en el orden presentado. Los demás capítulos pueden ser cubiertos en cualquier orden. El capítulo de análisis de varianza precede al capítulo de regresión, de modo que el profesor presente el análisis de varianza como parte de un análisis de regresión. Así, la presentación más efectiva ordenaría también estos tres capítulos.

El capítulo 4 incluye una presentación completa de probabilidad y distribuciones de probabilidad. Tres secciones opcionales: reglas de conteo, la ley de probabilidad total y la regla de Bayes, se colocaron en el flujo general de texto, y el profesor tendrá la opción de hacer una cobertura completa o parcial. Las secciones que presentan las relaciones de eventos, independencia, probabilidad condicional y la regla de multiplicación, han sido reescritas en un intento por aclarar conceptos que por lo común son difíciles de comprender por los alumnos. Como en la décima segunda edición, los capítulos sobre análisis de varianza y regresión lineal incluyen fórmulas de cálculo e impresiones de computadora en la presentación de texto. Los profesores que deseen usar el método de cálculo “práctico” para la regresión lineal y el ANOVA, y quienes elijan enfocarse en la interpretación de las impresiones estadísticas generadas por computadora pueden usar estos capítulos con igual facilidad.

Un cambio importante puesto en práctica en ésta y las dos últimas ediciones es el énfasis en los valores p y su uso para juzgar la significancia estadística. Con el advenimiento de los valores p generados por computadora, estas probabilidades se han vuelto componentes esenciales al informar los resultados del análisis estadístico. Como tal, el valor observado del estadístico de prueba y su valor p se presentan juntos al inicio de la explicación de la prueba de hipótesis estadística como herramientas equivalentes para la toma de decisiones. La significancia estadística se define en términos de valores preasignados de α, y el *método del valor p* se presenta como una alternativa al *método del valor crítico* para probar una hipótesis estadística. Se presentan ejemplos con los métodos del *valor p* y el *valor crítico* para prueba de hipótesis. La explicación de la interpretación práctica de los resultados estadísticos, junto con las diferencias entre significancia estadística y práctica, se subraya en los ejemplos prácticos del texto.

Nuevo para la décima tercera edición: Mi entrenador personal

La novedad en esta edición son las secciones **Mi entrenador personal** que cuentan con definiciones y/o sugerencias paso a paso acerca de la solución del problema. Estas secciones van seguidas de Repertorio de ejercicios, un conjunto de ejercicios relacionados con problemas repetitivos respecto a un tema o concepto específico. Este repertorio de ejercicios se compara con los conjuntos de ejercicios específicos de un entrenador para un atleta en preparación. Mientras más repeticiones realice el atleta, adquiere más fuerza o agilidad en los conjuntos de músculos o un incremento en su resistencia en condiciones de estrés.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo cuartiles muestrales?

1. Acomode el conjunto de datos en orden de magnitud de menor a mayor.
2. Calcule las posiciones de cuartil:
   - Posición de Q_1: $.25(n + 1)$
   - Posición de Q_3: $.75(n + 1)$
3. Si las posiciones son de enteros, entonces Q_1 y Q_3 son los valores del conjunto ordenado de datos que se encuentra en esas posiciones.
4. Si las posiciones del paso 2 no son de enteros, encuentre las dos mediciones en las posiciones un poco arriba y un poco debajo de la posición calculada. Calcule el cuartil al hallar un valor ya sea de un cuarto, un medio y tres cuartos de la distancia entre estas dos mediciones.

Repertorio de ejercicios

A. A continuación encontrará dos conjuntos de datos de práctica. Llene los espacios en blanco para hallar los cuartiles necesarios. El primer conjunto de datos ya está hecho.

Conjunto de datos	Ordenado	n	Posición de Q_1	Posición de Q_3	Cuartil inferior, Q_1	Cuartil superior, Q_3
2, 5, 7, 1, 1, 2, 8	1, 1, 2, 2, 5, 7, 8	7	2o	6o	1	7
5, 0, 1, 3, 1, 5, 5, 2, 4, 4, 1						

B. A continuación encontrará tres conjuntos de datos que ha están ordenados. Las posiciones de los cuartiles superior e inferior se muestran en la tabla. Encuentre las mediciones un poco arriba y un poco debajo de la posición de cuartil. Enseguida encuentre los cuartiles superior e inferior. El primer conjunto de datos ya está hecho.

Conjunto ordenado de datos	Posición de Q_1	Mediciones arriba y abajo	Q_1	Posición de Q_3	Mediciones arriba y abajo	Q_3
0, 1, 4, 4, 5, 9	1.75	0 y 1	$0 + .75(1) = .75$	5.25	5 y 9	$5 + .25(4) = 6$
0, 1, 3, 3, 4, 7, 7, 8	2.25	____ y ____		6.75	____ y ____	
1, 1, 2, 5, 6, 6, 7, 9, 9	2.5	____ y ____		7.5	____ y ____	

Las secciones **Mi entrenador personal**, con repertorio de ejercicios, son frecuentes en los primeros capítulos donde es importante establecer conceptos básicos y el pensamiento estadístico, acoplados con cálculos directos. Las respuestas al Repertorio de ejercicios, cuando son necesarias, se encuentran en la parte posterior del texto. Las secciones **Mi entrenador personal** aparecen en todos los capítulos excepto en dos: capítulos 13 y 15. Sin embargo, los conjuntos de problemas de repertorio de ejercicios aparecen sólo en los primeros 10 capítulos donde los problemas se pueden resolver con lápiz y papel, o una calculadora. Esperamos que al momento en que un alumno haya completado estos 10 capítulos, ya domine los conceptos y métodos estadísticos. Además, la naturaleza intensiva en cuanto al uso de la computadora en los capítulos restantes no es accesible para una serie de ejercicios repetitivos simples y de fácil cálculo, sino más bien es posible para un método integral; es decir, una síntesis de los resultados de un análisis completo en un conjunto de conclusiones y recomendaciones para el experimentador.

Otras características de la décima tercera edición

- **Mi applet:** el fácil acceso a la Internet ha hecho posible que los alumnos visualicen conceptos estadísticos por medio de una herramienta interactiva de la red llamada **applet**. Los applets, escritos por Gary McClelland, autor de *Seeing Statistics*™, han sido personalizados en específico para relacionar la presentación y notación empleadas en esta edición. Los applets se hallan en **Companion Website** y se puede tener acceso a ellos por medio de un explorador como Internet Explorer o Netscape Navigator, éstos proporcionan un refuerzo visual de los conceptos presentados en el texto. Los applets permiten que el usuario lleve a cabo un experimento estadístico, interactúe con una gráfica estadística para cambiar su forma o tenga acceso a una "tabla estadística" interactiva. En puntos apropiados del texto se muestra y explica cómo insertar datos para cada applet, y se motiva a los alumnos a aprender a interactuar mediante los ejercicios "Mi applet" al final de cada capítulo. Estamos entusiasmados por tener estos applets integrados en la pedagogía estadística, y esperamos que usted saque ventaja del atractivo visual de estos applets para sus alumnos.

MI APPLET

Se puede comparar la precisión de estimadores de la varianza poblacional σ^2 usando el applet **Why Divide by $n - 1$?** El applet selecciona muestras de una población con desviación estándar $\sigma = 29.2$. A continuación calcula la desviación estándar s usando $(n - 1)$ en el denominador así como una desviación estándar calculada usando n en el denominador. Se puede escoger para comparar los estimadores para una sola muestra nueva, para 10 muestras o para 100 muestras. Observe que cada una de las 10 muestras que aparecen en la figura 2.9 tiene una desviación estándar diferente. No obstante, cuando las 10 desviaciones estándar se promedian en la parte inferior del applet, uno de los dos estimadores es más cercano a la desviación estándar de la población $\sigma = 29.2$. ¿Cuál es? Usaremos este applet otra vez para los ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

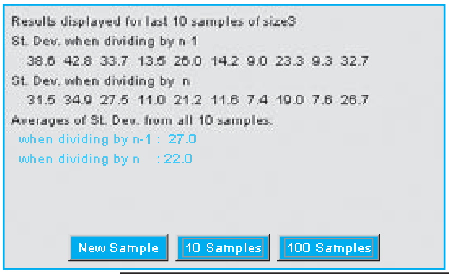


FIGURA 2.9
Applet Why Divide by $n - 1$? (¿Por qué dividir entre $n - 1$?)

MI APPLET Ejercicios

2.86 Consulte el Conjunto de Datos # 1 en el applet **How Extreme Values Affect the Mean and Median. (Cómo afectan los valores extremos a la media y a la mediana)**. Este applet se carga con una gráfica de puntos para las siguientes $n = 5$ observaciones: 2, 5, 10, 11, 12.

a. ¿Cuáles son la media y la mediana para este conjunto de datos?

b. Use su mouse para cambiar el valor $x = 11$ (el punto verde movible) a $x = 13$. ¿Cuáles son la media y mediana para el nuevo conjunto de datos?

c. Use su mouse para mover el punto verde a $x = 33$. Cuando el valor máximo es sumamente grande en comparación con las otras observaciones, ¿cuál es mayor, la media o la mediana?

d. ¿Qué efecto tiene un valor extremadamente grande sobre la media? ¿Qué efecto tiene sobre la mediana?

2.87 Consulte el Conjunto de Datos #2 en el applet **How Extreme Values Affect the Mean and Median.** Este applet se carga con una gráfica de puntos para las siguientes $n = 5$ observaciones: 2, 5, 10, 11, 12.

a. Use su mouse para mover el valor $x = 12$ a la izquierda hasta que sea menor que el valor $x = 11$.

b. A medida que el valor de x se hace más pequeño, ¿qué pasa a la media muestral?

selecciona al azar una muestra de $n = 3$ de una población en la que la desviación estándar es $\sigma = 29.2$.

a. Dé un clic en New Sample. Aparecerá una muestra formada de $n = 3$ observaciones. Use su calculadora para verificar los valores de la desviación estándar cuando divida entre $n - 1$ y n se muestra en el applet.

b. Dé un clic en New Sample otra vez. Calcule el promedio de las dos desviaciones estándar (dividiendo entre $n - 1$) de los incisos a) y b). Repita el proceso para las dos desviaciones estándar (dividiendo entre n). Compare sus resultados con los que se muestran en rojo en el applet.

c. Usted puede ver cómo los dos estimadores del inciso a) se comportan "a la larga" si da un clic en 10 Samples o en 100 Samples varias veces, hasta que el promedio de todas las desviaciones estándar empiece a estabilizarse. ¿Cuál de los dos métodos da una desviación estándar más cercana a $\sigma = 29.2$?

d. A la larga, ¿a qué distancia está la desviación estándar cuando divide entre n?

2.90 Consulte el applet **Why Divide by $n - 1$.** El segundo applet de la página al azar selecciona una muestra de $n = 10$ de la misma población en la que la desviación estándar es $\sigma = 29.2$.

- La descripción de datos gráficos y numéricos incluye métodos tradicionales y EDA, con gráficas de computadora generadas por *MINITAB 14* para Windows.

FIGURA 2.12
Histograma *MINITAB* para el ejemplo 2.8

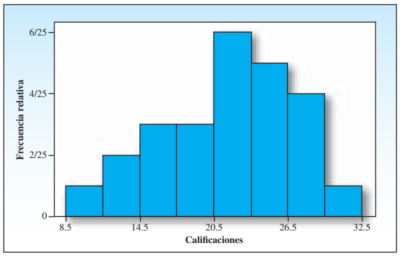


FIGURA 2.16
Salida *MINITAB* para los datos del ejemplo 2.13

Estadística descriptiva: x

```
Variable   N  N*   Mean  SE Mean  StDev  Minimum    Q1  Median     Q3  Maximum
X         10   0  13.50     1.98   6.28     4.00  8.75   12.00  18.50    25.00
```

- La presentación del capítulo 4 ha sido reescrita para aclarar la presentación de sucesos simples y el espacio muestral, así como la presentación de la probabilidad condicional, independencia y la regla de la multiplicación.
- Todos los ejemplos y ejercicios del texto contienen nuevas impresiones basadas en *MINITAB 14*. Los resultados impresos de *MINITAB* se proporcionan para algunos ejercicios, mientras que otros requieren que el alumno obtenga soluciones sin usar la computadora.

c. Use una gráfica de línea para describir el número pronosticado de instalaciones domésticas *alámbricas* para los años 2002 a 2008.

d. Use una gráfica de línea para describir el número pronosticado de instalaciones domésticas *inalámbricas* para los años 2002 a 2008.

MIS DATOS EX0151 **1.51 Resultados de elecciones** Las elecciones de 2004 fueron una carrera en la que el titular, George W. Bush, derrotó a John Kerry, Ralph Nader y otros candidatos, recibiendo 50.7% de la votación. El voto popular (en miles) para George W. Bush en cada uno de los 50 estados aparece a continuación:[8]

AL	1176	HI	194	MA	1071	NM	377	SD	233
AK	191	ID	409	MI	2314	NY	2962	TN	1384
AZ	1104	IL	2346	MN	1347	NC	1961	TX	4527
AR	573	IN	1479	MS	685	ND	197	UT	664
CA	5510	IA	572	MO	1456	OH	2860	VT	121
CO	1101	KS	736	MT	266	OK	960	VA	1717
CT	694	KY	1069	NE	513	OR	867	WA	1305
DE	172	LA	1102	NV	419	PA	2794	WV	424
FL	3965	ME	330	NH	331	RI	169	WI	1478
GA	1914	MD	1025	NJ	1670	SC	938	WY	168

a. Con sólo mirar la tabla, ¿qué forma piensa usted que tendrá la distribución de datos para el voto popular por estado?

b. Trace un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución del voto popular para el presidente Bush en los 50 estados.

c. ¿El histograma del inciso b) confirma el cálculo de usted en el inciso a)? ¿Hay resultados atípicos? ¿Cómo puede explicarlos?

1.53 Resultados de elecciones, continúa Consulte los ejercicios 1.51 y 1.52. Las siguientes gráficas de tallo y hoja fueron generadas usando el *MINITAB* para las variables llamadas "Voto popular" y "Porcentaje de Votos".

Pantalla de tallo y hoja: Voto popular y porcentaje de votos

```
Stem-and-leaf of                Stem-and-leaf of
Popular Vote N = 50             Percent Vote N = 50
Leaf Unit = 100                 Leaf Unit = 1.0

 7    0 1111111                  3    3 799
12    0 22333                    8    4 03444
18    0 444555                  19    4 55666788899
22    0 6667                    (9)   5 001122344
25    0 899                     22    5 566778899
25    1 0001111                 13    6 00011223
18    1 333                      5    6 6689
15    1 444                      1    7 3
12    1 67
10    1 99
 8    2
 8    2 33
 6    2
 6    2 7
 5    2 89
    HI  39, 45, 55
```

a. Describa las formas de las dos distribuciones. ¿Hay resultados atípicos?

b. ¿Las gráficas de tallo y hoja se asemejan a los histogramas de frecuencia relativa construidos en los ejercicios 1.51 y 1.52?

c. Explique por qué la distribución del voto popular para el presidente Bush por estado está sesgada, en tanto

El papel de la computadora en la décima tercera edición: Mi *MINITAB*

En la actualidad las computadoras son una herramienta común para alumnos universitarios de todas las disciplinas. La mayor parte de ellos son consumados usuarios de procesadores de texto, hojas de cálculo y bases de datos, y no tienen problema para navegar a través de paquetes de software en el ambiente Windows. Sin embargo, creemos que las ventajas de la tecnología de las computadoras no deben convertir el análisis estadístico en una “caja negra”. Además, se eligió usar los comandos directos y las herramientas visuales interactivas que proporciona la tecnología moderna para darnos más tiempo para el razonamiento estadístico, así como la comprensión e interpretación de resultados estadísticos.

En esta edición los alumnos podrán usar la computadora para hacer análisis estadístico estándar y como una herramienta para reforzar y visualizar conceptos estadísticos. *MINITAB 14* para Windows se emplea exclusivamente como el software para análisis estadístico. Casi todas las gráficas y figuras, así como su resultado impreso, se generan con esta versión de *MINITAB*. Sin embargo, se ha elegido aislar las instrucciones para generar este resultado en secciones individuales llamadas “Mi *MINITAB*” al final de cada capítulo. En cada descripción se usan ejemplos numéricos para guiar al alumno por los comandos y opciones de *MINITAB* necesarios para los procedimientos presentados en ese capítulo. Se han incluido referencias para captura en pantallas visuales de *MINITAB 14*, así que el alumno puede trabajar en estas secciones como “minilaboratorios”.

MI MINITAB

Medidas numéricas descriptivas

El *MINITAB* da casi todas las estadísticas descriptivas básicas presentadas en el capítulo 2 usando un solo comando en los menús descendentes. Una vez que usted esté en el escritorio de Windows, dé un doble clic en el icono *MINITAB* o use el botón Start para iniciar el *MINITAB*.

Practique introduciendo algunos datos en la ventana Data, dando nombre apropiado a las columnas en la celda gris que está un poco abajo del número de columna. Cuando haya terminado de introducir sus datos, habrá creado una **hoja de trabajo** *MINITAB*, que se puede guardar ya sea en forma individual o como **proyecto** *MINITAB* para uso futuro. Dé un clic en **File** → **Save Current Worksheet** o en **File** → **Save Project**. Necesitará aplicar nombre a la hoja de trabajo (o proyecto), quizá “datos de prueba”, para que pueda recuperarla más adelante.

Los datos siguientes son las longitudes de piso (en pulgadas) detrás de los asientos segundo y tercero de nueve minivans diferentes:[12]

Segundo asiento: 62.0, 62.0, 64.5, 48.5, 57.5, 61.0, 45.5, 47.0, 33.0
Tercer asiento: 27.0, 27.0, 24.0, 16.5, 25.0, 27.5, 14.0, 18.5, 17.0

Como los datos contienen dos variables, introducimos las dos filas de números en las columnas C1 y C2 de la hoja de trabajo *MINITAB* y les damos los nombres “2o asiento” y “3er asiento”, respectivamente. Usando los menús descendentes, dé un clic en **Stat** → **Basic Statistics** → I
la figura 2.21.

FIGURA 2.21

category scales”. **Multiple Graphs** da opciones de impresión para múltiples gráficas de caja. **Labels** permite poner notas, títulos y notas al pie en la gráfica. Si ya ha introducido datos en la hoja de trabajo como distribución de frecuencia (valores en una columna, frecuencias en otra), las **Data Options** permitirán leer los datos en ese formato. La gráfica de caja para las longitudes del tercer asiento se muestra en la figura 2.24.

Usted puede usar los comandos de *MINITAB* del capítulo 1 para mostrar gráficas de tallo y hojas o histogramas para las dos variables. ¿Cómo describiría las similitudes y las diferencias en estos dos conjuntos de datos? Guarde esta hoja de trabajo en un archivo llamado “Minivans” antes de salir de *MINITAB*. Volverá a usarlo en el capítulo 3.

FIGURA 2.22

Si no necesita el conocimiento "práctico" de *MINITAB*, o si está utilizando otro paquete de software, omita estas secciones y use las impresiones de *MINITAB* como guías para la comprensión básica de los resultados impresos de computadora.

A cualquier alumno que tenga acceso a una computadora con un explorador como Internet Explorer o Netscape Navigator le son útiles los applets encontrados en el **Companion Website** para visualizar diversos conceptos estadísticos. Además, algunos de los applets se pueden usar en lugar del software de computadora para llevar a cabo análisis estadísticos simples. Los ejercicios escritos para su uso con estos applets aparecen en una sección al final de cada capítulo. Los alumnos pueden usar los applets en casa o en un laboratorio de cómputo, a medida que lean el material del texto, una vez que hayan terminado de leer todo el capítulo, o como una herramienta para repaso de examen. Los instructores tienen la posibilidad de asignar ejercicios de applets a los estudiantes, y usarlos como una herramienta en un entorno de laboratorio o para demostraciones visuales durante las clases. Creemos que estos applets serán una poderosa herramienta que ampliará el entusiasmo y la comprensión del alumno en los conceptos y procedimientos estadísticos.

MATERIAL DE APOYO PARA EL ESTUDIO

Los numerosos y variados ejercicios del texto suministran la mejor herramienta de aprendizaje para estudiantes que inician un primer curso de estadística. Cada ejercicio de aplicaciones ahora tiene un título, lo que facilita a alumnos y profesores identificar de inmediato tanto el contexto del problema como su área de aplicaciones.

APLICACIONES

5.43 Seguridad en un aeropuerto El mayor número de pequeños aviones de vuelos cortos en aeropuertos importantes ha aumentado la preocupación por la seguridad en el aire. Un aeropuerto de la región este ha registrado un promedio mensual de cinco accidentes que casi ocurren en aterrizajes y despegues en los últimos 5 años.

a. Encuentre la probabilidad de que durante un mes determinado no haya accidentes que casi ocurren en aterrizajes y despegues en el aeropuerto.

c. Un niño sufrirá a lo sumo una lesión durante el año.

5.46 Propenso a accidentes, continúa Consulte el ejercicio 5.45.

a. Calcule la media y desviación estándar para x, el número de lesiones por año sufridas por un niño en edad escolar.

b. ¿Dentro de qué límites esperaría usted que caiga el número de lesiones por año?

5.47 Bacterias en muestras de agua Si una gota de agua se pone en la platina y se examina bajo un microscopio, el número x de un tipo particular de bacteria

Se debe alentar a los alumnos a usar las nuevas secciones **Mi entrenador personal** y los **Repertorios de ejercicios** siempre que aparezcan en el texto. Los estudiantes pueden "llenar los espacios en blanco" escribiendo directamente en el texto y obtener retroalimentación inmediata comprobando las respuestas en la parte posterior del libro. Además, hay numerosas sugerencias prácticas llamadas **Mi consejo** que aparecen en los márgenes del texto.

MI CONSEJO

Regla empírica ⇔ datos en forma de montículo.

Chebyshev ⇔ datos en cualquier forma.

¿Es aplicable el teorema de Chebyshev? Sí, porque se puede usar para cualquier conjunto de datos. De acuerdo con el teorema de Chebyshev,

- al menos 3/4 de las mediciones caerán entre 10.6 y 32.6.
- al menos 8/9 de las mediciones caerán entre 5.1 y 38.1.

Las secciones **Mi applet** aparecen dentro del cuerpo del texto y explican el uso de un applet de Java. Por último, las secciones llamadas **Conceptos clave y fórmulas** aparecen en cada capítulo como un repaso a manera de esbozo del material cubierto en ese capítulo.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos clave y fórmulas

I. Medidas de centro de una distribución de datos

1. Media aritmética (media) o promedio
   a. Población: μ
   b. Muestra de n mediciones: $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$
2. Mediana; **posición** de la mediana $= .5(n + 1)$
3. Moda
4. La mediana puede ser preferida a la media si los datos son altamente sesgados.

II. Medidas de variabilidad

1. Rango: $R =$ máximo $-$ mínimo
2. Varianza
   a. Población de N mediciones:
   $$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}$$
   b. Muestra de n mediciones:
   $$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}}{n-1}$$

montículo. Aproximadamente 68%, 95% y 99.7% de las mediciones están a no más de uno, dos y tres desviaciones estándar de la media, respectivamente.

IV. Mediciones de posición relativa

1. Puntaje z muestral: $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$
2. p-ésimo percentil; p% de las mediciones son más pequeñas y $(100 - p)$% son más grandes.
3. Cuartil inferior, Q_1; **posición** de $Q_1 = .25\ (n + 1)$
4. Cuartil superior, Q_3; **posición** de $Q_3 = .75\ (n + 1)$
5. Rango intercuartil: $\text{IQR} = Q_3 - Q_1$

V. El resumen de cinco números y gráficas de caja

1. El **resumen de cinco números**:

   Min Q_1 Mediana Q_3 Max

   Un cuarto de las mediciones del conjunto de datos está entre cada uno de los cuatro pares adyacentes de números.
2. Se usan gráficas de caja para detectar resultados

El **Companion Website** proporciona a los alumnos una colección de recursos de estudio, que incluyen un conjunto completo de applets de Java utilizados para las secciones **Mi applet**, **PowerPoint® slides** (diapositivas en Power Point) para cada capítulo, **data sets** (conjunto de datos) para muchos de los ejercicios del texto guardados en distintos formatos y un **Graphing Calculator Manual** (manual de calculadora graficadora), que incluye instrucciones para llevar a cabo muchas de las técnicas del texto con la popular calculadora graficadora TI-83. Además, se incluyen conjuntos de **Practice (or Self-Correcting) Exercises** (ejercicios de práctica o autocorrección) para cada capítulo. Estos conjuntos de ejercicios van seguidos de las soluciones completas para cada uno. Estas soluciones son útiles para la pedagogía en cuanto que permiten a los alumnos precisar cualquier error cometido en cada uno de los pasos del cálculo que llevan a las respuestas finales. Los estudiantes tendrán acceso también al **Companion Website** (sitio web adjunto) específico del texto que contiene los conjuntos de datos y de pruebas interactivas en la red.

RECURSOS PARA EL PROFESOR

El **Instructor's Companion Website** (academic.cengage.com/statistics/mendenhall) disponible para los usuarios de la décimo tercera edición, ofrece una variedad de ayudas didácticas, incluyendo

- Todo el material del Student Companion Website, que añade ejercicios usando el Large Data Sets, el cual es acompañado por tres grandes conjuntos de datos que pueden utilizarse durante todo el curso. Un archivo denominado "Fortune" contiene los ingresos (en millones) para las *Fortune* U.S. corporaciones industriales más grandes en el año reciente; un archivo denominado "Batting" contiene los promedios de bateo para los campeones de bateo de las Liga de béisbol Americana y Nacional desde 1876 hasta el 2006; y un archivo llamado "Blood Pressure" contiene la edad y las presiones sistólicas y diastólicas de sangre para 965 hombres y 945 mujeres, compiladas por la National Institutes of Health
- Ejercicios clásicos con soluciones
- Power Points creados por Barbara Beaver
- Applets por Gary Mc Clelland (el conjunto completo de Java applets utilizado para las secciones MyApplet)
- Manual de la calculadora gráfica , incluye instrucciones para realizar muchas de las técnicas en el texto utilizando la calculadora gráfica TI-83.

WebAssign

WebAssign, el sistema de tareas más ampliamente utilizado en la enseñanza superior, le permite asignar, recopilar, graduar y grabar las asignaciones de tareas por medio de la web. A través de una alianza entre WebAssign y Brooks/Cole Cengage Learning, este comprobado sistema de tareas se ha mejorado para incluir vínculos a secciones de libros de texto, video de ejemplos y tutoriales de problemas específicos.

Power Lecture

Power Lecture™ con ExamView® para *Introducción a la probabilidad y estadística* contiene el Instructor's Solutions Manual, presentaciones Power Point preparadas por Barbara Beaver, ExamView Computarizad Testing, ejercicios clásicos, y el manual de la TI-83 preparado por James Davis.

RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen a Carolyn Crockett y al personal editorial de Brooks/Cole por su paciencia, ayuda y cooperación en la preparación de esta edición. Un agradecimiento especial a Gary McClelland por su cuidadosa personalización de los applets de Java usados en el texto y por sus pacientes, e incluso entusiastas, respuestas a nuestros constantes correos electrónicos.

Se agradece también a los revisores de la décima tercera edición Krishnamurthi Ravishankar, David Laws, Dustin Paisley y Maria Rizzo y a los revisores de la décima segunda edición Francis Mathur, George Montopoli, Keith Williams y S. T. Ziliak por sus útiles revisiones del manuscrito. Deseamos agradecer a los autores y organizaciones por permitirnos reimprimir material selecto; se hacen reconocimientos siempre que tal material aparece en el texto.

Robert J. Beaver
Barbara M. Beaver
William Mendenhall

Contenido breve

Contenido

Introducción
Entrene su cerebro para la estadística

© Kwest19/Dreamstime

¿Qué es estadística? ¿Ha conocido usted alguna vez a un experto en estadística? ¿Sabe usted qué hace? Quizá está pensando en la persona que se sienta en la cabina de transmisiones del Tazón de las Rosas, registrando el número de pases completos, yardas por tierra o intercepciones lanzadas el día de Año Nuevo. O quizá la simple mención de la palabra *estadística* le causa temor a usted. Puede que piense que no sabe usted nada de estadística, pero es casi inevitable que encuentre estadísticas en una forma u otra cada vez que tome un periódico. Veamos un ejemplo:

> **Encuestas ven que los republicanos mantienen control del Senado**
> NUEVA YORK. A unos cuantos días de elecciones de mitad de mandato, la ronda final de votaciones de la MSNBC/McClatchy muestra una carrera más apretada en la batalla por el control del Senado de Estados Unidos. Los demócratas van a la cabeza en varias carreras que podrían resultar en la recuperación del partido, pero los republicanos han reducido la brecha en las otras carreras, según encuestas de Mason-Dixon en 12 estados. En total, estas carreras clave del Senado muestran lo siguiente:
>
> - Dos republicanos titulares en serios problemas: Santorum y DeWine. Los demócratas pueden ganar dos asientos.
> - Cuatro republicanos titulares esencialmente ligados a sus oponentes: Allen, Burns, Chafee y Talent. Cuatro probabilidades que podrían convertirse en victorias demócratas.
> - Tres titulares demócratas con liderazgo: Cantwell, Menendez y Stabenow.
> - Un republicano titular delante de su oponente: Kyl.
> - Un asiento republicano abierto con el republicano a la cabeza: Tennessee.
> - Un asiento demócrata abierto prácticamente empatado: Maryland.

Los resultados muestran que los demócratas tienen buenas probabilidades de ganar al menos dos asientos en el Senado. Hasta ahora, deben ganar cuatro de los asientos probables y al mismo tiempo sostenerse en Maryland para ganar el control del Senado. Un total de 625 probables votantes en cada estado fueron entrevistados por teléfono. El margen de error, según normas que por lo general usan los estadísticos, es no mayor al 4% de puntos en cada votación.

—www.msnbc.com[1]

Artículos semejantes a éste son comunes en nuestros diarios y revistas y, en el periodo inmediato anterior a la elección presidencial, casi todos los días se publica una nueva encuesta. De hecho, en la elección nacional del 7 de noviembre, los demócratas pudieron controlar la cámara de representantes y la del Senado de Estados Unidos. El lenguaje de este artículo es muy conocido para todos, pero deja al lector curioso con algunas preguntas sin contestar. ¿Cómo fueron seleccionadas las personas en la encuesta? ¿Estas personas darán la misma respuesta mañana? ¿Darán la misma respuesta el día de la elección? ¿Votarán, incluso? ¿Son representativas de todos quienes votarán el día de la elección? Es trabajo de un estadístico hacer estas preguntas y hallar respuestas para ellas en el lenguaje de la encuesta.

Casi todos piensan de “encubrimiento” en datos del asesinato de JFK

La mayor parte del público piensa que el asesinato del presidente John F. Kennedy fue parte de una conspiración más grande, no el acto de un individuo. Además, casi todos los estadounidenses piensan que fue un encubrimiento de datos acerca de los disparos de 1963. Más de 40 años después del asesinato de JFK, una encuesta de FOX News muestra que casi todos los estadounidenses están en desacuerdo con las conclusiones del gobierno acerca del crimen. La **Comisión Warren** encontró que **Lee Harvey Oswald** actuó solo cuando le disparó a Kennedy, pero el 66% del público piensa hoy que el asesinato fue “parte de una conspiración más grande” en tanto que sólo 25% piensan que fue el “acto de un individuo”.

“Para los estadounidenses más viejos, el asesinato de Kennedy fue una experiencia traumática que empezó con la pérdida de confianza en el gobierno”, comentó John Gorman, presidente de Opinion Dynamics. “Las personas más jóvenes han crecido con películas y documentales que han impulsado mucho la línea de ‘conspiración’. Por lo tanto, no es de sorprender que haya un consenso nacional más bien sólido de que todavía no sabemos la verdad.”

(La encuesta preguntó): “¿Piensa usted que conocemos todos los datos acerca del asesinato del presidente John F. Kennedy o piensa que fue un encubrimiento?”

	Conocemos todos los datos	Hubo encubrimiento	(No está seguro)
Todos	14%	74	12
Demócratas	11%	81	8
Republicanos	18%	69	13
Independientes	12%	71	17

—www.foxnews.com[2]

Cuando usted ve un artículo como éste en una revista, ¿simplemente lee el título y el primer párrafo, o lee más y trata de entender el significado de los números? ¿Cómo obtuvieron estos datos los autores? ¿En realidad entrevistaron a todos los estadounidenses de cada afiliación política? Es trabajo del estadístico interpretar el lenguaje de este estudio.

Noticias de última hora: 98.6 no es normal

Después de creer durante más de un siglo que 98.6 era la temperatura corporal normal para seres humanos, los investigadores ahora dicen que normal ya no es normal.

Para algunas personas a ciertas horas del día, 99.9 grados podría estar bien. Y lecturas de sólo 96 resulta que son muy “humanas”.

La norma de 98.6 fue obtenida por un médico alemán en 1868. Algunos médicos siempre habían sospechado de la investigación del buen doctor. Su duda: un millón de lecturas, en una época sin computadoras.

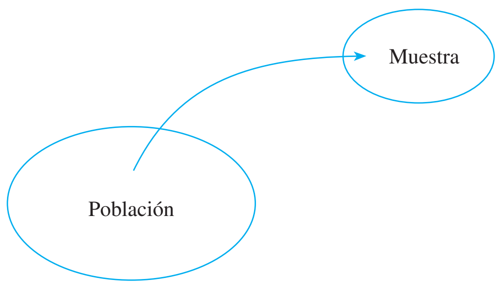
> Entonces, Mackowiak & Co. tomaron lecturas de temperatura a 148 personas sanas en un periodo de tres días y encontraron que la temperatura media era de 98.2 grados. Sólo 8% de las lecturas fue de 98.6.
>
> —*The Press-Enterprise*[3]

¿Qué preguntas le vienen a la mente cuando lee este artículo? ¿En qué forma el investigador seleccionó las 148 personas, y cómo podemos estar seguros que los resultados basados en estas 148 personas son precisos cuando se aplican a la población en general? ¿Cómo llegó el investigador a las temperaturas normales "alta" y "baja" dadas en el artículo? ¿Cómo registró el médico alemán un millón de temperaturas en 1868? Otra vez encontramos un problema estadístico con aplicaciones en la vida diaria.

La estadística es una rama de las matemáticas que tiene aplicaciones en cada toda faceta de nuestra vida. Es un lenguaje nuevo y poco conocido para casi todas las personas, pero, al igual que cualquier idioma nuevo, la estadística puede parecer agobiante a primera vista. Queremos que el lector "entrene su cerebro" para entender este nuevo lenguaje *paso a paso*. Una vez aprendido y entendido el lenguaje de la estadística, veremos que es una poderosa herramienta para el análisis de datos en numerosos campos de aplicación diferentes.

LA POBLACIÓN Y LA MUESTRA

En el lenguaje de la estadística, uno de los conceptos más elementales es el **muestreo**. En casi todos los problemas de estadística, un número especificado de mediciones o datos, es decir, una **muestra**, se toma de un cuerpo de mediciones más grande llamado **población**.



Para el experimento de la temperatura corporal, la muestra es el conjunto de mediciones de temperatura corporal para las 148 personas sanas escogidas por el experimentador. Esperamos que la muestra sea representativa de un conjunto mucho mayor de mediciones, la población, ¡las temperaturas corporales de todas las personas sanas del mundo!

¿Cuál es el interés principal, la muestra o la población? En la mayor parte de los casos, estamos interesados principalmente en la población, pero ésta puede ser difícil o imposible de enumerar. Imagine tratar de registrar la temperatura corporal de todas las personas sanas del mundo o ¡de la preferencia presidencial de todo votante registrado en Estados Unidos! En cambio, **tratamos de describir o pronosticar el comportamiento de la población con base en información obtenida de una muestra representativa de esa población**.

Las palabras *muestra* y *población* tienen dos significados para la mayoría de personas. Por ejemplo, usted lee en los periódicos que una encuesta Gallup realizada en Estados Unidos estuvo basada en una muestra de 1823 personas. Presumiblemente, a cada persona entrevistada se le hace una pregunta particular y la respuesta de esa persona representa una sola medida de la muestra. ¿La muestra es el conjunto de las 1823 personas, o es las 1823 respuestas que dan?

Cuando usamos lenguaje de la estadística, distinguimos entre el conjunto de objetos en el cual las mediciones se toman y las mediciones mismas. Para experimentadores, los objetos en los que las mediciones se toman se denominan **unidades experimentales**. El estadístico que estudia las muestras las llama **elementos de la muestra**.

ESTADÍSTICAS DESCRIPTIVAS E INFERENCIALES

Cuando primero se le presenta a usted un conjunto de mediciones, ya sea una muestra o una población, necesita encontrar una forma de organizarlo y resumirlo. La rama de la estadística que presenta técnicas para describir conjuntos de mediciones se denomina **estadística descriptiva**. El lector ha visto estadísticas descriptivas en numerosas formas: gráficas de barras, gráficas de pastel y gráficas de líneas presentadas por un candidato político; tablas numéricas en el periódico; o el promedio de cantidad de lluvia informado por el pronosticador del clima en la televisión local. Las gráficas y resúmenes numéricos generados en computadoras son comunes en nuestra comunicación de todos los días.

Definición La **estadística descriptiva** está formada por procedimientos empleados para resumir y describir las características importantes de un conjunto de mediciones.

Si el conjunto de mediciones es toda la población, sólo es necesario sacar conclusiones basadas en la estadística descriptiva. No obstante, podría ser demasiado costoso o llevaría demasiado tiempo enumerar toda la población. Quizá enumerar la población la destruiría, como en el caso de la prueba de "tiempo para falla". Por éstas y otras razones, quizá el lector sólo tenga una muestra de la población que, al verla, usted desee contestar preguntas acerca de la población en su conjunto. La rama de la estadística que se ocupa de este problema se llama **estadística inferencial**.

Definición La **estadística inferencial** está formada por procedimientos empleados para hacer inferencias acerca de características poblacionales, a partir de información contenida en una muestra sacada de esta población.

El **objetivo de la estadística inferencial** es hacer inferencias (es decir, sacar conclusiones, hacer predicciones, tomar decisiones) acerca de las características de una población a partir de información contenida en una muestra.

ALCANZAR EL OBJETIVO DE ESTADÍSTICAS INFERENCIALES: LOS PASOS NECESARIOS

¿Cómo puede hacer inferencias acerca de una población utilizando información contenida en una muestra? La tarea se hace más sencilla si el lector se entrena para organizar el problema en una serie de pasos lógicos.

1. **Especifique las preguntas a contestar e identifique la población de interés.** En la encuesta de elección presidencial, el objetivo es determinar quién obtendrá más votos el día de la elección. Por lo tanto, la población de interés es el conjunto de todos los votos en la elección presidencial. Cuando usted selecciona una muestra, es importante que la muestra sea representativa de *esta* población, no la población de preferencias de votantes del 5 de julio o en algún otro día antes de la elección.
2. **Decida cómo seleccionar la muestra.** Esto recibe el nombre de *diseño del experimento* o *procedimiento de muestreo*. ¿La muestra es representativa de la

población de interés? Por ejemplo, si una muestra de votantes registrados se selecciona del estado de Arkansas, ¿esta muestra será representativa de todos los votantes de Estados Unidos? ¿Será lo mismo que una muestra de "probables votantes", es decir, aquellos que es probable que en realidad voten en la elección? ¿La muestra es lo suficientemente grande para contestar las preguntas planteadas en el paso 1 sin perder tiempo y dinero en información adicional? Un buen diseño de muestreo contestará las preguntas planteadas, con mínimo costo para el experimentador.

3. **Seleccione la muestra y analice la información muestral.** Sin importar cuánta información contenga la muestra, el lector debe usar un método de análisis apropiado para extraerla. Muchos de estos métodos, que dependen del procedimiento de muestreo del paso 2, se explican en el texto.
4. **Use la información del paso 3 para hacer una inferencia acerca de la población.** Es posible usar muchos procedimientos diferentes para hacer esta inferencia y algunos son mejores que otros. Por ejemplo, podría haber 10 métodos diferentes para estimar la respuesta humana a un medicamento experimental, pero un procedimiento podría ser más preciso que los otros. Usted debe usar el mejor procedimiento disponible para hacer inferencias (muchos de estos se explican en el texto).
5. **Determine la confiabilidad de la inferencia.** Como usted está usando sólo una parte de la población para sacar las conclusiones descritas en el paso 4, ¡podría estar en un error! ¿Cómo puede ser esto? Si una agencia realiza una encuesta estadística para usted y estima que el producto de su compañía ganará 34% del mercado este año, ¿cuánta confianza puede usted poner en esta estimación? ¿Es precisa a no más de 1.5 o a 20 puntos porcentuales? ¿Es confiable lo suficiente para establecer metas de producción? Toda inferencia estadística debe incluir una medida de confiabilidad que dice cuánta confianza tiene usted en la inferencia.

Ahora que ya ha aprendido algunos de los términos y conceptos básicos del lenguaje de la estadística, otra vez hacemos la pregunta del principio de este análisis: ¿Sabe usted qué hace un estadístico? Es el trabajo del estadístico poner en práctica todos los pasos precedentes. Esto puede comprender preguntar al experimentador para asegurarse que la población de interés esté claramente definida, desarrollar un plan apropiado de muestreo o diseño experimental para dar máxima información al mínimo costo, analizar correctamente y sacar conclusiones usando la información muestral y, por último, medir la confiabilidad de las conclusiones con base en los resultados experimentales.

ENTRENE SU CEREBRO PARA LA ESTADÍSTICA

A medida que el lector avance en este libro, aprenderá cada vez más palabras, frases y conceptos de este nuevo lenguaje de estadística. Los procedimientos estadísticos, en su mayor parte, están formados de pasos de sentido común que, con tiempo suficiente, es muy probable que el lector haya descubierto por sí mismo. Como la estadística es una rama aplicada de las matemáticas, muchos de los conceptos básicos son matemáticos, desarrollados y basados en resultados de cálculo o de matemáticas más elevadas. No obstante, usted no tiene que derivar resultados para aplicarlos en una forma lógica. En este texto usamos ejemplos numéricos y argumentos intuitivos para explicar conceptos estadísticos, en lugar de argumentos matemáticos más complicados.

Para ayudarle en su entrenamiento estadístico, hemos incluido una sección llamada "Mi entrenador personal" en puntos apropiados del texto. Éste es su "entrenador personal", que le llevará paso a paso por algunos de los procedimientos que tienden a ser confusos para numerosos estudiantes. Una vez que lea la explicación paso a paso, trate de hacer las "Repeticiones de ejercicios", que por lo general aparecen en forma de tabla. Escriba las respuestas, justo en su libro y luego verifique sus respuestas contra las respuestas que están al final del libro. Si todavía tiene problemas, encontrará más "Repeticiones de ejercicios" en el conjunto de ejercicios para esa sección. También debe observar las sugerencias de estudio, llamadas "Mi consejo", que encontrará al margen del texto cuando lea el capítulo.

En años recientes, las computadoras se han hecho fácilmente accesibles para muchos estudiantes y son una valiosa herramienta. En el estudio de estadísticas, incluso un principiante puede usar paquetes de programas para realizar análisis estadísticos con un alto grado de rapidez y precisión. Algunos de los paquetes estadísticos más comunes que se pueden adquirir en centros de cómputo son el *MINITAB*™, SAS (Statistical Analysis System) y el SPSS (Statistical Package for the Social Sciences); las computadoras personales tienen capacidad para paquetes como el *MINITAB*, MS Excel y otros. Hay incluso programas de estadística en línea y "applets" interactivos en la internet.

Estos programas, llamados **software de estadística**, difieren en los tipos de análisis disponibles, las opciones dentro de los programas y las formas de resultados impresos (llamadas **salidas**), pero todos son semejantes. En este libro usamos principalmente el *MINITAB* como herramienta estadística; entender la salida básica de este paquete ayudará al estudiante a interpretar la salida de otros sistemas de cómputo.

Al final de casi todos los capítulos, el lector encontrará una sección llamada "Mi *MINITAB*". Estas secciones presentan ejemplos numéricos para guiarlo por los comandos del *MINITAB* y opciones que se usan para los procedimientos de ese capítulo. Si usted está usando *MINITAB* en un laboratorio o en casa, puede trabajar esta sección en su propia computadora para que se familiarice con los métodos prácticos del análisis del *MINITAB*. Si no necesita conocimientos prácticos del *MINITAB*, puede escoger saltarse esta sección y simplemente usar las impresiones del *MINITAB* para análisis cuando aparezcan en el texto.

También encontrará una sección llamada "Mi Applet" en muchos de los capítulos. Estas secciones son una introducción útil a los **applets** estadísticos que hay en el sitio web Premium. Usted puede usar estos applets para visualizar muchos de los conceptos de capítulos y hallar soluciones a ejercicios en una nueva sección llamada "Ejercicios de Mi Applet".

Más importante aún es que usar la estadística en forma satisfactoria requiere sentido común y pensamiento lógico. Por ejemplo, si usted desea hallar el promedio de estaturas de todos los estudiantes de una universidad en particular, ¿seleccionaría toda la muestra de los miembros del equipo de baloncesto? En el ejemplo de la temperatura del cuerpo, quien piensa de manera lógica cuestionaría un promedio de 1868 basado en un millón de mediciones, cuando las computadoras ni siquiera se habían inventado.

A medida que el lector aprenda nuevos términos estadísticos, conceptos y técnicas, recuerde ver todos los problemas con ojo crítico y verificar que la regla de sentido común se aplica. En todo el texto, le recordaremos de los problemas y riesgos en el uso o mal uso de estadísticas. Benjamin Disraeli dijo una vez que hay tres clases de mentiras, *mentiras*, *malditas mentiras* y *estadísticas*. Nuestro propósito es disipar esta frase, para mostrar al estudiante cómo hacer que las estadísticas *funcionen* y *no le mientan* a usted.

Cuando continúe por este libro, periódicamente consulte este "manual de entrenamiento". Cada capítulo aumentará su conocimiento del lenguaje de estadística y debe, en alguna forma, ayudar al lector a dar uno de los pasos aquí descritos. Cada uno de estos pasos es esencial para alcanzar el objetivo general de la estadística inferencial: hacer inferencias acerca de una población usando información contenida en una muestra tomada de esa población.

1

Descripción de datos por medio de gráficas

© Pavel Losevsky/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

Numerosos conjuntos de mediciones son muestras seleccionadas de poblaciones más grandes; otros constituyen toda una población, como es el caso de un censo nacional. En este capítulo aprenderemos qué es una *variable*, cómo clasificar variables en varios tipos y cómo se generan mediciones o datos. El lector aprenderá entonces a usar gráficas para describir conjuntos de datos.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo construyo una gráfica de tallo y hoja?
¿Cómo construyo un histograma de frecuencia relativa?

¿Cómo está su presión sanguínea?

¿Su presión sanguínea es normal o es demasiado alta o demasiado baja? El estudio práctico que aparece al final de este capítulo examina un conjunto grande de datos sobre la presión sanguínea. El lector usará gráficas para describir estos datos y comparar su presión sanguínea con la de otros de su misma edad y género.

1.1 VARIABLES Y DATOS

En los capítulos 1 y 2 presentaremos algunas técnicas básicas de *estadística descriptiva*, que es la rama de la estadística que se ocupa de describir conjuntos de mediciones, tanto *muestras* como *poblaciones*. Una vez que el lector haya recolectado un conjunto de mediciones, ¿cómo puede mostrar este conjunto en una forma clara, entendible y fácil de leer? Primero, debe tener aptitud para definir lo que se entiende por medición o "datos" y clasificar los tipos de datos que probablemente se encuentre en la vida real. Empezamos por introducir algunas definiciones, términos nuevos en el lenguaje de la estadística que es necesario saber.

Definición Una **variable** es una característica que cambia o varía con el tiempo y/o para diferentes personas u objetos bajo consideración.

Por ejemplo, la temperatura corporal es una variable que cambia con el tiempo en una sola persona; también varía de una persona a otra. La afiliación religiosa, el origen étnico, el ingreso, la estatura, edad y número de hijos son todas ellas variables, es decir, características que varían según la persona seleccionada.

En la Introducción definimos una *unidad experimental* o un *elemento de la muestra* como el objeto en el que se toma una medición. Del mismo modo, podríamos definir una unidad experimental como el objeto en el que se mide una variable. Cuando una variable se mide en realidad en un conjunto de unidades experimentales, resulta un conjunto de mediciones o de **datos**.

Definición Una **unidad experimental** es el individuo u objeto en el que se mide una variable. Resulta una sola **medición** o datos cuando una variable se mide en realidad en una unidad experimental.

Si se genera una medición para toda unidad experimental en toda la colección, el conjunto de datos resultante constituye la *población* de interés. Cualquier conjunto más pequeño de mediciones es una *muestra.*

Definición Una **población** es el conjunto de mediciones de interés para el investigador.

Definición Una **muestra** es un subconjunto de mediciones seleccionado de la población de interés.

EJEMPLO 1.1

De entre todos los alumnos de una gran universidad se selecciona un conjunto de cinco estudiantes y las mediciones se introducen en una hoja de cálculo, como la que se muestra en la figura 1.1. Identifique los diversos elementos comprendidos en la generación de este conjunto de mediciones.

Solución Hay diversas *variables* en este ejemplo. La *unidad experimental* en la que se miden las variables es un alumno del plantel en particular, identificado en la columna C1. Se miden cinco variables para cada estudiante: promedio de calificaciones (GPA), género, año en la universidad, curso de maestría y número actual de unidades en las que está inscrito. Cada una de estas características varía de un estudiante a otro. Si consideramos las GPA de todos los estudiantes de esta universidad como la población de interés, las cinco GPA de la columna C2 representan una *muestra* de esta población. Si se hubiera medido el GPA de cada estudiante de la universidad, hubiéramos generado toda la *población* de mediciones para esta variable.

FIGURA 1.1
Mediciones de cinco estudiantes

Worksheet 1 ***

↓	C1	C2	C3-T	C4-T	C5-T	C6
	Student	GPA	Gender	Year	Major	Number of Units
1	1	2.0	F	Fr	Psychology	16
2	2	2.3	F	So	Mathematics	15
3	3	2.9	M	So	English	17
4	4	2.7	M	Fr	English	15
5	5	2.6	F	Jr	Business	14

La segunda variable que se mide en los estudiantes es el género, en la columna C3-T. Esta variable puede tomar sólo dos valores: Masc (M) o Fem (F). No es una variable que tenga valor numérico y, por lo tanto, es un poco diferente del GPA. La población, si pudiera ser enumerada, estaría formada por un conjunto de letras M y F, una para cada estudiante de la universidad. Análogamente, las variables tercera y cuarta, año y especialidad, generan datos no numéricos. El año tiene cuatro categorías (primero, segundo, pasante y graduado) y la especialidad tiene una categoría para cada especialidad en el plantel. La última variable, el número actual de unidades en que está inscrito, es de valor numérico y genera un conjunto de números en lugar de un conjunto de cualidades o características.

Aun cuando hemos examinado cada una de las variables en forma individual, recuerde que hemos medido cada una de estas cinco variables en una sola unidad experimental: el estudiante. Por lo tanto, en este ejemplo, una "medición" en realidad está formada por cinco observaciones, una para cada una de las cinco variables medidas. Por ejemplo, la medición tomada en el estudiante 2 produce esta observación:

(2.3, F, So, Matemáticas, 15)

Se puede ver que hay una diferencia entre *una sola* variable medida en una sola unidad experimental y *múltiples* variables medidas en una unidad experimental como en el ejemplo 1.1.

Definición Resultan **datos univariados** cuando se mide una sola variable en una sola unidad experimental.

Definición Resultan **datos bivariados** cuando se miden dos variables en una sola unidad experimental. Resultan **datos multivariados** cuando se miden más de dos variables.

Si se miden las temperaturas corporales de 148 personas, los datos resultantes son *univariados*. En el ejemplo 1.1, cinco variables se midieron en cada estudiante, lo que resultó en datos *multivariados*.

1.2 TIPOS DE VARIABLES

Se pueden clasificar variables en una de dos categorías: **cualitativas** y **cuantitativas**.

Definición Las **variables cualitativas** miden una cualidad o característica en cada unidad experimental. Las **variables cuantitativas** miden una cantidad numérica en cada unidad experimental.

Las variables cualitativas producen datos que se pueden clasificar de acuerdo a similitudes o diferencias en clase; por lo tanto, con frecuencia se denominan **datos categóricos**. Las variables como género, año y especialidad en el ejemplo 1.1 son variables cualitativas que producen datos categóricos. He aquí algunos otros ejemplos:

MI CONSEJO

Cualitativo ⇔ "calidad" o característica

Cuantitativo ⇔ "cantidad" o número

- Afiliación política: republicano, demócrata, independiente
- Clasificación de gusto: excelente, bueno, regular, malo
- Color de un dulce M&M'S®: café, amarillo, rojo, anaranjado, verde, azul

Las variables cuantitativas, con frecuencia representadas por la letra x, producen datos numéricos, por ejemplo estos:

- x = tasa preferencial de interés
- x = número de pasajeros en un vuelo de Los Ángeles a Nueva York
- x = peso de un paquete listo para ser enviado
- x = volumen de jugo de naranja en un vaso

Observe que hay una diferencia en los tipos de valores numéricos que pueden tomar estas variables cuantitativas. El número de pasajeros, por ejemplo, puede tomar sólo los valores $x = 0, 1, 2, \ldots$, mientras que el peso de un paquete puede tomar cualquier valor mayor a cero, o sea $0 < x < \infty$. Para describir esta diferencia, definimos dos tipos de variables cuantitativas: **discretas** y **continuas**.

Definición Una **variable discreta** puede tomar sólo un número finito o contable de valores. Una **variable continua** puede tomar infinitamente muchos valores correspondientes a los puntos en un intervalo de recta.

MI CONSEJO

Discreta ⇔ "factible de poner en lista"

Continua ⇔ "no factible de poner en lista"

El nombre de *discreta* se refiere a las brechas discretas entre los posibles valores que la variable puede tomar. Variables como el número de miembros de una familia, el número de ventas de autos nuevos y el número de llantas defectuosas devueltas para cambio son todos ellos ejemplos de variables discretas. Por el contrario, variables como la estatura, peso, tiempo, distancia y volumen son *continuas* porque pueden tomar valores en cualquier punto a lo largo de un intervalo de recta. Para cualesquier dos valores que se escojan, un tercer valor siempre puede hallarse entre ellos.

EJEMPLO 1.2

Identifique cada una de las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas:

1. El uso más frecuente de su horno de microondas (recalentar, descongelar, calentar, otros)
2. El número de consumidores que se niegan a contestar una encuesta por teléfono
3. La puerta escogida por un ratón en un experimento de laberinto (A, B o C)
4. El tiempo ganador para un caballo que corre en el Derby de Kentucky
5. El número de niños en un grupo de quinto grado que leen al nivel de ese grado o mejor

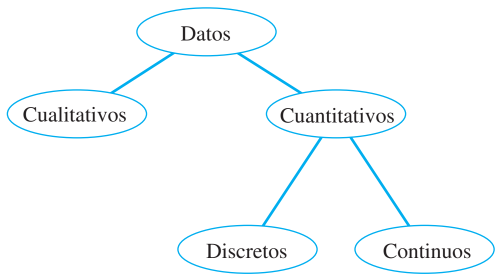
Solución Las variables 1 y 3 son *cualitativas* porque sólo una cualidad o característica se mide para cada individuo. Las categorías para estas dos variables se muestran entre paréntesis. Las otras tres variables son *cuantitativas*. La variable 2, el número de consumidores, es una variable *discreta* que puede tomar cualquiera de los valores $x = 0, 1, 2, \ldots$, con un valor máximo que depende del número de consumidores llamados. Del mismo modo, la variable 5, el número de niños que leen al nivel de ese grado, o mejor, pueden tomar cualquiera de los valores $x = 0, 1, 2, \ldots$, con un valor máximo que depende del número de niños que haya en el grupo. La variable 4, el tiempo ganador para un caballo del Derby de Kentucky, es la única variable *continua* de la lista. El tiempo ganador, si pudiera medirse con suficiente precisión, podría ser 121 segundos, 121.5 segundos, 121.25 segundos o cualesquier valores entre dos tiempos cualesquiera que hemos puesto en lista.

MI CONSEJO

Es frecuente que las variables discretas comprendan el "número" de artículos de un conjunto.

La figura 1.2 describe los tipos de datos que hemos definido. ¿Por qué debe el lector preocuparse por diferentes clases de variables y los datos que generan? La razón es que los métodos empleados para describir conjuntos de datos dependen del tipo de datos que haya recolectado. Para cada uno de los conjuntos de datos recolectados, la clave será determinar qué tipo de datos tiene y ¡cómo puede presentarlos en forma más clara y entendible a su audiencia!

FIGURA 1.2
Tipos de datos



1.3 GRÁFICAS PARA DATOS CATEGÓRICOS

Una vez recolectados los datos, éstos pueden consolidarse y resumirse para mostrar la siguiente información:

- ¿Qué valores de la variable han sido medidos?
- ¿Con qué frecuencia se presenta cada uno de los valores?

Para este fin, se puede construir una *tabla estadística* que se puede usar para mostrar los datos gráficamente como una distribución de datos. El tipo de gráfica que se escoja depende del tipo de variable que se haya medido.

Cuando la variable de interés es *cualitativa*, la tabla estadística es una lista de las categorías siendo consideradas junto con una medida de la frecuencia con que se presenta cada valor. Se puede medir "la frecuencia" en tres formas diferentes:

- La **frecuencia** o número de mediciones en cada categoría
- La **frecuencia relativa** o proporción de mediciones en cada categoría
- El **porcentaje** de mediciones en cada categoría

Por ejemplo, si con n representamos el número total de mediciones en el conjunto, se puede hallar la frecuencia relativa y porcentaje usando estas relaciones:

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{\text{Frecuencia}}{n}$$

$$\text{Porcentaje} = 100 \times \text{Frecuencia relativa}$$

Se encontrará que la suma de las frecuencias es siempre n, la suma de las frecuencias relativas es 1 y la suma de los porcentajes es 100%.

Las categorías para una variable cualitativa deben escogerse de modo que

- una medición pertenecerá a una categoría y sólo a una
- cada medición tiene una categoría a la que se puede asignar

MI CONSEJO

Tres pasos para una distribución de datos: (1) datos sin elaborar ⇒ (2) tabla estadística ⇒ (3) gráfica

Por ejemplo, si se pueden clasificar productos cárnicos de acuerdo con el tipo de carne utilizada, se pueden usar estas categorías: carne de res, pollo, marisco, carne de puerco, pavo, otra. Para clasificar rangos de la facultad de una escuela, se pueden usar estas categorías: profesor, profesor adjunto, profesor auxiliar, instructor, conferenciante, otro. La categoría "otro" está incluida en ambos casos para tomar en cuenta la posibilidad de que una medición no se pueda asignar a una de las categorías anteriores.

Una vez que a las mediciones se les hayan dado categorías y se resumieron en una *tabla estadística*, se puede usar ya sea una gráfica de pastel o una gráfica de barras para mostrar la distribución de los datos. Una **gráfica de pastel** es la conocida gráfica circular que muestra la forma en que están distribuidas las medidas entre las categorías. Una **gráfica de barras** muestra la misma distribución de medidas en categorías, con la altura de la barra midiendo la frecuencia con la que se observa una categoría en particular.

EJEMPLO 1.3

En una encuesta respecto a la educación pública, a 400 administradores de escuelas se les pidió calificaran la calidad de la educación en Estados Unidos. Sus respuestas están resumidas en la tabla 1.1. Construya una gráfica de pastel y una de barras a partir de este conjunto de datos.

Solución Para construir una gráfica de pastel, asigne un sector de círculo a cada categoría. El ángulo de cada sector debe ser proporcional a la magnitud de las mediciones (o *frecuencia relativa*) en esa categoría. Como un círculo contiene 360°, se puede usar esta ecuación para hallar el ángulo:

$$\text{Ángulo} = \text{Frecuencia relativa} \times 360°$$

TABLA 1.1 **Calificación de la educación en Estados Unidos hecha por 400 educadores**

Calificación	Frecuencia
A	35
B	260
C	93
D	12
Total	400

La tabla 1.2 muestra las calificaciones junto con las frecuencias, frecuencias relativas, porcentajes y ángulos de sector necesarios para construir la gráfica de pastel. La figura 1.3 muestra la gráfica de pastel construida a partir de los valores de la tabla. Mientras que las gráficas de pastel usan porcentajes para determinar los tamaños relativos de las "rebanadas de pastel", las de barras por lo general grafican frecuencia contra las categorías. Una gráfica de barras para estos datos se muestra en la figura 1.4.

MI CONSEJO

Las proporciones suman 1; los porcentajes, 100; los ángulos de sector, 360°.

TABLA 1.2 **Cálculos para la gráfica de pastel del ejemplo 1.3**

Calificación	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje	Ángulo
A	35	35/400 = .09	9%	.09 × 360 = 32.4º
B	260	260/400 = .65	65%	234.0º
C	93	93/400 = .23	23%	82.8º
D	12	12/400 = .03	3%	10.8º
Total	400	1.00	100%	360º

El impacto visual de estas dos gráficas es un poco diferente. La gráfica de pastel se usa para mostrar las relaciones de las partes con respecto al todo; la gráfica de barras se usa para destacar la cantidad real o frecuencia para cada categoría. Como las categorías en este ejemplo son "calificaciones" ordenadas (A, B, C, D), no desearíamos reacomodar las barras de la gráfica para cambiar su *forma.* En una gráfica de pastel, el orden de presentación es irrelevante.

FIGURA 1.3
Gráfica de pastel para el ejemplo 1.3

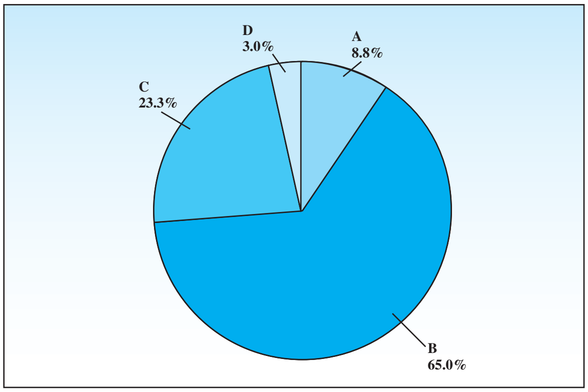
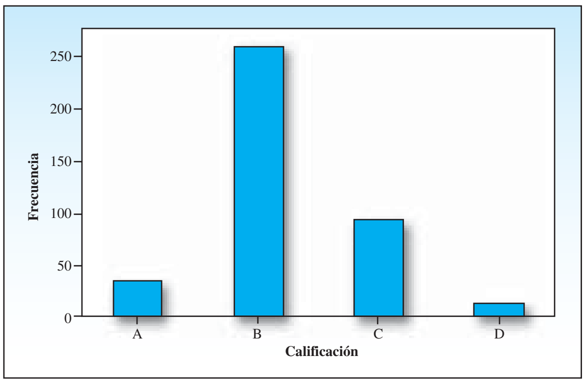


FIGURA 1.4
Gráfica de barras para el ejemplo 1.3



EJEMPLO 1.4

Una bolsa de tamaño botana de dulces de cacahuate M&M'S contiene 21 dulces con los colores que se indican en la tabla 1.3. La variable "color" es *cualitativa*, por lo que la tabla 1.4 pone en lista las seis categorías junto con un total del número de dulces de cada color. Las últimas tres columnas de la tabla 1.4 dan las tres diferentes medidas de con qué frecuencia se presenta cada categoría. Como las categorías son colores y no tienen un orden particular, se pueden construir gráficas de barras con muchas *formas* diferentes con sólo reordenar las barras. Para enfatizar que el café es el color más frecuente, seguido por el azul, verde y anaranjado, ordenamos las barras de mayor a menor y generamos la gráfica de barras usando el *MINITAB* en la figura 1.5. Una gráfica de barras en la que las barras están ordenadas de mayor a menor se denomina **gráfica de Pareto**.

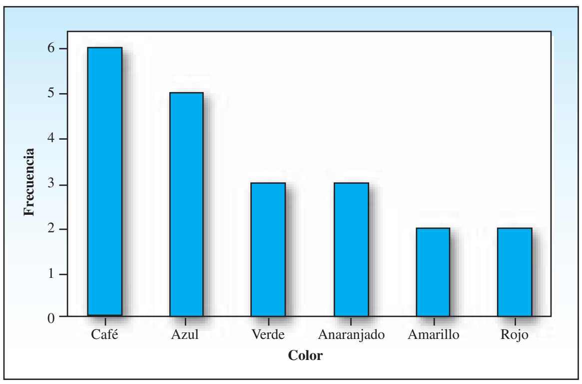
TABLA 1.3 **Datos sin elaborar: colores de 21 dulces**

Café	Verde	Café	Azul
Rojo	Rojo	Verde	Café
Amarillo	Anaranjado	Verde	Azul
Café	Azul	Azul	Café
Anaranjado	Azul	Café	Anaranjado
Amarillo			

TABLA 1.4 **Tabla estadística: datos de M&M'S para el ejemplo 1.4**

Categoría	Total	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
Café	𝍸 I	6	6/21	28%
Verde	III	3	3/21	14
Anaranjado	III	3	3/21	14
Amarillo	II	2	2/21	10
Rojo	II	2	2/21	10
Azul	𝍸	5	5/21	24
Total		21	1	100%

FIGURA 1.5
Gráfica de barras *MINITAB* para el ejemplo 1.4



1.3 EJERCICIOS

PARA ENTENDER LOS CONCEPTOS

1.1 Unidades experimentales Identifique las unidades experimentales en los que se miden las variables siguientes:

a. Género de un estudiante
b. Número de errores en un examen de medio semestre
c. Edad de un paciente con cáncer
d. Número de flores en una planta de azalea
e. Color de un auto que entra a un estacionamiento

1.2 ¿Cualitativa o cuantitativa? Identifique cada una de las variables como cuantitativa o cualitativa:

a. Tiempo para ensamblar un rompecabezas sencillo
b. Número de estudiantes en un salón de clases de primer año
c. Calificación de un político recién electo (excelente, bueno, regular, malo)
d. Estado en que vive una persona

1.3 ¿Discreta o continua? Identifique las siguientes variables cuantitativas como discretas o continuas:

a. Población en una región particular de un país

b. Peso de periódicos recuperados para reciclar en un solo día

c. Tiempo para completar un examen de sociología

d. Número de consumidores en una encuesta de 1000 que consideran importante aplicar leyenda nutrimental en productos alimenticios

1.4 ¿Discreta o continua? Identifique cada una de las variables cuantitativas como discretas o continuas.

a. Número de accidentes en botes en un tramo de 50 millas del río Colorado

b. Tiempo para completar un cuestionario

c. Costo de una lechuga

d. Número de hermanos y hermanas que tenga el lector

e. Rendimiento en kilogramos de trigo para un terreno de 1 hectárea de un trigal

1.5 Estacionamiento en un plantel Se seleccionan seis vehículos, de entre los que tienen permiso para estacionarse, y se registran los datos siguientes:

Vehículo	Tipo	Marca	¿Colectivo?	Distancia de viaje en una dirección (millas)	Antigüedad del vehículo (años)
1	Auto	Honda	No	23.6	6
2	Auto	Toyota	No	17.2	3
3	Camión	Toyota	No	10.1	4
4	Van	Dodge	Sí	31.7	2
5	Moto-cicleta	Harley-Davidson	No	25.5	1
6	Auto	Chevrolet	No	5.4	9

a. ¿Cuáles son las unidades experimentales?

b. ¿Cuáles son las variables que se miden? ¿Qué tipos de variables son?

c. ¿Estos datos son univariados, bivariados o multivariados?

1.6 Presidentes de Estados Unidos Un conjunto de datos contiene las edades al fallecimiento de cada uno de los anteriores 38 presidentes de Estados Unidos ahora desaparecidos.

a. ¿Este conjunto de mediciones es una población o una muestra?

b. ¿Cuál es la variable que se mide?

c. ¿La variable del inciso b) es cuantitativa o cualitativa?

1.7 Actitudes del electorado Usted es candidato a la legislatura de su estado y desea hacer una encuesta de las actitudes del electorado, respecto a las probabilidades que tenga usted para ganar. Identifique la población que es de interés para usted y de la que le gustaría seleccionar una muestra. ¿En qué forma esta población depende del tiempo?

1.8 Tiempos de supervivencia al cáncer Un investigador médico desea estimar el tiempo de supervivencia de un paciente, después del inicio de un tipo particular de cáncer y después de un régimen particular de radioterapia.

a. ¿Cuál es la variable de interés para el investigador médico?

b. ¿La variable del inciso a) es cualitativa, cuantitativa, discreta o cuantitativa continua?

c. Identifique la población de interés para el investigador médico.

d. Describa la forma en que el investigador podría seleccionar una muestra de entre la población.

e. ¿Qué problemas podrían surgir al muestrear desde esta población?

1.9 Nuevos métodos de enseñanza Un investigador educacional desea evaluar la efectividad de un nuevo método de enseñanza de lectura a estudiantes sordos. El logro al final de un periodo de enseñanza es medido por la calificación de un estudiante en un examen de lectura.

a. ¿Cuál es la variable a medir? ¿Qué tipo de variable es?

b. ¿Cuál es la unidad experimental?

c. Identifique la población de interés para el experimentador.

TÉCNICAS BÁSICAS

1.10 Cincuenta personas se agrupan en cuatro categorías, A, B, C y D, y el número de personas que caen en cada categoría se muestra en la tabla:

Categoría	Frecuencia
A	11
B	14
C	20
D	5

a. ¿Cuál es la unidad experimental?

b. ¿Cuál es la variable que se mide? ¿Es cualitativa o cuantitativa?

c. Construya una gráfica de pastel para describir los datos.

d. Construya una gráfica de barras para describir los datos.

e. ¿La forma de la gráfica de barras del inciso d) cambia, dependiendo del orden de presentación de las cuatro categorías? ¿Es importante el orden de presentación?

f. ¿Qué *proporción* de las personas está en la categoría B, C o D?

g. ¿Qué *porcentaje* de las personas *no* está en la categoría B?

1.11 Jeans Un fabricante de jeans (pantalones vaqueros) tiene plantas en California, Arizona y Texas. Un grupo de 25 pares de jeans se selecciona al azar de entre la base de datos computarizada, registrándose el estado en el que se produce:

CA	AZ	AZ	TX	CA
CA	CA	TX	TX	TX
AZ	AZ	CA	AZ	TX
CA	AZ	TX	TX	TX
CA	AZ	AZ	CA	CA

a. ¿Cuál es la unidad experimental?

b. ¿Cuál es la variable que se mide? ¿Es cualitativa o cuantitativa?

c. Construya una gráfica de pastel para describir los datos.

d. Construya una gráfica de barras para describir los datos.

e. ¿Qué *proporción* de los jeans se hace en Texas?

f. ¿Cuál estado produjo más jeans del grupo?

g. Si se desea averiguar si las tres plantas produjeron iguales números de jeans, o si una produjo más jeans que las otras, ¿cómo se pueden usar las gráficas de las partes c y d para ayudar? ¿Qué conclusiones puede *el lector* sacar de estos datos?

APLICACIONES

1.12 Elección 2008 Durante la primavera de 2006, los medios de comunicación ya estaban realizando encuestas de opiniones que rastreaban las fortunas de los principales candidatos que esperaban ser presidentes en Estados Unidos. Una de estas encuestas, dirigida por *Financial Dynamics*, mostró los siguientes resultados:[1]

"Pensando por adelantado en la siguiente elección presidencial, si la elección de 2008 se realizara hoy y los candidatos fueran demócratas [vea abajo] y republicanos [vea abajo], ¿por quién votaría?

John McCain (R) %	Hillary Clinton (D) %	Inseguro %
46	42	13
John McCain %	Al Gore %	Inseguro %
51	33	15
Rudy Giuliani %	Hillary Clinton %	Inseguro %
49	40	12
Rudy Giuliani %	Al Gore %	Inseguro %
50	37	13

Fuente: www.pollingreport.com

Los resultados estuvieron basados en una muestra tomada en los días 16, 17 y 18 de mayo de 2006, de 900 votantes registrados en todo el país.

a. Si los entrevistadores estuvieran planeando usar estos resultados para pronosticar el resultado de la elección presidencial de 2008, describa la población de interés para ellos.

b. Describa la población real de la cual se sacó la muestra.

c. Algunos entrevistadores prefieren seleccionar una muestra de "probables" votantes. ¿Cuál es la diferencia entre "votantes registrados" y "probables votantes"? ¿Por qué es esto importante?

d. La muestra seleccionada por los entrevistadores, ¿es representativa de la población descrita en el inciso a)? Explique.

1.13 ¿Desea ser presidente? ¿Le gustaría ser presidente de Estados Unidos? Aun cuando muchos adolescentes piensan que podrían llegar a ser presidente, muchos no desean el trabajo. En una encuesta de opinión realizada por *ABC News*, casi 80% de los adolescentes no estaban interesados en el trabajo.[2] Cuando se les preguntaba: "¿Cuál es la principal razón por la que no querría ser presidente?" dieron estas respuestas:

Otros planes de carrera/no le interesa	40%
Demasiada presión	20%
Demasiado trabajo	15%
No sería bueno para ello	14%
Demasiadas discusiones	5%

a. ¿Están consideradas todas las razones en esta tabla?

b. ¿Usaría usted una gráfica de pastel o una de barras para describir gráficamente los datos? ¿Por qué?

c. Trace la gráfica escogida en el inciso b).

d. Si usted fuera a conducir la encuesta de opiniones, ¿qué otros tipos de preguntas desearía investigar?

1.14 Distribuciones de carrera en las fuerzas armadas Las cuatro ramas de las fuerzas armadas en Estados Unidos son muy diferentes en su formación con respecto a las distribuciones de género, raza y edad. La tabla siguiente muestra el desglose racial de los miembros del Ejército y la Fuerza Aérea de Estados Unidos.[3]

	Ejército	Fuerza Aérea
Blanco	58.4%	75.5%
Negro	26.3%	16.2%
Latino	8.9%	5.0%
Otro	6.4%	3.3%

Fuente: revista *Time*

a. Defina la variable que se ha medido en esta tabla.

b. ¿La variable es cuantitativa o cualitativa?

c. ¿Qué representan los números?

d. Construya una gráfica de pastel para describir el desglose racial en el Ejército de Estados Unidos.

e. Construya una gráfica de barras para describir el desglose de razas en la Fuerza Aérea de Estados Unidos.

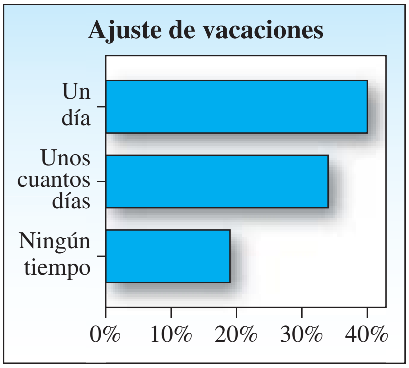
f. ¿Qué porcentaje de los miembros del Ejército de Estados Unidos son minorías, es decir, no blancos? ¿Cuál es este porcentaje en la Fuerza Aérea de Estados Unidos?

1.15 De regreso al trabajo ¿Cuánto tarda usted en ajustarse a su rutina normal de trabajo después de regresar de vacaciones? A continuación se muestra una gráfica de barras con datos de la sección Instantáneas de *USA Today*.[4]

a. ¿Están consideradas todas las opiniones de la tabla? Agregue otra categoría si es necesario.

b. ¿La gráfica de barras está trazada con precisión? Esto es, ¿están las tres barras en la proporción correcta entre sí?

c. Use una gráfica de pastel para describir las opiniones. ¿Cuál gráfica es más interesante para verla?



1.4 GRÁFICAS PARA DATOS CUANTITATIVOS

Las *variables cuantitativas* miden una cantidad en cada unidad experimental. Si la variable puede tomar sólo un número finito o contable de valores, es una variable *discreta*. Una variable que puede tomar un número infinito de valores correspondientes a puntos en un intervalo de recta se llama *continua*.

Gráficas de pastel y gráficas de barras

A veces la información se recolecta para una variable cuantitativa medida en segmentos diferentes de la población, o para diferentes categorías de clasificación. Por ejemplo, se podría medir el promedio de ingresos de personas de diferentes grupos de edad, géneros diferentes, o que viven en zonas geográficas diferentes del país. En tales casos, se pueden usar gráficas de pastel o gráficas de barras para describir los datos, usando la cantidad medida en cada categoría en lugar de la frecuencia con que se presenta cada una de las categorías. La *gráfica de pastel* muestra la forma en que está distribuida la cantidad total entre las categorías y la *gráfica de barras* usa la altura de la barra para mostrar la cantidad de una categoría en particular.

EJEMPLO 1.5

La cantidad de dinero gastada en el año fiscal 2005, por el Departamento de Defensa de Estados Unidos en varias categorías, se muestra en la tabla 1.5.[5] Construya una gráfica de pastel y una gráfica de barras para describir los datos. Compare las dos formas de presentación.

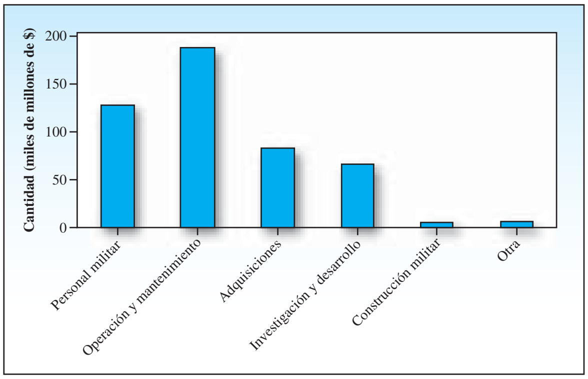
TABLA 1.5 **Gastos por categoría**

Categoría	Cantidad (miles de millones de dólares)
Personal militar	$127.5
Operación y mantenimiento	188.1
Adquisiciones	82.3
Investigación y desarrollo	65.7
Construcción militar	5.3
Otra	5.5
Total	$474.4

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

Solución Dos variables están siendo medidas: la categoría de gasto (*cualitativa*) y la cantidad del gasto (*cuantitativa*). La gráfica de barras de la figura 1.6 muestra las categorías en el eje horizontal y las cantidades en el eje vertical. Para la gráfica de pastel

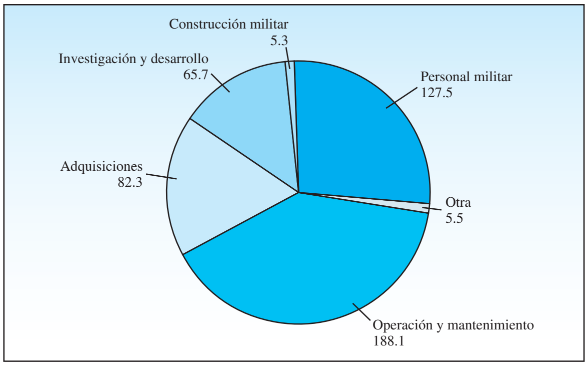
FIGURA 1.6
Gráfica de barras para el ejemplo 1.5



de la figura 1.7, cada "rebanada del pastel" representa la proporción de los gastos totales ($474.4 miles de millones de dólares) correspondientes a su categoría en particular. Por ejemplo, para la categoría de investigación y desarrollo, el ángulo del sector es

$$\frac{65.7}{474.4} \times 360° = 49.9°$$

FIGURA 1.7
Gráfica de pastel para el ejemplo 1.5



Ambas gráficas muestran que las cantidades más grandes de dinero se gastaron en personal y operaciones. Como no hay un orden inherente a las categorías, hay libertad para reacomodar las barras o sectores de las gráficas en cualquier forma deseada. La *forma* de la gráfica de barras no tiene nada que ver con su interpretación.

Gráficas de líneas

Cuando una variable cuantitativa se registra en el tiempo a intervalos igualmente espaciados (por ejemplo diario, semanal, mensual, trimestral o anual), el conjunto de datos forma una **serie de tiempo**. Los datos de una serie de tiempo se presentan con más efectividad en una **gráfica de líneas** con el tiempo como eje horizontal. La idea es tratar de distinguir un patrón o **tendencia** que sea probable de continuar en el futuro y luego usar ese patrón para hacer predicciones precisas para el futuro inmediato.

EJEMPLO 1.6

En el año 2025, el mayor de los "hijos de la explosión demográfica" (nacido en 1946) tendrá 79 años, y el mayor de los de la "Generación X" (nacido en 1965) estará a dos años de ser elegible para el Seguro Social. ¿Cómo afectará esto a las tendencias del consumidor en los siguientes 15 años? ¿Habrá suficientes fondos para los "hijos de la explosión demográfica" para recolectar prestaciones del Seguro Social? La Oficina de Censos de Estados Unidos da proyecciones para la parte de la población norteamericana que tendrá 85 años y más en los próximos años, como se muestra a continuación.[5] Construya una gráfica de líneas para ilustrar los datos. ¿Cuál es el efecto de prolongar y contraer el eje vertical de la gráfica de línea?

TABLA 1.6 Proyecciones de crecimiento de población

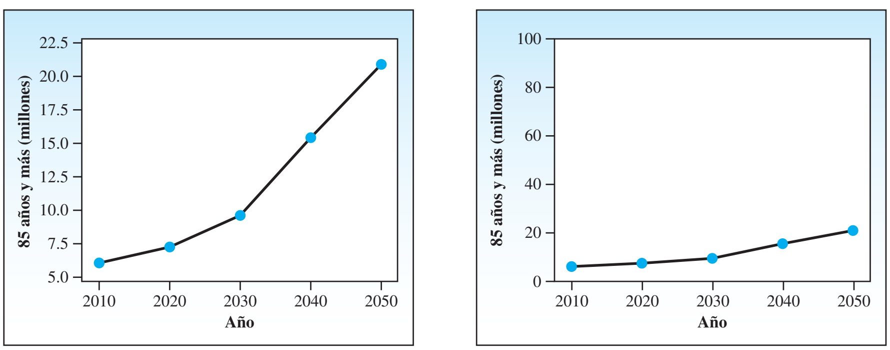
Año	2010	2020	2030	2040	2050
85 o más (millones)	6.1	7.3	9.6	15.4	20.9

MI CONSEJO

Tenga cuidado de prolongar o contraer ejes cuando vea una gráfica.

Solución La variable cuantitativa "85 y más" se mide en cinco intervalos, creando así una *serie de tiempo* que se puede graficar con una gráfica de línea. Los intervalos están marcados en el eje horizontal y las proyecciones en el eje vertical. Los puntos de datos se enlazan luego por medio de segmentos de línea para formar las gráficas de línea de la figura 1.8. Observe la marcada diferencia en las escalas verticales de las dos gráficas. *Contraer* la escala en el eje vertical hace que grandes cambios aparezcan pequeños y viceversa. Para evitar conclusiones erróneas, se deben ver con cuidado las escalas de los ejes vertical y horizontal. No obstante, de ambas gráficas se obtiene una imagen clara del número constantemente creciente de quienes tengan 85 años o más en los primeros años del nuevo milenio.

FIGURA 1.8 Gráficas de línea para el ejemplo 1.6

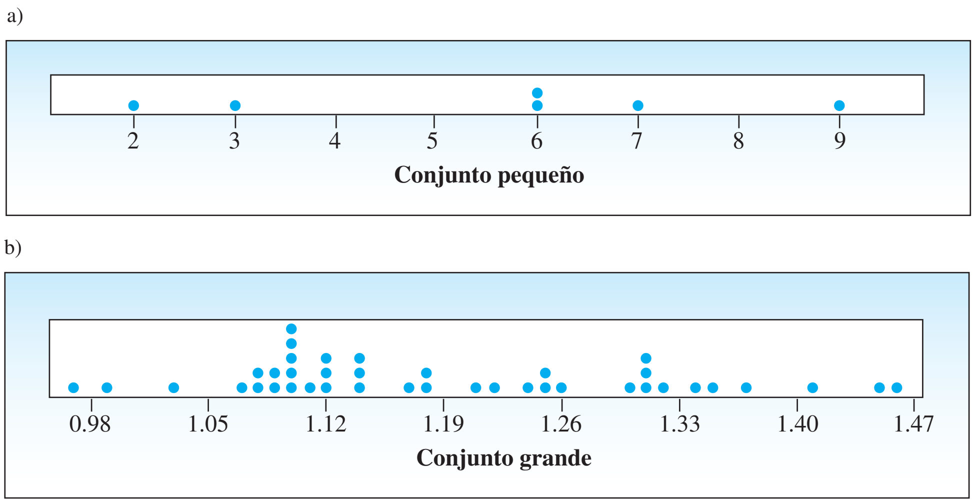


Gráficas de puntos

Muchos conjuntos de datos cuantitativos están formados de números que no se pueden separar fácilmente en categorías o intervalos. Entonces se hace necesaria una forma diferente de graficar este tipo de datos.

La gráfica más sencilla para datos cuantitativos es la **gráfica de puntos**. Para un conjunto pequeño de mediciones, por ejemplo el conjunto 2, 6, 9, 3, 7, 6, se puede simplemente graficar las mediciones como puntos en un eje horizontal. Esta gráfica de puntos, generada por *MINITAB*, se muestra en la figura 1.9a). Para un conjunto grande de datos, como el de la figura 1.9b), la gráfica de puntos puede ser nada informativa y tediosa para interpretarse.

FIGURA 1.9
Gráficas de puntos para conjuntos pequeños y grandes de datos



Gráficas de tallo y hoja

Otra forma sencilla de exhibir la distribución de un conjunto de datos cuantitativos es la **gráfica de tallo y hoja**. Esta gráfica presenta una exhibición gráfica de los datos usando los valores numéricos reales de cada punto de datos.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo construyo una gráfica de tallo y hoja?

1. Divida cada segmento en dos partes: el **tallo** y las **hojas**.
2. Ponga en lista los tallos en una columna, con una línea vertical a su derecha.
3. Para cada medición, registre la parte de hoja en el mismo renglón como su tallo correspondiente.
4. Ordene las hojas de menor a mayor en cada tallo.
5. Dé una clave a su codificación de tallo y hoja para que el lector pueda recrear las mediciones reales si es necesario.

EJEMPLO 1.7

La tabla 1.7 es una lista de precios (en dólares) de 19 marcas de zapatos deportivos. Construya una gráfica de tallo y hoja para mostrar la distribución de los datos.

TABLA 1.7 **Precios de zapatos deportivos**

90	70	70	70	75	70
65	68	60	74	70	95
75	70	68	65	40	65
70					

Solución Para crear el tallo y hoja, se puede dividir cada observación entre las unidades y las decenas. El número a la izquierda es el tallo; el de la derecha es la hoja. Entonces, para los zapatos que cuestan \$65, el tallo es 6 y la hoja es 5. Los tallos, que van de 4 a 9, aparecen en la figura 1.10, junto con las hojas para cada una de las 19 mediciones. Si indicamos que la unidad de hoja es 1, el lector verá que el tallo y hoja 6 y 8, por ejemplo, representan el número 68 registrado al dólar más cercano.

FIGURA 1.10
Gráfica de tallo y hoja para los datos de la tabla 1.7

4	0
5	
6	5 8 0 8 5 5
7	0 0 0 5 0 4 0 5 0 0
8	
9	0 5

Unidad de hoja = 1

Reordenamiento ⟶

4	0
5	
6	0 5 5 5 8 8
7	0 0 0 0 0 0 0 4 5 5
8	
9	0 5

MI CONSEJO
tallo | hoja

A veces las opciones de tallo disponibles resultan en una gráfica que contiene muy pocos tallos y un gran número de hojas dentro de cada tallo. En esta situación, se pueden prolongar los tallos al dividir cada uno en varias líneas, dependiendo de los valores de hojas que se les asignen. Por lo general los tallos se dividen en una de dos formas:

- En dos líneas, con las hojas 0-4 en la primera línea y las hojas 5-9 en la segunda línea
- En cinco líneas, con las hojas 0-1, 2-3, 4-5, 6-7 y 8-9 en las cinco líneas, respectivamente

EJEMPLO 1.8

Los datos de la tabla 1.8 son los pesos de 30 bebés de gestación completa al momento de nacer, nacidos en un hospital metropolitano y registrados al décimo de libra más cercano.[6] Construya una gráfica de tallo y hoja para mostrar la distribución de los datos.

TABLA 1.8 **Pesos de 30 bebés de gestación completa al momento de nacer**

7.2	7.8	6.8	6.2	8.2
8.0	8.2	5.6	8.6	7.1
8.2	7.7	7.5	7.2	7.7
5.8	6.8	6.8	8.5	7.5
6.1	7.9	9.4	9.0	7.8
8.5	9.0	7.7	6.7	7.7

Solución Los datos, aun cuando están registrados a una precisión de sólo un lugar decimal, son mediciones de la variable continua x = peso, que puede tomar cualquier valor positivo. Al examinar la tabla 1.8, se puede ver rápidamente que los pesos más alto y más bajo son 9.4 y 5.6, respectivamente. Pero, ¿cómo están distribuidos los pesos restantes?

Si se usa el punto decimal como línea divisoria entre el tallo y las hojas, tenemos sólo cinco tallos que no producen una imagen muy buena. Cuando se divide cada uno de los tallos en dos líneas, hay ocho tallos porque la primera línea del tallo 5 y la segunda línea del tallo 9 están vacías. Esto produce una gráfica más descriptiva, como se muestra en la figura 1.11. Para estos datos, la unidad de hoja es .1 y el lector puede inferir que el tallo y hoja 8 y 2, por ejemplo, representan la medición $x = 8.2$.

FIGURA 1.11
Gráfica de tallo y hoja para los datos de la tabla 1.8

5	8 6		5	6 8
6	1 2		6	1 2
6	8 8 8 7	Reordenamiento →	6	7 8 8 8
7	2 2 1		7	1 2 2
7	8 7 9 5 7 7 5 8 7		7	5 5 7 7 7 7 8 8 9
8	0 2 2 2		8	0 2 2 2
8	5 6 5		8	5 5 6
9	0 4 0	Unidad de hoja = .1	9	0 0 4

Si la gráfica de tallo y hoja se gira hacia un lado, de modo que la recta vertical sea ahora un eje horizontal, se puede ver que los datos se han "apilado" o se han "distribuido" a lo largo del eje, de modo que se puede describir como "forma de montículo". Esta gráfica de nuevo muestra que los pesos de estos 30 recién nacidos varía entre 5.6 y 9.4; muchos pesos están entre 7.5 y 8.0 libras.

Interpretación de gráficas con ojo crítico

Una vez creada una gráfica o gráficas, para un conjunto de datos, ¿qué se debe buscar al tratar de describir los datos?

- Primero, verificar las **escalas** horizontales y verticales, de manera que haya claridad respecto a lo que se mide.
- Examinar el **lugar** de la distribución de datos. ¿Dónde está el centro de distribución del eje horizontal? Si se comparan dos distribuciones, ¿están centradas en el mismo lugar?
- Examinar la **forma** de la distribución. ¿La distribución tiene un "pico", un punto que es más alto que cualquier otro? Si es así, ésta es la medición o categoría que se presenta con más frecuencia. ¿Hay más de un pico? ¿Hay un número aproximadamente igual de mediciones a la izquierda y derecha del pico?
- Buscar cualesquiera mediciones poco comunes o **resultados atípicos**. Esto es, ¿hay mediciones mucho mayores o menores que todas las otras? Estos resultados atípicos pueden no ser representativos de los otros valores del conjunto.

Es frecuente que las distribuciones se describan según sus formas.

Definición Una distribución es **simétrica** si los lados izquierdo y derecho de la distribución, cuando se divide en el valor medio, forman imágenes espejo.

Una distribución está **sesgada a la derecha** si una proporción más grande de las mediciones se encuentra a la derecha del valor pico. Las distribuciones **sesgadas a la derecha** contienen pocas mediciones anormalmente grandes.

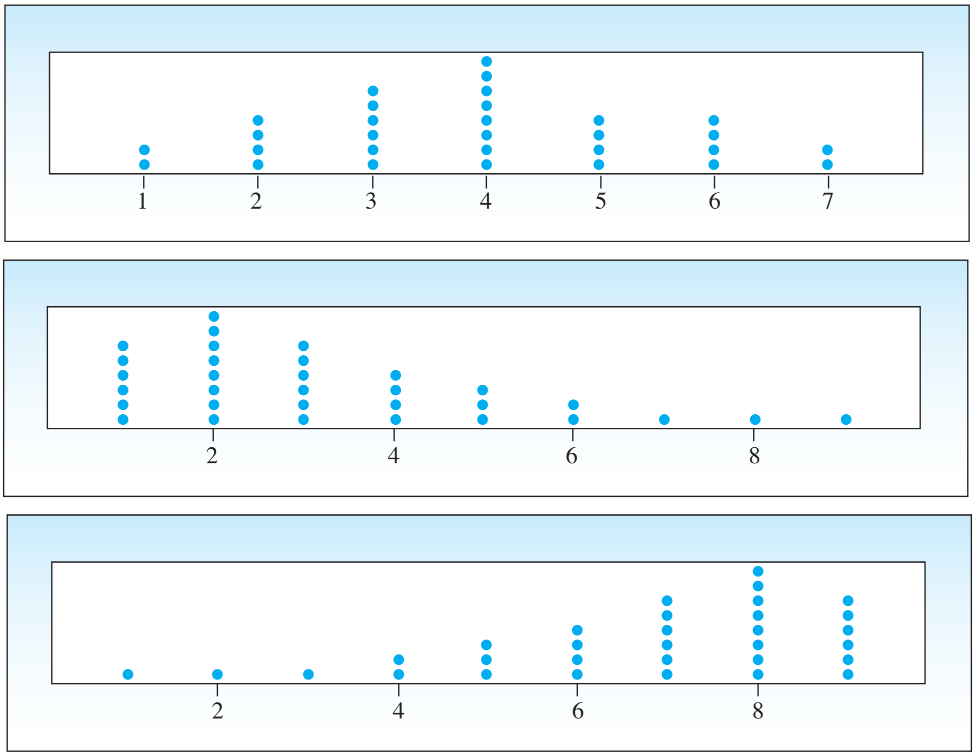
Una distribución está **sesgada a la izquierda** si una proporción mayor de las mediciones está a la izquierda del valor pico. Las distribuciones **sesgadas a la izquierda** contienen pocas mediciones anormalmente grandes.

Una distribución es **unimodal** si tiene un pico; una distribución **bimodal** tiene dos picos. Las distribuciones bimodales representan a veces una combinación de dos poblaciones diferentes del conjunto de datos.

EJEMPLO 1.9

Examine las tres gráficas de puntos generadas por *MINITAB* y que se muestran en la figura 1.12. Describa estas distribuciones en términos de sus ubicaciones y formas.

FIGURA 1.12
Formas de distribución de datos para el ejemplo 1.19



MI CONSEJO

Simétrica ⇔ imágenes espejo

Sesgada a la derecha ⇔ cola larga a la derecha

Sesgada a la izquierda ⇔ cola larga a la izquierda

Solución La primera gráfica de puntos muestra una distribución *relativamente simétrica* con un solo pico situado en $x = 4$. Si se dobla la página en este pico, las mitades izquierda y derecha *casi* serían imágenes espejo. La segunda gráfica, no obstante, está lejos de ser simétrica. Tiene una larga "cola derecha", lo cual significa que hay unas pocas observaciones extraordinariamente grandes. Si se dobla la página en el pico, estaría en el lado derecho una proporción más grande de mediciones que en el izquierdo. Esta distribución está *sesgada a la derecha*. Del mismo modo, la tercera gráfica de puntos con una larga "cola a la izquierda" está *sesgada a la izquierda*.

EJEMPLO 1.10

Un asistente administrativo del departamento de atletismo de una universidad local está observando los promedios de calificaciones de ocho miembros del equipo femenil de volibol. El asistente introduce los promedios en la base de datos pero por accidente coloca mal el punto decimal de la última entrada.

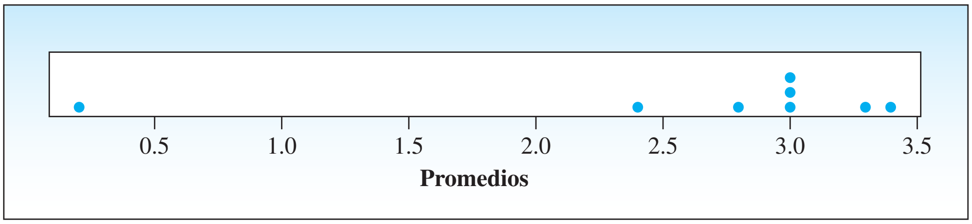
2.8 3.0 3.0 3.3 2.4 3.4 3.0 .21

Use una gráfica de puntos para describir los datos y descubrir el error del asistente.

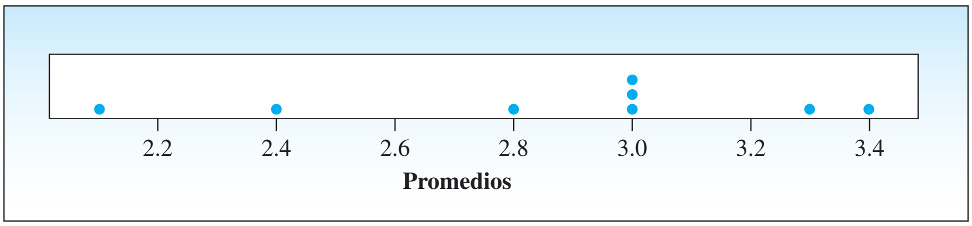
Solución La gráfica de puntos de este pequeño conjunto de datos se muestra en la figura 1.13a). Claramente se puede ver el *resultado atípico* u observación poco común causada por el error del asistente al introducir los datos. Una vez corregido el error, como en la figura 1.13b), se puede ver la distribución correcta del conjunto de datos. Como éste es un conjunto muy pequeño, es difícil describir la forma de la distribución aun cuando parece tener un valor pico alrededor de 3.0 y parece ser relativamente simétrica.

FIGURA 1.13
Distribuciones de promedios de calificaciones para el ejemplo 1.10

a)



b)



MI CONSEJO
Los resultados atípicos están lejos del cuerpo principal de datos.

Cuando se comparen gráficas creadas para dos conjuntos de datos, se deben comparar sus *escalas de medición*, *ubicaciones* y *formas*, y buscar mediciones poco comunes o resultados atípicos. Recuerde que estos últimos no siempre son causados por errores o introducción errónea de datos. A veces dan información muy valiosa que no debe ser soslayada. Es posible que sea necesaria más información para determinar si un resultado atípico es una medición válida que sólo sea anormalmente grande o pequeña, o si ha habido algún tipo de error en la recolección de datos. Si las escalas difieren en mucho, debe tenerse cuidado al hacer comparaciones o ¡sacar conclusiones que pudieran ser imprecisas!

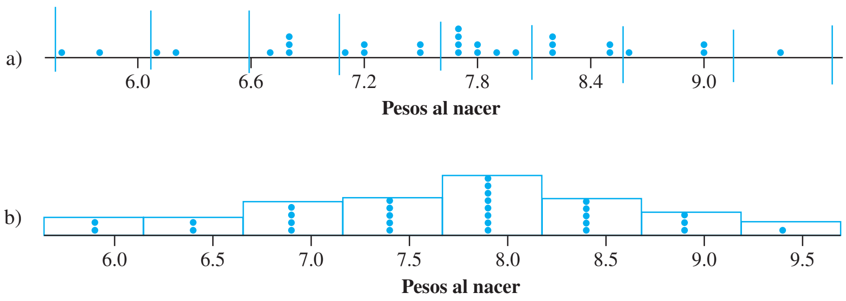
1.5 HISTOGRAMAS DE FRECUENCIA RELATIVA

Un histograma de frecuencia relativa es semejante a una gráfica de barras, pero se usa para graficar cantidades en lugar de datos cualitativos. Los datos de la tabla 1.9 son los pesos de 30 bebés de gestación completa al momento de nacer, reproducidos del ejemplo 1.8 y mostrados como gráfica de puntos en la figura 1.14a). Primero, dividimos el intervalo de las mediciones más pequeñas a las más grandes en subintervalos o *clases de igual longitud*. Si se ponen en columna los puntos de cada subintervalo (figura 1.14b)) y se traza una barra sobre cada una de las columnas, se habrá creado un **histograma de frecuencia** o un **histograma de frecuencia relativa**, dependiendo de la escala del eje vertical.

TABLA 1.9 **Pesos de 30 bebés de gestación completa al momento de nacer**

7.2	7.8	6.8	6.2	8.2
8.0	8.2	5.6	8.6	7.1
8.2	7.7	7.5	7.2	7.7
5.8	6.8	6.8	8.5	7.5
6.1	7.9	9.4	9.0	7.8
8.5	9.0	7.7	6.7	7.7

FIGURA 1.14
Cómo construir un histograma



Definición Un **histograma de frecuencia relativa**, para un conjunto de datos cuantitativo es una gráfica de barras en la que la altura de la barra muestra "con qué frecuencia" (medida como proporción o frecuencia relativa) las mediciones caen en una clase o subintervalo particular. Las clases o subintervalos se grafican a lo largo del eje horizontal.

Como regla práctica, el número de clases debe ser de 5 a 12; cuantos más datos haya, más clases se requieren.[†] Las clases deben ser escogidas para que cada una de las mediciones caiga en una clase y sólo en una. Para los pesos al nacer que se muestran en la tabla 1.9, decidimos usar intervalos de peso de igual longitud. Como el intervalo de pesos al nacer es

$$9.4 - 5.6 = 3.8$$

el ancho mínimo de clase necesario para cubrir el margen de los datos es $(3.8 \div 8) = .475$. Para más comodidad, redondeamos este ancho aproximado a .5. Empezando el primer intervalo al valor más bajo, 5.6, formamos subintervalos de 5.6 hasta *pero no incluyendo* 6.1, 6.1 hasta *pero no incluyendo* 6.6, y así sucesivamente. Usando el **método de inclusión izquierda** e incluyendo el punto de frontera de clase izquierda pero no el punto de frontera derecha en la clase, eliminamos cualquier confusión acerca de dónde poner una medición que resulte caer en un punto de frontera de clase.

La tabla 1.10 muestra las ocho clases, marcadas de 1 a 8 para identificación. Las fronteras para las ocho clases, junto con un total del número de mediciones que caen en cada una de ellas, también se muestran en la tabla. Al igual que con las gráficas de la sección 1.3, podemos ahora medir *con qué frecuencia* se presenta cada clase usando *frecuencia* o *frecuencia relativa.*

[†] Es posible emplear esta tabla como guía para seleccionar un número apropiado de clases. Recuerde que esto es sólo una guía; puede usar más o menos clases de las que recomienda la tabla si con ello se hace más descriptiva la gráfica.

Tamaño de muestra	25	50	100	200	500
Número de clases	6	7	8	9	10

Para construir el histograma de frecuencia relativa, grafique las fronteras de clase a lo largo del eje horizontal. Trace una barra sobre cada intervalo de clase, con altura igual a la frecuencia relativa para esa clase. El histograma de frecuencia relativa para los datos de peso al nacer, figura 1.15, muestra de un vistazo la forma en que están distribuidos los pesos al nacer en el intervalo de 5.6 a 9.4.

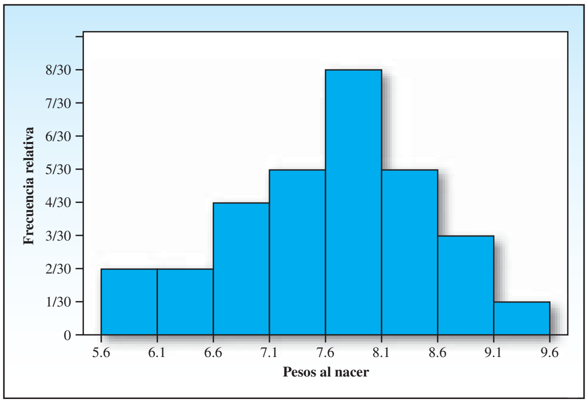
TABLA 1.10 **Frecuencias relativas para los datos de la tabla 1.9**

MI CONSEJO

Las frecuencias relativas totalizan 1; las frecuencias, *n*.

Clase	Fronteras de clase	Total	Frecuencia de clase	Frecuencia relativa de clase
1	5.6 a <6.1	II	2	2/30
2	6.1 a <6.6	II	2	2/30
3	6.6 a <7.1	IIII	4	4/30
4	7.1 a <7.6	~~IIII~~	5	5/30
5	7.6 a <8.1	~~IIII~~ III	8	8/30
6	8.1 a <8.6	~~IIII~~	5	5/30
7	8.6 a <9.1	III	3	3/30
8	9.1 a <9.6	I	1	1/30

FIGURA 1.15
Histograma de frecuencia relativa



EJEMPLO 1.11

Veinticinco clientes de Starbucks® son entrevistados en una encuesta de mercadeo y se les pregunta, "¿con qué frecuencia visita usted Starbucks en una semana típica?" La tabla 1.11 es una lista de respuestas para estos 25 clientes. Construya un histograma de frecuencia relativa para describir los datos.

TABLA 1.11 **Número de visitas en una semana típica para 25 clientes**

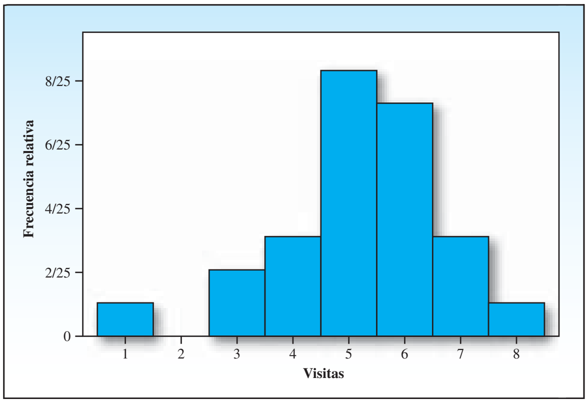
6	7	1	5	6
4	6	4	6	8
6	5	6	3	4
5	5	5	7	6
3	5	7	5	5

Solución La variable que se mide es el "número de visitas a Starbucks", que es una variable discreta que toma sólo valores enteros. En este caso, lo más sencillo es escoger las clases o subintervalos como los valores enteros en el rango de valores observados: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. La tabla 1.12 muestra las clases y sus frecuencias correspondientes y frecuencias relativas. El histograma de frecuencia relativa, generada usando *MINITAB*, se muestra en la figura 1.16.

TABLA 1.12 **Tabla de frecuencia para el ejemplo 1.11**

Número de visitas a Starbucks	Frecuencia	Frecuencia relativa
1	1	.04
2	—	—
3	2	.08
4	3	.12
5	8	.32
6	7	.28
7	3	.12
8	1	.04

FIGURA 1.16
Histograma del *MINITAB* para el ejemplo 1.11



Observe que la distribución está sesgada a la izquierda y que hay una brecha entre 1 y 3.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo construyo un histograma de frecuencia relativa?

1. Escoja el número de clases, por lo general entre 5 y 12. Cuantos más datos se tengan, más clases deben usarse.
2. Calcule el ancho aproximado de clase al dividir la diferencia entre los valores máximo y mínimo entre el número de clases.
3. Redondee el ancho aproximado de clase hasta un número cómodo.
4. Si los datos son discretos, se puede asignar una clase para cada valor entero tomado por los datos. Para un número grande de valores enteros, puede que sea necesario agruparlos en clases.
5. Localice las fronteras de clase. La clase más baja puede incluir la medición más pequeña. A continuación sume las clases restantes usando el método de inclusión izquierda.
6. Construya una tabla estadística que contenga las clases, sus frecuencias y sus frecuencias relativas.
7. Construya un histograma como una barra de gráficas, graficando intervalos de clase en el eje horizontal y frecuencias relativas como las alturas de las barras.

(*continúa*)

Repertorio de ejercicios

A. Para los siguientes conjuntos de datos, encuentre el rango, el ancho mínimo de clase y un ancho práctico de clase. El primer conjunto de datos está hecho para usted.

Número de mediciones	Valores máximo y mínimo	Número de clases	Rango	Ancho mínimo de clase	Ancho práctico de clase
50	10 a 100	7	90	12.86	15
25	0.1 a 6.0	6			
100	500 a 700	8			

B. Para los mismos conjuntos de datos, seleccione un punto inicial conveniente y haga una lista de fronteras de clase para las primeras dos clases. El primer conjunto de datos está hecho para usted.

Número de mediciones	Valores máximo y mínimo	Punto inicial conveniente	Primeras dos clases
50	10 a 100	0	0 a $<$ 15
			15 a $<$ 30
25	0.1 a 6.0		
100	500 a 700		

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Pruebe de nuevo usando las Repeticiones de un ejercicio del final de esta sección.
- ¿Ya domina los histogramas de frecuencia relativa? Puede saltarse el repertorio de ejercicios y pasar directo a los ejercicios de Técnicas básicas del final de esta sección.

Las respuestas se encuentran al final de este libro.

Se puede usar un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución de un conjunto de datos en términos de su *ubicación* y *forma*, y ver si hay *resultados atípicos* como lo hizo usted con otras gráficas. Por ejemplo, los datos de peso al nacimiento fueron relativamente simétricos, sin mediciones poco comunes, en tanto que los datos de Starbucks estuvieron sesgados a la izquierda. Como la barra construida arriba de cada clase representa la *frecuencia relativa* o proporción de las mediciones en esa clase, estas alturas se pueden usar para darnos información adicional:

- La proporción de las medidas que caen en una clase o grupo particular de clases
- La probabilidad de que una medida tomada al azar del conjunto caerá en una clase particular o grupo de clases

Considere el histograma de frecuencia relativa para los datos del peso al nacimiento de la figura 1.15. ¿Qué proporción de los recién nacidos tienen al nacer pesos de 7.6 o mayores? Esto abarca todas las clases de más de 7.6 en la tabla 1.10. Como hay 17 recién nacidos en esas clases, la proporción de quienes tienen pesos al nacer de 7.6 o más es 17/30, o sea alrededor de 57%. Éste también es el porcentaje del área total bajo el histograma de la figura 1.15 que está a la derecha de 7.6.

Supongamos que usted escribió cada uno de los 30 pesos al nacer en un papel, los puso en un sombrero y sacó uno de ellos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este papel contenga un peso de 7.6 al nacimiento o más alto? Como 17 de los 30 pequeños papeles caen en esta categoría, hay 17 probabilidades en 30; esto es, la probabilidad es 17/30. La palabra *probabilidad* no es desconocida para el lector; la estudiaremos en más detalle en el capítulo 4.

Aun cuando estamos interesados en describir un conjunto de $n = 30$ mediciones, también podríamos estar interesados en la población de donde se sacó la muestra, que es el conjunto de pesos al nacer de todos los bebés nacidos en este hospital. O bien, si estamos interesados en los pesos de recién nacidos en general, podríamos considerar nuestra muestra como representativa de la población de pesos al nacer para recién nacidos en hospitales metropolitanos similares. Un histograma de muestra da valiosa información acerca del histograma de población, es decir, la gráfica que describe la distribución de toda la población. Recuerde, sin embargo, que diferentes muestras de la misma población producirán histogramas *diferentes*, aun cuando se usen fronteras de la misma clase. No obstante, puede esperarse que los histogramas de la muestra y población sean similares. Al agregar más y más datos a la muestra, los dos histogramas se hacen cada vez más semejantes. ¡Si se agranda la muestra para incluir toda la población, ambos histogramas son idénticos!

1.5 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 27.

1.16 Para los siguientes conjuntos de datos, encuentre el rango, el ancho mínimo de clase y ancho práctico de clase.

Número de mediciones	Valores mínimo y máximo	Número de clases	Rango	Ancho mínimo de clase	Ancho práctico de clase
75	0.5 a 1.0	8			
25	0 a 1006	6			
200	1200 a 1500	9			

1.17 Consulte el ejercicio 1.16. Para los mismos conjuntos de datos, seleccione un punto inicial conveniente y haga una lista de fronteras de clase para las primeras dos clases.

Número de mediciones	Valores mínimo y máximo	Punto inicial conveniente	Primeras dos clases
75	0.5 a 1.0		
25	0 a 100		
200	1200 a 1500		

TÉCNICAS BÁSICAS

MIS DATOS EX0118

1.18 Construya una gráfica de tallo y hoja para estas 50 mediciones:

3.1	4.9	2.8	3.6	2.5	4.5	3.5	3.7	4.1	4.9
2.9	2.1	3.5	4.0	3.7	2.7	4.0	4.4	3.7	4.2
3.8	6.2	2.5	2.9	2.8	5.1	1.8	5.6	2.2	3.4
2.5	3.6	5.1	4.8	1.6	3.6	6.1	4.7	3.9	3.9
4.3	5.7	3.7	4.6	4.0	5.6	4.9	4.2	3.1	3.9

a. Describa la forma de la distribución de datos. ¿Ve algunos resultados atípicos?

b. Use la gráfica de tallo y hoja para hallar la observación mínima.

c. Encuentre la octava y novena observaciones más grandes.

1.19 Consulte el ejercicio 1.18. Construya un histograma de frecuencia relativa para los datos.

a. ¿Aproximadamente cuántos intervalos de clase debe usar?

b. Supongamos que usted decide usar clases que empiezan en 1.6 con ancho de clase de .5 (es decir, 1.6 a <2.1, 2.1 a <2.6). Construya el histograma de frecuencia relativa para los datos.

c. ¿Qué fracción de las mediciones es menor a 5.1?

d. ¿Qué fracción de las mediciones es mayor a 3.6?

e. Compare el histograma de frecuencia relativa con la gráfica de tallo y hoja del ejercicio 1.18. ¿Son semejantes las formas?

MIS DATOS EX0120

1.20 Considere este conjunto de datos:

4.5	3.2	3.5	3.9	3.5	3.9
4.3	4.8	3.6	3.3	4.3	4.2
3.9	3.7	4.3	4.4	3.4	4.2
4.4	4.0	3.6	3.5	3.9	4.0

a. Construya una gráfica de tallo y hoja usando el dígito inicial como tallo.

b. Construya una gráfica de tallo y hoja usando dos veces cada uno de los dígitos iniciales. ¿Esta técnica mejora la presentación de los datos? Explique.

1.21 Una variable discreta puede tomar sólo los valores de 0, 1 o 2. Un conjunto de 20 mediciones en esta variable se muestra:

1	2	1	0	2
2	1	1	0	0
2	2	1	1	0
0	1	2	1	1

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para los datos.

b. ¿Qué proporción de las mediciones es mayor a 1?

c. ¿Qué proporción de las mediciones es menor a 2?

d. Si una medición se selecciona al azar de entre las 20 mediciones mostradas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un 2?

d. Describa la forma de la distribución. ¿Ve algunos resultados atípicos?

1.22 Consulte el ejercicio 1.21.

a. Trace una gráfica de puntos para describir los datos.

b. ¿Cómo podría usted definir el tallo y la hoja para este conjunto de datos?

c. Trace la gráfica de tallo y hoja usando su decisión del inciso b).

d. Compare la gráfica de puntos, la gráfica de tallo y hoja y el histograma de frecuencia relativa (ejercicio 1.21). ¿Llevan todos ellos más o menos la misma información?

1.23 Navegar en un laberinto Un psicólogo experimental midió el tiempo que tardó una rata para navegar con éxito por un laberinto en cada uno de cinco días. Los resultados se muestran en la tabla siguiente. Genere una gráfica de líneas para describir los datos. ¿Piensa usted que hay algún aprendizaje?

Día	1	2	3	4	5
Tiempo (seg.)	45	43	46	32	25

MIS DATOS EX0124

1.24 Medición en el tiempo El valor de una variable cuantitativa se mide una vez al año durante un periodo de 10 años. He aquí los datos:

Año	Medición	Año	Medición
1	61.5	6	58.2
2	62.3	7	57.5
3	60.7	8	57.5
4	59.8	9	56.1
5	58.0	10	56.0

a. Genere una gráfica de líneas para describir la variable cuando cambie con el tiempo.

b. Describa las mediciones usando la gráfica construida en el inciso a).

MIS DATOS EX0125

1.25 Calificaciones de examen Las calificaciones en un examen de 100 puntos se registraron para 20 estudiantes:

61	93	91	86	55	63	86	82	76	57
94	89	67	62	72	87	68	65	75	84

a. Use una gráfica apropiada para describir los datos.

b. Describa la forma y ubicación de las calificaciones.

c. ¿Es poco común la forma de la distribución? ¿Puede usted considerar alguna razón por la que la distribución de las calificaciones tendría esa forma?

APLICACIONES

MIS DATOS EX0126

1.26 Una enfermedad recurrente El tiempo (en meses) entre el inicio de una enfermedad en particular y su recurrencia se registró para $n = 50$ pacientes:

2.1	4.4	2.7	32.3	9.9	9.0	2.0	6.6	3.9	1.6
14.7	9.6	16.7	7.4	8.2	19.2	6.9	4.3	3.3	1.2
4.1	18.4	.2	6.1	13.5	7.4	.2	8.3	.3	1.3
14.1	1.0	2.4	2.4	18.0	8.7	24.0	1.4	8.2	5.8
1.6	3.5	11.4	18.0	26.7	3.7	12.6	23.1	5.6	.4

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para los datos.

b. ¿Describiría usted la forma como aproximadamente simétrica, sesgada a la derecha o sesgada a la izquierda?

c. Dé la fracción de tiempos de recurrencia menores o iguales a 10 meses.

1.27 La educación funciona La educación funciona, según una instantánea dada en un informe a la ciudad de Riverside por la Dirección de Educación[7] del mismo condado. El promedio de ingresos anuales para seis niveles diferentes de educación se muestra en la tabla:

Nivel de educación	Promedio de ingreso anual
Secundaria terminada	$26 795
Universidad, sin título	29 095
Título de licenciatura	50 623
Título de maestría	63 592
Doctorado	85 675
Profesional (médico, abogado)	101 375

Fuente: U.S. Census Bureau

a. ¿Qué métodos gráficos podría usted usar para describir los datos?

b. Seleccione el método del inciso a) que usted piensa describe mejor los datos.

c. ¿Cómo podría resumir la información mostrada en la gráfica respecto a niveles educativos y salario?

MIS DATOS EX0128

1.28 Preescolar A continuación se dan las edades (en meses) a los que se inscribieron por primera vez 50 niños en una escuela preescolar.

38	40	30	35	39	40	48	36	31	36
47	35	34	43	41	36	41	43	48	40
32	34	41	30	46	35	40	30	46	37
55	39	33	32	32	45	42	41	36	50
42	50	37	39	33	45	38	46	36	31

a. Construya una gráfica de tallo y hoja para los datos.

b. Construya un histograma de frecuencia relativa para estos datos. Empiece en la frontera inferior de la primera clase en 30 y use un ancho de clase de 5 meses.

c. Compare las gráficas de los incisos a) y b). ¿Hay alguna diferencia importante que le haría escoger una como el mejor método para exhibir los datos?

d. ¿Qué proporción de los niños tenían 35 meses (2 años, 11 meses) o más, pero menos de 45 meses (3 años, 9 meses) de edad cuando se inscribieron por primera vez en preescolar?

e. Si un niño fuera seleccionado al azar de este grupo de niños, ¿cuál es la probabilidad de que tuviera menos de 50 meses de edad (4 años, 2 meses) cuando se inscribió por primera vez en preescolar?

MIS DATOS EX0129

1.29 Religión organizada Las estadísticas de las religiones del mundo son aproximaciones muy vagas, dado que muchas religiones no dan seguimiento a sus miembros. Una estimación de estos números (en millones) se muestra en la tabla siguiente.[8]

Religión	Miembros (millones)	Religión	Miembros (millones)
Budismo	375	Judaísmo	15
Cristianismo	2100	Sijismo	25
Hinduismo	851	Otras	21
Islamismo	1300		

Fuente: Time Almanac 2007

a. Construya una gráfica de pastel para describir el total de miembros en las religiones organizadas del mundo.

b. Construya una gráfica de barras para describir el total de miembros en las religiones organizadas del mundo.

c. Ordene los grupos religiosos del número menor al mayor de miembros. Construya una gráfica de Pareto para describir los datos. ¿Cuál de las tres es más efectiva?

MIS DATOS EX0130

1.30 ¿Qué tan larga es la fila? Para determinar el número de cajas de pago que en el futuro es necesario construir, una cadena de supermercados desea obtener información del tiempo (en minutos) necesario para dar servicio a clientes. Para hallar la distribución de tiempos de tal servicio, se registró una muestra de 1000 tiempos. Sesenta de éstos se muestran a continuación:

3.6	1.9	2.1	.3	.8	.2	1.0	1.4	1.8	1.6
1.1	1.8	.3	1.1	.5	1.2	.6	1.1	.8	1.7
1.4	.2	1.3	3.1	.4	2.3	1.8	4.5	.9	.7
.6	2.8	2.5	1.1	.4	1.2	.4	1.3	.8	1.3
1.1	1.2	.8	1.0	.9	.7	3.1	1.7	1.1	2.2
1.6	1.9	5.2	.5	1.8	.3	1.1	.6	.7	.6

a. Construya una gráfica de tallo y hoja para los datos.

b. ¿Qué fracción de los tiempos de servicio son menores o iguales a 1 minuto?

c. ¿Cuál de las 60 mediciones es la más pequeña?

1.31 Tiempos de servicio, continúa Consulte el ejercicio 1.30. Construya un histograma de frecuencia relativa para los tiempos de servicio de supermercado.

a. Describa la forma de la distribución. ¿Ve algunos resultados atípicos?

b. Suponiendo que los resultados atípicos de este conjunto de datos sean observaciones válidas, ¿cómo los explicaría a la administración de la cadena de supermercados?

c. Compare el histograma de frecuencia relativa con la gráfica de tallo y hoja del ejercicio 1.30. ¿Las dos gráficas llevan la misma información?

MIS DATOS EX0132

1.32 Contenido de calcio El contenido de calcio (Ca) de una sustancia mineral en polvo fue analizado 10 veces, con las siguientes composiciones porcentuales registradas:

.0271	.0282	.0279	.0281	.0268
.0271	.0281	.0269	.0275	.0276

a. Trace una gráfica de puntos para describir los datos. (SUGERENCIA: La escala del eje horizontal debe ir de .0260 a .0290.)

b. Trace una gráfica de tallo y hoja para los datos. Use los números de centenas y millares como tallo.

c. ¿Algunas de las mediciones son inconsistentes con las otras mediciones, indicando así que el técnico puede haber cometido un error en el análisis?

MIS DATOS EX0133

1.33 Presidentes de Estados Unidos A continuación aparecen las edades, al momento de su fallecimiento, de los 38 presidentes ya desaparecidos desde George Washington a Ronald Reagan:[5]

Washington	67	Garfield	49
J. Adams	90	Arthur	56
Jefferson	83	Cleveland	71
Madison	85	B. Harrison	67
Monroe	73	Cleveland	71
J. Q. Adams	80	McKinley	58
Jackson	78	T. Roosevelt	60
Van Buren	79	Taft	72
W. H. Harrison	68	Wilson	67
Tyler	71	Harding	57
Polk	53	Coolidge	60
Taylor	65	Hoover	90
Fillmore	74	F. D. Roosevelt	63
Pierce	64	Truman	88
Buchanan	77	Eisenhower	78
Lincoln	56	Kennedy	46
A. Johnson	66	L. Johnson	64
Grant	63	Nixon	81
Hayes	70	Reagan	93

a. Antes de graficar los datos, trate de visualizar la distribución de las edades al fallecimiento de los presidentes. ¿Qué forma piensa usted que tendrá?

b. Construya una gráfica de tallo y hoja para los datos. Describa la forma. ¿Le sorprende?

c. Los cinco presidentes más jóvenes al momento de su fallecimiento aparecen en la "cola" inferior de la distribución. Tres de los cinco más jóvenes tienen una característica común. Identifique los cinco presidentes más jóvenes a su fallecimiento. ¿Qué característica común explica estas mediciones?

MIS DATOS EX0134

1.34 Cantidades de glóbulos rojos La cantidad de glóbulos rojos de una persona sana se midió en cada uno de 15 días. El número registrado se midió en 10^6 células por microlitro (μL).

5.4	5.2	5.0	5.2	5.5
5.3	5.4	5.2	5.1	5.3
5.3	4.9	5.4	5.2	5.2

a. Use una gráfica apropiada para describir los datos.

b. Describa la forma y ubicación de las cantidades de glóbulos rojos.

c. Si la cantidad de glóbulos rojos de la persona se mide hoy como $5.7 \times 10^6/\mu$L, ¿usted consideraría que esto es poco común? ¿Qué conclusiones podría sacar?

MIS DATOS EX0135

1.35 Campeones de bateo Los directivos del béisbol de ligas mayores han coronado a un campeón de bateo en la Liga Nacional cada año desde 1876. En la tabla siguiente aparece una muestra de promedios ganadores de bateo:[5]

Año	Nombre	Promedio
2005	Derreck Lee	.335
2000	Todd Helton	.372
1915	Larry Doyle	.320
1917	Edd Roush	.341
1934	Paul Waner	.362
1911	Honus Wagner	.334
1898	Willie Keeler	.379
1924	Roger Hornsby	.424
1963	Tommy Davis	.326
1992	Gary Sheffield	.330
1954	Willie Mays	.345
1975	Bill Madlock	.354
1958	Richie Ashburn	.350
1942	Ernie Lombardi	.330
1948	Stan Musial	.376
1971	Joe Torre	.363
1996	Tony Gwynn	.353
1961	Roberto Clemente	.351
1968	Pete Rose	.335
1885	Roger Connor	.371

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para describir los promedios de bateo para estos 20 campeones.

b. Si al azar usted fuera a escoger uno de los 20 nombres, ¿qué probabilidad hay de que escoja un jugador cuyo promedio fuera arriba de .400 para su año de campeonato?

MIS DATOS EX0136

1.36 Mejores 20 películas La tabla que sigue presenta las ventas brutas de boletos en fin de semana para las mejores 20 películas, durante la semana del 4 de agosto de 2006:[9]

Película	Venta bruta fin de semana ($ millones)
1. *Talladega Nights: The Ballad of Ricky Bobby*	$47.0
2. *Barnyard*	15.8
3. *Pirates of the Caribbean: Dead Man's Chest*	11.0
4. *Miami Vice*	10.2
5. *The Descent*	8.9
6. *John Tucker Must Die*	6.2
7. *Monster House*	6.1
8. *The Ant Bully*	3.9
9. *You, Me and Dupree*	3.6
10. *The Night Listener*	3.6
11. *The Devil Wears Prada*	3.0
12. *Lady in the Water*	2.7
13. *Little Man*	2.5
14. *Superman Returns*	2.2
15. *Scoop*	1.8
16. *Little Miss Sunshine*	1.5
17. *Clerks II*	1.3
18. *My Super Ex-Girlfriend*	1.2
19. *Cars*	1.1
20. *Click*	0.8

Fuente: www.radiofree.com/mov-tops.shtml

a. Trace una gráfica de tallo y hoja para los datos. Describa la forma de la distribución. ¿Hay algunos resultados atípicos?

b. Construya una gráfica de puntos para los datos. ¿Cuál de las dos gráficas es más informativa? Explique.

MIS DATOS EX0137

1.37 Desechos peligrosos ¿Qué tan seguro es su vecindario? ¿Hay algunos lugares con desechos peligrosos cercanos? La tabla siguiente muestra el número de lugares con desechos peligrosos en cada uno de los 50 estados de la unión americana y el Distrito de Columbia en el año 2006:[5]

AL	15	HI	3	MA	33	NM	13	SD	2
AK	6	ID	9	MI	68	NY	87	TN	14
AZ	9	IL	48	MN	24	NC	31	TX	44
AR	10	IN	30	MS	5	ND	0	UT	18
CA	95	IA	12	MO	26	OH	37	VT	11
CO	19	KS	11	MT	15	OK	11	VA	28
CT	16	KY	14	NE	14	OR	11	WA	47
DE	15	LA	14	NV	1	PA	96	WV	9
DC	1	ME	12	NH	21	RI	12	WI	38
FL	50	MD	18	NJ	117	SC	26	WY	2
GA	17								

a. ¿Qué variable se está midiendo? ¿La variable es discreta o continua?

b. A continuación se muestra una gráfica de tallo y hoja generada por *MINITAB*. Describa la forma de la distribución de datos. Identifique las mediciones anormalmente grandes marcadas "HI" por estado.

Gráfica de tallo y hoja: Desechos peligrosos

```
Stem-and-leaf of Sites N = 51
Leaf Unit = 1.0

   6   0  011223
  11   0  56999
  24   1  0111122234444
  (8)  1  55567889
  19   2  14
  17   2  668
  14   3  013
  11   3  78
   9   4  4
   8   4  78
   6   5  0

       HI 68, 87, 95, 96, 117
```

c. ¿Puede usted dar alguna razón por la que estos cinco estados tienen un gran número de sitios con desechos peligrosos? ¿Qué otra variable podría usted medir para ayudar a explicar por qué los datos se comportan así?

Conforme usted siga trabajando los ejercicios de este capítulo, adquirirá más experiencia para reconocer diferentes tipos de datos y determinar el método gráfico más apropiado a usar. Recuerde que el tipo de gráfica que use no es tan importante como la interpretación que acompaña a la imagen. Busque estas importantes características:

- Ubicación del centro de los datos
- Forma de la distribución de datos
- Observaciones poco comunes del conjunto de datos

Al utilizar estas características como guía, podrá interpretar y comparar conjuntos de datos usando métodos gráficos, que son sólo la primera de numerosas herramientas estadísticas que pronto tendrá a su disposición.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos clave

I. Cómo se generan datos

1. Unidades experimentales, variables, mediciones
2. Muestras y poblaciones
3. Datos univariados, bivariados y multivariados

II. Tipos de variables

1. Cualitativas o categóricas
2. Cuantitativas
   a. Discretas
   b. Continuas

III. Gráficas para distribuciones univariadas de datos

1. Datos cualitativos o categóricos
   a. Gráficas de pastel
   b. Gráficas de barras
2. Datos cuantitativos
   a. Gráficas de pastel y de barras
   b. Gráficas de líneas
   c. Gráficas de puntos
   d. Gráficas de tallo y hoja
   e. Histogramas de frecuencia relativa
3. Descripción de distribuciones de datos
   a. Formas: simétricas, sesgadas a la izquierda, sesgadas a la derecha, unimodales, bimodales
   b. Proporción de mediciones en ciertos intervalos
   c. Resultados atípicos

MI APPLET

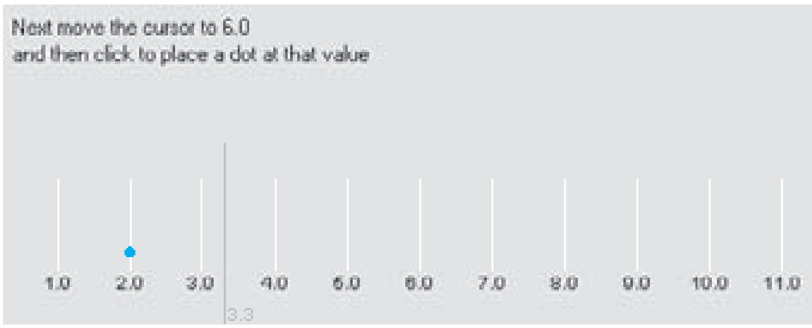
El acceso fácil a la web ha hecho posible entender conceptos de estadística usando una herramienta interactiva de la web llamada **applet**. Estos applets dan un refuerzo visual para los conceptos que se han presentado en el capítulo. A veces el lector podrá realizar experimentos estadísticos, a veces podrá interactuar con una gráfica estadística para cambiar su forma y a veces podrá usar el applet como "tabla estadística" interactiva. Al final de cada capítulo, el lector encontrará ejercicios diseñados específicamente para usar con un applet en particular.

Los applets han sido personalizados en forma específica para comparar la presentación y notación empleadas en el texto. Se pueden hallar en el sitio web Premium. Si es necesario, siga las instrucciones para descargar el último buscador de la web y/o conexión a Java, o simplemente dé un clic en el vínculo apropiado para cargar los applets. Su buscador de la web abrirá el índice de applets, organizados por capítulo y nombre. Cuando haga clic en un título particular de applet, éste aparecerá en su buscador. Para regresar al índice de applets, dé un clic en el vínculo situado en la parte inferior de la página.

Gráficas de puntos

Dé un clic en el applet del capítulo 1 llamado **Construcción de una gráfica de puntos**. Si el usuario mueve el cursor sobre el applet marcado **Dotplot Demo**, verá una línea verde con un valor que cambia al moverlo a lo largo del eje horizontal. Cuando dé un clic con el botón izquierdo de su mouse, aparecerá un dato en ese punto de la gráfica de puntos. Si dos medidas son idénticas, los puntos se apilan uno encima de otro (figura 1.17). Siga las instrucciones del **Dotplot Demo**, usando los datos muestrales dados ahí. Si se equivoca, el applet se lo indica. El segundo applet no corregirá errores y el usuario puede agregar tantos puntos como desee.

FIGURA 1.17
Construcción de un applet de gráfica de puntos



Histogramas

Dé un clic en el applet del capítulo 1 llamado **Construcción de un histograma**. Si se desplaza hacia abajo, al applet marcado **Histogram Demo**, verá las fronteras de intervalo (o puntos medios de intervalo) para el histograma a lo largo del eje horizontal. Al mover el apuntador por la gráfica, una caja de color gris claro indicará dónde se agrega la medición al siguiente clic del mouse. Cuando suelte éste, la caja pasa a color azul oscuro (azul oscuro en la figura 1.18). El histograma parcialmente completo de la figura 1.18 contiene un 3, un 4, un 5, tres 6 y un 7. Siga las instrucciones del **Histogram Demo** usando los datos muestrales dados ahí. Dé un clic en el vínculo para comparar sus resultados contra el histograma correcto. El segundo applet se usará para algunos de los ejercicios Mi Applet.

Haga clic en el applet llamado **Flipping Fair Coins** y desplace el apuntador al applet marcado **tamaño muestral = 3**. La computadora recolectará algunos datos al "virtualmente" lanzar al aire 3 monedas y registrar la variable discreta cuantitativa

$$x = \text{número de caras observadas}$$

Haga clic en "Nuevo tiro de moneda". Verá el resultado de sus tres tiros en la esquina superior izquierda, junto con el valor de x. Para el experimento de la figura 1.19 observamos $x = 2$.

El applet empieza a construir un histograma de frecuencia relativa para describir el conjunto de datos, que en este punto contiene sólo una observación. Haga clic en "New Coin Flip" (Nuevo Tiro de Moneda) unas pocas veces más. Observe las mone-

FIGURA 1.18
Construcción de un applet de histograma

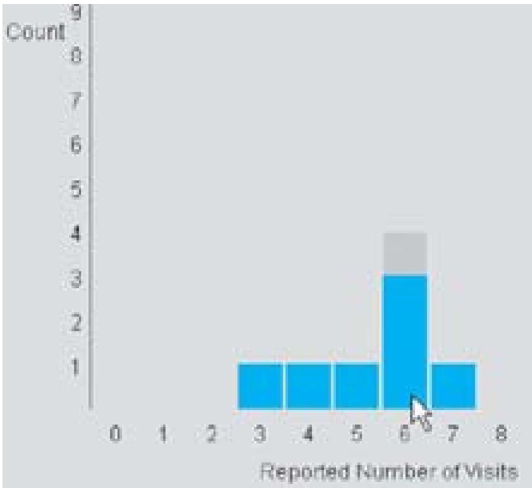


FIGURA 1.19
Applet de tiro al aire de monedas "limpias"

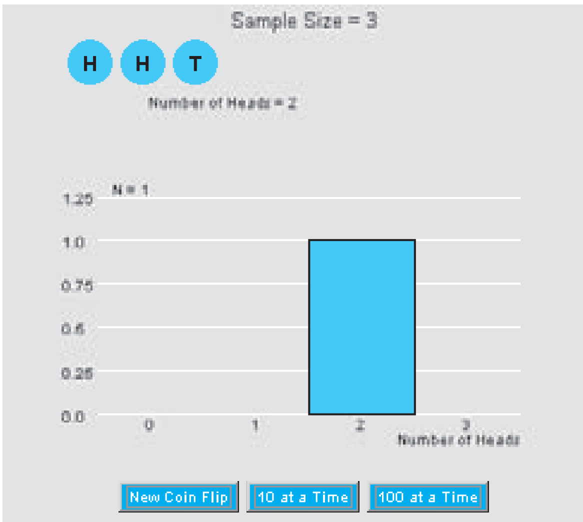
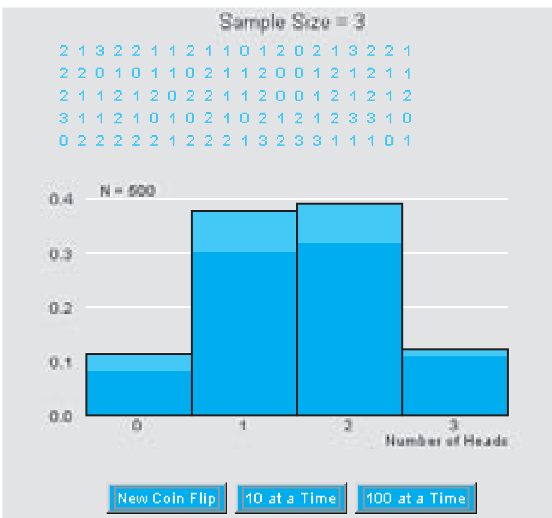


FIGURA 1.20
Applet de tiro al aire de monedas "limpias"



das, junto con el valor de x, y observe cómo crece el histograma de frecuencia relativa. La parte roja (azul claro en las figuras 1.19 y 1.20) representa los datos actuales agregados al histograma, y la parte azul oscuro de la figura 1.20 está aportada de los tipos previos de moneda. El usuario puede tirar las tres monedas 10 veces o 100 para generar datos con más rapidez.

La figura 1.20 muestra el histograma de frecuencia relativa para 500 observaciones en nuestro conjunto de datos. El conjunto de datos del usuario se mostrará un poco diferente pero debe tener la misma forma aproximada, es decir, debe ser relativamente simétrico. Para nuestro histograma, podemos decir que los valores $x = 0$ y $x = 3$ ocurrieron alrededor de 12-13% del tiempo, mientras que los valores $x = 1$ y $x = 2$ ocurrieron entre 38 y 40% del tiempo. ¿El histograma de usted produce resultados similares?

MI **MINITAB**

Introducción a *MINITAB*™

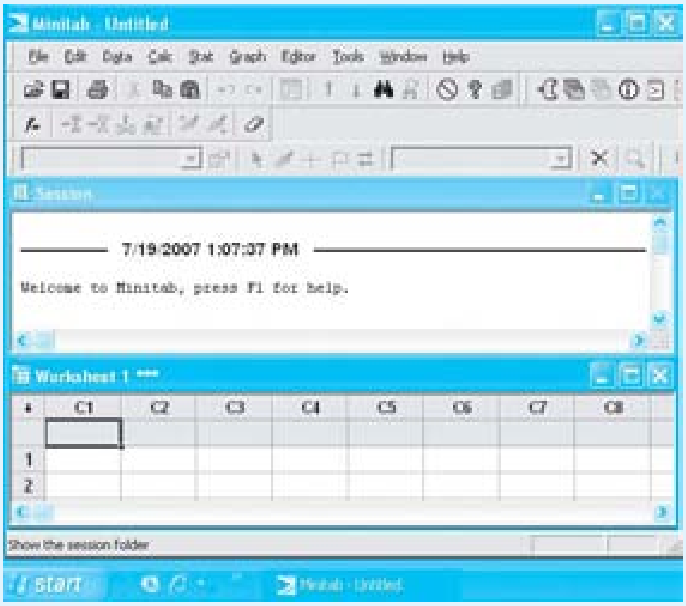
MINITAB es un paquete de software que presenta numerosas formas para diferentes ambientes de computadora. La versión actual de *MINITAB* al momento de imprimir este texto es el *MINITAB 15*, que se usa en ambientes Windows. Supondremos que el usuario está familiarizado con Windows; si no es así, quizá una asistente de enseñanza pueda ayudarlo a dominar los aspectos básicos.

Una vez que inicie Windows, hay dos formas de iniciar *MINITAB*:

- Si hay un icono de atajo *MINITAB* en el escritorio, dé doble clic en el icono.
- Haga clic en el botón Start de la barra de tareas. Siga los menús, seleccionando **All Programs → *MINITAB* Solutions → *MINITAB* 15 Statistical Software English.** Haga clic en ***MINITAB* 15 Statistical Software English** para iniciar el programa.

Cuando se abra el *MINITAB*, aparece la pantalla principal *MINITAB* (véase la figura 1.21). Contiene dos ventanas: la ventana Data y la ventana Session. Un clic en cualquier parte

FIGURA 1.21



de la ventana activa a ésta para que el usuario pueda introducir datos o teclear comandos. Aun cuando es posible teclear comandos *MINITAB* en la ventana Session, escogemos usar el método Windows por ser más conocido. Si prefiere usar comandos con tecleo, consulte en el manual *MINITAB* las instrucciones detalladas.

En el inciso superior de la ventana Session se mostrará la barra Menu. Si se selecciona y hace clic en cualquier comando de la barra de Menu, aparece un menú descendente, del cual usted seleccionará los comandos necesarios. Usaremos la notación estándar para indicar una secuencia de comandos del menú. Por ejemplo, **File → Open Worksheet** permitirá recuperar una "hoja de trabajo", es decir, un conjunto de datos de la ventana Data que el usuario ha guardado previamente. Para cerrar el programa, la secuencia de comandos es **File → Exit**.

MINITAB 15 permite guardar numerosas hojas de trabajo como "proyectos". Cuando el usuario trabaje en un proyecto, puede agregar nuevas hojas de trabajo o abrir hojas de trabajo de otros proyectos para agregar a su proyecto actual. A medida que se familiarice más con *MINITAB*, podrá organizar su información en "hojas de trabajo" o en "proyectos", dependiente de la complejidad de su trabajo.

Gráficas con *MINITAB*

El primer conjunto de datos a ser graficado está formado por datos cualitativos cuyas frecuencias ya han sido registradas. El estatus de clase de 105 estudiantes de un curso introductorio de estadística se muestra en la tabla 1.13. Antes de introducir los datos en la ventana Minitab Data, inicie un proyecto llamado "capítulo 1" al dar un clic en **File → New**. Aparece un cuadro de diálogo llamado "New". Haga clic en **Minitab Project** y en **OK**. Antes de continuar, guardemos este proyecto como "capítulo 1" usando la serie de comandos **File → Save Project**. Teclee **Chapter 1** en la caja File Name y seleccione un lugar usando la caja blanca marcada "Save in:" en la parte superior del cuadro de diálogo. Dé un clic en **Save**. En la ventana Data de la pantalla, parte superior, verá el nombre de su nuevo proyecto, "Chapter 1.MPJ".

TABLA 1.13 **Estatus de estudiantes del curso de estadística**

Estatus	1er año	Segundo año	Penúltimo año	Último año	Graduado
Frecuencia	5	23	32	35	10

Para introducir los datos en la hoja de trabajo, dé un clic en la celda gris situada abajo del nombre C1 de la ventana Data. Puede introducir su propio nombre descriptivo para las categorías, posiblemente "Status". A continuación use la flecha hacia abajo ↓ del mouse para continuar por la columna C1, introduciendo las cinco descripciones de estatus. Observe que el nombre **C1** ha cambiado a **C1-T** porque está usted introduciendo texto en lugar de números. Continúe dando nombre a la columna 2 (C2) "Frecuency", e introduzca las cinco frecuencias numéricas en C2. La ventana de datos aparecerá como **Frecuency** en la figura 1.22.

Para construir una gráfica de pastel para estos datos, haga clic en **Graph → Pie Chart**, y aparecerá una caja de diálogo (véase la figura 1.23). En esta caja, el usuario debe especificar la forma en que desee crear la gráfica. Dé un clic en el botón de radio marcado **Chart values from a table**. Enseguida coloque su cursor en la caja marcada "Categorical Variable". El usuario puede (1) dar clic en C1 en la lista a la izquierda y escoger **Select**, (2) dar doble clic en C1 de la lista a la izquierda, o (3) teclear C1 en la caja "Categorical variable". Del mismo modo, ponga el cursor en la caja marcada "Summary variables" y seleccione C2. Dé un clic en **Labels** y seleccione la ficha marcada **Slice**

FIGURA 1.22

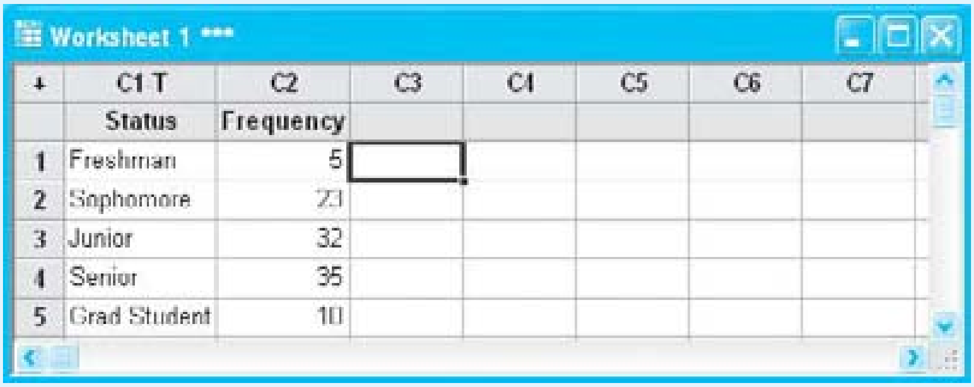
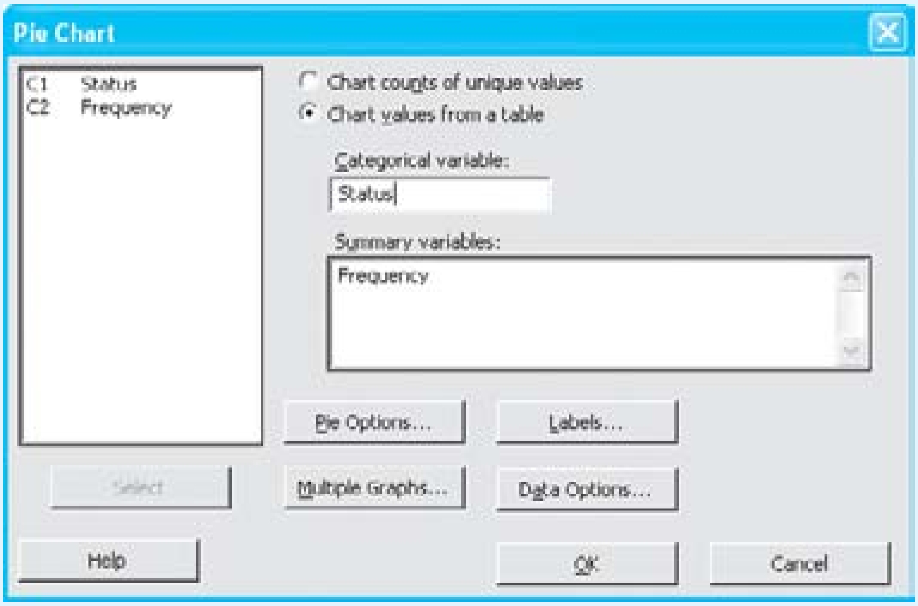


FIGURA 1.23

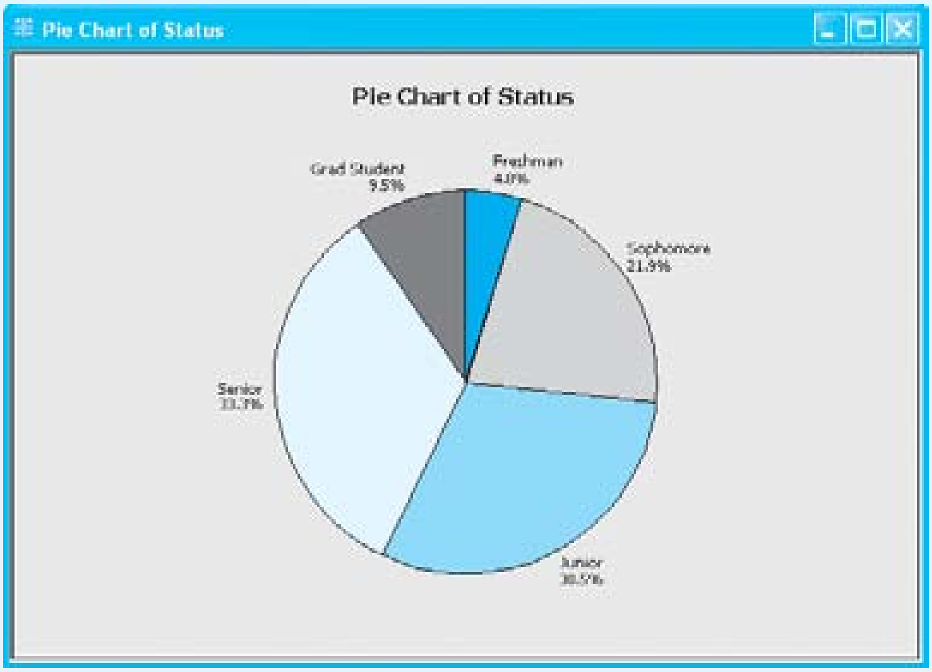


Labels. Verifique las cajas marcadas "Category names" y "Percent". Cuando dé un clic en **OK**, *MINITAB* creará la gráfica de pastel de la figura 1.24. Hemos removido la leyenda al seleccionarla y eliminarla.

Cuando adquiera más experiencia en el uso del comando de gráficas de pastel, podrá aprovechar algunas opciones disponibles. Una vez creada la gráfica, *dé un clic derecho* en la gráfica de pastel y seleccione **Edit Pie**. Puede cambiar los colores y formato de la gráfica, "mostrar por separado" sectores importantes del pastel y cambiar el orden de las categorías. Si el usuario da un *clic derecho* en la gráfica de pastel y selecciona **Update Graph Automatically**, la gráfica de pastel se actualizará en forma automática cuando se cambien los datos de las columnas C1 y C2 de la hoja de trabajo *MINITAB*.

Si el usuario prefiere construir una gráfica de barras, use el comando **Graph** → **Bar Chart**. En la caja de Diálogo que aparece, escoja **Simple**. Seleccione una opción de la lista descendente "Bars represent", dependiendo de la forma en que los datos se hayan

FIGURA 1.24



introducido en la hoja de trabajo. Para los datos de la tabla 1.13, escogimos “Values from a table” y dimos clic en **OK**. Cuando aparezca la caja de Dialog, ponga su cursor en la caja “Graph variables” y **seleccione** C2. Ponga su cursor en la caja “Categorical variable” y **seleccione** C1. Dé un clic en **OK** para terminar la gráfica de barras, mostrada en la figura 1.25. Una vez creada la gráfica, *dé un clic derecho* en las diversas partes de la gráfica de barras y escoja **Edit** para cambiar el aspecto de la gráfica.

MINITAB puede crear gráficas de puntos, gráficas de tallo y hoja e histogramas para datos cuantitativos. Las 40 acciones superiores del mercado secundario, clasificadas por el porcentaje de acciones en circulación negociadas en un día en particular, aparecen en la tabla 1.14. Aun cuando podríamos simplemente introducir estos datos en la tercera columna (C3) de la Hoja de Trabajo 1 del proyecto “Chapter 1”, iniciemos una nueva hoja de trabajo dentro de “Chapter 1” usando **File → New**, dando clic en **Minitab Worksheet** y dando clic en **OK**. La Hoja de Trabajo 2 aparecerá en la pantalla. Introduzca los datos en la columna C1 y llámelas “Stocks” (Acciones) en la celda gris que está un poco abajo de C1.

TABLA 1.14 **Porcentaje de acciones en circulación negociadas**

11.88	6.27	5.49	4.81	4.40	3.78	3.44	3.11	2.88	2.68
7.99	6.07	5.26	4.79	4.05	3.69	3.36	3.03	2.74	2.63
7.15	5.98	5.07	4.55	3.94	3.62	3.26	2.99	2.74	2.62
7.13	5.91	4.94	4.43	3.93	3.48	3.20	2.89	2.69	2.61

Para crear una gráfica de puntos, use **Graph → Dotplot**. En la caja de Dialog que aparece, escoja **One Y → Simple** y dé un clic en **OK**. Para crear una gráfica de tallo y hoja, use **Graph → Stem-and-Leaf**. Para cualquiera de estas gráficas, ponga su cursor en la caja “Graph variables” y seleccione “Stocks” (Acciones) de la lista a la izquierda (véase la figura 1.26).

FIGURA 1.25

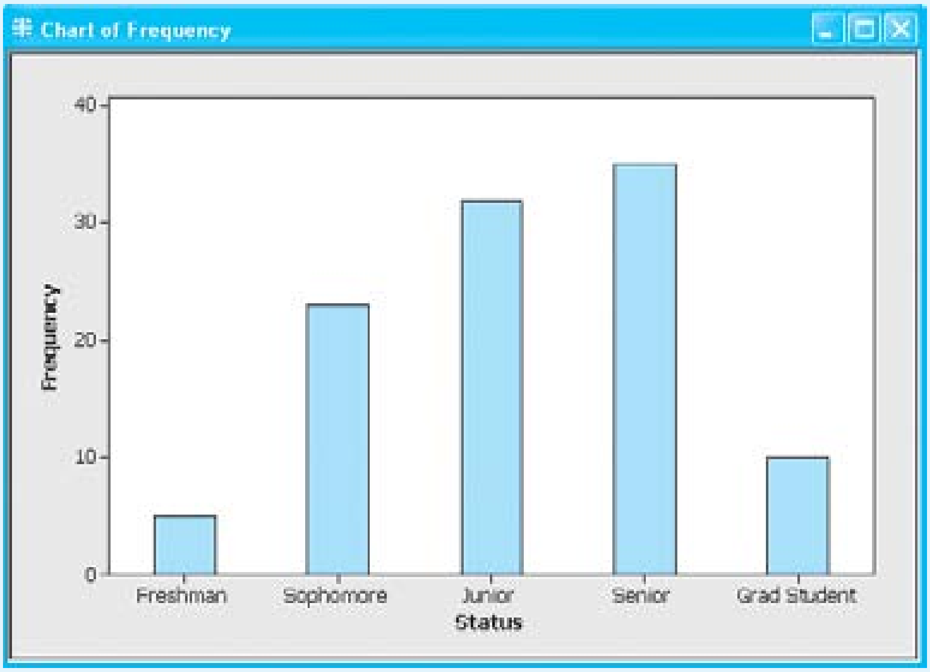
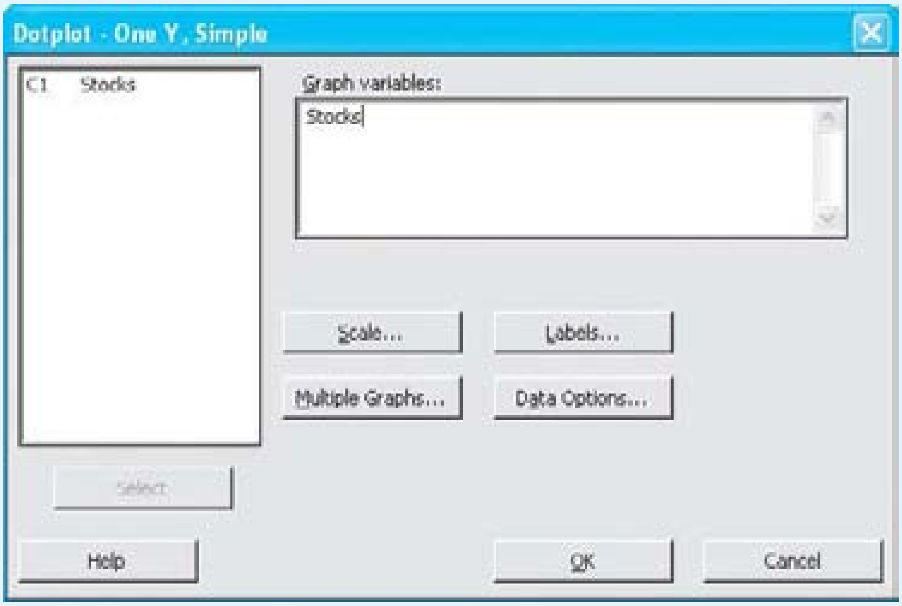


FIGURA 1.26



El usuario puede seleccionar de una variedad de opciones de formato antes de hacer clic en **OK**. La gráfica de puntos aparece como una gráfica, en tanto que la gráfica de tallo y hoja aparece en la ventana Session. Para imprimir una ventana Graph o la ventana Session, dé un clic en la ventana para activarla y use **File** → **Print Graph** (o **Print Session Window**).

Para crear un histograma, use **Graph** → **Histogram**. En la caja de Dialog que aparece, escoja **Simple** y dé un clic en **OK**, seleccionando "Stocks" para la caja "Graph

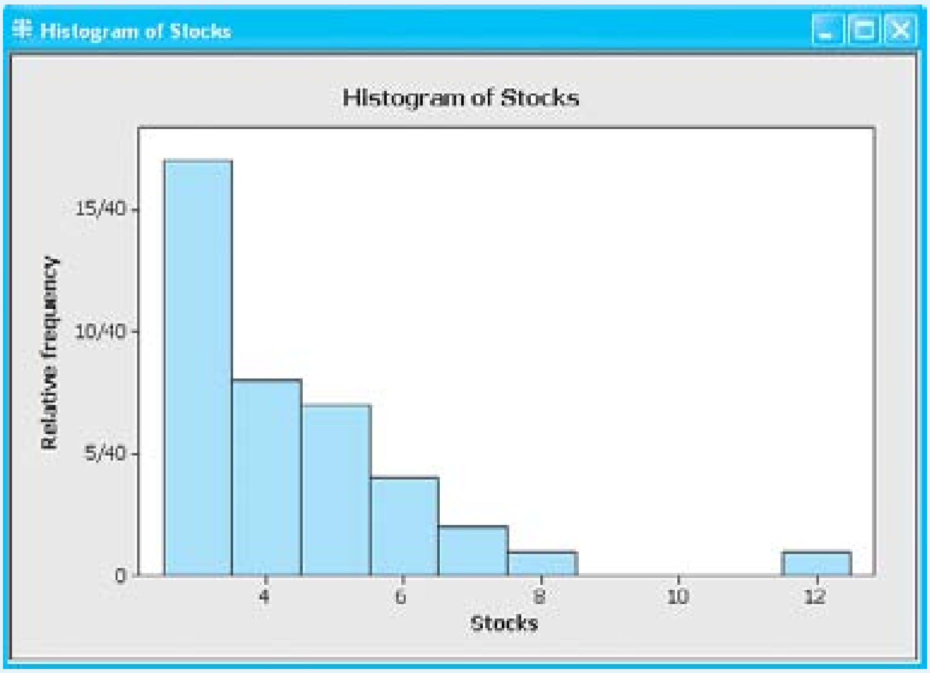
Variables". Seleccione **Scale** → **Y-Scale Type** y dé un clic en el botón de radio marcado "Frequency". (Después puede editar el histograma para mostrar frecuencias relativas.) Dé doble clic en **OK**. Una vez creado el histograma, *dé un clic derecho* en el eje *Y* y seleccione **Edit Y Scale**. Bajo la ficha marcada "Scale", el usuario puede dar clic en el botón de radio marcado "Position of ticks" y teclear **0 5 10 15**. A continuación dé un clic en la ficha marcada "Labels" (Leyendas), en el botón de radio marcado "Specified" y teclee **0 5/40 10/40 15/40**. Haga clic en **OK**. Esto reducirá el número de "palomas" en el eje *y* y las cambia a frecuencias relativas. Por último, dé doble clic en la palabra "Frequency" junto al eje *y*. Cambie la caja marcada "Text" para leer "Relative frequency" y dé clic en **OK**.

Para ajustar el tipo de fronteras para el histograma, *dé un clic derecho* en las barras del histograma y escoja **Edit Bars**. Use la ficha marcada "Binning" para escoger ya sea "Cutpoints" (Puntos de corte) o "Midpoints" (Puntos medios) para el histograma; puede usted cambiar los colores, llenar el tipo y estilo de fuente del histograma. Si da un *clic derecho* en las barras y selecciona **Update Graph Automatically**, el histograma se actualiza en forma automática cuando se cambien los datos de la columna "Stocks".

Cuando el usuario se familiarice con el *MINITAB* para Windows, podrá explorar las diversas opciones disponibles para cada tipo de gráfica. Es posible graficar más de una variable a la vez, cambiar los ejes, escoger los colores y modificar gráficas en numerosas formas. No obstante, aun con los comandos básicos predeterminados, es evidente que la distribución de acciones en circulación está muy sesgada a la derecha.

Asegúrese de guardar su trabajo usando el comando **File** → **Save Project** antes de salir del *MINITAB*.

FIGURA 1.27



Ejercicios suplementarios

1.38 **¿Cuantitativa o cualitativa?** Identifique cada variable como cuantitativa o cualitativa:

a. Origen étnico de un candidato a un cargo público

b. Calificación (0-100) en un examen de conocimientos

c. Establecimiento de comida rápida preferida por un estudiante (McDonald's, Burger King o Carl's Jr.)

d. Concentración de mercurio en una muestra de atún

1.39 **¿Simétrica o sesgada?** ¿Espera usted que las distribuciones de las variables siguientes sean simétricas o sesgadas? Explique.

a. Monto en dólares de préstamos no asegurados

b. Monto en dólares de préstamos asegurados

c. Precio de una lata de 8 onzas (¼ kg) de chícharos

d. Estatura en pulgadas de mujeres de primer año en la universidad

e. Número de envolturas de taco rotas en un paquete de 100 envolturas

f. Número de garrapatas halladas en cada uno de 50 conejos de cola de algodón atrapados

1.40 **¿Continuas o discretas?** Identifique cada variable como continua o discreta:

a. Número de homicidios en Detroit en el periodo de un mes

b. Lapso entre llegadas de un paciente externo a una clínica

c. Número de errores de tipografía en una página de manuscrito

d. Número de focos defectuosos en un paquete que contiene cuatro focos

e. Tiempo necesario para terminar un examen

1.41 **Continuas o discretas, otra vez** Identifique cada variable como continua o discreta:

a. Peso de dos docenas de camarones

b. Temperatura corporal de una persona

c. Número de personas en espera de tratamiento en la sala de emergencia de un hospital

d. Número de propiedades a la venta de una agencia de bienes raíces

e. Número de reclamaciones recibidas por una compañía de seguros en un día

1.42 **Continua o discreta, otra vez** Identifique cada variable como continua o discreta:

a. Número de personas en fila de espera en la caja de pago de un supermercado

b. Profundidad de una nevada

c. Tiempo para que un conductor responda ante un choque inminente

d. Número de aviones que llegan al aeropuerto de Atlanta en una hora determinada

MIS DATOS EX0143

1.43 **Agua corriente** Se ha sugerido agua corriente como método de acondicionamiento cardiovascular para atletas lesionados y otros que deseen un programa de aerobics de bajo impacto. Un estudio publicado en la *Journal of Sports Medicine* investigó la relación entre la cadencia de ejercicio y la frecuencia cardiaca, al medir las frecuencias cardiacas de 20 voluntarios sanos a una cadencia de 48 ciclos por minuto (un ciclo formado por dos pasos).[10] Los datos aparecen a continuación:

87	109	79	80	96	95	90	92	96	98
101	91	78	112	94	98	94	107	81	96

Construya una gráfica de tallo y hoja para describir los datos. Analice las características de la distribución de datos.

MIS DATOS EX0144

1.44 **Lagos más grandes del mundo** Un lago es un cuerpo de agua rodeado por tierra. Por lo tanto, algunos cuerpos de agua llamados "mares", como el mar Caspio, en realidad son lagos salados. En la tabla siguiente, la longitud en millas aparece para los lagos naturales más grandes del mundo, excluyendo el mar Caspio, que tiene un área de 143 244 millas cuadradas, una longitud de 760 millas y una profundidad máxima de 3363 pies.[5]

Nombre	Longitud (millas)	Nombre	Longitud (millas)
Superior	350	Eyre	90
Victoria	250	Titicaca	122
Huron	206	Nicaragua	102
Michigan	307	Athabasca	208
Aral Sea	260	Reindeer	143
Tanganyika	420	Turkana	154
Baykal	395	Issyk Kul	115
Great Bear	192	Torrens	130
Nyasa	360	Vänern	91
Great Slave	298	Nettilling	67
Erie	241	Winnipegosis	141
Winnipeg	266	Albert	100
Ontario	193	Nipigon	72
Balkhash	376	Gairdner	90
Ladoga	124	Urmia	90
Maracaibo	133	Manitoba	140
Onega	145	Chad	175

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

a. Use una gráfica de tallo y hoja para describir las longitudes de los lagos más grandes del mundo.

b. Use un histograma para exhibir estos mismos datos. ¿Cómo se compara con la gráfica de tallo y hoja del inciso a)?

c. ¿Estos datos son simétricos o sesgados? Si son sesgados, ¿cuál es la dirección del sesgo?

MIS DATOS EX0145 **1.45 Edades de centavos** Recolectamos 50 monedas de un centavo y registramos sus edades, al calcular EDAD = AÑO ACTUAL – AÑO EN EL CENTAVO.

5	1	9	1	2	20	0	25	0	17
1	4	4	3	0	25	3	3	8	28
5	21	19	9	0	5	0	2	1	0
0	1	19	0	2	0	20	16	22	10
19	36	23	0	1	17	6	0	5	0

a. Antes de trazar gráfica alguna, trate de visualizar el aspecto que tendrá la distribución de edades de centavos. ¿Tendrá forma de montículo, será simétrica, estará sesgada a la derecha o sesgada a la izquierda?

b. Trace un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución de edades de centavos. ¿Cómo describiría usted la forma de la distribución?

MIS DATOS EX0146 **1.46 Edades de centavos, continúa** Los datos que aparecen a continuación representan las edades de un conjunto diferente de 50 centavos, de nuevo calculados usando EDAD = AÑO ACTUAL – AÑO EN EL CENTAVO.

41	9	0	4	3	0	3	8	21	3
2	10	4	0	14	0	25	12	24	19
3	1	14	7	2	4	4	5	1	20
14	9	3	5	3	0	8	17	16	0
0	7	3	5	23	7	28	17	9	2

a. Trace un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución de edades de centavos. ¿La forma es similar a la del histograma de frecuencia relativa del ejercicio 1.41?

b. Trace una gráfica de tallo y hoja para describir las edades de centavos. ¿Hay algunas medidas anormalmente grandes o pequeñas en el conjunto?

MIS DATOS EX0147 **1.47 Vetos presidenciales** A continuación aparece una lista de los 43 presidentes de Estados Unidos, junto con el número de vetos regulares empleados por cada uno de ellos:[5]

Washington	2	B. Harrison	19
J. Adams	0	Cleveland	42
Jefferson	0	McKinley	6
Madison	5	T. Roosevelt	42
Monroe	1	Taft	30
J. Q. Adams	0	Wilson	33
Jackson	5	Harding	5
Van Buren	0	Coolidge	20
W. H. Harrison	0	Hoover	21
Tyler	6	F. D. Roosevelt	372
Polk	2	Truman	180
Taylor	0	Eisenhower	73
Fillmore	0	Kennedy	12
Pierce	9	L. Johnson	16
Buchanan	4	Nixon	26
Lincoln	2	Ford	48
A. Johnson	21	Carter	13
Grant	45	Reagan	39
Hayes	12	G. H. W. Bush	29
Garfield	0	Clinton	36
Arthur	4	G. W. Bush	1
Cleveland	304		

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

Use una gráfica apropiada para describir el número de vetos emitidos por los 43 presidentes. Escriba un párrafo de resumen que describa este conjunto de datos.

MIS DATOS EX0148 **1.48 Ciudades ventosas** ¿Hay algunas ciudades más ventosas que otras? ¿Chicago merece el apodo de "La Ciudad de los Vientos"? Estos datos son las velocidades promedio del viento (en millas por hora) para 55 ciudades seleccionadas en Estados Unidos:[5]

8.9	12.4	12.9	8.4	7.8	11.5	8.2	9.0	8.8	9.0
7.1	11.8	10.3	7.7	9.2	10.5	9.3	8.7	8.7	
9.1	9.0	10.5	11.3	7.8	8.8	12.2	7.9	8.8	
8.8	10.8	8.7	7.6	5.5	35.1	10.5	10.4	11.0	
10.2	8.6	10.7	9.6	8.3	8.0	9.5	7.7	9.4	
8.7	5.8	10.2	6.9	9.2	10.2	6.2	9.6	12.2	

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para los datos. (SUGERENCIA: Escoja las fronteras de clase sin incluir el valor $x = 35.1$ en el rango de valores.)

b. El valor $x = 35.1$ se registró en Monte Washington, New Hampshire. ¿La geografía de esa ciudad explica la observación?

c. El promedio de velocidad del viento en Chicago está registrado en 10.3 millas por hora. ¿Considera usted que esto es extraordinariamente ventoso?

MIS DATOS EX0149 **1.49 Kentucky Derby** El siguiente conjunto de datos muestra los tiempos ganadores (en segundos) para las carreras del Derby de Kentucky de 1950 a 2007:[11]

(1950)	121.3	122.3	121.3	122.0	123.0	121.4	123.2	122.1	125.0	122.1
(1960)	122.2	124.0	120.2	121.4	120.0	121.1	122.0	120.3	122.1	121.4
(1970)	123.2	123.1	121.4	119.2†	124.0	122.0	121.3	122.1	121.1	122.2
(1980)	122.0	122.0	122.2	122.1	122.2	120.1	122.4	123.2	122.2	125.0
(1990)	122.0	123.0	123.0	122.2	123.3	121.1	121.0	122.4	122.2	123.2
(2000)	121.0	119.97	121.13	121.19	124.06	122.75	121.36	122.17		

†Tiempo récord establecido por *Secretariat* en 1973
Fuente: www.kentuckyderby.com

a. ¿Piensa usted que con los años habrá una tendencia en los tiempos ganadores? Trace una gráfica de línea para verificar su respuesta.

b. Describa la distribución de tiempos ganadores usando una gráfica apropiada. Comente sobre la forma de la distribución y busque algunas observaciones poco comunes.

MIS DATOS EX0150

1.50 Redes computarizadas en casa A medida que los norteamericanos estén más informados acerca del hardware y el software de computadoras, los precios bajen y la instalación se haga más fácil, se espera que las redes de las PC en casa penetren al 27% de hogares en Estados Unidos hacia el año 2008, con la tecnología inalámbrica a la delantera.[12]

Redes domésticas en Estados Unidos (en millones)

Año	Conectada	Inalámbrica
2002	6.1	1.7
2003	6.5	4.5
2004	6.2	8.7
2005	5.7	13.7
2006	4.9	19.1
2007	4.1	24.0
2008	3.4	28.2

Fuente: Jupiter Research

a. ¿Qué métodos gráficos podría usted usar para describir los datos?

b. Antes de trazar una gráfica, busque en la tabla el número pronosticado de instalaciones conectadas e inalámbricas. ¿Qué tendencias espera ver en las gráficas?

c. Use una gráfica de línea para describir el número pronosticado de instalaciones domésticas *alámbricas* para los años 2002 a 2008.

d. Use una gráfica de línea para describir el número pronosticado de instalaciones domésticas *inalámbricas* para los años 2002 a 2008.

MIS DATOS EX0151

1.51 Resultados de elecciones Las elecciones de 2004 fueron una carrera en la que el titular, George W. Bush, derrotó a John Kerry, Ralph Nader y otros candidatos, recibiendo 50.7% de la votación. El voto popular (en miles) para George W. Bush en cada uno de los 50 estados aparece a continuación:[8]

AL	1176	HI	194	MA	1071	NM	377	SD	233
AK	191	ID	409	MI	2314	NY	2962	TN	1384
AZ	1104	IL	2346	MN	1347	NC	1961	TX	4527
AR	573	IN	1479	MS	685	ND	197	UT	664
CA	5510	IA	572	MO	1456	OH	2860	VT	121
CO	1101	KS	736	MT	266	OK	960	VA	1717
CT	694	KY	1069	NE	513	OR	867	WA	1305
DE	172	LA	1102	NV	419	PA	2794	WV	424
FL	3965	ME	330	NH	331	RI	169	WI	1478
GA	1914	MD	1025	NJ	1670	SC	938	WY	168

a. Con sólo mirar la tabla, ¿qué forma piensa usted que tendrá la distribución de datos para el voto popular por estado?

b. Trace un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución del voto popular para el presidente Bush en los 50 estados.

c. ¿El histograma del inciso b) confirma el cálculo de usted en el inciso a)? ¿Hay resultados atípicos? ¿Cómo puede explicarlos?

MIS DATOS EX0152

1.52 Resultados de elecciones, continúa Consulte el ejercicio 1.51. A continuación aparece el *porcentaje* del voto popular recibido por el presidente Bush en cada uno de los 50 estados:[8]

AL	62	HI	45	MA	37	NM	50	SD	60
AK	61	ID	68	MI	48	NY	40	TN	57
AZ	55	IL	44	MN	48	NC	56	TX	61
AR	54	IN	60	MS	59	ND	63	UT	73
CA	44	IA	50	MO	53	OH	51	VT	39
CO	52	KS	62	MT	59	OK	66	VA	54
CT	44	KY	60	NE	66	OR	47	WA	46
DE	46	LA	57	NV	51	PA	48	WV	56
FL	52	ME	45	NH	49	RI	39	WI	49
GA	58	MD	43	NJ	46	SC	58	WY	69

a. Con sólo mirar la tabla, ¿qué forma piensa usted que tendrá la distribución de datos para el *porcentaje* del voto popular?

b. Trace un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución. Describa la forma de la distribución y busque resultados atípicos. ¿La gráfica confirma su respuesta al inciso a)?

1.53 Resultados de elecciones, continúa Consulte los ejercicios 1.51 y 1.52. Las siguientes gráficas de tallo y hoja fueron generadas usando el *MINITAB* para las variables llamadas "Voto popular" y "Porcentaje de Votos".

Pantalla de tallo y hoja: Voto popular y porcentaje de votos

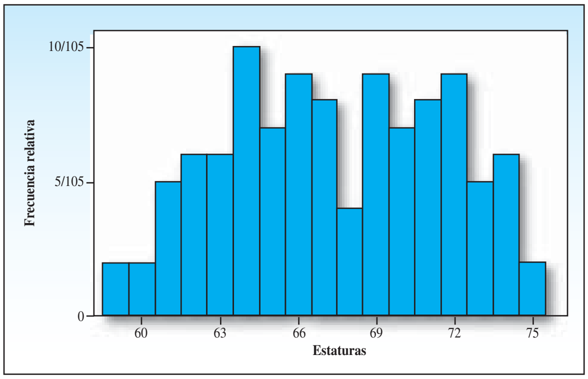
```
Stem-and-leaf of               Stem-and-leaf of
Popular Vote N = 50            Percent Vote N = 50
Leaf Unit = 100                Leaf Unit = 1.0

 7    0 1111111                 3    3 799
12    0 22333                   8    4 03444
18    0 444555                 19    4 55666788899
22    0 6667                   (9)   5 001122344
25    0 899                    22    5 566778899
25    1 0001111                13    6 00011223
18    1 333                     5    6 6689
15    1 444                     1    7 3
12    1 67
10    1 99
 8    2
 8    2 33
 6    2
 6    2 7
 5    2 89
    HI  39, 45, 55
```

a. Describa las formas de las dos distribuciones. ¿Hay resultados atípicos?

b. ¿Las gráficas de tallo y hoja se asemejan a los histogramas de frecuencia relativa construidos en los ejercicios 1.51 y 1.52?

c. Explique por qué la distribución del voto popular para el presidente Bush por estado está sesgada, en tanto que el porcentaje de votos populares por estado tiene forma de montículo.

MIS DATOS EX0154 **1.54 Estaturas de estudiantes** Las estaturas de 105 estudiantes de un grupo de bioestadística, indicadas voluntariamente, están descritas en el histograma de frecuencia relativa siguiente.



a. Describa la forma de la distribución.

b. ¿Ve alguna característica poco común en este histograma?

c. ¿Puede considerar una explicación para los dos picos del histograma? ¿Hay algún otro factor que esté causando que las estaturas formen un montículo en dos picos separados? ¿Qué es?

MIS DATOS EX0155 **1.55 Temor al terrorismo** Numerosas encuestas de opinión han dado seguimiento a puntos de vista respecto al temor a ataques terroristas después del 11 de septiembre de 2001 al Centro Mundial de Comercio. Una encuesta del *Newsweek* realizada por Princeton Survey Research Associates International presentó los resultados de varias encuestas en un periodo de dos años que preguntaba: "¿Aprueba o desaprueba usted el modo en que Bush está manejando el terrorismo y la seguridad nacional?" Los datos aparecen en la tabla siguiente:[13]

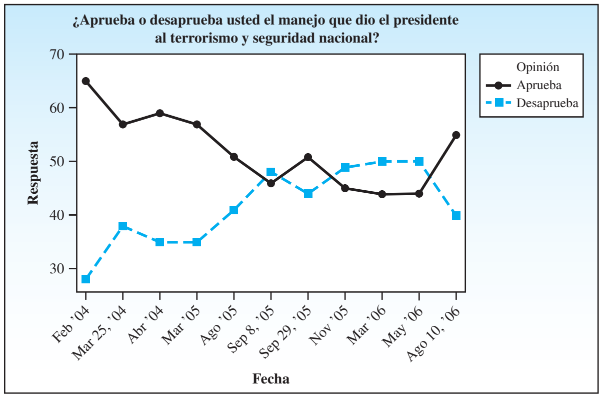
Fecha	% aprueba	% desaprueba	% que no sabe
8/10–11/06	55	40	5
5/11–12/06	44	50	6
3/16–17/06	44	50	6
11/10–11/05	45	49	6
9/29–30/05	51	44	5
9/8–9/05	46	48	6
8/2–4/05	51	41	8
3/17–18/05	57	35	8
4/8–9/04	59	35	6
3/25–26/04	57	38	5
2/19–20/04	65	28	7

a. Trace una gráfica de línea para describir el porcentaje que aprueba el manejo que hace Bush del terrorismo y seguridad nacional. Use el tiempo como eje horizontal.

b. Coloque encima otra gráfica de línea sobre la trazada en el inciso a) para describir el porcentaje que no aprueba.

c. La siguiente gráfica de línea fue creada usando el *MINITAB*. ¿Difiere de la gráfica que usted trazó? Use la gráfica de línea para resumir cambios en las encuestas, poco después de los ataques terroristas en España el 11 de marzo de 2004, y en Inglaterra en julio de 2005.

d. Un complot para derribar aviones en vuelos de Inglaterra a Estados Unidos fue frustrado por agentes secretos ingleses y el arresto de 12 sospechosos siguió el 9 de agosto de 2006. Resuma cualesquier cambios en porcentaje de aprobación que puedan haber sido causados después de los arrestos del 9 de agosto.



MIS DATOS EX0156 **1.56 Frecuencia del pulso** Un grupo de 50 estudiantes de biomedicina tomaron la frecuencia de sus pulsos, al contar el número de pulsaciones durante 30 segundos y luego multiplicando por 2.

80	70	88	70	84	66	84	82	66	42
52	72	90	70	96	84	96	86	62	78
60	82	88	54	66	66	80	88	56	104
84	84	60	84	88	58	72	84	68	74
84	72	62	90	72	84	72	110	100	58

a. ¿Por qué son pares todos los números de las mediciones?

b. Trace una gráfica de tallo y hoja para describir los datos, dividiendo cada tallo en dos líneas.

c. Construya un histograma de frecuencia relativa para los datos.

d. Escriba un párrafo corto que describa la distribución de las frecuencias de pulsos de los estudiantes.

1.57 Internet móvil El internet móvil está creciendo, con usuarios teniendo acceso a sitios como Yahoo! Mail, the Weather Channel, ESPN, Google, Hotmail y Mapquest desde sus teléfonos celulares. Los buscadores más conocidos en la web se muestran en la tabla siguiente, junto con el porcentaje de la parte de mercado de cada uno.[14]

Buscador	Parte de mercado	Buscador	Parte de mercado
Openwave	27%	Teleca AU	6%
Motorola	24%	Sony Ericsson	5%
Nokia	13%	RIM	5%
Access Net Front	9%	Blazer	4%

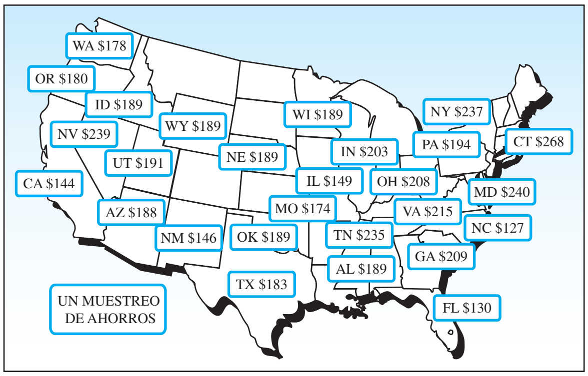
Fuente: www.clickz.com

a. ¿Los porcentajes suman 100%? Si no es así, genere una categoría llamada "Otros" para considerar los porcentajes faltantes.

b. Use una gráfica de pastel para describir las partes de mercado para los diversos buscadores móviles de la web.

MIS DATOS EX0158

1.58 ¿Cuánto puede ahorrar? Un anuncio en una revista *Times* reciente decía que Geico Insurance ayudaría a ahorrar un promedio de $200 dólares por año en seguro de automóviles.[15]



a. Construya un histograma de frecuencia relativa para describir el promedio de ahorros para los 27 estados mostrados en el mapa de Estados Unidos. ¿Ve usted algunas características poco comunes en el histograma?

b. Construya una gráfica de tallo y hoja para los datos dados por Geico Insurance.

c. ¿Cómo cree usted que Geico seleccionó los 27 estados para incluirlos en este anuncio?

MIS DATOS EX0159

1.59 Un hallazgo arqueológico Un artículo en *Archaeometry* contenía un análisis de 26 muestras de alfarería romano-británica, hallada en cuatro sitios de hornos en el Reino Unido.[16] Las muestras fueron analizadas para determinar su composición química, con el porcentaje de óxido de aluminio de cada una de las 26 muestras presentadas en la tabla siguiente.

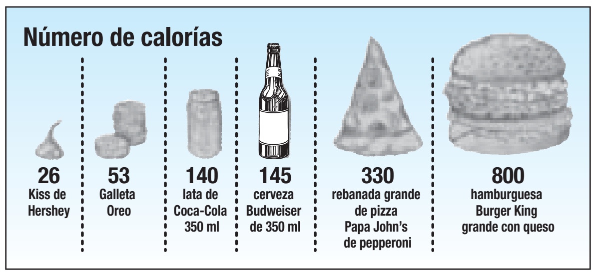
Llanederyn		Caldicot	Island Thorns	Ashley Rails
14.4	11.6	11.8	18.3	17.7
13.8	11.1	11.6	15.8	18.3
14.6	13.4		18.0	16.7
11.5	12.4		18.0	14.8
13.8	13.1		20.8	19.1
10.9	12.7			
10.1	12.5			

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para describir el contenido de óxido de aluminio en las 26 muestras.

b. ¿Qué característica poco común observa usted en esta gráfica? ¿Puede considerar una explicación de esta característica?

c. Trace una gráfica de puntos para los datos, usando una letra (L, C, I o A) para localizar el punto de datos en la escala horizontal. ¿Ayuda esto a explicar la característica poco común del inciso b)?

1.60 El gran debate de calorías ¿Quiere bajar de peso? Puede hacerlo si reduce sus calorías, mientras tome suficiente valor nutricional de los alimentos que consuma. A continuación tenemos una representación visual del número de calorías, en algunos de los alimentos favoritos de los estadounidenses, adaptada de un artículo de *The Press-Enterprise.*[17]



a. Comente sobre la precisión de la gráfica mostrada arriba. ¿Los tamaños, alturas y volúmenes de los seis artículos representan con precisión el número de calorías en el artículo?

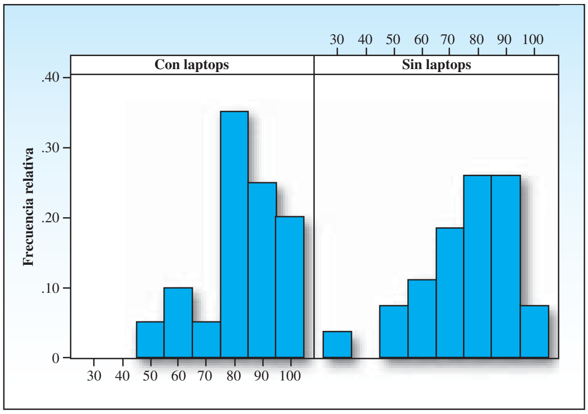
b. Trace una gráfica de barras real para describir el número de calorías en estos seis alimentos favoritos.

MIS DATOS EX0161

1.61 Laptops y aprendizaje Un experimento informal fue realizado por la secundaria McNair Academic de Jersey City, Nueva Jersey, para investigar el uso de computadoras portátiles como herramienta de aprendizaje en el estudio del álgebra.[18] Un grupo de 20 estudiantes de primer año recibió estas computadoras para usar en la escuela y en casa, al tiempo que a otro grupo de 27 no se les dieron laptops; no obstante, muchos de éstos podían usarlas en casa. Las calificaciones de examen final para los dos grupos se muestran a continuación.

Con laptops		Sin laptops		
98	84	63	83	97
97	93	93	52	74
88	57	83	63	88
100	84	86	81	84
100	81	99	91	49
78	83	80	81	89
68	84	78	29	64
47	93	74	72	89
90	57	67	89	70
94	83			

Los histogramas que se muestran a continuación muestran la distribución de calificaciones del examen final para los dos grupos.



Escriba un párrafo con un resumen que describa y compare la distribución de calificaciones del examen final para los dos grupos de estudiantes.

MIS DATOS EX0162 **1.62 El Old Faithful** Los datos siguientes son los tiempos de espera entre erupciones del géiser llamado Old Faithful (Viejo Fiel) del parque nacional Yellowstone.[19] Use uno de los métodos gráficos de este capítulo para describir la distribución de tiempos de espera. Si hay algunas características poco comunes en su gráfica, vea si puede idear alguna explicación práctica de ellas.

56	89	51	79	58	82	52	88	52	78
69	75	77	53	80	54	79	74	65	78
55	87	53	85	61	93	54	76	80	81
59	86	78	71	77	89	45	93	72	71
76	94	75	50	83	82	72	77	75	65
79	72	78	77	79	72	82	74	80	49
75	78	64	80	49	49	88	51	78	85
65	75	77	69	92	91	53	86	49	79
68	87	61	81	55	93	53	84	70	73
93	50	87	77	74	89	87	76	59	80

MIS DATOS EX0163 **1.63 Impuesto a la gasolina** Las siguientes son tasas de impuesto estatal a la gasolina en 2006, en centavos por galón, para los 50 estados y el distrito de Columbia.[5]

AL	18.0	HI	16.0	MA	21.0	NM	17.0	SD	20.0
AK	8.0	ID	25.0	MI	19.0	NY	23.9	TN	20.0
AZ	18.0	IL	19.0	MN	20.0	NC	29.9	TX	20.0
AR	20.0	IN	18.0	MS	18.0	ND	23.0	UT	24.5
CA	18.0	IA	21.0	MO	17.0	OH	28.0	VT	19.0
CO	22.0	KS	24.0	MT	27.0	OK	20.0	VA	17.5
CT	25.0	KY	19.0	NE	26.1	OR	24.0	WA	31.0
DE	23.0	LA	20.0	NV	23.0	PA	32.0	WV	20.5
DC	20.0	ME	25.9	NH	18.0	RI	30.0	WI	32.9
FL	14.9	MD	23.5	NJ	10.5	SC	16.0	WY	14.0
GA	10.0								

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

a. Construya una gráfica de tallo y hoja para los datos.

b. ¿Cómo describiría la forma de esta distribución?

c. ¿Hay estados con impuesto a la gasolina extraordinariamente bajo o alto? Si es así, ¿cuáles son esos estados?

MIS DATOS EX0164 **1.64 Plantas hidroeléctricas** Los datos siguientes representan capacidades estimadas en megawatts (millones de watts) para las 20 plantas hidroeléctricas más grandes del mundo.[5]

18 200	4 500	3 000
14 000	4 200	2 940
10 000	4 200	2 715
8 370	3 840	2 700
6 400	3 230	2 541
6 300	3 300	2 512
6 000	3 100	

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

a. Construya una gráfica de tallo y hoja para los datos.

b. ¿Cómo describiría usted la forma de esta distribución?

MIS DATOS EX0165 **1.65 Colores de autos** Los colores más populares para autos compactos y deportivos en un año reciente se dan en la tabla.[5]

Color	Porcentaje	Color	Porcentaje
Plateado	20	Rojo	9
Gris	17	Verde	6
Azul	16	Café claro	5
Negro	14	Amarillo/oro	1
Blanco	10	Otro	2

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

Use un método gráfico apropiado para describir estos datos.

MIS DATOS EX0166 **1.66 Starbucks** El número de cafeterías Starbucks en ciudades a no más de 20 millas de la Universidad de California, en Riverside, se muestra en la tabla siguiente.[20]

Ciudad	Starbucks	Ciudad	Starbucks
Riverside	16	Ontario	11
Grand Terrace	1	Norco	4
Rialto	3	Fontana	6
Colton	2	Mira Loma	1
San Bernardino	5	Perris	1
Redlands	7	Highland	1
Corona	7	Rancho Cucamonga	12
Yucaipa	2	Lake Elsinore	1
Chino	1	Moreno Valley	4

Fuente: www.starbucks.com

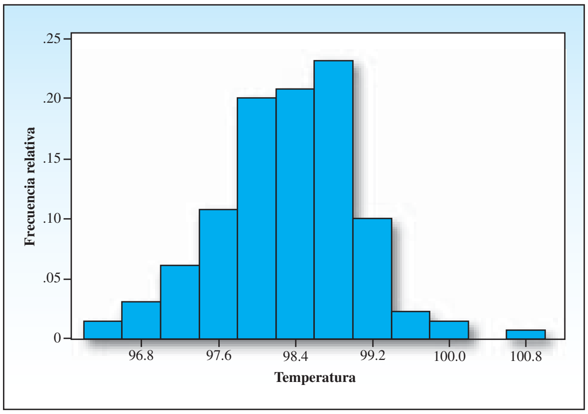
a. Trace una gráfica de puntos para describir los datos.

b. Describa la forma de la distribución.

c. ¿Hay otra variable que usted pudiera medir para ayudar a explicar por qué algunas ciudades tienen más Starbucks que otras? Explique.

MIS DATOS EX0167

1.67 ¿Qué es normal? Los 98.6 grados normales para la temperatura corporal en seres humanos fue obtenida por un médico alemán en 1868. En un intento por verificar esta afirmación, Mackowiak, Wasserman y Levine[21] tomaron temperaturas de 148 personas sanas en un periodo de tres días. Un conjunto de datos, que estrechamente se compara con el del artículo de Mackowiak, fue obtenido por Allen Shoemaker y aparece en la *Journal of Statistics Education.*[22] Las temperaturas corporales para estas 130 personas se muestran en el histograma de frecuencia relativa que sigue.



a. Describa la forma de la distribución de temperaturas.

b. ¿Hay algunas observaciones poco comunes? ¿Puede idear alguna explicación para éstas?

c. Localice los 98.6 grados normales en el eje horizontal de la gráfica. ¿Parece estar cerca del centro de distribución?

MI APPLET Ejercicios

1.68 Si todavía no lo hace, use el primer applet en **Building a Dotplot (Construir una gráfica de puntos)** para crear una gráfica de puntos para el siguiente conjunto de datos: 2, 3, 9, 6, 7, 6.

1.69 Hamburguesa con queso Use el segundo applet en **Building a Dotplot** para crear una gráfica de puntos el número de hamburguesas con queso consumidas en una semana determinada por 10 estudiantes universitarios:

4	5	4	2	1
3	3	4	2	7

a. ¿Cómo describiría usted la forma de la distribución?

b. ¿Qué proporción de los estudiantes comió más de 4 hamburguesas con queso esa semana?

MIS DATOS EX0170

1.70 Números del Seguro Social A un grupo de 70 estudiantes se le pidió registrar el último dígito de su número de Seguro Social.

1	6	9	1	5	9	0	2	8	4
0	7	3	4	2	3	5	8	4	2
3	2	0	0	2	1	2	7	7	4
0	0	9	9	5	3	8	4	7	4
6	6	9	0	2	6	2	9	5	8
5	1	7	7	7	8	7	5	1	8
3	4	1	9	3	8	6	6	6	6

a. Antes de graficar los datos, use su sentido común para adivinar la forma de la distribución de datos. Explique su razonamiento.

b. Use el segundo applet en **Building a Dotplot (Construir una gráfica de puntos)** para crear una gráfica de puntos para describir los datos. ¿Su intuición fue correcta en el inciso a)?

1.71 Si todavía no lo hace, use el primer applet en **Building a Histogram (Construir un histograma)** para crear un histograma para los datos del ejemplo 1.11, el número de visitas a Starbucks durante una semana típica.

MIS DATOS EX0172

1.72 El Fondo Unido El siguiente conjunto de datos registra las aportaciones caritativas anuales (en dólares) al Fondo Unido, para un grupo de empleados de una universidad pública.

41	81	80	65	47	56	80	69	79	63
28	51	112	71	83	84	82	103	80	70
77	75	59	63	63	80	101	115	99	67
42	78	81	90	103	125	92	79	24	93

Use el segundo applet de **Building a Histogram** para construir un histograma de frecuencia relativa para los datos. ¿Cuál es la forma de la distribución? ¿Puede usted ver algunos resultados atípicos obvios?

1.73 Tiempos de supervivencia Altman y Bland informan de los tiempos de supervivencia para pacientes con hepatitis activa, la mitad de ellos tratados con prednisone y la mitad sin recibir tratamiento.[23] Los datos que siguen están adaptados de los de estos investigadores para los tratados con prednisona. Los tiempos de supervivencia están registrados al mes más cercano:

MIS DATOS EX0173

8	127
11	133
52	139
57	142
65	144
87	147
93	148
97	157
109	162
120	165

a. Observe los datos. ¿Puede usted calcular la forma aproximada de la distribución de datos?

b. Use el segundo applet de **Building a Histogram** para construir un histograma de frecuencia relativa para los datos. ¿Cuál es la forma de la distribución?

c. ¿Hay algunos resultados atípicos en el conjunto? Si es así, ¿cuáles tiempos de supervivencia son extraordinariamente cortos?

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Presión sanguínea

¿Cómo está su presión sanguínea?

La presión sanguínea es la presión que la sangre ejerce contra las paredes de las arterias. Cuando los médicos o enfermeras miden la presión sanguínea a una persona, toman dos lecturas. La presión sistólica es aquella cuando el corazón se contrae y, por lo tanto, bombea. La presión diastólica es la presión en las arterias cuando el corazón se dilata. La presión diastólica siempre es la menor de las dos lecturas. La presión sanguínea varía de una persona a otra; también varía en una sola persona de un día para otro e incluso en un mismo día.

Si la presión sanguínea de usted es demasiado alta, puede llevarle a una hemorragia cerebral o un ataque al corazón. Si es demasiado baja, la sangre no llega a las extremidades y el paciente puede marearse. La presión baja suele no ser tan grave.

Por lo tanto, ¿cuál debe ser la presión *de usted*? Una presión sistólica de 120 se considera normal; una de 150 es alta, pero como la presión varía con el género y aumenta con la edad, una mejor posición de su presión sanguínea se obtendría al compararla con la población de presiones sanguíneas de todas las personas de su género y edad en Estados Unidos. Desde luego, no podemos darle a usted ese conjunto de datos, pero podemos mostrarle una muestra muy grande seleccionada de él. Los datos de presión sanguínea en 1910 personas, 965 hombres y 945 mujeres entre 15 y 20 años, se encuentran en el sitio web Student Companion. Los datos son parte del estudio de salud llevado a cabo el National Institutes of Health (NIH). Las entradas para cada persona incluyen la edad y presiones sistólica y diastólica de esa persona, al momento de registrar la presión sanguínea.

1. Describa las variables que se han medido en este estudio. ¿Las variables son cuantitativas o cualitativas? ¿Discretas o continuas? ¿Los datos son univariados, bivariados o multivariados?
2. ¿Qué tipos de métodos gráficos hay para describir este conjunto de datos? ¿Qué tipos de preguntas podrían ser contestados usando varios tipos de técnicas gráficas?

3. Usando el conjunto de datos de presión sanguínea sistólica, construya un histograma de frecuencia relativa para los 965 hombres y otro para las 945 mujeres. Use un paquete de software de estadística si tiene acceso a uno. Compare los dos histogramas.
4. Considere los 965 hombres y 945 mujeres como toda la población de interés. Escoja una muestra de $n = 50$ hombres y $n = 50$ mujeres, registrando sus presiones sanguíneas sistólicas y sus edades. Trace dos histogramas de frecuencia relativa para exhibir gráficamente las presiones sanguíneas sistólicas para sus dos muestras. ¿Las formas de los histogramas se asemejan a los histogramas de población del inciso 3?
5. ¿Cómo se compara la presión sanguínea de usted con la de otros de su mismo género? Verifique su presión sanguínea sistólica contra el histograma apropiado del inciso 3 o 4 para determinar si la presión sanguínea de usted es "normal" o si es extraordinariamente alta o baja.

2

Descripción de datos con medidas numéricas

© Stu Griffith/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

Las gráficas son sumamente útiles para la descripción visual de un conjunto de datos, pero no siempre son la mejor herramienta cuando se desea hacer inferencias acerca de una población a partir de la información contenida en una muestra. Para este propósito, es mejor usar medidas numéricas para construir una imagen mental de los datos.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI **ENTRENADOR PERSONAL**

¿Cómo calculo cuartiles muestrales?

Los muchachos de verano

¿Los campeones de béisbol de hoy son mejores que los de "ayer"? ¿Los jugadores de la Liga Nacional batean mejor que los de la Liga Americana? El estudio práctico del final de este capítulo contiene los promedios de bateo de campeones de las ligas mayores. Se pueden usar medidas numéricas descriptivas para contestar éstas y otras preguntas similares.

2.1 DESCRIPCIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS CON MEDIDAS NUMÉRICAS

Las gráficas pueden ayudar a describir la forma básica de una distribución de datos. Sabemos que "una imagen vale por mil palabras" pero hay limitaciones para usar gráficas. Supongamos que usted necesita presentar sus datos a un grupo de personas y que el foco del proyector de imágenes se quema o que usted necesita describir sus datos por teléfono; no hay modo de ver las gráficas. Necesita entonces hallar otra forma de llevar la imagen mental de los datos a su audiencia.

Una segunda limitación es que las gráficas son un tanto imprecisas para usar en inferencia estadística. Por ejemplo, supongamos que desea usar un histograma muestral para hacer inferencias acerca de un histograma poblacional. ¿Cómo puede medir las similitudes y diferencias entre los dos histogramas en alguna forma concreta? Si son idénticas, podría usted decir que son las mismas, pero, si son diferentes, es difícil describir el grado de diferencia.

Una forma de superar estos problemas es usar **medidas numéricas**, que se pueden calcular para una muestra o una población de mediciones. Se pueden usar los datos para calcular un conjunto de *números* que llevarán una buena imagen mental de la distribución de frecuencia. Estas mediciones se llaman **parámetros** cuando se asocian con la población y se denominan **estadísticas** cuando se calculan a partir de mediciones muestrales.

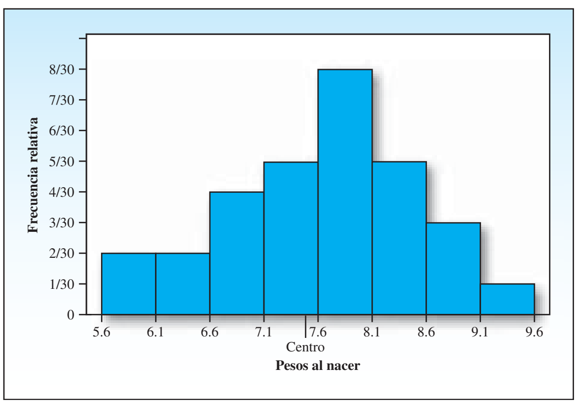
Definición Las mediciones descriptivas numéricas asociadas con una población de mediciones se llaman **parámetros**; las calculadas a partir de mediciones muestrales reciben el nombre de **estadísticas**.

2.2 MEDIDAS DE CENTRO

En el capítulo 1 introdujimos gráficas de puntos, gráficas de tallo y hoja e histogramas para describir la distribución de un conjunto de mediciones en una variable cuantitativa x. El eje horizontal presenta los valores de x, y los datos están "distribuidos" a lo largo de esta recta horizontal. Una de las primeras mediciones numéricas importantes es una **medida de centro**, es decir, una medida a lo largo del eje horizontal que localiza el centro de la distribución.

Los datos de peso al nacer presentados en la tabla 1.9 iban de un punto bajo de 5.6 a uno alto de 9.4, con el centro del histograma situado en la cercanía de 7.5 (véase la figura 2.1). Consideremos algunas reglas para localizar el centro de una distribución de mediciones.

FIGURA 2.1
Centro de los datos de peso al nacer



El promedio aritmético de un conjunto de mediciones es una medida de centro muy común y útil. Es frecuente que esta medida se conozca como **media aritmética** o simplemente **media**, de un conjunto de mediciones. Para distinguir entre la media para la muestra y la media para la población, usamos el símbolo $\bar{x}$ (x barra) para una media muestral y el símbolo μ para la media de una población.

Definición La **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de n mediciones es igual a la suma de las mediciones dividida entre n.

Como es frecuente que las fórmulas estadísticas comprendan la suma de números o "sumarlos", usamos un símbolo para indicar el proceso de sumar. Suponga que hay n mediciones en la variable x y que las llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para sumar las n mediciones, usamos esta notación abreviada:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{que significa } x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

La letra griega mayúscula (Σ) pide sumar los términos que aparezcan a su derecha, empezando con el número debajo de la sigma ($i = 1$) y terminando con el número arriba ($i = n$). No obstante, como las sumas típicas en cálculos estadísticos se hacen casi siempre sobre el conjunto total de n mediciones, se puede usar una notación más sencilla:

Σx_i que significa "la suma de todas las mediciones de x"

Usando esta notación, escribimos la fórmula para la media muestral:

NOTACIÓN

Media muestral: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

Media poblacional: μ

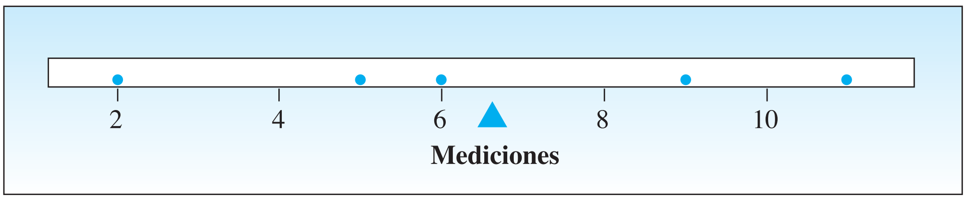
EJEMPLO 2.1

Trace una gráfica de puntos para las $n = 5$ mediciones 2, 9, 11, 5, 6. Encuentre la media muestral y compare su valor con lo que usted pudiera considerar el "centro" de estas observaciones en la gráfica de puntos.

Solución La gráfica de puntos de la figura 2.2 parece estar centrada entre 6 y 8. Para hallar la media muestral, calcule

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{2 + 9 + 11 + 5 + 6}{5} = 6.6$$

FIGURA 2.2
Gráfica de puntos para el ejemplo 2.1



La estadística $\bar{x} = 6.6$ es el punto de equilibrio o fulcro que se muestra en la gráfica de puntos. Parece marcar el centro de los datos.

MI CONSEJO
Media = punto de equilibrio o fulcro.

Recuerde que las muestras son mediciones tomadas de una población más grande que en general es desconocida. Un uso importante de la media muestral $\bar{x}$ es un estimador de la media poblacional desconocida μ. Los datos de peso al nacer en la tabla 1.9 son una muestra de una población más grande de peso al nacer y la distribución se muestra en la figura 2.1. La media de los 30 pesos al nacer es

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{30} = \frac{227.2}{30} = 7.57$$

ilustrada en la figura 2.1; marca el punto de equilibrio de la distribución. La media de toda la población de pesos de recién nacidos es desconocida, pero si usted tuviera que calcular su valor, su mejor estimación sería 7.57. Aun cuando cambia la media muestral $\bar{x}$ de una muestra a otra, la media poblacional μ sigue igual.

Una segunda medida de tendencia central es la **mediana**, que es el valor de la posición media en el conjunto de mediciones ordenada de menor a mayor.

Definición La **mediana** m de un conjunto de n mediciones es el valor de x que cae en la posición media cuando las mediciones son ordenadas de menor a mayor.

EJEMPLO 2.2

Encuentre la mediana para el conjunto de mediciones 2, 9, 11, 5, 6.

Solución Ordene las $n = 5$ mediciones de menor a mayor:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ & & \uparrow & & \end{array}$$

La observación de enmedio, marcada con una flecha, es el centro del conjunto o sea $m = 6$.

EJEMPLO 2.3

Encuentre la mediana para el conjunto de mediciones 2, 9, 11, 5, 6, 27.

Solución Ordene las mediciones de menor a mayor:

$$2 \quad 5 \quad \boxed{6 \quad 9} \quad 11 \quad 27$$
$$\uparrow$$

Ahora hay dos observaciones "de enmedio", vistas en la caja. Para hallar la mediana, escoja un valor a la mitad entre las dos observaciones de enmedio:

$$m = \frac{6 + 9}{2} = 7.5$$

MI CONSEJO
Casi 50% de las mediciones son más pequeñas, 50% son más grandes que la mediana.

El valor **.5(n + 1)** indica la **posición de la mediana** del conjunto ordenado de datos. Si la posición de la media es un número que termina en el valor **.5**, usted necesita promediar los dos valores adyacentes.

EJEMPLO 2.4

Para las $n = 5$ mediciones ordenadas del ejemplo 2.2, la posición de la mediana es $.5(n + 1) = .5(6) = 3$ y la mediana es la *tercera observación ordenada*, o $m = 6$. Para las $n = 6$ mediciones ordenadas del ejemplo 2.3, la posición de la mediana es $.5(n + 1) = .5(7) = 3.5$ y la mediana es *el promedio de las 3ª y 4ª observaciones ordenadas*, o $m = (6 + 9)/2 = 7.5$.

MI CONSEJO

Simétrico:
media = mediana.
Sesgada a la derecha:
media > mediana.
Sesgada a la izquierda:
media < mediana.

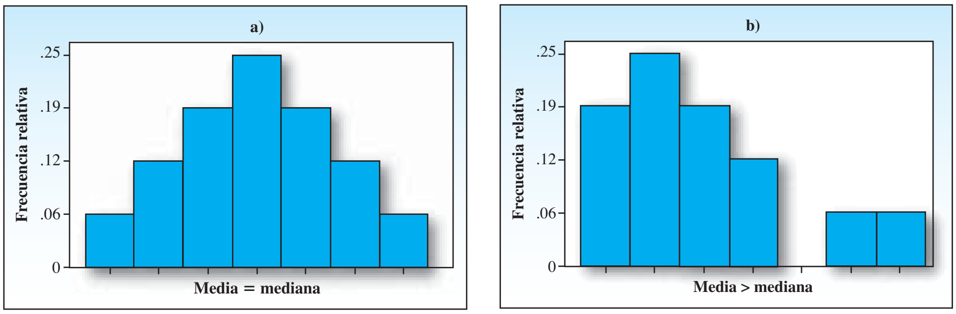
Aunque tanto la media como la mediana son buenas medidas del centro de una distribución, la mediana es menos sensible a valores extremos o *resultados atípicos*. Por ejemplo, el valor $x = 27$ en el ejemplo 2.3 es mucho mayor que las otras mediciones. La mediana, $m = 7.5$, no es afectada por el resultado atípico, en tanto que el promedio muestral,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{60}{6} = 10$$

sí es afectado; su valor no es representativo de las cinco observaciones restantes.

Cuando un conjunto de datos tiene valores extremadamente pequeños u observaciones muy grandes, la media muestral se traza hacia la dirección de las mediciones extremas (véase la figura 2.3).

FIGURA 2.3
Distribuciones de frecuencia relativa mostrando el efecto de valores extremos en la media y mediana

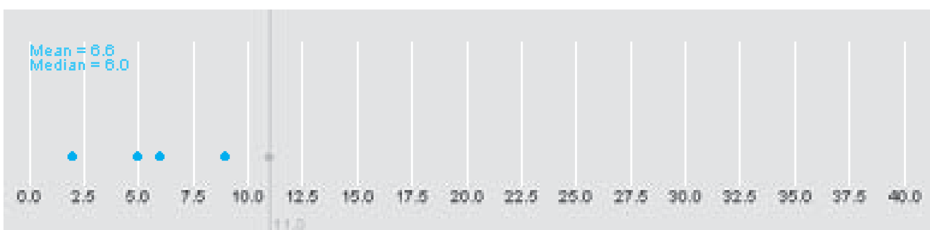


Si una distribución está sesgada a la derecha, la media se corre a la derecha; si una distribución está sesgada a la izquierda, la media se corre a la izquierda. La mediana no es afectada por estos valores extremos porque los valores numéricos de las mediciones no se usan en este cálculo. Cuando una distribución es simétrica, la media y la mediana son iguales. Si una distribución está fuertemente sesgada por uno o más valores extremos, el usuario debe emplear la mediana en lugar de la media como medida de centro.

MI APPLET

Se puede ver el efecto de valores extremos en la media y la mediana usando el applet **How Extreme Values Affect the Mean and Median**. El primero de tres applets (figura 2.4) muestra una gráfica de puntos de los datos del ejemplo 2.2. Use su mouse para mover la observación más grande ($x = 11$) aún más a la derecha. ¿En qué forma esta observación más grande afecta a la media? ¿Cómo afecta a la mediana? Usaremos este applet otra vez para los ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

FIGURA 2.4
Forma en que los valores extremos afectan al applet de la media y la mediana



Otra forma de localizar el centro de una distribución es buscar el valor de x que se presenta con la frecuencia más alta. Esta medida del centro se denomina **moda**.

Definición La **moda** es la categoría que se presenta con más frecuencia o el valor de x que se presenta con más frecuencia. Cuando las mediciones en una variable continua se han agrupado como histograma de frecuencia o de frecuencia relativa, la clase con el pico más alto o frecuencia se llama **clase modal**, y el punto medio de esa clase se toma como la moda.

La moda por lo general se usa para describir conjuntos grandes de datos, mientras que la media y la mediana se usan para conjuntos de datos grandes y pequeños. De los datos del ejemplo 1.11, la moda de la distribución del número de visitas hechas semanalmente a Starbucks para 30 clientes es de 5. La clase modal y el valor de x que se presenta con la más alta frecuencia son iguales, como se muestra en la figura 2.5a).

Para los datos de la tabla 1.9, un peso de 7.7 al nacer se presenta cuatro veces y, por tanto, la moda para la distribución de pesos al nacer es 7.7. Usando el histograma para hallar la clase modal, se encuentra que la clase con el pico más alto es la quinta clase, de 7.6 a 8.1. Nuestra opción para la moda sería el punto medio de esta clase, o sea 7.85. Véase la figura 2.5b).

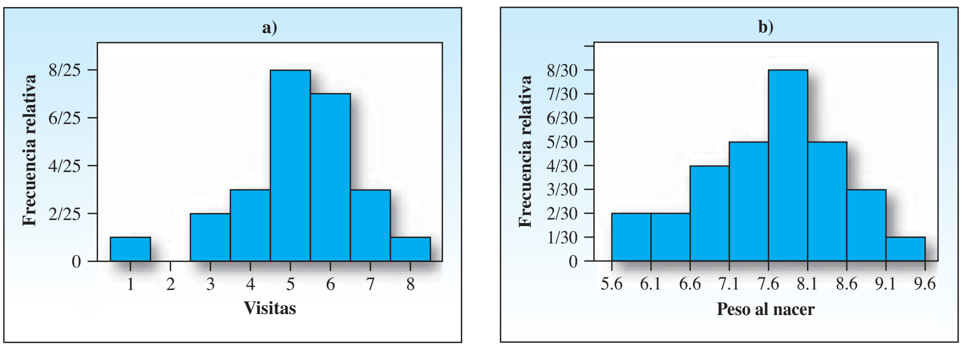
MI CONSEJO

Recuerde que puede haber varias modas o puede no haberlas (si cada observación se presenta sólo una vez).

Es posible que una distribución de mediciones tenga más de una moda. Estas modas aparecerían como "picos locales" en la distribución de frecuencia relativa. Por ejemplo, si fuéramos a tabular la longitud de los peces sacados de un lago durante una temporada, podríamos obtener una *distribución bimodal*, posiblemente reflejando una mezcla de peces jóvenes y viejos en la población. A veces las distribuciones bimodales de tamaños o pesos reflejan una mezcla de mediciones tomadas en machos y hembras. En cualquier caso, un conjunto o distribución de mediciones puede tener más de una moda.

FIGURA 2.5

Histogramas de frecuencia relativa para datos de Starbucks y peso al nacer



2.2 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

2.1 Nos dan $n = 5$ mediciones: 0, 5, 1, 1, 3.

a. Trace una gráfica de puntos para los datos. (SUGERENCIA: Si dos mediciones son iguales, ponga un punto arriba del otro.) Calcule el "centro" aproximado.

b. Encuentre la media, mediana y moda.

c. Localice las tres mediciones de centro en la gráfica de puntos en el inciso a). Con base en las posiciones relativas de la media y mediana, ¿las mediciones son simétricas o son sesgadas?

2.2 Nos dan $n = 8$ mediciones: 3, 2, 5, 6, 4, 4, 3, 5.

a. Encuentre $\bar{x}$.

b. Encuentre m.

c. Con base en los resultados de los incisos a) y b), ¿las medidas son simétricas o sesgadas? Trace la gráfica de puntos para confirmar su respuesta.

2.3 Nos dan $n = 10$ mediciones: 3, 5, 4, 6, 10, 5, 6, 9, 2, 8.

a. Calcule $\bar{x}$.

b. Encuentre m.

c. Encuentre la moda.

APLICACIONES

2.4 Seguros de autos El costo de asegurar un auto se ha convertido en un tema de disgusto en California porque las tasas de seguro dependen de variables tan distintas; por ejemplo, la ciudad en la que el usuario vive, el número de autos que tenga y la compañía en la que está asegurado. El sitio web www.insurance.ca.gov informa de la prima anual para 2006-2007 para un hombre soltero, con licencia de manejo durante 6-8 años, que conduce un Honda Accord de 12 600 a 15 000 millas al año y no ha tenido infracciones ni accidentes.[1]

Ciudad	Allstate	Century 21
Long Beach	$2617	$2228
Pomona	2305	2098
San Bernardino	2286	2064
Moreno Valley	2247	1890

Fuente: www.insurance.ca.gov

a. ¿Cuál es el promedio de las primas de Allstate Insurance?

b. ¿Cuál es el promedio de las primas de Century 21 Insurance?

c. Si usted fuera consumidor, ¿estaría interesado en el costo promedio de las primas? Si no es así, ¿qué le interesaría?

MIS DATOS EX0205

2.5 Reproductores de DVD Un reproductor de discos de video es un aparato común en casi todas las casas en Estados Unidos. De hecho, casi todas las familias los tienen y muchas tienen más de uno. Una muestra de 25 familias produjo las siguientes mediciones en x, el número de los DVD en la casa:

1	0	2	1	1
1	0	2	1	0
0	1	2	3	2
1	1	1	0	1
3	1	0	1	1

a. La distribución de x, el número de los DVD en una familia, ¿es simétrica o sesgada? Explique.

b. Calcule el valor de la moda, el valor de x que se presenta con más frecuencia.

c. Calcule la media, la mediana y la moda para estas mediciones.

b. Trace un histograma de frecuencia relativa para el conjunto de datos. Localice la media, mediana y moda a lo largo del eje horizontal. ¿Las respuestas a los incisos a) y b) son correctas?

2.6 Ingresos en Fortune 500 Diez de las compañías más grandes de Estados Unidos, seleccionadas al azar de *Fortune* 500, aparecen enseguida junto con sus ingresos (en millones de dólares):[2]

Compañía	Ingresos	Compañía	Ingresos
General Motors	$192 604	Target	$52 620
IBM	91 134	Morgan Stanley	52 498
Bank of America	83 980	Johnson & Johnson	50 514
Home Depot	81 511	Intel	38 826
Boeing	54 848	Safeway	38 416

Fuente: Time Almanac 2007

a. Trace una gráfica de tallo y hoja para los datos. ¿Los datos están sesgados?

b. Calcule el ingreso medio para estas 10 compañías. Calcule el ingreso medio.

c. ¿Cuál de las dos medidas del inciso b) describe mejor el centro de los datos? Explique.

2.7 Orden de nacimiento y personalidad ¿El orden de nacimiento tiene algún efecto en la personalidad de una persona? Un informe sobre un estudio, hecho por un investigador del MIT, indica que es probable que los hijos nacidos después del primogénito pongan a prueba lo establecido, son más abiertos a nuevas ideas y aceptan más un cambio.[3] De hecho, el número de esta clase de hijos es creciente. Durante los años de la Depresión en el decenio de 1930, las familias promediaban 2.5 hijos (59% después del primogénito), mientras que los padres de familia en la explosión demográfica promediaban de tres a cuatro hijos (68% después del primogénito). ¿Qué quiere decir el autor con un promedio de 2.5 hijos?

MIS DATOS EX0208 **2.8 Atunes** Un artículo en *Consumer Report* da el precio, un promedio estimado de una lata de 6 onzas (180 gramos) o un paquete de 7.06 onzas (210 gramos), para 14 marcas diferentes de atún claro empacado en agua, basado en precios pagados a nivel nacional en supermercados:[4]

.99	1.92	1.23	.85	.65	.53	1.41
1.12	.63	.67	.69	.60	.60	.66

a. Encuentre el precio promedio para las 14 marcas diferentes de atún.

b. Encuentre el precio mediano para las 14 marcas diferentes de atún.

c. Con base en lo que encuentre en los incisos a) y b), ¿piensa usted que la distribución de precios está sesgada? Explique.

2.9 Salarios en deportes A medida que los equipos deportivos profesionales se hacen negocios cada vez más lucrativos para sus propietarios, los salarios pagados a los jugadores también han aumentado. De hecho, a las superestrellas deportivas se les pagan salarios astronómicos por su talento. Si una compañía de administración deportiva le pide a usted que describa la distribución de salarios de jugadores, en varias categorías diferentes de deportes profesionales, ¿qué medida de centro escogería? ¿Por qué?

2.10 Tiempo en un trabajo En un experimento psicológico, fue registrado el tiempo en un trabajo para 10 personas bajo una limitación de 5 minutos. Estas mediciones son en segundos:

175	190	250	230	240
200	185	190	225	265

a. Encuentre el tiempo promedio en el trabajo.

b. Encuentre la mediana del tiempo en el trabajo.

c. Si usted está escribiendo un informe para describir estos datos, ¿qué medida de tendencia central usaría? Explique.

MIS DATOS EX0211 **2.11 Starbucks** El número de cafeterías Starbucks en 18 ciudades a no más de 20 millas de la Universidad de California, en Riverside, se muestra en la tabla siguiente (www.starbucks.com).[5]

16	7	2	6	4
1	7	1	1	1
3	2	11	1	
5	1	4	12	

a. Encuentre la media, la mediana y la moda.

b. Compare la mediana y la media. ¿Qué puede usted decir acerca de la forma de esta distribución?

c. Trace una gráfica de puntos para los datos. ¿Esto confirma la conclusión de usted acerca de la forma de la distribución para el inciso b)?

MIS DATOS EX0212 **2.12 Televisores de alta definición** El costo de los televisores muestra enorme variación, de \$100-200 para uno estándar hasta \$8000-10 000 para uno de pantalla grande de plasma. *Consumer Reports* da los precios, para las 10 principales marcas de televisores de pantalla de cristal líquido y alta definición, en la categoría de 30 a 40 pulgadas:[6]

Marca	Precio
JVC LT-40FH96	\$2900
Sony Bravia KDL-V32XBR1	1800
Sony Bravia KDL-V40XBR1	2600
Toshiba 37HLX95	3000
Sharp Aquos LC-32DA5U	1300
Sony Bravia KLV-S32A10	1500
Panasonic Viera TC-32LX50	1350
JVC LT-37X776	2000
LG 37LP1D	2200
Samsung LN-R328W	1200

a. ¿Cuál es el precio promedio de estos 10 televisores?

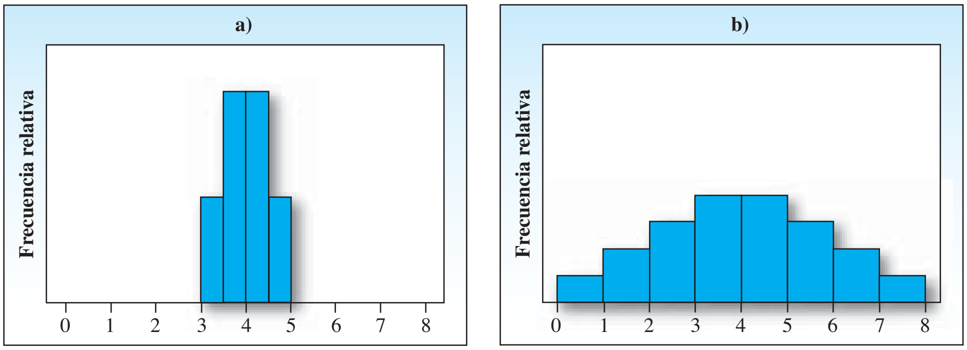
b. ¿Cuál es la mediana del precio de estos 10 televisores?

c. Como consumidor, ¿estaría usted interesado en el costo promedio de un televisor de estos? ¿Qué otras variables serían importantes para usted?

2.3 MEDIDAS DE VARIABILIDAD

Los conjuntos de datos pueden tener el mismo centro pero con aspecto diferente por la forma en que los números se *dispersan* desde el centro. Considere las dos distribuciones que se muestran en la figura 2.6. Ambas distribuciones están centradas en $x = 4$, pero hay una gran diferencia en la forma en que las mediciones se dispersan o *varían*. Las mediciones de la figura 2.6a) varían de 3 a 5; en la figura 2.6b) las mediciones varían de 0 a 8.

FIGURA 2.6
Variabilidad o dispersión de datos



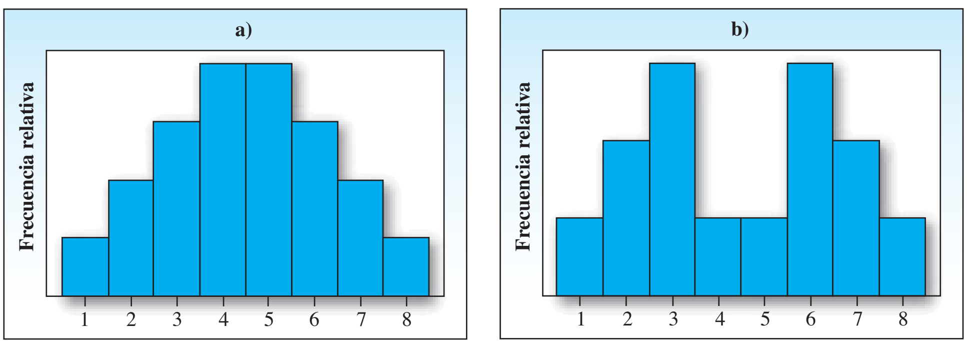
La **variabilidad** o **dispersión** es una muy importante característica de datos. Por ejemplo, si usted fabrica tornillos, la variación extrema en los diámetros de los tornillos causaría un alto porcentaje de productos defectuosos. Por el contrario, si estuviera tratando de discriminar entre contadores buenos y malos, tendría problemas si el examen siempre produjera calificaciones con poca variación, lo cual hace muy difícil la discriminación.

Las **medidas de variabilidad** pueden ayudarle a crear una imagen mental de la dispersión de los datos. Presentaremos una de las más importantes. La medida más sencilla de variación en el **rango**.

Definición El **rango**, $\boldsymbol{R}$, de un conjunto de n mediciones se define como la diferencia entre la medición más grande y la más pequeña.

Para los datos de peso al nacer de la tabla 1.9, las mediciones varían de 5.6 a 9.4. Por tanto, el rango es $9.4 - 5.6 = 3.8$. El rango es fácil de calcular, fácil de interpretar y es una medida adecuada de variación para conjuntos pequeños de datos. Pero, para conjuntos grandes, el rango no es una medida adecuada de variabilidad. Por ejemplo, las dos distribuciones de frecuencia relativa de la figura 2.7 tienen el mismo rango pero muy diferentes formas y variabilidad.

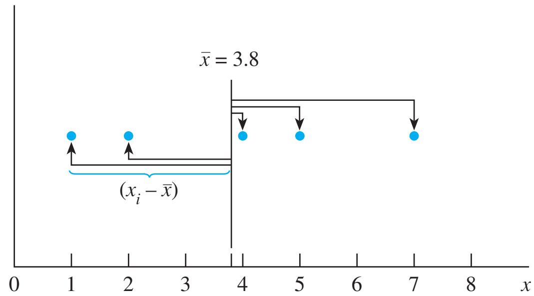
FIGURA 2.7
Distribuciones con igual rango y desigual variabilidad



¿Hay una medida de variabilidad que sea más sensible que el rango? Considere, como ejemplo, las mediciones muestrales 5, 7, 1, 2, 4, mostradas como una gráfica de puntos en la figura 2.8. La media de estas cinco mediciones es

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{19}{5} = 3.8$$

FIGURA 2.8
Gráfica de puntos que muestra las desviaciones de puntos desde la media



como se indica en la gráfica de puntos. Las distancias horizontales entre cada punto (medición) y la media $\bar{x}$ ayudarán a medir la variabilidad. Si las distancias son grandes, los datos son más dispersos o *variables* que si las distancias son pequeñas. Si x_i es un punto particular (medición), entonces la **desviación** de esa medición desde la media es $(x_i - \bar{x})$. Las mediciones a la derecha de la media producen desviaciones positivas y, las de la izquierda, negativas. Los valores de x y las desviaciones para nuestro ejemplo se detallan en las columnas primera y segunda de la tabla 2.1.

TABLA 2.1 **Cálculo de $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$**

x	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	1.2	1.44
7	3.2	10.24
1	−2.8	7.84
2	−1.8	3.24
4	.2	.04
19	0.0	22.80

Como las desviaciones en la segunda columna de la tabla contienen información sobre variabilidad, una forma para combinar las cinco desviaciones en una medida numérica es promediarlas. Desafortunadamente, el promedio no funcionará porque algunas de las desviaciones son positivas, algunas son negativas y la suma es siempre cero (a menos que errores redondeados se hayan introducido en los cálculos). Observe que las desviaciones en la segunda columna de la tabla 2.1 suman cero.

Otra posibilidad sería no hacer caso de los signos de las desviaciones y calcular el promedio de sus valores absolutos.[†] Este método se ha usado como medida de variabilidad en el análisis exploratorio de datos y en el análisis de datos de series de tiempo. Preferimos, no obstante, superar la dificultad causada por los signos de las desviaciones

[†] El valor absoluto de un número es su magnitud, sin atender su signo. Por ejemplo, el valor absoluto de −2, representado por el símbolo |−2|, es 2. El valor absoluto de 2, esto es, |2|, es 2.

al trabajar con su suma de cuadrados. De la suma de desviaciones cuadradas, se calcula una sola medida llamada **varianza**. Para distinguir entre la varianza de una *muestra* y la varianza de una *población*, usamos el símbolo s^2 para una varianza muestral y σ^2 para una varianza de población. *La varianza será relativamente grande para datos muy variables y relativamente pequeña para datos menos variables.*

Definición La **varianza de una población** de N mediciones es el promedio de los cuadrados de las desviaciones de las mediciones alrededor de su media μ. La varianza poblacional se denota con σ^2 y está dada por la fórmula

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}$$

La mayor parte de las veces, no tendremos todas las mediciones de población disponibles pero necesitaremos calcular la *varianza de una muestra* de n mediciones.

Definición La **varianza de una muestra** de n mediciones es la suma de las desviaciones cuadradas de las mediciones alrededor la media $\bar{x}$ dividida entre $(n - 1)$. La varianza muestral se denota con s^2 y está dada por la fórmula

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

MI CONSEJO

La varianza y la desviación estándar *no pueden ser* números negativos.

Para el conjunto de $n = 5$ mediciones muestrales presentadas en la tabla 2.1, el cuadrado de la desviación de cada medición se registra en la tercera columna. Sumando, tendremos

$$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 22.80$$

y la varianza muestral es

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{22.80}{4} = 5.70$$

La varianza se mide en términos del cuadrado de las unidades originales de medición. Si las mediciones originales son en pulgadas, la varianza se expresa en pulgadas cuadradas. Tomando la raíz cuadrada de la varianza, obtenemos la **desviación estándar**, que regresa la medida de variabilidad a las unidades originales de medición.

Definición La **desviación estándar** de un conjunto de mediciones es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

NOTACIÓN

n: número de mediciones en la muestra

s^2: varianza muestral

$s = \sqrt{s^2}$: desviación muestral estándar

N: número de mediciones en la población

σ^2: varianza poblacional

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$: desviación poblacional estándar

MI CONSEJO

Si usted usa calculadora, asegúrese de escoger la tecla correcta para la desviación estándar de la muestra.

Para el conjunto de $n = 5$ mediciones muestrales en la tabla 2.1, la varianza muestral es $s^2 = 5.70$, de modo que la desviación estándar de la muestra es $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5.70} = 2.39$. Cuanto más variable sea el conjunto de datos, mayor es el valor de s.

Para el pequeño conjunto de datos que empleamos, el cálculo de la varianza no es demasiado difícil. No obstante, para un conjunto más grande, los cálculos pueden hacerse tediosos. Casi todas las calculadoras científicas tienen programas internos que calcularán $\bar{x}$ y s o μ y σ, de modo que el trabajo computacional es mínimo para el usuario. La tecla de la muestra o media poblacional suele estar marcada con $\bar{x}$. La tecla de la desviación estándar de la muestra suele estar marcada s, s_x o σ_{xn-1}, y la tecla de desviación estándar poblacional con σ, σ_x o σ_{xn}. Al usar cualquier calculadora con estas teclas de función interna, asegúrese de ver qué cálculo es realizado por cada tecla.

Si necesita calcular manualmente s^2 y s, es mucho más fácil usar la fórmula alternativa de cálculo dada a continuación. Esta forma computacional se denomina a veces **método breve para calcular s^2**.

FÓRMULA COMPUTACIONAL PARA CALCULAR s^2

$$s^2 = \frac{\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}}{n - 1}$$

Los símbolos $(\Sigma x_i)^2$ y Σx_i^2 en la fórmula computacional son métodos breves para indicar la operación aritmética que es necesario efectuar. El usuario sabe de la fórmula para la media muestral que Σx_i es la suma de todas las mediciones. Para hallar Σx_i^2, eleve al cuadrado cada medición individual y luego súmelas.

Σx_i^2 = Suma de cuadrados de las mediciones individuales
$(\Sigma x_i)^2$ = Cuadrado de la suma de las mediciones individuales

La *desviación estándar de la muestra, s,* es la raíz cuadrada positiva de s^2.

EJEMPLO 2.5

Calcule la varianza y desviación estándar para las cinco mediciones de la tabla 2.2, que son 5, 7, 1, 2, 4. Use la fórmula computacional para s^2 y compare sus resultados con los obtenidos usando la definición original de s^2.

TABLA 2.2 **Tabla para cálculo simplificado de s^2 y s**

x_i	x_i^2
5	25
7	49
1	1
2	4
4	16
19	95

MI CONSEJO

No redondee resultados parciales al continuar.

Solución Las entradas en la tabla 2.2 son las mediciones individuales, x_i, y sus cuadrados, x_i^2, junto con sus sumas. Usando la fórmula computacional para s^2, tenemos

$$s^2 = \frac{\Sigma x_i^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}}{n-1}$$

$$= \frac{95 - \dfrac{(19)^2}{5}}{4} = \frac{22.80}{4} = 5.70$$

y $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5.70} = 2.39$, como antes.

Usted se puede preguntar por qué es necesario dividir entre $(n - 1)$ en lugar de n cuando calcula la varianza muestral. Así como empleamos la media muestral $\bar{x}$ para estimar la media poblacional μ, se puede usar la varianza muestral s^2 para estimar la varianza poblacional σ^2. Resulta que la varianza muestral s^2 con $(n - 1)$ en el denominador da estimaciones mejores de σ^2 de lo que daría un estimador calculado con n en el denominador. **Por esta razón, siempre dividimos entre $(n - 1)$ al calcular la varianza muestral s^2 y la desviación estándar de la muestra s.**

MI APPLET

Se puede comparar la precisión de estimadores de la varianza poblacional σ^2 usando el applet **Why Divide by $n - 1$?** El applet selecciona muestras de una población con desviación estándar $\sigma = 29.2$. A continuación calcula la desviación estándar s usando $(n - 1)$ en el denominador así como una desviación estándar calculada usando n en el denominador. Se puede escoger para comparar los estimadores para una sola muestra nueva, para 10 muestras o para 100 muestras. Observe que cada una de las 10 muestras que aparecen en la figura 2.9 tiene una desviación estándar diferente. No obstante, cuando las 10 desviaciones estándar se promedian en la parte inferior del applet, uno de los dos estimadores es más cercano a la desviación estándar de la población $\sigma = 29.2$. ¿Cuál es? Usaremos este applet otra vez para los ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

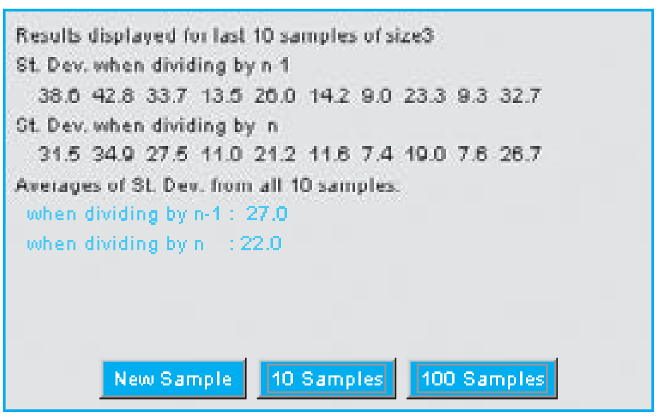


FIGURA 2.9
Applet Why Divide by $n - 1$? (¿Por qué dividir entre $n - 1$?)

En este punto, usted ha aprendido a calcular la varianza y desviación estándar de un conjunto de mediciones. Recuerde estos puntos:

- El valor de s es siempre mayor o igual a cero.
- Cuanto mayor sea el valor de s^2 o de s, mayor es la variabilidad del conjunto de datos.
- Si s^2 o s es igual a cero, todas las mediciones deben tener el mismo valor.
- Para medir la variabilidad en las mismas unidades que las observaciones originales, calculamos la desviación estándar $s = \sqrt{s^2}$.

Esta información permite comparar varios conjuntos de datos con respecto a sus ubicaciones y su variabilidad. ¿Cómo se pueden usar estas mediciones para decir algo más específico acerca de un solo conjunto de datos? El teorema y la regla que se presentan en la siguiente sección ayudarán a contestar esta pregunta.

2.3 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

2.13 Nos dan $n = 5$ mediciones: 2, 1, 1, 3, 5.

a. Calcule la media muestral, $\bar{x}$.

b. Calcule la varianza muestral, s^2, usando la fórmula dada por la definición.

c. Encuentre la desviación estándar de la muestra, s.

d. Encuentre s^2 y s usando la fórmula computacional. Compare los resultados con los hallados en los incisos b) y c).

2.14 Consulte el ejercicio 2.13.

a. Use el método de entrada de datos en su calculadora científica para introducir las cinco mediciones. Recuerde las memorias apropiadas para hallar la media muestral y desviación estándar.

b. Verifique que la calculadora dé los mismos valores para $\bar{x}$ y s como en el ejercicio 2.13, incisos a) y c).

2.15 Nos dan $n = 8$ mediciones: 4, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 2.

a. Encuentre el rango.

b. Calcule $\bar{x}$.

c. Calcule s^2 y s usando la fórmula computacional.

d. Use el método de entrada de datos en su calculadora para hallar $\bar{x}$, s y s^2. Verifique que sus respuestas sean iguales a las de los incisos b) y c).

2.16 Nos dan $n = 8$ mediciones: 3, 1, 5, 6, 4, 4, 3, 5.

a. Calcule el rango.

b. Calcule la media muestral.

c. Calcule la varianza muestral y desviación estándar.

d. Compare el rango y la desviación estándar. ¿El rango es aproximadamente cuántas desviaciones estándar?

APLICACIONES

2.17 Un hallazgo arqueológico, otra vez Un artículo en *Archaeometry* contenía un análisis de 26 muestras de cerámica romano-británica hallada en cuatro hornos diferentes en el Reino Unido.[7] Las muestras fueron analizadas para determinar su composición química. El porcentaje de óxido de hierro en cada una de las cinco muestras recolectadas en el sitio de Island Thorns fue:

1.28 2.39 1.50 1.88 1.51

a. Calcule el rango.

b. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar usando la fórmula computacional.

c. Compare el rango y la desviación estándar. ¿El rango es aproximadamente cuántas desviaciones estándar?

MIS DATOS EX0218

2.18 Estados de cuenta por consumo eléctrico en el sur de California Los estados de cuenta mensuales por consumo eléctrico para una familia en Riverside, California, se registraron durante 12 meses consecutivos empezando en enero de 2006:

Mes	Cantidad ($)	Mes	Cantidad ($)
Enero	$266.63	Julio	$306.55
Febrero	163.41	Agosto	335.48
Marzo	219.41	Septiembre	343.50
Abril	162.64	Octubre	226.80
Mayo	187.16	Noviembre	208.99
Junio	289.17	Diciembre	230.46

a. Calcule el rango del pago de electricidad para el año 2006.

b. Calcule el promedio mensual de pago de electricidad en 2006.

c. Calcule la desviación estándar para el pago de electricidad para el mismo año.

2.4 SOBRE LA SIGNIFICANCIA PRÁCTICA DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

A continuación introducimos un útil teorema ideado por el matemático ruso Chebyshev. La demostración del teorema no es difícil, pero estamos más interesados en su aplicación que en demostrarlo.

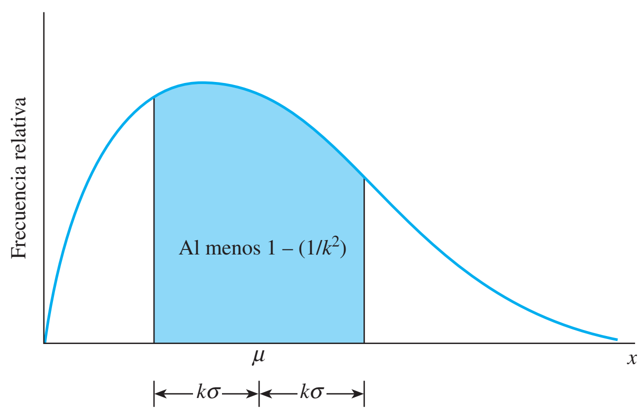
Teorema de Chebyshev

Dado un número k mayor o igual a 1 y un conjunto de n mediciones, al menos $[1 - (1/k^2)]$ de las mediciones estarán dentro de k desviaciones estándar de su media.

El teorema de Chebyshev aplica a *cualquier conjunto de mediciones* y se puede usar para describir ya sea una muestra o una población. Usaremos la notación apropiada para poblaciones, pero usted debe ver que con la misma facilidad podríamos usar la media y la desviación estándar para la muestra.

La idea comprendida en el teorema de Chebyshev está ilustrada en la figura 2.10. Se construye un intervalo al medir una distancia $k\sigma$ a cualquier lado de la media μ. El número k puede ser cualquier número mientras sea mayor o igual a 1. Entonces el teorema de Chebyshev expresa que al menos $[1 - (1/k^2)]$ del número total n de mediciones está en el intervalo construido.

FIGURA 2.10
Ilustración del teorema de Chebyshev



En la tabla 2.3 escogimos unos cuantos valores numéricos para k y calculamos $[1 - (1/k^2)]$.

TABLA 2.3 **Valores ilustrativos de $[1 - (1/k^2)]$**

k	$1 - (1/k^2)$
1	$1 - 1 = 0$
2	$1 - 1/4 = 3/4$
3	$1 - 1/9 = 8/9$

De los cálculos de la tabla 2.3, el teorema establece que:

- Al menos ninguna de las mediciones está en el intervalo $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$.
- Al menos 3/4 de las mediciones están en el intervalo $\mu - 2\sigma$ a $\mu + 2\sigma$.
- Al menos 8/9 de las mediciones están en el intervalo $\mu - 3\sigma$ a $\mu + 3\sigma$.

Aun cuando el primer enunciado no es útil en absoluto, los otros dos valores de k dan valiosa información acerca de la proporción de mediciones que caen en ciertos intervalos. Los valores $k = 2$ y $k = 3$ no son los únicos valores de k que se pueden usar; por ejemplo, la proporción de mediciones que caen dentro de $k = 2.5$ desviaciones estándar de la media es al menos $1 - [1/(2.5)^2] = .84$.

EJEMPLO 2.6

La media y varianza de una muestra de $n = 25$ mediciones son 75 y 100, respectivamente. Use el teorema de Chebyshev para describir la distribución de mediciones.

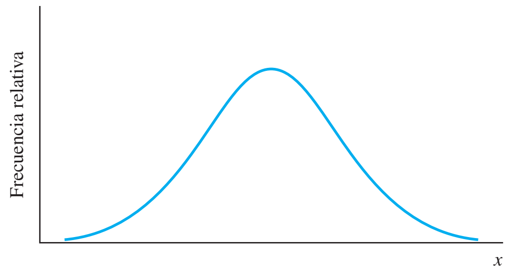
Solución Nos dan $\bar{x} = 75$ y $s^2 = 100$. La desviación estándar es $s = \sqrt{100} = 10$. La distribución de mediciones está centrada alrededor de $\bar{x} = 75$, y el teorema de Chebyshev establece que:

- *Al menos* 3/4 de las 25 mediciones están en el intervalo $\bar{x} \pm 2s = 75 \pm 2(10)$, esto es, 55 a 95.
- *Al menos* 8/9 de las mediciones están en el intervalo $\bar{x} \pm 3s = 75 \pm 3(10)$, esto es, 45 a 105.

Como el teorema de Chebyshev se aplica a *cualquier* distribución, es muy conservador. Ésta es la razón por la que hacemos hincapié en "al menos $1 - (1/k^2)$" en este teorema.

Otra regla para describir la variabilidad de un conjunto de datos no funciona para *todos* los conjuntos de datos, pero funciona muy bien para datos que "se apilan" en la conocida forma de montículo de la figura 2.11. Cuanto más cerca se encuentre la distribución a la curva en forma de montículo de la figura 2.11, más precisa será la regla. Como la distribución de datos en forma de montículo se presenta con frecuencia en la naturaleza, la regla se puede usar numerosas ocasiones en aplicaciones prácticas. Por esta razón, se denomina **Regla empírica**.

FIGURA 2.11
Distribución en forma de montículo



Regla empírica Dada una distribución de mediciones que tiene forma aproximada de montículo:

El intervalo $(\mu \pm \sigma)$ contiene aproximadamente 68% de las mediciones.
El intervalo $(\mu \pm 2\sigma)$ contiene aproximadamente 95% de las mediciones.
El intervalo $(\mu \pm 3\sigma)$ contiene aproximadamente 99.7% de las mediciones.

MI CONSEJO

Recuerde estos tres números:
68—95—99.7

La distribución en forma de montículo que se muestra en la figura 2.11 se conoce comúnmente como **distribución normal** y se estudiará en detalle en el capítulo 6.

EJEMPLO 2.7

En un estudio de tiempo efectuado en una planta manufacturera, el tiempo para completar una operación especificada se mide para cada uno de los $n = 40$ trabajadores. Se encuentra que la media y la desviación estándar son 12.8 y 1.7, respectivamente. Describa los datos muestrales usando la Regla empírica.

Solución Para describir los datos, calcule estos intervalos:

$$(\bar{x} \pm s) = 12.8 \pm 1.7 \quad \text{o} \quad 11.1 \text{ a } 14.5$$
$$(\bar{x} \pm 2s) = 12.8 \pm 2(1.7) \quad \text{o} \quad 9.4 \text{ a } 16.2$$
$$(\bar{x} \pm 3s) = 12.8 \pm 3(1.7) \quad \text{o} \quad 7.7 \text{ a } 17.9$$

De acuerdo con la Regla empírica, se espera que aproximadamente 68% de las mediciones caigan en el intervalo de 11.1 a 14.5, aproximadamente 95% caigan en el intervalo de 9.4 a 16.2, y aproximadamente 99.7% caigan en el intervalo de 7.7 a 17.9.

Si hay duda de que la distribución de mediciones tenga forma de montículo o si se desea ser conservador por alguna razón, se puede aplicar el teorema de Chebyshev y estar absolutamente seguro de sus afirmaciones. El teorema de Chebyshev dice que al menos 3/4 de las mediciones caen en el intervalo de 9.4 a 16.2 y al menos 8/9 en el intervalo de 7.7 a 17.9.

EJEMPLO 2.8

Los maestros-estudiantes son capacitados para desarrollar planes de lecciones, en la suposición de que el plan escrito les ayudará a trabajar de manera satisfactoria en el salón de clases. En un estudio para evaluar la relación entre planes de lección escritos y su implementación en el salón de clases, se calificaron 25 planes de lección en una escala de 0 a 34 de acuerdo a una Lista de verificación de Plan de lección. Las 25 calificaciones se muestran en la tabla 2.4. Use el teorema de Chebyshev y la Regla empírica (si es aplicable) para describir la distribución de estas calificaciones de evaluación.

TABLA 2.4 **Calificaciones para evaluación de Plan de lección**

26.1	26.0	14.5	29.3	19.7
22.1	21.2	26.6	31.9	25.0
15.9	20.8	20.2	17.8	13.3
25.6	26.5	15.7	22.1	13.8
29.0	21.3	23.5	22.1	10.2

Solución Use su calculadora o las fórmulas computacionales para verificar que $\bar{x} = 21.6$ y $s = 5.5$. Los intervalos apropiados están calculados y aparecen en la tabla 2.5. También hemos consultado las 25 mediciones originales y contado el número real de mediciones que caen en cada uno de estos intervalos. Estas frecuencias y frecuencias relativas aparecen en la tabla 2.5.

TABLA 2.5 **Intervalos $\bar{x} \pm ks$ para los datos de la tabla 2.4**

k	Intervalo $\bar{x} \pm ks$	Frecuencia en intervalo	Frecuencia relativa
1	16.1–27.1	16	.64
2	10.6–32.6	24	.96
3	5.1–38.1	25	1.00

MI CONSEJO

Regla empírica ⇔ datos en forma de montículo.

Chebyshev ⇔ datos en cualquier forma.

¿Es aplicable el teorema de Chebyshev? Sí, porque se puede usar para cualquier conjunto de datos. De acuerdo con el teorema de Chebyshev,

- al menos 3/4 de las mediciones caerán entre 10.6 y 32.6.
- al menos 8/9 de las mediciones caerán entre 5.1 y 38.1.

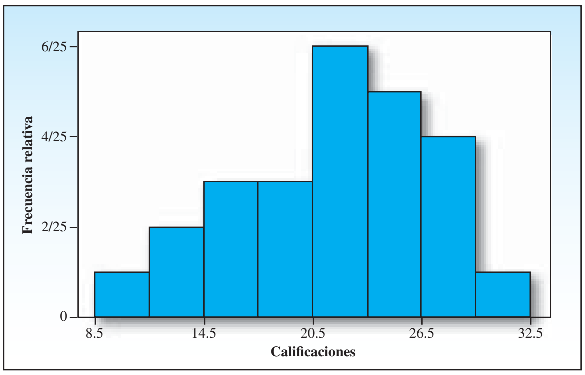
Se puede ver en la tabla 2.5 que el teorema de Chebyshev es verdadero para estos datos. De hecho, las proporciones de mediciones que caen en los intervalos especificados exceden el límite inferior dado por este teorema.

¿Es aplicable la Regla empírica? Usted puede comprobarlo por sí mismo si traza una gráfica, ya sea una gráfica de tallo y hoja o un histograma. El histograma *MINITAB* de la figura 2.12 muestra que la distribución *relativamente* tiene forma de montículo, de modo que la Regla empírica debe funcionar *relativamente bien*. Esto es,

- aproximadamente 68% de las mediciones caerán entre 16.1 y 27.1.
- aproximadamente 95% de las mediciones caerán entre 10.6 y 32.6.
- aproximadamente 99.7% de las mediciones caerán entre 5.1 y 38.1.

Las frecuencias relativas de la tabla 2.5 se aproximan mucho a las especificadas por la Regla empírica.

FIGURA 2.12
Histograma *MINITAB* para el ejemplo 2.8



USO DEL TEOREMA DE CHEBYSHEV Y LA REGLA EMPÍRICA

El teorema de Chebyshev se puede demostrar matemáticamente. Se aplica a cualquier conjunto de mediciones, muestra o población, grande o pequeño, en forma de montículo o sesgado.

El teorema de Chebyshev da un *límite inferior* a la fracción de mediciones a encontrar en un intervalo construido como $\bar{x} \pm ks$. ¡*Al menos* $1 - (1/k^2)$ de las mediciones caerán en este intervalo, y probablemente más!

La Regla empírica es una “regla práctica” que se puede usar como herramienta descriptiva cuando los datos tienden a ser de forma más o menos de montículo (los datos tienden a apilarse cerca del centro de la distribución).

Cuando se usen estas dos herramientas para describir un conjunto de mediciones, el teorema de Chebyshev siempre se satisface pero es una estimación muy conservadora de la fracción de mediciones que caen en un intervalo particular. Si es apropiado usar la Regla empírica (datos en forma de montículo), esta regla dará una estimación más precisa de la fracción de mediciones que caen en el intervalo.

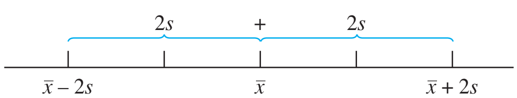
2.5 UNA MEDICIÓN DEL CÁLCULO DE *s*

El teorema de Chebyshev y la Regla empírica se pueden usar para detectar errores burdos en el cálculo de s. En términos generales, estas dos herramientas indican que *casi siempre* las mediciones caen dentro de *dos* desviaciones estándar de su media. Este intervalo está marcado en la figura 2.13, e implica que el rango total de mediciones, de la más pequeña a la más grande, debe estar en algún punto alrededor de cuatro desviaciones estándar. Esto es, desde luego, una aproximación muy burda pero puede ser muy útil para localizar errores grandes en el cálculo de s. Si el rango, R, es de alrededor de cuatro desviaciones estándar, o $4s$, se puede escribir

$$R \approx 4s \quad \text{o bien} \quad s \approx \frac{R}{4}$$

El valor calculado de s usando la fórmula de atajo debe ser de alrededor del mismo orden que la aproximación.

FIGURA 2.13
Aproximación de rango para s



EJEMPLO 2.9

Use la aproximación de rango para comprobar el cálculo de s para la tabla 2.2.

Solución El rango de las cinco mediciones, 5, 7, 1, 2, 4, es

$$R = 7 - 1 = 6$$

Entonces

$$s \approx \frac{R}{4} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Esto es del mismo orden que el valor calculado $s = 2.4$.

MI CONSEJO
$s \approx R/4$ sólo da un valor **aproximado** para s.

La aproximación de rango *no* tiene la finalidad de dar un valor preciso para s. Más bien, su propósito es detectar errores burdos de cálculo, por ejemplo no dividir la suma de cuadrados de desviaciones entre $(n - 1)$ o no tomar la raíz cuadrada de s^2. Si usted comete uno de estos errores, su respuesta será muchas veces más grande que la aproximación de rango de s.

EJEMPLO 2.10

Use la aproximación de rango para determinar un valor aproximado para la desviación estándar para los datos de la tabla 2.4.

Solución El rango $R = 31.9 - 10.2 = 21.7$. Entonces

$$s \approx \frac{R}{4} = \frac{21.7}{4} = 5.4$$

Como el valor exacto de s es 5.5 para los datos de la tabla 2.4, la aproximación es muy cercana.

El rango para una muestra de n mediciones dependerá del tamaño muestral, n. Para valores más grandes de n, se espera un rango más grande de valores x. El rango para muestras grandes (por ejemplo $n = 50$ o más observaciones) puede ser hasta de $6s$, mientras que el rango para muestras pequeñas (por ejemplo $n = 5$ o menos) puede ser de sólo $2.5s$ o menor.

La aproximación de rango para s se puede mejorar si se sabe que la muestra se toma de una distribución de datos en forma de montículo. Entonces, la s calculada no debe diferir de manera importante a partir del rango dividido entre la razón apropiada dada en la tabla 2.6.

TABLA 2.6 **Divisor para la aproximación de rango de s**

Número de mediciones	Razón esperada de rango para s
5	2.5
10	3
25	4

2.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

2.19 Un conjunto de $n = 10$ mediciones consta de los valores 5, 2, 3, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 3.

a. Use la aproximación de rango para estimar el valor de s para este conjunto. (SUGERENCIA: Use la tabla del final de la sección 2.5.)

b. Use su calculadora para hallar el valor real de s. ¿El valor real es cercano a la estimación de usted en el inciso a)?

c. Trace una gráfica de puntos de este conjunto de datos. ¿Los datos tienen forma de montículo?

d. ¿Puede usar el teorema de Chebyshev para describir este conjunto de datos? ¿Por qué sí o por qué no?

e. ¿Puede usar la Regla empírica para describir este conjunto de datos? ¿Por qué sí o por qué no?

2.20 Supongamos que usted desea crear una imagen mental del histograma de frecuencia relativa para un conjunto de datos grande formado por mil observaciones y que sabe que la media y desviación estándar del conjunto de datos son 36 y 3, respectivamente.

a. Si está más o menos seguro que la distribución de frecuencia relativa de los datos tiene forma de montículo, ¿cómo podría representar la distribución de frecuencia relativa?

b. Si no tiene usted información previa respecto a la forma de la distribución de frecuencia relativa, ¿qué puede decir acerca del histograma de frecuencia relativa? (SUGERENCIA: Construya intervalos $\bar{x} \pm ks$ para varias opciones de k.)

2.21 Una distribución de mediciones tiene relativamente la forma de un montículo con media de 50 y desviación estándar de 10.

a. ¿Qué proporción de las mediciones caerá entre 40 y 60?

b. ¿Qué proporción de las mediciones caerá entre 30 y 70?

c. ¿Qué proporción de las mediciones caerá entre 30 y 60?

d. Si se escoge una medición al azar de esta distribución, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor a 60?

2.22 Un conjunto de datos tiene una media de 75 y una desviación estándar de 5. Usted no sabe nada más acerca del tamaño del conjunto de datos o de la forma de la distribución de datos.

a. ¿Qué puede decir acerca de la proporción de mediciones que caen entre 60 y 90?

b. ¿Qué puede decir acerca de la proporción de mediciones que caen entre 65 y 85?

c. ¿Qué puede decir acerca de la proporción de mediciones que sean menores de 65?

APLICACIONES

2.23 Emergencias de automovilistas El tiempo requerido para que el conductor de un automóvil responda a una situación particular de emergencia se registró para $n = 10$ conductores. Los tiempos (en segundos) fueron .5, .8, 1.1, .7, .6, .9, .7, .8, .7, 8.

a. Busque en los datos y use el procedimiento de la sección 2.5 para hallar un valor aproximado para s. Use este valor para verificar sus cálculos del inciso b).

b. Calcule la media muestral $\bar{x}$ y la desviación estándar s. Compare con el inciso a).

2.24 Empacar carne para hamburguesas

MIS DATOS EX0124

Los datos que aparecen enseguida son los pesos (en libras) de 27 paquetes de carne molida de res, vistos en una pantalla de un supermercado:

1.08	.99	.97	1.18	1.41	1.28	.83
1.06	1.14	1.38	.75	.96	1.08	.87
.89	.89	.96	1.12	1.12	.93	1.24
.89	.98	1.14	.92	1.18	1.17	

a. Construya una gráfica de tallo y hoja o un histograma de frecuencia relativa para mostrar la distribución de pesos. ¿La distribución es relativamente de forma de montículo?

b. Encuentre la media y desviación estándar del conjunto de datos.

c. Encuentre el porcentaje de mediciones en el intervalo $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$.

d. Los porcentajes obtenidos en el inciso c), ¿cómo se comparan con los datos por la Regla empírica? Explique.

e. ¿Cuántos de los paquetes pesan exactamente 1 libra? ¿Puede usted considerar alguna explicación para esto?

2.25 Ritmo respiratorio ¿Es normal el ritmo respiratorio de usted? En realidad, no hay un ritmo estándar de respiración para seres humanos. Puede variar desde sólo cuatro respiraciones por minuto hasta 70 o 75 para una persona que realice un ejercicio agotador. Suponga que los ritmos respiratorios en reposo para estudiantes universitarios tienen una distribución de frecuencia relativa en forma de montículo, con una media igual a 12 y una desviación estándar de 2.3 respiraciones por minuto. ¿Qué fracción de todos los estudiantes tendría ritmos respiratorios en los siguientes intervalos?

a. 9.7 a 14.3 respiraciones por minuto

b. 7.4 a 16.6 respiraciones por minuto

c. Más de 18.9 o menos de 5.1 respiraciones por minuto

MIS DATOS EX0126

2.26 Muestras de mineral Una geóloga recolectó 20 muestras diferentes de mineral, todas del mismo peso, y al azar las dividió en dos grupos. Ella midió el contenido de titanio (Ti) de las muestras usando dos métodos diferentes.

Método 1					Método 2				
.011	.013	.013	.015	.014	.011	.016	.013	.012	.015
.013	.010	.013	.011	.012	.012	.017	.013	.014	.015

a. Construya gráficas de tallo y hoja para los dos conjuntos de datos. Visualmente compare sus centros y sus rangos.

b. Calcule las medias muestrales y desviaciones estándar para los dos conjuntos. ¿Los valores calculados confirman las conclusiones visuales de usted del inciso a)?

2.27 Números del Seguro Social Los datos del ejercicio 1.70 (véase el conjunto de datos EX0170), reproducidos a continuación, muestran el último dígito del número del Seguro Social para un grupo de 70 estudiantes.

1	6	9	1	5	9	0	2	8	4
0	7	3	4	2	3	5	8	4	2
3	2	0	0	2	1	2	7	7	4
0	0	9	9	5	3	8	4	7	4
6	6	9	0	2	6	2	9	5	8
5	1	7	7	7	8	7	5	1	8
3	4	1	9	3	8	6	6	6	6

a. Usted encontró en el ejercicio 1.70 que la distribución de estos datos era relativamente "plana", con cada valor diferente de 0 a 9 presentándose con casi igual frecuencia. Usando este dato, ¿cuál sería su mejor estimación para la media del conjunto de datos?

b. Use la aproximación de rango para calcular el valor de s para este conjunto.

c. Use su calculadora para hallar los valores reales de $\bar{x}$ y s. Compare con sus estimaciones en los incisos a) y b).

2.28 Números del Seguro Social, continúa Consulte el conjunto de datos del ejercicio 2.27.

a. Encuentre el porcentaje de mediciones en los intervalos $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$.

b. ¿Cómo se comparan los porcentajes obtenidos en el inciso a) con los dados por la Regla empírica? ¿Deben ser aproximadamente iguales? Explique.

2.29 Tiempos de supervivencia Un grupo de animales experimentales es infectado con una forma particular de bacterias, encontrándose que su tiempo de supervivencia es de 32 días con una desviación estándar de 36 días.

a. Visualice la distribución de tiempos de supervivencia. ¿Piensa usted que la distribución es de forma relativamente de montículo, sesgada a la derecha o sesgada a la izquierda? Explique.

b. ¿Dentro de qué límites esperaría usted que se encuentren al menos 3/4 de las mediciones?

2.30 Tiempos de supervivencia, continúa Consulte el ejercicio 2.29. Puede usar la Regla empírica para ver por qué la distribución de tiempos de supervivencia no podría tener forma de montículo.

a. Encuentre el valor de x que sea exactamente una desviación estándar debajo de la media.

b. Si la distribución tiene en realidad forma de montículo, ¿aproximadamente qué porcentaje de las mediciones debe ser menor que el valor de x encontrado en el inciso a)?

c. Como la variable que se mide es tiempo, ¿es posible haya algunas mediciones que estén más de una desviación estándar debajo de la media?

d. Use sus respuestas a los incisos b) y c) para explicar por qué la distribución de datos no puede tener forma de montículo.

MIS DATOS EX0231 **2.31 Terreno maderero** Para calcular la cantidad de madera en un terreno maderero, un propietario determinó contar el número de árboles con diámetros mayores a 12 pulgadas en cuadrados de 50 × 50 pies seleccionados al azar. Se escogieron 70 de estos cuadrados y se contaron los árboles seleccionados de cada extensión. Los datos aparecen en seguida:

7	8	7	10	4	8	6	8	9	10
9	6	4	9	10	9	8	8	7	9
3	9	5	9	9	8	7	5	8	8
10	2	7	4	8	5	10	7	7	7
9	6	8	8	8	7	8	9	6	8
6	11	9	11	7	7	11	7	9	13
10	8	8	5	9	9	8	5	9	8

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para describir los datos.

b. Calcule la media muestral $\bar{x}$ como estimación de μ, el número medio de árboles para todos los cuadrados de 50 × 50 pies del terreno.

c. Calcule s para los datos. Construya los intervalos $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$. Calcule el porcentaje de cuadrados que caen en cada uno de los tres intervalos y compare con los correspondientes porcentajes dados por la Regla empírica y el teorema de Chebyshev.

2.32 Atunes, otra vez Consulte el ejercicio 2.8 y el conjunto de datos EX0208. A continuación aparecen los precios de una lata de 6 onzas, o una bolsa de 7.06 onzas, para 14 marcas diferentes de atún claro elaborado en agua basados en precios pagados nacionalmente en supermercados.[4]

.99	1.92	1.23	.85	.65	.53	1.41
1.12	.63	.67	.69	.60	.60	.66

a. Use la aproximación de rango para hallar una estimación de s.

b. ¿Cómo se compara con el valor calculado de s?

MIS DATOS EX0233 **2.33 El viejo fiel** Los datos siguientes son 30 tiempos de espera entre erupciones del géiser Old Faithful del parque nacional de Yellowstone.[8]

56	89	51	79	58	82	52	88	52	78	69	75	77	72	71
55	87	53	85	61	93	54	76	80	81	59	86	78	71	77

a. Calcule el rango.

b. Use la aproximación de rango para aproximar la desviación estándar de estas 30 mediciones.

c. Calcule la desviación estándar de la muestra s.

d. ¿Qué proporción de las mediciones se encuentra a no más de dos desviaciones estándar de la media? ¿Y a no más de tres desviaciones estándar de la media? ¿Estas proporciones concuerdan con las proporciones dadas en el teorema de Chebyshev?

MIS DATOS EX0234 **2.34 Hijos del presidente** La tabla siguiente muestra los nombres de los 42 presidentes de Estados Unidos, junto con el número de sus hijos.[2]

Washington	0	Van Buren	4	Buchanan	0
Adams	5	W.H. Harrison	10	Lincoln	4
Jefferson	6	Tyler*	15	A. Johnson	5
Madison	0	Polk	0	Grant	4
Monroe	2	Taylor	6	Hayes	8
J.Q. Adams	4	Fillmore*	2	Garfield	7
Jackson	0	Pierce	3	Arthur	3
Cleveland	5	Coolidge	2	Nixon	2
B. Harrison*	3	Hoover	2	Ford	4
McKinley	2	F.D. Roosevelt	6	Carter	4
T. Roosevelt*	6	Truman	1	Reagan*	4
Taft	3	Eisenhower	2	G.H.W. Bush	6
Wilson*	3	Kennedy	3	Clinton	1
Harding	0	L.B. Johnson	2	G.W. Bush	2

*Casado dos veces *Fuente: Time Almanac 2007*

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para describir los datos. ¿Cómo describiría usted la forma de esta distribución?

b. Calcule la media y la desviación estándar para el conjunto de datos.

c. Construya los intervalos $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$. Encuentre el porcentaje de mediciones que caen en estos tres intervalos y compare con los correspondientes porcentajes dados por el teorema de Chebyshev y la Regla empírica.

2.35 Un hallazgo arqueológico, otra vez Consulte el ejercicio 2.17. El porcentaje de óxido de hierro en cada una de cinco muestras de cerámica recolectadas en el sitio de Island Thorns fue:

1.28 2.39 1.50 1.88 1.51

a. Use la aproximación de rango para hallar una estimación de s, usando un divisor apropiado de la tabla 2.6.

b. Calcule la desviación estándar s. ¿Qué tan cerca estuvo su estimación respecto del valor real de s?

MIS DATOS EX0236

2.36 Brett Favre El número de pases completados por Brett Favre, mariscal de campo de los Empacadores de Green Bay, se registró en cada uno de los 16 juegos regulares de la temporada de verano de 2006 (www.espn.com)[9].

15	31	25	22	22	19
17	28	24	5	22	24
22	20	26	21		

a. Trace una gráfica de tallo y hoja para describir los datos.

b. Calcule la media y desviación estándar para los pases completados por juego de Brett Favre.

c. ¿Qué proporción de las mediciones está a no más de dos desviaciones estándar de la media?

CÁLCULO DE LA MEDIA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR PARA DATOS AGRUPADOS (OPCIONAL)

2.37 Suponga que algunas mediciones se presentan más de una vez y que los datos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ están dispuestos en una tabla de frecuencia como vemos aquí:

Observaciones	Frecuencia f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
.	.
.	.
.	.
x_k	f_k

Las fórmulas para la media y varianza para datos agrupados son

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{n}, \qquad \text{donde } n = \Sigma f_i$$

y

$$s^2 = \frac{\Sigma x_i^2 f_i - \frac{(\Sigma x_i f_i)^2}{n}}{n-1}$$

Observe que si cada uno de los valores se presenta una vez, estas fórmulas se reducen a las dadas en el texto. Aun cuando estas fórmulas para datos agrupados son básicamente de valor cuando tenemos un gran número de mediciones, demuestre su uso para la muestra 1, 0, 0, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 3, 2.

a. Calcule $\bar{x}$ y s^2 directamente, usando las fórmulas para datos no agrupados.

b. La tabla de frecuencia para las $n = 15$ mediciones es como sigue:

x	f
0	4
1	5
2	2
3	4

Calcule $\bar{x}$ y s^2 usando las fórmulas para datos agrupados. Compare con sus respuestas al inciso a).

2.38 International Baccalaureate El programa International Baccalaureate (IB) es un programa académico acelerado ofrecido a un creciente número de secundarias en todo el país. Los estudiantes inscritos en este programa participan en cursos acelerados o avanzados y deben tomar exámenes IB en cada una de las seis materias al terminar su penúltimo o último año. Los estudiantes son calificados en una escala de 1-7, con 1-2 siendo malo, 3 mediocre, 4 promedio y 5-7 excelente. Durante su primer año de operación en la secundaria John W. North en Riverside, California, 17 estudiantes de penúltimo año trataron de pasar el examen IB de economía, con estos resultados:

Calificación de examen	Número de estudiantes
7	1
6	4
5	4
4	4
3	4

Calcule la media y desviación estándar para estas calificaciones.

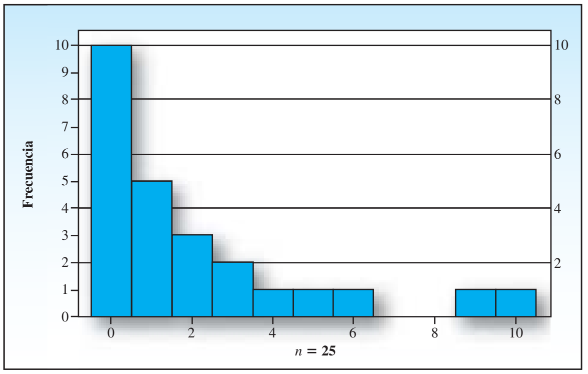
2.39 Una distribución sesgada Para ilustrar la utilidad de la Regla empírica, considere una distribución que está fuertemente sesgada a la derecha, como se muestra en la figura siguiente.

a. Calcule $\bar{x}$ y s para los datos mostrados. (NOTA: Hay 10 ceros, cinco unos, y así sucesivamente.)

b. Construya los intervalos $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$ y localícelos en la distribución de frecuencia.

c. Calcule la proporción de las $n = 25$ mediciones que caen en cada uno de tres intervalos. Compare con el teorema de Chebyshev y la Regla empírica. Observe que, aun cuando la proporción que cae en el intervalo $\bar{x} \pm s$ no concuerda cercanamente con la Regla empírica, las proporciones que caen en los intervalos $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$ concuerdan muy bien. Muchas veces esto es cierto, aun para distribuciones de datos que no tengan forma de montículo.

Distribución para el ejercicio 2.39



2.6 MEDICIONES DE POSICIÓN RELATIVA

A veces es necesario conocer la posición de una observación respecto a otras de un conjunto de datos. Por ejemplo, si usted se examina con un total de 35 puntos, podría desear saber cómo se compara su calificación de 30 con las calificaciones de los otros estudiantes del grupo. La media y desviación estándar de las calificaciones se pueden usar para calcular un **puntaje** z, que mide la posición relativa de una medición en un conjunto de datos.

Definición El **puntaje** z **muestral** es una medida de posición relativa definida por

$$\text{puntaje } z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

MI CONSEJO

Puntaje z positivo $\Leftrightarrow$ x está arriba de la media.
Puntaje z negativo $\Leftrightarrow$ x está debajo de la media.

Un **puntaje** z **mide la distancia entre una observación y la media, medidas en unidades de desviación estándar**. Por ejemplo, suponga que la media y desviación estándar de los puntajes de examen (basados en un total de 35 puntos) son 25 y 4, respectivamente. El puntaje z para su calificación de 30 se calcula como sigue:

$$\text{puntaje } z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{30 - 25}{4} = 1.25$$

Su puntaje de 30 está a 1.25 desviaciones estándar arriba de la media ($30 = \bar{x} + 1.25s$).

El puntaje z es una valiosa herramienta para determinar si es probable que una observación particular se presente con frecuencia, o si es improbable y puede ser considerada como **resultado atípico**.

De acuerdo con el teorema de Chebyshev y la Regla empírica,

- al menos 75% y más probablemente 95% de las observaciones están a no más de dos desviaciones estándar de su media: sus puntajes z están entre -2 y $+2$. *Las observaciones con puntajes z mayores a 2 en valor absoluto se presentan menos del 5% del tiempo y son consideradas un tanto improbables.*
- al menos 89% y más probablemente 99.7% de las observaciones están a no más de tres desviaciones estándar de su media: sus puntajes z están entre -3 y $+3$. *Las observaciones con puntajes z mayores a 3 en valor absoluto se presentan menos del 1% del tiempo y son consideradas muy poco probables.*

MI CONSEJO
Los puntajes z mayores a 3 en valor absoluto son muy poco comunes.

Usted debe apreciar con cuidado cualquier observación que tenga un puntaje z mayor a 3 en valor absoluto. Quizá la medición fue registrada incorrectamente o no pertenece a la población que se muestrea. Quizá es sólo una observación muy poco probable, pero válida, con todo.

EJEMPLO 2.11

Considere esta muestra de n mediciones:

1, 1, 0, 15, 2, 3, 4, 0, 1, 3

La medición $x = 15$ parece ser extraordinariamente grande. Calcule el puntaje z para esta observación y exprese sus conclusiones.

Solución Calcule $\bar{x} = 3.0$ y $s = 4.42$ para las $n = 10$ mediciones. Entonces el puntaje z para el resultado atípico sospechoso, $x = 15$, se calcula como

$$\text{puntaje } z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{15 - 3}{4.42} = 2.71$$

En consecuencia, la medición $x = 15$ está 2.71 desviaciones estándar arriba de la media muestral, $\bar{x} = 3.0$. Aun cuando el puntaje z no excede de 3, está cercano lo suficiente para que usted pueda sospechar que $x = 15$ es un resultado atípico. Usted debe examinar el procedimiento de muestreo para ver si $x = 15$ es una observación defectuosa.

Un **percentil** es otra medida de posición relativa y se usa con más frecuencia para conjuntos grandes de datos. (Los percentiles no son muy útiles para conjuntos pequeños de datos.)

Definición Un conjunto de n mediciones de la variable x se ha reacomodado en orden de magnitud. El ***p*-ésimo percentil** es el valor de x que es mayor a p% de las mediciones y es menor que el restante $(100 - p)$%.

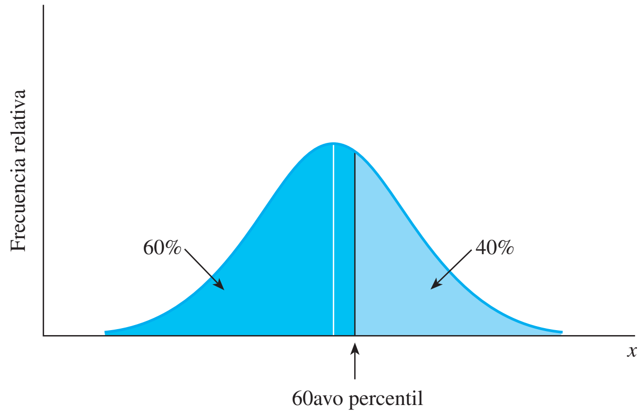
EJEMPLO 2.12

Supongamos que usted ha sido notificado que su calificación de 610, en el Examen verbal de graduación, lo ha colocado en el 60avo percentil en la distribución de calificaciones. ¿Dónde está su calificación de 610 en relación a las calificaciones de los otros que tomaron el examen?

Solución Calificar en el 60avo percentil significa que 60% de todas las calificaciones de examen fueron más bajas que la calificación de usted y 40% fueron más altas.

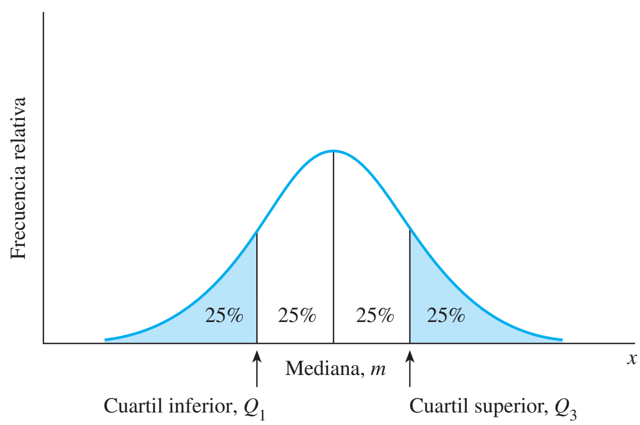
En general, el 60avo percentil para la variable x es un punto en el *eje horizontal* de la distribución de datos que es mayor a 60% de las mediciones y menor que las otras. Esto es, 60% de las mediciones son menores que el 60avo percentil y 40% son mayores (véase la figura 2.14). Como el área total bajo la distribución es 100%, 60% del área está a la izquierda y 40% del área está a la derecha del 60avo percentil. Recuerde que la mediana, m, de un conjunto de datos es la medición central; esto es, 50% de las mediciones son más pequeñas y 50% son más grandes que la mediana. Entonces, *¡la mediana es igual que el 50avo percentil!*

FIGURA 2.14
El 60avo percentil mostrado en el histograma de frecuencia relativa para un conjunto de datos



Los percentiles 25avo y 75avo, llamados **cuartiles inferior** y **superior**, junto con la mediana (el 50avo percentil), localizan puntos que dividen los datos en cuatro conjuntos, cada uno conteniendo un número igual de mediciones. Veinticinco por ciento de las mediciones serán menores que el cuartil inferior (primero), 50% serán menores que la mediana (el segundo cuartil) y 75% serán menores que el cuartil superior (tercero). De este modo, la mediana y los cuartiles inferior y superior están ubicados en puntos en el eje x de modo que el área bajo el histograma de frecuencia relativa para los datos está dividida en cuatro áreas iguales, como se muestra en la figura 2.15.

FIGURA 2.15
Ubicación de cuartiles



Definición Un conjunto de n mediciones en la variable x se ha acomodado en orden de magnitud. El **cuartil inferior (primer cuartil)**, Q_1, es el valor de x que es mayor a un cuarto de las mediciones y es menor que los restantes tres cuartos. El **segundo cuartil** es la mediana. El **cuartil superior (tercer cuartil)**, Q_3, es el valor de x que es mayor a tres cuartos de las mediciones y es menor que el restante un cuarto.

Para conjuntos de datos pequeños, con frecuencia es imposible dividir el conjunto en cuatro grupos, cada uno de los cuales contiene exactamente 25% de las mediciones. Por ejemplo, cuando $n = 10$, usted necesita tener 2½ mediciones en cada grupo. Aun cuando usted efectúe esta tarea (por ejemplo, si $n = 12$), hay muchos números que satisfarían la definición precedente y, por lo tanto, podrían ser considerados "cuartiles". Para evitar esta ambigüedad, usamos la siguiente regla para localizar cuartiles muestrales.

CÁLCULO DE CUARTILES MUESTRALES

- Cuando las mediciones están dispuestas en orden de magnitud, el **cuartil inferior**, Q_1, es el valor de x en la posición $.25(n + 1)$, y el **cuartil superior**, Q_3, es el valor de x en la posición $.75(n + 1)$.
- Cuando $.25(n + 1)$ y $.75(n + 1)$ no son enteros, los cuartiles se encuentran por interpolación, usando los valores de las dos posiciones adyacentes.†

EJEMPLO 2.13 Encuentre los cuartiles inferior y superior para este conjunto de mediciones:

16, 25, 4, 18, 11, 13, 20, 8, 11, 9

Solución Ordene las $n = 10$ mediciones de menor a mayor:

4, 8, 9, 11, 11, 13, 16, 18, 20, 25

Calcule

$$\text{Posición de } Q_1 = .25(n + 1) = .25(10 + 1) = 2.75$$
$$\text{Posición de } Q_3 = .75(n + 1) = .75(10 + 1) = 8.25$$

Como estas posiciones no son enteros, el cuartil inferior se toma como el valor 3/4 de la distancia entre la segunda y tercera mediciones ordenadas, y el cuartil superior se toma como el valor 1/4 de la distancia entre la octava y novena mediciones ordenadas. Por tanto,

$$Q_1 = 8 + .75(9 - 8) = 8 + .75 = 8.75$$

y

$$Q_3 = 18 + .25(20 - 18) = 18 + .5 = 18.5$$

Como la mediana y los cuartiles dividen la distribución de datos en cuatro partes, cada una de ellas conteniendo alrededor de 25% de las mediciones, Q_1 y Q_3 son las fronteras superior e inferior para el 50% central de la distribución. Podemos medir el rango de este "50% central" de la distribución usando una medida numérica llamada **rango intercuartil**.

† Esta definición de cuartiles es consistente con la empleada en el paquete *MINITAB*. Algunos libros de texto emplean redondeo ordinario cuando buscan posiciones de cuartil, mientras que otros calculan cuartiles muestrales como las medianas de las mitades superior e inferior del conjunto de datos.

Definición El **rango intercuartil (IQR)** para un conjunto de mediciones es la diferencia entre los cuartiles superior e inferior; esto es, IQR $= Q_3 - Q_1$.

Para los datos del ejemplo 2.13, IQR $= Q_3 - Q_1 = 18.50 - 8.75 = 9.75$. Usaremos el IQR junto con los cuartiles y la mediana en la siguiente sección para construir otra gráfica para describir conjuntos de datos.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo cuartiles muestrales?

1. Acomode el conjunto de datos en orden de magnitud de menor a mayor.
2. Calcule las posiciones de cuartil:
   - Posición de Q_1: $.25(n + 1)$
   - Posición de Q_3: $.75(n + 1)$
3. Si las posiciones son de enteros, entonces Q_1 y Q_3 son los valores del conjunto ordenado de datos que se encuentra en esas posiciones.
4. Si las posiciones del paso 2 no son de enteros, encuentre las dos mediciones en las posiciones un poco arriba y un poco debajo de la posición calculada. Calcule el cuartil al hallar un valor ya sea de un cuarto, un medio y tres cuartos de la distancia entre estas dos mediciones.

Repertorio de ejercicios

A. A continuación encontrará dos conjuntos de datos de práctica. Llene los espacios en blanco para hallar los cuartiles necesarios. El primer conjunto de datos ya está hecho.

Conjunto de datos	Ordenado	n	Posición de Q_1	Posición de Q_3	Cuartil inferior, Q_1	Cuartil superior, Q_3
2, 5, 7, 1, 1, 2, 8	1, 1, 2, 2, 5, 7, 8	7	2o	6o	1	7
5, 0, 1, 3, 1, 5, 5, 2, 4, 4, 1						

B. A continuación encontrará tres conjuntos de datos que ha están ordenados. Las posiciones de los cuartiles superior e inferior se muestran en la tabla. Encuentre las mediciones un poco arriba y un poco abajo de la posición de cuartil. Enseguida encuentre los cuartiles superior e inferior. El primer conjunto de datos ya está hecho.

Conjunto ordenado de datos	Posición de Q_1	Mediciones arriba y abajo	Q_1	Posición de Q_3	Mediciones arriba y abajo	Q_3
0, 1, 4, 4, 5, 9	1.75	0 y 1	$0 + .75(1) = .75$	5.25	5 y 9	$5 + .25(4) = 6$
0, 1, 3, 3, 4, 7, 7, 8	2.25	______ y ______		6.75	______ y ______	
1, 1, 2, 5, 6, 6, 7, 9, 9	2.5	______ y ______		7.5	______ y ______	

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Intente de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina los cuartiles muestrales? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

Muchas de las medidas numéricas que usted ha aprendido se encuentran fácilmente usando programas de cómputo o incluso calculadoras graficadoras. El comando *MINITAB* **Stat → Basic Statistics → Display Descriptive Statistics** (véase la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo) produce una salida que contiene la media, la desviación estándar, la mediana y los cuartiles inferior y superior, así como los valores de algunas otras estadísticas que todavía no vemos. Los datos del ejemplo 2.13 produjeron la salida *MINITAB* que se muestra en la figura 2.16. Observe que los cuartiles son idénticos a los valores calculados manualmente en ese ejemplo.

FIGURA 2.16
Salida *MINITAB* para los datos del ejemplo 2.13

Estadística descriptiva: x

Variable	N	N*	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
X	10	0	13.50	1.98	6.28	4.00	8.75	12.00	18.50	25.00

2.7 EL RESUMEN DE CINCO NÚMEROS Y LA GRÁFICA DE CAJA

La mediana y los cuartiles superior e inferior que se muestran en la figura 2.15 dividen los datos en cuatro conjuntos, cada uno de los cuales contiene igual número de mediciones. Si agregamos el número más grande (Max) y el número más pequeño (Min) del conjunto de datos a este grupo, tendremos un conjunto de números que da un rápido y aproximado resumen de la distribución de datos.

El **resumen de cinco números** consta del número más pequeño, el cuartil inferior, le mediana, el cuartil superior, y el número más grande, presentados en orden de menor a mayor:

Min $\quad Q_1 \quad$ **Mediana** $\quad Q_3 \quad$ **Max**

Por definición, un cuarto de las mediciones del conjunto de datos se encuentre entre cada uno de los cuatro pares adyacentes de números.

El resumen de cinco números se puede usar para crear una gráfica sencilla llamada **gráfica de caja** a fin de describir visualmente la distribución de datos. De la gráfica de caja, rápidamente se puede detectar cualquier sesgo en la forma de la distribución y ver si hay algunos resultados atípicos en el conjunto de datos.

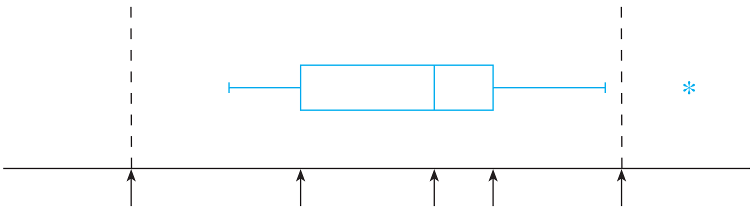
Un resultado atípico aparece al trasponer dígitos cuando se registra una medición, al leer incorrectamente la carátula de un instrumento, por el mal funcionamiento de una pieza de equipo o por otros problemas. Aun cuando no haya errores de registro o de observación, un conjunto de datos puede contener una o más mediciones válidas que, por una u otra razón, difieren marcadamente de las otras del conjunto. Estos resultados atípicos pueden causar una notable distorsión en medidas numéricas de uso común tales como $\bar{x}$ y s. De hecho, los atípicos pueden contener información importante no compartida con las otras mediciones del conjunto. Por tanto, los resultados atípicos aislados, si están presentes, son un paso importante en cualquier análisis preliminar de un conjunto de datos. La gráfica de caja está diseñada expresamente para este fin.

PARA CONSTRUIR UNA GRÁFICA DE CAJA

- Calcule la mediana, los cuartiles superior e inferior y el IQR para el conjunto de datos.
- Trace una recta horizontal que represente la escala de medición. Forme una caja un poco arriba de la recta horizontal con los extremos derecho e izquierdo en Q_1 y Q_3. Trace una recta vertical que pase por la caja en la ubicación de la mediana.

Una gráfica de caja se muestra en la figura 2.17.

FIGURA 2.17
Gráfica de caja



En la sección 2.6, el puntaje z dio fronteras para hallar mediciones extraordinariamente grandes o pequeñas. Buscamos puntajes z mayores a 2 o 3 en valor absoluto. La gráfica de caja usa el IQR para crear "límites" imaginarios para separar resultados atípicos del resto del conjunto de datos:

DETECCIÓN DE RESULTADOS ATÍPICOS. OBSERVACIONES QUE ESTÁN A MAYOR DISTANCIA:

- Límite inferior: $Q_1 - 1.5(\text{IQR})$
- Límite superior: $Q_3 + 1.5(\text{IQR})$

Los límites superior e inferior se muestran con líneas interrumpidas en la figura 2.17, pero no suelen ser trazadas en la gráfica de caja. Cualquier medición a mayor distancia del límite superior o inferior es un **resultado atípico**; el resto de las mediciones, dentro de los límites, no son inusuales. Por último, la gráfica de caja marca el rango del conjunto de datos usando "bigotes" para conectar las mediciones más pequeñas y más grandes (*excluyendo resultados atípicos*) a la caja.

PARA TERMINAR LA GRÁFICA DE CAJA

- Marque cualesquier **resultados atípicos** con un asterisco (*) en la gráfica.
- Prolongue rectas horizontales llamadas "bigotes" desde los extremos de la caja a las observaciones más pequeñas y más grandes *que no sean* resultados atípicos.

EJEMPLO 2.14

A medida que los consumidores estadounidenses tienen más cuidado con los alimentos que consumen, los procesadores de alimentos tratan de ser competitivos al evitar cantidades excesivas de grasa, colesterol y sodio en los alimentos que venden. Los datos siguientes son las cantidades de sodio por rebanada (en miligramos) para cada una de ocho marcas de queso regular estadounidense. Construya una gráfica de caja para los datos y busque resultados atípicos.

340, 300, 520, 340, 320, 290, 260, 330

Solución Las $n = 8$ mediciones se ordenan primero de menor a mayor:

$$260, \quad 290, \quad 300, \quad 320, \quad 330, \quad 340, \quad 340, \quad 520$$

Las posiciones de la mediana, Q_1 y Q_3 son

$$.5(n + 1) = .5(9) = 4.5$$
$$.25(n + 1) = .25(9) = 2.25$$
$$.75(n + 1) = .75(9) = 6.75$$

de modo que $m = (320 + 330)/2 = 325$, $Q_1 = 290 + .25(10) = 292.5$ y $Q_3 = 340$. El rango intercuartil se calcula como

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 340 - 292.5 = 47.5$$

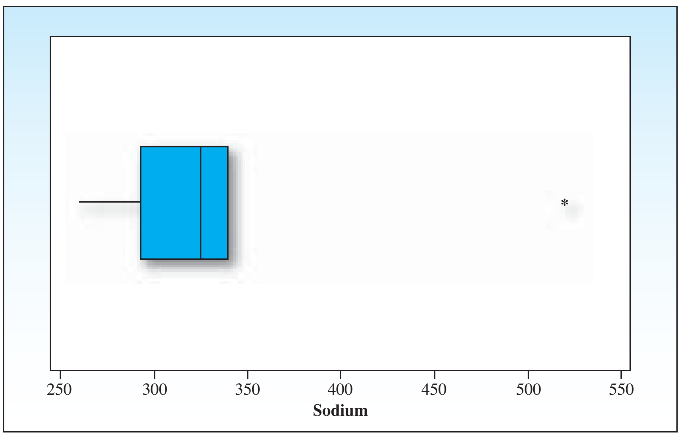
Calcule los límites superior e inferior:

$$\text{Límite inferior: } 292.5 - 1.5(47.5) = 221.25$$
$$\text{Límite superior: } 340 + 1.5(47.5) = 411.25$$

El valor $x = 520$, una marca de queso que contiene 520 miligramos de sodio, es el único *resultado atípico* que se encuentra fuera de la cerca superior.

La gráfica de caja para los datos se muestra en la figura 2.18. El resultado atípico está marcado con un asterisco (*). Una vez excluido el resultado atípico, encontramos (del conjunto ordenado de datos) que las mediciones más pequeña y más grande son $x = 260$ y $x = 340$. Éstos son los dos valores que forman los bigotes. Como el valor $x = 340$ es igual que Q_3, no hay bigote en el lado derecho de la caja.

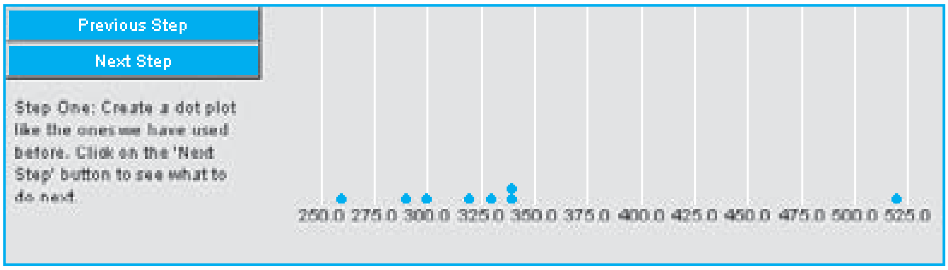
FIGURA 2.18
Gráfica de caja para el ejemplo 2.14



MI APPLET

Ahora sería un buen momento para probar el applet **Building a Box Plot (Construyendo una gráfica de caja)**. El applet de la figura 2.19 muestra una gráfica de puntos de los datos del ejemplo 2.14. Usando el botón Next Step, se muestra una descripción paso a paso que explica cómo se construye la gráfica de caja. Usaremos este applet otra vez para Ejercicios de Mi Applet al final del capítulo.

FIGURA 2.19
Applet **Building a Box Plot**



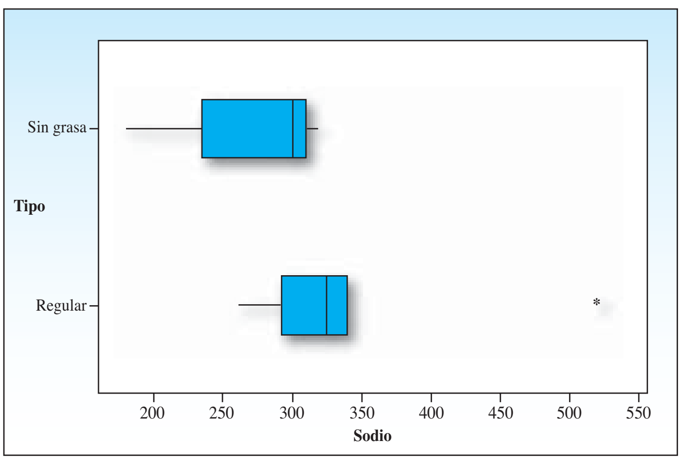
Usted puede usar la gráfica de caja para describir la forma de una distribución de datos al ver la posición de la recta mediana comparada contra Q_1 y Q_3, así como los extremos izquierdo y derecho de la caja. Si la mediana está cerca del centro de la caja, la distribución es más o menos simétrica, dando así intervalos de igual tamaño para contener los dos cuartos centrales de los datos. Si la recta mediana está a la izquierda del centro, la distribución está sesgada a la derecha; si la mediana está a la derecha del centro, la distribución está sesgada a la izquierda. También, para casi todas las distribuciones sesgadas, el bigote en el lado sesgado de la caja tiende a ser más largo que el bigote del otro lado.

Empleamos el comando *MINITAB* **Graph → Boxplot** para trazar dos gráficas de caja, una para el contenido de sodio de las ocho marcas de queso del ejemplo 2.14 y otra para cinco marcas de queso sin grasa con estos contenidos de sodio:

300, 300, 320, 290, 180

Las dos gráficas de caja se muestran juntas en la figura 2.20. Veamos el bigote largo del lado izquierdo de ambas gráficas y la posición de las rectas medianas. Ambas distribuciones están sesgadas a la izquierda; esto es, hay unas pocas mediciones inusualmente pequeñas. No obstante, los datos regulares del queso también muestran una marca ($x = 520$) con una cantidad de sodio extraordinariamente grande. En general, aparece que el contenido de sodio de las marcas sin grasa es menor que la de las marcas regulares, pero la variabilidad del contenido de sodio para queso regular (excluyendo el resultado atípico) es menor que la de las marcas sin grasa.

FIGURA 2.20
Salida del *MINITAB* para queso regular sin grasa



2.7 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se relacionan a la sección Mi Entrenador personal de la página 79.

2.40 A continuación se encuentran dos conjuntos de datos de práctica. Llene los espacios en blanco para hallar los cuartiles necesarios.

Conjunto de datos	Ordenado	n	Posición de Q_1	Posición de Q_3	Cuartil inferior, Q_1	Cuartil superior, Q_3
.13, .76, .34, .88, .21, .16, .28						
2.3, 1.0, 2.1, 6.5, 2.8, 8.8, 1.7, 2.9, 4.4, 5.1, 2.0						

2.41 A continuación se encuentran tres conjuntos de datos que ya han sido ordenados. Llene los espacios en blanco para hallar los cuartiles superiores e inferiores.

Conjunto ordenado de datos	Posición de Q_1	Mediciones arriba y abajo	Q_1	Posición de Q_3	Mediciones arriba y abajo	Q_3
1, 1.5, 2, 2, 2.2		____ y ____			____ y ____	
0, 1.7, 1.8, 3.1, 3.2, 7, 8, 8.8, 8.9, 9, 10		____ y ____			____ y ____	
.23, .30, .35, .41, .56, .58, .76, .80		____ y ____			____ y ____	

TÉCNICAS BÁSICAS

2.42 Dado el siguiente conjunto de datos: 8, 7, 1, 4, 6, 6, 4, 5, 7, 6, 3, 0

a. Encuentre el resumen de cinco números y el IQR.

b. Calcule $\bar{x}$ y s.

c. Calcule el puntaje z para las observaciones más pequeñas y más grandes. ¿Alguna de estas observaciones es muy grande o muy pequeña?

2.43 Encuentre el resumen de cinco números y el IQR para estos datos:

19, 12, 16, 0, 14, 9, 6, 1, 12, 13, 10, 19, 7, 5, 8

2.44 Construya una gráfica de caja para estos datos e identifique los resultados atípicos:

25, 22, 26, 23, 27, 26, 28, 18, 25, 24, 12

2.45 Construya una gráfica de caja para estos datos e identifique los resultados atípicos:

3, 9, 10, 2, 6, 7, 5, 8, 6, 6, 4, 9, 22

APLICACIONES

2.46 Si usted calificó en el 69avo percentil en un examen de conocimientos, ¿cómo se compara su calificación con otras?

MIS DATOS EX0247

2.47 Concentración de mercurio en delfines Los científicos del medio ambiente están cada vez más preocupados por la acumulación de elementos tóxicos en mamíferos marinos, así como en el paso de esos elementos a los descendientes de esos animales. El delfín de franjas (*Stenella coeruleoalba*), considerado el principal depredador en la cadena alimenticia marina, fue objeto de este estudio. Las concentraciones de mercurio (microgramos/gramo) en los hígados de 28 delfines de franjas machos fueron como sigue:

1.70	183.00	221.00	286.00
1.72	168.00	406.00	315.00
8.80	218.00	252.00	241.00
5.90	180.00	329.00	397.00
101.00	264.00	316.00	209.00
85.40	481.00	445.00	314.00
118.00	485.00	278.00	318.00

a. Calcule el resumen de cinco números para los datos.

b. Construya una gráfica de caja para los datos.

c. ¿Hay algún resultado atípico?

d. Si usted supiera que los primeros cuatro delfines tenían menos de tres años de edad, en tanto que los otros tenían más de ocho años de edad, ¿esta información ayudaría a explicar la diferencia en la magnitud de esas cuatro observaciones? Explique.

2.48 Carne para hamburguesa Los pesos (en libras) de los 27 paquetes de carne molida de res del ejercicio 2.24 (véase el conjunto de datos EX0224) aparecen a continuación, en orden de menor a mayor:

.75	.83	.87	.89	.89	.89	.92
.93	.96	.96	.97	.98	.99	1.06
1.08	1.08	1.12	1.12	1.14	1.14	1.17
1.18	1.18	1.24	1.28	1.38	1.41	

a. Confirme los valores de la media y desviación estándar, calculados en el ejercicio 2.24 como $\bar{x} = 1.05$ y $s = .17$.

b. Los dos paquetes de carne más grandes pesan 1.38 y 1.41 libras. ¿Estos dos paquetes son inusualmente pesados? Explique.

c. Construya una gráfica de caja para los pesos de paquetes. ¿Qué nos dice la posición de la recta mediana y la longitud de los bigotes acerca de la forma de la distribución?

MIS DATOS EX0249

2.49 Comparación de mariscales de campo de la NFL ¿Cómo se compara Brett Favre, mariscal de campo de los Empacadores de Green Bay, con Peyton Manning, mariscal de campo de los Potros de Indianápolis? La tabla siguiente muestra el número de pases completos de cada uno de estos atletas durante la temporada de fútbol de 2006 de la NFL:[9]

Brett Favre			Peyton Manning		
15	17	22	25	32	25
31	28	20	26	30	29
25	24	26	14	27	21
22	5	21	21	20	22
22	22		20	14	
19	24		25	21	

a. Calcule los resúmenes de cinco números para el número de pases completos de Brett Favre y de Peyton Manning.

b. Construya gráficas de caja para los dos conjuntos de datos. ¿Hay resultados atípicos? ¿Qué nos dicen las gráficas de caja acerca de las formas de las dos distribuciones?

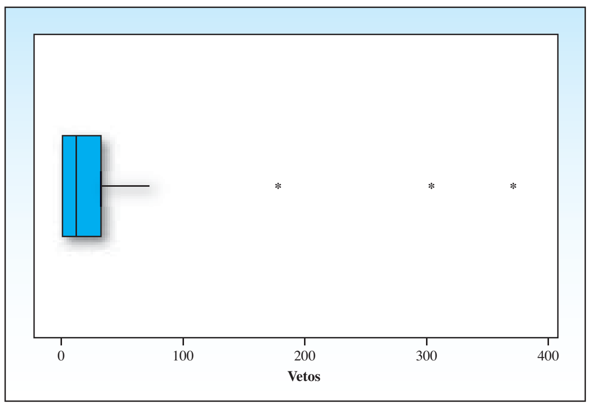
c. Escriba un breve párrafo que compare el número de pases completos para los dos mariscales de campo.

2.50 Vetos de presidentes El conjunto de vetos de presidentes del ejercicio 1.47 y el conjunto de datos EX0147 aparece a continuación, junto con una gráfica de caja generada por *MINITAB*. Use la gráfica de caja para describir la forma de la distribución e identifique cualesquier resultados atípicos.

Washington	2	B. Harrison	19
J. Adams	0	Cleveland	42
Jefferson	0	McKinley	6
Madison	5	T. Roosevelt	42
Monroe	1	Taft	30
J. Q. Adams	0	Wilson	33
Jackson	5	Harding	5
Van Buren	0	Coolidge	20
W. H. Harrison	0	Hoover	21
Tyler	6	F. D. Roosevelt	372
Polk	2	Truman	180
Taylor	0	Eisenhower	73
Fillmore	0	Kennedy	12
Pierce	9	L. Johnson	16
Buchanan	4	Nixon	26
Lincoln	2	Ford	48
A. Johnson	21	Carter	13
Grant	45	Reagan	39
Hayes	12	G. H. W. Bush	29
Garfield	0	Clinton	36
Arthur	4	G. W. Bush	1
Cleveland	304		

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

Gráfica de caja para el ejercicio 2.50



2.51 Tiempos de supervivencia Altman y Bland informan de tiempos de supervivencia para pacientes con hepatitis activa, la mitad tratados con prednisona y la mitad no reciben tratamiento.[10] Los tiempos de supervivencia (en meses) (ejercicio 1.73 y EX0173) están adaptados de sus datos para los tratados con prednisona.

8	127
11	133
52	139
57	142
65	144
87	147
93	148
97	157
109	162
120	165

a. ¿Al ver estos datos, se puede decir si es más o menos simétrica? ¿O bien, es sesgada?

b. Calcule la media y mediana. Use estas medidas para determinar si los datos son o no son simétricos o sesgados.

c. Trace una gráfica de caja para describir los datos. Explique por qué la gráfica de caja confirma lo concluido por usted en el inciso b).

MIS DATOS EX0252

2.52 Estados de cuenta por consumo eléctrico en el sur de California, otra vez Los estados de cuenta mensuales por consumo eléctrico para una familia en Riverside, California, se registraron durante 12 meses consecutivos desde enero 2006:

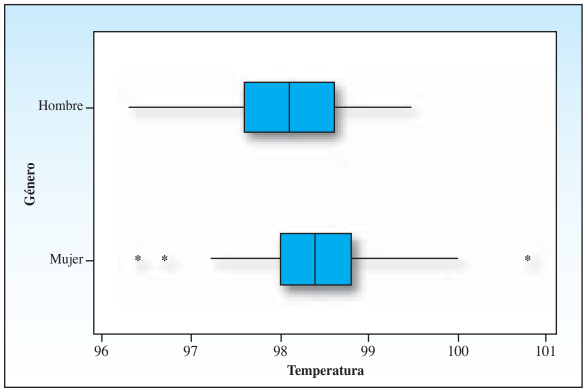
Mes	Cantidad ($)	Mes	Cantidad ($)
Enero	$266.63	Julio	$306.55
Febrero	163.41	Agosto	335.48
Marzo	219.41	Septiembre	343.50
Abril	162.64	Octubre	226.80
Mayo	187.16	Noviembre	208.99
Junio	289.17	Diciembre	230.46

a. Construya una gráfica de caja para los costos mensuales por consumo eléctrico.

b. ¿Qué nos dice la gráfica de caja acerca de la distribución de cosos por consumo eléctrico para esta familia?

2.53 ¿Qué es normal?, otra vez Consulte el ejercicio 1.67 y el conjunto de datos EX0167. Además de la temperatura corporal en grados Fahrenheit para las 130 personas, los datos registran el género de éstas. A continuación aparecen gráficas de caja para los dos grupos, hombres y mujeres:[11]

Gráficas de caja para el ejercicio 2.53



¿Cómo describiría usted las similitudes y diferencias entre temperaturas en hombres y mujeres en este conjunto de datos?

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos clave y fórmulas

I. Medidas de centro de una distribución de datos

1. Media aritmética (media) o promedio
   a. Población: μ
   b. Muestra de n mediciones: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$
2. Mediana; **posición** de la mediana $= .5(n + 1)$
3. Moda
4. La mediana puede ser preferida a la media si los datos son altamente sesgados.

II. Medidas de variabilidad

1. Rango: $R =$ máximo $-$ mínimo
2. Varianza
   a. Población de N mediciones:
   $$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}$$
   b. Muestra de n mediciones:
   $$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{\Sigma x_i^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}}{n - 1}$$
3. Desviación estándar
   a. Población: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
   b. Muestra: $s = \sqrt{s^2}$
4. Una aproximación burda para s se puede calcular como $s \approx R/4$. El divisor se puede ajustar dependiente del tamaño muestral.

III. Teorema de Chebyshev y la Regla empírica

1. Use el teorema de Chebyshev para cualquier conjunto de datos, cualquiera que sea su forma o tamaño.
   a. Al menos $1 - (1/k^2)$ de las mediciones se encuentra a no más de k desviaciones estándar de la media.
   b. Éste es sólo un límite inferior; puede haber más mediciones en el intervalo.
2. La Regla empírica se puede usar sólo para conjuntos de datos en forma relativa de montículo. Aproximadamente 68%, 95% y 99.7% de las mediciones están a no más de uno, dos y tres desviaciones estándar de la media, respectivamente.

IV. Mediciones de posición relativa

1. Puntaje z muestral: $z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$
2. p-ésimo percentil; p% de las mediciones son más pequeñas y $(100 - p)$% son más grandes.
3. Cuartil inferior, Q_1; **posición** de $Q_1 = .25\ (n + 1)$
4. Cuartil superior, Q_3; **posición** de $Q_3 = .75\ (n + 1)$
5. Rango intercuartil: $\text{IQR} = Q_3 - Q_1$

V. El resumen de cinco números y gráficas de caja

1. El **resumen de cinco números**:

   Min Q_1 Mediana Q_3 Max

   Un cuarto de las mediciones del conjunto de datos está entre cada uno de los cuatro pares adyacentes de números.
2. Se usan gráficas de caja para detectar resultados atípicos y formas de distribuciones.
3. Q_1 y Q_3 forman los extremos de la caja. La recta mediana está en el interior de la caja.
4. Se usan límites superiores e inferiores para hallar resultados atípicos, observaciones que están fuera de estas cercas.
   a. **Límite inferior:** $Q_1 - 1.5(\text{IQR})$
   b. **Límite superior:** $Q_3 + 1.5(\text{IQR})$
5. Los **resultados atípicos** están marcados en la gráfica de caja con un asterisco (*).
6. Los **bigotes** están conectados a la caja desde las observaciones más pequeña y más grande que *no sean* resultados atípicos.
7. Las distribuciones sesgadas por lo general tienen un bigote largo *en la dirección del sesgo* y la recta mediana se traza *alejándose de la dirección del sesgo.*

MI MINITAB

Medidas numéricas descriptivas

El *MINITAB* da casi todas las estadísticas descriptivas básicas presentadas en el capítulo 2 usando un solo comando en los menús descendentes. Una vez que usted esté en el escritorio de Windows, dé un doble clic en el icono *MINITAB* o use el botón Start para iniciar el *MINITAB*.

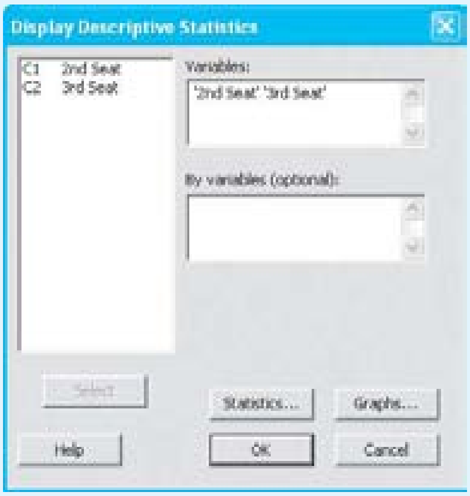
Practique introduciendo algunos datos en la ventana Data, dando nombre apropiado a las columnas en la celda gris que está un poco abajo del número de columna. Cuando haya terminado de introducir sus datos, habrá creado una **hoja de trabajo** *MINITAB*, que se puede guardar ya sea en forma individual o como **proyecto** *MINITAB* para uso futuro. Dé un clic en **File → Save Current Worksheet** o en **File → Save Project**. Necesitará aplicar nombre a la hoja de trabajo (o proyecto), quizá "datos de prueba", para que pueda recuperarla más adelante.

Los datos siguientes son las longitudes de piso (en pulgadas) detrás de los asientos segundo y tercero de nueve minivans diferentes:[12]

Segundo asiento: 62.0, 62.0, 64.5, 48.5, 57.5, 61.0, 45.5, 47.0, 33.0
Tercer asiento: 27.0, 27.0, 24.0, 16.5, 25.0, 27.5, 14.0, 18.5, 17.0

Como los datos contienen dos variables, introducimos las dos filas de números en las columnas C1 y C2 de la hoja de trabajo *MINITAB* y les damos los nombres "2o asiento" y "3er asiento", respectivamente. Usando los menús descendentes, dé un clic en **Stat → Basic Statistics → Display Descriptive Statistics**. El cuadro de diálogo se muestra en la figura 2.21.

FIGURA 2.21

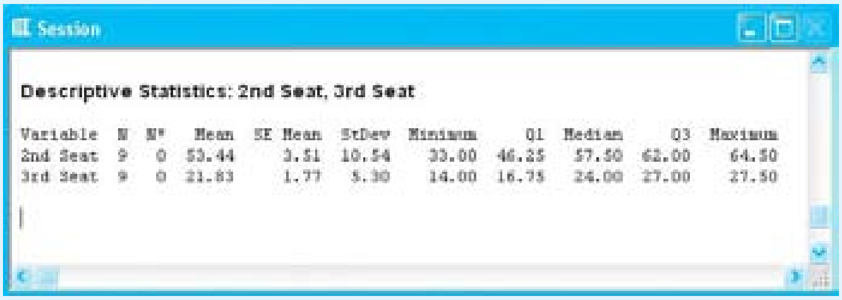


Ahora dé un clic en la caja de Variables y **seleccione** ambas columnas de la lista de la izquierda. (Puede dar un clic en la opción **Graphs** y escoger una de varias gráficas si lo desea. También puede dar un clic en la opción **Statistics** para seleccionar las estadísticas que desee ver en pantalla.) Dé un clic en **OK**. En la ventana Session aparecerá una pantalla de estadísticas descriptivas para ambas columnas (véase la figura 2.22). Puede imprimir esta salida usando **File → Print Session Window** si lo desea.

Para examinar la distribución de las dos variables y buscar resultados atípicos, puede crear gráficas de caja usando el comando **Graph → Boxplot → One Y → Simple**. Dé un clic en **OK**. Seleccione la columna de mediciones apropiada del cuadro de Diálogo (véase la figura 2.23). Puede cambiar la presentación de la gráfica de caja en varias formas. **Scale → Axes and Ticks** le permitirán trasponer los ejes y orientar la gráfica de caja en sentido horizontal, cuando aplique un puntaje en la caja "Transpose value and category scales”. **Multiple Graphs** da opciones de impresión para múltiples gráficas de caja. **Labels** permite poner notas, títulos y notas al pie en la gráfica. Si ya ha introducido datos en la hoja de trabajo como distribución de frecuencia (valores en una columna, frecuencias en otra), las **Data Options** permitirán leer los datos en ese formato. La gráfica de caja para las longitudes del tercer asiento se muestra en la figura 2.24.

Usted puede usar los comandos de *MINITAB* del capítulo 1 para mostrar gráficas de tallo y hojas o histogramas para las dos variables. ¿Cómo describiría las similitudes y las diferencias en estos dos conjuntos de datos? Guarde esta hoja de trabajo en un archivo llamado “Minivans” antes de salir de *MINITAB*. Volverá a usarlo en el capítulo 3.

FIGURA 2.22



Variable	N	N*	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
2nd Seat	9	0	53.44	3.51	10.54	33.00	46.25	57.50	62.00	64.50
3rd Seat	9	0	21.83	1.77	5.30	14.00	16.75	24.00	27.00	27.50

FIGURA 2.23

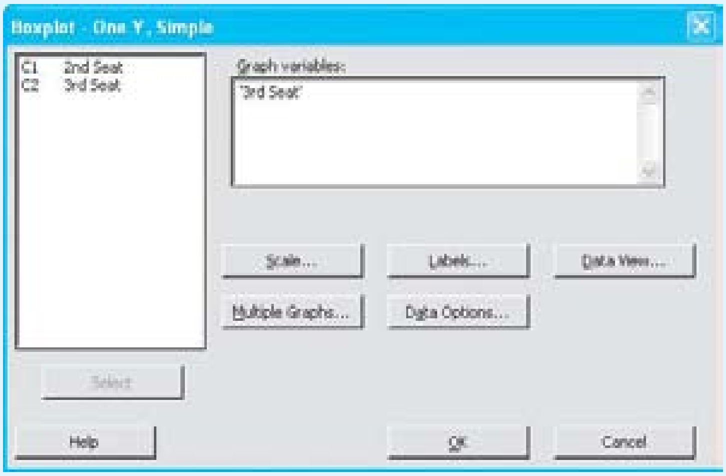
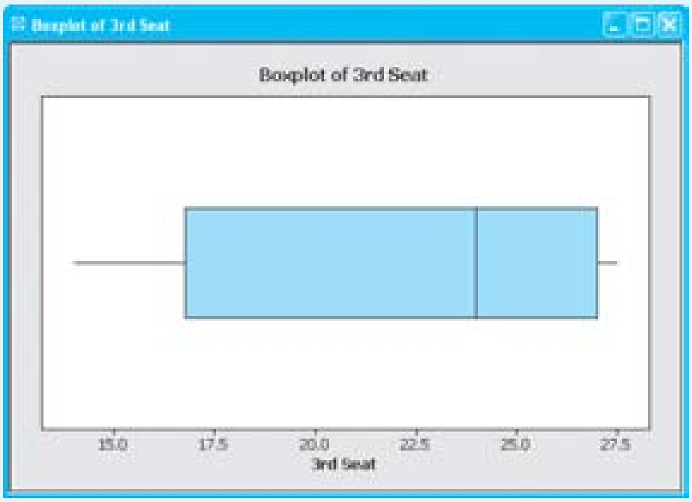


FIGURA 2.24



Ejercicios suplementarios

MIS DATOS EX0254

2.54 Pasas El número de pasas en cada una de 14 minicajas (tamaño de 1/2 onza) se contó para una marca genérica y pasas de la marca Sunmaid. Aquí vemos los dos conjuntos de datos:

Marca genérica				Sunmaid			
25	26	25	28	25	29	24	24
26	28	28	27	28	24	28	22
26	27	24	25	25	28	30	27
26	26			28	24		

a. ¿Cuáles son la media y desviación estándar para la marca genérica?

b. ¿Cuáles son la media y desviación estándar para la marca Sunmaid?

c. Compare los centros y variabilidades de las dos marcas usando los resultados de los incisos a) y b).

2.55 Pasas, continúa Consulte el ejercicio 2.54.

a. Encuentre la mediana, los cuartiles superior e inferior y el IQR para cada uno de los dos conjuntos de datos.

b. Construya dos gráficas de caja en la misma escala horizontal para comparar los dos conjuntos de datos.

c. Trace dos gráficas de tallo y hoja para describir las formas de los dos conjuntos de datos. ¿Las gráficas de caja del inciso b) verifican estos resultados?

d. Si podemos suponer que ninguna de las cajas de pasas no se llena bien (es decir, todas pesan aproximadamente 1/2 onza), ¿qué dicen los resultados de usted acerca del número promedio de pasas para las dos marcas?

MIS DATOS EX0256

2.56 Televidentes El número de horas de televisión vistas por familia, así como las horas de mayor audiencia, son dos factores que afectan el ingreso por publicidad en televisión. Una muestra aleatoria de 25 familias en una zona particular produjo las siguientes estimaciones de horas vistas por familia:

3.0	6.0	7.5	15.0	12.0
6.5	8.0	4.0	5.5	6.0
5.0	12.0	1.0	3.5	3.0
7.5	5.0	10.0	8.0	3.5
9.0	2.0	6.5	1.0	5.0

a. Busque en los datos y use el rango para hallar un valor aproximado de s. Use este valor para verificar sus cálculos del inciso b).

b. Calcule la media muestral $\bar{x}$ y la desviación estándar de la muestra s. Compare s con el valor aproximado obtenido en el inciso a).

c. Encuentre el porcentaje de las horas de televisión vistas por familia, que caiga en el intervalo $\bar{x} \pm 2s$. Compare con el correspondiente porcentaje dado por la Regla empírica.

2.57 Una enfermedad recurrente Consulte el ejercicio 1.26 y el conjunto de datos EX0126. Los tiempos (en meses) entre el comienzo de una enfermedad particular y su recurrencia se registraron:

2.1	4.4	2.7	32.3	9.9
9.0	2.0	6.6	3.9	1.6
14.7	9.6	16.7	7.4	8.2
19.2	6.9	4.3	3.3	1.2
4.1	18.4	.2	6.1	13.5
7.4	.2	8.3	.3	1.3
14.1	1.0	2.4	2.4	18.0
8.7	24.0	1.4	8.2	5.8
1.6	3.5	11.4	18.0	26.7
3.7	12.6	23.1	5.6	.4

a. Encuentre el rango.

b. Use la aproximación del rango para hallar un valor aproximado de s.

c. Calcule s para los datos y compárela con su aproximación del inciso b).

2.58 Una enfermedad recurrente, continúa Consulte el ejercicio 2.57.

a. Examine los datos y cuente el número de observaciones que caen en los intervalos $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$.

b. ¿Los porcentajes que caen en estos intervalos concuerdan con el teorema de Chebyshev? ¿Y con la Regla empírica?

c. ¿Por qué la Regla empírica podría no ser apropiada para describir estos datos?

2.59 Una enfermedad recurrente, otra vez Encuentre la mediana, así como los cuartiles inferior y superior, para los datos sobre tiempos hasta una recurrencia de una enfermedad del ejercicio 2.57. Utilice estas medidas descriptivas para construir una gráfica de caja para los datos. Use la gráfica de caja para describir la distribución de datos.

2.60 Atunes, otra vez Consulte el ejercicio 2.8. A continuación se reproducen aquí los precios de una lata de 6 onzas o una bolsa de 7.06 onzas, para 14 marcas diferentes de atún claro empacado en agua, con base en precios pagados nacionalmente en supermercados.[4]

.99	1.92	1.23	.85	.65	.53	1.41
1.12	.63	.67	.69	.60	.60	.66

a. Calcule el resumen de cinco números.

b. Construya una gráfica de caja para los datos. ¿Hay algún resultado atípico?

c. El valor $x = 1.92$ se ve grande en comparación con los otros precios. Use un puntaje z para determinar si ésta es una marca inusualmente costosa de atún.

2.61 Electrólisis Un químico analítico desea usar electrólisis para determinar el número de moles de iones de cobre en un volumen determinado de solución. La solución se dividió en $n = 30$ partes de .2 mililitros cada una y se probó cada una de las partes. Se encontró que el número promedio de moles de iones de cobre para las $n = 30$ partes fue de .17 moles; la desviación estándar fue de .01 mol.

a. Describa la distribución de las mediciones para las $n = 30$ partes de la solución usando el teorema de Chebyshev.

b. Describa la distribución de las mediciones para las $n = 30$ partes de la solución usando la Regla empírica. (¿Espera usted que la Regla empírica sea apropiada para describir estos datos?)

c. Suponga que el químico había empleado sólo $n = 4$ partes de la solución para el experimento y obtuvo las lecturas .15, .19, .17 y .15. ¿La Regla empírica sería apropiada para describir las $n = 4$ mediciones? ¿Por qué?

2.62 Cloroformo De acuerdo con la EPA, el cloroformo, que en su estado gaseoso es sospechoso de ser un agente cancerígeno, está presente en pequeñas cantidades en todas las 240 mil fuentes públicas de agua del país. Si la media y desviación estándar de las cantidades de cloroformo presentes en las fuentes de agua son 34 y 53 microgramos por litro, respectivamente, describa la distribución para la población de todas las fuentes públicas de agua.

2.63 Exámenes de aptitud En contraste con exámenes de aptitud, que son medidas predictivas de lo que se puede lograr con capacitación, los exámenes de conocimientos indican lo que una persona puede hacer en el momento del examen. Se encontró que las calificaciones de un examen de conocimientos matemáticos para 400 estudiantes tenía una media y varianza igual a 600 y 4900, respectivamente. Si la distribución de calificaciones del examen era en forma de montículo, ¿más o menos cuántas de las calificaciones caerían en el intervalo de 530 a 670? ¿Aproximadamente cuántas calificaciones se esperaría caigan en el intervalo de 460 a 740?

2.64 Sueño y el estudiante universitario ¿Cuánto tiempo duerme en una noche típica en la escuela? A un grupo de 10 estudiantes universitarios se le pidió informaran del número de horas que durmió en la noche previa, con los siguientes resultados:

7, 6, 7.25, 7, 8.5, 5, 8, 7, 6.75, 6

a. Encuentre la media y la desviación estándar del número de horas de sueño para estos 10 estudiantes.

b. Calcule el puntaje z para el máximo valor ($x = 8.5$). ¿Es éste un estudiante universitario que duerme más de lo normal?

c. ¿Cuál es la medición de la que se informa con más frecuencia? ¿Cuál es el nombre de esta medida de centro?

d. Construya una gráfica de caja para los datos. ¿La gráfica confirma sus resultados del inciso b)? [SUGERENCIA: Como el puntaje z y la gráfica de caja son dos métodos no relacionados para detectar resultados atípicos y usan diferentes tipos de estadísticas, no necesariamente tienen que producir (pero por lo común producen) los mismos resultados.]

MIS DATOS EX0265

2.65 Rendimiento en millas A continuación se muestran las millas por galón (mpg), para cada uno de los 20 autos de tamaño medio seleccionados de una línea de producción durante el mes de marzo.

23.1	21.3	23.6	23.7
20.2	24.4	25.3	27.0
24.7	22.7	26.2	23.2
25.9	24.7	24.4	24.2
24.9	22.2	22.9	24.6

a. ¿Cuáles son el máximo y mínimo de millas por galón? ¿Cuál es la autonomía de recorrido?

b. Construya un histograma de frecuencia relativa para estos datos. ¿Cómo describiría usted la forma de la distribución?

c. Encuentre la media y la desviación estándar.

d. Ordene los datos de menor a mayor. Encuentre los puntajes z para las observaciones máxima y mínima. ¿Los consideraría usted como resultados atípicos? ¿Por qué sí o por qué no?

e. ¿Qué es una mediana?

f. Encuentre los cuartiles inferior y superior.

2.66 Rendimiento en millas, continúa Consulte el ejercicio 2.65. Construya una gráfica de caja para los datos. ¿Hay algún resultado atípico? ¿Esta conclusión concuerda con sus resultados del ejercicio 2.65?

2.67 Agua de mar contaminada La contaminación causada por petróleo en mares y océanos estimula el crecimiento de algunos tipos de bacterias. Una cantidad de microorganismos que se originan en el petróleo (bacterias por 100 mililitros) en 10 partes de agua de mar dieron estas lecturas:

49, 70, 54, 67, 59, 40, 61, 69, 71, 52

a. Calcule el valor de s usando la aproximación de rango.

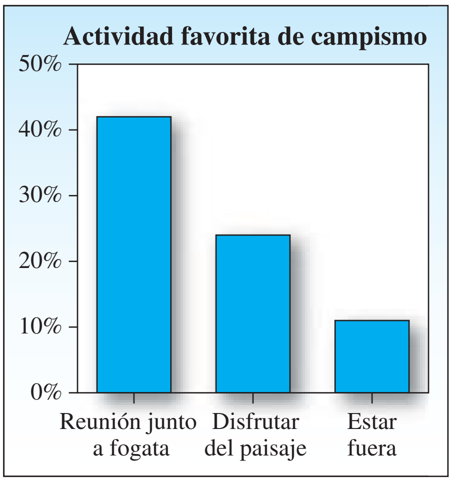
b. Calcule $\bar{x}$ y s y compare con la aproximación de rango de el inciso a).

c. Construya una gráfica de caja para los datos y úsela para describir la distribución de datos.

2.68 Baloncesto Se registraron los espectadores a juegos de baloncesto de una secundaria y se encontró que tienen una media muestral y varianza de 420 y 25, respectivamente. Calcule $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ y $\bar{x} \pm 3s$ y luego exprese las fracciones aproximadas de mediciones que usted esperaría caen en estos intervalos, de acuerdo con la Regla empírica.

2.69 Exámenes de aptitud escolar Los exámenes verbales y de aptitud escolar de matemáticas de un Consejo Universitario se califican en una escala de 200 a 800. Aun cuando los exámenes estuvieron diseñados originalmente para producir calificaciones medias de alrededor de 500, las calificaciones medias verbales y de matemáticas en años recientes han sido de sólo 463 y 493, respectivamente, y tienen tendencia hacia abajo. Parece razonable suponer que una distribución de todas las calificaciones de examen, ya sea verbal o de matemáticas, tiene forma de montículo. Si σ es la desviación estándar de una de estas distribuciones, ¿cuál es el valor máximo (aproximadamente) que pudiera tomar σ? Explique.

2.70 Campismo en verano Un pasatiempo favorito en verano para muchos estadounidenses es el campismo. De hecho, esta actividad se ha hecho tan popular en las playas de California que las reservaciones tienen que hacerse con meses de anticipación. A continuación aparecen datos de un *USA Today* Snapshot.[13]



El Snapshot (Instantáneas) también informa que los hombres van de excursión 2.9 veces al año, las mujeres 1.7 veces al año y que es más probable que los hombres quieran ir de excursión más que las mujeres. ¿Qué quiere decir la revista cuando hablan de alrededor de 2.9 o 1.7 veces al año?

2.71 Rosas de tallo largo Una variedad de rosas de tallo largo tiene una distribución normal aproximada, con una longitud media de tallo de 15 pulgadas y desviación estándar de 2.5 pulgadas.

a. Si uno acepta como "rosas de tallo largo" sólo las rosas con una longitud de tallo mayor a 12.5 pulgadas, ¿qué porcentaje de esas rosas sería inaceptable?

b. ¿Qué porcentaje de esas rosas tendría una longitud de tallo entre 12.5 y 20 pulgadas?

MIS DATOS EX0272 **2.72 Medicina para hipertensión** Una compañía farmacéutica desea saber si un medicamento experimental que se está probando en laboratorios tiene algún efecto en la presión sanguínea sistólica. A 15 personas seleccionadas al azar se les dio el medicamento y se registraron sus presiones sanguíneas sistólicas (en milímetros).

172	148	123
140	108	152
123	129	133
130	137	128
115	161	142

a. Calcule el valor de s usando la aproximación de rango.

b. Calcule $\bar{x}$ y s para las 15 presiones sanguíneas.

c. Encuentre dos valores, a y b, tales que al menos 75% de las mediciones caen entre a y b.

2.73 Derechos madereros A una compañía interesada en derechos madereros, para cierto terreno de pinos ayucahuites, se le indica que el diámetro medio de estos árboles es de 14 pulgadas con una desviación estándar de 2.8 pulgadas. Suponga que la distribución de diámetros tiene forma aproximada de montículo.

a. ¿Qué fracción de los árboles tendrá diámetros entre 8.4 y 22.4 pulgadas?

b. ¿Qué fracción de los árboles tendrá diámetros mayores a 16.8 pulgadas?

MIS DATOS EX0274 **2.74 Ambivalencia social** Los siguientes datos representan las puntuaciones de ambivalencia social para 15 personas, medidas por un examen psicológico. (Cuanta más alta la calificación, más fuerte es la ambivalencia.)

9	13	12
14	15	11
10	4	10
8	19	13
11	17	9

a. Calcule el valor de s usando la aproximación de rango.

b. Calcule $\bar{x}$ y s para las 15 calificaciones de ambivalencia social.

c. ¿Qué fracción de las calificaciones en realidad están en el intervalo $\bar{x} \pm 2s$?

2.75 Comerciales en TV La duración media de anuncios comerciales en televisión en una red televisiva determinada es de 75 segundos, con una desviación estándar de 20 segundos. Suponga que las duraciones están distribuidas normalmente en forma aproximada.

a. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que un comercial dure menos de 35 segundos?

b. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que un comercial dure más de 55 segundos?

2.76 Parásitos en zorros Una muestra aleatoria de 100 zorros fue examinada por un equipo de veterinarios para determinar la prevalencia de un tipo particular de parásito. Contando el número de parásitos por zorro, los veterinarios encontraron que 69 zorros no tenían parásitos, 17 tenían un parásito, y así sucesivamente. A continuación tenemos una tabulación de frecuencia de los datos:

Número de parásitos, x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de zorros, f	69	17	6	3	1	2	1	0	1

a. Construya un histograma de frecuencia relativa para x, el número de parásitos por zorro.

b. Calcule $\bar{x}$ y s para la muestra.

c. ¿Qué fracción de las cuentas de parásitos cae dentro de dos desviaciones estándar de la media? ¿Dentro de tres desviaciones estándar? ¿Estos resultados concuerdan con el teorema de Chebyshev? ¿Y con la Regla empírica?

2.77 Profesores universitarios Considere una población formada por el número de profesores por colegio en pequeños colegios de dos años. Suponga que el número de profesores por colegio tiene un promedio $\mu = 175$ y una desviación estándar $\sigma = 15$.

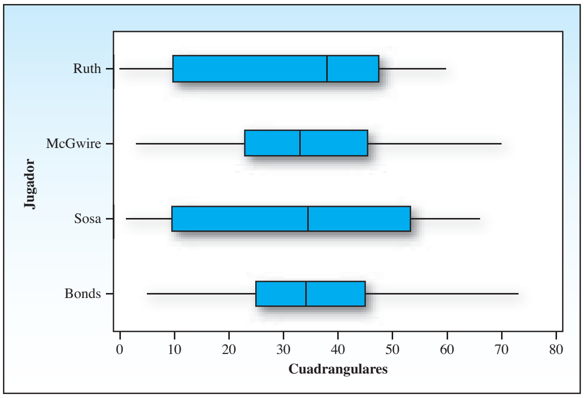
a. Use el teorema de Chebyshev para hacer un enunciado acerca del porcentaje de colegios que tienen entre 145 y 205 profesores.

b. Suponga que la población está normalmente distribuida. ¿Qué fracción de colegios tiene más de 190 profesores?

MIS DATOS EX0278 **2.78 ¿Es precisa?** De los datos siguientes, un estudiante calculó que s es .263. ¿En qué situación podríamos dudar de su precisión? ¿Cuál es el valor correcto (al centésimo más cercano)?

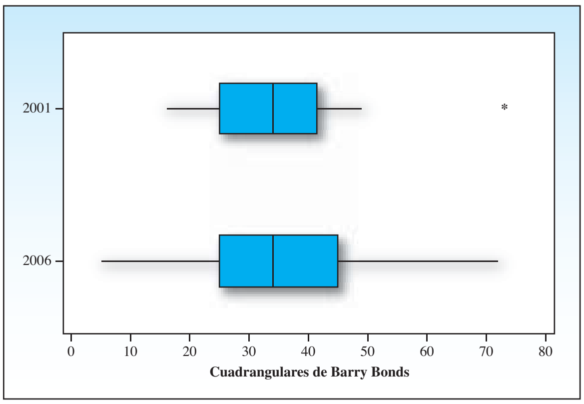
17.2	17.1	17.0	17.1	16.9	17.0	17.1	17.0	17.3	17.2
17.1	17.0	17.1	16.9	17.0	17.1	17.3	17.2	17.4	17.1

MIS DATOS EX0279 **2.79 Reyes de cuadrangulares** En el verano de 2001, Barry Bonds empezó su búsqueda del récord de Mark McGwire de 70 cuadrangulares conectados en una sola temporada. Al terminar la temporada de béisbol de 2003 de las ligas mayores, se registró el número de cuadrangulares conectados por temporada por cada uno de cuatro superestrellas de ligas mayores en su carrera y a continuación se presentan en las gráficas de caja:[14]



Escriba un párrafo corto que compare los modelos de bateo de cuadrangulares de estos cuatro jugadores.

MIS DATOS EX0280 **2.80 Barry Bonds** En las temporadas que siguieron a la de 2001 en la que implantó récord, Barry Bonds conectó 46, 45, 45, 5 y 26 cuadrangulares, respectivamente (www.espn.com).[14] A continuación aparecen dos gráficas de caja, una de los cuadrangulares de Bond en 2001 y una segunda que incluía los años 2002-2006.



Las estadísticas empleadas para construir estas gráficas de caja se dan en la tabla.

Años	Min	Q_1	Mediana	Q_3	IQR	Max	n
2001	16	25.00	34.00	41.50	16.5	73	16
2006	5	25.00	34.00	45.00	20.0	73	21

a. Calcule los límites superiores para estas dos gráficas de caja.

b. ¿Puede usted explicar por qué el número récord de cuadrangulares es un resultado atípico en la gráfica de caja de 2001, pero no en la gráfica de caja de 2006?

2.81 Edades de monedas de un centavo
A continuación aparecen edades de 50 monedas de un centavo del ejercicio 1.45 y el conjunto de datos EX0145. Los datos se han ordenado de menor a mayor.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
2	3	3	3	4	4	5	5	5	5
6	8	9	9	10	16	17	17	19	19
19	20	20	21	22	23	25	25	28	36

a. ¿Cuál es la edad promedio de los centavos?
b. ¿Cuál es la edad mediana de los centavos?
c. Con base en los resultados de los incisos a) y b), ¿cómo describiría usted la distribución de edades de estas 50 monedas de un centavo?
d. Construya una gráfica de caja para el conjunto de datos. ¿Hay algún resultado atípico? ¿La gráfica de caja confirma su descripción de la forma de la distribución?

2.82 Instantáneas A continuación aparecen unos cuantos datos publicados como Snapshots (Instantáneas) en *USA Today*.

a. La mediana del pago por hora para vendedores en la industria de materiales de construcción es $10.41.[15]
b. 69% de trabajadores estadounidenses de 16 años o mayores trabajan al menos 40 horas por semana.[16]
c. 75% de todos los profesores auxiliares en Estados Unidos ganan $91,823 o menos.[17]
d. Identifique la variable x que se mide, y cualesquier percentiles que pueda usted determinar de esta información.

MIS DATOS EX0283

2.83 Patrones de respiración Psicólogos investigadores están interesados en averiguar si los patrones de respiración de una persona son afectados por un tratamiento experimental particular. Para determinar los patrones respiratorios generales de las $n = 30$ personas en el estudio, los investigadores recolectaron algunas mediciones de línea de base, es decir, el total de ventilación en litros de aire por minuto ajustados al tamaño del cuerpo, para cada persona antes del tratamiento. Los datos se muestran a continuación, junto con algunas herramientas descriptivas generadas por *MINITAB*.

5.23	4.79	5.83	5.37	4.35	5.54	6.04	5.48	6.58	4.82
5.92	5.38	6.34	5.12	5.14	4.72	5.17	4.99	4.51	5.70
4.67	5.77	5.84	6.19	5.58	5.72	5.16	5.32	4.96	5.63

Estadísticas descriptivas: litros

```
Variable    N    N*      Mean    SE Mean     StDev
Liters     30     0    5.3953     0.0997    0.5462

Minimum      Q1  Median      Q3  Variable  Maximum
 4.3500 4.9825  5.3750  5.7850  Liters      6.5800
```

Gráfica de tallo y hoja: litros

```
Stem-and-leaf of Liters  N = 30
Leaf Unit = 0.10

1    4  3
2    4  5
5    4  677
8    4  899
12   5  1111
(4)  5  2333
14   5  455
11   5  6777
7    5  889
4    6  01
2    6  3
1    6  5
```

a. Haga un resumen de las características de la distribución de datos usando la salida *MINITAB*.
b. ¿La Regla empírica da una buena descripción de la proporción de mediciones que caen dentro de dos o tres desviaciones estándar de la media? Explique.
c. ¿Qué tan grande o pequeña tiene que ser una medición de ventilación antes que sea considerada como poco común?

MIS DATOS EX0284

2.84 Ordenamiento de objetos Los datos siguientes son tiempos de respuesta en segundos para $n = 25$ estudiantes de primer año para ordenar tres objetos por tamaño.

5.2	3.8	5.7	3.9	3.7
4.2	4.1	4.3	4.7	4.3
3.1	2.5	3.0	4.4	4.8
3.6	3.9	4.8	5.3	4.2
4.7	3.3	4.2	3.8	5.4

a. Encuentre la media y la desviación estándar para estos 25 tiempos de respuesta.
b. Ordene los datos de menor a mayor.
c. Encuentre los puntajes z para los tiempos de respuesta mínimo y máximo. ¿Hay alguna razón para creer que estos tiempos son extraordinariamente grandes o pequeños? Explique.

2.85 Ordenamiento de objetos, continúa Consulte el ejercicio 2.84.

a. Encuentre el resumen de cinco números para este conjunto de datos.
b. Construya una gráfica de caja para los datos.
c. ¿Hay algunos tiempos de respuesta extraordinariamente grandes o pequeños identificados por la gráfica de caja?
d. Construya una gráfica de tallo y hoja para los tiempos de respuesta. ¿Cómo describiría usted la forma de la distribución? ¿La forma de la gráfica de caja confirma este resultado?

MI APPLET Ejercicios

2.86 Consulte el Conjunto de Datos # 1 en el applet **How Extreme Values Affect the Mean and Median. (Cómo afectan los valores extremos a la media y a la mediana)**. Este applet se carga con una gráfica de puntos para las siguientes $n = 5$ observaciones: 2, 5, 6, 9, 11.

a. ¿Cuáles son la media y la mediana para este conjunto de datos?

b. Use su mouse para cambiar el valor $x = 11$ (el punto verde movible) a $x = 13$. ¿Cuáles son la media y mediana para el nuevo conjunto de datos?

c. Use su mouse para mover el punto verde a $x = 33$. Cuando el valor máximo es sumamente grande en comparación con las otras observaciones, ¿cuál es mayor, la media o la mediana?

d. ¿Qué efecto tiene un valor extremadamente grande sobre la media? ¿Qué efecto tiene sobre la mediana?

2.87 Consulte el Conjunto de Datos #2 en el applet **How Extreme Values Affect the Mean and Median**. Este applet se carga con una gráfica de puntos para las siguientes $n = 5$ observaciones: 2, 5, 10, 11, 12.

a. Use su mouse para mover el valor $x = 12$ a la izquierda hasta que sea menor que el valor $x = 11$.

b. A medida que el valor de x se hace más pequeño, ¿qué pasa a la media muestral?

c. A medida que el valor de x se hace más pequeño, ¿en qué punto cambia finalmente el valor de la mediana?

d. Cuando usted mueva el punto verde, ¿cuáles son los posibles valores máximo y mínimo para la mediana?

2.88 Consulte el Conjunto de Datos #3 en el applet **How Extreme Values Affect the Mean and Median**. Este applet se carga con una gráfica de puntos para las siguientes $n = 5$ observaciones: 27, 28, 32, 34,37.

a. ¿Cuáles son la media y la mediana para este conjunto de datos?

b. Use su mouse para cambiar el valor $x = 27$ (el punto verde movible) a $x = 25$. ¿Cuáles son la media y mediana para el nuevo conjunto de datos?

c. Use su mouse para mover el punto verde a $x = 5$. Cuando el valor mínimo es sumamente pequeño en comparación con las otras observaciones, ¿cuál es mayor, la media o la mediana?

d. ¿En qué valor de x la media es igual a la mediana?

e. ¿Cuáles son los posibles valores mínimo y máximo para la mediana?

f. ¿Qué efecto tiene un valor extremadamente pequeño sobre la media? ¿Qué efecto tiene sobre la mediana?

2.89 Consulte el apple **Why Divide by $n - 1$ (Por qué dividir entre $n - 1$)**. El primer applet de la página selecciona al azar una muestra de $n = 3$ de una población en la que la desviación estándar es $\sigma = 29.2$.

a. Dé un clic en New Sample. Aparecerá una muestra formada de $n = 3$ observaciones. Use su calculadora para verificar los valores de la desviación estándar cuando divida entre $n - 1$ y n se muestra en el applet.

b. Dé un clic en New Sample otra vez. Calcule el promedio de las dos desviaciones estándar (dividiendo entre $n - 1$) de los incisos a) y b). Repita el proceso para las dos desviaciones estándar (dividiendo entre n). Compare sus resultados con los que se muestran en rojo en el applet.

c. Usted puede ver cómo los dos estimadores del inciso a) se comportan "a la larga" si da un clic en 10 Samples o en 100 Samples varias veces, hasta que el promedio de todas las desviaciones estándar empiece a estabilizarse. ¿Cuál de los dos métodos da una desviación estándar más cercana a $\sigma = 29.2$?

d. A la larga, ¿a qué distancia está la desviación estándar cuando divide entre n?

2.90 Consulte el applet **Why Divide by $n - 1$**. El segundo applet de la página al azar selecciona una muestra de $n = 10$ de la misma población en la que la desviación estándar es $\sigma = 29.2$.

a. Repita las instrucciones de los incisos c) y d) del ejercicio 2.89.

b. Con base en su simulación, cuando el tamaño muestral es más grande, ¿hay diferencia si usted divide entre n o $n - 1$ cuando calcule la desviación estándar muestral?

2.91 Si todavía no lo hace, use el primer applet **Building a Box Plot (Construyendo una gráfica de puntos)** para construir una gráfica de caja para los datos del ejemplo 2.14.

a. Compare la gráfica de caja terminada contra la gráfica que se muestra en la figura 2.18.

b. ¿Cómo describiría usted la forma de la distribución de datos?

c. ¿Hay algunos resultados atípicos? Si es así, ¿cuál es el valor de la observación poco común?

2.92 Use el segundo applet **Building a Box Plot (Construyendo una gráfica de puntos)** para construir una gráfica de caja para los datos del ejemplo 2.13.

a. ¿Cómo describiría usted la forma de la distribución de datos?

b. Use la gráfica de caja para aproximar los valores de la mediana, el cuartil inferior y el cuartil superior. Compare sus resultados contra los valores reales calculados en el ejemplo 2.13.

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Bateo

Los muchachos del verano

¿Cuál liga de béisbol ha tenido los mejores bateadores? Muchos de nosotros hemos oído de grandes del béisbol como Stan Musial, Hank Aaron, Roberto Clemente y Pete Rose de la Liga Nacional y de Ty Cobb, Babe Ruth, Ted Williams, Rod Carew y Wade Boggs de la Liga Americana. Pero, ¿ha oído alguna vez de Willie Keeler, quien bateó .432 para los Orioles de Baltimore o de Nap Lajoie, quien bateó .422 para los A's de Filadelfia? Los promedios de bateo para los campeones de las Ligas Nacional y Americana se dan en el sitio web del Student Companion. Los promedios de bateo para la Liga Nacional empezaron en 1876 con Roscoe Barnes, cuyo promedio de bateo fue de .403 cuando jugó con los Cachorros de Chicago.

La última entrada para la Liga Nacional es para el año 2006, cuando Freddy Sánchez de los Piratas de Pittsburgh promedió .344. Los récords de la Liga Americana empezaron en 1901 con Nap Lajoie de los A's de Filadelfia, quien bateó .422 y terminan en 2006 con Joe Mauer de los Mellizos de Minnesota, quien bateó .347.[18] ¿Cómo podemos resumir la información de este conjunto de datos?

1. Use el *MINITAB* u otro paquete de software de estadística para describir los promedios de bateo para los campeones bateadores de la Liga Americana y la Nacional. Genere cualesquiera gráficas que puedan ayudarle a interpretar estos conjuntos de datos.
2. ¿Una liga parece tener un porcentaje más alto de hits que la otra? ¿Los promedios de bateo de una liga parecen ser más variables que la otra?
3. ¿Hay algunos resultados atípicos en cualquiera de las dos ligas?
4. Resuma su comparación de las dos ligas de béisbol.

3

Descripción de datos bivariados

© Markstahl/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

A veces los datos que son recolectados están formados por observaciones para dos variables en la misma unidad experimental. Técnicas especiales que se pueden emplear al describir estas variables ayudarán al usuario a identificar posibles relaciones entre ellas.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo el coeficiente de correlación?
¿Cómo calculo la recta de regresión?

¿Piensa usted que sus platos están *realmente* limpios?

El precio de un aparato electrodoméstico, por ejemplo una lavadora de loza, ¿indica algo acerca de su calidad? En el estudio práctico del final de este capítulo, clasificamos 20 marcas diferentes de lavadoras de loza de acuerdo a sus precios y luego las calificamos en varias características, por ejemplo en cómo funciona la lavadora, cuánto ruido hace, su costo ya sea de gas o de electricidad, su tiempo de ciclo y su consumo de agua. Las técnicas presentadas en este capítulo ayudarán a contestar nuestra pregunta.

3.1 DATOS BIVARIADOS

Es muy frecuente que investigadores se interesen en más de sólo una variable que se pueda medir durante su investigación. Por ejemplo, una compañía aseguradora de autos podría estar interesada en el número de vehículos propiedad de un tenedor de pólizas, así como en el número de quienes conducen un vehículo en la familia. Un economista podría necesitar medir la cantidad gastada por semana en comestibles en una familia, y también el número de personas de esa familia. Un agente de ventas de bienes raíces podría medir el precio de venta de una propiedad residencial y la superficie en pies cuadrados de la sala.

MI CONSEJO

"**Bi**" quiere decir "dos". Los datos **bi**variados generan pares de mediciones.

Cuando dos variables se miden en una sola unidad experimental, los datos resultantes se denominan **datos bivariados**. ¿Cómo se deben presentar estos datos? No sólo son importantes ambas variables cuando se estudian por separado, sino que el experimentador también puede explorar la *relación entre las dos variables.* Los métodos para graficar datos bivariados, ya sean cualitativos o cuantitativos, permiten estudiar las dos variables juntas. Al igual que con *datos univariados*, se usan diferentes gráficas según el tipo de variables que se midan.

3.2 GRÁFICAS PARA VARIABLES CUALITATIVAS

Cuando al menos una de las dos variables es *cualitativa*, se pueden usar gráficas de pastel, ya sean sencillas o más elaboradas, gráficas de líneas y gráficas de barras para presentar y describir los datos. A veces habrá una variable cualitativa y una cuantitativa que se han medido en dos diferentes poblaciones o grupos. En este caso, se pueden usar dos **gráficas de pastel lado a lado** o una gráfica de barras en la que las barras para las dos poblaciones se colocan una al lado de la otra. Otra opción es usar una **gráfica de barras apiladas**, en la que las barras para cada categoría se ponen una sobre la otra.

EJEMPLO 3.1

¿A los profesores de universidades privadas se les paga más que a los de universidades públicas? Los datos de la tabla 3.1 fueron recolectados de una muestra de 400 profesores universitarios cuyo rango, tipo de universidad y salario se registraron.[1] El número en cada celda es el salario promedio (en miles de dólares) para todos los profesores que cayeron en esa categoría. Use una gráfica para contestar la pregunta planteada para esta muestra.

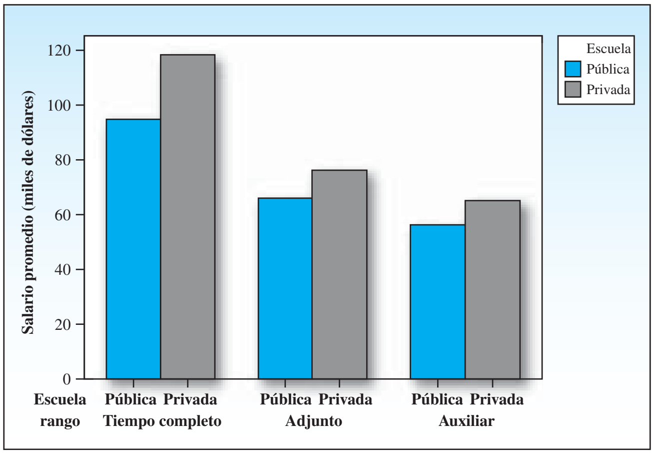
TABLA 3.1 **Salarios de profesores por rango y tipo de universidad**

	De tiempo completo	Profesor adjunto	Profesor auxiliar
Pública	94.8	65.9	56.4
Privada	118.1	76.0	65.1

Fuente: Digest of Educational Statistics

Solución Para presentar los salarios promedio de estos 400 profesores, usted puede usar una gráfica de barras lado a lado, como se muestra en la figura 3.1. La altura de las barras es el salario promedio, donde cada par de barras a lo largo del eje horizontal representa un rango profesional diferente. Los salarios son considerablemente más altos para profesores de tiempo completo en universidades privadas, pero hay menos diferencias sorprendentes en los dos rangos inferiores.

FIGURA 3.1
Gráficas de barras comparativas para el ejemplo 3.1



EJEMPLO 3.2

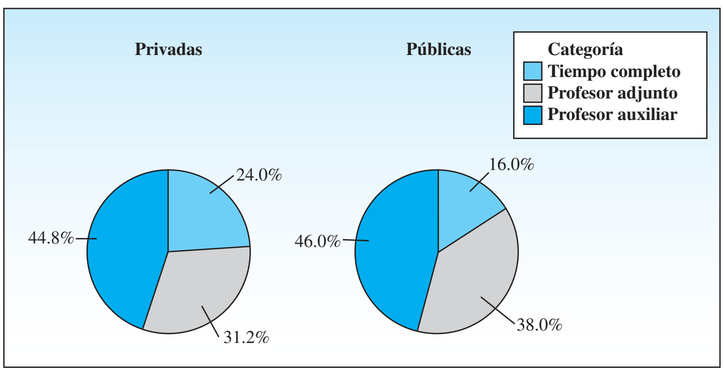
Junto con los salarios para los 400 profesores universitarios del ejemplo 3.1, el investigador registró dos variables cualitativas para cada profesor: rango y tipo de universidad. La tabla 3.2 muestra el número de profesores en cada una de las $2 \times 3 = 6$ categorías. Use gráficas comparativas para describir los datos. ¿Las universidades privadas emplean tantos profesores de alto rango como las públicas?

TABLA 3.2 **Número de profesores por rango y tipo de universidad**

	De tiempo completo	Profesor adjunto	Profesor auxiliar	Total
Pública	24	57	69	150
Privada	60	78	112	250

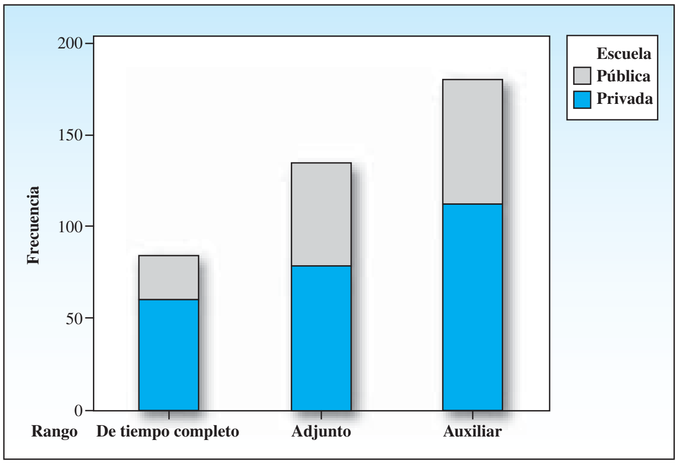
Solución Los números de la tabla no son mediciones cuantitativas en una sola unidad experimental (el profesor). Son *frecuencias*, o cantidades, del número de profesores que caen en cada categoría. Para comparar los números de profesores en universidades públicas y privadas, es necesario trazar gráficas de pastel y mostrarlas una junto a la otra, como en la figura 3.2.

FIGURA 3.2
Gráficas de pastel comparativas para el ejemplo 3.2



De manera opcional, se puede trazar ya sea una gráfica de barras apiladas o lado a lado. La gráfica de barras apiladas se muestra en la figura 3.3.

FIGURA 3.3
Gráfica de barras apiladas para el ejemplo 3.2



Aun cuando las gráficas no son muy diferentes, se puede ver que las universidades públicas tienen menos profesores de tiempo completo y más profesores adjuntos que las privadas. La razón para estas diferencias no es clara, pero se puede especular que las universidades privadas, con sus salarios más altos, pueden atraer más profesores de tiempo completo. O quizá las universidades públicas no estén dispuestas a promover profesores a las filas de paga más alta. En cualquier caso, las gráficas dan un medio para comparar los dos conjuntos de datos.

Usted también puede comparar las distribuciones para universidades públicas contra las privadas al crear *distribuciones condicionales de datos.* Estas distribuciones condicionales se muestran en la tabla 3.3. Una distribución muestra la proporción de profesores en cada uno de los tres rangos bajo la *condición* de que la universidad es pública, y la otra muestra las proporciones bajo la *condición* de que la universidad es privada. Estas *frecuencias relativas* son más fáciles de comparar que las *frecuencias reales* y llevan a las mismas conclusiones:

- La proporción de profesores auxiliares es casi la misma para universidades públicas y privadas.
- Las universidades públicas tienen una menor proporción de profesores de tiempo completo y una mayor de profesores adjuntos.

TABLA 3.3 **Proporciones de profesores por rango para universidades públicas y privadas**

	De tiempo completo	Adjunto	Auxiliar	Total
Pública	$\frac{24}{150} = .16$	$\frac{57}{150} = .38$	$\frac{69}{150} = .46$	1.00
Privada	$\frac{60}{250} = .24$	$\frac{78}{250} = .31$	$\frac{112}{250} = .45$	1.00

3.2 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

3.1 Diferencias de género Los hombres y mujeres que contestaron un cuestionario acerca de las diferencias de género están clasificados en tres grupos, según sus respuestas a la primera pregunta:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Hombres	37	49	72
Mujeres	7	50	31

a. Genere gráficas de pastel juntas para describir estos datos.
b. Genere una gráfica de barras lado a lado para describir estos datos.
c. Trace una gráfica de barras apiladas para describir estos datos.
d. ¿Cuál de las tres gráficas describe mejor la diferencia o similitud de las respuestas de hombres y mujeres?

3.2 Estado por estado Un grupo de artículos está clasificado de acuerdo con cierto atributo —X, Y, Z— y de acuerdo al estado en el que se producen:

	X	Y	Z
Nueva York	20	5	5
California	10	10	5

a. Genere una gráfica de barras comparativa (una al lado de la otra) para comparar los números de artículos de cada tipo hechos en California y Nueva York.
b. Genere una gráfica de barras apiladas para comparar los números de artículos de cada tipo hechos en los dos estados.
c. ¿Cuál de los dos tipos de presentación en los incisos a) y b) se entiende con más facilidad? Explique.
d. ¿Qué otros métodos gráficos podrían usarse para describir los datos?

3.3 Gasto de consumidores La tabla siguiente muestra las cantidades promedio gastadas por semana por hombres y mujeres en cada una de cuatro categorías de gasto:

	A	B	C	D
Hombres	\$54	\$27	\$105	\$22
Mujeres	21	85	100	75

a. ¿Cuáles posibles métodos gráficos podrían usarse para comparar los patrones de gasto de mujeres y hombres?
b. Escoja dos métodos diferentes de graficar y muestre los datos en forma gráfica.
c. ¿Qué se puede decir acerca de las similitudes o diferencias en los patrones de gasto para hombres y mujeres?
d. ¿Cuál de los dos métodos empleados en el inciso b) da una mejor gráfica descriptiva?

APLICACIONES

3.4 M&M'S Las distribuciones de colores para dos bolsas de dulces M&M'S®, una sencilla y otra de cacahuates, se muestran en la tabla siguiente. Escoja un método gráfico apropiado y compare las distribuciones.

	Café	Amarillo	Rojo	Anaranjado	Verde	Azul
Sencillo	15	14	12	4	5	6
Cacahuate	6	2	2	3	3	5

3.5 ¿Cuánto tiempo libre? Cuando usted estaba en crecimiento, ¿sentía que no tenía suficiente tiempo libre? Padres e hijos tienen opiniones diferentes sobre este tema. Un grupo de investigación realizó una encuesta a 198 padres y 200 niños y registró sus respuestas a la pregunta "¿Cuánto tiempo libre tiene su hijo?" o "¿Cuánto tiempo libre tiene usted?" Las respuestas se muestran en la tabla siguiente:[2]

	Sólo el apropiado	No suficiente	Demasiado	No sabe
Padres	138	14	40	6
Hijos	130	48	16	6

a. Defina la muestra y la población de interés para los investigadores.
b. Describa las variables que hayan sido medidas en este estudio. ¿Las variables son cualitativas o cuantitativas? ¿Los datos son univariados o bivariados?
c. ¿Qué representan las entradas en las celdas?
d. Use gráficas de pastel comparativas para contrastar las respuestas de padres e hijos.
e. ¿Cuáles otras técnicas gráficas podrían usarse para describir los datos? ¿Alguna de estas técnicas sería más informativa que las gráficas de pastel construidas en el inciso d)?

MIS DATOS EX0306

3.6 Índice de precios al consumidor El precio de la vivienda en Estados Unidos ha aumentado considerablemente en la última década, como lo demuestran los índices de precios al consumidor (IPC) para vivienda y transporte. Estos IPC aparecen en la tabla siguiente para los años 1996 a los primeros cinco meses de 2007.[3]

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Vivienda	152.8	156.8	160.4	163.9	169.6	176.4
Transporte	143.0	144.3	141.6	144.4	153.3	154.3
Año	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Vivienda	180.3	184.8	189.5	195.7	203.2	207.8
Transporte	152.9	157.6	163.1	173.9	180.9	181.0

Fuente: www.bls.gov

a. Genere gráficas de barras comparativas de lado a lado para describir los IPC en el tiempo.

b. Trace dos gráficas de líneas en el mismo conjunto de ejes para describir los IPC en el tiempo.

c. ¿Qué conclusiones se pueden sacar usando las dos gráficas de los incisos a) y b)? ¿Cuál es la más eficiente?

MIS DATOS EX0307 **3.7 ¿Qué tan grande es la familia?** Una Cámara de Comercio local entrevistó a 126 familias dentro de su ciudad, registrando el tipo de residencia y el número de miembros de la familia en cada una de éstas. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

	Tipo de residencia		
Miembros en la familia	Departamento	Dúplex	Casa
1	8	10	2
2	15	4	14
3	9	5	24
4 o más	6	1	28

a. Use una gráfica de barras una al lado de la otra para comparar el número de miembros de una familia que viven en cada uno de los tres tipos de residencia.

b. Use una gráfica de barras apiladas para comparar el número de miembros de una familia que viven en cada uno de los tres tipos de residencias.

c. ¿Qué conclusiones se pueden sacar usando las gráficas de los incisos a) y b)?

MIS DATOS EX0308 **3.8 Contribuciones de caridad** Algunas organizaciones caritativas dependen del apoyo de donaciones privadas y de otras fuentes. A continuación vemos las fuentes de ingreso en un año reciente para varias organizaciones bien conocidas de Estados Unidos.[4]

	Cantidades ($ millones)		
Organización	Privada	Otra	Total
Ejército de Salvación	$1545	$1559	$3104
Asociación Cristiana de Jóvenes	773	4059	4832
Cruz Roja de Estados Unidos	557	2509	3066
Sociedad Americana de Cáncer	868	58	926
Sociedad Americana del Corazón	436	157	593
Total	**$4179**	**$8342**	**$12521**

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

a. Construya una gráfica de barras apiladas para presentar las fuentes de ingreso dadas en la tabla.

b. Construya dos gráficas comparativas de pastel para presentar las fuentes de ingreso dadas en la tabla.

c. Escriba un breve párrafo que sintetice la información que se pueda obtener al ver estas gráficas. ¿Cuál de los dos tipos de gráficas comparativas es más efectiva?

3.3 GRÁFICAS DE DISPERSIÓN PARA DOS VARIABLES CUANTITATIVAS

Cuando las dos variables que hayan de presentarse en una gráfica son *cuantitativas,* una de ellas se grafica a lo largo del eje horizontal y la otra a lo largo del eje vertical. Es frecuente que a la primera variable se le denomine x y, a la otra, y, de modo que la gráfica toma la forma de una gráfica en los ejes (x, y), que es más conocida. Cada par de valores de datos se grafica como punto en esta gráfica de dos dimensiones, llamada **gráfica de dispersión**. Es la extensión en dos dimensiones de la gráfica de puntos que usamos para graficar una variable cuantitativa en la sección 1.4.

Se puede describir la relación entre dos variables, x y y, usando los patrones que se muestran en la gráfica de dispersión.

- **¿Qué tipo de modelo se muestra?** ¿Hay una tendencia constante hacia arriba o hacia abajo que siga un modelo en línea recta? ¿Hay un modelo curvado? ¿No hay modelo en absoluto, sino sólo una dispersión aleatoria de puntos?
- **¿Qué tan fuerte es el modelo?** ¿Todos los puntos siguen exactamente el modelo, o la relación es sólo débilmente visible?
- **¿Hay algunas observaciones poco comunes?** Un resultado atípico es un punto que está lejos del conglomerado de los puntos restantes. ¿Los puntos se apiñan en grupos? Si es así, ¿hay una explicación para las agrupaciones observadas?

EJEMPLO 3.3

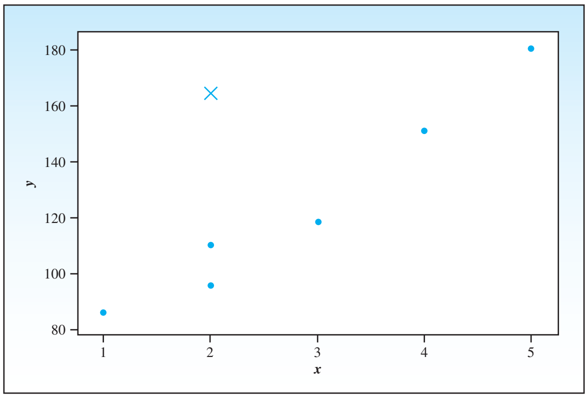
El número x de miembros de una familia, así como la cantidad y gastada por semana en comestibles, se miden para seis familias de una localidad. Trace una gráfica de dispersión de estos seis puntos de datos.

x	2	2	3	4	1	5
y	\$95.75	\$110.19	\$118.33	\$150.92	\$85.86	\$180.62

Solución Marque el eje horizontal x y el eje vertical y. Grafique los puntos usando las coordenadas (x, y) por cada uno de los seis pares. La gráfica de dispersión de la figura 3.4 muestra los seis pares marcados como puntos. Se puede ver un modelo incluso con sólo seis pares de datos. El costo semanal de alimentos aumenta con el número de miembros de la familia en una relación aparente de línea recta.

Supongamos que se encuentra que una séptima familia con dos miembros gastó \$165 en alimentos. Esta observación se muestra como una X en la figura 3.4. No se ajusta al modelo lineal de las otras seis observaciones y está clasificada como resultado atípico. Posiblemente estas dos personas ¡tuvieron una fiesta en la semana de la encuesta!

FIGURA 3.4
Diagrama de dispersión para el ejemplo 3.3



EJEMPLO 3.4

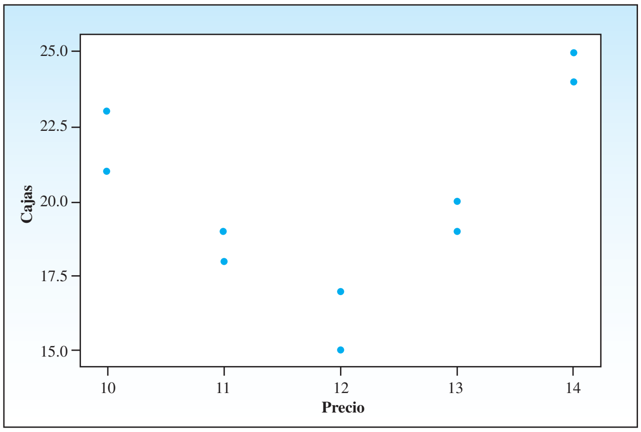
Un distribuidor de vinos de mesa realizó un estudio de la relación entre precio y demanda usando un tipo de vino que de ordinario se vende en \$10.00 por botella. Vendió este vino en 10 lugares diferentes en un periodo de 12 meses, usando cinco niveles diferentes de precio, de \$10 a \$14. Los datos se dan en la tabla 3.4. Construya una gráfica de dispersión para los datos y use la gráfica para describir la relación entre precio y demanda.

TABLA 3.4 **Cajas de vino vendidas en cinco niveles de precio**

Cajas vendidas por 10 000 habitantes	Precio por botella
23, 21	\$10
19, 18	11
15, 17	12
19, 20	13
25, 24	14

Solución Los 10 puntos de datos se grafican en la figura 3.5. Cuando el precio aumenta de \$10 a \$12, la demanda disminuye. No obstante, cuando el precio continúa aumentando, de \$12 a \$14, la demanda empieza a *aumentar*. Los datos muestran un modelo en curva, con la relación cambiando cuando cambia el precio. ¿Cómo se explica esta relación? Posiblemente, el precio aumentado es una señal de mejor calidad para el consumidor, lo cual causa el aumento en demanda una vez que el costo pase de \$12. Se podría pensar en otras razones, o quizá alguna otra variable, por ejemplo el ingreso de personas de los lugares donde se hizo la venta, que puedan causar el cambio.

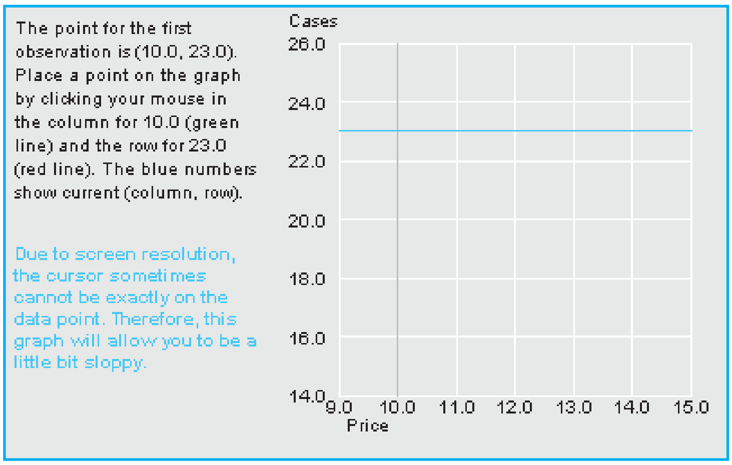
FIGURA 3.5
Gráfica de dispersión para el ejemplo 3.4



MI APPLET

Ahora es oportuno que usted trate de generar una gráfica propia. Use los applets en **Building a Scatterplot (Construyendo una gráfica de dispersión)** para crear las gráficas de dispersión que se muestran en las figuras 3.5 y 3.7. Encontrará instrucciones paso a paso en el lado izquierdo del applet (figura 3.6) y se le corregirá si comete un error.

FIGURA 3.6
Applet llamado **Building a Scatterplot**



3.4 MEDIDAS NUMÉRICAS PARA DATOS CUANTITATIVOS BIVARIADOS

Una tasa constante de aumento o disminución es quizá el modelo más común que se encuentra en gráficas de dispersión bivariadas. La gráfica de dispersión de la figura 3.4 exhibe este modelo *lineal*, es decir, una recta con los puntos de datos arriba y debajo de la recta y a no más de una distancia fija desde la recta. Cuando éste es el caso, decimos que las dos variables exhiben una *relación lineal.*

EJEMPLO 3.5

Los datos de la tabla 3.5 son la superficie del área de descanso (en pies cuadrados), x, y el precio de venta, y, de 12 residencias. La gráfica de dispersión del *MINITAB* de la figura 3.7 muestra un modelo lineal en los datos.

TABLA 3.5 **Área de descanso y precio de venta de 12 propiedades**

Residencia	x (pies cuadrados)	y (en miles)
1	1360	$278.5
2	1940	375.7
3	1750	339.5
4	1550	329.8
5	1790	295.6
6	1750	310.3
7	2230	460.5
8	1600	305.2
9	1450	288.6
10	1870	365.7
11	2210	425.3
12	1480	268.8

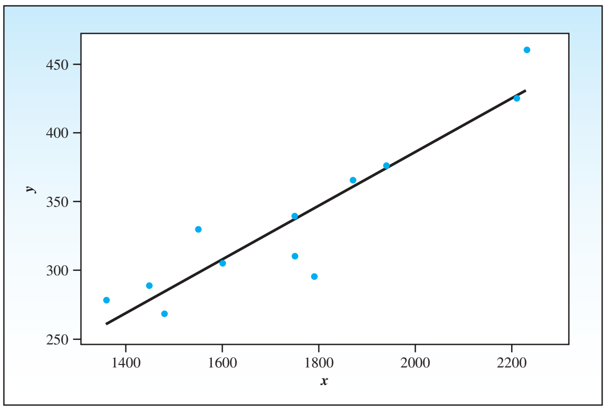


FIGURA 3.7 Gráfica de dispersión de x contra y para el ejemplo 3.5

Para los datos del ejemplo 3.5, se podría describir individualmente cada variable, x y y, usando medidas descriptivas como lo son las medias $\bar{x}$ y $\bar{y}$ o las desviaciones estándar (s_x y s_y). No obstante, estas medidas no describen la relación entre x y y para una residencia en particular, es decir, la forma en que el tamaño del espacio de descanso afecta el precio de venta de la casa. Una medida sencilla que sirve a este propósito se denomina **coeficiente de correlación**, denotado por r, y se define como

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Las cantidades s_x y s_y son las desviaciones estándar para las variables x y y, respectivamente, que usted puede hallar si usa la función de estadística de su calculadora o la fórmula computacional de la sección 2.3. La nueva cantidad s_{xy} se denomina **covarianza** entre x y y, y está definida como

$$s_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

También hay una fórmula computacional para la covarianza:

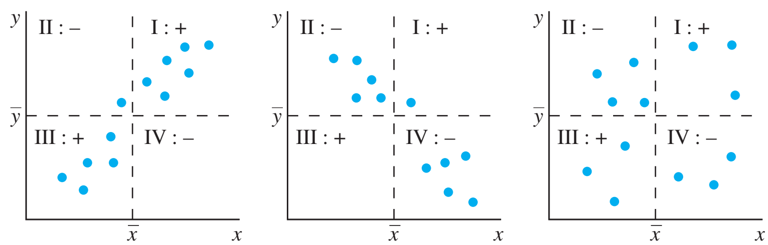
$$s_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n}}{n - 1}$$

donde $\Sigma x_i y_i$ es la suma de los productos $x_i y_i$ para cada uno de los n pares de mediciones. ¿En qué forma esta cantidad detecta y mide un modelo lineal de los datos?

Observe los signos de los productos cruz $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ del numerador de r, o sea s_{xy}. Cuando un punto de datos (x, y) se encuentre en el área I o III de la gráfica de dispersión que se muestra en la figura 3.8, el producto cruz será positivo; cuando un punto de datos esté en el área II o IV, el producto cruz será negativo. Podemos sacar estas conclusiones:

- Si casi todos los puntos están en las áreas I y III (formando un modelo positivo), s_{xy} y r serán positivos.
- Si casi todos los puntos están en las áreas II y IV (formando un modelo negativo), s_{xy} y r serán negativos.
- Si los puntos están dispersos en las cuatro áreas (*sin* formar modelo), s_{xy} y r serán cercanos a 0.

FIGURA 3.8
Los signos de los productos cruz $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ de la fórmula de covarianza.

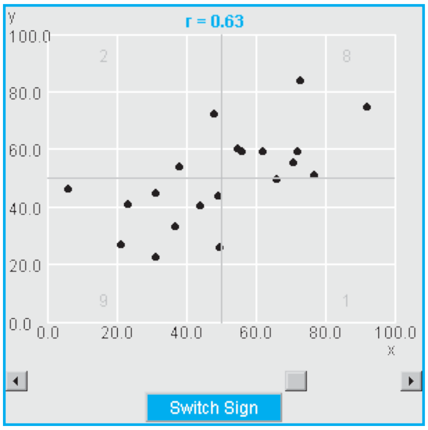


a) Modelo positivo b) Modelo negativo c) Sin modelo

MI APPLET

El applet llamado **Exploring Correlation (Exploración de correlación)** ayudará a visualizar la forma en que el modelo de puntos afecta al coeficiente de correlación. Use su mouse para mover el apuntador en la parte inferior de la gráfica de dispersión (figura 3.9). Verá que el valor de r cambia cuando cambia el modelo de los puntos. Observe que un modelo positivo a) resulta en un valor positivo de r; cuando no hay modelo c) se obtiene un valor de r cercano a cero; un modelo negativo b) resulta en un valor negativo de r. ¿Qué modelo se muestra cuando $r = 1$? ¿Y cuando $r = -1$? Usted empleará este applet otra vez para la sección de Ejercicios de MiApplet al final de este capítulo.

FIGURA 3.9
Applet llamado Exploring Correlation



MI CONSEJO

$r > 0 \Leftrightarrow$ relación *lineal* positiva

$r < 0 \Leftrightarrow$ relación *lineal* negativa

$r \approx 0 \Leftrightarrow$ no hay relación

Casi todas las calculadoras científicas y de gráficas pueden calcular el coeficiente de correlación, r, cuando los datos se introducen en la forma correcta. Verifique el manual de su computadora para la secuencia apropiada de comandos de entrada. Los programas de computadora como el *MINITAB* también están programados para realizar estos cálculos. La salida *MINITAB* de la figura 3.10 muestra la covarianza y coeficiente de correlación para x y y del ejemplo 3.5. En la tabla de covarianza, encontrará estos valores:

$$s_{xy} = 15\,545.20 \qquad s_x^2 = 79\,233.33 \qquad s_y^2 = 3571.16$$

y en la salida de correlación encontrará $r = .924$.

De cualquier modo que usted decida calcular el coeficiente de correlación, se puede demostrar que el valor de r siempre está entre -1 y 1. Cuando r es positiva, x aumenta cuando y aumenta, y viceversa. Cuando r es negativa, x disminuye cuando y aumenta, o x aumenta cuando y disminuye. Cuando r toma el valor de 1 o -1, todos los puntos están exactamente en una recta. Si $r = 0$, entonces no hay relación lineal aparente entre las dos variables. Cuanto más cercano sea el valor de r a 1 o a -1, será más fuerte la relación lineal entre las dos variables.

FIGURA 3.10
Salida del *MINITAB* de covarianza y correlación para el ejemplo 3.5

Covarianzas: x, y

```
           x         y
x   79233.33
y   15545.20   3571.16
```

Correlaciones: x, y

```
Pearson correlation of x and y = 0.924
P-Value = 0.000
```

EJEMPLO 3.6

Encuentre el coeficiente de correlación para el número de pies cuadrados de área de descanso y el precio de venta de una casa para los datos del ejemplo 3.5.

Solución Se necesita de tres cantidades para calcular el coeficiente de correlación. Las desviaciones estándar de las variables x y y se encuentran usando una calculadora con una función estadística. Se puede verificar que $s_x = 281.4842$ y $s_y = 59.7592$. Por último,

$$s_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n}}{n-1}$$

$$= \frac{7\,240\,383 - \dfrac{(20\,980)(4043.5)}{12}}{11} = 15\,545.19697$$

Esto concuerda con el valor dado en la salida *MINITAB* de la figura 3.10. Entonces

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{15\,545.19697}{(281.4842)(59.7592)} = .9241$$

que también concuerda con el valor del coeficiente de correlación dado en la figura 3.10. (Se puede verificar el valor de r usando una calculadora.) Este valor de r es bastante cercano a 1, lo cual indica que la relación lineal entre estas dos variables es muy fuerte. En el capítulo 12 se puede encontrar más información acerca del coeficiente de correlación y su papel para analizar relaciones lineales, junto con fórmulas computacionales alternativas.

MI CONSEJO

x "explica" y o y "depende de" x.

x es la variable **expli**cativa o independiente.

y es la respuesta o variable **depend**iente.

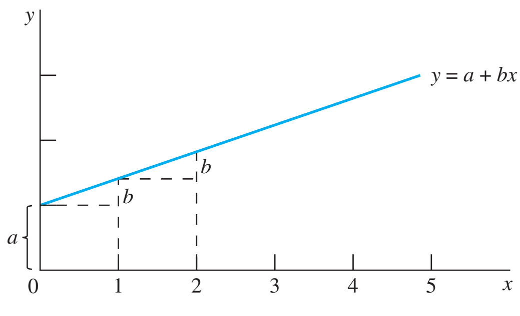
A veces las dos variables, x y y, están relacionadas de una forma particular. Puede ser que el valor de y dependa del valor de x; esto es, el valor de x en alguna forma explica el valor de y. Por ejemplo, el costo de una casa (y) puede *depender* de su superficie de piso (x); el promedio de puntos de calificación de una estudiante (x) puede *explicar* su calificación en un examen vocacional (y). En estas situaciones, y se denomina **variable dependiente**, en tanto que x es la **variable independiente**.

Si una de las dos variables se puede clasificar como la variable dependiente y y la otra como x, y si los datos exhiben un modelo de línea recta, es posible describir la relación que vincula y a x usando una línea recta dada por la ecuación

$$y = a + bx$$

como se muestra en la figura 3.11.

FIGURA 3.11
Gráfica de una recta

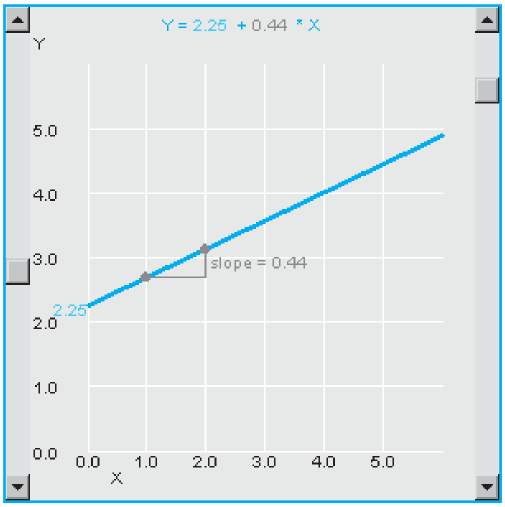


Como se puede ver, a es donde la recta cruza o interseca al eje y: a se denomina *intersección y*. También se puede ver que para todo aumento unitario en x, y aumenta en una cantidad de b. La cantidad b determina si la recta está aumentando ($b > 0$), disminuyendo ($b < 0$) o es horizontal ($b = 0$) y muy adecuadamente se denomina **pendiente** de la recta.

MI APPLET

Se puede ver el efecto de cambiar la pendiente y la intersección *y* de una recta si se usa el applet llamado **How a Line Works (cómo funciona una recta)**. Use su mouse para mover el apuntador en el lado derecho de la gráfica de dispersión. Cuando se mueva el apuntador, cambiará la pendiente de la recta que se muestra como el lado vertical del triángulo verde (gris claro en la figura 3.12). Moviendo el apuntador en el lado izquierdo del applet hace que cambie la intersección *y*, mostrada en rojo (azul en la figura 3.12). ¿Cuál es la pendiente e intersección *y* para la recta que se muestra en el applet de la figura 3.12? Usted usará este applet otra vez para la sección de Ejercicios Mi Applet del final de este capítulo.

FIGURA 3.12
Applet llamado How a Line Works



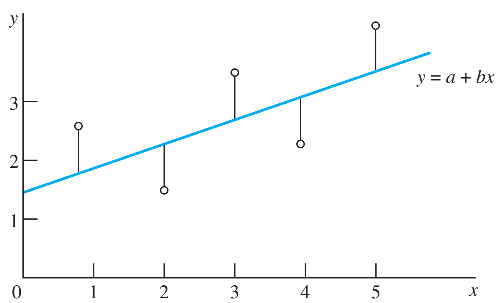
Nuestros puntos (x, y) no caen en una recta, pero muestran una tendencia que podría describirse como modelo lineal. Podemos describir esta tendencia si ajustamos una recta a los puntos en la mejor forma que podamos. Esta recta de mejor ajuste que relaciona a y con x y que se denomina **recta de regresión**, o **recta de mínimos cuadrados**, se encuentra al reducir al mínimo la suma de las diferencias cuadradas entre los puntos de datos y la recta misma, como se muestra en la figura 3.13. Las fórmulas para calcular b y a, que se derivan matemáticamente, se muestran a continuación.

FÓRMULAS COMPUTACIONALES PARA LA RECTA DE REGRESIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS

$$b = r\left(\frac{s_y}{s_x}\right) \qquad \text{y} \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

y la recta de regresión de mínimos cuadrados es: $y = a + bx$

FIGURA 3.13
Recta de mejor ajuste



MI CONSEJO

Recuerde que r y b tienen el mismo signo.

Como s_x y s_y son positivas, b y r tienen el mismo signo, de modo que:

- Cuando r es positiva, también lo es b, y la recta es creciente con x.
- Cuando r es negativa, también lo es b, y la recta es decreciente con x.
- Cuando r es cercana a 0, entonces b es cercana a 0.

EJEMPLO 3.7

Encuentre la recta de mejor ajuste que relacione y = salario inicial por hora con x = número de años de experiencia en el trabajo para los datos siguientes. Grafique la recta y los puntos de datos en la misma gráfica.

x	2	3	4	5	6	7
y	\$6.00	7.50	8.00	12.00	13.00	15.50

Solución Use el método de introducir datos en su calculadora para hallar estas estadísticas descriptivas para el conjunto de datos bivariados:

$$\bar{x} = 4.5 \qquad \bar{y} = 10.333 \qquad s_x = 1.871 \qquad s_y = 3.710 \qquad r = .980$$

MI CONSEJO

Use la recta de regresión para predecir y para un valor determinado de x.

Entonces

$$b = r\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = .980\left(\frac{3.710}{1.871}\right) = 1.9432389 \approx 1.943$$

y

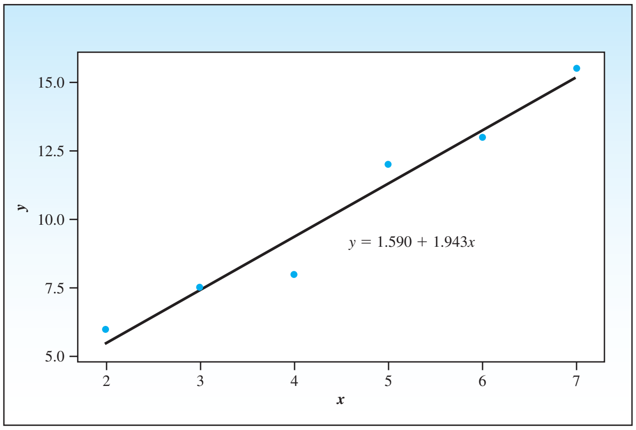
$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 10.333 - 1.943(4.5) = 1.590$$

Por lo tanto, la recta de mejor ajuste es $y = 1.590 + 1.943x$. La gráfica de la recta de regresión y los puntos reales de datos se muestran en la figura 3.14.

La recta de mejor ajuste se puede usar para estimar o predecir el valor de la variable y cuando se conoce el valor de x. Por ejemplo, si una persona que solicita un empleo tiene tres años de experiencia en el trabajo (x), ¿cuál sería el sueldo inicial por hora (y) que pronosticaría usted? De la recta de mejor ajuste de la figura 3.14, la mejor estimación sería

$$y = a + bx = 1.590 + 1.943(3) = 7.419$$

FIGURA 3.14
Recta ajustada y puntos de datos para el ejemplo 3.7



MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo el coeficiente de correlación?

1. Primero, genere una tabla o use su calculadora para hallar Σx, Σy y Σxy.
2. Calcule la covarianza, s_{xy}.
3. Use su calculadora o la fórmula computacional del capítulo 2 para calcular s_x y s_y.
4. Calcule $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$.

¿Cómo calculo la recta de regresión?

1. Primero, calcule $\bar{y}$ y $\bar{x}$. A continuación, calcule $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$.
2. Encuentre la pendiente, $b = r\left(\dfrac{s_y}{s_x}\right)$ y la intersección y, $a = \bar{y} - b\bar{x}$.
3. Escriba la recta de regresión al sustituir valores de a y b en la ecuación: $y = a + bx$.

Repertorio de ejercicios

A. A continuación aparece un conjunto sencillo de datos bivariados. Llene los espacios en blanco para hallar el coeficiente de correlación.

x	**y**	**xy**	**Calcule:**	**Covarianza**
0	1		$n =$ ____	$s_{xy} = \dfrac{\Sigma xy - \dfrac{(\Sigma x)(\Sigma x)}{n}}{n-1} =$ ______
2	5		$s_x =$ ____	
4	2		$s_y =$ ____	**Coeficiente de correlación**
$\Sigma x =$ _____	$\Sigma y =$ _____	$\Sigma xy =$ _____		$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} =$ __________

B. Use la información de la parte A y encuentre la recta de regresión.

De la parte A	**De la parte A**	**Calcule:**	**Pendiente**	**Intersección *y***
$\Sigma x =$ ____	$s_x =$ ____	$\bar{x} =$ ____	$b = r\left(\dfrac{s_y}{s_x}\right) =$ _____	
$\Sigma y =$ ____	$s_y =$ ____	$\bar{y} =$ ____		$a = \bar{y} - b\bar{x} =$ _______
	$r =$ ____		**Recta de regresión: $y =$** ____________________	

Las respuestas se encuentran al final de este libro.

¿Cuándo se debe describir la relación lineal entre x y y usando el coeficiente de correlación r, y cuándo se debe usar la recta de regresión $y = a + ab$? El método de regresión se usa cuando los valores de x se fijan por anticipado y entonces se mide el valor correspondiente de y. El método de correlación se emplea cuando se selecciona una unidad experimental al azar y luego se hacen mediciones en las variables x y y. Este punto técnico se retoma en el capítulo 12, que aborda el análisis de regresión.

La mayoría de analistas de datos inician cualquier investigación basada en datos al examinar gráficas de las variables involucradas. Si la relación entre dos variables es de interés, los analistas de datos también pueden explorar gráficas bivariadas en conjunción con medidas numéricas de ubicación, dispersión y correlación. Las gráficas y medidas descriptivas son sólo las primeras de numerosas herramientas estadísticas que usted pronto tendrá a su disposición.

3.4 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estas preguntas se refieren a la sección Mi Entrenador Personal de la página 111.

3.9 A continuación se encuentra un conjunto sencillo de datos bivariados. Llene los espacios para hallar el coeficiente de correlación.

x	y	xy	**Calcule:**	**Covarianza**
1	6		$n =$ ____	$s_{xy} = \dfrac{\Sigma xy - \dfrac{(\Sigma x)(\Sigma x)}{n}}{n-1} =$ ________
3	2		$s_x =$ ____	
2	4		$s_y =$ ____	**Coeficiente de correlación**
$\Sigma x =$ ____	$\Sigma y =$ ____	$\Sigma xy =$ ____		$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} =$ ____________

3.10 Use la información del ejercicio 3.9 y encuentre la recta de regresión.

De la parte A	**De la parte A**	**Calcule:**	**Pendiente**	**Intersección y**
$\Sigma x =$ ____	$s_x =$ ____	$\bar{x} =$ ____	$b = r\left(\dfrac{s_y}{s_x}\right) =$ ______	
$\Sigma y =$ ____	$s_y =$ ____	$\bar{y} =$ ____		$a = \bar{y} - b\bar{x} =$ ________
	$r =$ ____		**Recta de regresión: $y =$** ________________________	

TÉCNICAS BÁSICAS

MIS DATOS EX0311

3.11 Un conjunto de datos bivariados consta de estas mediciones en dos variables, x y y:

(3, 6) (5, 8) (2, 6) (1, 4) (4, 7) (4, 6)

a. Trace una gráfica de dispersión para describir los datos.

b. ¿Parece haber una relación entre x y y? Si es así, ¿cómo la describe?

c. Calcule el coeficiente de correlación, r, usando la fórmula computacional dada en esta sección.

d. Encuentre la recta de mejor ajuste usando las fórmulas computacionales. Grafique la recta en la gráfica de dispersión del inciso a). ¿La recta pasa por en medio de los puntos?

3.12 Consulte el ejercicio 3.11.

a. Use el método de introducir datos en su calculadora científica para ingresar los seis pares de mediciones. Recuerde las memorias apropiadas para hallar el coeficiente de correlación, r, la intersección y, y la pendiente, b, de la recta.

b. Verifique que la calculadora dé los mismos valores para r, a y b que en el ejercicio 3.11.

MIS DATOS EX0313

3.13 Considere este conjunto de datos bivariados:

x	1	2	3	4	5	6
y	5.6	4.6	4.5	3.7	3.2	2.7

a. Trace una gráfica de dispersión para describir los datos.

b. ¿Parece haber una relación entre x y y? Si es así, ¿cómo la describe usted?

c. Calcule el coeficiente de correlación, r. ¿El valor de r confirma las conclusiones de usted en el inciso b)? Explique.

MIS DATOS EX0314 **3.14** El valor de una variable cuantitativa se mide una vez al año durante un periodo de 10 años:

Año	Medición	Año	Medición
1	61.5	6	58.2
2	62.3	7	57.5
3	60.7	8	57.5
4	59.8	9	56.1
5	58.0	10	56.0

a. Trace una gráfica de dispersión para describir la variable cuando cambie con el tiempo.

b. Describa las mediciones usando la gráfica construida en el inciso a).

c. Use esta salida *MINITAB* para calcular el coeficiente de correlación, r.

Salida *MINITAB* para el ejercicio 3.14

Covarianzas

```
              x         y
x       9.16667
y      -6.42222   4.84933
```

d. Encuentre la recta de mejor ajuste usando los resultados del inciso c). Verifique su respuesta usando el método de entrada de datos en su calculadora.

e. Grafique la recta de mejor ajuste en su gráfica de dispersión del inciso a). Describa el ajuste de la recta.

APLICACIONES

MIS DATOS EX0315 **3.15 Costos de alimentos** Estos datos que relacionan la cantidad gastada en alimentos por semana y el número de miembros de una familia son del ejemplo 3.3:

x	2	2	3	4	1	5
y	\$95.75	\$110.19	\$118.33	\$150.92	\$85.86	\$180.62

a. Encuentre la recta de mejor ajuste para estos datos.

b. Grafique los puntos y la recta de mejor ajuste en la misma gráfica. ¿La recta resume la información de los puntos de datos?

c. ¿Qué estimaría usted que gasta por semana una familia de seis en alimentos? ¿Debe usar la recta ajustada para estimar esta cantidad? ¿Por qué sí o por qué no?

MIS DATOS EX0316 **3.16 Precios de bienes raíces** Los datos que relacionan los pies cuadrados de espacio de vivienda, así como el precio de venta de 12 propiedades residenciales del ejemplo 3.5, se reproducen a continuación. Primero, encuentre la recta de mejor ajuste que describa estos datos y luego grafique la recta y los puntos de datos en la misma gráfica. Comente sobre la bondad de la recta ajustada, describiendo el precio de venta de una propiedad residencial como una función lineal de los pies cuadrados de área de vivienda.

Residencia	x (pies^2)	y (en miles)
1	1360	\$278.5
2	1940	375.7
3	1750	339.5
4	1550	329.8
5	1790	295.6
6	1750	310.3
7	2230	460.5
8	1600	305.2
9	1450	288.6
10	1870	365.7
11	2210	425.3
12	1480	268.8

MIS DATOS EX0317 **3.17 Estudiantes incapacitados** Un programa de entrenamiento de habilidades sociales, publicado en *Psychology in the Schools,* fue puesto en práctica para siete estudiantes con males benignos, en un estudio para determinar si el programa causó mejoría en medidas previas o posteriores y en valoraciones de conducta.[5] Para un examen, éstas son las calificaciones antes y después de los exámenes para siete estudiantes:

Estudiante	Antes	Después
Earl	101	113
Ned	89	89
Jasper	112	121
Charlie	105	99
Tom	90	104
Susie	91	94
Lori	89	99

a. Trace una gráfica de dispersión que relacione la calificación después del examen con la de antes del examen.

b. Describa la relación entre calificaciones antes y después del examen, usando la gráfica del inciso a). ¿Ve usted alguna tendencia?

c. Calcule el coeficiente de correlación e interprete o describa su valor. ¿Refuerza esto alguna relación que era evidente desde la gráfica de dispersión? Explique.

MIS DATOS EX0318 **3.18 Lexus, Inc.** Los fabricantes del auto Lexus han aumentado continuamente sus ventas desde el lanzamiento que hicieron en Estados Unidos en 1989. No obstante, el porcentaje de aumento cambió en 1996 cuando Lexus introdujo una línea de camiones. Las ventas del Lexus de 1996 a 2005 se muestran en la tabla siguiente.[6]

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ventas (miles de vehículos)	80	100	155	180	210	224	234	260	288	303

Fuente: Adaptado de *Automotive News*, enero 26, 2005 y mayo 22, 2006.

a. Grafique los datos usando una gráfica de dispersión. ¿Cómo describiría usted la relación entre año y ventas del Lexus?

b. Encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados que relacione las ventas del Lexus con el año que se mide.

c. Si usted tuviera que predecir las ventas del Lexus en el año 2015, ¿qué problemas podrían surgir con su predicción?

MIS DATOS EX0319

3.19 Televisores de alta definición, otra vez En el ejercicio 2.12, *Consumer Reports* dio los precios para los principales 10 televisores de pantalla de cristal líquido y alta definición, en la categoría de 30 a 40 pulgadas. ¿El precio de un televisor de pantalla de cristal líquido depende del tamaño de ésta? La tabla siguiente muestra los 10 costos otra vez, junto con el tamaño de la pantalla.[6]

Marca	Precio	Tamaño
JVC LT-40FH96	$2900	40″
Sony Bravia KDL-V32XBR1	1800	32″
Sony Bravia KDL-V40XBR1	2600	40″
Toshiba 37HLX95	3000	37″
Sharp Aquos LC-32DA5U	1300	32″
Sony Bravia KLV-S32A10	1500	32″
Panasonic Viera TC-32LX50	1350	32″
JVC LT-37X776	2000	37″
LG 37LP1D	2200	37″
Samsung LN-R328W	1200	32″

a. ¿Cuál de las dos variables (precio y tamaño) es la variable independiente, y cuál es la variable dependiente?

b. Construya una gráfica de dispersión para los datos. ¿La relación parece lineal?

3.20 Televisores de alta definición, continúa Consulte el ejercicio 3.19. Imagine que damos por hecho que la relación entre x y y es lineal.

a. Encuentre el coeficiente de correlación, r. ¿Qué le dice este valor acerca de la fuerza y dirección de la relación entre tamaño y precio?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta de regresión empleada para predecir el precio del televisor, con base en el tamaño de la pantalla?

c. La Sony Corporation está introduciendo un nuevo televisor de 37" de pantalla de cristal líquido. ¿Cuál pronostica usted que será su precio?

d. ¿Sería razonable tratar de predecir el precio de un televisor de 45" de pantalla de cristal líquido? Explique.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos clave

I. Datos bivariados

1. Variables cualitativas y cuantitativas
2. Describir separadamente cada variable
3. Describir la relación entre las dos variables

II. Describir dos variables cualitativas

1. Gráficas de pastel una al lado de otra
2. Gráficas de líneas comparativas
3. Gráficas comparativas de barras
   a. Lado a lado
   b. Apiladas
4. Frecuencias relativas para describir la relación entre las dos variables

III. Describir dos variables cuantitativas

1. Gráficas de dispersión
   a. Modelo lineal o no lineal

b. Fuerza de relación
c. Observaciones poco comunes: conglomerados y resultados atípicos

2. Covarianza y coeficiente de correlación
3. La recta de regresión de mejor ajuste
   a. Calcular la pendiente e intersección y
   b. Graficar la recta
   c. Usar la recta para predicción

MI MINITAB

Descripción de datos bivariados

El *MINITAB* contiene diferentes técnicas gráficas para datos bivariados *cualitativos* y *cuantitativos*, así como comandos para obtener medidas descriptivas bivariadas cuando los datos son cuantitativos. Para explorar ambos tipos de procedimientos bivariados, es necesario introducir dos conjuntos diferentes de datos bivariados en una hoja de trabajo *MINITAB*. Una vez que usted tenga a la vista el escritorio de Windows, haga doble clic en el icono *MINITAB* o utilice el botón Start para iniciar el *MINITAB*.

Inicie un nuevo proyecto usando **File → New → Minitab Project**. A continuación abra el proyecto existente llamado "Chapter 1". Usaremos los datos del estudiante universitario, que debe estar en la Hoja de Trabajo (Worksheet) 1. Suponga que los 105 estudiantes ya tabulados fueran de la Universidad de California, en Riverside y que otros 100 estudiantes de una clase de introducción a la estadística en la Universidad de California, en Berkeley (UCR), también fueron entrevistados. La tabla 3.6 muestra la distribución de estatus para ambos conjuntos de estudiantes. Genere otra variable en C3 de la hoja de trabajo llamada "College" (Universidad) e introduzca la UCR para los primeros cinco renglones. A continuación introduzca los datos de la UCB en las columnas C1-C3. Puede usar los ya conocidos iconos Windows de copiar y pegar si así lo desea.

TABLA 3.6

	Primer año	Segundo año	Penúltimo año	Último año	Graduado
Frecuencia (UCR)	5	23	32	35	10
Frecuencia (UCB)	10	35	24	25	6

La otra hoja de trabajo en "Chapter 1" no es necesaria y puede ser eliminada al dar un clic en la X de la esquina superior derecha de la hoja de trabajo. *Usaremos* la hoja de trabajo llamada "Minivans" del capítulo 2, que usted debe abrir usando **File → Open Worksheet** y seleccionando "Minivans.mtw". Ahora **guarde** este nuevo **proyecto** como "Chapter 3".

Para describir gráficamente los datos de estudiantes de las UCR/UCB, usted puede usar gráficas comparativas de pastel, una para cada escuela (véase el capítulo 1). De manera opcional, puede usar ya sea gráficas de barras apiladas o de lado a lado. Use **Graph Bar Chart**. En el cuadro de diálogo "Bar Charts" (figura 3.15), seleccione **Values from a tabla** de la lista descendente y dé un clic ya sea en **Stack** o en **Cluster** en el renglón marcado "One Column of Values". Dé un clic en **OK**. En el siguiente cuadro de diálogo (figura 3.16), seleccione "Frequency" para la caja **Graph variables** y "Status" y "College" para la caja **Categorical variable for grouping**. Dé un clic en **OK**. Una vez que la gráfica de barras se exhiba (figura 3.17), puede usted dar un *clic derecho* en varios elementos de la gráfica de barras para editarlos. Si da un *clic derecho* en las barras y selecciona **Update Graph Automatically**, la gráfica de barras se actualiza en forma automática cuando usted cambie los datos de la hoja de trabajo Minitab.

FIGURA 3.15

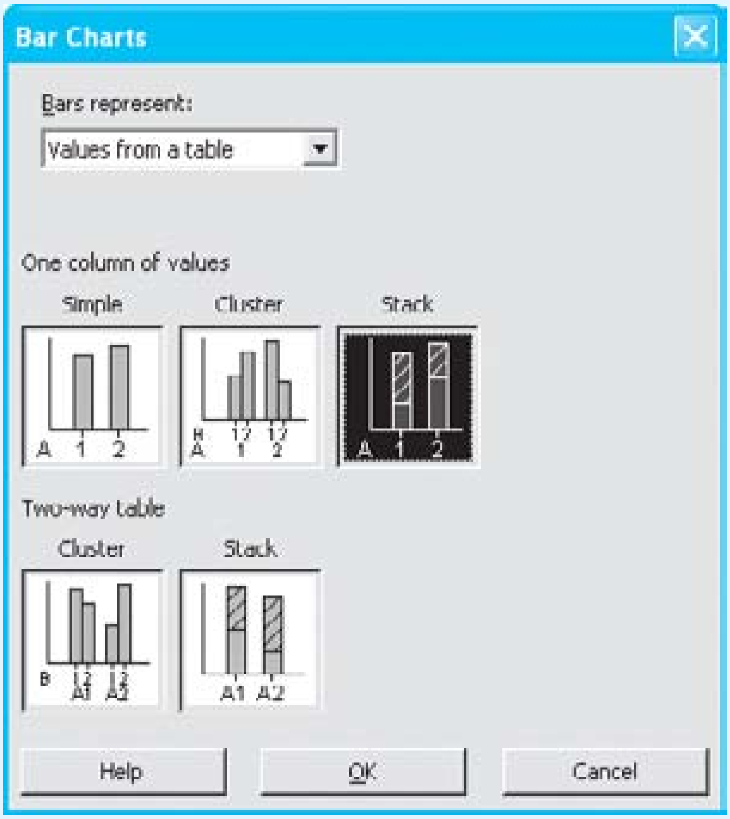


FIGURA 3.16

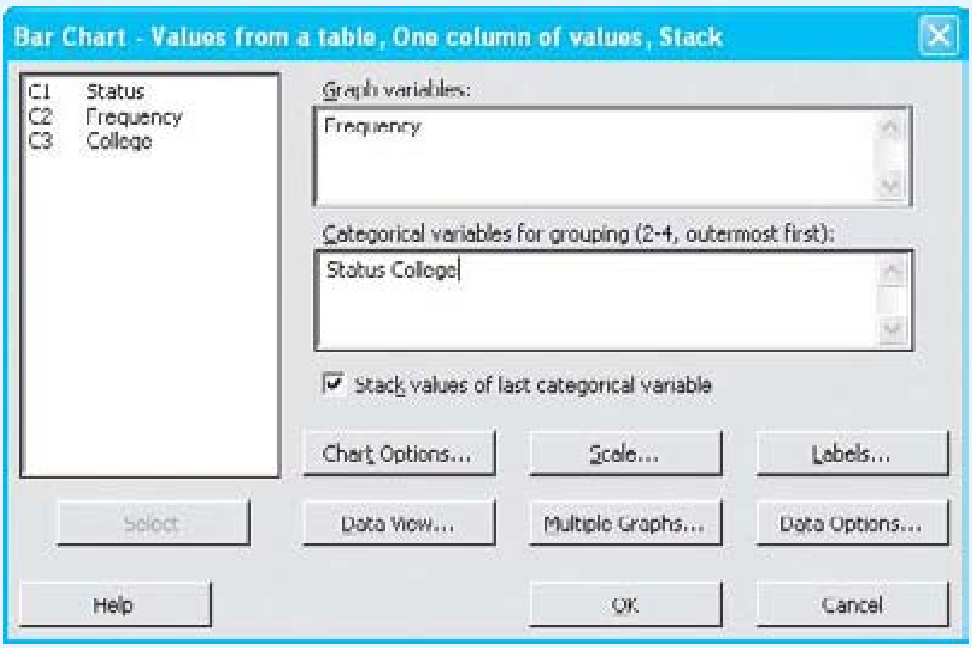
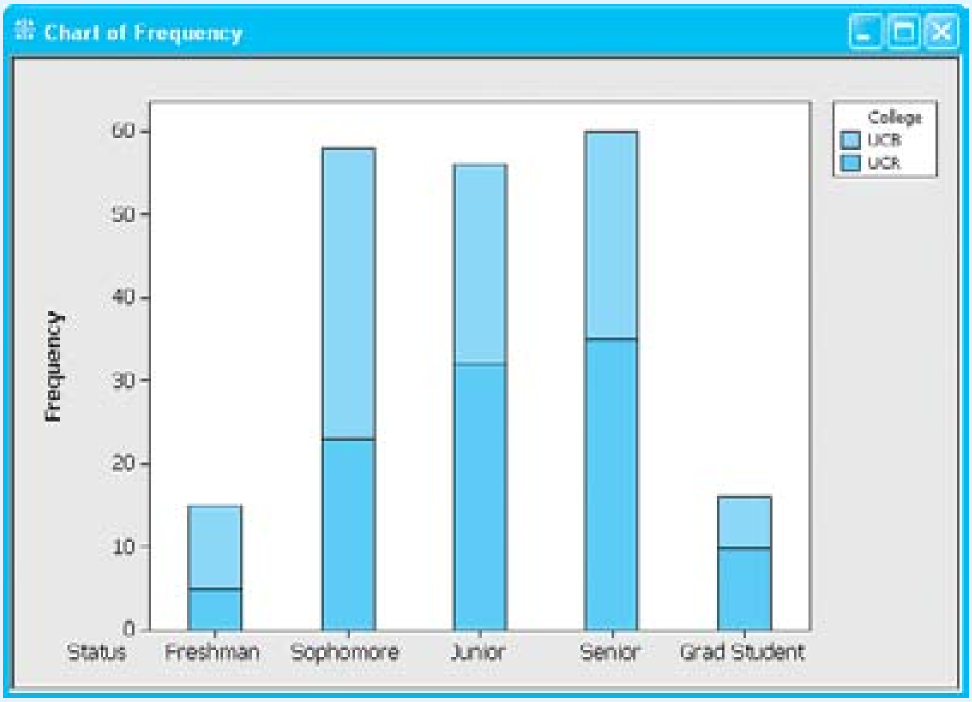


FIGURA 3.17



Pase a la Hoja de Trabajo (Worksheet) 2, en la cual se encuentran los datos bivariados de las minivan del capítulo 2. Para examinar la relación entre las longitudes de asiento segunda y tercera fila, se pueden graficar los datos y numéricamente describir la relación con el coeficiente de correlación y la recta de mejor ajuste. Use **Stat** → **Regression** → **Fitted Line Plot**, y seleccione "2nd Seat" y "3rd Seat" para **Y** y **X**, respectivamente (véase la figura 3.18). Asegúrese de seleccionar el punto junto a **Linear** y dé un clic en **OK**. La gráfica de los nueve puntos de datos y la recta de mejor ajuste serán generados como en la figura 3.19.

FIGURA 3.18

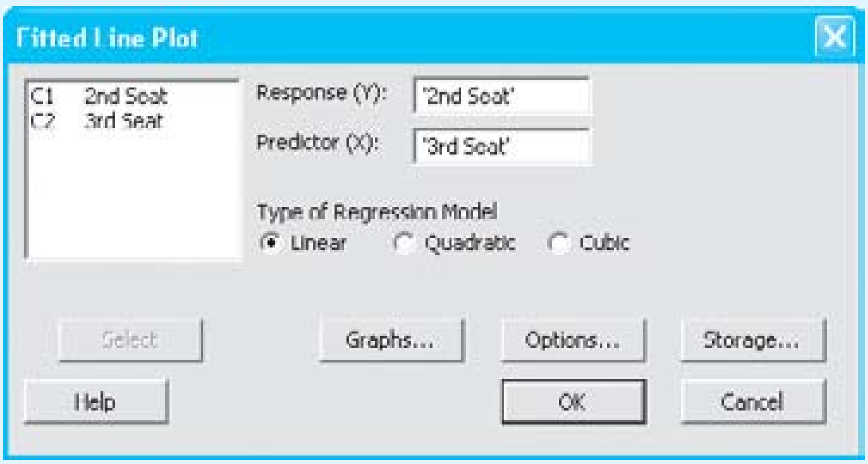
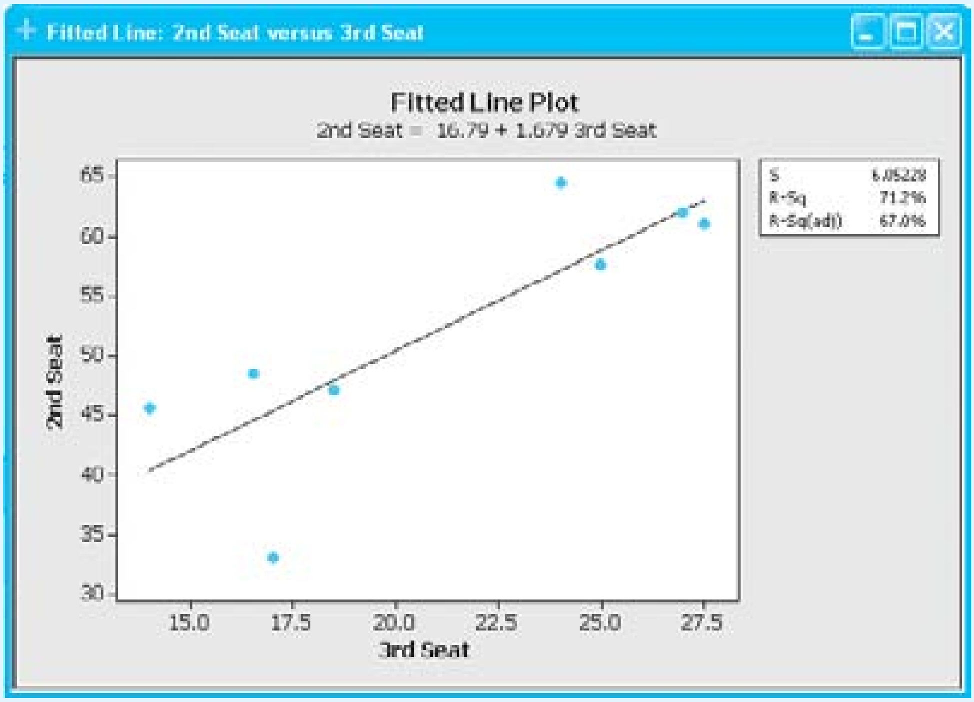


FIGURA 3.19



Para calcular el coeficiente de correlación, use **Stat** → **Basic Statistics** → **Correlation**, seleccionando "2nd Seat" y "3rd Seat" para la caja de Variables. Para seleccionar ambas variables a la vez, mantenga pulsada la tecla **Shift** (Mayúsculas) cuando seleccione las variables y luego dé un clic en **Select**. Dé un clic en **OK**, y el coeficiente de correlación aparecerá en la ventana Session (véase la figura 3.20). Observe la correlación positiva relativamente fuerte y la pendiente positiva de la recta de regresión, lo cual indica que un minivan con gran longitud de piso detrás del segundo asiento también tenderá a tener una gran longitud de piso detrás del tercer asiento.

Guarde "Chapter 3" antes de salir de *MINITAB*.

FIGURA 3.20

Ejercicios suplementarios

3.21 Profesor Asimov El profesor Isaac Asimov fue uno de los escritores más prolíficos de todos los tiempos. Escribió cerca de 500 libros durante una carrera de 40 años antes de su muerte en 1992. De hecho, a medida que su carrera avanzaba, fue más productivo en términos del número de libros escritos en un periodo determinado.[8] Los datos siguientes son los tiempos (en meses) requeridos para escribir sus libros, en incrementos de 100:

Número de libros	100	200	300	400	490
Tiempo (en meses)	237	350	419	465	507

a. Grafique el número acumulado de libros como función del tiempo usando una gráfica de dispersión.

b. Describa la productividad del profesor Asimov en vista del conjunto de datos graficado en el inciso a). ¿La relación entre las dos variables parece ser lineal?

MIS DATOS EX0322

3.22 ¡Queso, por favor! Es frecuente que los estadounidenses conscientes de la salud consulten la información nutrimental de los paquetes de alimentos, en un intento por evitar alimentos con grandes cantidades de grasa, sodio o colesterol. La siguiente información fue tomada de ocho marcas diferentes de rebanadas de queso estadounidense:

Marca	Grasa (g)	Grasa saturada (g)	Colesterol (mg)	Sodio (mg)	Calorías
Kraft Deluxe American	7	4.5	20	340	80
Kraft Velveeta Slices	5	3.5	15	300	70
Private Selection	8	5.0	25	520	100
Ralphs Singles	4	2.5	15	340	60
Kraft 2% Milk Singles	3	2.0	10	320	50
Kraft Singles American	5	3.5	15	290	70
Borden Singles	5	3.0	15	260	60
Lake to Lake American	5	3.5	15	330	70

a. ¿Qué pares de variables espera usted que estén fuertemente relacionados?

b. Trace una gráfica de dispersión para grasa y grasa saturada. Describa la relación.

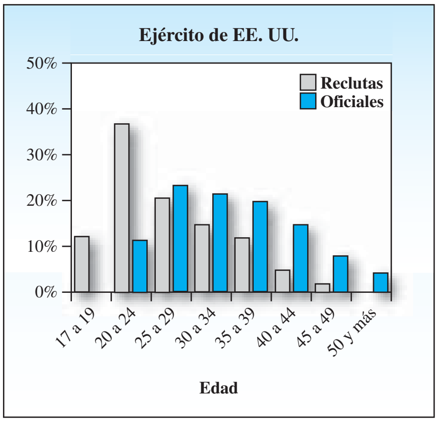
c. Trace una gráfica de dispersión para grasa y calorías. Compare el modelo con que se encontró en el inciso b).

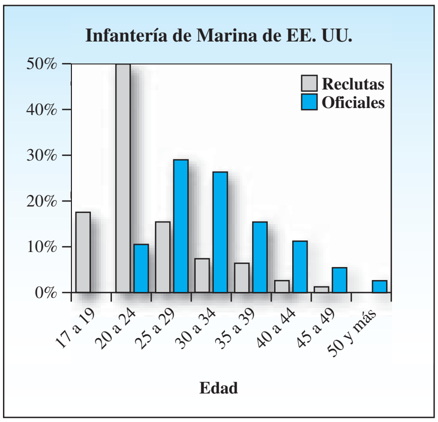
d. Trace una gráfica de dispersión para grasa contra sodio y otra para colesterol contra sodio. Compare los modelos. ¿Hay conglomerados o resultados atípicos?

e. Para los pares de variables que parecen estar linealmente relacionados, calcule los coeficientes de correlación.

f. Escriba un párrafo para resumir las relaciones que usted pueda ver en estos datos. Use las correlaciones y los modelos de las cuatro gráficas de dispersión para verificar sus conclusiones.

3.23 Ejército contra Infantería de Marina ¿Quiénes son los hombres y mujeres que prestan servicio en nuestras fuerzas armadas? ¿Son hombres o mujeres, oficiales o reclutas? ¿Cuál es su origen étnico y su edad promedio? Un artículo en la revista *Time* dio algunos conceptos sobre la demografía de las fuerzas armadas de Estados Unidos.[9] Dos de las gráficas de barras se presentan a continuación.





a. ¿Cuáles variables se han medido en este estudio? ¿Las variables son cualitativas o cuantitativas?

b. Describa la población de interés. ¿Estos datos representan una población o una muestra sacada de la población?

c. ¿Qué tipo de presentación gráfica se ha empleado? ¿Qué otro tipo podría haberse usado?

d. ¿Cómo describiría usted las similitudes y diferencias en las distribuciones de edades de personas reclutadas y oficiales?

e. ¿Cómo describiría usted las similitudes y diferencias en las distribuciones de edades del personal en el Ejército y en la Infantería de Marina?

3.24 ¡Queso, otra vez! La demanda de alimentos saludables que sean bajos en grasas y calorías ha resultado en un gran número de productos "bajo en grasas" y "sin grasa" en el supermercado. La tabla siguiente muestra los números de calorías y las cantidades de sodio (en miligramos) por rebanada para cinco marcas diferentes de queso estadounidense libre de grasa.

Marca	Sodio (mg)	Calorías
Kraft Fat Free Singles	300	30
Ralphs Fat Free Singles	300	30
Borden Fat Free	320	30
Healthy Choice Fat Free	290	30
Smart Beat American	180	25

a. Trace una gráfica de dispersión para describir la relación entre la cantidad de sodio y el número de calorías.

b. Describa la gráfica del inciso a). ¿Ve usted algunos resultados atípicos? ¿El resto de los puntos parece formar un modelo?

c. Con base *sólo* en la relación entre sodio y calorías, ¿puede usted tomar una decisión clara acerca de cuál de las cinco marcas comprar? ¿Es razonable basar su elección en sólo estas dos variables? ¿Qué otras variables debe considerar?

MIS DATOS EX0325

3.25 Corriente máxima Con el uso de un procedimiento químico llamado *polarografía diferencial de pulsos*, un químico midió la corriente máxima generada (en microamperes) cuando una solución que contenía una cantidad determinada de níquel (en partes por mil millones) se agregó a un reactivo compensador. Los datos se muestran a continuación:

x = Ni (ppmm)	y = Corriente máxima (μA)
19.1	.095
38.2	.174
57.3	.256
76.2	.348
95	.429
114	.500
131	.580
150	.651
170	.722

Use una gráfica para describir la relación entre x y y. Agregue cualesquiera medidas numéricas descriptivas que sean apropiadas. Escriba un párrafo que compendie sus resultados.

MIS DATOS EX0326

3.26 Dinero del cine ¿Cuánto dinero reciben los cines en un solo fin de semana? En alguna forma, ¿esta cantidad predice el éxito o fracaso de una película, o el éxito monetario total de la película depende más del número de semanas que permanezca en los cines? En una semana reciente, los datos siguientes se recolectaron para las mejores 10 películas en cines en esa semana.[10]

Mejores películas	Ingreso bruto en fin de semana (en millones)	Número de pantallas	Promedio por pantalla	Semanas en exhibición	Ingreso bruto a la fecha (en millones)
1 *The Prestige* Disney	\$14.8	2281	\$6496	1	\$14.8
2 *The Departed* Warner Bros.	\$13.7	3005	\$4550	3	\$77.1
3 *Flags of Our Fathers* Paramount/DreamWorks	\$10.2	1876	\$5437	1	\$10.2
4 *Open Season* Sony	\$8.0	3379	\$2367	4	\$69.6
5 *Flicka* 20th Century Fox	\$7.7	2877	\$2676	1	\$7.7
5 *The Grudge 2* Sony	\$7.7	3124	\$2395	2	\$31.4
7 *Man of the Year* Universal	\$7.0	2522	\$2789	2	\$22.5
8 *Marie Antoinette* Sony	\$5.3	859	\$6169	1	\$5.3
9 *The Texas Chainsaw Massacre: The Beginning* New Line	\$3.8	2569	\$1496	3	\$36.0
10 *The Marine* 20th Century Fox	\$3.7	2545	\$1463	2	\$12.5

a. ¿Qué pares de variables de la tabla piensa usted que tendrán una correlación positiva? ¿Cuáles pares tendrán una correlación negativa? Explique.

b. Trace una gráfica de dispersión que relacione el ingreso bruto a la fecha con el número de semanas en exhibición. ¿Cómo describiría usted la relación entre estas dos variables?

c. Trace una gráfica de dispersión que relacione el ingreso bruto de fin de semana con el número de pantallas en las que la película se exhibe. ¿Cómo describiría usted la relación entre estas dos variables?

d. Trace una gráfica de dispersión que relacione el promedio por pantalla con el número de pantallas en las que la película se exhibe. ¿Cómo describiría usted la relación entre estas dos variables?

3.27 Dinero del cine, continúa Los datos del ejercicio 3.26 se introdujeron en una hoja de trabajo *MINITAB*, obteniéndose la siguiente salida.

Covarianzas:

```
                Weekend                 Avg/             Gross to
                  gross    Screens     screen    Weeks      date
Weekend gross      14.2
Screens           403.8   521835.8
Avg/screen       4635.5  -884350.0  3637602.0
Weeks              -0.5      493.2    -1110.9      1.1
Gross to date      28.3    11865.1   -10929.2     23.8     655.6
```

a. Use la salida *MINITAB* o los datos originales para hallar la correlación entre el número de semanas en exhibición y el ingreso bruto a la fecha.

b. Para el par de variables descritas en el inciso a), ¿cuál de las variables clasificaría usted como la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?

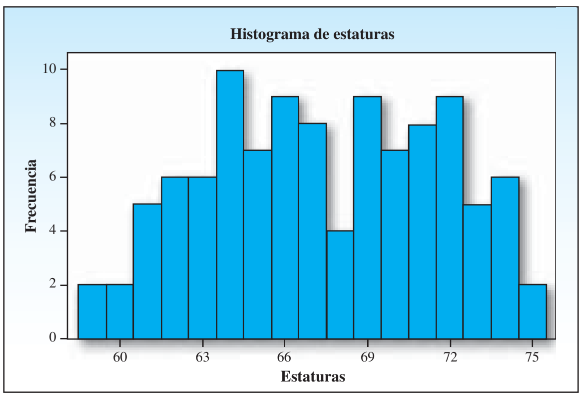
c. Use la salida de *MINITAB* o los datos originales para encontrar la correlación entre el ingreso de fin de semana y el número de pantallas en las que se está exhibiendo la película. Determine la correlación entre el número de pantallas en las que se está exhibiendo la película y el promedio de pantallas.

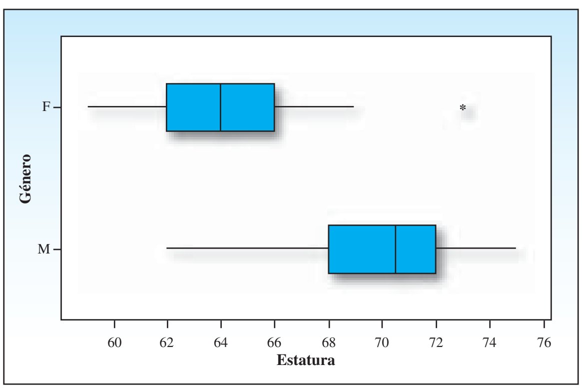
d. ¿Las correlaciones encontradas en el inciso c) confirman su respuesta del ejercicio 3.26a)? ¿Cuáles podrían ser las razones prácticas para la dirección y la fuerza de las correlaciones en el inciso c)?

3.28 Estaturas y género Consulte el ejercicio 1.54 y el conjunto de datos EX0154. Cuando se registraron las estaturas de estos 105 estudiantes, también se registró su género.

a. ¿Qué variables se han medido en este experimento? ¿Son cualitativas o cuantitativas?

b. Vea el histograma del ejercicio 1.54 junto con las gráficas de caja comparativas que se muestran a continuación. ¿Las gráficas de caja ayudan a explicar los dos picos locales del histograma? Explique.





MIS DATOS EX0329

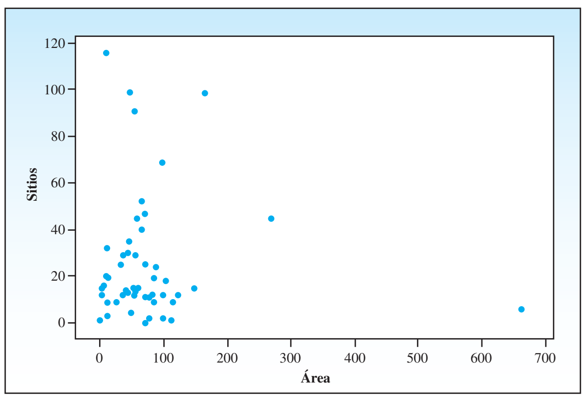
3.29 Desechos peligrosos Los datos del ejercicio 1.37 dieron el número de sitios con desechos peligrosos en cada uno de los 50 estados y el Distrito de Columbia en 2005.[4] Sospechando que pudiera haber una relación entre el número de sitios con desechos peligrosos y el tamaño del estado (en miles de millas cuadradas), unos investigadores registraron ambas variables y generaron una gráfica de dispersión con el *MINITAB*.

Estado	Sitios	Área	Estado	Sitios	Área
AL	15	52	MT	15	147
AK	6	663	NE	14	77
AZ	9	114	NV	1	111
AR	10	53	NH	21	9
CA	95	164	NJ	117	9
CO	19	104	NM	13	122
CT	16	6	NY	87	55
DE	15	2	NC	31	54
DC	1	0	ND	0	71
FL	50	66	OH	37	45
GA	17	59	OK	11	70
HI	3	11	OR	11	98
ID	9	84	PA	96	46
IL	48	58	RI	12	2
IN	30	36	SC	26	32
IA	12	56	SD	2	77
KS	11	82	TN	14	42
KY	14	40	TX	44	269
LA	14	52	UT	18	85
ME	12	35	VT	11	10
MD	18	12	VA	28	43
MA	33	11	WA	47	71
MI	68	97	WV	9	24
MN	24	87	WI	38	65
MS	5	48	WY	2	98
MO	26	70			

MINITAB para el ejercicio 3.29

Covarianzas: sitios, área

```
          Sites        Area
Sites   682.641
Area    -98.598    9346.603
```



a. ¿Hay algún modelo claro en la gráfica de dispersión? Describa la relación entre el número de sitios de desechos y el tamaño del estado.

b. Use la salida *MINITAB* para calcular el coeficiente de correlación. ¿Esto confirma la respuesta de usted al inciso a)?

c. ¿Hay resultados atípicos o conglomerados en los datos? Si es así, ¿puede usted explicarlos?

d. ¿Qué otras variables podría usted considerar al tratar de entender la distribución de sitios con desechos peligrosos en Estados Unidos?

MIS DATOS EX0330

3.30 Brett Favre, otra vez El número de pases completos y el número total de yardas obtenidas se registró para Brett Favre, en cada uno de los 16 juegos de temporada regular en el verano de 2006.[11]

Semana	Pases completos	Yardas totales
1	15	170
2	31	340
3	25	340
4	22	205
5	22	220
6	19	206
7	17	180
8	28	287
9	24	347
10	5	73
11	22	266
12	24	214
13	22	293
14	20	174
15	26	285
16	21	285

Fuente: www.espn.com

a. Trace una gráfica de dispersión para describir la relación entre el número de pases completos y el total de yardas obtenidas por Brett Favre.

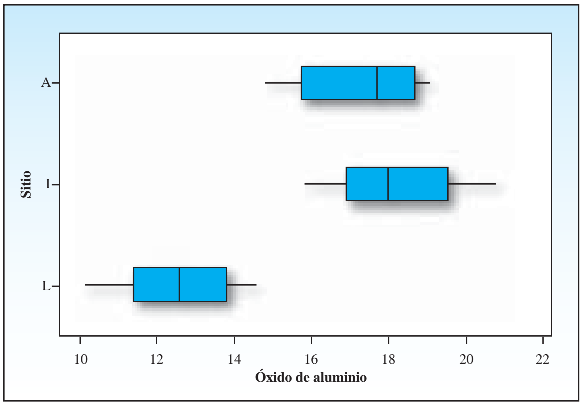
b. Describa la gráfica del inciso a). ¿Observa algunos resultados atípicos? ¿El resto de los puntos parecen formar un modelo?

c. Calcule el coeficiente de correlación, r, entre el número de pases completos y el total de yardas obtenidas.

d. ¿Cuál es la recta de regresión para predecir el número total de yardas obtenidas y basadas en el número total de pases completos x?

e. Si Brett Favre lograra 20 pases completos en su siguiente juego, ¿cuál pronosticaría usted que sería su número total de yardas obtenidas?

3.31 Alfarería, continúa En el ejercicio 1.59, analizamos el porcentaje de óxido de aluminio en 26 muestras de alfarería romano-británica hallada en cuatro hornos diferentes en el Reino Unido.[12] Como uno de los sitios sólo dio dos mediciones, ese sitio está eliminado y a continuación vemos gráficas de caja comparativas de óxido de aluminio en los otros tres sitios.



a. ¿Cuáles dos variables se han medido en este experimento? ¿Son cualitativas o cuantitativas?

b. ¿Cómo compararía usted la cantidad de óxido de aluminio de las muestras en los tres sitios?

MIS DATOS EX0332

3.32 Alfarería, continúa A continuación veamos el porcentaje de óxido de aluminio, el porcentaje de óxido de hierro y el porcentaje de óxido de magnesio en cinco muestras recolectadas en Ashley Rails, en el Reino Unido.

Muestra	Al	Fe	Mg
1	17.7	1.12	0.56
2	18.3	1.14	0.67
3	16.7	0.92	0.53
4	14.8	2.74	0.67
5	19.1	1.64	0.60

a. Encuentre los coeficientes de correlación que describan las relaciones entre el contenido de óxido de hierro y el de magnesio, y entre el óxido de aluminio y el de magnesio.

b. Escriba una oración que describa las relaciones entre estos tres productos químicos y las muestras de alfarería.

MIS DATOS EX0333

3.33 Redes de computadoras en casa La tabla siguiente (ejercicio 1.50) presenta el aumento pronosticado de redes de computadoras de hogar en los siguientes años.[13]

Redes de hogar en EE. UU. (en millones)

Año	Conectada	Inalámbrica
2002	6.1	1.7
2003	6.5	4.5
2004	6.2	8.7
2005	5.7	13.7
2006	4.9	19.1
2007	4.1	24.0
2008	3.4	28.2

Fuente: Jupiter Research

a. ¿Qué variables se han medido en este experimento? ¿Son cualitativas o cuantitativas?

b. Use uno de los métodos gráficos dados en este capítulo para describir los datos.

c. Escriba una oración describiendo la relación entre tecnología por cable e inalámbrica, como será en los siguientes años.

3.34 Política y religión Se realizó una encuesta antes de la elección presidencial de 2004, para explorar la relación entre el fervor religioso de una persona y su elección de un candidato político. A los votantes se les preguntó la frecuencia con la que asistían a la iglesia, así como a cuál de los dos candidatos presidenciales principales (George W. Bush o su oponente demócrata) favorecerían en la elección de 2004.[14] Los resultados aparecen a continuación.

Asistencia a la iglesia	G.W. Bush	Candidato demócrata
Más de una vez a la semana	63%	37%
Una vez a la semana	56%	44%
Una o dos veces al mes	52%	48%
Una o dos veces al año	46%	54%
Rara vez/nunca	38%	62%

Fuente: Press-Enterprise

a. ¿Qué variables han sido medidas en esta encuesta? ¿Son cualitativas o cuantitativas?

b. Trace gráficas comparativas de barras lado a lado para describir los porcentajes a favor de los dos candidatos, clasificados por asistencia a la iglesia.

c. Trace dos gráficas de líneas en el mismo conjunto de ejes para describir los mismos porcentajes para los dos candidatos.

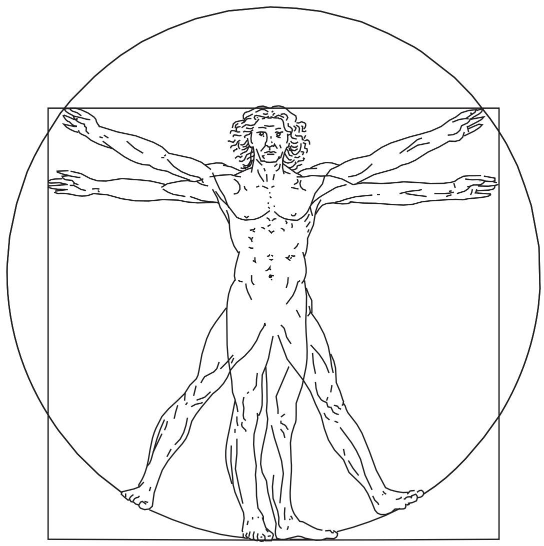
d. ¿Qué conclusiones se pueden sacar usando las dos gráficas de los incisos b) y c)? ¿Cuál es más efectiva?

MIS DATOS EX0335

3.35 Distancia entre puntas de brazos extendidos y estatura Leonardo da Vinci (1452-1519) trazó el bosquejo de un hombre, indicando que la distancia entre las puntas de sus brazos (medida por la espalda, con los brazos extendidos para formar una "T") es aproximadamente igual a la estatura de la persona. Para demostrar esta expresión midió ocho personas, con los siguientes resultados:

Persona	1	2	3	4
Distancia (pulgadas)	68	62.25	65	69.5
Estatura (pulgadas)	69	62	65	70

Persona	5	6	7	8
Distancia (pulgadas)	68	69	62	60.25
Estatura (pulgadas)	67	67	63	62



a. Trace una gráfica de dispersión para distancia entre brazos extendidos y estatura. Use la misma escala en los ejes horizontal y vertical. Describa la relación entre las dos variables.

b. Calcule el coeficiente de correlación que relacione la distancia entre brazos y estatura.

c. Si usted fuera a calcular la recta de regresión para predecir la estatura con base en la distancia entre los brazos extendidos de una persona, ¿cómo estimaría la pendiente de esta recta?

d. Encuentre la recta de regresión que relacione la distancia entre brazos extendidos y la estatura de la persona.

e. Si una persona tiene una distancia de 62 pulgadas entre sus brazos extendidos, ¿cuál pronosticaría usted que es la estatura de la persona?

MIS DATOS EX0336

3.36 Ingresos de una línea aérea El número de pasajeros x (en millones) y el ingreso y (en miles de millones de dólares), para las nueve principales aerolíneas de Estados Unidos en un año reciente, se dan en la tabla siguiente.[4]

	American	United	Delta	Northwest	Continental
x	98.0	66.7	86.0	56.5	42.8
y	20.7	17.4	16.2	12.3	11.2

	U.S. Air	Southwest	Alaska	SkyWest
x	64.0	88.4	16.7	16.6
y	5.1	7.6	3.0	2.0

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2007

a. Construya una gráfica de dispersión para los datos.

b. Describa la forma, dirección y fuerza del modelo de la gráfica de dispersión.

MIS DATOS EX0337

3.37 Entrevistas de examen De dos técnicas que hay para la evaluación de personal, la primera requiere una entrevista-examen de dos horas y la segunda se puede completar en menos de una hora. Las puntuaciones para cada una de las ocho personas que tomaron ambos exámenes se dan en la tabla siguiente.

Solicitante	Examen 1 (x)	Examen (y)
1	75	38
2	89	56
3	60	35
4	71	45
5	92	59
6	105	70
7	55	31
8	87	52

a. Construya una gráfica de dispersión para los datos.

b. Describa la forma, dirección y fuerza del modelo de la gráfica de dispersión.

3.38 Entrevistas de examen, continúa Consulte el ejercicio 3.37.

a. Encuentre el coeficiente de correlación, r, para describir la relación entre los dos exámenes.

b. ¿Estaría usted dispuesto a usar el segundo y más rápido examen que la más larga entrevista-examen para evaluar personal? Explique.

MIS DATOS EX0339

3.39 Lluvia y nieve ¿Hay una correlación entre la cantidad de lluvia y la cantidad de nieve que cae en un lugar en particular? La tabla siguiente muestra el promedio anual de lluvia (en pulgadas) y el promedio anual de nevadas (en pulgadas) para 10 ciudades de Estados Unidos.[15]

Ciudad	Lluvia (en pulgadas)	Nieve (en pulgadas)
Billings, MT	14.77	56.9
Casper, WY	13.03	77.8
Concord, NH	37.60	64.5
Fargo, ND	21.19	40.8
Kansas City, MO	37.98	19.9
Juneau, AK	58.33	97.0
Memphis, TN	54.65	5.1
New York, NY	49.69	28.6
Portland, OR	37.07	6.5
Springfield, IL	35.56	23.2

Fuente: Time Almanac 2007

a. Construya una gráfica de dispersión para los datos.

b. Calcule el coeficiente de correlación r entre lluvia y nevadas. Describa la forma, dirección y fuerza de la relación entre lluvia y nevada.

c. ¿Hay algunos resultados atípicos en la gráfica de dispersión? Si es así, ¿qué ciudad representa este resultado atípico?

d. Elimine el resultado atípico que encontró en el inciso c) del conjunto de datos y vuelva a calcular el coeficiente de correlación r para las nueve ciudades restantes. ¿Cambia la correlación entre lluvia y nieve? Si es así, ¿en qué forma?

MI APPLET Ejercicios

3.40 Si todavía no lo hace, use el primer applet en **Building a Scatterplot (Construyendo una gráfica de dispersión)** para crear una gráfica de dispersión para los datos del ejemplo 3.4.

3.41 Si todavía no lo hace, use el segundo applet en **Building a Scatterplot (Construyendo una gráfica de dispersión)** para crear una gráfica de dispersión para los datos del ejemplo 3.5.

MIS DATOS EX0342

3.42 Teléfonos inalámbricos La tabla siguiente muestra los precios de ocho teléfonos inalámbricos sencillos, junto con su calificación general (en una escala de 0-100) en un estudio de clasificación de consumidores presentado por *Consumer Reports.*[16]

Marca y modelo	Precio	Calificación general
Uniden EXI 4246	$25	77
AT&T E2116	30	74
Panasonic KX-TG5621S	50	74
GE 27831GE1	20	73
VTech V Mix	30	72
VTech ia5829	30	71
Panasonic KX-TG2421W	40	70
Clarity C410	70	65

a. Calcule el coeficiente de correlación r entre precio y calificación general. ¿Cómo describiría usted la relación entre precio y calificación general?

b. Use el applet llamado **Correlation and the Scatterplot (Correlación y la gráfica de dispersión)** para graficar los ocho puntos de datos. ¿Cuál es el coeficiente de correlación mostrado en el applet? Compare con el valor que calculó en el inciso a).

c. Describa el modelo que ve usted en la gráfica de dispersión. ¿Qué inesperada relación ve en los datos?

MIS DATOS EX0343

3.43 Calificaciones de semestre Cuando un estudiante realiza en mala forma un examen semestral, a veces se convence que su calificación es una anomalía y que las calificaciones van a mejorar en el segundo semestre. Los datos siguientes muestran las calificaciones de semestre (de 100 puntos) para ocho estudiantes en un grupo de introducción a la estadística.

Estudiante	Semestre 1	Semestre 2
1	70	88
2	58	52
3	85	84
4	82	74
5	70	80
6	40	36
7	85	48
8	85	96

a. Calcule el coeficiente de correlación r entre las calificaciones semestrales. ¿Cómo describiría la relación entre calificaciones del primero y segundo semestres?

b. Use el applet llamado **Correlation and the Scatterplot (Correlación y la gráfica de dispersión)** para graficar los ocho puntos de datos. ¿Cuál es el coeficiente de correlación que se muestra en el applet? Compare con el valor que calculó en el inciso a).

c. Describa el modelo que ve usted en la gráfica de dispersión. ¿Hay conglomerados o resultados atípicos? Si es así, ¿cómo los explicaría?

3.44 Entre al applet llamado **Exploring Correlation (Explorando la correlación)**.

a. Mueva el cursor del primer applet para que $r \approx .75$. Ahora cambie el signo usando el botón Switch Sign de la parte inferior del applet. Describa el cambio en el modelo de los puntos.

b. Mueva el cursor del primer applet para que $r \approx 0$. Describa el modelo de puntos en la gráfica de dispersión.

c. Consulte el inciso b). En el segundo applet marcado **Correlation and the Quadrants (Correlación y los cuadrantes)**, con $r \approx 0$, cuente el número de puntos que caen en cada uno de los cuatro cuadrantes de la gráfica de dispersión. ¿La distribución de los puntos en los cuadrantes es relativamente uniforme o más de los puntos caen en ciertos cuadrantes que en otros?

d. Use el segundo applet marcado **Correlation and the Quadrants (Correlación y los cuadrantes)** y cambie el coeficiente de correlación a $r \approx -0.9$. ¿La distribución de puntos en los cuadrantes es relativamente uniforme, o más puntos caen en ciertos cuadrantes que en otros? ¿Qué ocurre si $r \approx 0.9$?

e. Use el tercer applet marcado **Correlation and the Regression Line (Correlación y la recta de regresión)**. Mueva el cursor para ver la relación entre el coeficiente de correlación r, la pendiente de la recta de regresión y la dirección de la relación entre x y y. Describa la relación.

3.45 Suponga que la relación entre dos variables x y y puede ser descrita por la recta de regresión $y = 2.0 + 0.5x$. Use el applet en **How a Line Works (Cómo trabaja una recta)** para contestar las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el cambio en y para el cambio de una unidad en x?

b. ¿Los cambios de y aumentan o disminuyen cuando x aumenta?

c. ¿En qué punto la recta cruzará el eje y? ¿Cuál es el nombre dado a este valor?

d. Si $x = 2.5$, use la ecuación de mínimos cuadrados para predecir el valor de y. ¿Qué valor pronosticaría usted para y si $x = 4.0$?

3.46 Entre al applet en **How a Line Works (Cómo trabaja una recta)**.

a. Use el cursor para cambiar la *intersección y* de la recta, pero no cambie la *pendiente*. Describa los cambios que vea en la recta.

b. Use el cursor para cambiar la *pendiente* de la recta, pero no cambie la *intersección y*. Describa los cambios que vea en la recta.

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Lavadoras de loza

¿Piensa usted que sus platos están *realmente* limpios?

¿El precio de un aparato electrodoméstico da a entender algo acerca de su calidad? Treinta y seis lavadoras de loza diferentes se clasificaron en características que van de una calificación general de satisfacción, lavado (x_1), uso de energía (x_2), ruido (x_3), flexibilidad de carga (x_4), facilidad de uso (x_5) y tiempo de ciclo (en minutos).[17] La Kenmore (1374[2]) tuvo la más alta calificación de rendimiento de 83, mientras que la Whirlpool Gold GU3600XTS[Q] tuvo la más baja en 76. Los pictogramas de calificaciones se convirtieron a valores numéricos para $x_1, \ldots, x_5$ con 5 = Excelente, 4 = Muy buena, 3 = Buena, 2 = Regular y 1 = Mala. Utilice un paquete de estadística por computadora para explorar las relaciones entre diversos pares de variables de la tabla.

Excelente	Muy buena	Buena	Regular	Mala
⊙	◓	○	◒	●

Marca y modelo	Precio	Calificación	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Tiempo de ciclo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ariston LI670	$800	48.	◓	◒	○	○	○	190	4	2	3	3	3
Asko D3122XL	$850	78.	⊙	◓	○	○	○	115	5	4	3	3	3
Asko Encore D3531XLHD[SS]	$1600	81.	⊙	⊙	⊙	◓	◓	145	5	5	5	4	4
Bosch SHE45C0[2]UC	$700	78.	⊙	◓	◓	○	○	125	5	4	4	3	3
Bosch SHE58C0[2]UC	$900	78.	⊙	◓	◓	◓	◓	135	5	4	4	4	4
Frigidaire GLD2445RF[S]	$400	62.	○	◓	○	○	⊙	105	3	4	3	3	5
Frigidaire Gallery GLD4355RF[S]	$500	71.	◓	◓	○	○	⊙	110	4	4	3	3	5
Frigidaire Professional PLD4555RF[C]	$710	75.	◓	◓	○	◓	⊙	120	4	4	3	4	5
GE GLD4600N[WW]	$460	75.	◓	◓	○	○	⊙	115	4	4	3	3	5
GE GLD5900N[WW]	$510	74.	◓	◓	◓	○	⊙	115	4	4	4	3	5
GE GLD6700N[WW]	$550	68.	◓	◓	◓	◓	⊙	115	4	4	4	4	5
GE Monogram ZBD0710N[SS]	$1500	59.	○	◓	○	◓	⊙	115	3	4	3	4	5
GE Profile PDW8600N[WW]	$900	68.	◓	◓	◓	○	⊙	115	4	4	4	3	5
GE Profile PDW9900N[WW]	$1300	70.	◓	◓	◓	◓	⊙	120	4	4	4	4	5
Haier ESD310	$600	56.	◓	○	○	◓	⊙	125	4	3	3	4	5
Kenmore (Sears) 1359[2]	$350	68.	⊙	○	◒	○	⊙	110	5	3	2	3	5
Kenmore (Sears) 1373[2]	$580	79.	⊙	◓	○	◓	⊙	125	5	4	3	4	5
Kenmore (Sears) 1374[2]	$650	83.	⊙	◓	◓	◓	⊙	125	5	4	4	4	5
Kenmore (Sears) Elite 1376[2]	$800	79.	⊙	◓	◓	⊙	◓	130	5	4	4	5	4
Kenmore (Sears) Elite 1378[2]	$1000	82.	⊙	◓	◓	⊙	◓	125	5	4	4	5	4
Kenmore (Sears) PRO 1387[3]	$1400	78.	⊙	◓	◓	⊙	◓	130	5	4	4	5	4
KitchenAid Architect KUDD01DP[WH]	$1400	60.	◓	◓	◒	◓	◓	115	4	4	2	4	4
KitchenAid KUDK03CT[WH]	$650	76.	⊙	◓	◓	○	◓	130	5	4	4	3	4
KitchenAid KUDS03CT[WH]	$850	78.	⊙	◓	◓	⊙	◓	115	5	4	4	5	4
KitchenAid KUDU03ST[SS]	$1400	79.	⊙	◓	◓	⊙	◓	125	5	4	4	5	4
LG LDF7810[WW]	$800	77.	◓	⊙	◓	⊙	⊙	110	4	5	4	5	5
LG LDS5811[W]	$650	74.	◓	◓	⊙	⊙	⊙	140	4	4	5	5	5
Maytag MDB4651AW[W]	$400	71.	◓	○	○	○	◓	110	4	3	3	3	4
Maytag MDB5601AW[W]	$450	68.	⊙	○	◓	◓	◓	120	5	3	4	4	4
Maytag MDB6601AW[W]	$500	71.	⊙	○	○	◓	◓	120	5	3	3	4	4
Maytag MDB7601AW[W]	$560	71.	⊙	◒	◓	⊙	⊙	130	5	2	4	5	5
Maytag MDB8751BW[W]	$700	74.	⊙	○	○	⊙	⊙	120	5	3	3	5	5
Miele Advanta G2020SC	$1000	74.	⊙	◓	○	◓	○	125	5	4	3	4	3
Whirlpool DU1100XTP[Q]	$500	77.	⊙	◓	○	◓	⊙	125	5	4	3	4	5
Whirlpool Gold GU2455XTS[Q]	$550	77.	⊙	◓	○	○	⊙	125	5	4	3	3	5
Whirlpool Gold GU3600XTS[Q]	$750	76.	⊙	◓	○	⊙	◓	130	5	4	3	5	4

Fuente: © 2007 por Consumers Union of U.S., Inc., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de septiembre de 2007 de *Consumer Reports*® sólo para fines educativos. No se permite el uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

1. Vea individualmente las variables de Precio, Calificación y Tiempo de ciclo. ¿Qué puede usted decir acerca de la simetría? ¿Y de resultados atípicos?
2. Vea todas las variables en pares. ¿Qué pares están correlacionados en forma positiva? ¿Y en forma negativa? ¿Hay pares que exhiban poca o ninguna correlación? ¿Algunos de estos resultados son contrarios a lo que uno pudiera esperar de manera intuitiva?
3. El precio de un aparato electrodoméstico, específicamente una lavadora de loza, da a entender algo acerca de su calidad? ¿Qué variables utilizó usted para llegar a su respuesta?

4

Probabilidad y distribuciones de probabilidad

OBJETIVOS GENERALES

Ahora que ya ha aprendido usted a describir un conjunto de datos, ¿cómo puede usar datos muestrales para sacar conclusiones acerca de las poblaciones muestreadas? En esta técnica interviene una herramienta estadística llamada *probabilidad* y, para usarla correctamente, usted debe primero entender cómo funciona. La primera parte de este capítulo le enseñará el nuevo lenguaje de la probabilidad, presentando los conceptos básicos con ejemplos sencillos.

Las variables que medimos en los capítulos 1 y 2 se pueden definir ahora como variables aleatorias, con valores que dependen de la selección de la probabilidad de los elementos de la muestra. Usando la probabilidad como herramienta, se pueden crear distribuciones de probabilidad que sirven como modelos para variables aleatorias discretas y usted puede describir estas variables aleatorias usando una media y desviación estándar semejantes a las del capítulo 2.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI **ENTRENADOR PERSONAL**

¿Cuál es la diferencia entre eventos mutuamente exclusivos e independientes?

Probabilidad y toma de decisiones en el Congo

En su sensacional novela *Congo*, el autor Michael Crichton describe una expedición que corre para hallar diamantes azules cubiertos de boro en los bosques lluviosos de la región oriental de Zaire. ¿La probabilidad puede ayudar a la heroína Karen Ross en su búsqueda de la Ciudad Perdida de Zinj? El estudio práctico del final de este capítulo involucra el uso de la probabilidad de Ross en situaciones de toma de decisiones.

4.1 EL PAPEL DE LA PROBABILIDAD EN ESTADÍSTICA

La probabilidad y la estadística están relacionadas en una forma importante. La probabilidad se emplea como *herramienta*; permite que usted evalúe la confiabilidad de sus conclusiones acerca de la población cuando tenga sólo información muestral. Considere estas situaciones:

- Cuando lance al aire una sola moneda, verá cara (H) o cruz (T). Si lanza la moneda varias veces al aire, va a generar un número infinitamente grande de caras o cruces, es decir, toda la población. ¿Qué aspecto tiene esta población? Si la moneda es imparcial, entonces la población debe contener 50% de H y 50% de T. Ahora lance al aire la moneda una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte una cara? Casi todos dirían que la "probabilidad" es 1/2.
- Ahora suponga que no está usted seguro de que la moneda sea imparcial, esto es, no sabe con certeza si la composición de la población es 50-50 y decide hacer un experimento sencillo. Lanza al aire la moneda $n = 10$ veces y observa 10 caras consecutivas. ¿Puede concluir que la moneda es imparcial? Es probable que no, porque si así fuera, observar 10 caras en fila sería muy *improbable*; esto es, la "probabilidad" sería muy pequeña. Es más *probable* que la moneda esté "cargada".

Al igual que en el ejemplo de lanzar al aire una moneda, los expertos en estadística usan la probabilidad en dos formas. Cuando la población es *conocida*, se usa la probabilidad para describir la probabilidad de observar un resultado muestral en particular. Cuando la población es *desconocida* y sólo se dispone de una muestra de esa población, la probabilidad se usa para hacer enunciados acerca de la composición de la población, es decir, hacer inferencias estadísticas.

En los capítulos 4-7 usted verá numerosas formas diferentes para calcular probabilidades. Supondrá que la población es *conocida* y calculará la probabilidad de observar varios resultados muestrales. Una vez que empiece a usar la probabilidad para inferencia estadística en el capítulo 8, la población será *desconocida* y usted usará su conocimiento de probabilidad para hacer inferencias confiables a partir de información muestral. Empecemos con algunos ejemplos sencillos para ayudarle a captar conceptos básicos de probabilidad.

4.2 EVENTOS Y EL ESPACIO MUESTRAL

Se obtienen datos al observar ya sea eventos no controlados en la naturaleza o situaciones controladas en un laboratorio. Usamos el término **experimento** para describir cualquiera de los dos métodos de recolección de datos.

Definición Un **experimento** es el proceso mediante el cual se obtiene una observación (o medición).

La observación o medición generada por un experimento puede o no producir un valor numérico. A continuación veamos algunos ejemplos de experimentos:

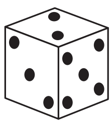
- Registrar la calificación de un examen
- Medir la cantidad de lluvia diaria
- Entrevistar a un dueño de casa para obtener su opinión sobre un reglamento para distribuir por zonas un área verde

- Probar una tarjeta de circuito impreso para determinar si es un producto defectuoso o aceptable.
- Lanzar al aire una moneda y observar el lado que aparece.

Cuando se realiza un experimento, lo que observamos es un resultado llamado **evento simple**, con frecuencia denotado por la mayúscula E con un subíndice.

Definición Un **evento simple** es el resultado que se observa en una sola repetición del experimento.

EJEMPLO 4.1



Experimento: Lance un dado y observe el número que aparece en la cara superior. Haga una lista de los eventos sencillos del experimento.

Solución Cuando el dado se lanza una vez, hay seis posibles resultados. Hay los eventos sencillos citados a continuación:

Evento E_1: observar un 1	Evento E_4: observar un 4
Evento E_2: observar un 2	Evento E_5: observar un 5
Evento E_3: observar un 3	Evento E_6: observar un 6

Ahora podemos definir un **evento** como un conjunto de eventos sencillos, a menudo denotado por una letra mayúscula.

Definición Un **evento** es un conjunto de eventos sencillos.

EJEMPLO 4.1 continúa

Podemos definir los eventos A y B para el experimento de lanzar al aire un dado:

A: observar un número impar

B: observar un número menor a 4

Como el evento A se presenta si la cara superior es 1, 3 o 5, es un conjunto de tres eventos sencillos y escribimos $A = \{E_1, E_3, E_5\}$. Del mismo modo, el evento B ocurre si la cara superior es 1, 2 o 3 y está definido como una serie o conjunto de estos tres eventos sencillos: $B = \{E_1, E_2, E_3\}$.

A veces, cuando ocurre un evento, significa que no puede ocurrir otro.

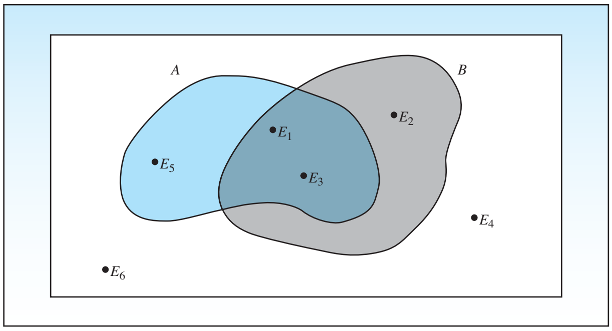
Definición Dos eventos son **mutuamente excluyentes** si, cuando ocurre un evento, los otros no pueden ocurrir y viceversa.

En el experimento de lanzar al aire un dado, los eventos A y B *no* son mutuamente excluyentes, porque tienen dos resultados en común, si el número de la cara superior del dado es 1 o 3. Ambos eventos, A y B, ocurrirán si se observa E_1 o E_3 cuando se realiza el experimento. En contraste, los seis eventos simples $E_1, E_2, \ldots, E_6$ forman un conjunto de todos los resultados mutuamente excluyentes del experimento. Cuando el experimento se realiza una vez, puede ocurrir uno y sólo uno de estos eventos sencillos.

Definición El conjunto de todos los eventos sencillos se denomina espacio muestral, S.

A veces es útil visualizar un experimento usando una imagen llamada **diagrama de Venn**, que se ilustra en la figura 4.1. La caja exterior representa el *espacio muestral*, que contiene todos los *eventos sencillos*, representados por puntos marcados. Como un evento es un conjunto de uno o más eventos sencillos, los puntos apropiados están circulados y marcados con la letra del evento. Para el experimento de lanzar al aire un dado, el espacio muestral es $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ o bien, de un modo más simple, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Los eventos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ están circulados en el diagrama de Venn.

FIGURA 4.1
Diagrama de Venn para tiro de un dado



EJEMPLO 4.2

Experimento: Lance al aire una sola moneda y observe el resultado. Éstos son los eventos sencillos:

E_1: observar una cara (H)

E_2: observar una cruz (T)

El espacio muestral es $S = \{E_1, E_2\}$, o bien, dicho en forma más sencilla, $S = \{\text{H, T}\}$.

EJEMPLO 4.3

Experimento: Registre el tipo de sangre de una persona. Los cuatro posibles resultados mutuamente exclusivos son estos eventos sencillos:

E_1 = sangre tipo A

E_2 = sangre tipo B

E_3 = sangre tipo AB

E_4 = sangre tipo O

El espacio muestral es $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, o $S = \{\text{A, B, AB, O}\}$.

Algunos experimentos se pueden generar en etapas y el espacio muestral se puede mostrar en un **diagrama de árbol**. Cada nivel de ramificación sucesivo del árbol corresponde a un paso requerido para generar el resultado final.

EJEMPLO 4.4

Un técnico médico registra el tipo sanguíneo y factor Rh de una persona. Haga una lista de los eventos sencillos del experimento.

Solución Por cada persona, se hace necesario un procedimiento de dos etapas para registrar las dos variables de interés. El diagrama de árbol se muestra en la figura 4.2. Los ocho eventos sencillos del diagrama de árbol forman el espacio muestral, $S = \{\text{A}+, \text{A}-, \text{B}+, \text{B}-, \text{AB}+, \text{AB}-, \text{O}+, \text{O}-\}$.

Una forma alternativa para exhibir los eventos sencillos es usar una **tabla de probabilidad**, como se muestra en la tabla 4.1. Los renglones y columnas muestran los posibles resultados en las etapas primera y segunda, respectivamente y los eventos sencillos se muestran en las celdas de la tabla.

FIGURA 4.2
Diagrama de árbol para el ejemplo 4.4

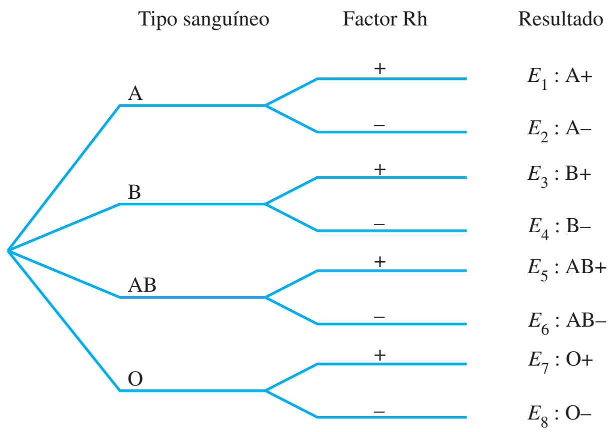


TABLA 4.1 **Tabla de probabilidad para el ejemplo 4.4**

	Tipo sanguíneo			
Factor Rh	A	B	AB	O
Negativo	A−	B−	AB−	O−
Positivo	A+	B+	AB+	O+

4.3 CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON EL USO DE EVENTOS SENCILLOS

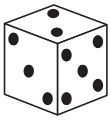
La probabilidad de un evento A es una medida de nuestra creencia de que el evento A ocurrirá. Una manera práctica de interpretar esta medida es con el concepto de *frecuencia relativa.* Recuerde del capítulo 1 que si un experimento se realiza n veces, entonces la frecuencia relativa de un suceso particular, por ejemplo A, es

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{\text{Frecuencia}}{n}$$

donde la frecuencia es el número de veces que ocurrió el evento A. Si hacemos que el número n de repeticiones del experimento se haga cada vez más grande ($n \to \infty$), en última instancia se genera toda la población. En ésta, la frecuencia relativa del evento A se define como la **probabilidad del evento A**; esto es,

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Frecuencia}}{n}$$

Como $P(A)$ se comporta como una frecuencia relativa, $P(A)$ debe ser una proporción que se encuentre entre 0 y 1; $P(A) = 0$ si el evento A nunca ocurre, y $P(A) = 1$ si el evento A siempre ocurre. Cuanto más cercano sea $P(A)$ a 1, es más probable que A ocurra.



Por ejemplo, si se lanza al aire un dado balanceado de seis caras un número de veces infinito, se esperaría que la frecuencia relativa para cualesquiera de los seis valores, $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, fuera 1/6. Sobra decir que sería muy lento, si no imposible, repetir un experimento un número infinito de veces. Por esta razón, hay métodos alternativos para calcular probabilidades que hacen uso del concepto de frecuencia relativa.

Una consecuencia importante de la definición de frecuencia relativa de una probabilidad involucra a eventos sencillos. Como los eventos sencillos son mutuamente excluyentes, sus probabilidades deben satisfacer dos condiciones.

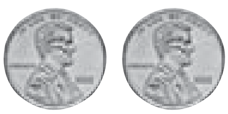
REQUISITOS PARA PROBABILIDADES DE UN EVENTO SIMPLE

- Cada probabilidad debe estar entre 0 y 1.
- La suma de las probabilidades de todos los eventos sencillos en S igual a 1.

Cuando es posible escribir los eventos sencillos asociados con un experimento y determinar sus probabilidades respectivas, podemos hallar la probabilidad de un evento A si sumamos las probabilidades de todos los eventos sencillos contenidos en el evento A.

Definición La **probabilidad de un evento** A es igual a la suma de las probabilidades de los eventos sencillos contenidos en A.

EJEMPLO 4.5



Lance al aire dos monedas imparciales y registre el resultado. Encuentre la probabilidad de observar exactamente una cara en los dos tiros.

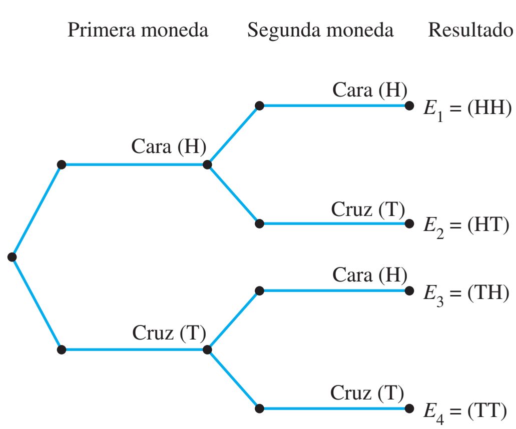
Solución Para poner en una lista los eventos sencillos en el espacio muestral, se puede usar un diagrama de árbol como se muestra en la figura 4.3. Las letras H y T significan que usted observó una cara o una cruz, respectivamente, en un tiro en particular. Para asignar probabilidades a cada uno de los cuatro eventos sencillos, hay que recordar que las monedas son imparciales. Por tanto, cualquiera de los cuatro eventos sencillos es tan probable como cualquier otro. Como la suma de los cuatro eventos sencillos debe ser 1, cada uno debe tener una probabilidad $P(E_i) = 1/4$. Los eventos sencillos del espacio muestral se muestran en la tabla 4.2, junto con sus *probabilidades igualmente posibles.* Para hallar $P(A) = P$(observar exactamente una cara), es necesario hallar todos los eventos sencillos que resulten en el evento A, es decir E_2 y E_3:

MI CONSEJO

Las probabilidades deben estar entre 0 y 1.

$$P(A) = P(E_2) + P(E_3)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

FIGURA 4.3
Diagrama de árbol para el ejemplo 4.5



MI CONSEJO

Las probabilidades de todos los eventos sencillos deben totalizar 1.

TABLA 4.2 **Eventos sencillos y sus probabilidades**

Evento	Primera moneda	Segunda moneda	$P(E_i)$
E_1	H	H	1/4
E_2	H	T	1/4
E_3	T	H	1/4
E_4	T	T	1/4

EJEMPLO 4.6

Las proporciones de fenotipos sanguíneos A, B, AB y O en la población de todos los de raza caucásica en Estados Unidos se publican como .41, .10, .04 y .45, respectivamente.[1] Si al azar se escoge una persona de este origen étnico en la población, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella tengan tipo de sangre A o tipo AB?

Solución Los cuatro eventos sencillos, A, B, AB y O *no* tienen probabilidades igualmente posibles. Sus probabilidades se encuentran usando el concepto de frecuencia relativa como

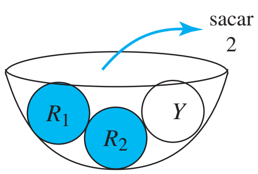
$$P(\text{A}) = .41 \qquad P(\text{B}) = .10 \qquad P(\text{AB}) = .04 \qquad P(\text{O}) = .45$$

El evento de interés está formado por dos eventos sencillos, de modo que

$$P(\text{la persona es tipo A o tipo AB}) = P(\text{A}) + P(\text{AB})$$
$$= .41 + .04 = .45$$

EJEMPLO 4.7

Un plato contiene un dulce amarillo y dos rojos. Usted cierra los ojos, del plato escoge dos dulces, uno por uno y anota sus colores. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos dulces sean rojos?



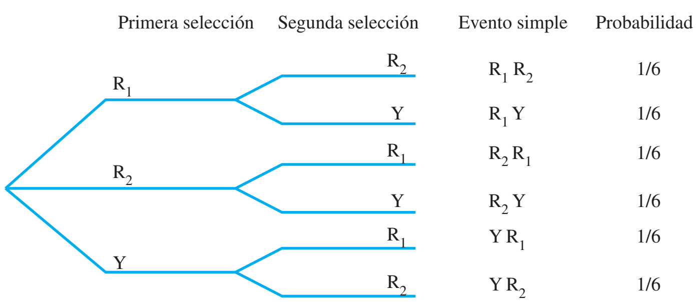
Solución Como no se dan probabilidades, se debe hacer una lista de los eventos sencillos del espacio muestral. La selección de los dulces en dos etapas sugiere un diagrama de árbol, que se muestra en la figura 4.4. Hay dos dulces rojos en el plato, de modo que se pueden usar las letras R_1, R_2 y Y para indicar que se ha seleccionado el primero rojo, el segundo rojo o el dulce amarillo, respectivamente. Como usted cerró los ojos cuando escogió los dulces, las seis opciones deben ser *igualmente probables* y se les asigna la probabilidad 1/6. Si *A* es el evento de que ambos dulces sean rojos, entonces

$$A = \{\text{R}_1\text{R}_2, \text{R}_2\text{R}_1\}$$

Entonces,

$$P(A) = P(\text{R}_1\text{R}_2) + P(\text{R}_2\text{R}_1)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

FIGURA 4.4
Diagrama de árbol para el ejemplo 4.7



MI CONSEJO

Un diagrama de árbol ayuda a hallar eventos sencillos.

Rama = paso hacia el resultado.

Ramas siguientes ⇒ lista de eventos sencillos.

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

1. Haga una lista de todos los eventos sencillos del espacio muestral.
2. Asigne una probabilidad apropiada a cada evento simple.
3. Determine cuáles eventos sencillos resultan en el evento de interés.
4. Sume las probabilidades de los eventos sencillos que resulten en el evento de interés.

En su cálculo, usted siempre debe tener cuidado de satisfacer estas dos condiciones:

- Incluir todos los eventos sencillos en el mismo espacio.
- Asignar probabilidades realistas a los eventos sencillos.

Cuando el espacio muestral es grande, es fácil de omitir sin intención algunos de los eventos sencillos. Si esto ocurre, o si sus probabilidades asignadas son erróneas, sus respuestas no serán útiles en la práctica.

Una forma de determinar el número requerido de eventos sencillos es usar las reglas de conteo presentadas en la siguiente sección opcional. Estas reglas se pueden usar para resolver problemas más complejos, que generalmente comprenden un gran número de eventos sencillos. Si necesita dominar sólo los conceptos básicos de probabilidad, puede escoger saltarse a la siguiente sección.

4.3 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

4.1 Tiro de un dado Un experimento consiste en tirar un solo dado. Éstos son algunos eventos:

A: observar un 2

B: observar un número par

C: observar un número mayor a 2

D: observar A y B

E: observar A o B o ambos

F: observar A y C

a. Haga una lista de eventos sencillos del espacio muestral.

b. Haga una lista de eventos sencillos en cada uno de los eventos A al F.

c. ¿Qué probabilidades debe asignar a los eventos sencillos?

d. Calcule las probabilidades de los seis eventos A al F sumando las probabilidades apropiadas de evento simple.

4.2 Un espacio muestral S está formado por cinco eventos sencillos con estas probabilidades:

$$P(E_1) = P(E_2) = .15 \qquad P(E_3) = .4$$
$$P(E_4) = 2P(E_5)$$

a. Encuentre las probabilidades para los eventos sencillos E_4 y E_5.

b. Encuentre las probabilidades para estos dos eventos:

$A = \{E_1, E_3, E_4\}$

$B = \{E_2, E_3\}$

c. Haga una lista de eventos sencillos que se encuentren en el evento A o en el evento B o en ambos.

d. Haga una lista de eventos sencillos que se encuentre en el evento A y en el B.

4.3 Un espacio muestral contiene 10 eventos sencillos: $E_1, E_2, \ldots, E_{10}$. Si $P(E_1) = 3P(E_2) = .45$ y los restantes eventos sencillos son igualmente probables, encuentre las probabilidades de estos restantes eventos.

4.4 **Tiros libres** Una jugadora de baloncesto acierta en 70% de sus tiros libres. Cuando ella lanza un par de tiros libres, los cuatro eventos sencillos posibles y tres de sus probabilidades asociadas se dan en la tabla:

Evento simple	Resultado del primer tiro libre	Resultado del segundo tiro libre	Probabilidad
1	Encesta	Encesta	.49
2	Encesta	Falla	?
3	Falla	Encesta	.21
4	Falla	Falla	.09

a. Encuentre la probabilidad de que la jugadora enceste en el primer tiro y falle en el segundo.

b. Encuentre la probabilidad de que la jugadora enceste en al menos uno de los dos tiros libres.

4.5 **Cuatro monedas** Un frasco contiene cuatro monedas: una de cinco, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos. Se seleccionan al azar tres monedas del frasco.

a. Haga una lista de los eventos simples en S.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la selección contenga la moneda de 50 centavos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma total sacada sea igual a 60 centavos o más?

4.6 **¿Preescolar o no?** El primer día de clase de jardín de niños, el maestro selecciona al azar uno de sus 25 estudiantes y registra el género del estudiante, así como si había tenido preescolar.

a. ¿Cómo describiría usted el experimento?

b. Construya un diagrama de árbol para este experimento. ¿Cuántos eventos simples hay ahí?

c. La tabla siguiente muestra la distribución de los 25 estudiantes de acuerdo a género y experiencia preescolar. Use la tabla para asignar probabilidades a los eventos simples del inciso b).

	Hombre	Mujer
Preescolar	8	9
Sin preescolar	6	2

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado al azar sea hombre? ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea mujer y no haya tenido preescolar?

4.7 **El problema de la urna** Un tazón contiene tres pelotas rojas y dos amarillas. Dos de ellas se seleccionan al azar y se registran sus colores. Use un diagrama de árbol para hacer una lista de los 20 eventos simples del experimento, teniendo en mente el orden en el que se sacan las pelotas.

4.8 **El problema de la urna, continúa** Consulte el ejercicio 4.7. Una pelota se selecciona al azar del tazón que contiene tres pelotas rojas y dos amarillas. Se toma nota de su color, y la pelota se devuelve al tazón antes de seleccionar una segunda pelota. Haga una lista de los otros cinco eventos simples que deben agregarse al espacio muestral del ejercicio 4.7.

APLICACIONES

4.9 **¿Necesita lentes?** Un estudio clasificó a un gran número de adultos de acuerdo a si se considera que necesitan lentes para corregir su vista para leer y si usan lentes cuando leen. Las proporciones que caen en las cuatro categorías se muestran en la tabla siguiente. (Observe que una pequeña proporción, .02, de adultos usaba lentes cuando de hecho se considera que no los necesitan.)

	Usaba lentes para leer	
Se considera que necesitan lentes	Sí	No
Sí	.44	.14
No	.02	.40

Si un solo adulto se selecciona de este grupo grande, encuentre la probabilidad de cada evento:

a. Se considera que el adulto necesita lentes.

b. El adulto necesita lentes para leer pero no los usa.

c. El adulto usa lentes para leer, los necesite o no.

4.10 **Ruleta** El juego de ruleta usa una rueda que contiene 38 buchacas. Treinta y seis buchacas numeradas 1, 2, . . . , 36 y las dos restantes están marcadas 0 y 00. La rueda se hace girar y una buchaca es identificada como la "ganadora". Suponga que la observancia de cualquier buchaca es igualmente probable que cualquier otra.

a. Identifique los eventos simples en un solo giro de la rueda de la ruleta.

b. Asigne probabilidades a los eventos simples.

c. Sea A el evento que usted observa ya sea 0 o 00. Haga una lista de los eventos simples del evento A y encuentre $P(A)$.

d. Suponga que usted apostó en los números del 1 al 18. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de sus números sea el ganador?

4.11 **Miembros de un jurado** Tres personas son seleccionadas al azar de un registro de votantes y de personas con licencia de manejo, para reportarse como miembros de un jurado. El concejal del condado toma nota del género de cada persona.

a. Defina el experimento.

b. Haga una lista de los eventos simples en *S*.

c. Si es igualmente probable que cada persona sea hombre o mujer, ¿qué probabilidad le asigna usted a cada evento simple?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo una de las tres sea mujer?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean mujeres?

4.12 Miembros de un jurado II Consulte el ejercicio 4.11. Suponga que hay seis prospectos para miembros de jurado, cuatro hombres y dos mujeres, que podrían ser elegidos para ocupar un asiento en el jurado en un caso criminal. Dos jurados se seleccionan al azar de estos seis para ocupar los dos asientos restantes del jurado.

a. Haga una lista de los eventos simples del experimento. (SUGERENCIA: Hay 15 eventos simples si se ignora el orden de selección de los dos jurados.)

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos jurados elegidos sean mujeres?

4.13 Probadores de té Una compañía de alimentos planea efectuar un experimento para comparar su marca de té con la de dos competidores. Una sola persona es contratada para probar y clasificar cada una de las tres marcas de té, que no tienen marca excepto por símbolos de identificación *A*, *B* y *C*.

a. Defina el experimento.

b. Haga una lista de eventos simples en *S*.

c. Si el probador no tiene capacidad para distinguir una diferencia en gusto entre los tés, ¿cuál es la probabilidad de que el probador clasifique el té tipo *A* como el más deseable? ¿Como el menos deseable?

4.14 Carrera de 100 metros Cuatro corredores igualmente calificados, John, Bill, Ed y Dave, corren un *sprint* de 100 metros y se registra el orden de llegadas.

a. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral?

b. Si los corredores están igualmente calificados, ¿qué probabilidad debe usted asignar a cada evento simple?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Dave gane la carrera?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que Dave gane y John se coloque en segundo lugar?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Ed termine en último lugar?

4.15 Moscas de la fruta En un experimento de genética, el investigador apareó dos moscas de la fruta *Drosophila* y observó los rasgos de 100 descendientes. Los resultados se muestran en la tabla.

	Tamaño de alas	
Color de ojos	Normal	Miniatura
Normal	140	6
Bermellón	3	151

Uno de estos descendientes se selecciona al azar y se le observan los dos rasgos genéticos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la mosca tenga color normal de ojos y tamaño normal de alas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la mosca tenga ojos bermellón?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la mosca tenga ojos bermellón o alas miniatura, o ambos?

4.16 Creación ¿Para usted, qué de lo siguiente es más cercano al origen y desarrollo de los seres humanos? ¿Piensa que los seres humanos se han desarrollado durante millones de años a partir de formas menos avanzadas de vida, pero que Dios ha guiado el proceso? ¿Piensa que los seres humanos se han desarrollado durante millones de años a partir de formas menos avanzadas de vida, y que Dios no ha tomado parte en el proceso? ¿O piensa usted que Dios creó a los seres humanos en su forma actual hace no más de 10 mil años o algo así? Cuando se les hicieron estas preguntas, las proporciones de estadounidenses con diversas opiniones son aproximadamente como se muestra en la tabla.[2]

Opinion	Proporción
Guiados por Dios	.36
Dios no tomó parte	.13
Dios creó en la forma presente	.46
No tiene opinión	.05

Fuente: Adaptado de www.pollingreport.com

Suponga que al azar se selecciona una persona y que se registra su opinión sobre esta pregunta.

a. ¿Cuáles son los eventos simples del experimento?

b. Los eventos simples del inciso a) ¿son igualmente probables? Si no es así, ¿cuáles son las probabilidades?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sienta que Dios tuvo algo de parte en la creación de seres humanos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sienta que Dios no tuvo parte en el proceso?

4.4 REGLAS ÚTILES DE CONTEO (OPCIONAL)

Suponga que un experimento comprende un gran número N de eventos simples y que usted sabe que todos esos eventos son *igualmente probables*. Entonces cada evento simple tiene una probabilidad $1/N$ y la probabilidad de un evento A se puede calcular como

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

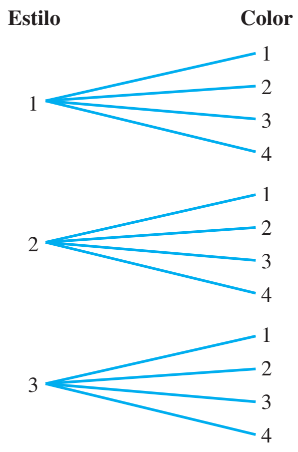
donde n_A es el número de eventos simples que resultan en el evento A. En esta sección, presentamos tres reglas sencillas que se pueden usar para contar ya sea N, el número de eventos simples del espacio muestral, o n_A, el número de eventos simples del evento A. Una vez que haya obtenido estas cuentas, puede hallar $P(A)$ sin en realidad hacer una lista de todos los eventos simples.

LA REGLA *mn*

Considere un experimento que se realiza en dos etapas. Si la primera etapa se puede efectuar en m formas y, para cada una de éstas, la segunda etapa se puede lograr en n formas, entonces hay mn formas para efectuar el experimento.

Por ejemplo, supongamos que usted puede ordenar un auto en uno de tres estilos y en uno de cuatro colores de pintura. Para averiguar cuántas opciones hay disponibles, puede considerar primero escoger uno de los $m = 3$ estilos y luego seleccionar uno de los $n = 4$ colores de pintura. Con el uso de la Regla mn, como se muestra en la figura 4.5, tiene $mn = (3)(4) = 12$ posibles opciones.

FIGURA 4.5
Combinaciones de estilo y color



EJEMPLO 4.8

Se tiran dos dados. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral S?

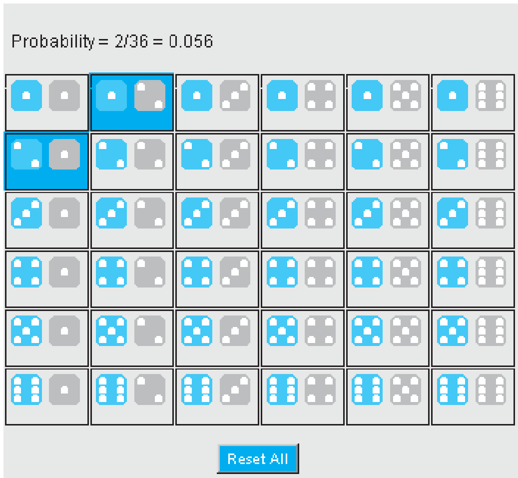
Solución El primer dado puede caer en una de $m = 6$ formas, y el segundo en una de $n = 6$ formas. Como el experimento comprende dos etapas, que forma los pares de números que se muestran en las dos caras, el número total de eventos simples en S es

$$mn = (6)(6) = 36$$

MI APPLET

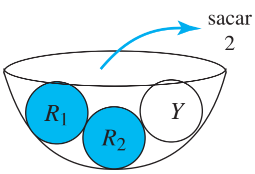
El applet Java llamado **Tossing Dice** (**Tirar dados**) da una imagen visual de los 36 eventos simples descritos en el ejemplo 4.8. Usted puede usar este applet para hallar probabilidades para cualquier evento que comprenda el tiro de dos dados imparciales. Al dar un clic en las combinaciones de dados apropiadas, hemos encontrado la probabilidad de observar una suma de 3 en las caras superiores como $2/36 = .056$. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea igual a 4? Usará este applet para los ejercicios Mi Applet del final del capítulo.

FIGURA 4.6
Applet de Tirar dados



EJEMPLO 4.9

Un plato de dulces contiene un dulce amarillo y dos rojos. Del plato se seleccionan dos dulces, uno por uno, registrando sus colores. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral S?



Solución El primer dulce se puede escoger en $m = 3$ formas. Como un dulce ya no está ahora, el segundo dulce se puede escoger en $n = 2$ formas. El número total de eventos simples es

$$mn = (3)(2) = 6$$

Estos seis eventos simples aparecen en el ejemplo 4.7.

Podemos extender la Regla mn para un experimento que se realiza en más de dos etapas.

LA REGLA *mn* EXTENDIDA

Si un experimento se realiza en k etapas, con n_1 formas para efectuar la primera etapa, n_2 formas para efectuar la segunda etapa, . . . , y n_k formas para efectuar la k-ésima etapa, entonces el número de formas para efectuar el experimento es

$$n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$$

EJEMPLO 4.10

¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral cuando se lanzan al aire tres monedas?

Solución Cada moneda puede caer en una de dos formas. Por tanto, el número de eventos simples es

$$(2)(2)(2) = 8$$

EJEMPLO 4.11

El chofer de un camión puede tomar tres rutas de la ciudad A a la ciudad B, cuatro de la ciudad B a la C y tres de la ciudad C a la D. Si, cuando viaja de A a D, el chofer debe ir de A a B a C a D, ¿cuántas rutas posibles de A a D hay?

Solución Sean

n_1 = número de rutas de A a $B = 3$

n_2 = número de rutas de B a $C = 4$

n_3 = número de rutas de C a $D = 3$

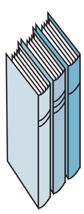
Entonces, el número total de formas para construir una ruta completa, tomando una secundaria desde cada uno de los tres grupos, (A a B), (B a C) y (C a D), es

$$n_1n_2n_3 = (3)(4)(3) = 36$$

Una segunda y útil regla de conteo se sigue de la Regla mn y comprende **ordenamientos** o **permutaciones**. Por ejemplo, supongamos que usted tiene tres libros, A, B y C, pero tiene espacio sólo para dos en su estante. ¿En cuántas formas puede usted seleccionar y acomodar los dos libros? Hay tres opciones para los dos libros, A y B, A y C, o B y C, pero cada uno de los pares se puede acomodar en dos formas en el estante. Todas las permutaciones de los dos libros, escogidas de tres, aparecen en la tabla 4.3. Entonces la Regla mn implica que hay seis formas, porque el primer libro se puede escoger en $m = 3$ formas y el segundo en $n = 3$ formas, de modo que el resultado es $mn = 6$.

TABLA 4.3 **Permutaciones de dos libros escogidos de tres**

Combinaciones de dos	Reordenamiento o combinaciones
AB	*BA*
AC	*CA*
BC	*CB*



¿En cuántas formas puede usted acomodar los tres libros en su estante? Hay las seis permutaciones:

ABC *ACB* *BAC*
BCA *CAB* *CBA*

Como el primer libro se puede escoger en $n_1 = 3$ formas, el segundo en $n_2 =$ formas, y el tercero en $n_3 = 1$ forma, el número total de ordenamientos es $n_1n_2n_3 = (3)(2)(1) = 6$.

En lugar de aplicar la Regla mn cada vez, usted puede hallar el número de ordenamientos usando una fórmula general que involucra una *notación factorial.*

UNA REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES

El número de formas en que podemos acomodar n objetos distintos, tomándolos una cantidad r a la vez, es

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$ y $0! = 1$.

Como se seleccionan r objetos, éste es un experimento de *r-etapas*. El primer objeto se puede escoger en n formas, el segundo en $(n-1)$ formas, el tercero en $(n-2)$ formas y el r-ésimo en $(n-r+1)$ formas. Podemos simplificar esta engorrosa notación usando la regla de conteo para permutaciones porque

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-r)!} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots(2)(1)}{(n-r)\cdots(2)(1)}\\ &= n(n-1)\cdots(n-r+1)\end{aligned}$$

UN CASO ESPECIAL: ORDENAR *n* OBJETOS

El número de formas para ordenar todo un conjunto de n objetos distintos es $P_n^n = n!$

EJEMPLO 4.12

Tres billetes de lotería se sacan de entre un total de 50. Si los billetes se han de distribuir a cada uno de tres empleados en el orden en que son sacados, el orden será importante. ¿Cuántos eventos simples están asociados con el experimento?

Solución El número total de eventos simples es

$$P_3^{50} = \frac{50!}{47!} = 50(49)(48) = 117600$$

EJEMPLO 4.13

Una máquina está compuesta de cinco partes que se pueden ensamblar en cualquier orden. Se ha de realizar una prueba para determinar el tiempo necesario para cada orden de ensamble. Si cada orden se ha de probar una vez, ¿cuántas pruebas deben efectuarse?

Solución El número total de pruebas es

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = 5(4)(3)(2)(1) = 120$$

Cuando contamos el número de permutaciones de los dos libros escogidos para su estante, empleamos un método sistemático:

- Primero contamos el número de *combinaciones* o pares de libros a escoger.
- A continuación contamos el número de formas para ordenar los dos libros escogidos en el estante.

A veces el orden o acomodo de los objetos no es importante, sino sólo los objetos que se escogen. En este caso, se puede usar una regla de conteo para **combinaciones**. Por ejemplo, puede que no nos importe el orden en que los libros se coloquen en el estante, sino sólo cuáles libros podemos poner en el estante. Cuando una comisión de cinco personas se selecciona de entre un grupo de 12 estudiantes, el orden de la selección no es importante porque los cinco estudiantes serán miembros iguales de la comisión.

UNA REGLA DE CONTEO PARA COMBINACIONES

El número de combinaciones distintas de n objetos distintos que se pueden formar, tomando r de ellos a un tiempo, es

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

El número de *combinaciones* y el número de *permutaciones* están relacionados:

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$$

Se puede ver que C_r^n resulta cuando se divide el número de permutaciones entre $r!$, el número de formas de reacomodar cada grupo distinto de r objetos escogidos de entre el total n.

EJEMPLO 4.14

Una tarjeta de circuito impreso se puede comprar de entre cinco proveedores. ¿En cuántas formas se pueden escoger tres proveedores de entre los cinco?

Solución Como es sólo importante cuáles tres se han escogido, no el orden de selección, el número de formas es

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{(5)(4)}{2} = 10$$

El siguiente ejemplo ilustra el uso de reglas de conteo para resolver un problema de probabilidad.

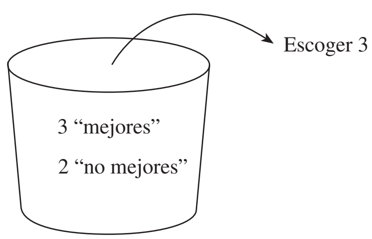
EJEMPLO 4.15

Cinco fabricantes producen cierto aparato electrónico, cuya calidad varía de un fabricante a otro. Si fuéramos a seleccionar tres fabricantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la selección contenga exactamente dos de los tres mejores?

Solución Los eventos simples de este experimento están formados por todas las posibles combinaciones de tres fabricantes, escogidos de un grupo de cinco. De estos cinco, tres han sido designados como "mejores" y dos como "no mejores". Se puede pensar en un plato de dulces que contenga tres dulces rojos y dos amarillos, de los cuales se seleccionan tres, como se ilustra en la figura 4.7. El número total de eventos simples N se puede contar como el número de formas para escoger tres de los cinco fabricantes, o sea

$$N = C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

FIGURA 4.7
Ilustración para el ejemplo 4.15



Como los fabricantes se seleccionan al azar, cualquiera de estos 10 eventos simples será *igualmente probable*, con probabilidad 1/10. Pero cuántos de estos eventos simples resultan en el evento

A: exactamente dos de los "mejores" tres

Se puede contar n_A, el número de eventos en A, en dos pasos porque el evento A ocurrirá cuando seleccione dos de los "mejores" tres y uno de los dos "no mejores". Hay

$$C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

formas de efectuar la primera etapa y

$$C_1^2 = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

formas de efectuar la segunda etapa. Aplicando la Regla mn, encontramos que hay $n_A = (3)(2) = 6$ de los 10 eventos sencillos en el evento A y $P(A) = n_A/N = 6/10$.

Existen muchas otras reglas de conteo además de las tres presentadas en esta sección. Si usted está interesado en este tema, consulte uno de los numerosos libros de texto sobre matemáticas combinatorias.

4.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

4.17 Usted tiene *dos* grupos de objetos muy diferentes, 10 en el primer grupo y ocho en el segundo. Si selecciona un objeto de cada grupo, ¿cuántos pares diferentes puede formar?

4.18 Usted tiene *tres* grupos de objetos muy diferentes, cuatro en el primer grupo, siete en el segundo y tres en el tercero. Si selecciona un objeto de cada grupo, ¿cuántas ternas diferentes puede formar?

4.19 Permutaciones Evalúe las siguientes *permutaciones*. (SUGERENCIA: Su calculadora científica puede tener una función que permita calcular permutaciones y combinaciones con gran facilidad.)

a. P_3^5 **b.** P_9^{10} **c.** P_6^6 **d.** P_1^{20}

4.20 Combinaciones Evalúe estas *combinaciones*:

a. C_3^5 **b.** C_9^{10} **c.** C_6^6 **d.** C_1^{20}

4.21 Seleccionar personas ¿En cuántas formas se pueden seleccionar cinco personas de entre un grupo de ocho si el orden de selección es importante?

4.22 Seleccionar personas, otra vez ¿En cuántas formas se pueden seleccionar dos personas de entre un grupo de 20 si el orden de selección es importante?

4.23 Dados Se tiran tres dados. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral?

4.24 Monedas Se tiran al aire cuatro monedas. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral?

4.25 Un problema de urna, otra vez Se seleccionan tres pelotas de una caja que contiene 10 de ellas. El orden de selección no es importante. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral?

APLICACIONES

4.26 ¿Qué ropa usar? Usted tiene cuatro pares de jeans, 12 playeras limpias y cuatro pares de zapatos tenis. ¿Cuántas combinaciones de ropa (jeans, playeras y zapatos tenis) puede crear?

4.27 Itinerarios Un hombre de negocios en Nueva York está preparando un itinerario para visitar seis ciudades principales. La distancia recorrida, y por tanto el costo del viaje, dependerá del orden en el que planee su ruta. ¿Cuántos itinerarios diferentes (y costos de viaje) son posibles?

4.28 Planes de vacaciones Las vacaciones de su familia consisten en un viaje en avión por el país, rentar un auto y una estancia en un hotel de Boston. Si usted puede escoger de entre cuatro líneas aéreas principales, cinco agencias de renta de autos y tres cadenas hoteleras principales, ¿cuántas opciones hay para lugares en sus vacaciones?

4.29 Un juego de cartas Tres estudiantes están jugando a las cartas. Deciden escoger al primero en jugar al seleccionar cada uno de ellos una tarjeta de entre el mazo de 52 cartas y ver la de mayor valor y palo. Ordenan los palos de menor a mayor: tréboles, diamantes, corazones y espadas.

a. Si la carta se devuelve al mazo después de que cada estudiante escoja, ¿cuántas configuraciones son posibles de entre las tres selecciones?

b. ¿Cuántas configuraciones hay en las que cada estudiante escoge una carta diferente?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres estudiantes escojan exactamente la misma carta?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres estudiantes escojan cartas diferentes?

4.30 Comida en el restaurant Gerard's Un restaurant francés en Riverside, California, ofrece un menú especial de verano en el que, por un costo fijo por comida, se puede escoger una de dos ensaladas, una de dos entradas y uno de dos postres. ¿Cuántas comidas diferentes hay?

4.31 Jugador de póquer Se seleccionan cinco cartas de entre un mazo de 52 cartas para una mano de póquer.

a. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral?

b. Una *escalera real* es una mano que contiene el A, K, Q, J y 10, todas del mismo palo. ¿Cuántas formas hay para obtener una escalera real?

c. ¿Cuál es la probabilidad de recibir una escalera real?

4.32 Póquer II Consulte el ejercicio 4.31. Usted tiene una mano de póquer con cuatro de una clase.

a. ¿Cuántas manos de póquer posibles puede recibir?

b. ¿En cuántas formas puede recibir cuatro cartas del mismo valor de cara *y además* una carta de las otras 48 cartas?

c. ¿Cuál es la probabilidad de recibir cuatro de una clase?

4.33 Encuesta en un hospital Se va a efectuar un estudio en un hospital para determinar las actitudes de las enfermeras hacia diversos procedimientos administrativos. Si se selecciona una muestra de 10 enfermeras de entre un total de 90, ¿cuántas muestras diferentes se pueden seleccionar? (SUGERENCIA: ¿El orden es importante para determinar la conformación de la muestra a seleccionar para el estudio?)

4.34 Problemas de tránsito Se han de seleccionar dos miembros de un concejo municipal, de entre un total de cinco, para formar un subcomité para estudiar los problemas de tránsito de la ciudad.

a. ¿Cuántos subcomités diferentes son posibles?

b. Si todos los posibles miembros del concejo tienen igual probabilidad de ser seleccionados, ¿cuál es la probabilidad de que sean seleccionados Smith y Jones?

4.35 La WNBA El baloncesto profesional es ahora una realidad para jugadoras de baloncesto en Estados Unidos. Hay dos conferencias en la WNBA, cada una con siete equipos, como se muestra en la tabla siguiente.

Conferencia del Oeste	Conferencia del Este
Houston Comets	Indiana Fever
Minnesota Lynx	New York Liberty
Phoenix Mercury	Washington Mystics
Sacramento Monarchs	Detroit Shock
Los Angeles Sparks	Charlotte Sting
Seattle Storm	Connecticut Sun
San Antonio Silver Stars	Chicago Sky

Dos equipos, uno de cada conferencia, se seleccionan al azar para jugar un partido de exhibición.

a. ¿Cuántos pares de equipos se pueden escoger?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos equipos sean el de Los Ángeles y el de Nueva York?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de la Conferencia del Oeste sea de California?

4.36 Carrera de 100 metros, otra vez Consulte el ejercicio 4.14, en el que John, Bill, Ed y Dave corren un sprint de 100 metros. Suponga que todos los corredores están igualmente calificados, de modo que cualquier orden de terminación es igualmente probable. Use la Regla *mn* o permutaciones para contestar estas preguntas:

a. ¿Cuántos órdenes de terminación son posibles?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Dave gane el sprint?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Dave gane y John obtenga el segundo lugar?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que Ed termine en último lugar?

4.37 ¿Sesgo en el género? El siguiente caso ocurrió en Gainesville, Florida. El Consejo de Relaciones Humanas formado por ocho miembros consideró la queja de una mujer que alegaba discriminación, con base en su género, por parte de una compañía local de encuestas. El consejo, compuesto de cinco mujeres y tres hombres, votó 5-3 a favor de la demandante, con las cinco mujeres votando por ella y los tres hombres en contra. El abogado representante de la compañía apeló la decisión del consejo alegando sesgo de género de parte de los miembros del consejo. Si el voto a favor de la demandante fue 5-3 y los miembros del consejo no estuvieran sesgados por el género, ¿cuál es la probabilidad de que el voto se divida en líneas de género (cinco mujeres a favor y tres hombres en contra)?

4.38 Estudio apresurado Una estudiante se prepara para un examen al estudiar una lista de 10 problemas; ella puede resolver seis de ellos. Para el examen, el profesor selecciona cinco preguntas al azar de la lista de 10. ¿Cuál es la probabilidad de que la estudiante pueda resolver los cinco problemas en el examen?

4.39 Negocio de monos A un mono se le dan 12 bloques: tres en forma de cuadrados, tres como rectángulos, tres como triángulos y igual número como círculos. Si saca tres de cada clase en orden, es decir, tres triángulos, luego la misma cantidad cuadrados y así sucesivamente, ¿sospecharía usted que el mono asocia figuras que tengan forma idéntica? Calcule la probabilidad de este evento.

4.5 RELACIONES DE EVENTO Y REGLAS DE PROBABILIDAD

Hay veces en que el evento de interés se puede formar como una combinación de algunos otros eventos. Sean A y B dos eventos definidos en el espacio muestral S. Aquí hay tres relaciones importantes entre eventos.

Definición La **unión** de los eventos A y B, denotada por $A \cup B$, es el evento en que ocurren A o B o ambos.

Definición La **intersección** de eventos A y B, denotada por $A \cap B$, es el evento en que ocurren A y B.†

Definición El **complemento** de un evento A, denotado por A^c, es el evento en que *A no ocurre*.

Las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 muestran representaciones del diagrama de Venn de $A \cup B$, $A \cap B$ y A^c, respectivamente. Cualquier evento simple en el área sombreada es un posible resultado que aparece en el evento apropiado. Una forma de hallar las probabilidades de la unión, la intersección o el complemento es sumar las probabilidades de todos los eventos simples asociados.

†Algunos autores usan la notación AB.

FIGURA 4.8

Diagrama de Venn de $A \cup B$

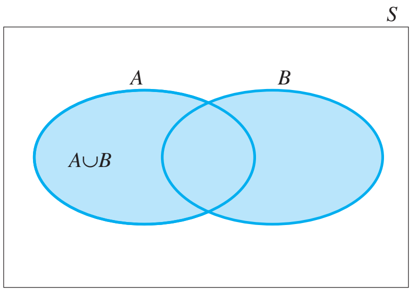
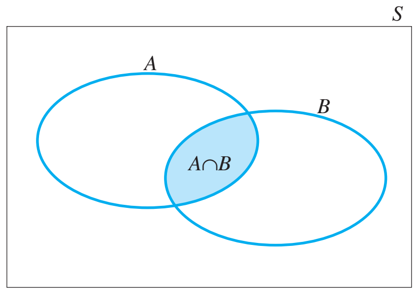


FIGURA 4.9

Diagrama de Venn $A \cap B$



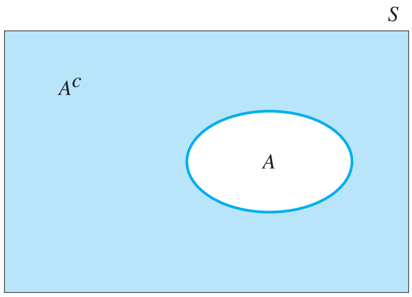
MI CONSEJO

Intersección ⇔ "ambos . . . y" o sólo "y".

Unión ⇔ "uno de dos . . . o ambos" o sólo "o".

FIGURA 4.10

El complemento de un evento



EJEMPLO 4.16

Se tiran al aire dos monedas imparciales y se registra el resultado. Éstos son los eventos de interés:

A: observar al menos una cara
B: observar al menos una cruz

Defina los eventos A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ y A^c como conjuntos de eventos simples, y encuentre sus probabilidades.

Solución Recuerde del ejemplo 4.5 que los eventos simples para este experimento son

E_1: HH (cara en primera moneda, cara en segunda)
E_2: HT
E_3: TH
E_4: TT

y que cada evento simple tiene probabilidad 1/4. El evento A, al menos una cara, se presenta si ocurre E_1, E_2 o E_3, de modo que

$$A = \{E_1, E_2, E_3\} \qquad P(A) = \frac{3}{4}$$

y

$$A^c = \{E_4\} \qquad P(A^c) = \frac{1}{4}$$

Del mismo modo,

$$B = \{E_2, E_3, E_4\} \qquad P(B) = \frac{3}{4}$$

$$A \cap B = \{E_2, E_3\} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \qquad P(A \cup B) = \frac{4}{4} = 1$$

Observe que $(A \cup B) = S$, el espacio muestral y entonces no es seguro que ocurra.

El concepto de uniones e intersecciones se puede ampliar a más de dos eventos. Por ejemplo, la unión de tres eventos A, B y C, que se escriben como $A \cup B \cup C$, es el conjunto de eventos simples que están en A o B o C o en cualquier combinación de esos eventos. Análogamente, la intersección de los tres eventos A, B y C, que se escribe como $A \cap B \cap C$, es el conjunto de eventos simples que son comunes a los tres eventos A, B y C.

Cálculo de probabilidades para uniones y complementos

Cuando podemos escribir el evento de interés en la forma de una unión, un complemento o una intersección, hay reglas de probabilidad especiales que pueden simplificar nuestros cálculos. La primera regla se refiere a *uniones* de eventos.

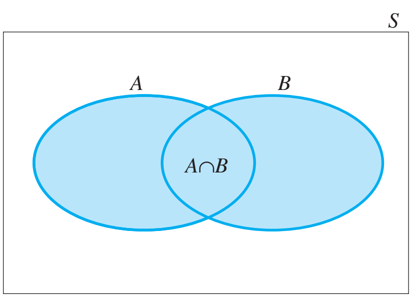
REGLA DE LA ADICIÓN

Dados dos eventos, A y B, la probabilidad de su unión, $A \cup B$, es igual a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

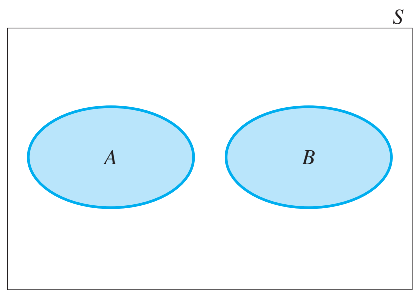
Observe en el diagrama de Venn en la figura 4.11 que la suma $P(A) + P(B)$ cuenta dos veces los eventos simples que son comunes a A y B. La resta de $P(A \cap B)$ da el resultado correcto.

FIGURA 4.11
Regla de la adición



Cuando dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos**, significa que cuando ocurre A, B no puede ocurrir, y viceversa. Esto significa que la probabilidad de que ambos ocurran, $P(A \cap B)$, debe ser cero. La figura 4.12 es una representación de un diagrama de Venn de dos de estos eventos sin ningún evento simple en común.

FIGURA 4.12
Dos eventos disjuntos



MI CONSEJO
Recuerde, mutuamente excluyente $\Leftrightarrow (A \cap B) = 0$.

Cuando dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes**, entonces $P(A \cap B) = 0$ y la Regla de la adición se simplifica a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La segunda regla se refiere a *complementos* de eventos. Se puede ver del diagrama de Venn de la figura 4.10 que A y A^c son mutuamente excluyentes y que $A \cup A^c = S$, todo el espacio muestral. Se deduce que

$$P(A) + P(A^c) = 1 \text{ y } P(A^c) = 1 - P(A)$$

REGLA PARA COMPLEMENTOS

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

EJEMPLO 4.17

Un compañía de exploración petrolera planea perforar dos pozos de exploración. Se emplea evidencia del pasado para tener acceso a los posibles resultados de la tabla 4.4.

TABLA 4.4 **Resultados para el experimento de perforación petrolífera**

Evento	Descripción	Probabilidad
A	Ningún pozo produce petróleo ni gas	.80
B	Exactamente un pozo produce petróleo o gas	.18
C	Ambos pozos producen petróleo o gas	.02

Encuentre $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$.

Solución Por su definición, los eventos A, B y C son mutuamente excluyentes en forma conjunta porque el suceso de un evento impide que ocurra cualquiera de los otros dos. Por tanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = .80 + .18 = .98$$

y

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = .18 + .02 = .20$$

El evento $A \cup B$ se puede describir como el evento de que *a lo sumo* un pozo produce petróleo o gas, y $B \cup C$ describe el evento de que *al menos* un pozo produce gas o petróleo.

EJEMPLO 4.18

En una encuesta telefónica hecha a mil adultos, a los que respondieron se les preguntó acerca del gasto de una educación universitaria y la relativa necesidad de alguna forma de ayuda financiera. Quienes respondieron fueron clasificados de acuerdo a si actualmente tenían un hijo en la universidad y si pensaban que la carga de un préstamo para casi todos los estudiantes universitarios es demasiado alta, la cantidad correcta o es muy poco. Las proporciones de quienes contestaron se muestran en la **tabla de probabilidad** de la tabla 4.5. Suponga que un entrevistado se escoge al azar de entre este grupo.

TABLA 4.5 **Tabla de probabilidad**

	Demasiado alta (A)	Cantidad correcta (B)	Muy poco (C)
Hijo en universidad	.35	.08	.01
Sin hijo en univ.	.25	.20	.11

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado tenga un hijo en la universidad?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado no tenga un hijo en la universidad?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado tenga un hijo en la universidad o piense que la carga de un préstamo es demasiado alta?

Solución La tabla 4.5 da las probabilidades para los seis eventos simples de las celdas de la tabla. Por ejemplo, la entrada en la esquina superior izquierda de la tabla es la probabilidad de que un entrevistado tenga un hijo en la universidad *y además* piense que la carga de un préstamo es demasiado alta ($A \cap D$).

1. El evento de que un entrevistado tenga un hijo en la universidad ocurrirá, cualquiera que sea su respuesta a la pregunta acerca de la carga por el préstamo. Esto es, el evento D consta de los eventos simples del primer renglón:

$$P(D) = .35 + .08 + .01 = .44$$

En general, las probabilidades de eventos *marginales* como D y A se encuentran al sumar las probabilidades en el renglón o columna apropiados.

2. El evento de que el entrevistado no tiene un hijo en la universidad es el complemento del evento D denotado por D^c. La probabilidad de D^c se encuentra como

$$P(D^c) = 1 - P(D)$$

Usando el resultado del punto 1, tenemos

$$P(D^c) = 1 - .44 = .56$$

3. El evento de interés es $P(A \cup D)$. Usando la Regla de la adición,

$$\begin{aligned} P(A \cup D) &= P(A) + P(D) - P(A \cap D) \\ &= .60 + .44 - .35 \\ &= .69 \end{aligned}$$

4.6 INDEPENDENCIA, PROBABILIDAD CONDICIONAL Y LA REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

Hay una regla de la probabilidad que se puede usar para calcular la probabilidad de la intersección de varios eventos, pero esta regla depende del importante concepto estadístico de **eventos independientes** o **dependientes**.

Definición Se dice que dos eventos, A y B, son **independientes** si y sólo si la probabilidad del evento B no está influenciada o cambiada por el suceso del evento A, o viceversa.

Daltonismo Suponga que un observador ve el género de una persona y si ésta no distingue los colores rojo y verde. ¿Cambia la probabilidad de que una persona sea daltónica, dependiendo de si es hombre o no? Defina dos eventos:

A: la persona es hombre

B: la persona es daltónica

En este caso, como el daltonismo es una característica relacionada con el sexo masculino, la probabilidad de que un hombre sea daltónico será mayor que la probabilidad de que una persona escogida de la población general sea daltónica. La probabilidad del evento B, que una persona sea daltónica, depende de si ha ocurrido o no ha ocurrido el evento A, que la persona sea hombre. Decimos que A y B son *eventos dependientes.*

Tirar dados Por el contrario, considere tirar un solo dado dos veces y defina dos eventos:

A: observar un 2 en el primer tiro

B: observar un 2 en el segundo tiro

Si el dado es imparcial, la probabilidad del evento A es $P(A) = 1/6$. Considere la probabilidad del evento B. Ya sea que el evento A haya ocurrido o no haya ocurrido, la probabilidad de observar un 2 en el segundo tiro todavía es 1/6. Podríamos escribir:

$P(B$ dado que A ocurrió$) = 1/6$

$P(B$ dado que A no ocurrió$) = 1/6$

Como la probabilidad del evento B no ha cambiado por el suceso del evento A, decimos que A y B son *eventos independientes*.

La probabilidad de un evento A, dado que el evento B ha ocurrido, se denomina **probabilidad condicional de A, dado que B ha ocurrido**, denotada por $P(A|B)$. La barra vertical se lee "dada" y los eventos que aparecen a la derecha de la barra son aquellos que se sabe han ocurrido. Usaremos estas probabilidades para calcular la probabilidad de que A *y* B ocurran cuando se realice el experimento.

REGLA GENERAL DE LA MULTIPLICACIÓN

La probabilidad de que A *y* B ocurran cuando el experimento se realiza es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

o

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

EJEMPLO 4.19

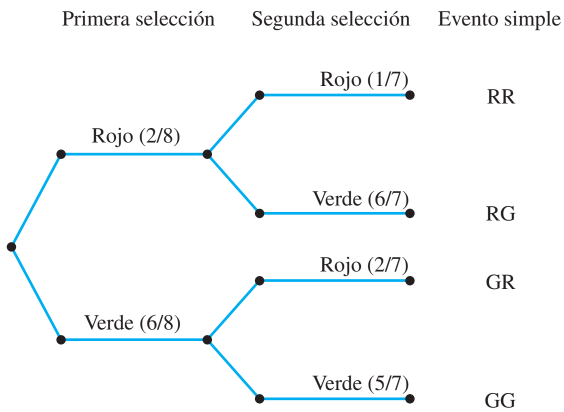
En un experimento de preferencia de color, ocho juguetes se ponen en un recipiente. Los juguetes son idénticos excepto por el color, dos son rojos y seis son verdes. Se pide a un niño que escoja dos juguetes *al azar*. ¿Cuál es la probabilidad de que el niño escoja los dos juguetes rojos?

Solución Se puede visualizar el experimento usando un diagrama de árbol como se muestra en la figura 4.13. Defina los eventos siguientes:

R: se escoge juguete rojo

G: se escoge juguete verde

FIGURA 4.13
Diagrama de árbol para el ejemplo 4.19



El evento A (ambos juguetes son rojos) se puede construir como la intersección de dos eventos:

$$A = (\text{R en la primera selección}) \cap (\text{R en la segunda selección})$$

Como sólo hay dos juguetes rojos en el recipiente, la probabilidad de escoger el rojo en la primera selección es 2/8. No obstante, una vez que haya sido escogido este juguete rojo, la probabilidad del rojo en la segunda selección *depende* del resultado de la primera selección (véase la figura 4.13). Si la primera selección fue un juguete rojo, la probabilidad de escoger un segundo juguete rojo es sólo 1/7 porque hay sólo un juguete rojo entre los siete restantes. Si la primera selección fue verde, la probabilidad de escoger rojo en la segunda selección es 2/7 porque hay dos juguetes rojos entre los siete restantes. Usando esta información y la Regla de la multiplicación, se puede hallar la probabilidad del evento A.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{R en la primera selección} \cap \text{R en la segunda selección}) \\ &= P(\text{R en la primera selección})\, P(\text{R en la segunda selección}|\text{R en la primera}) \\ &= \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{56} = \frac{1}{28} \end{aligned}$$

A veces es necesario usar la Regla de la multiplicación en una forma ligeramente diferente, de modo que se puede calcular la **probabilidad condicional, $P(A|B)$**. Sólo reacomode los términos de la Regla de la multiplicación.

PROBABILIDADES CONDICIONALES

La probabilidad condicional del evento A, dado que el evento B ha ocurrido, es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si} \quad P(B) \neq 0$$

La probabilidad condicional del evento B, dado que el evento A ha ocurrido, es

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si} \quad P(A) \neq 0$$

Daltonismo, continúa Suponga que en la población general, hay 51% de hombres y 49% de mujeres, y que las proporciones de hombres y mujeres daltónicos se muestran en la siguiente tabla de probabilidad:

	Hombres (B)	Mujeres (B^C)	Total
Daltónico (A)	.04	.002	.042
No daltónico (A^C)	.47	.488	.958
Total	.51	.49	1.00

Si una persona se escoge al azar de entre esta población y se encuentra que es hombre (evento B), ¿cuál es la probabilidad de que el hombre sea daltónico (evento A)? Si sabemos que el evento B ha ocurrido, debemos restringir nuestra atención a sólo 51% de la población que es de hombres. La probabilidad de ser daltónico, dado que la persona es hombre, es 4% de 51%, o sea

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{.04}{.51} = .078$$

¿Cuál es la probabilidad de ser daltónico, dado que la persona es mujer? Ahora estamos restringidos a sólo el 49% de la población que es de mujeres y

$$P(A|B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{.002}{.49} = .004$$

Observe que la probabilidad del evento A cambió, dependiendo de si el evento B ocurrió. Esto indica que estos dos eventos son *dependientes*.

Cuando dos eventos son **independientes**, es decir, si la probabilidad del evento B es igual, ya sea que el evento A haya o no haya ocurrido, entonces el evento A no afecta al evento B y entonces

$$P(B|A) = P(B)$$

Ahora se puede simplificar la Regla de la multiplicación.

LA REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA EVENTOS INDEPENDIENTES

Si dos eventos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran A y B es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Del mismo modo, si A, B y C son eventos mutuamente independientes (todos los pares de eventos son independientes), entonces la probabilidad de que A, B y C ocurran es

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Tiros de monedas en juegos de fútbol Un equipo de fútbol interviene en dos periodos de tiempo extra durante un juego determinado, de modo que hay tres tiros de monedas al aire. Si la moneda es imparcial, ¿cuál es la probabilidad de que pierdan los tres tiros?

Solución Si la moneda es imparcial, el evento se puede describir en tres pasos:

A: perder el primer tiro
B: perder el segundo tiro
C: perder el tercer tiro

Como los tiros son independientes y como $P(\text{gana}) = P(\text{pierde}) = .5$ para cualquiera de los tres tiros,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = (.5)(.5)(.5) = .125$$

¿Cómo se puede verificar si los dos eventos son independientes o dependientes? La solución más fácil es redefinir el concepto de **independencia** en un modo más formal.

VERIFICACIÓN DE INDEPENDENCIA

Se dice que dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

o bien,

$$P(B|A) = P(B)$$

De otro modo, se dice que los eventos son **dependientes**.

EJEMPLO 4.20

Tire al aire dos monedas y observe el resultado. Defina estos eventos:

A: cara en la primera moneda
B: cruz en la segunda moneda

¿Los eventos A y B son independientes?

Solución De los ejemplos previos, sabemos que $S = \{\text{HH, HT, TH, TT}\}$. Utilice estos cuatro eventos simples para hallar

MI CONSEJO
Recuerde, independencia $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Como $P(A)P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, tenemos $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ y los dos eventos deben ser independientes.

EJEMPLO 4.21

Consulte la tabla de probabilidad del ejemplo 4.18, que se reproduce a continuación:

	Demasiado alto (A)	Cantidad correcta (B)	Muy poco (C)
Hijo en universidad (D)	.35	.08	.01
Sin hijo en universidad (E)	.25	.20	.11

¿Los eventos D y A son independientes? Explique.

Solución

1. Utilice la tabla de probabilidad para hallar $P(A \cap D) = .35$, $P(A)= .60$ y $P(D) = .44$. Entonces

$$P(A)P(D) = (.60)(.44) = .264 \text{ y } P(A \cap D) = .35$$

Como estas dos probabilidades no son iguales, los eventos A y D son *dependientes*.

2. Alternativamente, calcule

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{.35}{.44} = .80$$

Como $P(A|D) = .80$ y $P(A) = .60$, de nuevo esto nos lleva a la conclusión de que los eventos A y D son *dependientes*.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cuál es la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes?

Muchos estudiantes encuentran difícil decir la diferencia entre eventos *mutuamente excluyentes* y eventos *independientes*.

- Cuando dos eventos son *mutuamente excluyentes* o *disjuntos*, no pueden ocurrir los dos cuando se realice el experimento. Una vez ocurrido el evento B, el evento A no puede ocurrir, de modo que $P(A|B)= 0$, o viceversa. El suceso del evento B ciertamente afecta la probabilidad de que el evento A pueda ocurrir.
- Por tanto, los eventos mutuamente excluyentes deben ser *dependientes*.
- Cuando dos eventos son *mutuamente excluyentes* o *disjuntos*, $P(A \cap B) = 0$ y $P(A \cup B)= P(A) + P(B)$.
- Cuando dos eventos son *independientes*, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

Repertorio de ejercicios

Use las relaciones citadas líneas antes para llenar los espacios en blanco de la tabla siguiente.

$P(A)$	$P(B)$	Condiciones para eventos A y B	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$	$P(A\|B)$
.3	.4	Mutuamente excluyentes			
.3	.4	Independientes			
.1	.5			.6	
.2	.5		.10		

Las respuestas están en la tarjeta perforada al final de este libro.

El uso de reglas de probabilidad para calcular la probabilidad de un evento requiere alguna experiencia e ingenio. Es necesario expresar el evento de interés como una unión o intersección (o la combinación de ambas) de dos o más eventos cuyas probabilidades son conocidas y se calculan con facilidad. Es frecuente que se pueda hacer esto en diferentes formas; la clave es hallar la combinación correcta.

EJEMPLO 4.22

Se sacan dos cartas de un mazo de 52. Calcule la probabilidad de que el saque incluya un as y un diez.

Solución Considere el evento de interés:

A: sacar un as y un 10

Entonces $A = B \cup C$, donde

B: sacar un as en el primer saque y un 10 en el segundo
C: sacar un 10 en el primer saque y un as en el segundo

Los eventos B y C se escogen como mutuamente excluyentes y también como intersecciones de eventos con probabilidades conocidas; esto es,

$$B = B_1 \cap B_2 \text{ y } C = C_1 \cap C_2$$

donde

B_1: sacar un as en el primer saque
B_2: sacar un 10 en el segundo saque
C_1: sacar un 10 en el primer saque
C_2: sacar un as en el segundo saque

Aplicando la Regla de la multiplicación, tenemos

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)$$

y

$$P(C_1 \cap C_2) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)$$

Entonces, aplicando la Regla de la adición,

$$P(A) = P(B) + P(C) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) = \frac{8}{663}$$

Con todo cuidado verifique cada composición para asegurarse que en realidad es igual al evento de interés.

4.6 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 153.

4.40 Use las relaciones de eventos para llenar los espacios en blanco de la tabla siguiente.

$P(A)$	$P(B)$	Condiciones para eventos A y B	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$	$P(A\|B)$
.3	.4		.12		
.3	.4			.7	
.1	.5	Mutuamente excluyentes			
.2	.5	Independientes			

4.41 Use relaciones de evento para llenar los espacios en blanco de la tabla siguiente.

$P(A)$	$P(B)$	Condiciones para eventos A y B	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$	$P(A\|B)$
.3	.4				
.3	.4				
.1	.5	Mutuamente excluyentes			.1
.2	.5	Independientes	0		

TÉCNICAS BÁSICAS

4.42 Un experimento puede resultar en uno de cinco eventos simples igualmente probables, $E_1, E_2, \ldots, E_5$. Los eventos A, B y C se definen como sigue:

$A: E_1, E_3 \qquad P(A) = .4$

$B: E_1, E_2, E_4, E_5 \qquad P(B) = .8$

$C: E_3, E_4 \qquad P(C) = .4$

Encuentre las probabilidades asociadas con estos eventos compuestos, haciendo una lista de los eventos simples en cada uno.

a. A^c **b.** $A \cap B$ **c.** $B \cap C$
d. $A \cup B$ **e.** $B|C$ **f.** $A|B$
g. $A \cup B \cup C$ **h.** $(A \cap B)^c$

4.43 Consulte el ejercicio 4.42. Use la definición de un evento complementario para hallar estas probabilidades:

a. $P(A^c)$ **b.** $P((A \cap B)^c)$

¿Los resultados concuerdan con los obtenidos en el ejercicio 4.42?

4.44 Consulte el ejercicio 4.42. Use la definición de probabilidad condicional para hallar estas probabilidades:

a. $P(A|B)$ **b.** $P(B|C)$

¿Los resultados concuerdan con los obtenidos en el ejercicio 4.42?

4.45 Consulte el ejercicio 4.42. Use las Reglas de la adición y de la multiplicación para hallar estas probabilidades:

a. $P(A \cup B)$ **b.** $P(A \cap B)$ **c.** $P(B \cap C)$

¿Los resultados concuerdan con los obtenidos en el ejercicio 4.42?

4.46 Consulte el ejercicio 4.42.

a. ¿Los eventos A y B son independientes?

b. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?

4.47 Dados Un experimento consiste en tirar un solo dado y observar el número de puntos que aparecen en la cara superior. Los eventos A, B y C están definidos como sigue:

A: observar un número menor a 4

B: observar un número menor o igual a 2

C: observar un número mayor a 3

Encuentre las probabilidades asociadas con los eventos citados a continuación, usando ya sea el método de evento simple o las reglas y definiciones de esta sección.

a. S **b.** $A|B$ **c.** B
d. $A \cap B \cap C$ **e.** $A \cap B$ **f.** $A \cap C$
g. $B \cap C$ **h.** $A \cup C$ **i.** $B \cup C$

4.48 Consulte el ejercicio 4.47.

a. ¿Los eventos A y B son independientes? ¿Mutuamente excluyentes?

b. ¿Los eventos A y C son independientes? ¿Mutuamente excluyentes?

4.49 Suponga que $P(A) = .4$ y $P(B) = .2$. Si los eventos A y B son independientes, encuentre estas probabilidades:

a. $P(A \cap B)$ **b.** $P(A \cup B)$

4.50 Suponga que $P(A) = .3$ y $P(B) = .5$. Si los eventos A y B son mutuamente exclusivos, encuentre estas probabilidades:

a. $P(A \cap B)$ **b.** $P(A \cup B)$

4.51 Suponga que $P(A) = .4$ y $P(A \cap B) = .12$.

a. Encuentre $P(B|A)$.

b. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?

c. Si $P(B) = .3$, ¿los eventos A y B son independientes?

4.52 Un experimento puede resultar en uno o ambos de los eventos A y B con las probabilidades que se muestran en esta tabla de probabilidad:

	A	A^c
B	.34	.46
B^c	.15	.05

Encuentre las siguientes probabilidades:

a. $P(A)$ **b.** $P(B)$ **c.** $P(A \cap B)$
d. $P(A \cup B)$ **e.** $P(A|B)$ **f.** $P(B|A)$

4.53 Consulte el ejercicio 4.52.

a. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes? Explique.

b. ¿Los eventos A y B son independientes? Explique.

APLICACIONES

4.54 Prueba de medicamentos Numerosas compañías están examinando empleados prospectos para ver si consumen drogas, con la intención de mejorar la eficiencia y reducir el ausentismo, accidentes y robos. Quienes se oponen a ello afirman que este procedimiento está creando una clase de gentes a quienes no se puede contratar y que algunas personas pueden ser puestas en esta clase porque los exámenes en sí no son 100% confiables. Suponga que una compañía utiliza un examen que es 98% confiable, es decir, correctamente identifica a una persona como que consume drogas o que no las consume con probabilidad .98 y, para reducir la probabilidad de error, se requiere que toda persona que solicite empleo se someta a dos exámenes. Si los resultados de los dos exámenes en la misma persona son eventos independientes, ¿cuáles son las probabilidades de estos eventos?

a. Un no consumidor no pasa en los dos exámenes.

b. Un consumidor es detectado (es decir, él o ella no pasa al menos un examen).

c. Un consumidor pasa ambos exámenes.

4.55 Fondo monetario para donaciones El hecho de que una propuesta para donación se financie con frecuencia depende de los críticos. Suponga que un grupo de propuestas de investigación fue evaluado por un grupo de expertos en cuanto a si las propuestas merecían ser financiadas. Cuando estas mismas propuestas fueron enviadas a un segundo grupo independiente de expertos, la decisión para financiar se invirtió en 30% de los casos. Si la probabilidad es .2 de que una propuesta sea juzgada por el primer grupo de asesores de revisiones como digna de ser financiada, ¿cuáles son las probabilidades de estos eventos?

a. Una propuesta digna es aprobada por ambos grupos.

b. Una propuesta digna es desaprobada por ambos grupos.

c. Una propuesta digna es aprobada por un grupo.

4.56 Drogadictos Un estudio de la conducta de un gran número de drogadictos, después de un tratamiento por abuso en el consumo de drogas, sugiere que la probabilidad de ser condenados en un periodo no mayor a dos años después del tratamiento, puede depender de la educación del delincuente. Las proporciones del número total de casos que caen en cuatro categorías de educación/condena se muestran en la tabla siguiente.

	Situación en no más de 2 años después del tratamiento		
Educación	Condenado	No condenado	Totales
10 años o más	.10	.30	.40
9 años o menos	.27	.33	.60
Totales	.37	.63	1.00

Suponga que se selecciona un delincuente del programa de tratamiento. Aquí tenemos los eventos de interés:

A: el delincuente tiene 10 años o más de educación

B: el delincuente es condenado no más de dos años después de terminar su tratamiento

Encuentre las probabilidades apropiadas para estos eventos:

a. A **b.** B **c.** $A \cap B$

d. $A \cup B$ **e.** A^c **f.** $(A \cup B)^c$

g. $(A \cap B)^c$ **h.** A dado que B ha ocurrido.

i. B dado que A ha ocurrido.

4.57 Use las probabilidades del ejercicio 4.56 para demostrar que estas igualdades son verdaderas:

a. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

b. $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4.58 El problema del cumpleaños Dos personas entran a un cuarto y se registran sus cumpleaños (caso omiso a sus años).

a. Identifique la naturaleza de los eventos simples en S.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas tengan un par específico de cumpleaños?

c. Identifique los eventos simples en el evento A: ambas personas tienen el mismo cumpleaños.

d. Encuentre $P(A)$. **e.** Encuentre $P(A^c)$.

4.59 El problema del cumpleaños, continúa Si n personas entran a un cuarto, encuentre estas probabilidades:

A: ninguna de las personas tienen el mismo cumpleaños

B: al menos dos de las personas tienen el mismo cumpleaños

Resuelva para

a. $n = 3$ **b.** $n = 4$

[NOTA: Sorprendentemente, $P(B)$ aumenta con rapidez cuando n aumenta. Por ejemplo, para $n = 20$, $P(B) = .411$; para $n = 40$, $P(B) = .891$.]

4.60 ¿Starbucks o Peet's®? Una estudiante universitaria frecuenta una de las dos cafeterías de su plantel, escogiendo Starbucks 70% de las veces y Peet's 30% del tiempo. En cualquiera de estos lugares, ella compra un café de moka en 60% de sus visitas.

a. La siguiente vez que vaya a una cafetería en el plantel, ¿cuál es la probabilidad de que ella vaya a Starbucks y pida un café de moka?

b. ¿Los dos eventos del inciso a) son independientes? Explique.

c. Si ella entra en una cafetería y pide un café de moka, ¿cuál es la probabilidad de que sea en Peet's?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que ella vaya a Starbucks o pida un café de moka o ambas cosas?

4.61 Líneas de inspección Cierto artículo manufacturado es inspeccionado visualmente por dos inspectores diferentes. Cuando un artículo defectuoso pasa por la línea de producción, la probabilidad de que logre pasar por el primer inspector es .1. De los que pasan el primer inspector, el segundo inspector "pierde" cinco de 10. ¿Qué fracción de artículos defectuosos logra pasar por ambos inspectores?

4.62 Fumar y cáncer Un estudio realizado en personas de una región determinada mostró que 20% de ellas eran fumadoras. La probabilidad de muerte debida a cáncer pulmonar, dado que una persona fumaba, era alrededor de 10 veces la probabilidad de muerte debida a cáncer pulmonar de una persona que no fumaba. Si la probabilidad de muerte debida a cáncer pulmonar en la región es .006, ¿cuál es la probabilidad de muerte debida a cáncer pulmonar dado que una persona es fumadora?

4.63 Detectores de humo Un sistema detector de humo utiliza dos aparatos, A y B. Si hay humo, la probabilidad de que éste sea detectado por el aparato A es .95; por el aparato B, .98; y por ambos aparatos, .94.

a. Si hay humo, encuentre la probabilidad de que éste sea detectado por el aparato A o el B o por ambos aparatos.

b. Encuentre la probabilidad de que el humo no sea detectado.

4.64 Genética de plantas Gregor Mendel fue un monje que sugirió en 1865 una teoría de la herencia basada en la ciencia de la genética. Él identificó individuos heterocigotos de flores de color que tenían dos alelos (un r = alelo recesivo de color blanco y uno R = alelo dominante de color rojo). Cuando estos individuos se apareaban, observó que 3/4 de los descendientes tenían flores rojas y 1/4 tenían flores blancas. La tabla siguiente resume este apareamiento; cada padre da uno de sus alelos para formar el gen del descendiente.

	Padre 2	
Padre 1	r	R
r	rr	rR
R	Rr	RR

Suponemos que es igualmente probable que cada padre dé cualquiera de los dos alelos y que, si uno de ellos o los dos alelos de un par es dominante (R), el descendiente tendrá flores rojas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente en este apareamiento tenga al menos un alelo dominante?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente tenga al menos un alelo recesivo?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente tenga un alelo recesivo, dado que el descendiente tiene flores rojas?

4.65 Lesiones en fútbol Durante la temporada inaugural de la liga mayor de fútbol soccer en Estados Unidos, los equipos médicos documentaron 256 lesiones que causaron la pérdida de tiempo de participación a jugadores. Los resultados de esta investigación, publicados en *The American Journal of Sports Medicine,* se muestran en la tabla siguiente.[3]

Severidad	Práctica (P)	Juego (G)	Total
Menor (A)	66	88	154
Moderada (B)	23	44	67
Grave (C)	12	23	35
Total	101	155	256

Si un individuo es sacado al azar de entre este grupo de 256 jugadores de fútbol soccer, encuentre las siguientes probabilidades:

a. $P(A)$ **b.** $P(G)$ **c.** $P(A \cap G)$
d. $P(G|A)$ **e.** $P(G|B)$ **f.** $P(G|C)$
g. $P(C|P)$ **h.** $P(B^c)$

4.66 Escoger pareja Es frecuente que hombres y mujeres no estén de acuerdo en qué piensan acerca de seleccionar una pareja. Suponga que una encuesta hecha a 1000 personas de entre 20 y 30 años dio las siguientes respuestas, a la pregunta de si es más importante para su futura pareja ser capaz de comunicar sus sentimientos (F) de lo que es para esa persona vivir bien (G).

	Sentimientos (F)	Vivir bien (G)	Totales
Hombres (M)	.35	.20	.55
Mujeres (W)	.36	.09	.45
Totales	.71	.29	1.00

Si al azar se selecciona una persona de entre este grupo de 1000, calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(F)$ **b.** $P(G)$ **c.** $P(F|M)$
d. $P(F|W)$ **e.** $P(M|F)$ **f.** $P(W|G)$

4.67 Jason y Shaq Las dos estrellas del equipo profesional de baloncesto *Miami Heat* son muy diferentes cuando se trata de tiros libres. La ESPN.com informa que Jason Williams encesta alrededor de 80% de sus tiros libres, en tanto que Shaquille O'Neal encesta sólo 53% de sus tiros libres.[4] Suponga que los tiros libres son independientes y que cada jugador toma dos tiros libres durante un juego en particular.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Jason enceste sus dos tiros libres?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Shaq enceste exactamente uno de sus dos tiros libres?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Shaq enceste sus dos tiros libres y que Jason no enceste ninguno de los suyos?

4.68 Golf El jugador A ha entrado a un torneo de golf pero no está seguro si el jugador B entrará. El jugador A tiene una probabilidad de 1/6 de ganar el torneo si el jugador B entra y una probabilidad de 3/4 de ganar si el jugador B no entra al torneo. Si la probabilidad de que el jugador B entre al torneo es 1/3, encuentre la probabilidad de que el jugador A gane el torneo.

4.7 REGLA DE BAYES (OPCIONAL)

Daltonismo Reconsideremos el experimento referente a daltonismo visto en la sección 4.6. Observe que los dos eventos

B: la persona seleccionada es un hombre

B^C: la persona seleccionada es una mujer

tomados juntos conforman el espacio muestral S, formado de hombres y mujeres. Como los daltónicos pueden ser hombres o mujeres, el evento A, que es que una persona sea daltónica, está formado de los eventos simples que estén en A **y además** en B y de los eventos simples que estén en A **y además** en B^C. Como estas dos *intersecciones* son *mutuamente excluyentes*, se puede escribir el evento A como

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

y

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \\ &= .04 + .002 = .042 \end{aligned}$$

Suponga ahora que el espacio muestral se puede dividir en k subpoblaciones, $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$, que, al igual que en el ejemplo de daltonismo, son **mutuamente excluyentes y exhaustivos**; esto es, tomados juntos conforman todo el espacio muestral. De un modo semejante, se puede expresar un evento A como

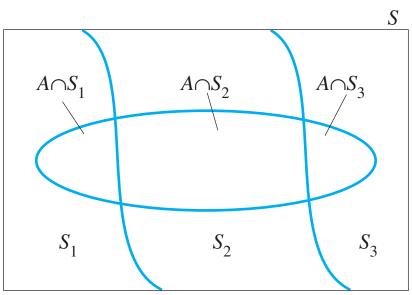
$$A = (A \cap S_1) \cup (A \cap S_2) \cup (A \cap S_3) \cup \cdots \cup (A \cap S_k)$$

Entonces

$$P(A) = P(A \cap S_1) + P(A \cap S_2) + P(A \cap S_3) + \cdots + P(A \cap S_k)$$

Esto está ilustrado para $k = 3$ en la figura 4.14.

FIGURA 4.14
Descomposición del evento *A*



Se puede avanzar un paso más y usar la Regla de la multiplicación para escribir $P(A \cap S_i)$ como $P(S_i)P(A|S_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. El resultado se conoce como la **Ley de probabilidad total**.

LEY DE PROBABILIDAD TOTAL

Dado un conjunto de eventos $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ que son mutuamente excluyentes y exhaustivos y un evento A, la probabilidad del evento A se puede expresar como

$$P(A) = P(S_1)P(A|S_1) + P(S_2)P(A|S_2) + P(S_3)P(A|S_3) + \cdots + P(S_k)P(A|S_k)$$

EJEMPLO 4.23

Los zapatos tenis ya no son sólo para jóvenes. De hecho, casi todos los adultos tienen varios pares de ellos. La tabla 4.6 da la fracción de adultos estadounidenses de 20 años de edad o más que tienen cinco o más pares de zapatos tenis en buen estado, junto con la fracción de adultos estadounidenses de 20 años o más en cada uno de los cinco grupos de edad.[5] Use la Ley de probabilidad total para determinar la probabilidad incondicional de un adulto de 20 años de edad o más que tenga cinco o más pares de zapatos tenis en buen estado.

TABLA 4.6 Tabla de probabilidad

	Grupos y edades				
	G_1 20–24	G_2 25–34	G_3 35–49	G_4 50–64	G_5 ≥ 65
Fracción con ≥ 5 pares	.26	.20	.13	.18	.14
Fracción de adultos de 20 años o más	.09	.20	.31	.23	.17

Solución Sea A el evento de que una persona seleccionada al azar de entre la población de adultos estadounidenses de 18 años de edad y más tenga cinco o más pares de zapatos tenis en buen estado. Con $G_1, G_2, \ldots, G_5$ represente el evento de que la persona seleccionada pertenezca a cada uno de los cinco grupos de edades, respectivamente. Como los cinco grupos son *exhaustivos*, se puede escribir el evento A como

$$A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2) \cup (A \cap G_3) \cup (A \cap G_4) \cup (A \cap G_5)$$

Usando la Ley de probabilidad total, se puede hallar la probabilidad de A como

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap G_1) + P(A \cap G_2) + P(A \cap G_3) + P(A \cap G_4) + P(A \cap G_5) \\ &= P(G_1)P(A|G_1) + P(G_2)P(A|G_2) + P(G_3)P(A|G_3) \\ &\qquad + P(G_4)P(A|G_4) + P(G_5)P(A|G_5) \end{aligned}$$

De las probabilidades de la tabla 4.6,

$$\begin{aligned} P(A) &= (.09)(.26) + (.20)(.20) + (.31)(.13) + (.23)(.18) + (.17)(.14) \\ &= .0234 + .0400 + .0403 + .0414 + .0238 = .1689 \end{aligned}$$

La *probabilidad incondicional* de que una persona, seleccionada de entre la población de adultos estadounidenses de 20 años de edad y más, tenga al menos cinco pares de zapatos tenis en buen estado es de alrededor de .17. Observe que la Ley de probabilidad total es un promedio ponderado de las probabilidades dentro de cada grupo, con pesos .09, .20, .31, .23 y .17, que refleja los tamaños relativos de los grupos.

Con frecuencia es necesario hallar la probabilidad incondicional de un evento B, dado que un evento A ha ocurrido. Una de estas situaciones ocurre al hacer exámenes de selección, que solían estar asociados principalmente con exámenes médicos de diagnóstico pero que ahora están encontrando aplicaciones en varios campos de actividad. Se emplea equipo automático de prueba para inspeccionar piezas en procesos de alto volumen de producción. Los exámenes de esteroides en atletas, los exámenes caseros de embarazo y los exámenes para detectar sida son algunas otras aplicaciones. Los exámenes de selección se evalúan sobre la probabilidad de un falso negativo o un falso positivo y éstas dos son *probabilidades condicionales.*

Un **falso positivo** es el evento de que el examen sea positivo para una condición determinada, dado que la persona no tiene la condición. Un **falso negativo** es el evento de que el examen sea negativo para una condición determinada, dado que la persona tiene la condición. Se pueden evaluar estas probabilidades condicionales usando una fórmula derivada por el probabilista Thomas Bayes.

El experimento comprende seleccionar una muestra de entre una de k subpoblaciones que sean mutuamente excluyentes y exhaustivas. Cada una de estas subpoblaciones, denotada por $S_1, S_2, \ldots, S_k$, tiene una probabilidad de selección $P(S_1), P(S_2), P(S_3), \ldots, P(S_k)$, llamadas *probabilidades previas*. Se observa un evento A en la selección. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra provino de la subpoblación S_i, dado que A ha ocurrido?

De la sección 4.6 se sabe que $P(S_i|A) = [P(A \cap S_i)]/P(A)$, que se puede reescribir como $P(S_i|A) = [P(S_i)P(A|S_i)]/P(A)$. Usando la Ley de probabilidad total para reescribir $P(A)$, tenemos

$$P(S_i|A) = \frac{P(S_i)P(A|S_i)}{P(S_1)P(A|S_1) + P(S_2)P(A|S_2) + P(S_3)P(A|S_3) + \cdots + P(S_k)P(A|S_k)}$$

Es frecuente que estas nuevas probabilidades se conozcan como *probabilidades posteriores*, es decir, probabilidades de las subpoblaciones (también llamadas *estados de naturaleza*) que se han actualizado después de observar la información muestral contenido en el evento A. Bayes sugirió que si las probabilidades previas son desconocidas, se pueden tomar como $1/k$, lo cual implica que cada uno de los eventos S_1 a S_k es igualmente probable.

REGLA DE BAYES

Con $S_1, S_2, \ldots, S_k$ representemos k subpoblaciones mutuamente excluyentes y exhaustivas con probabilidades previas $P(S_1), P(S_2), \ldots, P(S_k)$. Si ocurre un evento A, la probabilidad posterior de S_i dada A es la probabilidad condicional

$$P(S_i|A) = \frac{P(S_i)P(A|S_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(S_j)P(A|S_j)}$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$.

EJEMPLO 4.24

Consulte el ejemplo 4.23. Encuentre la probabilidad de que una persona seleccionada tenía 65 años de edad o más, dado que la persona tenía al menos cinco pares de zapatos tenis en buen estado.

Solución Es necesario encontrar la probabilidad condicional dada por

$$P(G_5|A) = \frac{P(A \cap G_5)}{P(A)}$$

Ya se ha calculado $P(A) = .1689$ usando la Ley de probabilidad total. Por tanto,

$$P(G_5|A) =$$

$$\frac{P(G_5)P(A|G_5)}{P(G_1)P(A|G_1) + P(G_2)P(A|G_2) + P(G_3)P(A|G_3) + P(G_4P(A|G_4) + P(G_5)P(A|G_5)}$$

$$= \frac{(.17)(.14)}{(.09)(.26) + (.20)(.20) + (.31)(.13) + (.23)(.18) + (.17)(.14)}$$

$$= \frac{.0238}{.1689} = .1409$$

En este caso, la probabilidad posterior de .14 es un poco menor que la probabilidad previa de .17 (de la tabla 4.6). Este grupo *a priori* fue el segundo más pequeño y sólo una pequeña proporción de este segmento tenía cinco o más pares de zapatos tenis en buen estado.

¿Cuál es la probabilidad posterior de quienes tienen de 35 a 49 años de edad? Para este grupo de adultos, tenemos

$$P(G_3|A) = \frac{(.31)(.13)}{(.09)(.26) + (.20)(.20) + (.31)(.13) + (.23)(.18) + (.17)(.14)} = .2386$$

Esta probabilidad posterior de .24 es considerablemente menor que la probabilidad previa de .31. En efecto, este grupo fue *a priori* el mayor segmento de la población muestreada, pero, al mismo tiempo, la proporción de individuos de este grupo que tenía al menos cinco pares de zapatos tenis en buen estado era la más pequeña de cualquiera de los grupos. Estos dos hechos tomados juntos causan un ajuste hacia abajo de casi un tercio de la probabilidad *a priori* de .31.

4.7 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

4.69 Regla de Bayes Una muestra se selecciona de una de dos poblaciones, S_1 y S_2, con probabilidades $P(S_1) = .7$ y $P(S_2) = .3$. Si la muestra se ha seleccionado de S_1, la probabilidad de observar un evento A es $P(A|S_1) = .2$. Del mismo modo, si la muestra se ha seleccionado de S_2, la probabilidad de observar A es $P(A|S_2) = .3$.

a. Si una muestra se selecciona al azar de una de las dos poblaciones, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A?

b. Si la muestra se selecciona al azar y se observa el evento A, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra sea seleccionada de la población S_1? ¿Y de la población S_2?

4.70 Regla de Bayes II Si se realiza un experimento, puede ocurrir uno y sólo uno de los tres eventos mutuamente excluyentes S_1, S_2 y S_3, con estas probabilidades:

$$P(S_1) = .2 \qquad P(S_2) = .5 \qquad P(S_3) = .3$$

Las probabilidades de que ocurra un cuarto evento A, dado que ocurre el evento S_1, S_2 o S_3, son

$$P(A|S_1) = .2 \qquad P(A|S_2) = .1 \qquad P(A|S_3) = .3$$

Si se observa el evento A, encuentre $P(S_1|A)$, $P(S_2|A)$ y $P(S_3|A)$.

4.71 Ley de probabilidad total Una población se puede dividir en dos subgrupos que se presentan con probabilidades de 60% y 40%, respectivamente. Un evento A ocurre 30% del tiempo en el primer subgrupo y 50% del tiempo en el segundo subgrupo. ¿Cuál es la probabilidad incondicional del evento A, cualquiera que sea el subgrupo de donde venga?

APLICACIONES

4.72 Delincuencia violenta Los registros de delincuencia urbana muestran que 20% de todos los delitos son violentos y que 80% no lo son, abarcando robo, falsificación, etcétera. Noventa por ciento de los delitos violentos son denunciados contra 70% de los no violentos.

a. ¿Cuál es el porcentaje general de denuncias por delitos urbanos?

b. Si un delito está ocurriendo y es denunciado a la policía, ¿cuál es la probabilidad de que sea violento? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea violento?

c. Consulte el inciso b). Si un crimen que esté ocurriendo se denuncia a la policía, ¿por qué es más probable que no sea violento? ¿No sería más probable que los delitos violentos se denunciaran? ¿Puede usted explicar estos resultados?

4.73 Error de un trabajador Una máquina operada por un trabajador produce un artículo defectuoso con probabilidad .01 si el trabajador sigue exactamente las instrucciones de operación de la máquina y con probabilidad .03 si no las sigue. Si él sigue las instrucciones 90% del tiempo, ¿qué proporción de todos los artículos producidos por la máquina será defectuosa?

4.74 Seguridad en un aeropuerto Suponga que, en una ciudad en particular, el aeropuerto A maneja 50% de todo el tráfico aéreo y los aeropuertos B y C manejan 30% y 20%, respectivamente. Los porcentajes de detección de armas en los tres aeropuertos son .9, .8 y .85, respectivamente. Si se encuentra un pasajero en uno de los aeropuertos llevando un arma por la puerta de abordar, ¿cuál es la probabilidad de que el pasajero esté usando el aeropuerto A? ¿Y el aeropuerto C?

4.75 Estrategias en fútbol Se sabe que un equipo particular de fútbol corre 30% de sus jugadas a la izquierda y 70% a la derecha. El apoyador de un equipo contrario observa que el defensa derecho cambia su posición casi todo el tiempo (80%) cuando juega a la derecha y que sigue una posición balanceada el resto del tiempo. Cuando juega a la izquierda, el defensa toma una posición balanceada 90% del tiempo y la posición de cambio el restante 10%. En una jugada particular, el apoyador observa que el defensa toma una posición balanceada.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la jugada sea a la izquierda?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la jugada sea a la derecha?

c. Si usted fuera el apoyador, ¿qué dirección prepararía para defender si vio la posición balanceada?

4.76 No pasas, no juegas Muchas escuelas públicas están poniendo en práctica una regla de "no pasas, no juegas" para atletas. En este sistema, un estudiante que no apruebe un curso es descalificado para participar en actividades extracurriculares durante el siguiente periodo de calificación. Suponga que hay una probabilidad de .15 de que un atleta, que previamente no ha sido descalificado, sea descalificado; la probabilidad de que un atleta descalificado vuelva a ser descalificado en el siguiente periodo es de .5. Si 30% de los atletas han sido descalificados antes, ¿cuál es la probabilidad incondicional de que un atleta sea descalificado durante el siguiente periodo de calificación?

4.77 Diagnóstico médico Las historias de casos clínicos indican que diferentes enfermedades pueden producir síntomas idénticos. Suponga que un conjunto particular de síntomas, que se denotarán como evento H, se presenta sólo cuando se presenta cualquiera de tres enfermedades, A, B o C. (Para mayor simplicidad, supondremos que las enfermedades A, B y C son mutuamente excluyentes.) Estudios realizados demuestran estas probabilidades de adquirir las tres enfermedades:

$$P(A) = .01$$
$$P(B) = .005$$
$$P(C) = .02$$

Las probabilidades de desarrollar los síntomas H, dada una enfermedad específica, son

$$P(H|A) = .90$$
$$P(H|B) = .95$$
$$P(H|C) = .75$$

Suponiendo que una persona enferma presente los síntomas H, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga la enfermedad A?

4.78 ¿Engañar en sus impuestos? Suponga que 5% de todas las personas que presentan el largo formato de pago de impuestos busca deducciones que se sabe son ilegales, y otro 2% incorrectamente anota deducciones porque no están familiarizados con los reglamentos de impuesto al ingreso. Del 5% que son culpables de engañar, 80% negarán saber del error si se confrontan a un investigador. Si quien presenta el largo formato se confronta a una deducción no justificada y niega saber del error, ¿cuál es la probabilidad de que sea declarada culpable?

4.79 Exámenes de selección Suponga que cierta enfermedad está presente en 10% de la población, y que hay un examen de selección diseñado para detectar si esta enfermedad está presente. El examen no siempre funciona a la perfección. A veces, es negativo cuando la enfermedad está presente y otras es positivo en ausencia de ella. La tabla siguiente muestra la proporción de tiempos en que el examen produce varios resultados.

	Examen es positivo (P)	Examen es negativo (N)
Enfermedad presente (D)	.08	.22
Enfermedad ausente (D^c)	.05	.85

a. Encuentre las siguientes probabilidades de la tabla: $P(D)$, $P(D^C)$, $P(N|D^C)$, $P(N|D)$.

b. Use la Regla de Bayes y los resultados del inciso a) para hallar $P(D|N)$.

c. Use la definición de probabilidad condicional para hallar $P(D|N)$. (Su respuesta debe ser igual a la respuesta del inciso b).)

d. Encuentre la probabilidad de un falso positivo, que el examen sea positivo, dado que la persona no tiene enfermedad.

e. Encuentre la probabilidad de un falso negativo, que el examen sea negativo, dado que la persona tiene la enfermedad.

f. Cualquiera de las probabilidades de los incisos d) o e) ¿son suficientemente grandes como para preocuparnos por la confiabilidad de este método de selección? Explique.

4.8 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS Y SUS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

En el capítulo 1, las *variables* se definieron como características que cambian o varían con el tiempo y/o para diferentes personas u objetos bajo consideración. Las *variables cuantitativas* generan datos numéricos, en tanto que las *variables cualitativas* generan datos categóricos. No obstante, incluso las variables cualitativas pueden generar datos numéricos si las categorías son codificadas numéricamente para formar una escala. Por ejemplo, si se lanza al aire una sola moneda, el resultado cualitativo podría registrarse como "0" si es cara o como "1" si es cruz.

Variables aleatorias

Una variable x valuada numéricamente varía o cambia, dependiendo del resultado particular del experimento que se mida. Por ejemplo, suponga que se tira un dado y se mide x, el número observado en la cara superior. La variable x puede tomar cualquiera de seis valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, dependiendo del resultado *aleatorio* del experimento. Por esta razón, la variable x se conoce como **variable aleatoria**.

Definición Una variable x es **variable aleatoria** si el valor que toma, correspondiente al resultado de un experimento, es una probabilidad o evento aleatorio.

Se pueden considerar numerosos ejemplos de variables aleatorias:

- x = Número de defectos en una pieza de mueble *seleccionada al azar*
- x = Calificación de examen de aptitud escolar (SAT) para un solicitando universitario *seleccionado al azar*
- x = Número de llamadas telefónicas recibidas por una línea directa de intervención en crisis durante un periodo *seleccionado al azar*

Al igual que en el capítulo 1, las variables aleatorias cuantitativas se clasifican ya sea como *discretas* o como *continuas*, de acuerdo con los valores que x pueda tomar. Es importante distinguir entre variables aleatorias discretas y continuas, porque se usan técnicas diferentes para describir sus distribuciones. Nos concentramos en variables aleatorias discretas en el resto de este capítulo; las variables aleatorias continuas son el tema del capítulo 6.

Distribuciones de probabilidad

En los capítulos 1 y 2, usted aprendió a construir la *distribución de frecuencia relativa* para un conjunto de mediciones numéricas en una variable x. La distribución dio esta información acerca de x:

- ¿Qué valores de x se presentaron?
- ¿Con qué frecuencia se presentó cada valor de x?

Usted también aprendió a usar la media y desviación estándar para medir el centro y variabilidad de este conjunto de datos.

En este capítulo, definimos la *probabilidad* como el valor limitando de la frecuencia relativa cuando el experimento se repite una y otra vez. Ahora definimos la **distribución de probabilidad** para una variable aleatoria x como la *distribución de frecuencia relativa* construida para toda la población de mediciones.

Definición La **distribución de probabilidad** para una variable aleatoria discreta es una fórmula, tabla o gráfica que da los posibles valores de x, y la probabilidad $p(x)$ asociada con cada valor de x.

Los valores de x representan eventos numéricos mutuamente excluyentes. Sumar $p(x)$ sobre todos los valores de x es equivalente a sumar las probabilidades de todos los eventos simples y por tanto es igual a 1.

REQUISITOS PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA

- $0 \leq p(x) \leq 1$
- $\Sigma\, p(x) = 1$

EJEMPLO 4.25

Lance al aire dos monedas imparciales y sea x igual al número observado de caras. Encuentre la distribución de probabilidad para x.

Solución Los eventos simples para este experimento con sus respectivas probabilidades se muestran en la tabla 4.7. Como E_1 = HH resulta en dos caras, este evento simple resulta en el valor $x = 2$. Del mismo modo, el valor $x = 1$ se asigna a E_2, y así sucesivamente.

TABLA 4.7 **Eventos simples y probabilidades al lanzar al aire dos monedas**

Evento simple	Moneda 1	Moneda 2	$P(E_i)$	x
E_1	H	H	1/4	2
E_2	H	T	1/4	1
E_3	T	H	1/4	1
E_4	T	T	1/4	0

Para cada valor de x, se puede calcular $p(x)$ al sumar las probabilidades de los eventos simples en ese evento. Por ejemplo, cuando $x = 0$,

$$p(0) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

y cuando $x = 1$,

$$p(1) = P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{2}$$

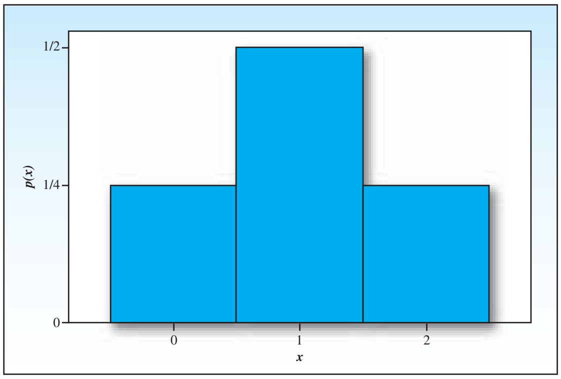
Los valores de x y sus probabilidades respectivas, $p(x)$, aparecen en la tabla 4.8. Observe que las probabilidades totalizan 1.

TABLA 4.8 **Distribución de probabilidad para x (x = número de caras)**

x	Eventos simples en x	$p(x)$
0	E_4	1/4
1	E_2, E_3	1/2
2	E_1	1/4
		$\Sigma\, p(x) = 1$

La distribución de probabilidad de la tabla 4.8 se puede graficar usando los métodos de la sección 1.5 para formar el **histograma de probabilidad** en la figura 4.15.† Los tres valores de la variable aleatoria x se encuentran en el eje horizontal, y las probabilidades $p(x)$ están en el eje vertical (sustituyendo a las frecuencias relativas empleadas en el capítulo 1). Como el ancho de cada barra es 1, el área bajo la barra es la probabilidad de observar el valor particular de x y el área total es igual a 1.

FIGURA 4.15
Histograma de probabilidad para el ejemplo 4.25



MI APPLET

Hay dos applets de Java que permiten al usuario aproximar las distribuciones de probabilidad discreta usando *métodos de simulación.* Esto es, aun cuando las probabilidades $p(x)$ sólo se pueden hallar como las frecuencias relativas a largo plazo, cuando el experimento se repite un número *infinito* de veces, podemos acercarnos a estas probabilidades si repetimos el experimento *un gran* número de veces. Los applets denominados **Flipping Fair Coins (Lanzamiento de monedas justas)** y **Flipping Weighted Coins (Lanzamiento de monedas no justas)** son dos de estas simulaciones. La forma más rápida de generar la distribución aproximada de probabilidad para x, el número de caras en n tiros de la moneda, es repetir el experimento "100 a la vez", usando el botón 100 at a Time de la parte inferior del applet. La distribución de probabilidad aumentará en forma más bien rápida. Se pueden aproximar los valores de $p(x)$ y comparar contra los valores reales calculados usando reglas de probabilidad. Usaremos estos applets para los ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

†La distribución de probabilidad de la tabla 4.8 también se puede presentar usando una fórmula, que se da en la sección 5.2.

FIGURA 4.16
Applet Flipping Fair Coins
(Lanzamiento de monedas justas)

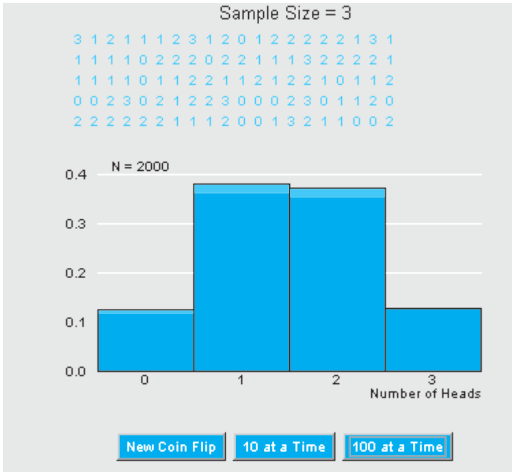
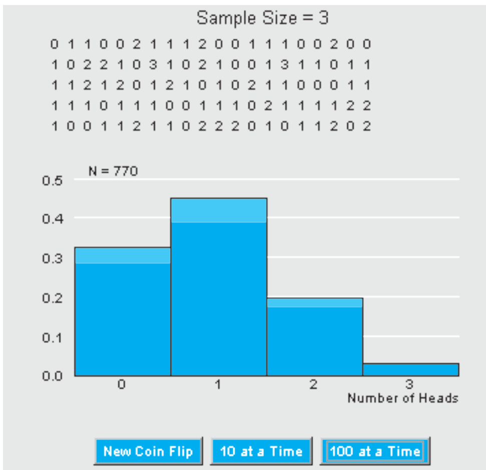


FIGURA 4.17
Applet Flipping Weighted Coins
(Lanzamiento de monedas no justas)



La media y desviación estándar para una variable aleatoria discreta

La distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta luce muy semejante a la distribución de frecuencia relativa vista en el capítulo 1. La diferencia es que la distribución de frecuencia relativa describe una *muestra* de n mediciones, en tanto que la distribución de probabilidad se construye como un modelo para *toda la población* de mediciones. Así como la media $\overline{x}$ y la desviación estándar s midieron el centro y dispersión de los datos muestrales, usted puede calcular medidas similares para describir el centro y dispersión de la población.

La media poblacional, que mide el valor promedio de x en la población, también se denomina **valor esperado** de la variable aleatoria x. Es el valor que *se esperaría* observar en *promedio* si el experimento se repite una y otra vez. La fórmula para calcular la media poblacional es más fácil de entender por ejemplo. Lance otra vez al aire esas dos monedas imparciales, y sea x el número de caras observado. Construimos esta distribución de probabilidad para x:

x	0	1	2
$p(x)$	1/4	1/2	1/4

Suponga que el experimento se repite un gran número de veces, por ejemplo $n = 4\,000\,000$ de veces. Intuitivamente, se esperaría observar alrededor de un millón de ceros, dos millones de números 1 y un millón de números dos. Entonces el valor promedio de x sería igual a

$$\frac{\text{Suma de mediciones}}{n} = \frac{1\,000\,000(0) + 2\,000\,000(1) + 1\,000\,000(2)}{4\,000\,000}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{4}\right)(2)$$

Observe que el primer término de esta suma es $(0)p(0)$, el segundo es igual a $(1)p(1)$ y el tercero es $(2)p(2)$. El valor promedio de x, entonces, es

$$\Sigma xp(x) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

Este resultado da alguna justificación intuitiva para la definición del valor esperado de una variable aleatoria x discreta.

Definición Sea x una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $p(x)$. La media o **valor esperado de x** está dada como

$$\mu = E(x) = \Sigma\, xp(x)$$

donde los elementos se suman sobre todos los valores de la variable aleatoria x.

Podríamos usar un argumento similar para justificar las fórmulas para la **varianza poblacional σ^2** y la **desviación estándar de la población σ**. Estas medidas numéricas describen la dispersión o variabilidad de la variable aleatoria usando el "promedio" o "valor esperado" del cuadrado de las desviaciones de los valores x desde su media μ.

Definición Sea x una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $p(x)$ y media μ. La **varianza de x** es

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \Sigma(x - \mu)^2 p(x)$$

donde la sumatoria es sobre todos los valores de la variable aleatoria x.[†]

Definición La **desviación estándar σ de una variable aleatoria x** es igual a la raíz cuadrada positiva de su varianza.

EJEMPLO 4.26

Una tienda de electrónica vende un modelo particular de computadora portátil. Hay sólo cuatro computadoras en existencia y la gerente se pregunta cuál será la demanda de hoy para este modelo particular. Ella se entera en el departamento de marketing de que la distribución de probabilidad para x, la demanda diaria para la laptop, es como se muestra

[†]Se puede demostrar (prueba omitida) que $\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 p(x) = \Sigma x^2 p(x) - \mu^2$. Este resultado es análogo a la fórmula de computación para la suma de cuadrados de las desviaciones dadas en el capítulo 2.

en la tabla. Encuentre la media, varianza y desviación estándar de x. ¿Es probable que cinco o más clientes deseen comprar una laptop hoy?

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	.10	.40	.20	.15	.10	.05

Solución La tabla 4.9 muestra los valores de x y $p(x)$, junto con los términos individuales empleados en las fórmulas para μ y σ^2. La suma de los valores en la tercera columna es

$$\mu = \Sigma\, xp(x) = (0)(.10) + (1)(.40) + \cdots + (5)(.05) = 1.90$$

en tanto que la suma de los valores en la quinta columna es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \Sigma(x-\mu)^2 p(x)\\ &= (0-1.9)^2(.10) + (1-1.9)^2(.40) + \cdots + (5-1.9)^2(.05) = 1.79\end{aligned}$$

y

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.79} = 1.34$$

TABLA 4.9 **Cálculos para el ejemplo 4.26**

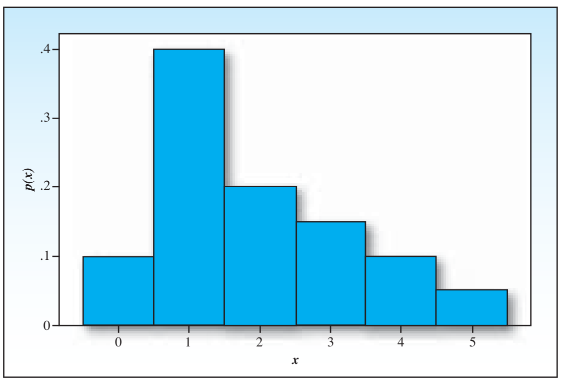
x	$p(x)$	$xp(x)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2\ p(x)$
0	.10	.00	3.61	.361
1	.40	.40	.81	.324
2	.20	.40	.01	.002
3	.15	.45	1.21	.1815
4	.10	.40	4.41	.441
5	.05	.25	9.61	.4805
Totales	1.00	$\mu = 1.90$		$\sigma^2 = 1.79$

La gráfica de la distribución de probabilidad se muestra en la figura 4.18. Como la distribución tiene más o menos la forma de montículo, aproximadamente 95% de todas las mediciones deben estar a no más de *dos* desviaciones estándar de la media, es decir,

$$\mu \pm 2\sigma \Rightarrow 1.90 \pm 2(1.34) \qquad \text{o} \qquad -.78 \text{ a } 4.58$$

Como $x = 5$ está fuera de este intervalo, se puede decir que es improbable que cinco o más clientes deseen comprar una laptop hoy. De hecho, $P(x \geq 5)$ es exactamente .05, o sea 1 vez en 20.

FIGURA 4.18
Distribución de probabilidad para el ejemplo 4.26



EJEMPLO 4.27

En una lotería realizada a beneficio de una institución local de caridad, se han de vender 8000 boletos a \$10 cada uno. El premio es un automóvil de \$24 000. Si usted compra dos boletos, ¿cuál es su ganancia esperada?

Solución Su ganancia x puede tomar uno de dos valores. O bien perderá \$20 (es decir, su "ganancia" será $-\$20$) o ganará \$23 980, con probabilidades de 7998/8000 y 2/8000, respectivamente. La distribución de probabilidad para la ganancia x se muestra en la tabla:

x	$p(x)$
$-\$20$	7998/8000
\$23 980	2/8000

La ganancia esperada será

$$\mu = \Sigma\, xp(x)$$

$$= (-\$20)\left(\frac{7998}{8000}\right) + (\$23\,980)\left(\frac{2}{8000}\right) = -\$14$$

Recuerde que el valor esperado de x es el promedio de la población teórica que resultaría si la lotería se repitiera un número infinitamente grande de veces. Si se hiciera esto, su ganancia promedio o esperada por boleto de lotería sería una pérdida de \$14.

EJEMPLO 4.28

Determine la prima anual para una póliza de seguro de \$10 000 que cubre un evento que, en un largo tiempo, ha ocurrido a razón de 2 veces en 100. Sea x igual a la ganancia financiera anual para la compañía de seguros, que resulte de la venta de la póliza, y sea C igual a la prima anual desconocida. Calcule el valor de C tal que la ganancia esperada $E(x)$ iguale a cero. Entonces C es la prima requerida para que haya punto de equilibrio. Para esto, la compañía sumaría costos administrativos y utilidad.

Solución El primer paso en la solución es determinar los valores que la ganancia x puede tomar y luego determinar $p(x)$. Si el evento no ocurre durante el año, la compañía de seguros ganará la prima de $x = C$ dólares. Si el evento ocurre, la ganancia será negativa; esto es, la compañía perderá \$10 000 menos la prima de C dólares ya recolectada. Entonces $x = -(10\,000 - C)$ dólares. Las probabilidades asociadas con estos dos valores de x son 98/100 y 2/100, respectivamente. La distribución de probabilidad para la ganancia se muestra en la tabla:

x = Ganancia	$p(x)$
C	98/100
$-(10\,000 - C)$	2/100

Como la compañía desea una prima de seguro C tal que, a largo plazo (para muchas pólizas similares), la ganancia media sea igual a cero, se puede establecer el valor esperado de x igual a cero y despejar C. Entonces

$$\mu = E(x) = \Sigma xp(x)$$

$$= C\left(\frac{98}{100}\right) + [-10\,000 + C)]\left(\frac{2}{100}\right) = 0$$

o

$$\frac{98}{100}C + \frac{2}{100}C - 200 = 0$$

Despejando C de esta ecuación, se obtiene $C = \$200$. Por tanto, si la compañía de seguros cobró una prima anual de \$200, el promedio de ganancia calculada para un gran número de pólizas similares sería igual a cero. La prima real sería igual a $200 más costos administrativos y utilidad.

El método para calcular el valor esperado de x para una variable aleatoria continua es similar a lo que acabamos de hacer, pero en la práctica requiere el uso de cálculo. No obstante, los resultados básicos respecto a expectativas son los mismos para variables aleatorias continuas y discretas. Por ejemplo, sin considerar si x es continua o discreta, $\mu = E(x)$ y $\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$.

4.8 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

4.80 ¿Discretas o continuas? Identifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

a. El número total de puntos anotados en un juego de fútbol.
b. La duración en estante de un medicamento particular.
c. La altura de la marea del océano en un lugar determinado.
d. Longitud de una perca americana de 2 años de edad.
e. El número de choques de aviones en el aire que casi ocurren en un año.

4.81 ¿Discretas o continuas? II Identifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

a. Aumento en tiempo de vida alcanzado por un paciente de cáncer como resultado de una cirugía.
b. Resistencia a la ruptura (en libras por pulgada cuadrada) de un cable de acero de una pulgada de diámetro.
c. Número de venados muertos por año en una reservación estatal de fauna silvestre.
d. Número de cuentas vencidas en una tienda de departamentos en un tiempo particular.
e. Su presión sanguínea.

4.82 Distribución de probabilidad I Una variable aleatoria x tiene esta distribución de probabilidad:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	.1	.3	.4	.1	?	.05

a. Encuentre $p(4)$.
b. Construya un histograma de probabilidad para describir $p(x)$.
c. Encuentre μ, σ^2 y σ.
d. Localice el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ en el eje x del histograma. ¿Cuál es la probabilidad de que x caiga en este intervalo?
e. Si fuéramos a seleccionar un número muy grande de valores de x de la población, ¿casi todos caerían en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$? Explique.

4.83 Distribución de probabilidad II Una variable aleatoria x puede tomar cinco valores: 0, 1, 2, 3, 4. Una parte de la distribución de probabilidad se muestra aquí:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	.1	.3	.3	?	.1

a. Encuentre $p(3)$.
b. Construya un histograma de probabilidad para $p(x)$.
c. Calcule la media poblacional, varianza y desviación estándar.
d. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea mayor a 2?
e. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea 3 o menor?

4.84 Dados Sea x igual al número observado en el tiro de un solo dado balanceado.

a. Encuentre y grafique la distribución de probabilidad para x.
b. ¿Cuál es el promedio o valor esperado de x?
c. ¿Cuál es la desviación estándar de x?
d. Localice el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ en el eje x de la gráfica del inciso a). ¿Qué proporción de todas las mediciones caerían en este intervalo?

4.85 Visitas de tienda Con x represente el número de veces que un cliente va a una tienda en un periodo de una semana. Suponga que ésta es la distribución de probabilidad de x:

x	0	1	2	3
$p(x)$	.1	.4	.4	.1

Encuentre el valor esperado de x, el número promedio de veces que un cliente va a la tienda.

APLICACIONES

4.86 ¿Letterman o Leno? ¿Quién es el rey de las horas ya tarde en la noche en la televisión? Un estudio por internet estima que, cuando hay opción entre David Letterman y Jay Leno, 52% de la población prefiere ver a Jay Leno. Suponga que al azar seleccionamos tres televidentes noctámbulos y les preguntamos a cuál presentador prefiere.

a. Encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de personas de la muestra de tres que preferirían a Jay Leno.

b. Construya el histograma de probabilidad para $p(x)$.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los tres prefiera a Jay Leno?

d. ¿Cuáles son la media poblacional y desviación estándar para la variable aleatoria x?

4.87 ¿Cuál llave es? Un llavero contiene cuatro llaves de oficina que son idénticas en apariencia, pero sólo una abrirá la puerta de su oficina. Suponga que al azar selecciona una llave y prueba con ella. Si no es la buena, al azar selecciona una de las tres llaves restantes. Si tampoco es la buena, al azar selecciona una de las dos últimas. Cada secuencia diferente que pueda ocurrir al seleccionar las llaves representa uno de un conjunto de eventos simples igualmente probables.

a. Haga una lista de los eventos simples en S y asigne probabilidades a los eventos simples.

b. Sea x igual al número de llaves con las que se intenta antes de hallar la que abre la puerta ($x = 1, 2, 3, 4$). A continuación asigne el valor apropiado de x a cada evento simple.

c. Calcule los valores de $p(x)$ y preséntelos en una tabla.

d. Construya un histograma de probabilidad para $p(x)$.

4.88 Ruleta El ejercicio 4.10 describió el juego de la ruleta. Supongamos que usted apuesta \$5 en un solo número, por ejemplo el 18. El pago en este tipo de apuesta es por lo general 35 a 1. ¿Cuál es su ganancia esperada?

4.89 ¿Sesgo en género? Una compañía tiene cinco solicitantes para dos puestos de trabajo: dos mujeres y tres hombres. Suponga que los cinco solicitantes son igualmente calificados y que no hay preferencia para escoger su género. Sea x igual al número de mujeres escogidas para ocupar los dos puestos de trabajo.

a. Encuentre $p(x)$.

b. Construya un histograma de probabilidad para x.

4.90 Equipo defectuoso Una pieza de equipo electrónico contiene seis chips de computadora, dos de los cuales son defectuosos. Al azar se seleccionan tres chips, se retiran del equipo y se inspeccionan. Sea x igual al número de defectos observados, donde $x = 0$, 1 o 2. Encuentre la distribución de probabilidad para x. Exprese los resultados gráficamente como un histograma de probabilidad.

4.91 Perforación de pozos petroleros La experiencia del pasado ha demostrado que, en promedio, sólo uno de cada 10 pozos produce petróleo. Sea x el número de perforaciones hasta el primer éxito (se encuentra petróleo). Suponga que las perforaciones representan eventos independientes.

a. Encuentre $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$.

b. Dé una fórmula para $p(x)$.

c. Grafique $p(x)$.

4.92 ¿Alguien juega tenis? Dos jugadores profesionales, A y B, están programados para jugar un partido: el ganador es el primer jugador en ganar tres sets de un total que no puede pasar de cinco sets. El evento en que A gane algún set es independiente del evento de que A gane cualquier otro y la probabilidad de que A gane cualquier set es igual a .6. Sea x igual al número total de sets del partido; esto es, $x = 3$, 4 o 5. Encuentre $p(x)$.

4.93 Tenis, otra vez La probabilidad de que el jugador A pueda ganar un set contra el jugador B es una medida de las capacidades comparativas de los dos jugadores. En el ejercicio 4.92 se encontró la distribución de probabilidad para x, el número de sets requeridos para jugar un partido del mejor en cinco sets, dado que la probabilidad de que A gane cualquier set, llame $P(A)$ a esto, es .6.

a. Encuentre el número esperado de sets necesario para completar el partido para $P(A) = .6$.

b. Encuentre el número esperado de sets necesario para completar el partido cuando los jugadores sean de igual capacidad, es decir, $P(A) = .5$.

c. Encuentre el número esperado de sets necesario para completar el partido cuando los jugadores difieran en mucho en capacidad, es decir, por ejemplo, $P(A) = .9$.

4.94 La PGA Un jugador profesional de golf juega mejor en hoyos a corta distancia. La experiencia ha demostrado que los números x de tiros necesarios para hoyos de par 3, 4 y 5 tienen las distribuciones de probabilidad que se muestran en la tabla:

Hoyos par 3		Hoyos par 4		Hoyos par 5	
x	$p(x)$	x	$p(x)$	x	$p(x)$
2	.12	3	.14	4	.04
3	.80	4	.80	5	.80
4	.06	5	.04	6	.12
5	.02	6	.02	7	.04

¿Cuál es la puntuación esperada del jugador de golf en estos hoyos?

a. Un hoyo de par 3

b. Un hoyo de par 4

c. Un hoyo de par 5

4.95 Asegurar sus diamantes Una persona puede asegurar un diamante de \$50 000 por su valor total si paga una prima de D dólares. Si la probabilidad de robo en un año determinado se calcula que es .01, ¿qué prima debe cobrar la compañía de seguros si desea que la ganancia esperada sea igual a $1000?

4.96 Prueba de la FDA La duración máxima de patente para un nuevo medicamento es 17 años. La resta del tiempo requerido por la FDA para probar y aprobar el medicamento da la vida real de patente del medicamento, es decir, el tiempo que una compañía tiene para recuperar costos de investigación y desarrollo y obtener una utilidad. Suponga que la distribución de tiempos de vida de patente para nuevos medicamentos es como se muestra a continuación:

Años, x	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	.03	.05	.07	.10	.14	.20

Años, x	9	10	11	12	13
$p(x)$	.18	.12	.07	.03	.01

a. Encuentre el número esperado de años de vigencia de patente para un nuevo medicamento.

b. Encuentre la desviación estándar de x.

c. Encuentre la probabilidad de que x caiga en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$.

4.97 Descanso para tomar café ¿Toma usted café? Si es así, ¿cuántos descansos para tomar café se da cuando está en el trabajo o en la escuela? Casi todas las personas que toman café se dan un poco de tiempo para tomarlo y muchas se dan más de un descanso al día para tomarlo. La tabla siguiente, adaptada de un Snapshot de *USA Today* muestra la distribución de probabilidad para x, el número de descansos diarios por día que se dan quienes toman café.[6]

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	.28	.37	.17	.12	.05	.01

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que toma café, seleccionada al azar, no se dé descanso para tomar café durante el día?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que toma café, seleccionada al azar, se dé más de dos descansos para tomar café durante el día?

c. Calcule la media y desviación estándar para la variable aleatoria x.

d. Encuentre la probabilidad de que x caiga en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$.

4.98 Cargos por envío Por experiencia, una compañía de transporte sabe que el costo de entregar un paquete pequeño antes de 24 horas es de $14.80. La compañía cobra $15.50 por el envío pero garantiza la devolución del cargo si no lo entrega antes de 24 horas. Si la compañía no hace entregas en sólo 2% de su paquetería antes del periodo de 24 horas, ¿cuál es la ganancia esperada por paquete?

4.99 Actuarios El representante de una empresa manufacturera está considerando tomar una póliza de seguro para cubrir posibles pérdidas en que incurre al vender un nuevo producto. Si el producto es un completo fracaso, el representante piensa que incurrirá en una pérdida de $800 000; si es sólo un éxito moderado, incurrirá en una pérdida de $250 000. Los actuarios de seguros han determinado, por estudios de mercado y otra información disponible, que las probabilidades de que el producto sea un fracaso o sólo tendrá éxito moderado son .01 y .05, respectivamente. Suponiendo que el representante de la empresa manufacturera esté dispuesto a ignorar todas las otras posibles pérdidas, ¿qué prima debe cobrar la compañía de seguros por una póliza para no tener pérdida ni ganancia?

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Experimentos y espacio muestral

1. Experimentos, eventos, eventos mutuamente exclusivos, eventos simples
2. El espacio muestral
3. Diagramas de Venn, diagramas de árbol, tablas de probabilidad

II. Probabilidades

1. Definición de probabilidad de frecuencia relativa
2. Propiedades de probabilidades
   a. Cada probabilidad está entre 0 y 1.
   b. La suma de todas las probabilidades de evento simple es igual a 1.
3. $P(A)$, la suma de las probabilidades para todos los eventos simples en A.

III. Reglas de conteo

1. Regla mn; Regla mn extendida

2. Permutaciones: $P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

3. Combinaciones: $C^n_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

IV. Relaciones de eventos

1. Uniones e intersecciones
2. Eventos
   a. Disjuntos o mutuamente excluyentes: $P(A \cap B) = 0$
   b. Complementarios: $P(A) = 1 - P(A^C)$
3. Probabilidad condicional: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{(PB)}$
4. Eventos independientes y dependientes
5. Regla de la adición: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Regla de la multiplicación: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
7. Ley de probabilidad total
8. Regla de Bayes

V. Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

1. Variables aleatorias, discretas y continuas
2. Propiedades de distribuciones de probabilidad
   a. $0 \leq p(x) \leq 1$
   b. $\Sigma p(x) = 1$
3. Media o valor esperado de una variable aleatoria discreta: $\mu = \Sigma xp(x)$
4. Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta: $\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 p(x)$ y $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

MI MINITAB

Distribuciones discretas de probabilidad

Aun cuando el *MINITAB* no puede ayudar a resolver los tipos de problemas generales de probabilidad presentados en este capítulo, es útil para graficar la distribución de probabilidad $p(x)$ para una variable general x aleatoria discreta cuando se conocen las probabilidades, y para calcular la media, varianza y desviación estándar de la variable aleatoria x. En los capítulos 5 y 6, usaremos *MINITAB* para calcular las probabilidades exactas para tres casos especiales: el binomial, el Poisson y las variables aleatorias normales.

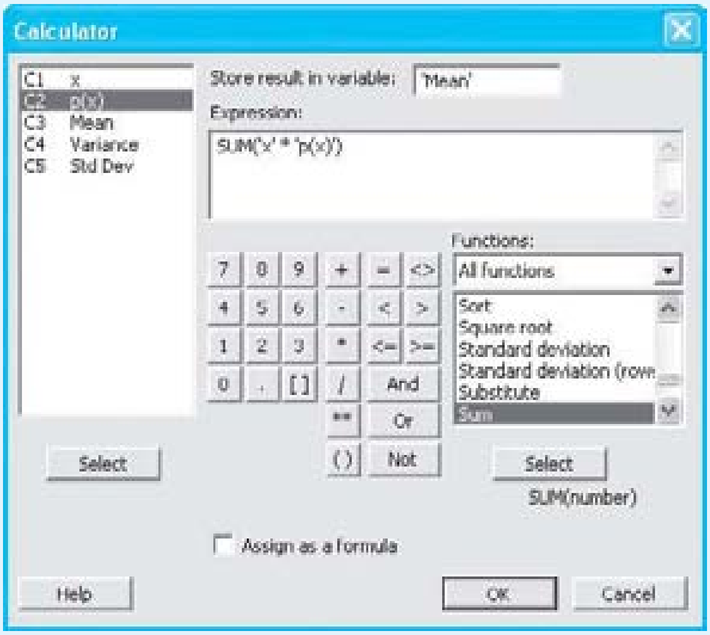
Supongamos que usted tiene esta distribución general de probabilidad:

x	0	1	3	5
$p(x)$	.25	.35	.25	.15

Introduzca los valores de x y $p(x)$ en las columnas C1 y C2 de una hoja de trabajo *MINITAB* nueva. En las cajas grises un poco abajo de C3, C4 y C5, respectivamente, escriba los nombres "Media", "Varianza" y "Std Dev". Ahora puede usar el comando **Calc → Calculator** para calcular μ, σ^2 y σ y para guardar los resultados en las columnas C3-C5 de la hoja de trabajo. Use el mismo método para los tres parámetros. En el cuadro de diálogo Calculator, **seleccione** "Media" como la columna en la cual guardar μ. En la caja Expression, use la lista de Funciones, las teclas de la calculadora y la lista de variables de la izquierda para resaltar, **select**, y genere la expresión para la media (véase la figura 4.19):

SUM('x'*p(x)')

FIGURA 4.19



¡*MINITAB* multiplicará el elemento de cada renglón en C1 por el correspondiente elemento de renglón en C2, suma los productos resultantes y guarda el resultado en C3! Se puede comprobar manualmente el resultado si se desea. Las fórmulas para la varianza y desviación estándar se seleccionan de un modo semejante:

Varianza: SUM((‘x’ − ‘Media’)**2*‘p(x)’)
Std Dev: SQRT(‘Varianza’)

Para ver la forma tabular de la distribución de probabilidad y los tres parámetros, use **Data** → **Display Data** y seleccione las cinco columnas. Dé un clic en **OK** y los resultados se exhibirán en la ventana Session, como se muestra en la figura 4.20.

El histograma de probabilidad se puede graficar usando el comando *MINITAB* **Graph** → **Scatterplot** → **Simple** → **OK**. En el cuadro de diálogo Scatterplot (figura 4.21), seleccione ‘p(x)’ para **Y variables** y ‘x’ para **X variables**. Para exhibir las barras discretas de probabilidad, dé un clic en **Data View**, quite la marca de la caja marcada “Symbols”, y ponga marca en la caja marcada “Project Lines”. Dé un doble clic en **OK** para ver la gráfica. Verá una sola recta proyectada en cada uno de los cuatro valores de *x*. Si desea que la gráfica se vea más como los histogramas discretos de probabilidad de la sección 4.8, coloque el cursor en una de las rectas, dé un clic derecho del mouse y escoja “Edit Project Lines”. Bajo la ficha “Attributes”, seleccione **Custom** y cambie el tamaño de recta a **75**. Dé un click en **OK**. Si el ancho de barra no es satisfactorio, puede reajustar el tamaño de la recta. Por último, dé un clic derecho en el eje X, escoja “Edit X Scale” y seleccione **−.5** y **5.5** para las **Scale Ranges** mínimas y máximas. Dé un clic en **OK**. El histograma de probabilidad se muestra en la figura 4.22.

Localice la media en la gráfica. ¿Está en el centro de la distribución? Si usted marca dos desviaciones estándar en cualquier lado de la media, ¿casi todos los posibles valores de *x* caen en este intervalo?

FIGURA 4.20

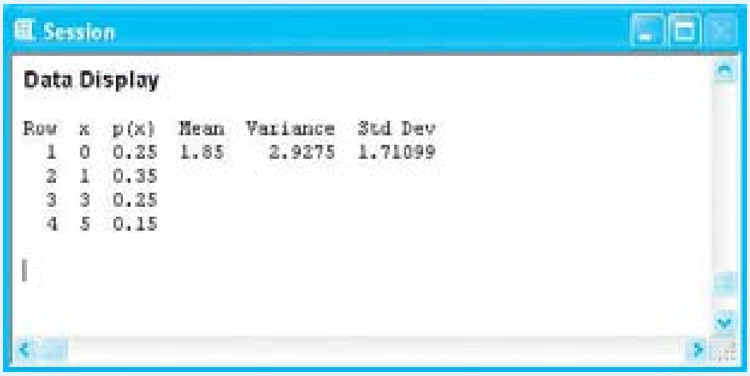


FIGURA 4.21

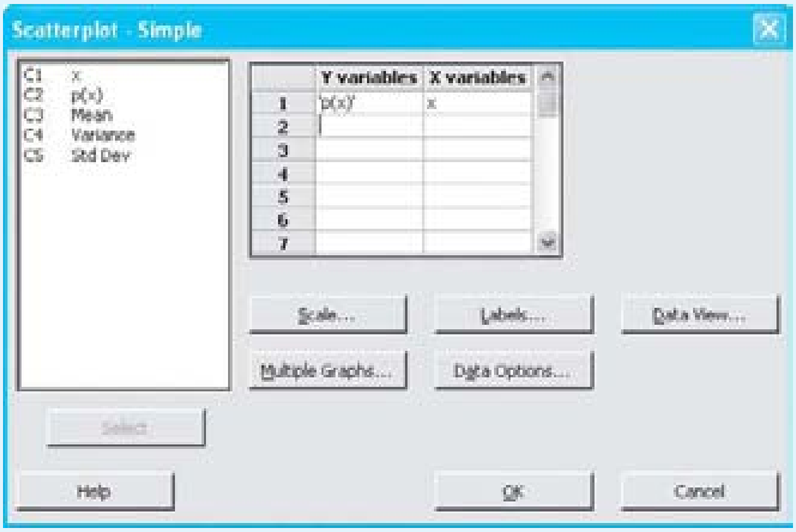
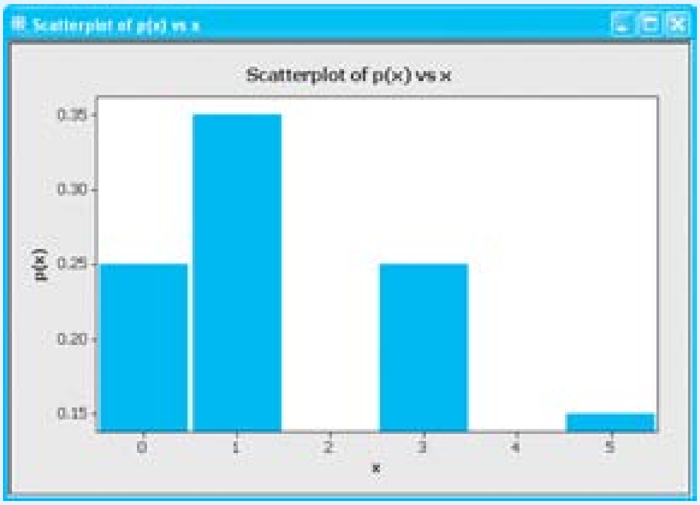


FIGURA 4.22



Ejercicios suplementarios

Los ejercicios con asterisco (*) son opcionales.

4.100 Jugar en tragamonedas Una máquina tragamonedas tiene tres ranuras; cada una muestra una cereza, un limón, una estrella o una barra cuando se hace girar. El jugador gana si las tres ranuras muestran los mismos tres objetos. Si es igualmente probable que cada uno de los cuatro objetos aparezca en un giro determinado, ¿cuál es su probabilidad de ganar?

4.101 Sopladores de silbato "Sopladores de silbato" es el nombre que se da a empleados que informan de un fraude corporativo, robo u otras actividades nada éticas y tal vez delictivas cometidas por compañeros de trabajo o por su empleador. Aun cuando hay protección legal para los "sopladores de silbato", se ha informado que alrededor de 23% de quienes informan de fraude sufren represalias como por ejemplo degradación o calificación de mal rendimiento. Suponga que la probabilidad de que un empleado no informe de un caso de fraude es .69. Encuentre la probabilidad de que un trabajador que observe un caso de fraude informe del mismo y después sufra alguna forma de represalia.

4.102 Aspirina Dos tabletas para resfriado se colocan accidentalmente en una caja que contiene dos aspirinas. Las cuatro tabletas son idénticas en apariencia. Una tableta se selecciona al azar de la caja y es tomada por el primer paciente. A continuación se selecciona una tableta al azar de las tres tabletas restantes y es tomada por el segundo paciente. Defina los siguientes eventos como conjuntos específicos de eventos simples:

a. El espacio muestral S.

b. El evento A que el primer paciente obtuvo una tableta para resfriado.

c. El evento B de que exactamente uno de los dos pacientes obtuvo una tableta para resfriado.

d. El evento C de que ningún paciente obtuvo una tableta para resfriado.

4.103 Consulte el ejercicio 4.102. Resumiendo las probabilidades de eventos simples, encuentre $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(C)$, $P(A \cap C)$ y $P(A \cup C)$.

4.104 Reproductores de discos de video Un detallista vende dos estilos de grabadoras de video digitales de alto precio (DVR) que la experiencia indica que tienen igual demanda. (50% de todos los potenciales compradores prefieren el estilo 1 y 50% están a favor del estilo 2.) Si el detallista tiene en existencia cuatro de cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro primeros clientes que buscan una DVR compren el mismo estilo?

4.105 Comercio interestatal Un contenedor de embarques contiene siete sistemas electrónicos complejos. Sin que el comprador lo sepa, tres están defectuosos. Dos de los siete son seleccionados para pruebas completas y luego son clasificados como defectuosos o no defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que no se encuentren defectuosos?

4.106 Equipo pesado Un vendedor de equipo pesado puede comunicarse con uno o dos clientes por día con probabilidades 1/3 y 2/3, respectivamente. Cada contacto resultará en no venta o en una venta de \$50 000 con probabilidades de 9/10 y 1/10, respectivamente. ¿Cuál es el valor esperado de sus ventas diarias?

4.107 Seguro contra incendios Se piensa que un condado donde hay un gran número de casas rurales tiene 60% de esas casas aseguradas contra incendios. Cuatro propietarios de casas rurales se seleccionan al azar de entre toda la población y se encuentra que x de ellos están asegurados contra incendios. Encuentre la distribución de probabilidad para x. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres de los cuatro estén asegurados?

4.108 Alarmas contra incendios Un aparato para detección de incendios usa tres celdas sensibles a la temperatura que actúan de manera independiente entre sí, en forma tal que cualquiera de ellas puede activar la alarma. Cada celda tiene una probabilidad $p = .8$ de activar la alarma cuando la temperatura alcance 100°F o más. Sea x igual al número de celdas que activen la alarma cuando la temperatura llegue a 100°F.

a. Encuentre la distribución de probabilidad de x.

b. Encuentre la probabilidad de que la alarma funcionará cuando la temperatura alcance los 100°F.

c. Encuentre el valor esperado y la varianza para la variable aleatoria x.

4.109 Pescar un resfrío ¿Su probabilidad de contraer un resfriado está influida por el número de contactos sociales que tenga? Un estudio hecho por Sheldon Cohen, profesor de psicología de la Carnegie Mellon University, parece demostrar que cuantas más relaciones sociales tenga alguien, *menos susceptible* será a los resfriados. Un grupo de 276 hombres y mujeres sanos se agruparon de acuerdo al número de sus relaciones (por ejemplo de padres, amigos, miembros de la iglesia, vecinos). A continuación fueron expuestos a un virus que produce el resfriado. En la tabla siguientes se presenta una adaptación de los resultados:[7]

	Número de relaciones		
	Tres o menos	Cuatro o cinco	Seis o más
Resfriado	49	43	34
No resfriado	31	57	62
Total	80	100	96

a. Si una persona se selecciona al azar de entre las 276 del estudio, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga un resfriado?

b. Si dos personas se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que una tenga cuatro o cinco relaciones y la otra tenga seis o más relaciones?

c. Si una sola persona se selecciona al azar y tiene un resfriado, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella tenga tres o menos relaciones?

4.110 Genética de plantas Consulte el experimento realizado por Gregor Mendel en el ejercicio 4.64. Supongamos que usted está interesado en seguir dos características independientes en chícharos, textura suave (S = suave, s = arrugada) y color de semilla (Y = amarilla, y = verde), en un cruce de segunda generación de padres heterocigotos. Complete la tabla con los pares de genes para ambas características. Todos los apareamientos son igualmente probables.

	Color de semilla			
Textura de semilla	yy	yY	Yy	YY
ss	(ss yy)	(ss yY)		
sS				
Ss				
SS				

a. ¿Qué proporción de los descendientes de este cruce tendrá chícharos amarillos de superficie suave?

b. ¿Qué proporción de los descendientes tendrá chícharos verdes de superficie suave?

c. ¿Qué proporción de los descendientes tendrá chícharos amarillos arrugados?

d. ¿Qué proporción de los descendientes tendrá chícharos verdes arrugados?

e. Dado que un descendiente tiene chícharos amarillos de superficie suave, ¿cuál es la probabilidad de que este descendiente lleve un alelo s? ¿O un alelo s *y además* un alelo y?

4.111 Acciones rentables Una inversionista tiene la opción de invertir en tres de cinco acciones recomendadas. Sin saberlo ella, sólo dos mostrarán una utilidad importante dentro de los siguientes 5 años. Si ella selecciona las tres acciones al azar (dando a toda combinación de tres acciones una oportunidad igual de selección), ¿cuál es la probabilidad de que ella seleccione las dos acciones rentables? ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione sólo una de las dos acciones rentables?

4.112 ¿Sesgo racial? Cuatro trabajadores sindicalizados, dos de un grupo minoritario, son asignados a cuatro trabajos diferentes de un solo hombre, que se puede clasificar en orden de conveniencia.

a. Defina el experimento.

b. Haga una lista de los eventos simples en *S*.

c. Si la asignación de los trabajos no está sesgada, es decir, si cualquier orden de asignaciones es tan probable como cualquier otro, ¿cuál es la probabilidad de que los dos trabajadores del grupo minoritario sean asignados a los trabajos menos deseables?

4.113 Una vendedora reticente Una vendedora calcula que la probabilidad de que ella realice una venta durante el primer contacto con un cliente es .4, pero mejora a .55 en el segundo contacto si el cliente no compró durante el primer contacto. Suponga que esta vendedora hace una llamada de retorno, y sólo una, a un cliente. Si ella hace contacto con un cliente, calcule las probabilidades de estos eventos:

a. El cliente comprará.

b. El cliente no comprará.

4.114 Autobús o metro Un hombre toma ya sea un autobús o el metro para ir al trabajo, con probabilidades .3 y .7, respectivamente. Cuando toma el autobús, llega tarde 30% de los días. Cuando toma el metro, llega tarde 20% de los días. Si el hombre llega tarde al trabajo en un día particular, ¿cuál es la probabilidad de que tomó el autobús?

4.115 Proyectiles dirigidos El porcentaje de falla para un sistema de control de proyectiles dirigidos es 1 en 1000. Suponga que un sistema de control duplicado, pero completamente independiente, se instala en cada proyectil para que, si el primero falla, el segundo tome el control. La confiabilidad de un proyectil es la probabilidad de que no falle. ¿Cuál es la confiabilidad del proyectil modificado?

4.116 Camiones en renta Una agencia de renta de camiones da servicio regularmente a sus vehículos, revisando de rutina los problemas mecánicos. Suponga que la agencia tiene seis camionetas de mudanzas tipo van, dos de las cuales necesitan frenos nuevos. Durante una revisión de rutina, las camionetas son probadas una por una.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la última camioneta con problemas de frenos sea la cuarta que se pruebe?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no más de cuatro camionetas necesiten ser probadas antes de detectarse problemas de frenos?

c. Dado que una camioneta con frenos en mal estado sea detectada en las primeras dos pruebas, ¿cuál es la probabilidad de que la camioneta restante se encuentre en la tercera o cuarta revisión?

4.117 Lotería de Pennsylvania La probabilidad desempeñó un papel en el manipuleo fraudulento de la lotería del estado de Pennsylvania, del 24 de abril de 1980. Para determinar cada dígito del número ganador de tres dígitos, cada uno de los números 0, 1, 2, . . . , 9 se escribe en una pelota de ping-pong, las 10 pelotas son sopladas hacia un compartimento y el número seleccionado para el dígito es uno de la pelota que flota a la parte superior de la máquina. Para alterar la probabilidad, los conspiradores inyectaron un líquido en todas las pelotas empleadas en el juego excepto en las numeradas 4 y 6, haciendo casi seguro que las pelotas más ligeras serían seleccionadas para determinar los dígitos del número ganador. Entonces procedieron a comprar billetes de lotería con los potenciales números ganadores. ¿Cuántos números ganadores potenciales hubo (666 fue el número ganador)?

***4.118 Lotería, continúa** Consulte el ejercicio 4.117. Horas después que el manipuleo fraudulento de la lotería del estado de Pennsylvania fuera anunciado el 19 de septiembre de 1980, oficiales de la lotería del estado de Connecticut quedaron asombrados de saber que el número ganador *de ellos* para el día fue el 666.

a. Toda evidencia indica que la selección de Connecticut fue pura casualidad. ¿Cuál es la probabilidad de que el 666 sea sacado en Connecticut, dado que el 666 se había seleccionado el 24 de abril de 1980 en la lotería de Pennsylvania?

b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar el 666 en la lotería del 24 de abril de 1980 en Pennsylvania (recuerde, este saque fue fraudulento) *y además* un 666 el 19 de septiembre de 1980 en la lotería de Connecticut?

***4.119 Desgarres de la ACL/MCL** *The American Journal of Sports Medicine* publicó un estudio de 810 jugadoras universitarias de rugby que tienen historias clínicas de lesiones en rodillas. Para estas atletas, las dos lesiones de rodilla comunes investigadas fueron torceduras del ligamento cruzado medio (MCL) y desgarres del ligamento cruzado anterior (ACL).[8] Para las jugadoras de las posiciones de defensas, se encontró que 39% tenían torceduras del MCL y 61% tenían desgarres del ACL. Para las jugadoras de posiciones delanteras, se encontró que 33% de ellas tenían torceduras del MCL y 67% tenían torceduras del ACL. Como un equipo de rugby está formado por ocho delanteras y siete defensas, se puede suponer que 47% de las jugadoras con lesiones en rodillas son defensas y 53% son delanteras.

a. Encuentre la probabilidad incondicional de que una jugadora de rugby seleccionada al azar de entre este grupo haya experimentado una torcedura del MCL.

b. Dado que se ha seleccionado una jugadora que tiene una torcedura del MCL, ¿cuál es la probabilidad de que la jugadora sea delantera?

c. Dado que se ha seleccionado una jugadora que tiene un desgarre del ACL, ¿cuál es la probabilidad de que la jugadora sea defensa?

4.120 MRI Las resonancias magnéticas (MRI) son exámenes aceptados no invasivos para evaluar cambios en el cartílago de articulaciones. Un artículo de *The American Journal of Sports Medicine* comparó los resultados de una evaluación de MRI, contra una evaluación de cirugía artroscópica de desgarres de cartílago, en dos sitios en las rodillas de 35 pacientes. Los exámenes de $2 \times 35 = 70$ produjeron las clasificaciones que se muestran en la tabla siguiente.[9] Los desgarres reales fueron confirmados por examen de cirugía artroscópica.

	Desgarres	No desgarres	Total
MRI positiva	27	0	27
MRI negativa	4	39	43
Total	31	39	70

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un sitio seleccionado al azar tenga un desgarre y haya sido identificado como desgarre por la MRI?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un sitio seleccionado al azar no tenga desgarre y haya sido identificado como que sí lo tiene?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un sitio seleccionado al azar tenga desgarre y no haya sido identificado por la MRI?

d. ¿Cuál es la probabilidad de una MRI negativa, dado que hay desgarre?

e. ¿Cuál es la probabilidad de un falso negativo, es decir, una MRI negativa, dado que hay desgarre?

4.121 El juego en pares Cada uno de dos hombres tiran al aire una moneda. Obtienen un "match" si ambas monedas son caras o sin ambas son cruces. Suponga que el tiro se repite tres veces.

a. ¿Cuál es la probabilidad de tres pares?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los seis tiros (tres para cada hombre) resulten en cruces?

c. El tiro de monedas al aire da un modelo para muchos experimentos prácticos. Suponga que los tiros de monedas representan las respuestas dadas por dos estudiantes a tres preguntas específicas de verdadero o falso en un examen. Si los dos estudiantes dieron tres pares por respuestas, ¿la probabilidad baja hallada en el inciso a) sugiere una confabulación?

4.122 Negociaciones de contrato La experiencia ha demostrado que, 50% del tiempo, una negociación particular entre empresa y sindicato llevó a un acuerdo antes de transcurridas dos semanas, 60% del tiempo el fondo de huelga del sindicato era adecuado para apoyar una huelga y 30% del tiempo ambas condiciones quedaron satisfechas. ¿Cuál es la probabilidad de un acuerdo de contrato dado que el fondo sindical para huelga es adecuado para soportar una huelga? El acuerdo de un contrato antes de transcurridas dos semanas ¿depende de si el fondo sindical de huelga es adecuado para soportar una huelga?

4.123 Permanencia en un trabajo Suponga que la probabilidad de permanecer 10 años o más con una compañía particular es 1/6. Un hombre y una mujer empiezan a trabajar en la compañía el mismo día.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre trabaje ahí menos de 10 años?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre y la mujer trabajen ahí menos de 10 años? (Suponga que no tienen parentesco y sus tiempos de servicio son independientes entre sí.)

c. ¿Cuál es la probabilidad de que uno u otro o ambos trabajen 10 años o más?

4.124 Seguro de accidentes Los registros de accidentes, recabados por una compañía de seguros de automóviles, dan la siguiente información: la probabilidad de que un automovilista asegurado tenga un accidente de auto es .15; si ha ocurrido un accidente, el daño al vehículo asciende a 20% de su valor de mercado con probabilidad .80, 60% de su valor de mercado con probabilidad .12 y pérdida total con probabilidad .08. ¿Qué prima debe cobrar la compañía sobre un auto de $22 000 de modo que la ganancia esperada por la compañía sea cero?

4.125 Tiempos de espera Suponga que en un supermercado particular la probabilidad de esperar 5 minutos o más en la fila para pagar es .2. En un día determinado, un hombre y su esposa deciden hacer compras individualmente en el mercado, cada uno saliendo en diferentes cajas de pago. Ambos llegan al mostrador al mismo tiempo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre espere menos de 5 minutos para salir?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre y su esposa salgan en menos de 5 minutos? (Suponga que los tiempo de salida para los dos son eventos independientes.)

c. ¿Cuál es la probabilidad de que uno o el otro o ambos esperen 5 minutos o más?

4.126 Control de calidad Un plan de control de calidad exige aceptar un lote grande de cojinetes para cigüeñal si se saca una muestra de siete y ninguno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar el lote si ninguno del lote es defectuoso? ¿Y si 1/10 son defectuosos? ¿Y si 1/2 son defectuosos?

4.127 Transporte colectivo Sólo 40% de todas las personas de una comunidad está a favor de desarrollar un sistema de transporte colectivo. Si al azar se seleccionan cuatro ciudadanos de entre la comunidad, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro estén a favor del sistema de transporte colectivo? ¿Y de que ninguno esté a favor de él?

4.128 Mediciones de presión sanguínea Un médico investigador comparó la efectividad de dos medicamentos *A* y *B* para la presión sanguínea, administrando los dos a cada uno de cuatro pares de gemelos idénticos. El medicamento *A* se dio a un miembro de un par; el medicamento *B* se dio al otro. Si, de hecho, no hay diferencia en los efectos de los medicamentos, ¿cuál es la probabilidad de que la caída en la lectura de presión sanguínea para el medicamento *A* exceda de la caída correspondiente en la lectura del medicamento *B*, para los cuatro pares de gemelos? Suponga que el medicamento *B* creó una caída más grande en la presión sanguínea que el medicamento *A*, para cada uno de los cuatro pares de gemelos. ¿Piensa usted que esto es suficiente evidencia para indicar que el medicamento *B* es más eficaz para bajar la presión sanguínea que el medicamento *A*?

4.129 Exámenes de sangre Para reducir el costo de detectar una enfermedad, los exámenes de sangre se realizan en una muestra agrupada de sangre tomada de un grupo de *n* personas. Si no hay indicio de la enfermedad presente en la muestra sanguínea de grupo (como por lo general es el caso), ninguno tiene la enfermedad. Si el análisis de la muestra sanguínea de grupo indica que la enfermedad está presente, cada individuo debe someterse a un examen de sangre. Los exámenes individuales son realizados en secuencia. Si, entre un grupo de cinco personas, una de ellas tiene la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que seis exámenes de sangre (incluyendo el examen de grupo) se requieran para detectar a la persona enferma? Si dos personas tienen la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se requieran seis exámenes para localizar a ambas personas enfermas?

4.130 Tiro de una moneda ¿Cuántas veces debe ser lanzada al aire una moneda para obtener una probabilidad igual o mayor a .9 de observar al menos una cara?

4.131 Horario flexible El número de compañías que ofrecen horarios de trabajo flexibles ha aumentado a medida que ellas tratan de ayudar a sus empleados a habérselas con su casa y su trabajo. Un horario de trabajo flexible es trabajar cuatro turnos de 10 horas. No obstante, un gran obstáculo para los horarios de trabajo flexibles para trabajadores a quienes se paga por hora es la legislación estatal por tiempo extra. Un estudio dio la siguiente información para 220 empresas localizadas en dos ciudades de California.

	Horario flexible		
Ciudad	Disponible	No disponible	Total
A	39	75	114
B	25	81	106
Totales	64	156	220

Se selecciona una compañía al azar de entre este grupo de 220 compañías.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía esté ubicada en la ciudad *A*?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía esté ubicada en la ciudad *B* y ofrezca horarios flexibles de trabajo?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía no tenga horarios flexibles?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía esté ubicada en la ciudad *B*, dado que la compañía tiene horarios flexibles?

4.132 Experimento para reconocer colores Se realiza un experimento como sigue: los colores rojo, amarillo y azul se proyectan en una pantalla durante un corto periodo. Una persona ve los colores y se le pide escoger el que piense que duró más tiempo. El experimento se repite tres veces con la misma persona.

a. Si todos los colores se proyectaron durante el mismo tiempo, encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de veces que la persona escogió como color rojo. Suponga que sus tres selecciones son independientes.

b. Construya el histograma de probabilidad para la variable aleatoria x.

4.133 ¿Pepsi™ o Coca™? Se realiza un experimento para probar el gusto en un supermercado local, donde a compradores que pasan por ahí se les pide probar dos muestras de bebida gaseosa, una Pepsi y una Coca, y que digan su preferencia. Suponga que cuatro compradores se escogen al azar y se les pide participar en el experimento y que en realidad no hay diferencia en el gusto de las dos marcas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro compradores escojan Pepsi?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los cuatro compradores escoja Pepsi?

4.134 Virus Cierto virus afectó a familias en tres casas adyacentes en una fila de 12 casas. Si tres casas se escogieron al azar de una fila de 12 casas, ¿cuál es la probabilidad de que las tres casas fueran adyacentes? ¿Hay razón para creer que este virus es contagioso?

4.135 Política en una orquesta El consejo de directores de una orquesta sinfónica principal ha votado por crear una comisión de músicos con el fin de manejar quejas de empleados. El consejo estará formado por el presidente y vicepresidente del consejo sinfónico y dos representantes de la orquesta. Los dos representantes de la orquesta serán seleccionados al azar de una lista de seis voluntarios, formada por cuatro hombres y dos mujeres.

a. Encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de mujeres escogidas como representantes de la orquesta.

b. Encuentre la media y varianza para la variable aleatoria x.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos representantes de la orquesta sean mujeres?

MI APPLET Ejercicios

4.136 Dos dados imparciales se tiran. Use el applet **Tossing Dice (Lanzamiento de dados)** para contestar las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma del número de puntos de las caras superiores sea igual a 7? ¿Y a 11?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se tiren "dobles", esto es, ambos dados tienen el mismo número en su cara superior?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos dados muestren un número impar?

4.137 Si se tira un par de dados, la suma T del número de puntos que aparece en las caras superiores de los dados puede tomar el valor de un entero del intervalo $2 \leq T \leq 12$.

a. Use el applet **Tossing Dice (Lanzamiento de dados)** para hallar la distribución de probabilidad para T. Presente esta distribución de probabilidad en una tabla.

b. Construya un histograma de probabilidad para $p(T)$. ¿Cómo se describiría la forma de esta distribución?

4.138 Accese al applet **Flipping Fair Coins (Lanzamiento de monedas justas)**. El experimento consiste en lanzar al aire tres monedas imparciales y registrar x, el número de caras.

a. Use las leyes de probabilidad para escribir los eventos simples de este experimento.

b. Encuentre la distribución de probabilidad para x. Presente la distribución en una tabla y en un histograma de probabilidad.

c. Utilice el applet **Flipping Fair Coins (Lanzamiento de monedas justas)** para estimular la distribución de probabilidad, es decir, repetir el experimento de lanzar al aire una moneda un gran número de veces hasta que el histograma de frecuencia relativa sea muy cercano a la distribución real de probabilidad. Empiece por efectuar el experimento una vez (dé un clic en New Coin Flip) para ver qué está ocurriendo. A continuación agilice el proceso al hacer clic en 100 at a Time. Genere al menos 2000 valores de x. Trace el histograma que haya generado.

d. Compare los histogramas de los incisos b) y c). ¿La simulación confirma su respuesta del inciso b)?

4.139 Consulte el ejercicio 4.138.

a. Si fuéramos a lanzar al aire sólo una moneda, ¿cómo se vería la distribución de probabilidad para x?

b. Realice una simulación usando el applet **Flipping Fair Coins (Lanzamiento de monedas justas)** con $n = 1$, y compare sus resultados con el inciso a).

4.140 Vea el ejercicio 4.138. Accese al applet **Flipping Weighted Coins (Lanzamiento de monedas no justas)**. El experimento consiste en lanzar al aire tres monedas *que no sean imparciales* y registrar x, el número de caras.

a. Efectúe una simulación del experimento usando el applet **Flipping Weighted Coins (Lanzamiento de monedas no justas)**. ¿La distribución es simétrica o está sesgada? ¿Cuáles son más probables, caras o cruces?

b. Suponga que no sabemos la probabilidad de obtener una cara, $P(H)$. Escriba una fórmula para calcular la probabilidad de que no haya caras en tres tiros.

c. Use la probabilidad aproximada $P(x = 0)$ de su simulación y los resultados del inciso b) para aproximar el valor de $P(T)$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara?

CASO PRÁCTICO

Probabilidad y toma de decisiones en el Congo

En su sensacional novela *Congo*, Michael Crichton describe una búsqueda, hecha por Earth Resources Technology Service (ERTS), una compañía de estudios geológicos, de depósitos de diamantes azules cubiertos de boro que ERTS piensa que es la clave de una nueva generación de computadoras ópticas.[10] En la novela, ERTS está en una carrera contra un consorcio internacional para hallar la Ciudad Perdida de Zinj, una ciudad que prosperó con la explotación de diamantes y existió hace varios miles de años (de acuerdo con una fábula africana), en lo profundo de los bosques lluviosos del este de Zaire.

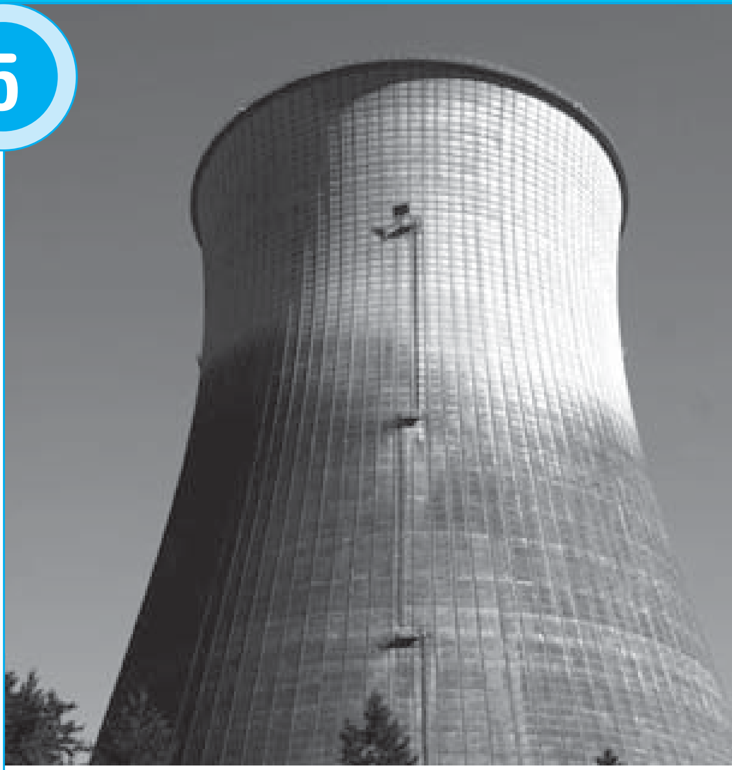
Después de la misteriosa destrucción de su primera expedición, ERTS lanzó una segunda expedición bajo el liderazgo de Karen Ross, un genio de las computadoras, de 24 años, que es acompañada por el profesor Peter Elliot, un antropólogo; Amy, un gorila que habla; y por el afamado mercenario y líder de la expedición, el "Capitán" Charles Munro. Los esfuerzos de Ross por hallar la ciudad se ven bloqueados por las acciones ofensivas del consorcio, por el mortal bosque lluvioso y por hordas de gorilas asesinos "parlantes" cuya misión es defender las minas de diamantes. Ross supera estos obstáculos mediante el uso de computadoras de la era espacial, con el objeto de evaluar las probabilidades de éxito para todas las posibles circunstancias y todas las posibles acciones que la expedición pueda tomar. En cada etapa de la expedición, ella puede rápidamente evaluar las probabilidades de éxito.

En una etapa de la expedición, Ross es informada por su cuartel general en Houston que sus computadoras estiman que ella está a 18 horas y 20 minutos atrás del equipo competidor euro-japonés, en lugar de 40 horas adelante. Ella cambia de planes y decide que 12 miembros de su equipo (Ross, Elliot, Munro, Amy y ocho porteadores nativos) desciendan en paracaídas en una región volcánica cerca de la ubicación estimada de Zinj. Como Crichton lo relata, "Ross tenía probabilidades doblemente comprobadas de un resultado desde las computadoras de Houston, y los resultados no estaban equivocados. La probabilidad de un salto exitoso era de .7980, lo cual significaba que había aproximadamente una oportunidad en cinco en que alguien resultara con lesión grave. No obstante, dado un salto exitoso, la probabilidad de éxito de la expedición era de .9943, lo cual hacía prácticamente seguro que ganarían el consorcio al lugar".

Teniendo en mente que éste es un extracto de una novela, examinemos la probabilidad, .7980, de un salto exitoso. Si usted fuera uno del equipo de 12 miembros, ¿cuál es la probabilidad de que complete con éxito su salto? En otras palabras, si la probabilidad de un salto exitoso por los 12 miembros del equipo es .7980, ¿cuál es la probabilidad de que un solo miembro pueda con todo éxito completar el salto?

5

Algunas distribuciones discretas útiles



© James Hearn/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

Las variables aleatorias discretas se emplean en numerosas aplicaciones prácticas. En este capítulo presentamos tres variables aleatorias discretas importantes, la binomial, la de Poisson y la hipergeométrica. Es frecuente que estas variables aleatorias se usen para describir el número de sucesos de un evento, especificado en un número fijo de intentos o una unidad fija de tiempo o espacio.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo uso la tabla 1 para calcular probabilidades binomiales?
¿Cómo calculo probabilidades de Poisson usando la fórmula?
¿Cómo uso la tabla 2 para calcular probabilidades de Poisson?

Un misterio: cánceres cerca de un reactor

¿El reactor nuclear Pilgrim I es responsable del aumento en casos de cáncer en el área circundante? Surgió una controversia política cuando el Departamento de Salud Pública de Massachusetts encontró un número anormalmente grande de casos en una franja costera de 4 millas de ancho un poco al norte del reactor nuclear de Plymouth, Massachusetts. El estudio práctico, que aparece al final de este capítulo, examina cómo esta pregunta se puede contestar usando una de las distribuciones discretas de probabilidad presentadas aquí.

5.1 INTRODUCCIÓN

Se pueden hallar ejemplos de *variables aleatorias discretas* en numerosas situaciones cotidianas y en casi todas las disciplinas académicas. No obstante, hay tres distribuciones discretas de probabilidad que sirven como *modelos* para un gran número de estas aplicaciones. En este capítulo estudiamos las distribuciones de probabilidad binomiales, de Poisson e hipergeométrica y discutimos su utilidad en diferentes situaciones físicas.

5.2 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD

El experimento de lanzar al aire una moneda es un ejemplo sencillo de una importante variable aleatoria discreta llamada **variable aleatoria binomial**. Muchos experimentos prácticos resultan en datos similares a que salgan cara o cruz al tirar la moneda. Por ejemplo, considere las encuestas políticas que se emplean para predecir las preferencias de los votantes en elecciones. Cada votante entrevistado se puede comparar a una moneda porque el votante puede estar a favor de nuestro candidato (una "cara") o no (una "cruz"). Casi siempre, la proporción de votantes que están a favor de nuestro candidato no es igual a 1/2, es decir, la moneda no es imparcial. De hecho, la encuesta está diseñada exactamente para determinar la proporción de votantes que están a favor de nuestro candidato.

Veamos aquí algunas otras situaciones semejantes al experimento de lanzar al aire una moneda:

- Un sociólogo está interesado en la proporción de maestros de escuelas elementales que sean hombres.
- Una comerciante en bebidas gaseosas está interesada en la proporción de quienes toman refresco de cola y que prefieren la marca de ella.
- Un genetista está interesado en la proporción de la población que posee un gen vinculado a la enfermedad de Alzheimer.

Cada persona muestreada es análoga a lanzar al aire una moneda, pero la probabilidad de una "cara" no es necesariamente igual a 1/2. Aun cuando estas situaciones tienen diferentes objetivos prácticos, todas exhiben las características comunes del **experimento binomial**.

Definición Un **experimento binomial** es el que tiene estas cinco características:

1. El experimento consiste en n intentos idénticos.
2. Cada intento resulta en uno de dos resultados. Por falta de un mejor nombre, el resultado uno se llama éxito, S, y el otro se llama fracaso, F.
3. La probabilidad de éxito en un solo intento es igual a p y es igual de un intento a otro. La probabilidad de fracaso es igual a $(1 - p) = q$.
4. Los intentos son independientes.
5. Estamos interesados en x, el número de éxitos observado durante los n intentos, para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 5.1

Suponga que hay alrededor de un millón de adultos en un condado y una proporción desconocida p están a favor de limitar el periodo de función de políticos. Se escogerá una muestra de mil adultos en forma tal que cada uno del millón de adultos tenga igual probabilidad de ser seleccionado y a cada uno se le pregunta si él o ella está a favor de limitar el periodo. (El objetivo final de esta encuesta es estimar la proporción desconocida p, un problema que veremos en el capítulo 8.) ¿Este experimento es binomial?

Solución ¿El experimento tiene las cinco características binomiales?

1. Un "intento" es la selección de un solo adulto de entre el millón de adultos del condado. Esta muestra consta de $n = 1000$ intentos idénticos.
2. Como cada adulto estará a favor o no estará a favor de limitar el periodo, hay dos resultados que representan los "éxitos" y "fracasos" del experimento binomial.†
3. La probabilidad de éxito, p, es la probabilidad de que un adulto esté a favor del límite del periodo. ¿Esta probabilidad sigue igual para cada uno de los adultos de la muestra? Para todos los fines prácticos, la respuesta es *sí*. Por ejemplo, si 500 mil adultos de la población están a favor de limitar el periodo, entonces la probabilidad de un "éxito" cuando se escoja al primer adulto es 500 000/1 000 000 = 1/2. Cuando se escoja al segundo adulto, la probabilidad p cambia ligeramente, dependiendo de la primera selección. Esto es, habrá 499 999 o 500 000 éxitos que queden entre los 999 999 adultos. En cualquiera de estos casos, p es todavía más o menos igual a 1/2.
4. La independencia de los intentos está garantizada debido al grupo grande de adultos del que se toma la muestra. La probabilidad de que un adulto esté a favor de limitar el periodo no cambia, dependiendo de las respuestas de las personas previamente escogidas.
5. La variable aleatoria x es el número de adultos de la muestra que estén a favor de limitar el periodo.

Debido a que el estudio satisface las cinco características razonablemente bien, para todos los fines prácticos se puede ver como un experimento binomial.

EJEMPLO 5.2

Un paciente llena una receta para un régimen de 10 días de dos píldoras diarias. Sin que lo sepan el farmacéutico ni el paciente, las 20 pastillas están formadas por 18 píldoras del medicamento prescrito y dos píldoras que son el equivalente genérico del medicamento prescrito. El paciente selecciona dos píldoras al azar para la dosis del primer día. Si verificamos la selección y registramos el número de píldoras que son genéricas, ¿es éste un experimento binomial?

Solución De nuevo, verifique el procedimiento de muestro para las características de un experimento binomial.

1. Un "intento" es la selección de una píldora de entre las 20 de la receta. Este experimento consta de $n = 2$ intentos.
2. Cada intento resulta en uno de dos resultados. O bien la píldora es genérica (llame "éxito" a esto) o no lo es (un "fracaso").
3. Como las píldoras de una botella de receta se pueden considerar "mezcladas" al azar, la probabilidad incondicional de sacar una píldora genérica en un intento determinado sería 2/20.
4. La condición de independencia entre intentos *no está* satisfecha, porque la probabilidad de sacar una píldora genérica en el segundo intento depende del primer intento. Por ejemplo, si la primera píldora sacada es genérica entonces hay sólo una píldora genérica en las restantes 19. Por tanto,

$$P(\text{genérica en intento 2}|\text{genérica en intento 1}) = 1/19$$

† Aun cuando es tradicional que los dos posibles resultados de un intento se denominen "éxito" y "fracaso", podrían haberse llamado "cara" y "cruz", "rojo" y "blanco" o cualquier otro par de palabras. En consecuencia, el resultado llamado "éxito" no necesita ser visto como éxito en el uso ordinario de la palabra.

Si la primera selección *no resulta* en una píldora genérica, entonces hay todavía dos píldoras genéricas en las restantes 19, y la probabilidad de un "éxito" (una píldora genérica) cambia a

$$P(\text{genérica en el intento } 2 | \text{no genérica en el intento } 1) = 2/19$$

Por tanto, los intentos son dependientes y el muestreo no representa un experimento binomial.

Considere la diferencia entre estos dos ejemplos. Cuando la muestra (los n intentos idénticos) vinieron de una población grande, la probabilidad de éxito p siguió siendo más o menos la misma de un intento a otro. Cuando el tamaño poblacional N era pequeño, la probabilidad de éxito p cambió en forma considerable de un intento a otro, y el experimento *no fue* binomial.

REGLA PRÁCTICA

Si el tamaño muestral es grande con respecto al tamaño poblacional, en particular si $n/N \geq .05$, entonces el experimento resultante no es binomial.

En el capítulo 4, tiramos al aire dos monedas justas y construimos la distribución de probabilidad para x, el número de caras, un experimento binomial con $n = 2$ y $p = .5$. La distribución binomial general de probabilidad se construye en la misma forma, pero el procedimiento se complica cuando n se hace grande. Afortunadamente, las probabilidades $p(x)$ siguen un modelo general. Esto nos permite usar una sola fórmula para hallar $p(x)$ para cualquier valor dado de x.

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD

Un experimento binomial consta de n intentos idénticos con probabilidad p de éxito en cada intento. La probabilidad de k éxitos en n intentos es

$$P(x = k) = C_k^n p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

para valores de $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. El símbolo C_k^n es igual a,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde $n! = n(n-1)(n-2) \cdots (2)(1)$ y $0! \equiv 1$.

Las fórmulas generales para μ, σ^2 y σ dadas en el capítulo 4 se pueden usar para obtener las siguientes fórmulas más sencillas para la media y desviación estándar binomiales.

MEDIA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR PARA LA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

La variable aleatoria x, el número de éxitos en n intentos, tiene una distribución de probabilidad con este centro y dispersión:

$$\begin{aligned} \text{Media:} \quad & \mu = np \\ \text{Varianza:} \quad & \sigma^2 = npq \\ \text{Desviación estándar:} \quad & \sigma = \sqrt{npq} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.3

Encuentre $P(x = 2)$ para una variable aleatoria binomial con $n = 10$ y $p = .1$.

Solución $P(x = 2)$ es la probabilidad de observar 2 éxitos y 8 fracasos en una secuencia de 10 intentos. Se podrían observar 2 éxitos primero, seguidos de 8 fracasos consecutivos:

S, S, F, F, F, F, F, F, F, F

Como p es la probabilidad de éxito y q es la probabilidad de fracaso, esta secuencia particular también resulta en $x = 2$ éxitos.

$$ppqqqqqqqq = p^2q^8$$

Sin embargo, pueden también resultar muchas otras secuencias en $x = 2$. La fórmula binomial utiliza C_2^{10} para contar el número de secuencias y da la probabilidad exacta cuando se usa la fórmula binomial con $k = 2$:

$$P(x = 2) = C_2^{10}(.1)^2(.9)^{10-2}$$
$$= \frac{10!}{2!(10-2)!}(.1)^2(.9)^8 = \frac{10(9)}{2(1)}(.01)(.430467) = .1937$$

MI CONSEJO

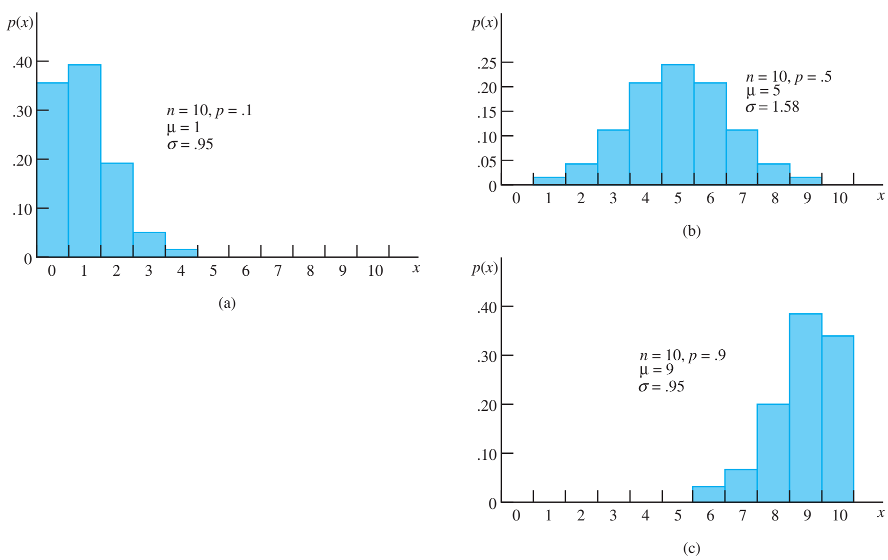
$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$
Por ejemplo,
$5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$
y $0! \equiv 1$.

Se podría repetir el procedimiento del ejemplo 5.3 para cada valor de x (0, 1, 2, …, 10) y encontrar todos los valores de $p(x)$ necesarios para construir un histograma de probabilidad para x. Éste sería un trabajo largo y tedioso, pero la gráfica resultante se vería como la figura 5.1a). Se puede verificar la altura de la barra para $x = 2$ y encontrar $p(2) = P(x = 2) = .1937$. La gráfica está sesgada a la derecha; esto es, casi todo el tiempo se observarán valores pequeños de x. La media o "punto de equilibrio" está alrededor de $x = 1$; de hecho, se puede usar la fórmula para hallar la media exacta:

$$\mu = np = 10(.1) = 1$$

Las figuras 5.1b) y 5.1c) muestran las otras dos distribuciones binomiales con $n = 10$ pero con diferentes valores de p. Vea las formas de estas distribuciones. Cuando $p = .5$, la distribución es exactamente simétrica alrededor de la media, $\mu = np = 10(.5) = 5$. Cuando $p = .9$, la distribución es la "imagen espejo" de la distribución para $p = .1$ y está sesgada a la izquierda.

FIGURA 5.1
Distribuciones de probabilidad binomial



EJEMPLO 5.4

En un tiempo largo, se ha observado que un jugador profesional de baloncesto puede hacer un tiro libre en un intento determinado con probabilidad igual a .8. Suponga que él lanza cuatro tiros libres.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste exactamente dos tiros libres?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste al menos un tiro libre?

Solución Un "intento" es un solo tiro libre y se puede definir un "éxito" como una canasta y un "fracaso" como una falla, de modo que $n = 4$ y $p = .8$. Si se supone que la probabilidad del jugador de encestar el tiro libre no cambia de un tiro a otro, entonces el número x de veces que enceste el tiro libre es una *variable aleatoria binomial.*

1. $P(x = 2) = C_2^4(.8)^2(.2)^2$

$$= \frac{4!}{2!2!}(.64)(.04) = \frac{4(3)(2)(1)}{2(1)(2)(1)}(.64)(.04) = .1536$$

La probabilidad es .1536 de que enceste exactamente dos tiros libres.

2. $P(\text{al menos uno}) = P(x \geq 1) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4)$

$$= 1 - p(0)$$
$$= 1 - C_0^4(.8)^0(.2)^4$$
$$= 1 - .0016 = .9984.$$

Aun cuando se podría calcular $P(x = 1)$, $P(x = 2)$, $P(x = 3)$ y $P(x = 4)$ para hallar esta probabilidad, usar el complemento del evento hace más fácil el trabajo; es decir,

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0).$$

¿Puede usted considerar alguna razón por la que su suposición de intentos independientes podría ser errónea? Si el jugador aprende por su intento previo (es decir, ajusta su tiro de acuerdo con su último intento), entonces su probabilidad p de encestar el tiro libre puede cambiar, posiblemente aumentar, de un tiro a otro. Los intentos *no serían* independientes y el experimento *no sería* binomial.

MI CONSEJO

Use la tabla 1 del apéndice I más que la fórmula binomial siempre que sea posible. *Ésta es una forma más fácil.*

Calcular probabilidades binomiales puede ser tedioso incluso para valores relativamente pequeños de n. Cuando n se hace grande, se hace casi imposible sin ayuda de una calculadora o computadora. Por fortuna tenemos estas dos herramientas. Las tablas de **probabilidades binomiales acumulativas** generadas por computadora se dan en la tabla 1 del apéndice I, para valores de n que van de 2 a 25 y para valores seleccionados de p. Estas probabilidades también pueden ser generadas si se usa el *MINITAB* o los applets Java en el sitio web Premium.

Las probabilidades binomiales *acumulativas* difieren de las probabilidades binomiales *individuales* que se calcularon con la fórmula binomial. Una vez que usted encuentre la columna de probabilidades para los valores correctos de n y p en la tabla 1, el renglón marcado como k da la suma de todas las probabilidades binomiales de $x = 0$ a $x = k$. La tabla 5.1 muestra parte de la tabla 1 para $n = 5$ y $p = .6$. Si se muestra en el renglón marcado $k = 3$, se encuentra

$$P(x \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = .663$$

TABLA 5.1 **Parte de la tabla 1 del apéndice I para $n = 5$**

								p						
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	—	—	—	—	—	—	—	.010	—	—	—	—	—	0
1	—	—	—	—	—	—	—	.087	—	—	—	—	—	1
2	—	—	—	—	—	—	—	.317	—	—	—	—	—	2
3	—	—	—	—	—	—	—	.663	—	—	—	—	—	3
4	—	—	—	—	—	—	—	.922	—	—	—	—	—	4
5	—	—	—	—	—	—	—	1.000	—	—	—	—	—	5

Si la probabilidad que usted necesite calcular no está en esta forma, necesitará considerar una forma para reescribir su probabilidad y hacer uso de las tablas.

EJEMPLO 5.5

Use la tabla binomial acumulativa para $n = 5$ y $p = .6$ para hallar las probabilidades de estos eventos:

1. Exactamente tres éxitos
2. Tres o más éxitos

Solución

1. Si encuentra $k = 3$ en la tabla 5.1, el valor en tabla es

$$P(x \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$$

Como usted desea sólo $P(x = 3) = p(3)$, debe restar la probabilidad no deseada:

$$P(x \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2)$$

que se encuentra en la tabla 5.1 con $k = 2$. Entonces

$$P(x = 3) = P(x \leq 3) - P(x \leq 2)$$
$$= .663 - .317 = .346$$

2. Para hallar P(tres o más éxitos) $= P(x \geq 3)$ usando la tabla 5.1, se debe usar el complemento del evento de interés. Escriba

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \leq 2)$$

Se puede hallar $P(x \leq 2)$ en la tabla 5.1 con $k = 2$. Entonces

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2)$$
$$= 1 - .317 = .683$$

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo utilizo la tabla 1 para calcular probabilidades binomiales?

1. Encuentre los valores necesarios de n y p. Aísle la columna apropiada de la tabla 1.
2. La tabla 1 da $P(x \leq k)$ en la fila marcada k. Reescriba la probabilidad que necesite para que esté en esta forma.
   - Haga una lista de los valores de x en su evento.
   - De la lista, escriba el evento como la diferencia de dos probabilidades:

$$P(x \leq a) - P(x \leq b) \quad \text{para } a > b$$

o el complemento del evento:

$$1 - P(x \leq a)$$

o sólo el evento en sí:

$$P(x \leq a) \text{ o } P(x < a) = P(x \leq a - 1)$$

Repertorio de ejercicios

A. Considere una variable aleatoria binomial con $n = 5$ y $p = .6$. Aísle la columna apropiada en la tabla 1 y llene las probabilidades siguientes. Una de las probabilidades, $P(x \leq 3)$ ya está llena.

k	0	1	2	3	4	5
$P(x \leq k)$				.663		

B. Complete los espacios en blanco en la tabla siguiente. El segundo problema ya está hecho.

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
4 o menos				
4 o más	4, 5	$P(x \geq 4)$	$1 - P(x \leq 3)$	$1 - .663 = .337$
Más de 4				
Menos de 4				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
Exactamente 4				

Informe de progreso

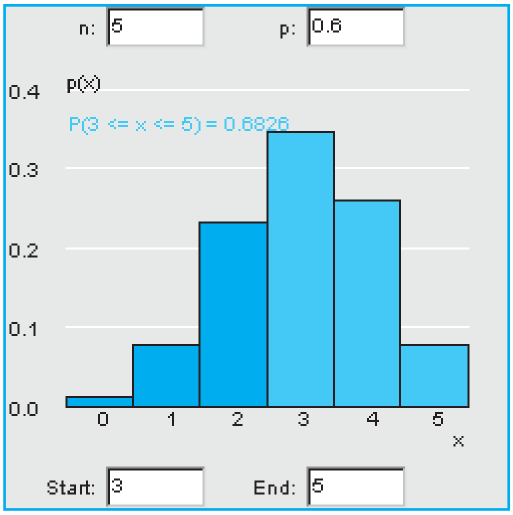
- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina las probabilidades binomiales? Puede saltarse el repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

MI APPLET

El applet Java llamado **Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales)** da una imagen visual de la distribución binomial para valores de $n \leq 100$ y cualquier p que usted escoja. Puede usar este applet para calcular probabilidades binomiales para cualquier valor de x o para cualquier intervalo $a \leq x \leq b$. Para reproducir los resultados del ejemplo 5.5, teclee **5** en la caja marcada "n" y **0.6** en la caja marcada "p", presionando la tecla "Enter" después de cada entrada. A continuación introduzca los valores inicial y final para x (si necesita calcular una probabilidad individual, ambas entradas serán iguales). La probabilidad se calcula y queda sombreada en rojo en su pantalla (azul claro en la figura 5.2) cuando presiona "Enter". ¿Cuál es la probabilidad de tres o más éxitos de la figura 5.2? ¿Esto confirma nuestra respuesta del ejemplo 5.5? Usted usará este applet de nuevo para la sección Mi Applet ejercicios al final del capítulo.

FIGURA 5.2
Applet Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales)



EJEMPLO 5.6

Se probó un régimen formado por una dosis diaria de vitamina C para determinar su efectividad para prevenir el resfriado común. Diez personas que estuvieron siguiendo el régimen prescrito fueron observadas durante un año. Ocho pasaron el invierno sin un resfriado. Suponga que la probabilidad de pasar el invierno sin un resfriado es .5 cuando no se sigue el régimen de vitamina C. ¿Cuál es la probabilidad de observar ocho o más sobrevivientes, dado que el régimen es ineficiente para aumentar la resistencia a resfriados?

Solución Si se supone que el régimen de vitamina C es ineficiente, entonces la probabilidad p de sobrevivir el invierno sin un resfriado es .5. La distribución de probabilidad para x, el número de sobrevivientes, es

$$p(x) = C_x^{10}(.5)^x(.5)^{10-x}$$

Usted ya ha aprendido cuatro formas de hallar $P(8 \text{ o más sobrevivientes}) = P(x \geq 8)$. Obtendrá los mismos resultados con cualquiera de los cuatro; escoja el método más cómodo para su problema particular.

1. *La fórmula binomial:*

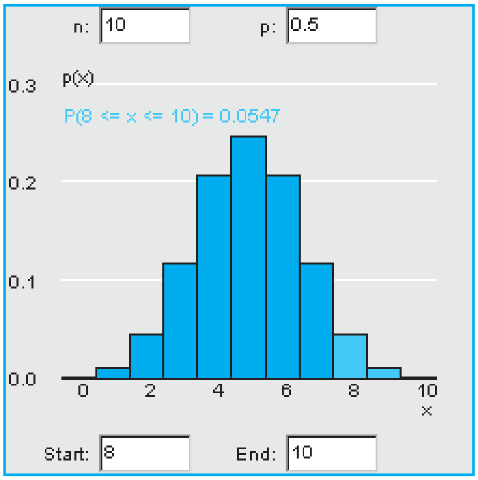
$$\begin{aligned} P(8 \text{ o más}) &= p(8) + p(9) + p(10) \\ &= C_8^{10}(.5)^{10} + C_9^{10}(.5)^{10} + C_{10}^{10}(.5)^{10} \\ &= .055 \end{aligned}$$

2. *Las tablas binomiales acumulativas:* Encuentre la columna correspondiente a $p = .5$ en la tabla para $n = 10$:

$$\begin{aligned} P(8 \text{ o más}) &= P(x \geq 8) = 1 - P(x \leq 7) \\ &= 1 - .945 = .055 \end{aligned}$$

3. *El applet* **Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales):** Introduzca $n = 10$, $p = .5$ y calcule la probabilidad de que x sea entre 8 y 10. La probabilidad, $P(x \geq 8) = .0547$, está sombreado en rojo en su pantalla (azul claro en la figura 5.3).

FIGURA 5.3
Applet Java para el ejemplo 5.6



4. *Salida del MINITAB:* La salida que se muestra en la figura 5.4 da la **función acumulativa de distribución**, que da las mismas probabilidades que encontró en las tablas acumulativas binomiales. La **función de densidad de probabilidad** da las probabilidades binomiales individuales, que encontró usted usando la fórmula binomial.

FIGURA 5.4
Salida del *MINITAB* para el ejemplo 5.6

Función acumulativa de distribución

Binomial with n = 10 and p = 0.5

x	P(X <= x)
0	0.00098
1	0.01074
2	0.05469
3	0.17187
4	0.37695
5	0.62305
6	0.82813
7	0.94531
8	0.98926
9	0.99902
10	1.00000

Función de densidad de probabilidad

Binomial with n = 10 and p = 0.5

x	P(X = x)
0	0.000977
1	0.009766
2	0.043945
3	0.117188
4	0.205078
5	0.246094
6	0.205078
7	0.117188
8	0.043945
9	0.009766
10	0.000977

Usando la función acumulativa de distribución, calcule

$$P(x \geq 8) = 1 - P(x \leq 7)$$
$$= 1 - .94531 = .05469$$

O bien, usando la función de densidad de probabilidad, calcule

$$P(x \geq 8) = p(8) + p(9) + p(10)$$
$$= .043945 + .009766 + .000977 = .05469$$

EJEMPLO 5.7

¿Preferiría usted tomar un examen de opción múltiple o uno de recordatorio completo? Si no sabe nada del material, tendrá una calificación de cero en un examen de recordatorio completo pero, si le dan cinco opciones por cada pregunta, ¡tiene al menos una probabilidad en cinco de adivinar correctamente! Si un examen de opción múltiple contiene 100 preguntas, cada una con cinco posibles respuestas, ¿cuál es la calificación esperada para un estudiante que está adivinando en cada pregunta? ¿Dentro de qué límites caen las calificaciones de "no lo sabe"?

Solución Si x es el número de respuestas correctas en el examen de 100 preguntas, la probabilidad de una respuesta correcta, p, es una en cinco, de modo que $p = .2$. Como el estudiante selecciona respuestas al azar, las $n = 100$ respuestas son independientes y la calificación esperada para esta variable aleatoria binomial es

$$\mu = np = 100(.2) = 20 \qquad \text{respuestas correctas}$$

Para evaluar la dispersión o variabilidad de las calificaciones, se puede calcular

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(.2)(.8)} = 4$$

Entonces, usando su conocimiento de variación a partir del teorema de Chebyshev y la Regla empírica, puede hacer estos enunciados:

- Una gran proporción de las calificaciones estará a no más de dos desviaciones estándar de la media, o sea de $20 - 8 = 12$ a $20 + 8 = 28$.
- Casi todas las calificaciones estarán a no más de tres desviaciones estándar de la media, o sea de $20 - 12 = 8$ a $20 + 12 = 32$.

La opción de "adivinar" da al estudiante una mejor calificación que una de cero en el examen de recordatorio completo, pero el estudiante todavía no pasará el examen. ¿Qué otras opciones tiene el estudiante?

5.2 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 190.

5.1 Considere una variable aleatoria binomial con $n = 8$ y $p = .7$. Aísle la columna apropiada en la tabla 1 y llene las probabilidades.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x \le k)$									

Llene los espacios en blanco de la tabla siguiente.

El problema	Haga una lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
3 o menos		$P(x \le \_\_\_)$		
3 o más		$P(x \ge \_\_\_)$	$1 - P(x \le \_\_\_)$	
Más de 3		$P(x > \_\_\_)$	$1 - P(x \le \_\_\_)$	
Menos de 3		$P(x < \_\_\_)$	$P(x \le \_\_\_) - P(x \le \_\_\_)$	
Entre 3 y 5 (inclusive)		$P(\_\_\_ \le x \le \_\_\_)$	$P(x \le \_\_\_)$	
Exactamente 3		$P(x = \_\_\_)$	$P(x \le \_\_\_) - P(x \le \_\_\_)$	

5.2 Considere una variable aleatoria binomial con $n = 9$ y $p = .3$. Separe la columna apropiada de la tabla 1 y llene las probabilidades siguientes.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x \leq k)$									

Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

El problema	Haga una lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad	Encuentre la probabilidad
Exactamente 2				
Más de 2				
2 o más				
Menos de 2				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
2 o menos				

TÉCNICAS BÁSICAS

5.3 El problema de la urna Un frasco contiene cinco pelotas: tres rojas y dos blancas. Dos pelotas se escogen al azar sin restituirlas (sin devolverlas al frasco) y se registra el número x de pelotas rojas. Explique por qué x es o no es una variable aleatoria binomial. (SUGERENCIA: Compare las características de este experimento con las características de un experimento binomial dado en esta sección.) Si el experimento es binomial, dé los valores de n y p.

5.4 El problema de la urna, continúa Consulte el ejercicio 5.3. Suponga que el muestreo fue realizado con restitución. Esto es, suponga que la primera pelota se seleccionó del frasco, se observó y luego fue restituida (vuelta al frasco), y que las pelotas entonces se mezclaron antes de seleccionar la segunda pelota. Explique por qué x, el número de pelotas rojas observado, es o no es una variable aleatoria binomial. Si el experimento es binomial, dé los valores de n y p.

5.5 Evalúe estas probabilidades binomiales:

a. $C_2^8(.3)^2(.7)^6$ **b.** $C_0^4(.05)^0(.95)^4$
c. $C_3^{10}(.5)^3(.5)^7$ **d.** $C_1^7(.2)^1(.8)^6$

5.6 Evalúe estas probabilidades binomiales:

a. $C_0^8(.2)^0(.8)^8$ **b.** $C_1^8(.2)^1(.8)^7$ **c.** $C_2^8(.2)^2(.8)^6$
d. $P(x \leq 1)$ cuando $n = 8$, $p = .2$
e. P(dos éxitos o menos)

5.7 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 7$, $p = .3$. Encuentre estos valores:

a. $P(x = 4)$ **b.** $P(x \leq 1)$ **c.** $P(x > 1)$
d. $\mu = np$ **e.** $\sigma = \sqrt{npq}$

5.8 Use la fórmula para la distribución binomial de probabilidad para calcular los valores de $p(x)$ y construya el histograma de probabilidad para x cuando $n = 6$ y $p = .2$. [SUGERENCIA: Calcule $P(x = k)$ para siete valores diferentes de k.]

5.9 Consulte el ejercicio 5.8. Construya el histograma de probabilidad para una variable aleatoria x con $n = 6$ y $p = .8$. Use los resultados del ejercicio 5.8; no calcule de nuevo todas las probabilidades.

5.10 Si x tiene una distribución binomial con $p = .5$, ¿la forma de la distribución de probabilidad será simétrica, sesgada a la izquierda o sesgada a la derecha?

5.11 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 10$ y $p = .4$. Encuentre estos valores:

a. $P(x = 4)$ **b.** $P(x \geq 4)$ **c.** $P(x > 4)$
d. $P(x \leq 4)$ **e.** $\mu = np$ **f.** $\sigma = \sqrt{npq}$

5.12 Use la tabla 1 del apéndice I para hallar la suma de las probabilidades binomiales de $x = 0$ a $x = k$ para estos casos:

a. $n = 10$, $p = .1$, $k = 3$
b. $n = 15$, $p = .6$, $k = 7$
c. $n = 25$, $p = .5$, $k = 14$

5.13 Use la tabla 1 del apéndice I para evaluar las siguientes probabilidades para $n = 6$ y $p = .8$:

a. $P(x \geq 4)$ **b.** $P(x = 2)$
c. $P(x < 2)$ **d.** $P(x > 1)$

Verifique estas respuestas usando los valores de $p(x)$ calculados en el ejercicio 5.9.

5.14 $P(x \leq k)$ en cada caso:

a. $n = 20, p = .05, k = 2$

b. $n = 15, p = .7, k = 8$

c. $n = 10, p = .9, k = 9$

5.15 Use la tabla 1 del apéndice I para hallar lo siguiente:

a. $P(x < 12)$ para $n = 20, p = .5$

b. $P(x \leq 6)$ para $n = 15, p = .4$

c. $P(x > 4)$ para $n = 10, p = .4$

d. $P(x \geq 6)$ para $n = 15, p = .6$

e. $P(3 < x < 7)$ para $n = 10, p = .5$

5.16 Encuentre la media y desviación estándar para una distribución binomial con estos valores:

a. $n = 1000, p = .3$ **b.** $n = 400, p = .01$

c. $n = 500, p = .5$ **d.** $n = 1600, p = .8$

5.17 Encuentre la media y desviación estándar para una distribución binomial con $n = 100$ y estos valores de p:

a. $p = .01$ **b.** $p = .9$ **c.** $p = .3$

d. $p = .7$ **e.** $p = .5$

5.18 En el ejercicio 5.17, la media y desviación estándar para una variable aleatoria binomial se calcularon para un tamaño muestral fijo, $n = 100$ y para valores diferentes de p. Grafique los valores de la desviación estándar para los cinco valores de p dados en el ejercicio 5.17. ¿Para qué valores de p la desviación estándar parece ser un máximo?

5.19 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 20$ y $p = .1$.

a. Calcule $P(x \leq 4)$ usando la fórmula binomial.

b. Calcule $P(x \leq 4)$ usando la tabla 1 del apéndice I.

c. Use la salida *MINITAB* de esta página para calcular $P(x \leq 4)$. Compare los resultados de los incisos a), b) y c).

d. Calcule la media y desviación estándar de la variable aleatoria x.

e. Use los resultados del inciso d) para calcular los intervalos $\mu \pm \sigma$ $\mu \pm 2\sigma$, y $\mu \pm 3\sigma$. Encuentre la probabilidad de que una observación caiga en cada uno de estos intervalos.

f. ¿Los resultados del inciso e) son consistentes con el teorema de Chebyshev? ¿Con la Regla empírica? ¿Por qué sí o por qué no?

Salida *MINITAB* para el ejercicio 5.19

Función de densidad de probabilidad

```
Binomial with n = 20 and p = 0.1
 x   P( X = x )
 0     0.121577
 1     0.270170
 2     0.285180
 3     0.190120
 4     0.089779
 5     0.031921
 6     0.008867
 7     0.001970
 8     0.000356
 9     0.000053
10     0.000006
11     0.000001
12     0.000000
13     0.000000
14     0.000000
15     0.000000
16     0.000000
17     0.000000
18     0.000000
19     0.000000
20     0.000000
```

APLICACIONES

5.20 Clima en Chicago Un meteorólogo en Chicago registró el número de días de lluvia durante un periodo de 30 días. Si la variable aleatoria x se define como el número de días de lluvia, ¿x tiene una distribución binomial? Si no es así, ¿por qué no? Si es así, ¿se conocen los valores de n y de p?

5.21 Telemercadeo Una empresa de investigación de mercado contrata operadores para realizar encuestas por teléfono. La computadora marca al azar un número telefónico y la operadora pregunta a quien conteste si tiene tiempo para contestar algunas preguntas. Sea x el número de llamadas telefónicas hechas hasta que el primer entrevistado está dispuesto a contestar las preguntas de la operadora. ¿Es éste un experimento binomial? Explique.

5.22 Calificaciones del SAT (examen de aptitud escolar) En 2006, el promedio combinado de calificaciones del SAT (lectura + verbal + escritura) para estudiantes que van hacia la universidad en Estados Unidos fue 1518 (de 2400). Suponga que aproximadamente 45% de todos los graduados de preparatoria toman este examen y que 100 son seleccionados al azar en todo Estados Unidos.[1] ¿Cuál de las siguientes variables aleatorias tiene una distribución binomial aproximada? Si es posible, dé los valores para n y p.

a. El número de estudiantes que tomaron el SAT.

b. Las calificaciones de los 100 estudiantes en el SAT.

c. El número de estudiantes que calificaron arriba del promedio del SAT.

d. El tiempo que tomó a cada estudiante para completar el SAT.

5.23 Sistemas de seguridad El sistema de seguridad de una casa está diseñado para tener un 99% de confiabilidad. Suponga que nueve casas equipadas con este sistema experimentan un intento de robo. Encuentre las probabilidades de estos eventos:

a. Al menos una de las alarmas se activó.

b. Más de siete de las alarmas se activaron.

c. Ocho o menos alarmas se activaron.

5.24 Tipos de sangre En cierta población, 85% de las personas tienen tipo de sangre Rh positivo. Suponga que dos personas de esta población se casan. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos tengan Rh negativo, lo cual hace inevitable que sus hijos tengan Rh negativo?

5.25 Colores de autos La preferencia por el color de un auto cambia con los años y de acuerdo al modelo particular que seleccione el cliente. En un año reciente, suponga que 10% de todos los autos de lujo que se vendieron eran negros. Si 125 autos de ese año y tipo se seleccionan al azar, encuentre las siguientes probabilidades:

a. Al menos cinco autos son negros.

b. A lo sumo seis autos son negros.

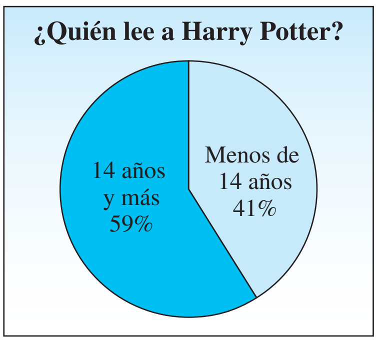
c. Más de cuatro autos son negros.

d. Exactamente cuatro autos son negros.

e. Entre tres y cinco autos (inclusive) son negros.

f. Más de 20 autos no son negros.

5.26 Harry Potter De todos los libros de Harry Potter comprados en un año reciente, alrededor del 60% fueron comprados por lectores de 14 años de edad o más.[2] Si se entrevista a 12 aficionados de Harry Potter que compraron libros ese año y si $p = .6$, encuentre las siguientes probabilidades.



a. Al menos cinco de ellos tenían 14 años o más.

b. Exactamente nueve de ellos tenían 14 años o más.

c. Menos de tres de ellos tenían 14 años o más.

5.27 Cuentas del médico Unos registros muestran que 30% de todos los pacientes ingresados en una clínica médica no pagan sus cuentas y que, en última instancia, esas cuentas son olvidadas. Suponga que $n = 4$ nuevos pacientes representan una selección aleatoria de entre un gran conjunto de prospectos de pacientes atendidos por la clínica. Encuentre estas probabilidades:

a. Las cuentas de todos los pacientes tendrán finalmente que olvidarse.

b. Una tendrá que olvidarse.

c. Ninguna tendrá que olvidarse.

5.28 Cuentas del médico II Considere el problema de pagos al médico del ejercicio 5.27 en un escenario más realista. De todos los pacientes ingresados a una clínica médica, 30% no pagan sus cuentas y las deudas finalmente se olvidan. Si la clínica trata 2000 pacientes diferentes en un periodo de un año, ¿cuál es el número medio (esperado) de deudas que tienen que olvidarse? Si x es el número de deudas olvidadas del grupo de 2000 pacientes, encuentre la varianza y desviación estándar de x. ¿Qué se puede decir acerca de la probabilidad de que x pase de 700? (SUGERENCIA: Use los valores de μ y σ, junto con el teorema de Chebyshev, para contestar esta pregunta.)

5.29 Infestación de la mosca blanca Suponga que 10% de los campos en una región agrícola determinada están infestados con la mosca blanca de la remolacha. Se seleccionan 100 campos de esta región y se inspeccionan para ver si están infestados.

a. ¿Cuál es el número promedio de campos muestreados que están infestados de la mosca blanca?

b. ¿Dentro de qué límites esperaría usted hallar el número de campos infestados, con probabilidad aproximada de 95%?

c. ¿Qué podría usted concluir si encuentra que $x = 25$ campos estuvieran infestados? ¿Es posible que una de las características de un experimento binomial no se satisfaga en este experimento? Explique.

5.30 Preferencias de color en ratones En un experimento de psicología, la investigadora planea probar la preferencia de color en ratones bajo ciertas condiciones experimentales. Ella diseña un laberinto en el que el ratón debe escoger uno de dos caminos, en color ya sea rojo o azul, en cada uno de 10 cruceros. Al final del laberinto, el ratón recibe una recompensa en alimento. La investigadora cuenta el número de veces que el ratón escoge el camino rojo. Si usted fuera la investigadora, ¿cómo usaría esta cuenta para determinar si el ratón tiene alguna preferencia por un color?

5.31 Dolor de espalda Seis de cada 10 personas adultas dicen que el dolor de la espalda baja limita en forma considerable sus actividades atléticas.[3] A una muestra al azar de $n = 8$ adultos se les preguntó si el dolor de la espalda baja limita en forma considerable sus actividades atléticas. La salida impresa del *MINITAB* muestra las probabilidades acumulativas e individuales.

Salida impresa del *MINITAB* para el ejercicio 5.31

Función acumulativa de distribución

```
Binomial with n = 8
and p = 0.6

x   P( X <= x )
0       0.00066
1       0.00852
2       0.04981
3       0.17367
4       0.40591
5       0.68461
6       0.89362
7       0.98320
8       1.00000
```

Función de densidad de probabilidad

```
Binomial with n = 8
and p = 0.6

x   P( X = x )
0      0.000655
1      0.007864
2      0.041288
3      0.123863
4      0.232243
5      0.278692
6      0.209019
7      0.089580
8      0.016796
```

a. Use la fórmula binomial para hallar la probabilidad de que los ocho indiquen que el dolor de la espalda baja era un factor limitante en sus actividades atléticas.

b. Confirme los resultados del inciso (**a**) usando la salida impresa del *MINITAB*.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que a los sumo siete individuos digan que el dolor de la espalda baja es un factor limitante en sus actividades atléticas?

5.32 Comida rápida y gasolineras 40% de los estadounidenses que viajan en auto buscan gasolineras y mercados de alimentos que sean cercanos o visibles desde la carretera. Suponga que a una muestra aleatoria de $n = 25$ estadounidenses que viajan en auto se les pregunta cómo determinan dónde detenerse para tomar alimentos y cargar gasolina. Sea x el número de la muestra que responden que buscan gasolineras y mercados de alimentos que sean cercanos o visibles desde la carretera.

a. ¿Cuáles son la media y varianza de x?

b. Calcule el intervalo $\mu \pm 2\sigma$. ¿Cuáles valores de la variable aleatoria binomial x caen en este intervalo?

c. Encuentre $P(6 \leq x \leq 14)$. ¿Cómo se compara esto con la fracción del intervalo $\mu \pm 2\sigma$ para cualquier distribución? ¿Y para distribuciones en forma de montículo?

5.33 Prueba del gusto por el PTC La prueba del gusto por el PTC (feniltiocarbamida) es un ejercicio favorito para toda clase de genética humana. Se ha establecido que un solo gen determina la característica y que 70% de los estadounidenses son "probadores", en tanto que 30% son "no probadores". Suponga que se escogen 20 estadounidenses y se someten a la prueba del gusto del PTC.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que 17 o más sean "probadores"?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que 15 o menos sean "probadores"?

5.34 El mejor amigo del hombre Según la Sociedad protectora de animales de Estados Unidos, hay aproximadamente 65 millones de perros con dueño en Estados Unidos y alrededor del 40% de todas las familias en Estados Unidos tienen al menos un perro.[4] Suponga que la cifra del 40% es correcta y que 15 familias se seleccionan al azar para un estudio sobre propiedad de mascotas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente ocho de las familias tenga al menos un perro?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro de las familias tenga al menos un perro?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 10 familias tenga al menos un perro?

5.3 LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

Otra variable aleatoria discreta que tiene numerosas aplicaciones prácticas es la **variable aleatoria de Poisson**. Su distribución de probabilidad da un buen modelo para datos que representa el número de sucesos de un evento especificado en una unidad determinada de tiempo o espacio. A continuación veamos algunos ejemplos de experimentos para los cuales la variable aleatoria x puede ser modelada por la variable aleatoria de Poisson:

- El número de llamadas recibidas por un conmutador durante un tiempo determinado
- El número de bacterias por volumen pequeño de fluido
- El número de llegadas de clientes al mostrador de una caja de pago en un minuto determinado

- El número de descompostures de una máquina durante un día determinado
- El número de accidentes de tránsito en un crucero dado durante un tiempo determinado

En cada uno de estos ejemplos, ***x* representa el número de eventos que ocurren en un periodo o espacio, durante el cual se puede esperar que ocurra un promedio de μ de estos eventos**. Las únicas suposiciones necesarias, cuando uno usa la distribución de Poisson para modelar experimentos tales como éstos, son que las cuentas o eventos ocurren **al azar e independientemente** unos de otros. La fórmula para la distribución de probabilidad de Poisson, así como su media y varianza, se dan a continuación.

LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

Sea μ el número promedio de veces que ocurre un evento en cierto tiempo o espacio. La probabilidad de k sucesos de este evento es

$$P(x = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

para valores de $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. La media y desviación estándar de la variable aleatoria de Poisson x son

Media: μ

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\mu}$

MI CONSEJO

Utilice la fórmula Poisson o la tabla 2 para calcular probabilidades de Poisson.

El símbolo $e = 2.71828\ldots$ se evalúa usando su calculadora científica, que debe tener una función como e^x. Para cada valor de k, se pueden obtener las probabilidades individuales para la variable aleatoria de Poisson, igual que como hicimos para la variable aleatoria binomial.

Alternativamente, se pueden usar **tablas acumulativas de Poisson** (tabla 2 del apéndice I) o probabilidades acumulativas o individuales generadas por el *MINITAB*. Estas dos opciones son por lo general más cómodas que hacer el cálculo manualmente. Los procedimientos son semejantes a los empleados para la variable aleatoria binomial.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo probabilidades de Poisson usando la fórmula?

1. Encuentre el valor necesario de μ.
2. Haga una lista de valores de x en su evento.
3. Para cada valor de x, sustituya $x = k$ en la fórmula, $P(x = k) = \dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$.
4. Sume las probabilidades individuales en (3) para hallar la probabilidad de interés.

Repertorio de ejercicios

A. Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 1.5$. Calcule las siguientes probabilidades usando la tabla siguiente:

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
$P(x = 1)$	$\dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
P(1 o menos éxitos)	$P(x =$ ___$) + P(x =$ ___$)$	

¿Cómo uso la tabla 2 para calcular probabilidades de Poisson?

1. Encuentre el valor necesario de μ. Aísle la columna apropiada de la tabla 2.
2. La tabla 2 da $P(x \leq k)$ en el renglón marcado k. Reescriba la probabilidad que necesita para que esté en esta forma.
   - Haga una lista de los valores de x en su evento.
   - De la lista, escriba el evento como la diferencia de dos probabilidades:

$$P(x \leq a) - P(x \leq b) \quad \text{para } a > b$$

o el complemento del evento:

$$1 - P(x \leq a)$$

o sólo el evento mismo:

$$P(x \leq a) \text{ o } P(x < a) = P(x \leq a - 1)$$

Repertorio de ejercicios

B. Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 1.5$. Separe la columna apropiada en la tabla 2 y llene las probabilidades siguientes. Una de las probabilidades, $P(x \leq 3)$, ya está llenada.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x \leq k)$				.934				

C. Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente. El tercer problema ya está hecho.

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
3 o menos				
3 o más				
Más de 3	4, 5, 6, . . .	$P(x > 3)$	$1 - P(x \leq 3)$	.066
Menos de 3				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
Exactamente 3				

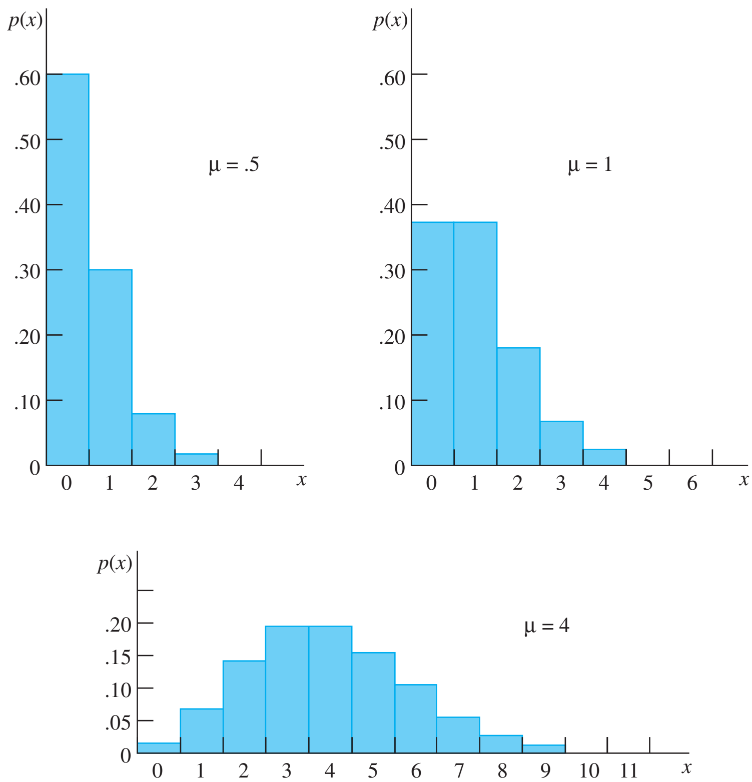
Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina las probabilidades binomiales? Puede saltarse el repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

Una vez calculados los valores para $p(x)$, puede usted usarlos para construir un histograma de probabilidad para la variable aleatoria x. En la figura 5.5 se presentan gráficas de la distribución de probabilidad de Poisson para $\mu = .5$, 1 y 4.

FIGURA 5.5
Distribuciones de probabilidad de Poisson para $\mu = .5$, 1 y 4



EJEMPLO 5.8

El número promedio de accidentes de tránsito en cierto crucero de carretera es dos por semana. Suponga que el número de accidentes sigue una distribución de Poisson con $\mu = 2$.

1. Encuentre la probabilidad de que no haya accidentes en este crucero de carretera durante un periodo de 1 semana.
2. Encuentre la probabilidad de que a lo sumo haya tres accidentes en esta sección de carretera durante un periodo de 2 semanas.

Solución

1. El número promedio de accidentes por semana es $\mu = 2$. Por tanto, la probabilidad de que no haya accidentes en esta sección de carretera durante 1 semana determinada es

$$P(x = 0) = p(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = .13533$$

2. Durante un periodo de 2 semanas, el número promedio de accidentes en esta sección de carretera es $2(2) = 4$. La probabilidad de que a lo sumo haya tres accidentes durante un periodo de 2 semanas es

$$P(x \le 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$$

donde

$$p(0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = .018316 \quad p(2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = .146525$$

$$p(1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = .073263 \quad p(3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = .195367$$

Por tanto,

$$P(x \le 3) = .018316 + .073263 + .146525 + .195367 = .433471$$

Este valor podría leerse directamente de la tabla 2 del apéndice I, indicando $\mu = 4$ y $k = 3$, como $P(x \le 3) = .433$.

En la sección 5.2, utilizamos las tablas binomiales acumulativas para simplificar el cálculo de probabilidades binomiales. Desafortunadamente, en situaciones prácticas, con frecuencia n es grande y no se dispone de tablas.

MI CONSEJO

Se puede estimar probabilidades binomiales con la de Poisson cuando n es grande y p es pequeña.

LA APROXIMACIÓN DE POISSON A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución de probabilidad de Poisson da una aproximación sencilla, fácil de calcular y precisa a probabilidades binomiales cuando n es grande y $\mu = np$ es pequeña, de preferencia con $np < 7$. Una aproximación apropiada para valores más grandes de $\mu = np$ se da en el capítulo 6.

EJEMPLO 5.9

Suponga que una compañía de seguros de vida asegura las vidas de 5000 hombres de 42 años de edad. Si estudios actuariales muestran que la probabilidad de que cualquier hombre de 42 años muera en un año determinado es .001, encuentre la probabilidad exacta de que la compañía tendrá que pagar $x = 4$ reclamaciones durante un año determinado.

Solución La probabilidad exacta está dada por la distribución binomial como

$$P(x = 4) = p(4) = \frac{5000!}{4!4996!}(.001)^4(.999)^{4996}$$

para la cual no se dispone de tablas binomiales. Calcular $P(x = 4)$ sin ayuda de una computadora sería muy lento, pero la distribución de Poisson se puede usar para dar una buena aproximación para $P(x = 4)$. Calculando $\mu = np = (5000)(.001) = 5$ y sustituyendo en la fórmula para la distribución de probabilidad de Poisson, tenemos

$$p(4) \approx \frac{\mu^4 e^{-\mu}}{4!} = \frac{5^4 e^{-5}}{4!} = \frac{(625)(.006738)}{24} = .175$$

El valor de $p(4)$ podría obtenerse también usando la tabla 2 del apéndice I con $\mu = 5$ como

$$p(4) = P(x \le 4) - P(x \le 3) = .440 - .265 = .175$$

EJEMPLO 5.10

Una fabricante de podadoras para el pasto compra motores de 1 hp y 2 ciclos, en lotes de 1000, a un proveedor. Ella entonces equipa cada una de las podadoras producidas por su planta con uno de los motores. La historia muestra que la probabilidad de que cualquier motor del proveedor resulte no satisfactorio es .001. En un embarque de 1000 motores, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso? ¿Hay tres o más? ¿Hay cuatro?

Solución Éste es un experimento binomial con $n = 1000$ y $p = .001$. El número esperado de motores defectuosos en un embarque de $n = 1000$ motores es $\mu = np = (1000)(.001) = 1$. Como éste es un experimento binomial con $np < 7$, la probabilidad de x motores defectuosos en este embarque puede aproximarse con

$$P(x = k) = p(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \frac{1^k e^{-1}}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

Por tanto,

$$p(0) \approx \frac{e^{-1}}{0!} = \frac{.368}{1} = .368$$

$$p(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{.368}{6} = .061$$

$$p(4) \approx \frac{e^{-1}}{4!} = \frac{.368}{24} = .015$$

Las probabilidades individuales de Poisson para $\mu = 1$, junto con las probabilidades binomiales individuales para $n = 1000$ y $p = .001$, fueron generadas por *MINITAB* y se muestran en la figura 5.6. Las probabilidades individuales, aun cuando se calculan con fórmulas totalmente diferentes, son casi iguales. Las probabilidades binomiales exactas están en la sección izquierda de la figura 5.6, y las aproximaciones Poisson están a la derecha. Observe que el *MINITAB* deja de calcular probabilidades una vez que el valor sea igual a cero dentro de un nivel de precisión asignado previamente.

FIGURA 5.6
Salida impresa del *MINITAB* de probabilidades binomiales y de Poisson

Función de densidad de probabilidad

Binomial with n = 1000 and p = 0.001

x	P(X = x)
0	0.367695
1	0.368063
2	0.184032
3	0.061283
4	0.015290
5	0.003049
6	0.000506
7	0.000072
8	0.000009
9	0.000001
10	0.000000

Función de densidad de probabilidad

Poisson with mean = 1

x	P(X = x)
0	0.367879
1	0.367879
2	0.183940
3	0.061313
4	0.015328
5	0.003066
6	0.000511
7	0.000073
8	0.000009
9	0.000001
10	0.000000

5.3 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 198.

5.35 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 2.5$. Calcule las siguientes probabilidades con la tabla siguiente.

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
$P(x = 1)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
$P(x = 2)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
P(2 o menos éxitos)	$P(x =$ ____ $) + P(x =$ ____ $) + P(x =$ ____ $)$	

5.36 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 3$. Calcule las siguientes probabilidades con la tabla siguiente.

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
$P(x = 1)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______	
P(más de 1 éxito)	$1 - [P(x =$ ____ $) + P(x =$ ____ $)]$	

5.37 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 3$. Separe la columna apropiada en la tabla 2 y llene las probabilidades siguientes.

κ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x \leq \kappa)$											

Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

El problema	Lista de valores de *x*	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
3 o menos		$P(x \leq$ ___ $)$		
3 o más		$P(x \geq$ ___ $)$	$1 - P(x \leq$ ___ $)$	
Más de 3		$P(x >$ ___ $)$	$1 - P(x \leq$ ___ $)$	
Menos de 3		$P(x <$ ___ $)$	$P(x \leq$ ___ $)$	
Entre 3 y 5 (inclusive)		$P($ ___ $\leq x \leq$ ___ $)$	$P(x \leq$ ___ $) - P(x \leq$ ___ $)$	
Exactamente 3		$P(x =$ ___ $)$	$P(x \leq$ ___ $) - P(x \leq$ ___ $)$	

5.38 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 0.8$. Separe la columna apropiada en la tabla 2 y llene las probabilidades siguientes.

κ	0	1	2	3	4	5
$P(x \leq \kappa)$						

Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
Exactamente 2				
Más de 2				
2 o más				
Menos de 2				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
2 o menos				

TÉCNICAS BÁSICAS

5.39 Sea x una variable aleatoria de Poisson con media $\mu = 2$. Calcule estas probabilidades:

a. $P(x = 0)$ **b.** $P(x = 1)$
c. $P(x > 1)$ **d.** $P(x = 5)$

5.40 Sea x una variable aleatoria de Poisson con media $\mu = 2.5$. Use la tabla 2 del apéndice I para calcular estas probabilidades:

a. $P(x \geq 5)$ **b.** $P(x < 6)$
c. $P(x = 2)$ **d.** $P(1 \leq x \leq 4)$

5.41 Poisson *vs.* binomial Sea x una variable aleatoria con $n = 20$ y $p = .1$.

a. Calcule $P(x \leq 2)$ usando la tabla 1 del apéndice I para obtener la probabilidad binomial exacta.
b. Use la aproximación de Poisson para calcular $P(x \leq 2)$.
c. Compare los resultados de los incisos a) y b). ¿Es precisa la aproximación?

5.42 Poisson *vs* binomial II Para ilustrar qué tan bien la distribución de probabilidad de Poisson aproxima la distribución binomial de probabilidad, calcule los valores aproximados de Poisson para $p(0)$ y $p(1)$ para una distribución binomial de probabilidad con $n = 25$ y $p = .05$. Compare las respuestas contra los valores exactos obtenidos de la tabla 1 del apéndice I.

APLICACIONES

5.43 Seguridad en un aeropuerto El mayor número de pequeños aviones de vuelos cortos en aeropuertos importantes ha aumentado la preocupación por la seguridad en el aire. Un aeropuerto de la región este ha registrado un promedio mensual de cinco accidentes que casi ocurren en aterrizajes y despegues en los últimos 5 años.

a. Encuentre la probabilidad de que durante un mes determinado no haya accidentes que casi ocurren en aterrizajes y despegues en el aeropuerto.
b. Encuentre la probabilidad de que durante un mes determinado haya cinco accidentes que casi ocurren.
c. Encuentre la probabilidad de que haya al menos cinco accidentes que casi ocurren durante un mes particular.

5.44 Cuidados intensivos El número x de personas ingresadas a una unidad de cuidados intensivos en un hospital particular, en un día, tiene una distribución de probabilidad de Poisson con media igual a cinco personas por día.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de personas ingresadas a una unidad de cuidados intensivos en un hospital particular, en un día particular, sea dos? ¿Menor o igual a dos?
b. ¿Es probable que x exceda de 10? Explique.

5.45 Propenso a accidentes Los padres preocupados porque sus hijos son "propensos a accidentes" pueden estar tranquilos, de acuerdo a un estudio realizado por el Departamento de Pediatría de la Universidad de California, San Francisco. Los niños que se lesionan dos o más veces tienden a sufrir estas lesiones durante un tiempo relativamente limitado, por lo general un año o menos. Si el número promedio de lesiones por año para niños en edad escolar es de dos, ¿cuáles son las probabilidades de estos eventos?

a. Un niño sufrirá dos lesiones durante el año.
b. Un niño sufrirá dos o más lesiones durante el año.
c. Un niño sufrirá a lo sumo una lesión durante el año.

5.46 Propenso a accidentes, continúa Consulte el ejercicio 5.45.

a. Calcule la media y desviación estándar para x, el número de lesiones por año sufridas por un niño en edad escolar.
b. ¿Dentro de qué límites esperaría usted que caiga el número de lesiones por año?

5.47 Bacterias en muestras de agua Si una gota de agua se pone en la platina y se examina bajo un microscopio, el número x de un tipo particular de bacteria presente se ha encontrado que tiene una distribución de probabilidad de Poisson. Suponga que la cantidad máxima permisible por espécimen de agua para este tipo de bacteria es cinco. Si la cantidad media para el suministro de agua de usted es de dos y usted prueba una sola muestra, ¿es probable que la cantidad exceda la cantidad máxima permisible? Explique.

5.48 Brote de *E. coli* Una mayor investigación y discusión se han concentrado sobre el número de enfermedades que involucran al organismo *Escherichia coli* (01257:H7), que causa un colapso de glóbulos rojos sanguíneos y hemorragia intestinal en sus víctimas.[5] De acuerdo con el Centro para Control de Enfermedades, un estimado de 73 mil casos por infección de *E. coli* y 61 fallecimientos al año ocurren en Estados Unidos. Un brote en 2006 se rastreó hasta cerdos salvajes, que dispersaron la bacteria en un campo de espinacas en California, enfermó a 204 personas en 26 estados y 1 en una provincia canadiense.[6] Los brotes han ocurrido a un porcentaje de 2.5 por 100 mil. Supongamos que este porcentaje no ha cambiado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo cinco casos de *E. coli* por 100 mil se informen en California este año?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que más de cinco casos de *E. coli* por 100 mil se informen en California este año?

c. Aproximadamente 95% de los sucesos de *E. coli* comprenden a lo sumo ¿cuántos casos?

5.4 LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA DE PROBABILIDAD

Supongamos que usted está seleccionando una muestra de elementos de una población y que registra si cada elemento posee o no posee cierta característica. Usted está registrando la típica información de "éxito" o "fracaso" que se encuentra en el experimento binomial. El estudio de la muestra del ejemplo 5.1, así como el muestreo para ver si hay defectos en el ejemplo 5.2., son ilustraciones de estas situaciones de muestreo.

Si el número de elementos de la población es grande con respecto al número en la muestras (como en el ejemplo 5.1), la probabilidad de seleccionar un éxito en un solo intento es igual a la proporción p de éxitos en la población. Debido a que la población es grande con respecto al tamaño muestral, esta probabilidad permanecerá constante (para todos los fines prácticos) de un intento a otro y el número x de éxitos en la muestra seguirá una distribución binomial de probabilidad. No obstante, si el número de elementos en la población es pequeño con respecto al tamaño muestral ($n/N \geq 0.5$), la probabilidad de un éxito para un intento determinado depende de los resultados de intentos precedentes. Entonces el número x de éxitos sigue lo que se conoce como una **distribución hipergeométrica de probabilidad**.

Es fácil visualizar la **variable hipergeométrica aleatoria *x*** si se considera un tazón que contenga M esferas rojas y $N - M$ esferas blancas, para un *total de* N esferas en el tazón. Usted selecciona n esferas del tazón y registra x, el número de esferas rojas que vea. Si ahora define un "éxito" como una esfera roja, tendrá un ejemplo de la variable aleatoria x hipergeométrica.

La fórmula para calcular la probabilidad de exactamente k éxitos en n intentos se da a continuación.

LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA DE PROBABILIDAD

Una población contiene M éxitos y $N - M$ fracasos. La probabilidad de exactamente k éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n es

$$P(x = k) = \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}$$

para valores de k que dependen de N, M y n con

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

La media y la varianza de una variable aleatoria hipergeométrica son muy semejantes a las de una variable aleatoria binomial con una corrección para el tamaño finito de población:

$$\mu = n\left(\frac{M}{N}\right)$$

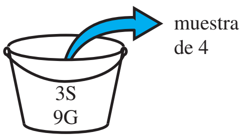
$$\sigma^2 = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

EJEMPLO 5.11

Un recipiente tiene 12 botellas de vinos, 3 de las cuales contienen vino que se ha echado a perder. Una muestra de 4 botellas se selecciona al azar de entre la caja.

1. Encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de botellas de vino echado a perder de la muestra.
2. ¿Cuáles son la media y la varianza de x?

MI CONSEJO



S = V (vinagre)
G = B (buen estado)

Solución Para este ejemplo, $N = 12$, $n = 4$, $V = 3$ y $(N - M) = \text{B} = 9$. Entonces.

$$p(x) = \frac{C_x^3 C_{4-x}^9}{C_4^{12}}$$

1. Los valores posibles para x son 0, 1, 2 y 3, con probabilidades

$$p(0) = \frac{C_0^3 C_4^9}{C_4^{12}} = \frac{1(126)}{495} = .25$$

$$p(1) = \frac{C_1^3 C_3^9}{C_4^{12}} = \frac{3(84)}{495} = .51$$

$$p(2) = \frac{C_2^3 C_2^9}{C_4^{12}} = \frac{3(36)}{495} = .22$$

$$p(3) = \frac{C_3^3 C_1^9}{C_4^{12}} = \frac{1(9)}{495} = .02$$

2. La media está dada por

$$\mu = 4\left(\frac{3}{12}\right) = 1$$

y la varianza

$$\sigma^2 = 4\left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{12-4}{11}\right) = .5455$$

EJEMPLO 5.12

Un producto industrial particular se envía en lotes de 20. Hacer pruebas para determinar si un artículo es defectuoso o costoso; por tanto, el fabricante muestrea la producción en lugar de usar un plan de inspección del 100%. Un plan de muestreo construido para reducir al mínimo el número de piezas defectuosas, enviadas a los clientes, exige muestrear cinco artículos de entre cada lote y rechazar el lote si se observa más de una pieza defectuosa. (Si el lote es rechazado, cada artículo del lote se prueba entonces.) Si un lote contiene cuatro defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea aceptado?

Solución Sea x el número de defectuosos en la muestra. Entonces $N = 20$, $M = 4$, $(N - M) = 16$ y $n = 5$. El lote será rechazado si $x = 2, 3$ o 4. Entonces

$$P(\text{aceptar el lote}) = P(x \leq 1) = p(0) + p(1) = \frac{C_0^4 C_5^{16}}{C_5^{20}} + \frac{C_1^4 C_4^{16}}{C_5^{20}}$$

$$= \frac{\left(\frac{4!}{0!4!}\right)\left(\frac{16!}{5!11!}\right)}{\frac{20!}{5!15!}} + \frac{\left(\frac{4!}{1!3!}\right)\left(\frac{16!}{4!12!}\right)}{\frac{20!}{5!15!}}$$

$$= \frac{91}{323} + \frac{455}{969} = .2817 + .4696 = .7513$$

5.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

5.49 Evalúe estas probabilidades:

a. $\frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5}$ **b.** $\frac{C_2^4 C_1^3}{C_3^7}$ **c.** $\frac{C_4^5 C_0^3}{C_4^8}$

5.50 Sea x el número de éxitos observado en una muestra de $n = 5$ artículos seleccionados de entre $N = 10$. Suponga que, de los $N = 10$ elementos, 6 eran considerados "éxitos".

a. Encuentre la probabilidad de no observar éxitos.

b. Encuentre la probabilidad de observar al menos dos éxitos.

c. Encuentre la probabilidad de observar dos éxitos.

5.51 Sea x una variable aleatoria hipergeométrica con $N = 15$, $n = 3$ y $M = 4$.

a. Calcule $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$.

b. Construya el histograma de probabilidad para x.

c. Use las fórmulas dadas en la sección 5.4 para calcular $\mu = E(x)$ y σ^2.

d. ¿Qué proporción de la población de mediciones cae en el intervalo $(\mu \pm 2\sigma)$? ¿En el intervalo $(\mu \pm 3\sigma)$? ¿Estos resultados concuerdan con los dados por el teorema de Chebyshev?

5.52 Selección de dulces Un plato de dulces contiene cinco dulces azules y tres rojos. Un niño los alcanza y selecciona tres dulces sin verlos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos dulces azules y uno rojo en la selección?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los dulces sean rojos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los dulces sean azules?

APLICACIONES

5.53 Chips de computadora defectuosos Una pieza de equipo electrónico contiene seis chips de computadora, dos de los cuales están defectuosos. Tres chips de computadora se seleccionan para inspeccionarlos y se registra el número de los defectuosos. Encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de chips de computadora defectuosos. Compare sus resultados con las respuestas obtenidas en el ejercicio 4.90.

5.54 ¿Sesgo en el género? Una compañía tiene cinco solicitantes para dos puestos de trabajo: dos mujeres y tres hombres. Suponga que los cinco solicitantes están igualmente calificados y que no se da preferencia para escoger género alguno. Sea x igual al número de mujeres escogido para ocupar las dos posiciones.

a. Escriba la fórmula para $p(x)$, la distribución de probabilidad de x.

b. ¿Cuáles son la media y la varianza de esta distribución?

c. Construya un histograma de probabilidad para x.

5.55 Credenciales para enseñanza En el sur de California, un creciente número de personas que buscan una credencial para enseñanza están escogiendo internados pagados en los tradicionales programas estudiantiles para enseñanza. Un grupo de ocho candidatos para tres posiciones locales de enseñanza estaba formado por cinco candidatos, que se habían inscrito en internados pagados y tres candidatos que se habían inscrito en programas tradicionales estudiantiles para enseñanza. Supongamos que los ocho candidatos están igualmente calificados para las posiciones. Represente con x el número de candidatos capacitados en un internado que son contratados para estas tres posiciones.

a. ¿La x tiene una distribución binomial o una distribución hipergeométrica? Apoye su respuesta.

b. Encuentre la probabilidad de que tres candidatos capacitados en internado sean contratados para estas posiciones.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los tres contratados sea capacitado en internado?

d. Encuentre $P(x \leq 1)$.

5.56 Tratamiento a semillas Es frecuente que las semillas sean tratadas con un fungicida para protegerlas de ambientes mal drenados, húmedos. En un intento a pequeña escala antes de un experimento a gran escala para determinar qué dilución del fungicida aplicar, cinco semillas tratadas y cinco no tratadas se plantaron en suelo arcilloso y se registró el número de plantas que emergieron de las semillas tratadas y de las no tratadas. Suponga que la dilución no fue eficaz y sólo emergieron cuatro plantas. Represente con x el número de plantas que emergieron de semillas tratadas.

a. Encuentre la probabilidad de que $x = 4$.

b. Encuentre $P(x \leq 3)$.

c. Encuentre $P(2 \leq x \leq 3)$.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. La variable aleatoria binomial

1. **Cinco características:** n intentos independientes idénticos, cada uno resultando ya sea en *éxito* (S) o en *fracaso* (F); la probabilidad de éxito es p y es constante de un intento a otro; y x es el número de éxitos en n intentos.
2. **Cálculo de probabilidades binomiales**
   a. Fórmula: $P(x = k) = C_k^n p^k q^{n-k}$
   b. Tablas binomiales acumulativas
   c. Probabilidades individuales y acumulativas usando *MINITAB*
3. Media de la variable aleatoria binomial: $\mu = np$
4. Varianza y desviación estándar: $\sigma^2 = npq$ y $\sigma = \sqrt{npq}$

II. La variable aleatoria de Poisson

1. El número de eventos que ocurren en un periodo o espacio, durante el cual se espera que ocurra un promedio de μ eventos.
2. **Cálculo de probabilidades de Poisson**
   a. Fórmula: $P(x = k) = \dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$
   b. Tablas acumulativas de Poisson
   c. Probabilidades individuales y acumulativas usando *MINITAB*
3. Media de la variable aleatoria de Poisson: $E(x) = \mu$
4. Varianza y desviación estándar: $\sigma^2 = \mu$ y $\sigma = \sqrt{\mu}$
5. Las probabilidades binomiales se pueden aproximar con probabilidades de Poisson cuando $np < 7$, usando $\mu = np$.

III. La variable aleatoria hipergeométrica

1. El número de éxitos en una muestra de tamaño n de una población finita que contiene M éxitos y $N - M$ fracasos.
2. Fórmula para la probabilidad de k éxitos en n intentos:
   $$P(x = k) = \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}$$
3. Media de la variable aleatoria hipergeométrica:
   $$\mu = n\left(\frac{M}{N}\right)$$
4. Varianza y desviación estándar:
   $$\sigma^2 = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

MI **MINITAB**

Probabilidades binomiales y de Poisson

Para una variable aleatoria que tiene una distribución de probabilidad binomial o una de Poisson, *MINITAB* ha sido programado para calcular ya sea probabilidades exactas, $P(x = k)$, para un valor determinado de k o las probabilidades acumulativas, $P(x \leq k)$, para un valor determinado de k. El usuario debe especificar cuál distribución está usando y los parámetros necesarios: n y p para la distribución binomial y μ para la distribución de Poisson. También, tiene la opción de especificar sólo un valor individual de k o varios valores de k, que deben guardarse en una columna (C1, por ejemplo) de la hoja de trabajo *MINITAB*.

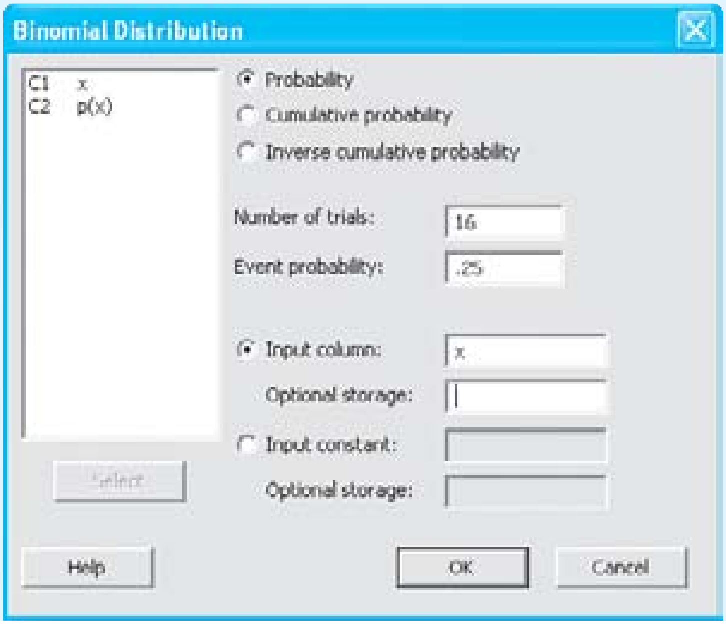
Considere una distribución binomial con $n = 16$ y $p = .25$. Ni n ni p aparecen en las tablas del apéndice I. Como los posibles valores de x para esta variable aleatoria binomial varían de 0 a 16, podemos generar toda la distribución de probabilidad así como las probabilidades acumulativas al introducir los números 0 a 16 en la columna C1.

Una forma de introducir rápidamente un conjunto de enteros consecutivos en una columna es hacer lo siguiente:

- Dar nombre a las columnas C1 y C2 como "x" y "p(x)", respectivamente.
- Introducir los primeros dos valores de x, 0 y 1, para crear un patrón en la columna C1.
- Usar el mouse para seleccionar los primeros dos enteros.
- Usar el mouse para tomar la manija cuadrada de la esquina inferior izquierda del área seleccionada. Arrastre la manija hacia abajo para continuar con el patrón.
- El usuario verá que aparece un entero en un pequeño cuadro amarillo. Suelte el mouse cuando tenga el número deseado de enteros, en este caso $\boxed{16}$.

Una vez introducidos los valores necesarios de x, use **Calc → Probability Distributions → Binomial** para generar el cuadro de diálogo que se muestra en la figura 5.7. Teclee el número de intentos y el valor de p (Event probability) (probabilidad de evento)

FIGURA 5.7



en las cajas apropiadas, y seleccione “x” para la columna de entrada. (Si no teclea un número de columna para guardar, *MINITAB* mostrará los resultados en la ventana Session. Si el usuario teclea C2 o p(x) en la caja marcada “Optional storage”, los resultados aparecerán en la columna C2 en lugar de en la ventana Session.) Verifique seleccionar el botón de radio marcado “Probability”. La función de densidad de probabilidad aparece en la ventana Session cuando dé un clic en **OK** (una parte se muestra en la figura 5.8). ¿Cuál es la probabilidad de que x sea igual a 4? ¿De que sea 3 o 4?

Para calcular probabilidades acumulativas, verifique que esté seleccionado el punto marcado “Cumulative probability” y teclee los valores apropiados de x en C1. Si usted tiene sólo un valor de x, es más sencillo seleccionar la caja Input constant y teclear el valor apropiado. Por ejemplo, para una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 5$, use **Calc → Probability distributions → Poisson** y teclee una media de 5. Introduzca el número 6 en la caja Input constant, dé un clic en OK y la probabilidad de que x sea menor o igual a 6 aparecerá en la ventana Session (véase la figura 5.9).

¿Qué valor k es tal que sólo 5% de los valores de x exceden este valor (y 95% son menores o iguales a k)? Si usted teclea la probabilidad .95 en la caja Input constant, seleccione la opción marcada “Inverse cumulative probability” y dé un clic en OK (véase la figura 5.10), entonces los valores de x a cualquier lado de la “.95 mark” aparecen en la ventana Session como en la figura 5.11. Por tanto, si el usuario observó un valor de $x = 10$, esto sería una observación poco común porque $P(x > 9) = 2 - .968172 = .031828$.

FIGURA 5.8

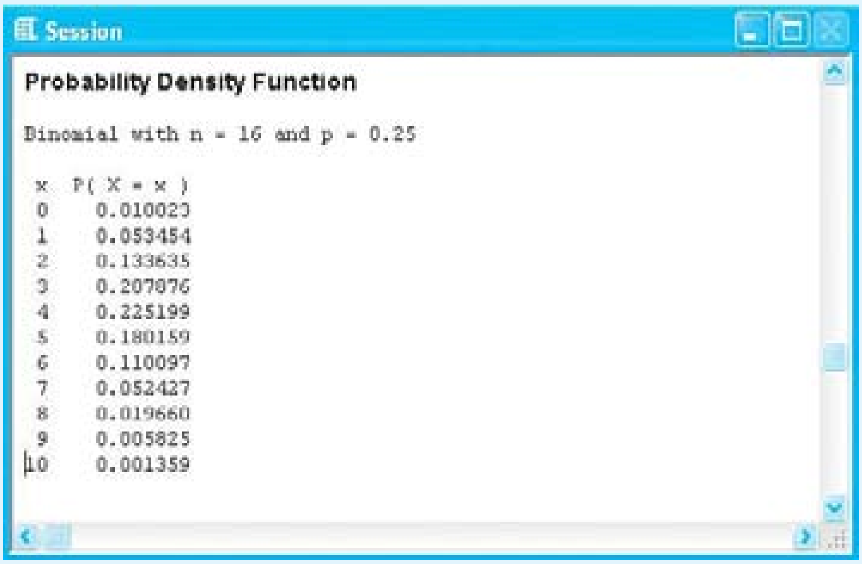


FIGURA 5.9

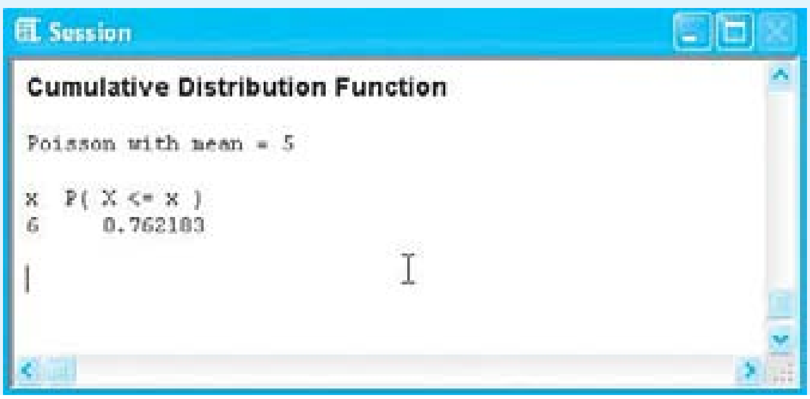


FIGURA 5.10

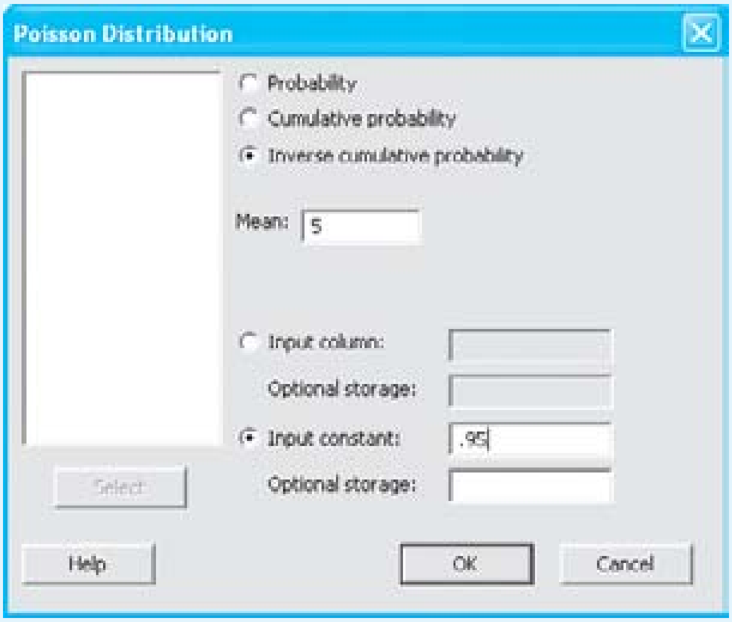
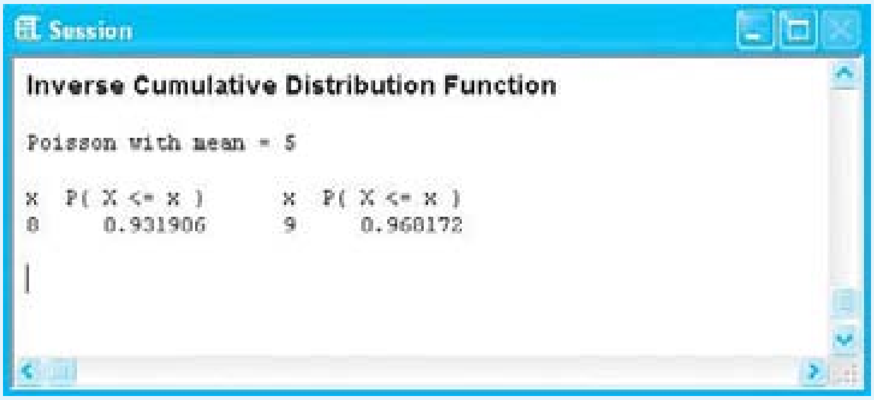


FIGURA 5.11



Ejercicios suplementarios

5.57 Haga una lista de las cinco características del experimento binomial.

5.58 ¿Bajo qué condiciones, puede usarse la variable aleatoria de Poisson para aproximar las probabilidades asociadas con la variable aleatoria binomial? ¿Qué aplicaciones tiene la distribución de Poisson que no sea estimar ciertas probabilidades binomiales?

5.59 ¿Bajo qué condiciones, usaría usted la distribución hipergeométrica de probabilidad para evaluar la probabilidad de x éxitos en n intentos?

5.60 Tiro de una moneda Una moneda justa se lanza al aire tres veces. Sea x igual al número de caras observado.

a. Use la fórmula para la distribución binomial de probabilidad para calcular las probabilidades asociadas con $x = 0, 1, 2$ y 3.

b. Construya la distribución de probabilidad.

c. Encuentre la media y desviación estándar de x, usando estas fórmulas:

$$\mu = np$$
$$\sigma = \sqrt{npq}$$

d. Usando la distribución de probabilidad del inciso b), encuentre la fracción de las mediciones de población que estén a no más de una desviación estándar de la media. Repita para dos desviaciones estándar. ¿Cómo concuerdan los resultados con el teorema de Chebyshev y la Regla empírica?

5.61 Monedas, continúa Consulte el ejercicio 5.60. Suponga que la moneda está en verdad "cargada" y la probabilidad de que salga una "cara" es igual a $p = .1$. Siga las instrucciones de los incisos a), b), c) y d). Observe que la distribución de probabilidad pierde su simetría y se hace sesgada cuando p no es igual a 1/2.

5.62 Porcentajes para sobrevivir al cáncer El porcentaje de sobrevivencia de 10 años al cáncer en la vejiga es alrededor del 50%. Si 20 personas que tienen cáncer en la vejiga reciben tratamiento adecuado para esa enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que

a. al menos 1 sobrevivirá los 10 años?

b. al menos 10 sobrevivirán los 10 años?

c. al menos 15 sobrevivirán los 10 años?

5.63 Recolección de basura El comisionado de un municipio dice que 80% de la población de la ciudad está a favor de que la recolección de basura sea por contrato a una empresa privada (en contraste a la recolección por empleados del municipio). Para verificar la teoría de que la proporción de personas en la ciudad a favor de la recolección privada es .8, usted muestrea al azar 25 personas y encuentra que x, el número de personas que apoyan lo dicho por el comisionado, es 22.

a. ¿Cuál es la probabilidad de observar al menos 22 que apoyen lo dicho por el comisionado si, en efecto, $p = .8$?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea exactamente igual a 22?

c. Con base en los resultados del inciso a), ¿qué concluiría usted acerca de lo dicho que 80% de todas las personas de la ciudad está a favor de la recolección privada? Explique.

5.64 Enteros Si a una persona se le da a escoger un entero de 0 a 9, ¿es más probable que él o ella escoja un entero cercano a la mitad de la sucesión que uno de un extremo u otro?

a. Si es igualmente probable que los enteros sean escogidos, encuentre la distribución de probabilidad para x, el número escogido.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escoja un 4, 5 o 6?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no escoja un 4, 5 o 6?

5.65 Enteros II Consulte el ejercicio 5.64. A 20 personas se les pide seleccionar un número de 0 a 9. Ocho de ellas escogen un 4, 5 o 6.

a. Si la selección de cualquier número es tan probable como cualquier otra, ¿cuál es la probabilidad de observar ocho o más selecciones de los números 4, 5 o 6?

b. ¿Qué conclusiones se sacarían de los resultados del inciso a)?

5.66 Seguridad en el trabajo Un artículo de *USA Today* informa que entre personas de 35 a 65 años de edad, casi dos terceras partes dicen que no están preocupados por ser forzados a jubilarse.[7] Suponga que al azar seleccionamos $n = 15$ personas que de esta categoría de edades y aproximamos el valor de p como $p = .7$. Sea x el número que dicen que no están preocupados por ser forzados a jubilarse.

a. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para x?

b. ¿Cuál es $P(x \leq 8)$?

c. Encuentre la probabilidad de que x exceda de 8.

d. ¿Cuál es el valor máximo de c para el cual $P(x \leq c) \leq .10$?

5.67 Revistas para adolescentes Aun cuando las revistas para adolescentes *Teen People, Hachette Filipacche* y *Elle Girl* dejaron de funcionar en 2006, 70% de las personas en una encuesta por teléfono dijeron que los adolescentes todavía son un mercado viable para ellas, pero no desean títulos que les digan que son adolescentes.[8] Leen revistas más refinadas. Se selecciona una muestra al azar de $n = 400$.

a. ¿Cuál es el número promedio en la muestra que dijo que los adolescentes son todavía un mercado viable para las revistas?

b. ¿Cuál es la desviación estándar de este número?

c. ¿Dentro de qué margen esperaría usted hallar el número de la muestra que dijeron que hay un mercado viable de revistas para adolescentes?

d. Si sólo 225 en una muestra de 400 personas dijeron que los adolescentes aún son un mercado viable para las revistas, ¿consideraría esto poco común? Explique. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de la información de esta muestra?

5.68 Registrándose Esperamos el momento cuando lo dejamos todo y nos damos unas vacaciones. No obstante, menos estadounidenses realmente ponen distancia al irse cuando están de vacaciones. Entre propietarios de pequeños negocios, más de la mitad (51%) dicen que se reportan a su oficina al menos una vez al día cuando están de vacaciones; sólo 27% dicen que cortan la comunicación por completo.[9] Si se seleccionan al azar 20 propietarios de pequeños negocios y suponemos que exactamente la mitad se reportan a su oficina al menos una vez al día, entonces $n = 20$ y $p = .5$. Encuentre las siguientes probabilidades.

a. Exactamente 16 dicen que se reportan a su oficina al menos una vez al día cuando están de vacaciones.

b. Entre 15 y 18 (inclusive) dicen que se reportan a su oficina al menos una vez al día cuando están de vacaciones.

c. Cinco o menos dicen que se reportan a su oficina al menos una vez al día cuando están de vacaciones. ¿Sería esto un acontecimiento poco probable?

5.69 Problemas psicosomáticos Una psiquiatra dice que 80% de todas las personas que van a consulta tienen problemas de naturaleza psicosomática. Ella decide seleccionar 25 pacientes al azar para probar su teoría.

a. Suponiendo que la teoría de la psiquiatra es verdadera, ¿cuál es el valor esperado de x, el número de los 25 pacientes que tienen problemas psicosomáticos?

b. ¿Cuál es la varianza de x, suponiendo que la teoría es verdadera?

c. Encuentre $P(x \leq 14)$. (Use tablas y suponga que la teoría es verdadera.)

d. Con base en la probabilidad del inciso c), si sólo 14 de los 25 muestreados tenía problemas psicosomáticos, ¿a qué conclusiones se llegaría acerca de la teoría de la psiquiatra? Explique.

5.70 Colegiaturas de estudiantes Una dirección estudiantil dice que 80% de todos los estudiantes están a favor de un aumento en las colegiaturas para subsidiar una nueva área de recreación. Una muestra aleatoria de $n = 25$ estudiantes produjo 15 a favor de aumentar colegiaturas. ¿Cuál es la probabilidad de que 15 o menos de la muestra estén a favor del tema si la dirección está en lo correcto? ¿Los datos apoyan la aseveración de la dirección estudiantil, o parece que el porcentaje que está a favor de un aumento en colegiaturas es menos del 80%?

5.71 Canas en el plantel ¡Los planteles universitarios están envejeciendo! De acuerdo a un artículo reciente, uno de cada cuatro estudiantes tiene 30 años de edad o más. Muchos de estos estudiantes son mujeres que actualizan sus conocimientos para el trabajo. Suponga que la cifra de 25% es precisa, que su universidad es representativa de universidades en general, y que se muestran $n = 200$ estudiantes, registrándose x, el número de estudiantes de 30 años de edad o más.

a. ¿Cuáles son la media y desviación estándar de x?

b. Si hay 35 estudiantes en su muestra que tengan 30 años de edad o más, ¿estaría usted dispuesto a suponer que la cifra de 25% es representativa de su plantel? Explique.

5.72 Probabilidad de lluvia Casi todos los que pronostican el clima se protegen muy bien cuando agregan probabilidades a sus pronósticos, diciendo por ejemplo "La probabilidad de lluvia para hoy es 40%". Entonces, si un pronóstico en particular es incorrecto, se espera atribuir el error al comportamiento aleatorio del clima más que a la imprecisión de quien hace el pronóstico. Para comprobar la precisión de un meteorólogo particular, se verificaron registros sólo para aquellos días cuando el meteorólogo predijo lluvia "con 30% de probabilidad". Una verificación de 25 de esos días indicó que llovió en 10 de los 25.

a. Si el meteorólogo es preciso, ¿cuál es el valor apropiado de p, la probabilidad de lluvia en uno de los 25 días?

b. ¿Cuáles son la media y desviación estándar de x, el número de días en los que llovió, suponiendo que el meteorólogo es preciso?

c. Calcule el puntaje z para el valor observado, $x = 10$. [SUGERENCIA: Recuerde de la sección 2.6 que el puntaje z es $= (x - \mu)/\sigma$.]

d. ¿Estos datos están en desacuerdo con el pronóstico de un "30% de probabilidad de lluvia"? Explique.

5.73 ¿Qué hay para desayunar? Se lleva a cabo un experimento de empaque al colocar, uno junto a los otros, dos diseños diferentes de paquete para desayuno en un estante de supermercado. El objetivo del experimento es ver si los compradores indican una preferencia por uno de los dos diseños del paquete. En un día determinado, 25 clientes compraron un paquete del supermercado. Sea x igual al número de compradores que escogieron el segundo diseño de paquete.

a. Si no hay preferencia por alguno de los dos diseños, ¿cuál es el valor de p, la probabilidad de que un comprador escoja el segundo diseño de paquete?

b. Si no hay preferencia, use los resultados del inciso a) para calcular la media y desviación estándar de x.

c. Si 5 de los 25 clientes escogieron el diseño del primer paquete y 20 escogieron el segundo diseño, ¿qué concluiría usted acerca de la preferencia de los compradores por el segundo diseño de paquete?

5.74 Densidad de la planta Un modelo para competencia de plantas supone que hay una zona de agotamiento de recursos alrededor de la semilla de cada planta. Dependiendo del tamaño de las zonas y la densidad de las plantas, las zonas de agotamiento de recursos pueden traslaparse con las de otras semillas de la cercanía. Cuando las semillas se dispersan al azar en una superficie amplia, el número de vecinas que una semilla pueda tener por lo general sigue una distribución Poisson con una media igual a la densidad de semillas por unidad de área. Suponga que la densidad de semillas es cuatro por metro cuadrado (m^2).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una semilla determinada no tenga vecinos dentro de 1 m^2?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una semilla tenga a lo sumo tres vecinas por m^2?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que una semilla tenga cinco o más vecinas por m^2?

d. Use el hecho de que la media y varianza de una variable aleatoria de Poisson son iguales, para hallar la proporción de vecinas que caerían en el intervalo $\mu = 2\sigma$. Comente sobre este resultado.

5.75 Genética de plantas Una peonia con pétalos rojos fue cruzada con otra planta que tenía pétalos veteados. La probabilidad de que un descendiente de esta cruza tenga flores rojas es .75. Sea x el número de plantas con pétalos rojos que resulte de 10 semillas de esta cruza que se recolectaron y germinaron.

a. ¿La variable aleatoria x tiene una distribución binomial? Si no es así, ¿por qué no? Si es así, ¿cuáles son los valores de n y p?

b. Encuentre $P(x \geq 9)$.

c. Encuentre $P(x \leq 1)$.

d. ¿Sería inusual observar una planta con pétalos rojos y las nueve plantas restantes con pétalos entreverados? Si realmente se presentan estos resultados, ¿qué conclusiones podrían sacar?

5.76 Características dominantes Los alelos de color negro (B) y blanco (b) de plumas de pollos muestran dominancia incompleta; los individuos con el par de genes Bb tienen plumas "azules". Cuando un individuo que es homocigoto dominante (BB) para esta característica se aparea con un individuo que es homocigoto recesivo (bb) para esta característica, 1/4 de los descendientes llevarán el par BB de genes, 1/2 llevarán el par Bb de genes y 1/4 llevarán el par bb de genes. Sea x el número de pollos con plumas "azules" en una muestra de $n = 20$ pollos que resulta de cruzas que involucran a pollos homocigotos dominantes (BB) con pollos homocigotos recesivos (bb).

a. ¿La variable aleatoria x tiene una distribución binomial? Si no es así, ¿por qué no? Si es así, ¿cuáles son los valores de n y p?

b. ¿Cuál es el número medio de pollos con plumas "azules" en la muestra?

c. ¿Cuál es la probabilidad de observar menos de cinco pollos con plumas "azules"?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de pollos con plumas "azules" sea mayor o igual a 10, pero menor o igual a 12?

5.77 Tiros al aire de monedas en fútbol Durante la temporada de fútbol de 1992, los Carneros de Los Ángeles (ahora Carneros de San Luis) tenían una insólita fila de pérdidas en los tiros al aire de monedas. De hecho, perdieron la decisión 11 semanas en fila.[10]

a. El gerente del sistema de cómputo de los Carneros dijo que las probabilidades en contra de perder 11 tiros al hilo son 2047 a 1. ¿Está bien?

b. Después que estos resultados se publicaron, los Carneros perdieron la decisión en los siguientes dos juegos, para un total de 13 pérdidas consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra si, de hecho, la moneda era imparcial?

5.78 Diabetes en niños La diabetes dependiente de insulina (IDD) es una enfermedad crónica común en niños, que se presenta con más frecuencia en personas con ascendencia del norte de Europa, pero la incidencia va de 1 o 2 casos en 100 000 por año hasta más de 40 en 100 000 en partes de Finlandia.[11] Supongamos que una región de Europa tiene una incidencia de 5 casos en 100 000 por año.

a. ¿La distribución del número de casos de la IDD en esta región puede ser aproximada por una distribución de Poisson? Si es así, ¿cuál es la media?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de casos de la IDD en esta región sea menor o igual a 3 en 100 000?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de casos sea mayor o igual a 3, pero menor o igual a 7 en 100 000?

d. ¿Esperaría usted observar 10 o más casos de la IDD en 100 000 en esta región en un año determinado? ¿Por qué sí o por qué no?

5.79 Cintas de video defectuosas Un fabricante de cintas de video las envía en lotes de 1200 cintas por lote. Antes de un envío, se seleccionan al azar 20 cintas de cada lote y se prueban. Si ninguna es defectuosa, el lote es enviado. Si una o más son defectuosas, todas las cintas del lote se prueban.

a. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para x, el número de cintas defectuosas en la muestra de 20?

b. ¿Qué distribución se puede usar para aproximar probabilidades para la variable aleatoria x del inciso a)?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea enviado si contiene 10 cintas defectuosas? ¿20 defectuosas? ¿30 defectuosas?

5.80 Chocolate oscuro A pesar de informes de que el chocolate oscuro es benéfico para el corazón, 47% de los adultos todavía prefieren más el chocolate con leche que el oscuro.[12] Suponga que una muestra aleatoria de $n = 5$ adultos se selecciona y se les pregunta si prefieren más el chocolate con leche que el oscuro.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los cinco adultos digan que prefieren más el chocolate con leche que el oscuro?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres de los cinco adultos digan que prefieren más el chocolate con leche que el oscuro?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un adulto prefiera más el chocolate con leche que el oscuro?

5.81 Enfermedad de Tay-Sachs La enfermedad de Tay-Sachs es un mal genético que por lo general es fatal para los niños. Si los dos padres son portadores de la enfermedad, la probabilidad de que sus descendientes la desarrollen es aproximadamente .25. Suponga que un esposo y esposa son portadores de la enfermedad y que la esposa ha estado embarazada en tres ocasiones. Si el suceso de la enfermedad de Tay-Sachs en uno de los hijos es independiente del suceso en cualquiera de los otros, ¿cuáles son las probabilidades de estos eventos?

a. Los tres hijos desarrollarán la enfermedad de Tay-Sachs.

b. Sólo un hijo desarrollará la enfermedad de Tay-Sachs.

c. El tercer hijo desarrollará la enfermedad de Tay-Sachs, dado que los primeros dos no la tuvieron.

5.82 Faltar al trabajo Muchos empleadores dan a sus trabajadores unos días por enfermedad así como por vacaciones. Entre los trabajadores que han tomado un día por enfermedad cuando en realidad no estaban enfermos, 49% dijeron que necesitaban un descanso.[13] Suponga que se toma una muestra aleatoria de $n = 12$ trabajadores que tomaron un día por enfermedad. Redondeando el 49% a $p = .5$, encuentre las probabilidades de los siguientes eventos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que más de seis trabajadores digan que tomaron un día por enfermedad porque necesitaban un descanso?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de cinco de los trabajadores necesitaban un descanso?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 10 de los trabajadores tomaron un día por enfermedad porque necesitaban un descanso?

5.83 La prueba del triángulo Un procedimiento que se usa con frecuencia para controlar la calidad de productos alimenticios de marca utiliza un panel de cinco "probadores". Cada miembro del panel prueba tres muestras, dos de las cuales son de lotes del producto que se sabe tiene el sabor deseado y la otra proviene del último lote. Cada probador selecciona la muestra que es diferente de las otras dos. Suponga que el último lote tiene el sabor deseado y que no hay comunicación entre los probadores.

a. Si el último lote tiene el mismo sabor que los otros dos lotes, ¿cuál es la probabilidad de que el probador lo escoja como el que es diferente?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los probadores escoja el último lote como diferente?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los probadores escoja el último lote como el diferente?

5.84 ¿Devuelve usted sus cuestionarios? El presidente de una compañía, que se especializa en encuestas de opinión pública, dice que alrededor del 70% de las personas a quienes la agencia envía cuestionarios responde al llenar y devolver el cuestionario. Se envían 20 de esos cuestionarios y suponga que lo dicho por el presidente es correcto.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 10 de los cuestionarios sean llenados y devueltos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 12 de los cuestionarios sean llenados y devueltos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 10 de los cuestionarios sean llenados y devueltos?

5.85 Cuestionarios, continúa Consulte el ejercicio 5.84. Si $n = 20$ cuestionarios se envían,

a. ¿Cuál es el número promedio de cuestionarios que serán devueltos?

b. ¿Cuál es la desviación estándar del número de cuestionarios que serán devueltos?

c. Si $x = 10$ de los 20 cuestionarios son devueltos a la compañía, ¿consideraría usted que esto es una respuesta poco común? Explique.

5.86 Problemas en aves Una investigación preliminar informó que alrededor del 30% de las aves producidas en la localidad estaban infectadas con un parásito intestinal que, aunque no riesgoso para quienes consumen las aves, disminuye los porcentajes acostumbrados de crecimiento en peso en las aves. Un suplemento en dieta que se pensaba era eficaz contra este parásito se agregó al alimento de las aves. Veinticinco aves se examinaron después de tomar el suplemento durante al menos dos semanas y se encontró que tres de las aves estaban todavía infectadas con el parásito.

a. Si el suplemento de la dieta es ineficaz, ¿cuál es la probabilidad de observar tres o menos aves infectadas con el parásito intestinal?

b. Si de hecho el suplemento alimenticio era eficaz y redujo el porcentaje de infección al 10%, ¿cuál es la probabilidad de observar tres o menos aves infectadas?

5.87 Descomposturas de máquinas En una planta de procesamiento y empaque de alimentos, en promedio, dos máquinas se descomponen por semana. Suponga que las descomposturas semanales de máquinas siguen una distribución de Poisson.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya descomposturas de máquinas en una semana determinada?

b. Calcule la probabilidad de que no haya más de dos descomposturas de máquinas en una semana determinada.

5.88 ¿Automovilistas seguros? Evidencias muestran que la probabilidad de que un automovilista participe en un grave accidente de automóvil durante un año determinado es .01. Una compañía en particular emplea 100 representantes de ventas viajeros a tiempo completo. Con base en esta evidencia, use la aproximación Poisson a la distribución binomial para hallar la probabilidad de que exactamente dos de los representantes de ventas participen en un grave accidente automovilístico durante el año venidero.

5.89 Estresado A un individuo se le enseña a hacer un trabajo en dos modos. Estudios realizados han demostrado que cuando es sometido a esfuerzo mental y se le pide efectuar el trabajo, el individuo casi siempre revierte el método que aprendió primero, sin considerar si era más fácil o más difícil. Si la probabilidad de que un sujeto regrese al primer método aprendido es .8 y seis sujetos son probados, ¿cuál es la probabilidad de que al menos cinco de los individuos reviertan al primer método aprendido cuando se les pida efectúen su trabajo bajo estrés?

5.90 Inscribirse en la universidad Una universidad de la costa oeste ha encontrado que alrededor del 90% de sus solicitantes, aceptados para inscripción en el grupo de primer año, en realidad se inscriben. En 2007, 1360 solicitantes fueron aceptados a la universidad. ¿Dentro de qué límites esperaría usted hallar el tamaño del grupo de primer año en esta universidad en el verano de 2007?

5.91 Terremotos Suponga que uno de entre 10 propietarios de casa en el estado de California ha invertido en un seguro contra terremotos. Si 15 propietarios se seleccionan al azar para ser entrevistados,

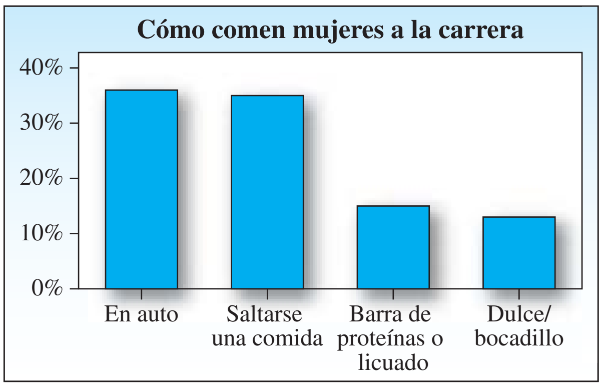
a. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno tenía seguro contra terremotos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro o más tengan seguro contra terremotos?

c. ¿Dentro de qué límites esperaría usted que baje el número de propietarios asegurados contra terremotos?

5.92 Mal alambrado Los paneles de control alambrados incorrectamente se instalaron por error en dos de cada ocho máquinas-herramientas automáticas grandes. No es seguro saber cuál de las máquinas-herramientas tienen los paneles defectuosos y se selecciona al azar una muestra de cuatro herramientas para inspeccionarlas. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra no incluya paneles defectuosos? ¿Ambos paneles defectuosos?

5.93 Comer a la carrera ¿Cómo sobrevive usted cuando no hay tiempo para comer, ya sea un bocado rápido, nada de alimento o una barra de proteína, o dulce? Un artículo de *USA Today* indica que 36% de mujeres entre 25 y 55 años de edad dijeron que, cuando están demasiado ocupadas para comer, adquieren una comida rápida en un restaurante con entrada para autos.[14] Se selecciona una muestra al azar de 100 mujeres de entre 25 y 55 años de edad.



a. ¿Cuál es el número promedio de mujeres que dicen que toman comida rápida cuando están demasiado ocupadas para comer?

b. ¿Cuál es la desviación estándar para el número de mujeres que dicen que toman comida rápida cuando están demasiado ocupadas para comer?

c. Si 49 de las mujeres de la muestra dijeron que toman comida rápida cuando están demasiado ocupadas para comer, ¿esto sería un suceso poco común? Explique.

MI APPLET Ejercicios

Use el applet **Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales)** para el siguiente conjunto de ejercicios.

5.94 Consulte los ejercicios 5.8 y 5.9.

a. Use el applet para construir el histograma de probabilidad para una variable aleatoria binomial x con $n = 6$ y $p = .2$.

b. Use el applet para construir el histograma de probabilidad para una variable aleatoria binomial x con $n = 6$ y $p = .8$. ¿Cómo describiría usted las formas de las distribuciones de los incisos a) y b)?

c. Use el applet para construir el histograma de probabilidad para una variable aleatoria binomial x con $n = 6$ y $p = .5$. ¿Cómo describiría usted la forma de esta distribución?

5.95 Use el applet para hallar lo siguiente:

a. $P(x < 6)$ para $n = 22$, $p = .65$

b. $P(x = 8)$ para $n = 12$, $p = .4$

c. $P(x > 14)$ para $n = 20$, $p = .5$

d. $P(2 < x < 6)$ para $n = 15$, $p = .3$

e. $P(x \geq 6)$ para $n = 50$, $p = .7$

5.96 Cirugías exitosas Se dice que un nuevo procedimiento quirúrgico es exitoso en 80% de las veces. Suponga que la operación se efectúa cinco veces y se supone que los resultados son independientes entre sí. ¿Cuáles son las probabilidades de estos eventos?

a. Las cinco operaciones son exitosas.

b. Exactamente cuatro son exitosas.

c. Menos de dos son exitosas.

5.97 Cirugía, continúa Consulte el ejercicio 5.96. Si menos de dos operaciones fueron exitosas, ¿qué pensaría usted del trabajo del equipo de cirujanos?

5.98 Falla en un motor Suponga que los cuatro motores de un avión comercial están arreglados para operar de manera independiente y que la probabilidad de falla en vuelo de un solo motor es .01. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos en un vuelo determinado?

a. No se observan fallas.

b. No se observa más de una falla.

5.99 ¿McDonald's o Burger King? Suponga que 50% de todos los jóvenes adultos prefieren más a McDonald's que a Burger King cuando se les pide indicar una preferencia. Un grupo de 100 jóvenes adultos se seleccionaron al azar y se registraron sus preferencias.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 60 prefirieron McDonald's?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 40 y 60 (inclusive) prefirieron McDonald's?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 40 y 60 (inclusive) prefirieron Burger King?

5.100 Destinos para vacaciones Los altos precios en combustibles pueden hacer que algunos vacacionistas estadounidenses se queden cerca de casa. No obstante, cuando se les da una opción de lugares para vacacionar, 66% de viajeros de placer de Estados Unidos indicaron que les gustaría visitar parques nacionales.[15] Se seleccionó una muestra aleatoria de $n = 100$ viajeros de placer.

a. ¿Cuál es el promedio de x, el número de viajeros de la muestra que indican que les gustaría visitar parques nacionales? ¿Cuál es la desviación estándar de x?

b. ¿Sería poco probable hallar sólo 50 o menos de los muestreados que indiquen que les gustaría visitar parques nacionales? Use el applet para hallar la probabilidad de este evento.

c. ¿Cuántas desviaciones estándar a partir de la media es el valor $x = 50$? ¿Esto confirma su respuesta al inciso b)?

CASO PRÁCTICO

Un misterio: cánceres cerca de un reactor

¿Qué tan seguro es vivir cerca de un reactor nuclear? Hombres que vivían en una franja costera que se extiende 20 millas al norte de un reactor nuclear en Plymouth, Massachusetts, desarrollaron algunas formas de cáncer a un ritmo 50% mayor que el de todo el estado, de acuerdo con un estudio apoyado por el Departamento de Salud Pública de Massachusetts y publicado el 21 de mayo de 1987 en la edición del *New York Times.*[16]

La causa de los cánceres es un misterio, pero se ha sugerido que el cáncer estaba vinculado al reactor Pilgrim I, que había sido cerrado durante 13 meses debido a problemas de administración. Boston Edison, propietaria del reactor, reconoció escapes de radiación a mediados del decenio de 1970 que estuvieron un poco arriba de niveles permisibles. Si el reactor era en efecto responsable por el excesivo porcentaje de cáncer, entonces el nivel de radiación reconocido actualmente requerido para causar cáncer tendría que cambiar. No obstante, el misterio más desconcertante fue el hecho de que las mujeres en esa misma zona aparentemente no fueron afectadas.

En su informe, el Dr. Sidney Cobb, epidemiólogo, observó el enlace entre los escapes de radiación en el reactor Pilgrim I y 52 casos de cáncer hemapoyético. El informe indicaba que este número inesperadamente grande podría ser atribuible a escapes radiactivos en el aire salido del Pilgrim I, concentrado a lo largo de la costa por los patrones de viento y no disipados, como supusieron inspectores de reglamentos del gobierno. ¿Qué tan poco común fue este número de casos de cáncer? Esto es, estadísticamente hablando, ¿el 52 es un número altamente improbable de casos? Si la respuesta es afirmativa, entonces algún factor externo (posiblemente radiación) causó este número anormalmente grande, o bien, hemos observado un evento muy raro.

La distribución de probabilidad de Poisson da una buena aproximación a las distribuciones de variables por ejemplo el número de fallecimientos en una región debido a una rara enfermedad, el número de accidentes en una planta manufacturera por mes, o el número de choques de líneas aéreas por mes. Por tanto, es razonable suponer que la distribución de Poisson da un modelo apropiado para el número de casos de cáncer en este ejemplo.

1. Si los 52 casos publicados representaban un porcentaje 50% más alto que el porcentaje a nivel del estado, ¿cuál es una estimación razonable de μ, el número promedio de esos casos de cáncer a nivel de todo el estado?
2. Con base en la estimación de usted respecto a μ, ¿cuál es la desviación estándar estimada del número de casos de cáncer al nivel de todo el estado?
3. ¿Cuál es el puntaje z para los $x = 52$ casos observados de cáncer? ¿Cómo interpreta usted este puntaje z en vista de la preocupación por el elevado porcentaje de cáncer hemapoyético en esta zona?

6

La distribución normal de probabilidad

Imagen obtenida de la página http://en.wikipedia.org/wiki/Dengxiaoping. Uso validado conforme a las disposiciones de Creative Commons <http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported_License> .

Imagen obtenida de la página http://en.wikipedia.org/wiki/Hu_Yaobang. Uso validado conforme a las disposiciones de Creative Commons <http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported_License> .

OBJETIVOS GENERALES

En los capítulos 4 y 5, usted aprendió acerca de variables aleatorias discretas y sus distribuciones de probabilidad. En este capítulo veremos variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad, así como una variable aleatoria continua muy importante, la normal. Usted verá cómo calcular probabilidades normales y, bajo ciertas condiciones, cómo usar la distribución normal de probabilidad para aproximar la distribución binomial de probabilidad. Entonces, en el capítulo 7 y en los capítulos que siguen, veremos la forma en que la distribución normal de probabilidad desempeña un papel central en inferencia estadística.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo utilizo la tabla 3 para calcular probabilidades bajo la curva normal estándar?

¿Cómo calculo probabilidades binomiales usando la aproximación normal?

La larga y la corta

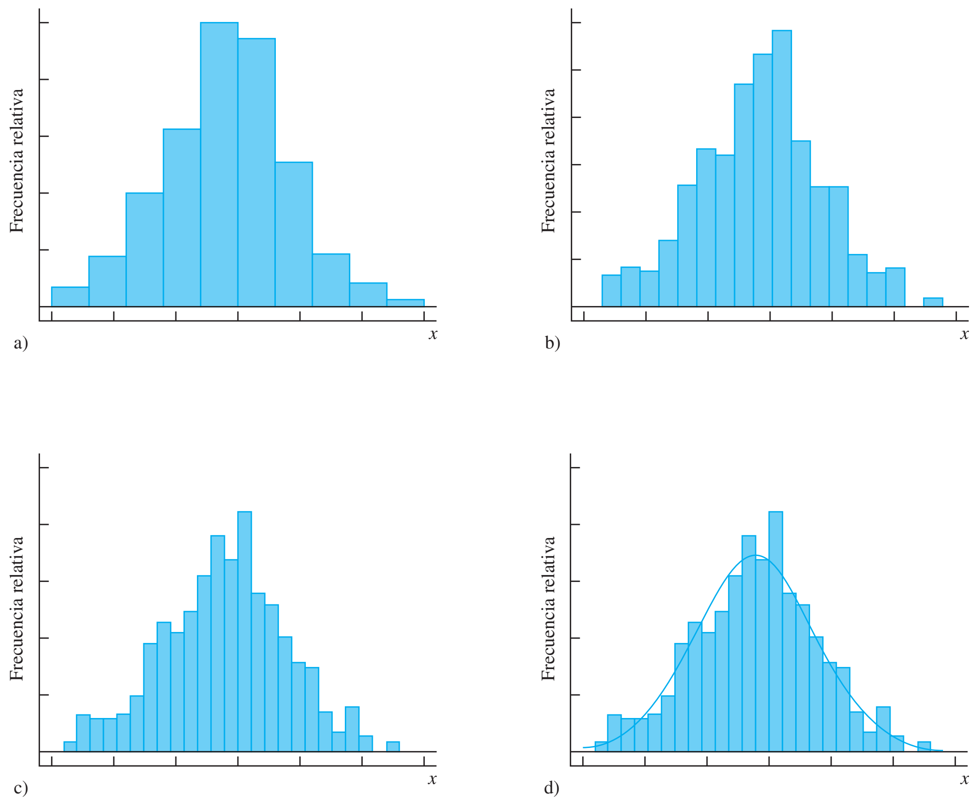
Si usted fuera el jefe, ¿la estatura desempeñaría un papel en la selección de un sucesor para el trabajo de usted? ¿A propósito escogería un sucesor que fuera de menor estatura que usted? El estudio práctico que está al final de este capítulo examina cómo se puede usar la curva normal para investigar la distribución de estaturas de chinos elegibles para un trabajo muy prestigioso.

6.1 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Cuando una variable aleatoria x es discreta, se puede asignar una probabilidad positiva a cada uno de los valores que x pueda tomar y obtener la distribución de probabilidad para x. La suma de todas las probabilidades asociada con los diferentes valores de x es 1, pero no todos los experimentos resultan en variables aleatorias que sean discretas. Las **variables aleatorias continuas**, por ejemplo estaturas y pesos, lapso de vida útil de un producto en particular o un error experimental de laboratorio, pueden tomar los infinitamente numerosos valores correspondientes a puntos en un intervalo de una recta. Si se trata de asignar una probabilidad positiva a cada uno de estos numerosos valores, las probabilidades ya no sumarán 1, como es el caso con variables aleatorias discretas. Por tanto, se debe usar un método diferente para generar la distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua.

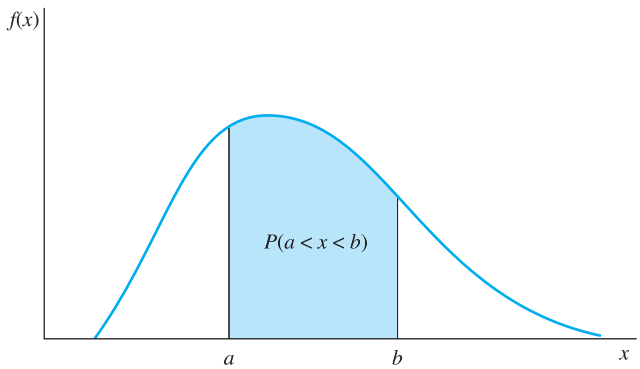
Supongamos que usted tiene un conjunto de mediciones en una variable aleatoria continua y que crea un histograma de frecuencia relativa para describir la distribución de las mismas. Para un pequeño número de mediciones, se puede usar un pequeño número de clases; entonces, a medida que se recolecten más y más mediciones, se pueden usar más clases y reducir el ancho de clase. El perfil del histograma cambiará ligeramente, casi todo el tiempo haciéndose cada vez más irregular, como se muestra en la figura 6.1. Cuando el número de mediciones se hace muy grande y los anchos de clase se hacen muy angostos, el histograma de frecuencia relativa aparece cada vez más como la curva suave que aparece en la figura 6.1d). Esta curva suave describe la **distribución de probabilidad de la variable aleatoria continua**.

FIGURA 6.1
Histogramas de frecuencia relativa para tamaños muestrales cada vez más crecientes



¿Cómo se puede crear un modelo para esta distribución de probabilidad? Una variable aleatoria continua puede tomar cualquiera de un número infinito de valores de la recta real, en forma semejante al número infinito de granos de arena en una playa. La distribución de probabilidad es creada al distribuir una unidad de probabilidad a lo largo de la recta, igual que como se puede distribuir un puñado de arena. La probabilidad, es decir granos de arena o de mediciones, se apilarán en ciertos lugares y el resultado es la distribución de probabilidad mostrado en la figura 6.2. La profundidad o **densidad** de la probabilidad, que varía con x, puede ser descrita por una fórmula matemática $f(x)$, llamada **distribución de probabilidad** o **función de densidad de probabilidad** para la variable aleatoria x.

FIGURA 6.2
La distribución de probabilidad $f(x)$; $P(a < x < b)$ es igual al área sombreada bajo la curva



MI CONSEJO
Para variables aleatorias continuas, **área = probabilidad**.

Varias propiedades importantes de distribuciones continuas de probabilidad son comparables a sus similares discretas. Así como la suma de probabilidades discretas (o la suma de las frecuencias relativas) es igual a 1 y la probabilidad de que x caiga en cierto intervalo puede hallarse al sumar las probabilidades en ese intervalo, las distribuciones de probabilidad tienen las características que se detallan a continuación.

- El área bajo una distribución continua de probabilidad es igual a 1.
- La probabilidad de que x caiga en un intervalo particular, por ejemplo de a a b, es igual al área bajo la curva entre los dos puntos a y b. Ésta es el área sombreada de la figura 6.2.

MI CONSEJO
El área bajo la curva es igual a 1.

También hay una diferencia importante entre variables aleatorias discretas y continuas. Considere la probabilidad de que x sea igual a algún valor en particular, por ejemplo a. Como no hay área arriba de un solo punto, por ejemplo $x = a$, en la distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua, nuestra definición implica que la probabilidad es 0.

- $P(x = a) = 0$ para variables aleatorias continuas.
- Esto implica que $P(x \geq a) = P(x > a)$ y $P(x \leq a) = P(x < a)$.
- Esto *no es* cierto en general para variables aleatorias discretas.

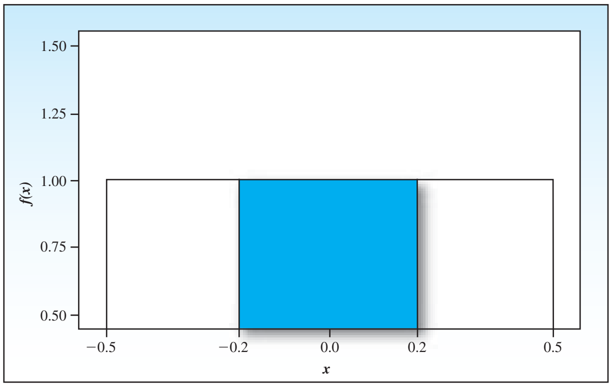
¿Cómo se escoge el modelo, es decir, la distribución de probabilidad $f(x)$ apropiada para un experimento dado? Existen muchos tipos de curvas continuas para modelar. Algunas son de forma de montículo, como la de la figura 6.1d), pero otras no lo son. En general, trate de escoger un modelo que satisfaga estos criterios:

- Se ajusta al cuerpo de datos acumulado.
- Permite hacer las mejores inferencias posibles usando los datos.

EJEMPLO 6.1

La *variable aleatoria uniforme* se emplea para modelar el comportamiento de una variable aleatoria continua cuyos valores estén uniforme o exactamente distribuidos en un intervalo dado. Por ejemplo, es probable que el error x introducido al redondear una observación a la pulgada más cercana tenga una distribución uniforme en el intervalo de $-.5$ a $.5$. La función de densidad de probabilidad $f(x)$ sería "plana" como se muestra en la figura 6.3. La altura del rectángulo está fija en 1, de modo que el área total bajo la distribución de probabilidad es 1.

FIGURA 6.3
Una distribución uniforme de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de que el error de redondeo sea menor a .2 en magnitud?

Solución Esta probabilidad corresponde al área bajo la distribución entre $x = -.2$ y $x = .2$. Como la altura del rectángulo es 1,

$$P(-.2 < x < .2) = [.2 - (-.2)] \times 1 = .4$$

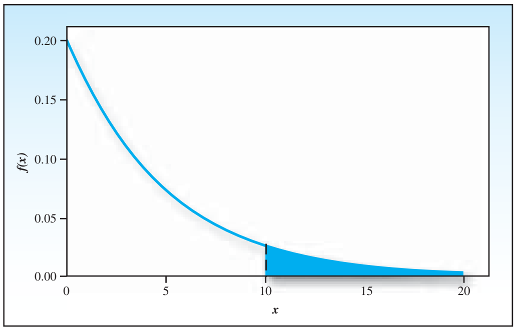
EJEMPLO 6.2

La *variable aleatoria exponencial* se utiliza para modelar variables aleatorias continuas tales como tiempos de espera o vidas útiles asociadas con componentes electrónicos. Por ejemplo, el tiempo de espera en una caja de pago de un supermercado tiene una distribución exponencial con un tiempo de espera promedio de 5 minutos. La función de densidad de probabilidad $f(x) = .2e^{-.2x}$ se ilustra en la figura 6.4. Para hallar áreas bajo esta curva, se puede usar el hecho de que $P(x > a) = e^{-.2a}$ para $a > 0$. ¿Cuál es la probabilidad de que usted tenga que esperar 10 minutos o más en la caja de pago del supermercado?

Solución La probabilidad a calcular es el área sombreada en la figura 6.4. Use la fórmula general para $P(x > a)$ para hallar

$$P(x > 10) = e^{-.2(10)} = .135$$

FIGURA 6.4
Una distribución de probabilidad exponencial



Su modelo puede no siempre ajustar perfectamente la situación experimental, pero debe tratar de escoger un modelo que *mejor se ajuste* al histograma de frecuencia relativa poblacional. Cuanto mejor se aproxime el modelo a la realidad, mejores serán las inferencias. Por fortuna, muchas variables aleatorias continuas tienen distribuciones de frecuencia de forma de montículo, por ejemplo los datos de la figura 6.1d). La **distribución normal de probabilidad** da un buen modelo para describir este tipo de datos.

6.2 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD

Las distribuciones de probabilidad continua pueden tomar varias formas, pero un gran número de variables aleatorias observadas en la naturaleza poseen una distribución de frecuencia que tiene más o menos la forma de montículo, o bien, como diría un estadístico, es aproximadamente una distribución normal de probabilidad. La fórmula que genera esta distribución se muestra a continuación.

DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

Los símbolos e y π son constantes matemáticas dadas en forma aproximada por 2.7183 y 3.1416, respectivamente; μ y σ ($\sigma > 0$) son parámetros que representan la media poblacional y desviación estándar, respectivamente.

La gráfica de una distribución normal de probabilidad con media μ y desviación estándar σ se muestran en la figura 6.5. La media μ localiza el *centro* de la distribución, y la distribución es *simétrica* alrededor de su media μ. Como el área total bajo la distribución normal de probabilidad es igual a 1, la simetría implica que el área a la derecha de μ es .5 y el área a la izquierda de μ es también .5. La *forma* de la distribución está determinada por σ, la desviación estándar de la población. Como se puede ver en la figura 6.6, valores grandes de σ reducen la altura de la curva y aumentan la dispersión; valores pequeños de σ aumentan la altura de la curva y reducen la dispersión. La figura 6.6 muestra tres distribuciones normales de probabilidad con diferentes medias y desviaciones estándar. Nótense las diferencias en forma y ubicación.

FIGURA 6.5
Distribución normal de probabilidad

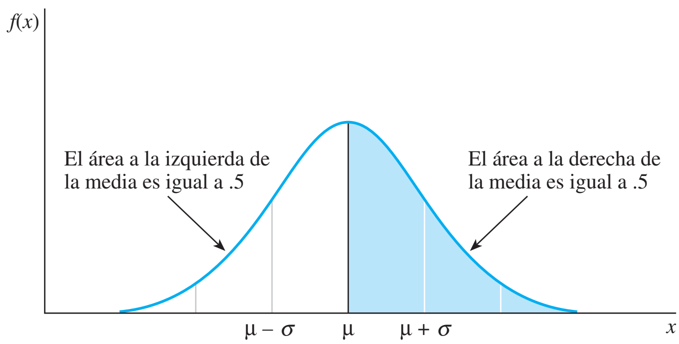
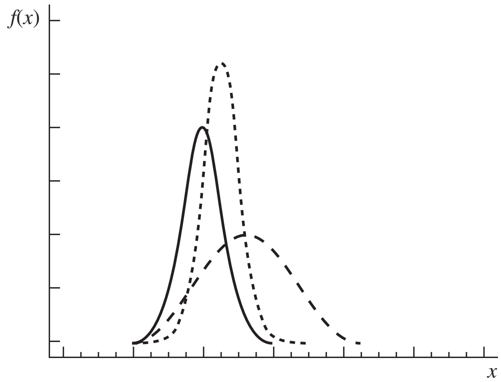


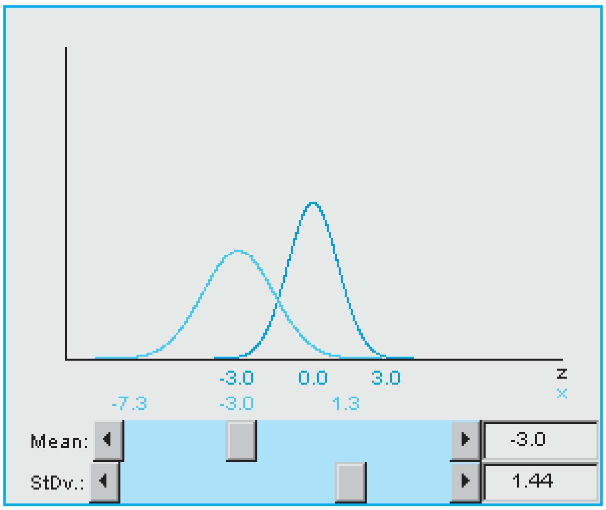
FIGURA 6.6
Distribuciones normales de probabilidad con valores de μ y σ que difieren



MI APPLET

El applet Java llamada **Visualizing Normal Curves (Visualizar Curvas Normales)** da una imagen visual de la distribución normal para valores de μ entre -10 y $+8$ y para valores de σ entre .5 y 1.8. La curva azul oscuro es la normal estándar z con media 0 y desviación estándar 1. Se puede usar este applet para comparar su forma con la forma de otras curvas normales (la curva roja en su monitor, azul claro en la figura 6.7) al mover los cursores para cambiar la media y desviación estándar. ¿Qué ocurre cuando se cambia la media? ¿Y cuando se cambia la desviación estándar?

FIGURA 6.7
Applet Visualizing Normal Curves (Visualizar Curvas Normales)



Raras veces se encuentra una variable con valores que sean infinitamente pequeños $(-\infty)$ o infinitamente grandes $(+\infty)$. Aun así, muchas variables aleatorias *positivas* (por ejemplo estaturas, pesos y tiempos) tienen distribuciones que son bien aproximadas por una distribución normal. De acuerdo con la Regla empírica, casi todos los valores de una variable aleatoria normal se encuentran en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$. Mientras los valores dentro de tres desviaciones estándar de la media sean *positivos*, la distribución normal da un buen modelo para describir los datos.

6.3 ÁREAS TABULADAS DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD

Para hallar la probabilidad de que una variable aleatoria normal x se encuentre en el intervalo de a a b, necesitamos hallar el área bajo la curva normal entre los puntos a y b (véase la figura 6.2). No obstante (véase la figura 6.6), hay un número infinitamente grande de distribuciones normales, uno para cada media y desviación estándar diferentes. Una tabla separada de áreas para cada una de estas curvas es obviamente impráctica; en cambio, usamos un procedimiento de estandarización que nos permite usar la misma tabla para todas las distribuciones normales.

La variable aleatoria normal estándar

Una variable aleatoria normal x está **estandarizada** al expresar su valor como el número de desviaciones estándar (σ) que se encuentran a la izquierda o derecha de su media μ. Éste es realmente sólo un cambio en las unidades de medida que usamos, como si estuviéramos midiendo en pulgadas en lugar de pies. La variable aleatoria normal estandarizada, z, se define como

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

MI CONSEJO

El área bajo la curva z es igual a 1.

o bien, lo que es equivalente,

$$x = \mu + z\sigma$$

De la fórmula para z, podemos sacar estas conclusiones:

- Cuando x es menor que la media μ, el valor de z es negativo.
- Cuando x es mayor que la media μ, el valor de z es positivo.
- Cuando $x = \mu$, el valor de $z = 0$.

La distribución de probabilidad para z, ilustrada en la figura 6.8, se denomina **distribución normal estandarizada** porque su media es 0 y su desviación estándar es 1. Los valores de z del lado izquierdo de la curva son negativos, en tanto que los del lado derecho son positivos. El área bajo la curva normal estándar a la izquierda de un valor especificado de z, por ejemplo z_0, es la probabilidad $P(z \leq z_0)$. Esta **área acumulativa** está registrada en la tabla 3 del apéndice I y se muestra como el área sombreada en la figura 6.8. Una versión abreviada de la tabla 3 se da en la tabla 6.1. Observe que la tabla contiene valores positivos y negativos de z. La columna izquierda de la tabla da el valor de z correcto al décimo lugar; el segundo lugar decimal para z, correspondiente a las centenas, se da en el renglón superior.

FIGURA 6.8
Distribución normal estandarizada

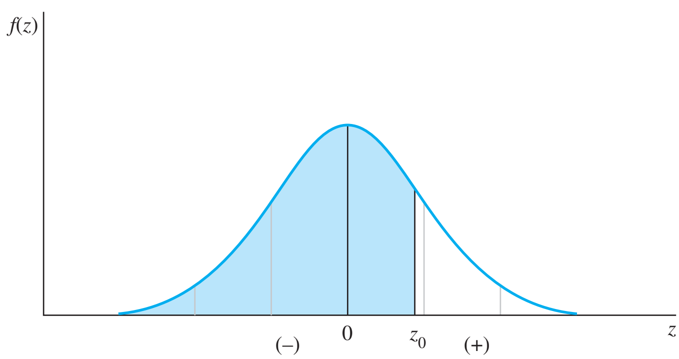


TABLA 6.1

Versión abreviada de la tabla 3 del apéndice I
tabla 3. Áreas bajo la curva normal

z	.00	.01	.02	.03	. . .	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003		
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004		
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006		
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009		
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	. . .	.0010
−2.9	.0019	.	.	.		
−2.8	.0026	.	.	.		
−2.7	.0035	.	.	.		
−2.6	.0047					
−2.5	.0062					
. .						
. .						
. .						
−2.0	.0228					
. .						
. .						
. .						

Tabla 3. Áreas bajo la curva normal (*continúa*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	. . .	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160		
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557		
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948		
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331		
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	. . .	.6879
0.5	.6915	.	.	.			
0.6	.7257	.	.	.			
0.7	.7580	.	.	.			
0.8	.7881						
0.9	.8159						
.	.						
.	.						
.	.						
2.0	.9772						

EJEMPLO 6.3

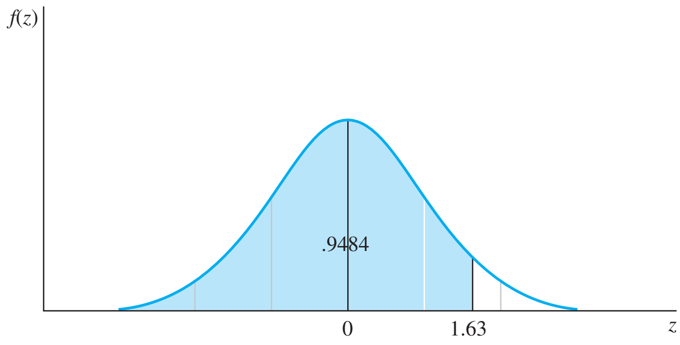
Encuentre $P(z \leq 1.63)$. Esta probabilidad corresponde al área a la izquierda de un punto $z = 1.63$ desviaciones estándar a la derecha de la media (véase la figura 6.9).

MI CONSEJO

$P(z \leq 1.63) = P(z < 1.63)$

Solución El área está sombreada en la figura 6.9. Como la tabla 3 del apéndice I da áreas bajo la curva normal a la izquierda de un valor especificado de z, sólo se necesita hallar el valor tabulado para $z = 1.63$. Baje por la columna izquierda de la tabla hasta $z = 1.6$ y en sentido horizontal en la parte superior de la tabla hasta la columna marcada .03. La intersección de esta combinación de renglón y columna da el área .9484, que es $P(z \leq 1.63)$.

FIGURA 6.9
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.3

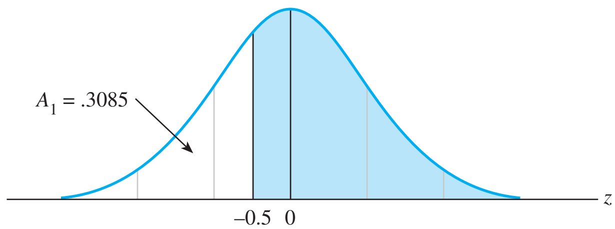


Las áreas a la izquierda de $z = 0$ se encuentran usando valores negativos de z.

EJEMPLO 6.4

Encuentre $P(z \geq -.5)$. Esta probabilidad corresponde al área a la *derecha* de un punto $z = -.5$ de desviación estándar a la izquierda de la media (véase la figura 6.10).

FIGURA 6.10
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.4



Solución El área dada en la tabla 3 es el área a la izquierda de un valor especificado de z. Haciendo un índice de $z = -.5$ en la tabla 3, podemos hallar que el área A_1 a la *izquierda* de $-.5$ es .3085.

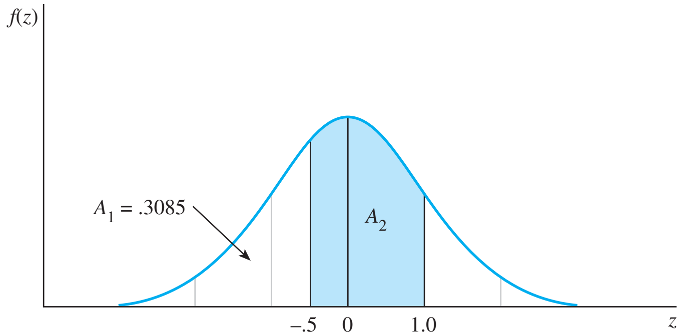
Como el área bajo la curva es 1, encontramos

$$P(z \geq -.5) = 1 - A_1 = 1 - .3085 = .6915.$$

EJEMPLO 6.5

Encuentre $P(-.5 \leq z \leq 1.0)$. Esta probabilidad es el área entre $z = -.5$ y $z = 1.0$, como se muestra en la figura 6.11.

FIGURA 6.11
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.5



Solución El área pedida es el área sombreada A_2 en la figura 6.11. De la tabla 3 del apéndice I, se puede hallar el área a la izquierda de $z = -.5$ ($A_1 = .3085$) y el área a la izquierda de $z = 1.0$ ($A_1 + A_2 = .8413$). Para hallar el área marcada A_2, restamos las dos entradas:

$$A_2 = (A_1 + A_2) - A_1 = .8413 - .3085 = .5328$$

Esto es, $P(-.5 \leq z \leq 1.0) = .5328$.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo uso la tabla 3 para calcular probabilidades bajo la curva normal estándar?

- Para calcular el área a la izquierda de un valor z, encuentre el área directamente de la tabla 3.
- Para calcular el área a la derecha de un valor z, encuentre el área en la tabla 3 y réstela de 1.
- Para calcular el área entre dos valores de z, encuentre las dos áreas en la tabla 3 y reste un área de la otra.

Repertorio de ejercicios

Considere una variable aleatoria estándar con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Use la tabla 3 y llene las probabilidades en la tabla siguiente. La tercera probabilidad ya está calculada.

El intervalo	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
Menor que 1.5	$P(z <$ _____ $)$		
Mayor que 2	$P(z >$ _____ $)$		
Mayor que 2.33	$P(z > \underline{2.33})$	$1 - P(x \leq 2.33)$	$1 - .9901 = .0099$
Entre -1.96 y 1.96	$P($ _____ $< z <$ _____ $)$		
Entre -1.24 y 2.37	$P($ _____ $< z <$ _____ $)$		
Menor o igual a -1	$P(z \leq$ _____ $)$		

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina la tabla z? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

EJEMPLO 6.6

Encuentre la probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida caiga dentro de estos intervalos:

1. Una desviación estándar de su media
2. Dos desviaciones estándar de su media

Solución

1. Como la variable aleatoria normal estándar z mide la distancia desde la media en unidades de desviaciones estándar, es necesario hallar

$$P(-1 \leq z \leq 1) = .8413 - .1587 = .6826$$

Recuerde que usted calcula el área entre dos valores z al restar las entradas tabuladas para los dos valores.

2. Al igual que en la parte 1, $P(-2 \leq z \leq 2) = .9772 - .0228 = .9544$.

Estas probabilidades concuerdan con valores aproximados de 68% y 95% en la Regla empírica del capítulo 2.

EJEMPLO 6.7

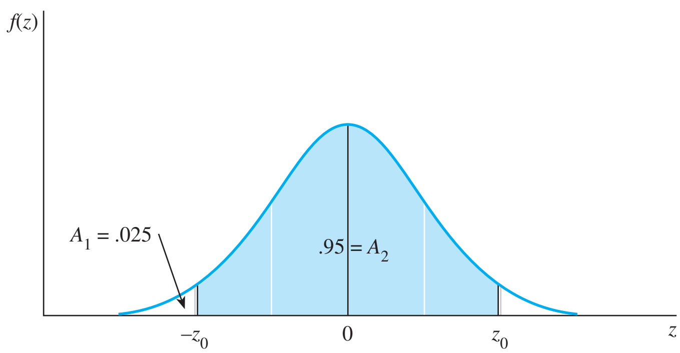
Encuentre el valor de z, llámelo z_0, tal que .95 del área se encuentre a no más de $\pm z_0$ desviaciones estándar de la media.

MI CONSEJO

Conocemos el área. Trabaje de adentro hacia afuera de la tabla.

Solución El área sombreada de la figura 6.12 es el área que se encuentra a no más de $\pm z_0$ desviaciones estándar de la media, que necesita ser igual a .95. Las "áreas de cola" bajo la curva no están sombreadas y tienen un área combinada de $1 - .95 = .05$. Debido a la simetría de la curva normal, estas dos áreas de cola tienen la misma área, de modo que $A_1 = .05/2 = .025$ en la figura 6.12. Entonces, toda el *área acumulativa* a la izquierda de z_0 para igualar $A_1 + A_2 = .95 + .025 = .9750$. Esta área se encuentra en el interior de la tabla 3 del apéndice I en el renglón correspondiente a $z = 1.9$ y la columna .06. En consecuencia, $z_0 = 1.96$. Observe que este resultado es muy cercano al valor aproximado, $z = 2$, que se usa en la Regla empírica.

FIGURA 6.12
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.7



Cálculo de probabilidades para una variable aleatoria normal general

Casi todo el tiempo, las probabilidades en las que estamos interesados contienen x, una variable aleatoria normal con media μ y desviación estándar σ. Entonces se debe *estandarizar* el intervalo de interés, escribiéndolo como el intervalo equivalente en términos de z, la variable aleatoria normal estándar. Una vez hecho esto, la probabilidad de interés es el área que se encuentra usando la *distribución estándar normal de probabilidad*.

EJEMPLO 6.8

Sea x una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 10 y una desviación estándar de 2. Encuentre la probabilidad de que x se encuentre entre 11 y 13.6.

Solución El intervalo de $x = 11$ a $x = 13.6$ debe ser estandarizado usando la fórmula para z. Cuando $x = 11$,

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{11 - 10}{2} = .5$$

MI CONSEJO

Siempre trace una figura; ¡ayuda!

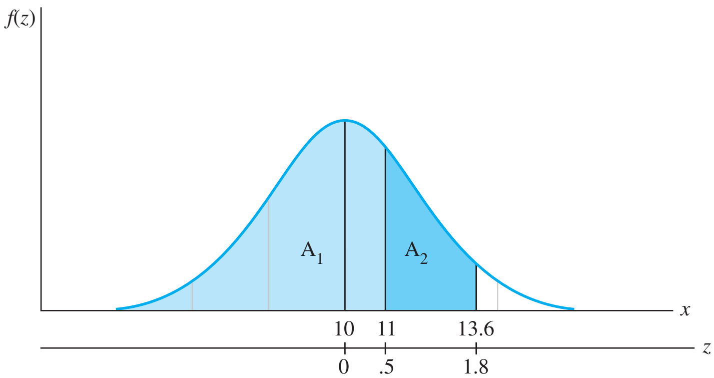
y cuando $x = 13.6$,

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{13.6 - 10}{2} = 1.8$$

La probabilidad deseada es, por tanto, $P(.5 \leq z \leq 1.8)$, el área que está entre $z = .5$ y $z = 1.8$, como se muestra en la figura 6.13. De la tabla 3 del apéndice I, se encuentra que el área a la izquierda de $z = .5$ es .6915, y el área a la izquierda de $z = 1.8$ es .9641. La probabilidad deseada es la diferencia entre estas dos probabilidades, es decir,

$$P(.5 \leq z \leq 1.8) = .9641 - .6915 = .2726$$

FIGURA 6.13
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.8

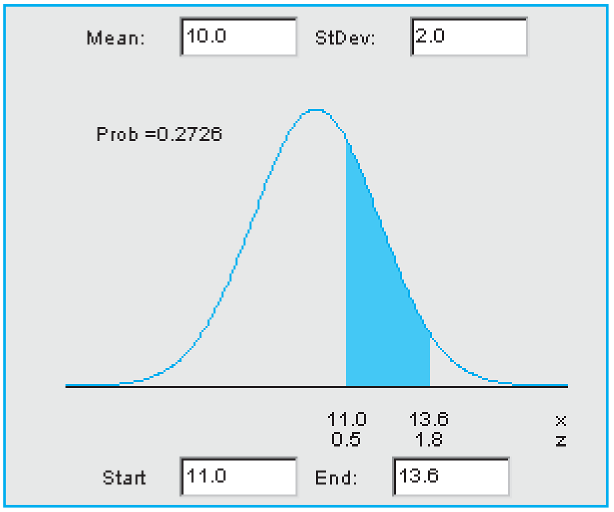


MI APPLET

El applet Java llamada **Normal Distribution Probabilities** (**Probabilidades normales de distribución)** permite calcular áreas bajo una distribución normal para cualesquier valores de μ y σ que usted seleccione. Simplemente escriba la media y desviación estándar apropiadas en las cajas en la parte superior del applet, teclee el intervalo de interés en las cajas en la parte inferior del applet y presione "Enter" en cada paso para registrar sus cambios. (La tecla "Tab" moverá su cursor de una caja a otra.) El área necesaria estará sombreada en rojo en su monitor (azul claro en la figura 6.14) y la probabilidad está dada a la izquierda en la curva.

- Si usted necesita un área bajo la distribución normal estándar, use $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.
- En el ejemplo 6.8, necesitamos un área bajo una distribución normal con $\mu = 10$ y $\sigma = 2$. Observe los valores de x y z ubicados a lo largo del eje horizontal. Encuentre la probabilidad, $P(11 \leq x \leq 13.6) = P(0.5 \leq z \leq 1.8) = .2726$, en la figura 6.14.

FIGURA 6.14
Applet Normal Distribution Probabilities



EJEMPLO 6.9

Estudios realizados demuestran que el uso de gasolina para autos compactos vendidos en Estados Unidos está normalmente distribuido, con una media de 25.5 millas por galón (mpg) y una desviación estándar de 4.5 mpg. ¿Qué porcentaje de compactos recorre 30 mpg o más?

Solución La proporción de compactos que recorren 30 mpg o más está dada por el área sombreada en la figura 6.15. Para resolver este problema, primero se debe hallar el valor z correspondiente a $x = 30$. Sustituyendo en la fórmula para z, resulta

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 25.5}{4.5} = 1.0$$

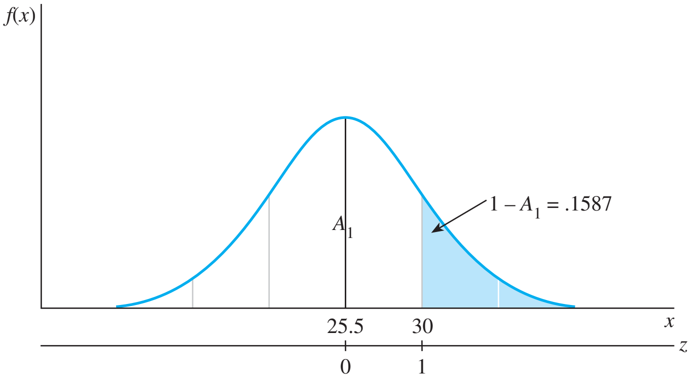
El área A_1 a la izquierda de $z = 1.0$, es .8413 (de la tabla 3 del apéndice I). Entonces la proporción de compactos que recorren 30 mpg o más es igual a

$$P(x \geq 30) = 1 - P(z < 1) = 1 - .8413 = .1587$$

El porcentaje que rebasa los 30 mpg es

$$100(.1587) = 15.87\%$$

FIGURA 6.15
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.9



EJEMPLO 6.10

Consulte el ejemplo 6.9. En tiempos de escasez de recursos energéticos, una ventaja comparativa se da a un fabricante de automóviles que puede producir un auto que tiene una economía de consumo de combustible considerablemente mejor que los autos de los competidores. Si un fabricante desea desarrollar un auto compacto que supere 95% de los compactos actuales en economía de combustible, ¿cuál debe ser el porcentaje de uso de gasolina para el nuevo auto?

Solución El porcentaje x de uso de gasolina tiene una distribución normal con una media de 25.5 mpg y una desviación estándar de 4.5 mpg. Usted necesita hallar un valor particular, por ejemplo x_0, tal que

$$P(x \le x_0) = .95$$

Éste es el 95avo percentil de la distribución del porcentaje x de uso de gasolina. Como la única información que tenemos acerca de las probabilidades normales es en términos de la variable z aleatoria normal estándar, empiece por estandarizar el valor de x_0:

$$z_0 = \frac{x_0 - 25.5}{4.5}$$

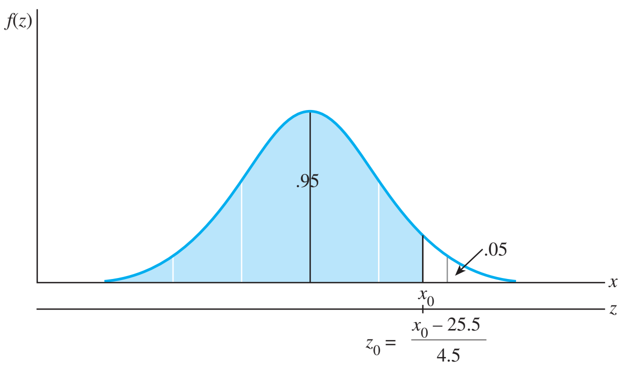
Como el valor de z_0 corresponde a x_0, *también* debe tener un área de .95 a su izquierda, como se muestra en la figura 6.16. Si usted ve al interior de la tabla 3 del apéndice I, encontrará que el área .9500 está exactamente a la mitad entre las áreas para $z = 1.64$ y $z = 1.65$. Por tanto, z_0 debe estar exactamente a la mitad entre 1.64 y 1.65, es decir

$$z_0 = \frac{x_0 - 25.5}{4.5} = 1.645$$

Al despejar x_0 resulta

$$x_0 = \mu + z_0\sigma = 25.5 + (1.645)(4.5) = 32.9$$

FIGURA 6.16
Área bajo la curva normal estándar para el ejemplo 6.10



El nuevo auto compacto del fabricante debe recorrer, por tanto, 32.89 mpg para superar 95% de los autos compactos actualmente disponibles en el mercado en Estados Unidos.

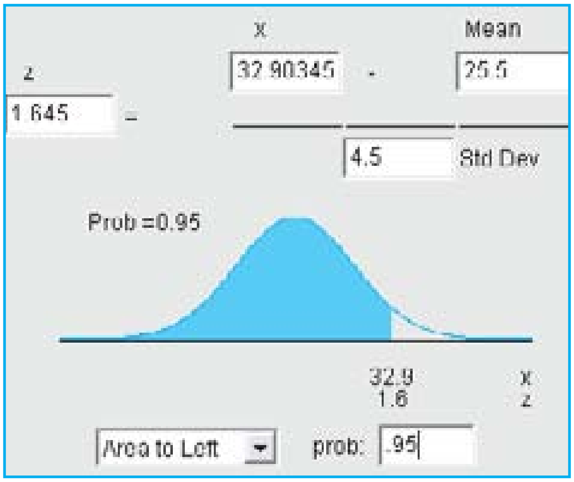
MI APPLET

El applet Java llamado **Normal Probabilities and *z*-Scores** (**Probabilidades normales y puntajes *z***) permite calcular áreas bajo una distribución normal, para cualesquier valores de μ y σ que usted seleccione. Una vez que especifique un valor para x, el applet calcula el valor de z, y uno de cuatro tipos de áreas, que puede seleccionar de la lista descendente de la parte inferior del applet:

- Área a la izquierda ⇒ área a la izquierda de z
- Área a la derecha ⇒ área a la derecha de z
- Dos colas ⇒ área en dos colas cortada por $-z$ y z
- Centro ⇒ área entre $-z$ y z

También se puede trabajar a la inversa como hicimos para resolver el problema del ejemplo 6.10. Introdujimos la media y desviación estándar y luego seleccionamos "Área a la izquierda" con una probabilidad de **.95**. Si las cajas para x y z se dejan en blanco, presionar "Enter" resolverá estos problemas, como se muestra en la figura 6.17. ¿Cuál es el valor de x, correcto a cinco lugares decimales?

FIGURA 6.17
Applet Normal Probabilities and z-Scores



Recuerde que el applet está programada para calcular probabilidades usando un valor de z con completa precisión decimal. Si el usuario escoge redondear una z calculada al centésimo más cercano, de modo que pueda usar la tabla 3 del apéndice I, puede obtener una probabilidad ligeramente diferente a la calculada usando el applet.

6.3 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 228.

6.1 Considere una variable aleatoria estándar con $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Use la tabla 3 y llene las probabilidades siguientes.

El intervalo	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
Menor que -2	$P(z <$ ____$)$		
Mayor que 1.16	$P(z >$ ____$)$		
Mayor que 1.645	$P(z >$ ____$)$		
Entre -2.33 y 2.33	$P($____ $< z <$ ____$)$		
Entre 1.24 y 2.58	$P($____ $< z <$ ____$)$		
Menor o igual a 1.88	$P(z \leq$ ____$)$		

6.2 Repita el ejercicio 6.1. Use la tabla 3 y complete a continuación las probabilidades.

El intervalo	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
Mayor que 5	$P(z >$ _____$)$		
Entre -3 y 3	$P($_____ $< z <$ _____$)$		
Entre $-.5$ y 1.5	$P($_____ $< z <$ _____$)$		
Menor o igual a -6.7	$P(z \leq$ _____$)$		
Menor a 2.81	$P(z <$ _____$)$		
Mayor que 2.81	$P(z >$_____$)$		

TÉCNICAS BÁSICAS

6.3 Calcule el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de estos valores:

a. $z = 1.6$ **b.** $z = 1.83$
c. $z = .90$ **d.** $z = 4.18$

6.4 Calcule el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de estos valores:

a. $z = -1.4$ y $z = 1.4$ **b.** $z = -3.0$ y $z = 3.0$

6.5 Encuentre las siguientes probabilidades para la variable aleatoria normal estándar z:

a. $P(-1.43 < z < .68)$ **b.** $P(.58 < z < 1.74)$
c. $P(-1.55 < z < -.44)$ **d.** $P(z > 1.34)$
e. $P(z < -4.32)$

6.6 Encuentre las siguientes probabilidades para la variable aleatoria normal estándar z:

a. $P(z < 2.33)$ **b.** $P(z < 1.645)$
c. $P(z > 1.96)$ **d.** $P(-2.58 < z < 2.58)$

6.7 **a.** Encuentre una z_0 tal que $P(z > z_0) = .025$.

b. Encuentre una z_0 tal que $P(z < z_0) = .9251$.

6.8 Encuentre una z_0 tal que $P(-z_0 < z < z_0) = .8262$.

6.9 **a.** Encuentre una z_0 que tenga área .9505 a su izquierda.

b. Encuentre una z_0 tal que .05 a su izquierda.

6.10 **a.** Encuentre una z_0 tal que $P(-z_0 < z < z_0) = .90$.

b. Encuentre una z_0 tal que $P(-z_0 < z < z_0) = .99$.

6.11 Encuentre los siguientes *percentiles* para la variable aleatoria normal estándar z:

a. 90avo percentil. **b.** 95avo percentil.

c. 98avo percentil. **d.** 99avo percentil.

6.12 Una variable aleatoria normal x tiene media $\mu = 10$ y desviación estándar $\sigma = 2$. Encuentre las probabilidades de estos valores x:

a. $x > 13.5$ **b.** $x < 8.2$ **c.** $9.4 < x < 10.6$

6.13 Una variable aleatoria normal x tiene media $\mu = 1.20$ y desviación estándar $\sigma = .15$. Encuentre las probabilidades de estos valores x:

a. $1.00 < x < 1.10$ **b.** $x > 1.38$
c. $1.35 < x < 1.50$

6.14 Una variable aleatoria normal x tiene una media μ desconocida y desviación estándar $\sigma = 2$. Si la probabilidad que x exceda de 7.5 es .8023, encuentre μ.

6.15 Una variable aleatoria normal x tiene media de 35 y desviación estándar 10. Encuentre un valor de x que tenga área .01 a su derecha. Éste es el *99avo percentil* de su distribución normal.

6.16 Una variable aleatoria normal x tiene media de 50 y desviación estándar 10. ¿Sería poco común ver el valor $x = 0$? Explique su respuesta.

6.17 Una variable aleatoria normal x tiene una media y desviación estándar desconocidas. La probabilidad de que x exceda de 4 es .9772 y la probabilidad de que x exceda de 5 es .9332. Encuentre μ y σ.

APLICACIONES

6.18 **Carne para hamburguesa** El departamento de carnes en un supermercado local específicamente prepara sus paquetes de "1 libra" de carne molida, para que haya una variedad de pesos, algunos ligeramente más y otros ligeramente menos de 1 libra. Suponga que los pesos de estos paquetes de "1 libra" están normalmente distribuidos con una media de 1.00 libra y una desviación estándar de .15 libras.

a. ¿Qué proporción de los paquetes pesará más de una libra?

b. ¿Qué proporción de los paquetes pesará entre .95 y 1.05 libras?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete de carne molida seleccionado al azar pese menos de .80 libras?

d. ¿Sería poco común hallar un paquete de carne molida que pese 1.45 libras? ¿Cómo explicaría usted un paquete tan grande?

6.19 Estatura en personas Las estaturas en personas son unas de las muchas variables biológicas que pueden ser modeladas por la distribución normal. Suponga que las estaturas de hombres tienen una media de 69 pulgadas, con una desviación estándar de 3.5 pulgadas.

a. ¿Qué proporción de todos los hombres será más alta de 6′0″? (SUGERENCIA: Convierta las mediciones a pulgadas.)

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre seleccionado al azar mida entre 5′8″ y 6′1″?

c. El presidente George W. Bush mide 5′11″ de estatura. ¿Es ésta una estatura poco común?

d. De los 42 presidentes elegidos de 1789 a 2006, 18 medían 6′0″ o más.[1] ¿Consideraría usted esto como poco común, dada la proporción hallada en el inciso a)?

6.20 Árboles de Navidad Los diámetros de abetos Douglas cultivados en una granja de árboles de Navidad están normalmente distribuidos, con una media de 4 pulgadas y una desviación estándar de 1.5 pulgadas.

a. ¿Qué proporción de los árboles tendrá diámetros entre 3 y 5 pulgadas?

b. ¿Qué proporción de los árboles tendrá diámetros menores a 3 pulgadas?

c. El pedestal del árbol de Navidad de usted se expandirá a un diámetro de 6 pulgadas. ¿Qué proporción de los árboles no cabrán en el pedestal de su árbol de Navidad?

6.21 Circulación sanguínea cerebral La circulación sanguínea cerebral (CBF), en los cerebros de personas sanas, está normalmente distribuida con una media de 74 y desviación estándar de 16.

a. ¿Qué proporción de personas sanas tendrán lecturas de CFG entre 60 y 80?

b. ¿Qué proporción de personas sanas tendrán lecturas de CFG arriba de 100?

c. Si una persona tiene una lectura CBF debajo de 40, es clasificado como en riesgo de sufrir un ataque cerebral. ¿A qué proporción de personas sanas se les diagnosticará erróneamente como "en riesgo"?

6.22 Distancias de frenado Para un auto que corre a 30 millas por hora (mph), la distancia necesaria de frenado hasta detenerse por completo está normalmente distribuida con media de 50 pies y desviación estándar de 8 pies. Suponga que usted está viajando a 30 mph en una zona residencial y un auto se mueve en forma abrupta en el camino de usted, a una distancia de 60 pies.

a. Si usted aplica los frenos, ¿cuál es la probabilidad de que frene hasta detenerse en no más de 40 pies o menos? ¿Y en no más de 50 pies o menos?

b. Si la única forma de evitar una colisión es frenar hasta detenerse por completo, ¿cuál es la probabilidad de que evite la colisión?

6.23 Capacidades en elevadores Supongamos que usted debe establecer reglas respecto al número máximo de personas que pueden ocupar un elevador. Un estudio de lugares ocupados en un elevador indica que si ocho personas ocupan el elevador, la distribución de probabilidad del peso total de las ocho personas tiene una media igual a 1200 libras y una desviación estándar de 99 libras. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso total de ocho personas exceda de 1300 libras? ¿Y de 1500 libras? (Suponga que la distribución de probabilidad es aproximadamente normal.)

6.24 Una mina de fosfato La descarga de sólidos suspendidos desde una mina de fosfato está normalmente distribuida, con una descarga media diaria de 27 miligramos por litro (mg/l) y una desviación estándar de 14 mg/l. ¿Qué proporción de días excederá de 50 mg/l la descarga diaria?

6.25 Girasoles Un experimentador que hace publicidad en la publicación *Annals of Botany* investigó si los diámetros de tallos del girasol dicotiledónea cambiaría, dependiendo de si la planta fue dejada para balancearse libremente en el viento o estaba artificialmente sostenida.[2] Suponga que los diámetros de tallos no soportados en la base, de una especie particular de girasol, tienen una distribución normal con un diámetro promedio de 35 milímetros (mm) y una desviación estándar de 3 mm.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una planta de girasol tenga un diámetro de base de más de 40 mm?

b. Si dos plantas de girasol se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas plantas tengan un diámetro de base de más de 40 mm?

c. ¿Dentro de qué límites esperaría usted que se encuentren los diámetros de base, con probabilidad .95?

d. ¿Qué diámetro representa el 90avo percentil de la distribución de diámetros?

6.26 Frecuencia respiratoria El número de veces x que un humano adulto respira por minuto, cuando está en reposo, depende de su edad y varía en gran medida de una persona a otra. Suponga que la distribución de probabilidad para x es aproximadamente normal, con la media igual a 16 y la desviación estándar igual a 4. Si una persona se selecciona al azar y se registra el número x de respiraciones por minuto cuando está en reposo, ¿cuál es la probabilidad de que x exceda de 22?

6.27 Pronósticos económicos Un método para llegar a pronósticos económicos es usar una propuesta de consensos. Se obtiene un pronóstico de cada uno de un número grande de analistas y el promedio de estos pronósticos individuales es el pronóstico de consenso. Suponga que los pronósticos individuales de la tasa de interés preferente de enero de 2008, hechos por analistas económicos, están normalmente distribuidos en forma aproximada con la media igual a 8.5% y una desviación estándar igual a .02%. Si al azar se selecciona un solo analista de entre este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que el pronóstico del analista de la tasa preferente tome estos valores?

a. Rebase de 8.75%.

b. Sea menor a 8.375%.

6.28 Auditoría de impuestos ¿En qué forma determina el IRS (Hacienda) el porcentaje de devoluciones de impuesto al ingreso para auditar a cada estado? Suponga que lo hacen al azar, seleccionando 50 valores de entre una distribución normal con una media igual a 1.55% y una desviación estándar igual a .45%. (Existen programas de cómputo para este tipo de muestreo.)

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un estado particular tenga más de 2.5% de sus devoluciones de impuesto al ingreso auditadas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un estado tenga menos de 1% de sus devoluciones de impuesto al ingreso auditadas?

6.29 Bacterias en agua potable Suponga que los números de un tipo particular de bacterias, en muestras de 1 mililitro (ml) de agua potable, tienden a estar normalmente distribuidos en forma aproximada con media de 85 y desviación estándar de 9. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra determinada de 1 ml contenga más de 100 bacterias?

6.30 Carga de granos Un cargador de granos se puede ajustar para descargar granos en cantidades que están normalmente distribuidas, con media de μ búshels y desviación estándar de 25.7 búshels. Si una compañía desea usar el cargador para llenar contenedores de 2000 búshels de grano y llenar de más sólo un contenedor en 100, ¿a qué valor de μ debe la compañía ajustar el cargador?

6.31 ¿Cuántas palabras? Un editor ha descubierto que los números de palabras contenidos en un nuevo manuscrito están normalmente distribuidos, con una media igual a 20 mil palabras más de las especificadas en el contrato del autor y una desviación estándar de 10 mil palabras. Si el editor desea estar casi seguro (digamos con una probabilidad de .95) que el manuscrito tenga menos de 100 mil palabras, ¿qué número de palabras debe especificar el editor en el contrato?

6.32 ¿Alguien juega tenis? Un fabricante de raquetas de tenis ha encontrado que la tracción real de las cuerdas, alcanzada para cualquier encordado individual de raquetas, va a variar hasta en 6 libras por pulgada cuadrada con respecto a la tracción deseada fijada en la máquina ensambladora. Si el fabricante desea montar cuerdas a una tracción menor que la especificada por un cliente sólo 5% del tiempo, ¿cuánto más arriba o abajo de la tracción especificada por el cliente el fabricante debe fijar la máquina ensambladora? (NOTA: Suponga que la distribución de tracciones de las cuerdas producida por la máquina ensambladora está normalmente distribuida, con una media igual a la tracción fijada en la máquina y una desviación estándar igual a 2 libras por pulgada cuadrada.)

6.33 Compras en un centro comercial Un artículo en el *American Demographics* dice que más del doble de compradores salen de compras los fines de semana que durante la semana.[3] No sólo eso, porque esos compradores también gastan más dinero en sus compras en sábados y domingos. Suponga que la cantidad de dinero gastada en centros comerciales, entre las 4 p.m. y las 6 p.m. los domingos tiene una distribución normal con media de $85 y una desviación estándar de $20. Un comprador se selecciona al azar un domingo entre las 4 p.m. y las 6 p.m. y se le pregunta sobre su forma de gastar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que él haya gastado más de $95 en el centro comercial?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que él haya gastado entre $95 y $115 en el centro comercial?

c. Si dos compradores se seleccionan al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ambos compradores hayan gastado más de $115 en el centro comercial?

6.34 Frecuencia de pulsaciones La frecuencia de pulsaciones es una medida del número de pulsaciones del corazón en un minuto. Se puede medir en varios lugares del cuerpo, donde una arteria pasa cerca de la piel. Una vez que encuentre el pulso, cuente el número de pulsaciones por minuto, es decir, cuente durante 30 segundos y multiplique por dos. ¿Cuál es una frecuencia de pulsaciones *normal*? Eso depende de varios factores. Las frecuencias de pulsaciones entre 60 y 100 pulsaciones por minuto se consideran normales para niños de más de 10 años de edad y en adultos.[4] Suponga que estas frecuencias de pulsaciones están distribuidas normalmente en forma aproximada, con una media de 78 y una desviación estándar de 12.

a. ¿Qué proporción de adultos tendrá frecuencias de pulsaciones entre 60 y 100?

b. ¿Cuál es el 95avo percentil para las frecuencias de pulsaciones de adultos?

c. ¿Una frecuencia de pulsaciones de 110 sería considerada poco común? Explique.

6.4 LA APROXIMACIÓN NORMAL A LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL (OPCIONAL)

En el capítulo 5 aprendimos tres formas de calcular probabilidades para la variable binomial aleatoria x:

- Con el uso de la fórmula binomial, $P(x = k) = C_k^n p^k q^{n-k}$
- Con el uso de las tablas acumulativas binomiales
- Con el uso de applets Java

La fórmula binomial produce cálculos largos y las tablas se pueden adquirir sólo para ciertos valores de n y p. Hay otra opción cuando $np < 7$; las probabilidades de Poisson se pueden usar para aproximar $P(x = k)$. Cuando esta aproximación *no funciona* y n es grande, la distribución normal de probabilidad da otra aproximación para probabilidades binomiales.

LA APROXIMACIÓN NORMAL A LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Sea x la variable binomial aleatoria con n intentos y probabilidad p de éxito. La distribución de probabilidad de x se aproxima mediante el uso de una curva normal con

$$\mu = np \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

Esta aproximación es adecuada mientras n sea grande y p no esté demasiado cerca de 0 o 1.

Como la distribución normal es continua, el área bajo la curva en cualquier punto individual es igual a 0. Recuerde que este resultado se aplica sólo a variables aleatorias continuas. Como la variable binomial aleatoria x es una variable aleatoria discreta, la probabilidad de que x tome algún valor específico, por ejemplo $x = 11$, no necesariamente será igual a 0.

Las figuras 6.18 y 6.19 muestran los histogramas binomiales de probabilidad para $n = 25$ con $p = .5$ y $p = .1$, respectivamente. La distribución en la figura 6.18 es exactamente simétrica.

FIGURA 6.18

Distribución binomial de probabilidad para $n = 25$ y $p = .5$ y la distribución normal de aproximación con $\mu = 12.5$ y $\sigma = 2.5$

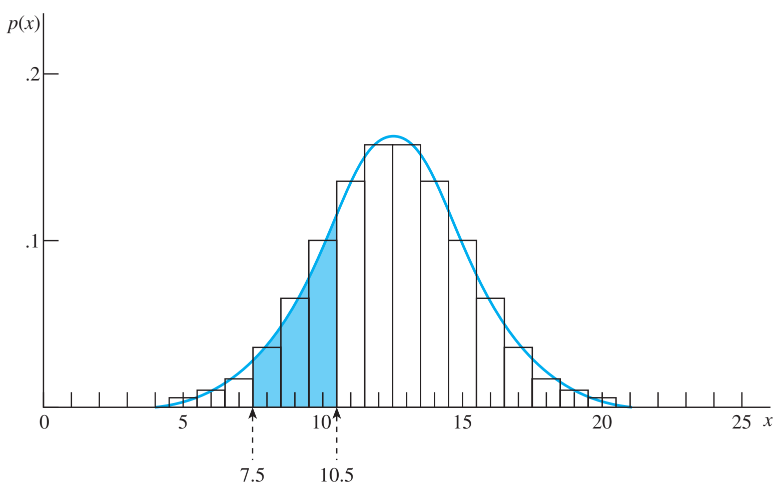
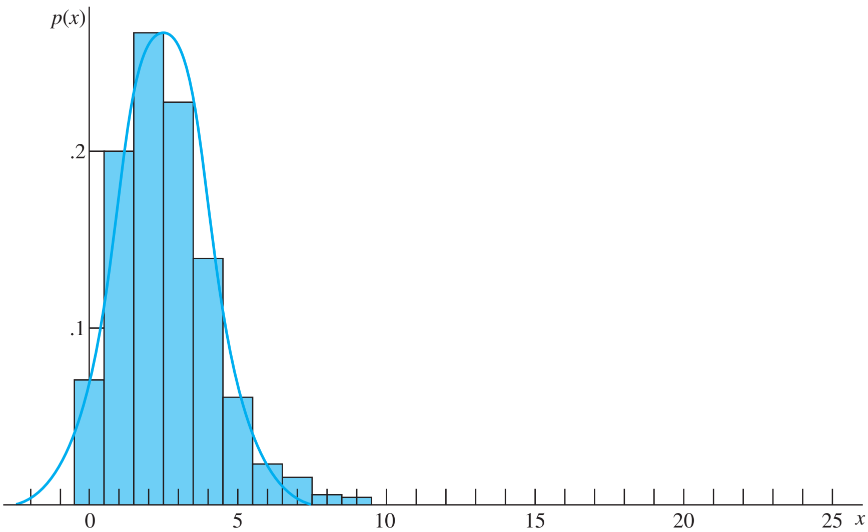


FIGURA 6.19
Distribución de probabilidad binomial y la distribución normal de aproximación para $n = 25$ y $p = .1$



Si usted superpone una curva normal con la misma media, $\mu = np$, y la misma desviación estándar, $\sigma = \sqrt{npq}$, sobre la parte superior de las barras, "se ajusta" muy bien; esto es, las áreas bajo la curva son casi iguales a las áreas bajo las barras. No obstante, cuando la probabilidad de éxito, p, es pequeña y la distribución está sesgada, como se muestra en la figura 6.19, la curva normal simétrica ya no ajusta muy bien. Si tratamos de usar las áreas de la curva normal para aproximar el área bajo las barras, la aproximación no será muy buena.

EJEMPLO 6.11

Use la curva normal para aproximar la probabilidad de que $x = 8$, 9 o 10 para una variable aleatoria binomial con $n = 25$ y $p = .5$. Compare esta aproximación a la probabilidad binomial exacta.

Solución Se puede hallar la probabilidad binomial exacta para este ejemplo porque hay tablas binomiales acumulativas para $n = 25$. De la tabla 1 del apéndice I,

$$P(x = 8, 9 \text{ o } 10) = P(x \leq 10) - P(x \leq 7) = .212 - .022 = .190$$

Para usar la aproximación normal, primero encuentre la media apropiada y desviación estándar para la curva normal:

$$\mu = np = 25(.5) = 12.5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25(.5)(.5)} = 2.5$$

MI CONSEJO
Sólo use la corrección de continuidad ¡si x tiene una distribución **binomial**!

La probabilidad que usted necesita corresponde al área de los tres rectángulos que se encuentran en $x = 8$, 9 y 10. El área equivalente bajo la curva normal se encuentra entre $x = 7.5$ (el lado inferior del rectángulo para $x = 8$) y $x = 10.5$ (el lado superior del rectángulo para $x = 10$). Esta área está sombreada en la figura 6.18.

Para hallar la probabilidad normal, siga los procedimientos de la sección 6.3. Primero estandarice el punto extremo de cada intervalo:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{7.5 - 12.5}{2.5} = -2.0$$

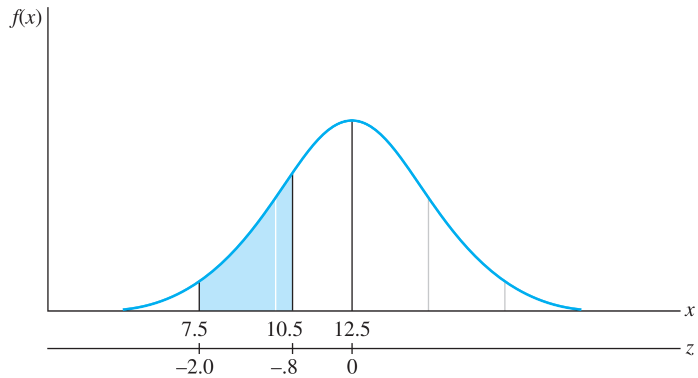
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{10.5 - 12.5}{2.5} = -.8$$

A continuación la probabilidad aproximada (sombreada en la figura 6.20) se encuentra de la tabla 3 del apéndice I:

$$P(-2.0 < z < -.8) = .2119 - .0228 = .1891$$

Se puede comparar la aproximación, .1891, con la probabilidad real, .190. Son muy cercanas.

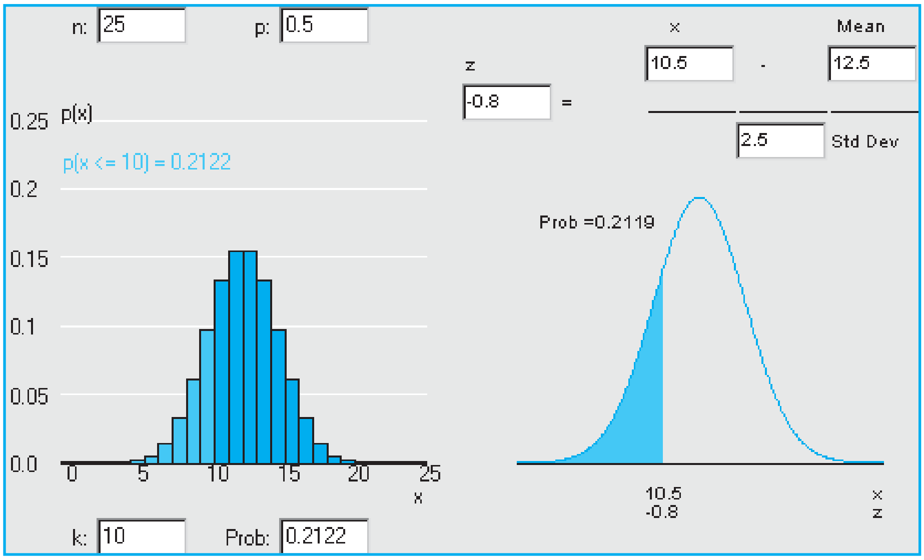
FIGURA 6.20
Área bajo la curva normal para el ejemplo 6.11



MI APPLET

Se puede usar el applet Java llamada **Normal Approximation to Binomial Probabilities (Aproximación Normal a Probabilidades Binomiales)**, que se muestra en la figura 6.21, para comparar las probabilidades reales y aproximadas para la distribución binomial del ejemplo 6.11. Introduzca los valores apropiados de n y p y en las cajas en la esquina superior izquierda del applet, y presione "Enter" para registrar cada una de las entradas. La distribución binomial exacta a la izquierda del applet cambiará, dependiendo del valor de n que se haya introducido. A continuación cambie el valor de k en la caja en la esquina inferior izquierda del applet y presione "Enter". El applet calculará la probabilidad binomial exacta $P(x \leq k)$ en la caja marcada "Prob": También calculará la probabilidad aproximada usando el área bajo la curva normal. El valor z, con la corrección de continuidad, se muestra arriba a la derecha y la probabilidad aproximada se muestra a la izquierda de la curva normal. Para el ejemplo 6.11, el applet calcula la aproximación normal como $P(x \leq 10) \approx .2119$. ¿Cuál es el valor exacto de $P(x \leq 10)$? Si se cambia k a 7 y se presiona "Enter", ¿cuál es el valor aproximado para $P(x \leq 7)$? Ahora calcule $P(8 \leq x \leq 10)$. ¿Se compara con la respuesta que obtuvimos en el ejemplo 6.11? Usaremos este applet de nuevo para la sección de Ejercicios MiApplet al final de este capítulo.

FIGURA 6.21
Applet Normal Approximation to Binomial Probabilities (Aproximación normal a probabilidades binomiales)



Usted debe tener cuidado de no excluir la mitad de los dos rectángulos de probabilidad extremos, cuando use la aproximación normal a la distribución binomial de probabilidad. Este ajuste, llamado **corrección de continuidad**, ayuda a considerar el hecho de que usted se aproxima a una *variable aleatoria discreta* con una *continua*. Si olvida la corrección, su aproximación no será muy buena. Use esta corrección sólo para *probabilidades binomiales*; no trate de usarla cuando la variable aleatoria ya sea continua, por ejemplo una estatura o un peso.

¿Cómo saber cuándo es apropiado usar la aproximación normal a probabilidades binomiales? La aproximación normal funciona bien cuando el histograma binomial es casi simétrico. Esto ocurre cuando la distribución binomial no está "agrupada" cerca de 0 o n, es decir, cuando se puede dispersar al menos dos desviaciones estándar desde su media sin exceder sus límites, 0 y n. Usando este criterio, se puede deducir esta sencilla regla práctica:

REGLA PRÁCTICA

La aproximación normal a las probabilidades binomiales será adecuada si

$np > 5$ y $nq > 5$

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo probabilidades binomiales usando la aproximación normal?

- Encuentre los valores necesarios de n y p. Calcule $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$.
- Escriba la probabilidad que necesite en términos de x y localice el área apropiada en la curva.
- Corrija el valor de x en $\pm.5$ para incluir todo el bloque de probabilidad para ese valor. Ésta es la *corrección de continuidad*.

- Convierta los valores x necesarios a valores z usando

$$z = \frac{x \pm .5 - np}{\sqrt{npq}}$$

- Use la tabla 3 del apéndice I para calcular la probabilidad aproximada.

Repertorio de ejercicios

Considere una variable aleatoria binomial con $n = 30$ y $p = .4$. Llene los siguientes espacios en blanco para hallar algunas probabilidades usando la aproximación normal.

A. Pasos preliminares:

1. ¿Podemos usar la aproximación normal? Calcule $np =$ _____ y $nq =$ _____
2. ¿np y nq son mayores a 5? Sí _____ No _____
3. Si la respuesta a la pregunta 2 es positiva, calcule $\mu = np =$ _____ y $\sigma = \sqrt{npq} =$ _____

B. Calcule la probabilidad:

1. Para hallar la probabilidad de 20 o más éxitos, ¿qué valores de x deben estar incluidos? $x =$ _____.
2. Para incluir todo el bloque de probabilidad para el primer valor de $x =$ _____, empiece en _____.
3. Calcule $z = \dfrac{x \pm .5 - np}{\sqrt{npq}} =$ _____.
4. Calcule $P(x \geq 20) \approx P(z >$ _____$) = 1 -$ _____ $=$ _____.

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina la aproximación normal? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

EJEMPLO 6.12

La confiabilidad de un fusible eléctrico es la probabilidad de que un fusible, escogido al azar de la producción, funcione bajo sus condiciones de diseño. Una muestra aleatoria de 1000 fusibles se probó y se observaron $x = 27$ defectuosos. Calcule la probabilidad aproximada de observar 27 o más defectuosos, suponiendo que la confiabilidad de un fusible es .98.

Solución La probabilidad de observar uno defectuoso cuando un solo fusible se prueba es $p = .02$, dado que la confiabilidad del fusible es .98. Entonces

$$\mu = np = 1000(.02) = 20$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000(.02)(.98)} = 4.43$$

MI CONSEJO

Si np y nq son mayores a 5, se puede usar la aproximación normal.

La probabilidad de 27 o más fusibles defectuosos, dada $n = 1000$, es

$$P(x \geq 27) = p(27) + p(28) + p(29) + \cdots + p(999) + p(1000)$$

Es apropiado usar la aproximación normal a la probabilidad binomial porque

$$np = 1000(.02) = 20 \quad \text{y} \quad nq = 1000(.98) = 980$$

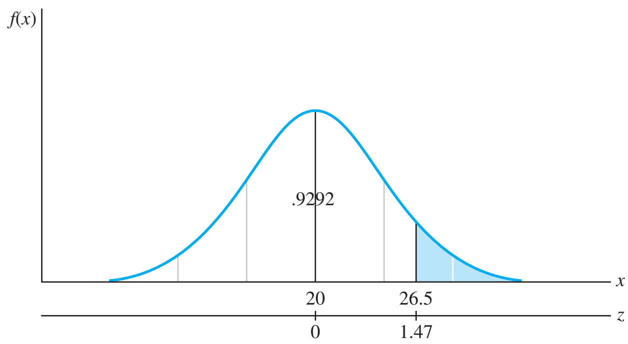
son mayores a 5. El área normal empleada para aproximar $P(x \geq 27)$ es el área bajo la curva normal a la derecha de 26.5, de modo que todo el rectángulo para $x = 27$ está incluido. Entonces, el valor z correspondiente a $x = 26.5$ es

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{26.5 - 20}{4.43} = \frac{6.5}{4.43} = 1.47$$

y el área a la izquierda de $z = 1.47$ es .9292, como se muestra en la figura 6.22. Como el área total bajo la curva es 1, tenemos

$$P(x \geq 27) \approx P(z \geq 1.47) = 1 - .9292 = .0708$$

FIGURA 6.22
Aproximación normal a la binomial para el ejemplo 6.12



EJEMPLO 6.13

Una productora de bebidas gaseosas estaba completamente segura de que su marca tenía 10% de participación en el mercado. En un estudio de mercado que comprendía 2500 consumidores de bebidas gaseosas, $x = 211$ expresaron una preferencia por la marca de ella. Si la cifra de 10% es correcta, encuentre la probabilidad de observar 211 o menos consumidores que prefieren la marca de bebidas gaseosas de ella.

Solución Si la productora tiene razón, entonces la probabilidad de que un consumidor prefiera la marca de bebidas gaseosas de ella es $p = .10$. Entonces

$$\mu = np = 2500(.10) = 250$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500(.10)(.90)} = 15$$

La probabilidad de observar 211 o menos que prefieran la marca de ella es

$$P(x \leq 211) = p(0) + p(1) + \cdots + p(210) + p(211)$$

La aproximación normal a esta probabilidad es el área a la izquierda de 211.5 bajo una curva normal con una media de 250 y una desviación estándar de 15. Primero calculamos

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{211.5 - 250}{15} = -2.57$$

Entonces

$$P(x \leq 211) \approx P(z < -2.57) = .0051$$

La probabilidad de observar un valor de muestra de 211 o menos cuando $p = .10$ es tan pequeña que se puede concluir que una de dos cosas ha ocurrido: o se ha observado una muestra poco común aun cuando en realidad $p = .10$, *o bien* la muestra refleja que el valor real de p es menor a .10 y quizá más cercana a la proporción muestral observada, $211/2500 = .08$.

6.4 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 240.

6.35 Considere una variable aleatoria binomial con $n = 25$ y $p = .6$. Llene los espacios en blanco que siguen, para hallar algunas probabilidades usando la aproximación normal.

a. ¿Podemos usar la aproximación normal? Calcule $np =$ _____ y $nq =$ _____.

b. ¿np y nq son mayores a 5? Sí _____ No _____

c. Si la respuesta al inciso b) es sí, calcule $\mu = np =$ _____ y $\sigma = \sqrt{npq} =$ _____.

d. Para hallar la probabilidad de más de 9 éxitos, ¿qué valores de x deben ser incluidos? $x =$ _____

e. Para incluir todo el bloque de probabilidad para el primer valor de $x =$ _____, empiece en _____.

f. Calcule $z = \dfrac{x \pm .5 - np}{\sqrt{npq}} =$ _____.

g. Calcule $P(x > 9) \approx P(z <$ _____$) = 1 -$ _____ $=$ _____.

6.36 Considere una variable aleatoria binomial con $n = 45$ y $p = .05$. Llene los espacios en blanco que siguen para hallar algunas probabilidades usando la aproximación normal.

a. ¿Podemos usar la aproximación normal? Calcule $np =$ _____ y $nq =$ _____.

b. ¿np y nq son mayores a 5? Sí _____ No _____

c. Si la respuesta al inciso b) es sí, calcule $\mu = np =$ _____ y $\sigma = \sqrt{npq} =$ _____.

d. Para hallar la probabilidad de 10 éxitos o menos, ¿qué valores de x deben ser incluidos? $x =$ _____

e. Para incluir todo el bloque de probabilidad para el primer valor de $x =$ _____, empiece en _____.

f. Calcule $z = \dfrac{x \pm .5 - np}{\sqrt{npq}} =$ _____.

g. Calcule $P(x \leq 10) \approx P(z <$ _____$) =$ _____.

TÉCNICAS BÁSICAS

6.37 Sea x la variable aleatoria binomio con $n = 25$ y $p = .3$.

a. ¿La aproximación normal es apropiada para esta variable aleatoria binomial?

b. Encuentre la media y desviación estándar para x.

c. Use la aproximación normal para hallar $P(6 \leq x \leq 9)$.

d. Use la tabla 1 del apéndice I para hallar la probabilidad exacta $P(6 \leq x \leq 9)$. Compare los resultados de los incisos c) y d). ¿Qué tan cercana es la aproximación hecha por usted?

6.38 Sea x la variable aleatoria binomial con $n = 15$ y $p = .5$.

a. ¿La aproximación normal es apropiada?

b. Encuentre $P(x \geq 6)$ usando la aproximación normal.

c. Encuentre $P(x > 6)$ usando la aproximación normal.

d. Encuentre las probabilidades exactas de los incisos b) y c), y compare usted éstas con sus aproximaciones.

6.39 Sea x la variable aleatoria binomial con $n = 100$ y $p = .2$. Encuentre aproximaciones a estas probabilidades:

a. $P(x > 22)$ **b.** $P(x \geq 22)$
c. $P(20 < x < 25)$ **d.** $P(x \leq 25)$

6.40 Sea x la variable aleatoria binomial con $n = 25$ y $p = .2$.

a. Use la tabla 1 del apéndice I para calcular $P(4 \leq x \leq 6)$.

b. Encuentre μ y σ para la distribución binomial de probabilidad y use la distribución normal para aproximar la probabilidad $P(4 \leq x \leq 6)$. Observe que este valor es una buena aproximación al valor exacto de $P(4 \leq x \leq 6)$ aun cuando $np = 5$.

6.41 Suponga que una variable aleatoria x tiene una distribución binomial correspondiente a $n = 20$ y $p = .30$. Use la tabla 1 del apéndice I para calcular estas probabilidades:

a. $P(x = 5)$ **b.** $P(x \geq 7)$

6.42 Consulte el ejercicio 6.41. Use la aproximación normal para calcular $P(x = 5)$ y $P(x \geq 7)$. Compare con los valores exactos obtenidos de la tabla 1 del apéndice I.

6.43 Considere un experimento binomial con $n = 20$ y $p = .4$. Calcule $P(x \geq 10)$ usando cada uno de estos métodos:

a. Tabla 1 del apéndice I.

b. La aproximación normal a la distribución binomial de probabilidad.

6.44 Encuentre la aproximación normal a $P(355 \leq x \leq 360)$ para una distribución binomial de probabilidad con $n = 400$ y $p = .9$.

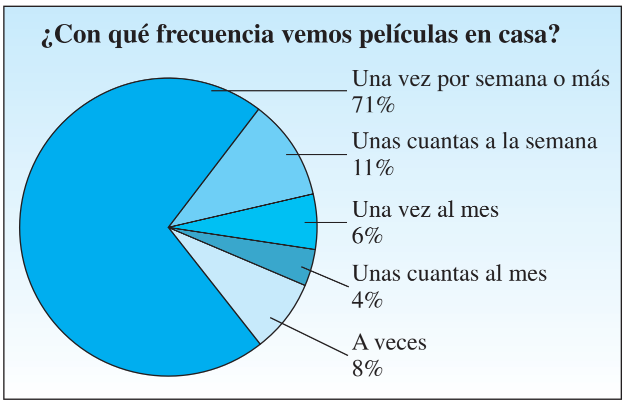
APLICACIONES

6.45 Cine en casa ¿Con qué frecuencia ve usted cine en casa? Un artículo de *USA Today* encontró que alrededor de 7 de cada 10 adultos dicen que ven cine en casa al menos una vez a la semana.[5] Suponga que una muestra aleatoria de $n = 50$ adultos son encuestados y se les pregunta si vieron una película en casa esta semana. Supongamos que $p = .7$ es, de hecho, correcto. ¿Cuáles son las probabilidades para los siguientes eventos?

a. ¿Menos de 30 personas vieron una película en casa esta semana?

b. ¿Más de 42 personas vieron una película en casa esta semana?

c. ¿Menos de 10 personas *no vieron* una película en casa esta semana?



6.46 Defectos genéticos Datos recolectados en un largo periodo demuestran que se presenta un defecto genético particular en 1 de cada 1000 niños. Los registros de una clínica médica presentan $x = 60$ niños con el defecto en un total de 50 mil examinados. Si los 50 mil niños fueran una muestra aleatoria de la población de niños representada por registros del pasado, ¿cuál es la probabilidad de observar un valor de x igual a 60 o más? ¿Diría usted que la observación de $x = 60$ niños con defectos genéticos representa un evento raro?

6.47 No presentada Es frecuente que líneas aéreas y hoteles concedan reservaciones que rebasan la capacidad, para reducir al mínimo las pérdidas debidas a las que no se concretan. Suponga que los registros de un hotel indican que, en promedio, 10% de sus prospectos de pasajeros no reclaman su reservación. Si el hotel acepta 215 reservaciones y hay sólo 200 cuartos en el hotel, ¿cuál es la probabilidad de que todos los pasajeros que lleguen a pedir un cuarto lo reciban?

6.48 Cáncer de pulmones La compilación de grandes masas de datos sobre cáncer de pulmones muestra que alrededor de 1 de cada 40 adultos adquiere la enfermedad. Se sabe que los trabajadores de cierta ocupación trabajan en ambiente de aire contaminado que puede causar un mayor porcentaje de cáncer de pulmón. Una muestra aleatoria de $n = 400$ trabajadores muestra 19 con casos identificables de cáncer de pulmón. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar un porcentaje más alto de cáncer de pulmón para estos trabajadores que para el promedio nacional?

6.49 ¿Altos o bajos? ¿Un presidente alto es mejor que uno de baja estatura? ¿Los estadounidenses tienden a votar por el más alto de los dos candidatos en una selección presidencial? En 33 de nuestras elecciones presidenciales entre 1856 y 2006, 17 de los ganadores eran más altos que sus oponentes.[1] Suponga que los estadounidenses no están sesgados por la estatura de un candidato y que el ganador tiene igual probabilidad de ser más alto o más bajo en estatura que su oponente. ¿Es poco común el número observado de ganadores más altos en las elecciones presidenciales de Estados Unidos?

a. Encuentre la probabilidad aproximada de hallar 17 o más de los 33 pares en los que gana el candidato más alto.

b. Con base en su respuesta al inciso a), ¿puede usted concluir que los estadounidenses podrían considerar la estatura de un candidato cuando depositen su voto?

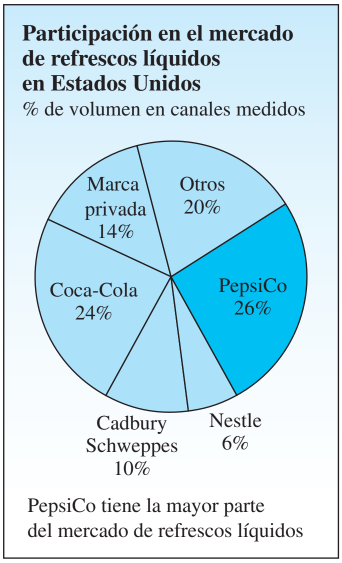
6.50 El factor Rh En cierta población, 15% de las personas tienen tipo de sangre Rh negativo. Un banco de sangre que da servicio a esta población recibe 92 donadores en un día particular.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que 10 o menos tengan Rh negativo?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que 15 o 20 (inclusive) de los donadores tengan Rh negativo?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 80 de los donadores tengan Rh negativo?

6.51 Participación de Pepsi en el mercado Dos de los principales rivales en bebidas gaseosas, Pepsi y Coca-Cola, están muy preocupados de su participación en el mercado. La siguiente gráfica de pastel, que apareció en el sitio web de la compañía (http://www.pepsico.com) en noviembre de 2006, dice que la participación de Pepsi-Cola en el mercado estadounidense de refrescos es 26%.[6] Suponga que esta proporción es *cercana* a la probabilidad de que una persona seleccionada al azar indica una preferencia por un producto Pepsi cuando escoge una gaseosa.



Se selecciona al azar un grupo de prueba de 500 consumidores. Use la curva normal para aproximar las siguientes probabilidades binomiales:

a. Exactamente 150 consumidores prefieren un producto Pepsi.

b. Entre 120 y 150 consumidores (inclusive) prefieren un producto Pepsi.

c. Menos de 150 consumidores prefieren un producto Pepsi.

d. ¿Sería poco común hallar que 232 de los 500 consumidores prefieran un producto Pepsi? Si esto ocurriera, ¿qué conclusiones sacaría usted?

6.52 Listos, acomódense, descansen Una familia típica estadounidense pasa mucho tiempo en auto de una actividad a otra y también en filas de entrada a restaurantes de comida rápida. Hay una evidencia cada vez mayor que sugiere que estamos empezando a agotarnos. De hecho, en un estudio realizado para el Centro para un Nuevo Sueño Americano, la revista *Time* informa que 60% de los estadounidenses sienten presión por trabajar demasiado y 80% desean tener más tiempo en familia.[7] Suponga que estos porcentajes son correctos para todos los estadounidenses y que se selecciona una muestra aleatoria de 25 de ellos.

a. Use la tabla 1 del apéndice I para hallar la probabilidad de que más de 20 sientan presión por trabajar demasiado.

b. Use la aproximación normal a la distribución binomial para aproximar la probabilidad del inciso a). Compare sus respuestas con el valor exacto del inciso a).

c. Use la tabla 1 del apéndice I para hallar la probabilidad de que entre 15 y 20 (inclusive) deseen estar más tiempo en familia.

d. Use la aproximación normal a la distribución binomial para aproximar la probabilidad del inciso c). Compare su respuesta con el valor exacto del inciso c).

6.53 Dijimos, "descansen" El artículo de la revista *Time*[7] (ejercicio 6.52) también informó que 80% de hombres y 62% de mujeres emplean más de 40 horas a la semana en el trabajo. Suponga que estos porcentajes son correctos para todos los estadounidenses y que se selecciona una muestra aleatoria de 50 mujeres trabajadoras.

a. ¿Cuál es el número promedio de mujeres que emplean más de 40 horas a la semana en el trabajo?

b. ¿Cuál es la desviación estándar para el número de mujeres que emplean más de 40 horas a la semana en el trabajo?

c. Suponga que en nuestra muestra de 50 mujeres trabajadoras hay 25 que trabajan más de 40 horas a la semana. ¿Considera usted que esto es un suceso poco común? Explique.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Distribuciones continuas de probabilidad

1. Variables aleatorias continuas.
2. Distribuciones de probabilidad o funciones de densidad de probabilidad:
   a. Las curvas son lisas.
   b. El área bajo la curva es igual a 1.
   c. El área bajo la curva entre a y b representa la probabilidad de que x caiga entre a y b.
   d. $P(x = a) = 0$ para variables aleatorias continuas.

II. La distribución normal de probabilidad

1. Es simétrica alrededor de su media μ.
2. Forma determinada por su desviación estándar σ.

III. La distribución normal estándar

1. La variable aleatoria normal estándar z tiene media 0 y desviación estándar 1.
2. Cualquier variable aleatoria normal x puede ser transformada a una variable aleatoria normal estándar usando

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

3. Convierta valores necesarios de x a z.
4. Use la tabla 3 del apéndice I para calcular probabilidades normales estándar.
4. Varios valores z importantes tienen áreas de cola derecha como sigue:

Área de cola derecha	.005	.01	.025	.05	.10
Valor z	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28

MI MINITAB

Probabilidades normales

Cuando la variable aleatoria de interés tiene una distribución normal de probabilidad, se pueden generar cualquiera de estas probabilidades:

- Probabilidades acumulativas, $P(x \leq k)$, para un valor dado de k
- Probabilidades acumulativas inversas, el valor de k tal que el área a su izquierda bajo la distribución normal de probabilidad es igual a a

Usted debe especificar cuál distribución normal está usando y los parámetros necesarios: la media μ y la desviación estándar σ. Al igual que en el capítulo 5, usted tiene la opción de especificar sólo un valor de k (o de a) o varios valores de k (o de a), que deben guardarse en una columna (por ejemplo en C1) de la hoja de trabajo *MINITAB*.

Suponga que el promedio de peso de bebés al nacer, en hospitales propiedad de una importante organización de mantenimiento de la salud (HMO), es aproximadamente normal con media de 6.75 libras y desviación estándar de .54 libras. ¿Qué proporción de bebés nacidos en estos hospitales pesa entre 6 y 7 libras? Para usar *MINITAB* para hallar $P(6 < x < 7)$, aplique nombre a la columna C1 como "x" e introduzca los valores críticos $x = 6$ y $x = 7$ en esta columna. Use **Calc → Probability Distributions → Normal** para generar el cuadro de Diálogo, como se muestra en la figura 6.23.

Teclee los valores para μ y σ en las cajas apropiadas (los valores predeterminados generan probabilidades para la distribución normal estándar z), y seleccione C1 para la columna de entrada. (Si no teclea un número de columna para guardado opcional, *MINITAB* presentará los resultados en la ventana Session.) Verifique que se encuentre seleccionado el botón de radio marcado "Cumulative probability". La función de distribución

FIGURA 6.23

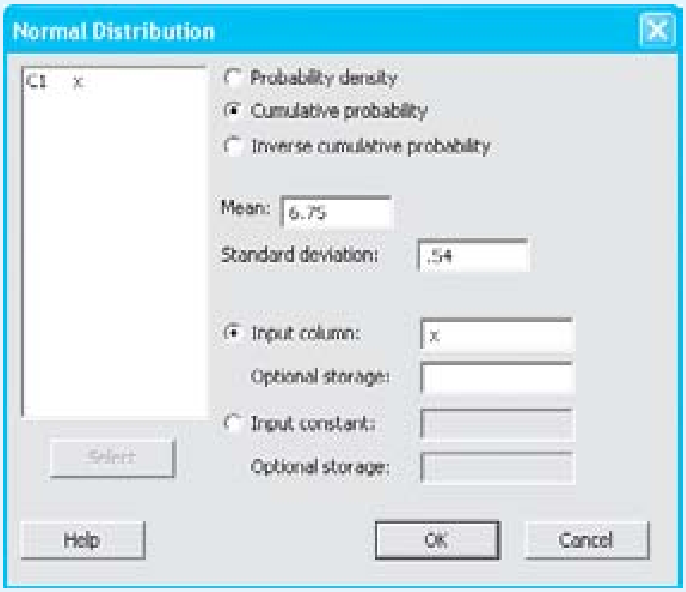
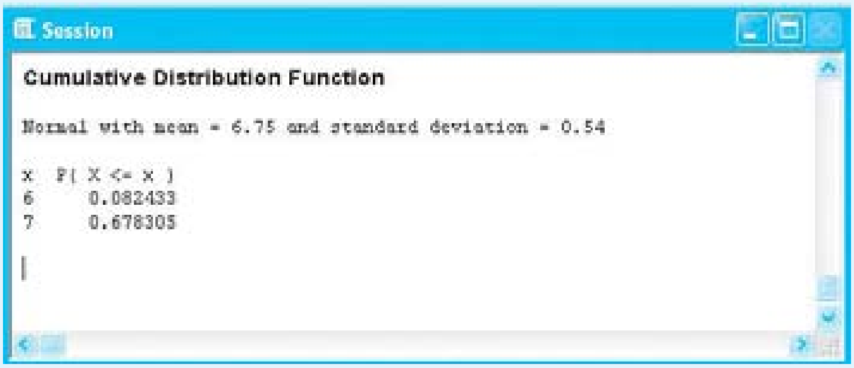


FIGURA 6.24



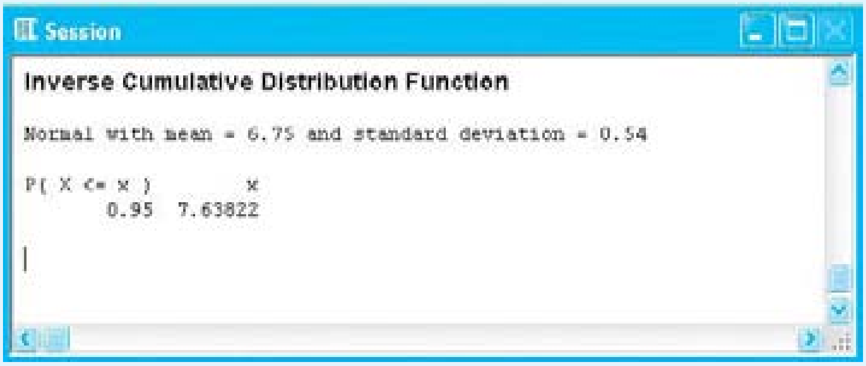
acumulativa para $x = 6$ y $x = 7$ aparece en la ventana Session cuando el usuario haga clic en **OK** (véase la figura 6.24). Para hallar $P(6 < x < 7)$, recuerde que la probabilidad acumulativa es el área a la izquierda del valor dado de x. Por tanto,

$$P(6 < x < 7) = P(x < 7) - P(x < 6) = .678305 - .082433 = .595872$$

Si se desea, se puede verificar este cálculo usando la tabla 3 del apéndice I.

Para calcular probabilidades acumulativas inversas, use **Calc** → **Probability Distributions** → **Normal** otra vez. Asegúrese de que se encuentra seleccionado el botón de radio marcado "Inverse cumulative probability" y que la media y desviación estándar están introducidas en las cajas apropiadas. A continuación introduzca los valores apropiados de a en C1 o bien, si tiene un solo valor, introduzca el valor en la caja constante de Entrada. Por ejemplo, para hallar el 95avo percentil del peso al nacer, se busca un valor k tal que sólo 5% de los valores de x exceden de este valor (y 95% son más o menos iguales a k). Si usted introduce la probabilidad **.95** en la caja constante de Entrada y selecciona la opción marcada "Inverse cumulative probability", aparecerá el 95avo percentil en la ventana Session, como en la figura 6.25. Esto es, 95% de todos los bebés nacidos en estos hospitales pesan 7.63822 libras o menos. ¿Consideraría usted que un bebé que pesa 9 libras es anormalmente grande?

FIGURA 6.25



Ejercicios suplementarios

6.54 Usando la tabla 3 del apéndice I, calcule el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de lo siguiente:

a. $z = 1.2$ **b.** $z = -.9$

c. $z = 1.46$ **d.** $z = -.42$

6.55 Encuentre las siguientes probabilidades para la variable aleatoria normal estándar:

a. $P(.3 < z < 1.56)$ **b.** $P(-.2 < z < .2)$

6.56 **a.** Encuentre la probabilidad de que z sea mayor a $-.75$.

b. Encuentre la probabilidad de que z sea menor a 1.35.

6.57 Encuentre z_0 tal que $P(z > z_0) = .5$.

6.58 Encuentre la probabilidad de que z se encuentre entre $z = -1.48$ y $z = 1.48$.

6.59 Encuentre z_0 tal que $P(-z_0 < z < z_0) = .5$. ¿Cuáles percentiles representan $-z_0$ y z_0?

6.60 **Barrenas** La vida útil de las barrenas en pozos petroleros depende de los tipos de roca y suelo que encuentre la barrena, pero se estima que la duración media es de 75 horas. Suponga que una compañía de exploración petrolera compra barrenas, que tienen una vida útil que está distribuida normalmente en forma aproximada, con una media igual a 75 horas y una desviación estándar igual a 12 horas.

a. ¿Qué proporción de barrenas de la compañía fallarán antes de 60 horas de uso?

b. ¿Qué proporción durará al menos 60 horas?

c. ¿Qué proporción tendrá que cambiarse después de más de 90 horas de uso?

6.61 **Edades de profesorado** El influjo de nuevos ideas en una universidad, introducidas principalmente por profesores jóvenes, está convirtiéndose en materia de preocupación debido a las edades cada vez mayores de miembros de la facultad; esto es, la distribución de edades del profesorado está cambiando hacia arriba debido principalmente a una escasez de posiciones vacantes y exceso de oferta de doctorados. Entonces, los miembros del profesorado están reacios a moverse y abandonar una posición segura. Si la edad de retiro en casi todas las universidades es de 65 años, ¿esperaría usted que la distribución de edades del profesorado sea normal? Explique.

6.62 **Diámetros de cojinetes** La operación de una máquina produce cojinetes cuyos diámetros están normalmente distribuidos, con media y desviación estándar igual a .498 y .002, respectivamente. Si las especificaciones requieren que el diámetro del cojinete sea igual a .500 de pulgada ± .004 de pulgada, ¿qué fracción de la producción sería inaceptable?

6.63 **Autos usados** Un distribuidor de autos usados ha encontrado que el tiempo antes de que se requiera una reparación importante en los autos que él vende, está normalmente distribuida con una media igual a 10 meses y una desviación estándar de 3 meses. Si el distribuidor desea que sólo 5% de los autos fallen antes que termine el periodo de garantía, ¿por cuántos meses deben estar garantizados los autos?

6.64 **Ventas en restaurantes** El total de las ventas diarias (excepto sábados) en un pequeño restaurante tiene una distribución de probabilidad que es aproximadamente normal, con una media μ igual a \$1230 por día y una desviación estándar σ igual a \$120.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas excedan de \$1400 para un día determinado?

b. El restaurante debe tener al menos $1000 en ventas por día para salir sin pérdidas ni ganancias. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado el restaurante no salga sin pérdidas ni ganancias?

6.65 Lavadoras La vida útil de un tipo de lavadoras automáticas está distribuida normalmente en forma aproximada, con media y desviación estándar igual a 10.5 y 3.0 años, respectivamente. Si este tipo de lavadora está garantizada durante un periodo de 5 años, ¿qué fracción necesitará ser reparada y/o repuesta?

6.66 Abridores de puertas de garaje Casi todos los usuarios de abridores de puertas de garaje activan sus abridores a distancias que están normalmente distribuidas, con una media de 30 pies y una desviación estándar de 11 pies. Para reducir al mínimo la interferencia con otros aparatos a control remoto, se especifica al fabricante que limite la distancia de operación a 50 pies. ¿Qué porcentaje del tiempo tratarán los usuarios de operar el abridor fuera de su límite de operación?

6.67 ¿Cuánto dura el examen? Se ha encontrado que la duración promedio, requerida para completar un examen de conocimientos en una universidad, es igual a 70 minutos con una desviación estándar de 12 minutos. ¿Cuándo debe terminarse el examen si se desea permitir tiempo suficiente para que 90% de los estudiantes lo completen? (Suponga que el tiempo necesario para completar el examen está normalmente distribuido.)

6.68 Servicio a automóviles El lapso necesario para mantenimiento periódico de un automóvil tendrá, por lo general, una distribución de probabilidad que es de forma de montículo y, debido a que ocurrirán largos tiempos de servicio, está sesgado a la derecha. El tiempo necesario para correr una prueba de 5000 millas y dar servicio a un automóvil tiene una media igual a 1.4 horas y una desviación estándar de .7 horas. Suponga que el departamento de servicio planea dar servicio a 50 automóviles por día de 8 horas y que, para hacerlo, no debe emplear más de un promedio de 1.6 horas por automóvil. ¿Qué proporción de todos los días tendrá que trabajar tiempo extra el departamento de servicio?

6.69 Televidentes Una agencia de publicidad ha expresado que 20% de todos los televidentes ven un programa particular. En una muestra aleatoria de 1000 televidentes, $x = 184$ estaban viendo el programa. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para contradecir lo dicho por el anunciante?

6.70 Pronóstico de ganancias Un investigador observa que los altos ejecutivos de empresas no son pronosticadores muy precisos de sus propias ganancias anuales. Dice que sus estudios de un gran número de pronósticos de ejecutivos de compañías "mostraron que la estimación promedio erraron la marca en 15%".

a. Suponga que la distribución de estos errores de pronóstico tiene una media de 15% y desviación estándar de 10%. ¿Es probable que la distribución de errores de pronóstico sea aproximadamente normal?

b. Suponga que la probabilidad es .5 que un error de pronóstico de un ejecutivo corporativo exceda de 15%. Si usted fuera a muestrear los pronósticos de 100 ejecutivos corporativos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 60 estarían errados en más de 15%?

6.71 Llenar vasos de refresco Una máquina que envasa refrescos puede ser regulada para descargar un promedio de μ onzas por vaso. Si las onzas de líquido están normalmente distribuidas, con desviación estándar igual a .3 de onza, dé el ajuste para μ de modo que vasos de 8 onzas (¼ de litro) se rebosen sólo 1% del tiempo.

6.72 Bombillas eléctricas Una planta fabricante utiliza 3000 bombillas eléctricas cuyas duraciones están normalmente distribuidas, con media y desviación estándar igual a 500 y 50 horas, respectivamente. Para reducir al mínimo el número de bombillas que se queman durante las horas de operación, todas las bombillas se cambian después de un periodo determinado de operación. ¿Con qué frecuencia deben cambiarse las bombillas si deseamos que no más de 1% de ellas se quemen entre periodos de cambio?

6.73 El grupo de primer año La oficina de inscripciones de una pequeña universidad recibe solicitudes de que acepte depósitos de varios prospectos de estudiantes de primer año calificados, de modo que, con probabilidad de alrededor de .95, el tamaño del grupo de primer año será menor o igual a 120. Suponga que los solicitantes constituyen una muestra aleatoria de una población de solicitantes, 80% de los cuales en realidad entran al grupo de primer año si son aceptados.

a. ¿Cuántos depósitos debe aceptar el asesor legal de inscripciones?

b. Si los solicitantes en el número determinado en el inciso a) son aceptados, ¿cuál es la probabilidad de que el tamaño del grupo de primer año sea menor a 105?

6.74 No presentadas Una línea aérea encuentra que 5% de las personas que hacen reservaciones en cierto vuelo no se presentan para el vuelo. Si la aerolínea vende 160 boletos para un vuelo que tiene sólo 155 asientos, ¿cuál es la probabilidad de que un asiento esté disponible para toda persona que tenga una reservación y planee volar?

6.75 Larga distancia Se sabe que 30% de todas las llamadas que entran a un conmutador son de larga distancia. Si 200 llamadas entran al conmutador, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 50 sean de larga distancia?

6.76 Genética en plantas En el ejercicio 5.75, una cruza entre dos plantas, una de ellas con pétalos rojos y una con pétalos veteados, produjeron plantas descendientes con pétalos rojos 75% de las veces. Suponga que 100 semillas de esta cruza se recolectaron y terminaron, y x, el número de plantas con pétalos rojos, se registró.

a. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para x?

b. ¿Es apropiado aproximar la distribución del inciso a) usando la distribución normal? Explique.

c. Use un método apropiado para hallar la probabilidad aproximada de que entre 70 y 80 (inclusive) plantas descendientes tengan flores rojas.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que 53 o menos de plantas descendientes tengan flores rojas? ¿Es éste un suceso poco común?

e. Si en realidad se observaron 53 de 100 plantas descendientes con flores rojas y si estábamos seguros que la proporción genética 3:1 era correcta, ¿qué otra explicación podría darse para este suceso poco común?

6.77 Proveedores A o B Un comprador de relevadores eléctricos hace compras a dos proveedores, A y B. El proveedor A suministra dos de cada tres relevadores empleados por la compañía. Si 75 relevadores de los empleados por la compañía se seleccionan al azar, encuentre la probabilidad de que a lo sumo 48 de esos relevadores provengan del proveedor A. Suponga que la compañía utiliza un gran número de relevadores.

6.78 Bocadillos y TV ¿La televisión es riesgosa para la dieta de usted? Los psicólogos creen que comer en exceso puede estar asociado con estados emocionales (estar molesto o aburrido) e indicios ambientales (ver televisión, leer, etcétera). Para probar esta teoría, suponga que se han seleccionado al azar 60 personas con sobrepeso y pareadas en peso y género. Durante 2 semanas, se pidió a uno de cada pareja que pasara las tardes leyendo novelas de interés para él o ella. El otro miembro de la pareja pasa las tardes viendo televisión. La cantidad de calorías de todos los bocadillos y refrescos consumidos por las tardes se registró por cada persona, siendo $x = 19$ el número de parejas para las cuales la ingesta de calorías de los televidentes fue mayor que la de los lectores. Si no hay diferencia en los efectos de televisión y lectura en ingesta de calorías, la probabilidad p de que la ingesta de calorías de un miembro de cada pareja exceda la del otro miembro es .5. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre los efectos de ver televisión y leer en cuanto a ingesta de calorías se refiere? (SUGERENCIA: Calcule el puntaje z para el valor observado, $x = 19$.)

6.79 Tiempos de gestación *The Biology Data Book* informa que el tiempo de gestación para humanos bebés promedia 278 días, con una desviación estándar de 12 días.[8] Suponga que estos tiempos de gestación están normalmente distribuidos.

a. Encuentre los cuartiles superior e inferior para los tiempos de gestación.

b. ¿Sería poco común tener un bebé después de sólo 6 meses de gestación? Explique.

6.80 Auditorías de impuestos En el ejercicio 6.28, sugerimos que el IRS (Hacienda) asigna tasas de auditoría por estado, al seleccionar al azar 50 porcentajes de auditoría de una distribución normal con una media igual a 1.55% y desviación estándar de .45%.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un estado particular se audite más de 2% de sus devoluciones de impuesto al ingreso?

b. ¿Cuál es el valor esperado de x, el número de estados a los que se auditará más de 2% de sus devoluciones de impuesto al ingreso?

c. ¿Es probable que hasta 15 de los 50 estados se les audite más de 2% de sus devoluciones de impuesto al ingreso?

6.81 Su deporte favorito Hay diferencia en preferencias de deportes entre hombres y mujeres, según una encuesta reciente. Entre los 10 deportes más populares, los hombres incluyen deportes del tipo de competencia por ejemplo billar y carambola, baloncesto y softbol, mientras que las mujeres incluyen aerobics, correr, excursiones y calistenia. No obstante, la principal actividad recreativa para hombres era todavía el relajante deporte de la pesca, con 41% de los encuestados diciendo que habían pescado durante el año. Suponga que a 180 hombres seleccionados al azar se les preguntó si habían pescado el año pasado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 50 hayan pescado?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 50 y 75 hayan pescado?

c. Si los 180 hombres seleccionados para la entrevista fueran seleccionados por el departamento de marketing de una compañía de artículos deportivos, con base en información obtenida de sus listas de correos, ¿qué concluiría usted acerca de la confiabilidad de los resultados de su encuesta?

6.82 ¿Introvertido o extrovertido? Un examen psicológico para introvertidos-extrovertidos produjo calificaciones que tenían una distribución normal con una media y desviación estándar de 75 y 12, respectivamente. Si deseamos designar *el más alto* 15% a extrovertidos, ¿cuál sería la calificación apropiada para escoger como el punto de corte?

6.83 Doblar las calificaciones Es frecuente que los estudiantes pregunten a sus profesores si estarán "doblando las calificaciones". La interpretación tradicional de "doblar calificaciones" requería que las calificaciones tuvieran una distribución normal y que las calificaciones se asignaran en estas proporciones:

Letra de calificación	A	B	C	D	F
Proporción de estudiantes	10%	20%	40%	20%	10%

a. Si la calificación promedio "C" está centrada como la calificación promedio de todos los estudiantes y si suponemos que las calificaciones están normalmente distribuidas, ¿cuántas desviaciones estándar a cada lado de la media constituirán las calificaciones "C"?

b. ¿Cuántas desviaciones a cada lado de la media serán los puntos de corte para las calificaciones "B" y "D"?

6.84 Doblar las calificaciones, continúa Consulte el ejercicio 6.83. Para facilidad de cálculo, redondee el número de desviaciones estándar para calificaciones "C" a ±.5 desviaciones estándar y para calificaciones "B" y "D" a ±1.5 desviaciones estándar. Suponga que la distribución de calificaciones para un grupo grande de estudiantes tiene un promedio de 78 con una desviación estándar de 11. Encuentre los puntos de corte apropiados para las calificaciones A, B, C, D y F.

6.85 Temperaturas normales En el ejercicio 1.67, Allen Shoemaker dedujo una distribución de temperaturas del cuerpo humano, que tiene una forma de montículo distintiva.[9] Suponga que asumimos que las temperaturas de personas sanas son aproximadamente normales, con una media de 98.6 grados y una desviación estándar de 0.8 grados.

a. Si se selecciona al azar una persona sana, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga una temperatura arriba de 99.0°?

b. ¿Cuál es el 95avo percentil para las temperaturas corporales de personas sanas?

MI APPLET Ejercicios

Use uno de los tres applets (**Normal Distribution Probabilities, Normal Probabilities and *z*-Scores,** o **Normal Approximation to Binomial Probabilities**) descritos en este capítulo, para resolver los siguientes ejercicios.

6.86 Calcule el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de estos valores:

a. $z = -.90$ **b.** $z = 2.34$ **c.** $z = 5.4$

6.87 Calcule el área bajo la curva normal estándar entre estos valores:

a. $z = -2.0$ y $z = 2.0$ **b.** $z = -2.3$ y -1.5

6.88 Encuentre las siguientes probabilidades para la variable z aleatoria normal estándar:

a. $P(-1.96 \le z \le 1.96)$ **b.** $P(z > 1.96)$

c. $P(z < -1.96)$

6.89 a. Encuentre una z_0 tal que $P(z > z_0) = .9750$.
b. Encuentre una z_0 tal que $P(-z_0 > z_0) = .3594$.

6.90 a. Encuentre una z_0 tal que $P(-z_0 \le z \le z_0) = .95$.
b. Encuentre una z_0 tal que $P(-z_0 \le z \le z_0) = .98$.

6.91 Una variable aleatoria normal x tiene media de $\mu = 5$ y $\sigma = 2$. Encuentre las siguientes probabilidades de estos valores x:

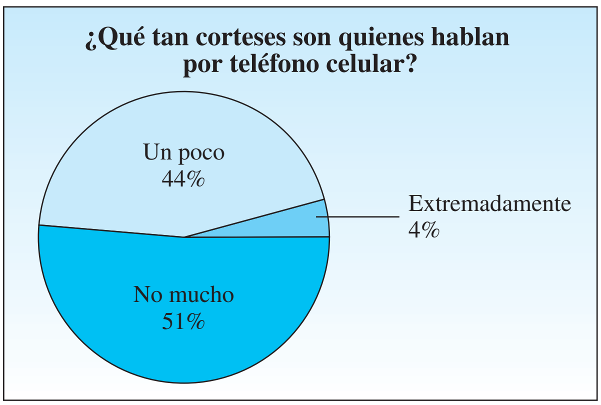
a. $1.2 < x < 10$ **b.** $x > 7.5$ **c.** $x \le 0$

6.92 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 36$ y $p = .54$. Use la aproximación normal para hallar:

a. $P(x \le 25)$ **b.** $P(15 \le x \le 20)$

c. $P(x > 30)$

6.93 Etiqueta de teléfono celular Un artículo en *USA Today* indica que 51% de los estadounidenses dicen que la persona promedio no es muy considerada hacia otros cuando habla por un teléfono celular.[10] Suponga que se seleccionan al azar 100 estadounidenses.



a. Use el applet **Calculating Binomial Probabilities** del capítulo 5 para hallar la probabilidad exacta de que 60 o más estadounidenses indicarían que la persona promedio no es muy considerada hacia otros cuando habla por teléfono celular.

b. Use el **Normal Approximation to Binomial Probabilities** para aproximar la probabilidad del inciso a). Compare sus respuestas.

6.94 Estampillas Los filatelistas (coleccionistas de estampillas) con frecuencia ofrecen estampillas a precios de menudeo o cercanos a éstos, pero, cuando venden, el precio es considerablemente más bajo. Por ejemplo, puede ser razonable suponer que (dependiendo de la mezcla de una colección, condición, demanda, condiciones económicas, etc.) una colección se venderá a x% del precio de menudeo, donde x está normalmente distribuida con una media igual a 45% y una desviación estándar de 4.5%. Si un filatelista tiene una colección para venderla, que tiene un valor al menudeo de $30 mil, ¿cuál es la probabilidad de que el filatelista reciba estas cantidades por la colección?

a. Más de $15 000
b. Menos de $15 000
c. Menos de $12 000

6.95 Calificaciones de examen Las calificaciones en un examen de conocimientos a nivel nacional estuvieron distribuidas normalmente en forma aproximada, con una media de 540 y una desviación estándar de 110.

a. Si usted recibió una calificación de 680, ¿hasta qué punto, en desviaciones estándar, su calificación se apartó de la media?

b. ¿Qué porcentaje de quienes tomaron el examen obtuvieron una calificación más alta que usted?

6.96 Salarios del profesorado Aun cuando los salarios del profesorado en colegios y universidades en Estados Unidos continúa a la alza, no siempre siguen el paso con el costo de la vida ni con salarios del sector privado. En 2005, el National Center for Educational Services indicó que el salario promedio para profesores auxiliares en colegios públicos de cuatro años era de $50 581.[11] Suponga que estos salarios están normalmente distribuidos con una desviación estándar de $4000.

a. ¿Qué proporción de profesores auxiliares en colegios públicos de cuatro años tendrá salarios menores a $45 000?

b. ¿Qué proporción de estos profesores tendrá salarios entre $45 000 y $55 000?

6.97 Trasplante de células Briggs y King inventaron la técnica de trasplante nuclear, en el que el núcleo de una célula de una de las etapas finales del desarrollo de un embrión es trasplantado en un cigoto (un huevo fertilizado de una sola célula) para ver si el núcleo puede soportar un desarrollo normal. Si la probabilidad de que un solo trasplante de la primera etapa de gástrula sea exitoso es .65, ¿cuál es la probabilidad de que más de 70 trasplantes de entre 100 sean exitosos?

CASO PRÁCTICO

La larga y la corta

Si usted fuera el jefe, ¿la estatura desempeñaría un papel en la selección que haga de un sucesor para el trabajo de usted? En su columna *Fortune*, Daniel Seligman expuso sus ideas respecto a la estatura como factor en la selección que hizo Deng Xiaoping en Hu Yaobang como su sucesor para presidente del Partido Comunista Chino.[12] Como lo dice Seligman, los hechos que rodean el caso levantaron sospechas cuando fueron examinados a la luz de unas estadísticas.

Deng, parece ser, medía sólo 1.50 metros, lo cual es muy poco incluso en China. Por tanto, la selección de Hu Yaobang, que también medía 1.50 metros, levantó (o bajó) algunas cejas porque, como dice Seligman, "las probabilidades contra una decisión de estatura ciega que produjera un presidente de tan poca estatura como Deng son alrededor de 40 a 1". En otras palabras, si tuviéramos la distribución de frecuencia relativa de las estaturas de todos los chinos, sólo 1 en 41 (es decir, 2.4%) mediría 1.50 metros o menos. Para calcular estas probabilidades, Seligman observa que el equivalente chino del U.S. Health Service no existe y por tanto que las estadísticas de salud en la población actual de China son difíciles de ver. Él dice, no obstante, que "se piensa en general que la longitud de un niño al nacer representa 28.6% de su estatura final" y que, en la China antes de la revolución, la longitud promedio de un niño chino al nacer era de 18.9 pulgadas. De esto, Seligman deduce que la estatura media de hombres chinos adultos es

$$\frac{18.9}{.286} = 66.08 \text{ pulgadas, o sea 5 pies 6.08 pulgadas}$$

Entonces él supone que la distribución de las estaturas de hombres en China sigue una distribución normal (“como en Estados Unidos” con una media de 66 pulgadas y una desviación estándar igual a 2.7 pulgadas, “cifra que se ve bien para esa media”.

1. Usando las suposiciones de Seligman, calcule la probabilidad de que un adulto chino, escogido al azar, tenga una estatura menor o igual a 5 pies, o lo que es equivalente, 60 pulgadas de estatura.
2. ¿Los resultados del punto 1 concuerdan con las probabilidades de Seligman?
3. Comente sobre la validez de las suposiciones de Seligman. ¿Hay algunas fallas básicas en su razonamiento?
4. Con base en los resultados de los puntos 1 y 3, ¿piensa usted que Deng Xiaoping tomó en cuenta la estatura para seleccionar a su sucesor?

7

Distribuciones muestrales

OBJETIVOS GENERALES

En los últimos capítulos, estudiamos *poblaciones* y los *parámetros* que las describen. Estas poblaciones eran discretas o continuas y empleamos la *probabilidad* como herramienta para determinar qué tan probables podrían ser ciertos resultados muestrales. En este capítulo, nuestro interés cambia cuando empezamos a estudiar *muestras* y las *estadísticas* que las describen. Estas estadísticas muestrales se usan para hacer inferencias acerca de los correspondientes parámetros de población. Este capítulo comprende muestreo y distribuciones muestrales, que describen el comportamiento de estadísticas muestrales en muestreo repetido.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo probabilidades para la media muestral $\bar{x}$?
¿Cómo calculo probabilidades para la proporción muestral $\hat{p}$?

Muestreo de la Ruleta de Monte Carlo

¿Le gustaría probar su mano en un juego sin correr el riesgo de perder? Usted podría hacerlo simulando el proceso de los juegos de azar, hacer apuestas imaginarias y observar los resultados. Esta técnica, llamada método de Monte Carlo, es el tema del Caso práctico al final de este capítulo.

7.1 INTRODUCCIÓN

MI CONSEJO

Parámetro ⇔ Población
Estadística ⇔ Muestra

En los tres capítulos previos, usted ha aprendido mucho acerca de distribuciones de probabilidad, por ejemplo las distribuciones binomiales y normales. La forma de la distribución normal está determinada por su media μ y su desviación estándar σ, mientras que la forma de la distribución binomial está determinada por p. Estas medidas numéricas descriptivas, llamadas **parámetros**, son necesarias para calcular la probabilidad de observar resultados muestrales.

En situaciones prácticas, usted puede decidir qué *tipo* de distribución de probabilidad usar como modelo, pero los valores de los *parámetros* que especifican su *forma exacta* se desconocen. A continuación veamos dos ejemplos:

- Un entrevistador está seguro de que las respuestas a sus preguntas "de acuerdo/en desacuerdo" seguirán una distribución binomial, pero se desconoce p, la proporción de quienes están "de acuerdo" de la población.
- Un agrónomo cree que la producción por acre de una variedad de trigo está distribuida normalmente en forma aproximada, pero se desconocen la media μ y desviación estándar σ de la producción.

En estos casos, debemos apoyarnos en la *muestra* para saber de estos parámetros. La proporción de quienes están "de acuerdo" en la muestra del entrevistador da información acerca del valor real de p. La media y desviación estándar de la muestra del agrónomo aproximan los valores reales de μ y de σ. ¡Pero, si se desea que la muestra dé *información confiable* acerca de la población, la muestra debe ser seleccionada en cierta forma!

7.2 PLANES MUESTRALES Y DISEÑOS EXPERIMENTALES

La forma en que una muestra se selecciona recibe el nombre de **plan muestral** o **diseño experimental** y determina la cantidad de información de la muestra. Saber el plan muestral empleado en una situación particular permitirá medir la confiabilidad o bondad de la inferencia.

El **muestreo aleatorio simple** es un plan muestral de uso común en el que cada muestra de tamaño n tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. Por ejemplo, supongamos que se desea seleccionar una muestra de tamaño $n = 2$ de una población que contiene $N = 4$ objetos. Si los cuatro objetos están identificados por los símbolos x_1, x_2, x_3 y x_4, hay seis pares distintos que podrían seleccionarse, como se ve en la tabla 7.1. Si la muestra de $n = 2$ observaciones se selecciona de modo que cada una de estas seis muestras tenga la misma probabilidad de selección, dada por 1/6, entonces la muestra resultante se denomina **muestra aleatoria simple** o únicamente **muestra aleatoria**.

TABLA 7.1 **Formas de seleccionar una muestra de tamaño 2 de entre 4 objetos**

Muestra	Observaciones en la muestra
1	x_1, x_2
2	x_1, x_3
3	x_1, x_4
4	x_2, x_3
5	x_2, x_4
6	x_3, x_4

Definición Si una muestra de n elementos se selecciona de entre una población de N elementos, usando un plan muestral en el que cada una de las posibles muestras tiene la misma probabilidad de selección, entonces se dice que el muestreo es **aleatorio** y la muestra resultante es una **muestra aleatoria simple**.

Un muestreo aleatorio perfecto es difícil de obtener en la práctica. Si el tamaño N de la población es pequeño, se podría escribir cada uno de los N números en una ficha, mezclar las fichas y seleccionar una muestra de n fichas. Los números que seleccione corresponden a las n mediciones que aparecen en la muestra. Como este método no siempre es práctico, un método más sencillo y confiable utiliza **números aleatorios**, es decir, dígitos generados de modo que los valores de 0 a 9 se presentan al azar y con igual frecuencia. Estos números pueden ser generados por computadora o pueden incluso aparecer en una calculadora científica. De manera opcional, la tabla 10 del apéndice I es una tabla de números aleatorios que se pueden usar para seleccionar una *muestra aleatoria.*

EJEMPLO 7.1

Una base de datos de computadora en una empresa urbana de abogados contiene archivos para $N = 1000$ clientes. La empresa desea seleccionar $n = 5$ archivos para revisión. Seleccione una muestra aleatoria simple de cinco archivos de esta base de datos.

Solución Primero debe marcar cada archivo con un número de 1 a 1000. Quizá los archivos se guarden alfabéticamente y la computadora ya ha asignado un número a cada uno. A continuación genere una secuencia de 10 números aleatorios de tres dígitos. Si está usando la tabla 10 del apéndice I, seleccione un punto inicial aleatorio y use una parte de la tabla similar a la de la tabla 7.2. El punto inicial aleatorio asegura que usted no use la misma secuencia una y otra vez. Los primeros tres dígitos de la tabla 7.2 indican el número del primer archivo a revisarse. El número aleatorio 001 corresponde al archivo #1 y el último archivo, #1000 corresponde al número aleatorio 000. Usando la tabla 7.2, se escogerían los cinco archivos numerados 155, 450, 32, 882 y 350 para revisión. De manera opcional, podría escoger leer en sentido horizontal las líneas y escoger los archivos 155, 350, 989, 450 y 369 para revisión.

TABLA 7.2 **Parte de una tabla de números aleatorios**

15574	35026	98924
45045	36933	28630
03225	78812	50856
88292	26053	21121

La situación descrita en el ejemplo 7.1 se denomina **estudio observacional**, porque los datos ya existían antes que usted decidiera *observar* o describir las características de ellos. La mayor parte de los estudios muestrales, en los que la información se capta con un cuestionario, caen en esta categoría. Las bases de datos de computadora hacen posible asignar números de identificación a cada elemento aun cuando la población sea grande y seleccionar una muestra aleatoria simple. Tenga cuidado al efectuar un *estudio muestral* y esté atento a estos problemas que se presentan con frecuencia:

- **No respuesta:** Usted ha seleccionado su muestra aleatoria y enviado sus cuestionarios, pero sólo 50% de los entrevistados devolvió sus cuestionarios. ¿Las respuestas que usted recibió son representativas de toda la población o están **sesgadas** porque sólo quienes eran particularmente obstinados en el tema fueron escogidos para responder?

- **Cobertura demasiado baja:** Usted ha seleccionado su muestra aleatoria usando registros telefónicos como una base de datos. ¿La base de datos que usó sistemáticamente excluye ciertos segmentos de la población, quizá aquellos que no tienen teléfono?
- **Sesgo verbal:** El cuestionario de usted puede tener preguntas que son demasiado complicadas o tienden a confundir al lector. Posiblemente las preguntas son sensibles por naturaleza, por ejemplo, "¿Alguna vez ha consumido usted drogas?" o "¿Alguna vez ha engañado en su declaración de impuestos?" y quienes responden no contestan con la verdad.

Se han diseñado métodos para resolver algunos de estos problemas, pero sólo si usted sabe que existen. Si su encuesta está *sesgada* por cualquiera de estos problemas, entonces sus conclusiones no serán muy confiables, aunque haya seleccionado una muestra aleatoria.

Alguna investigación realizada comprende la **experimentación**, en la que una condición experimental o *tratamiento* se impone en las *unidades experimentales.* Seleccionar una muestra aleatoria simple es más difícil en esta situación.

EJEMPLO 7.2

Una química investigadora está sometiendo a prueba un nuevo método para medir la cantidad de titanio (Ti) en muestras de mineral. Ella selecciona 10 muestras de mineral del mismo peso para su experimento. Cinco de las muestras se medirán usando un método estándar y las otras cinco usando el nuevo método. Use números aleatorios para asignar las 10 muestras de mineral a los grupos nuevo y estándar. ¿Estos datos representan una muestra aleatoria simple de entre la población?

Solución Hay realmente dos poblaciones en este experimento. Están formadas por mediciones de titanio, usando ya sea el método nuevo o el estándar, para *todas las posibles* muestras de mineral de este peso. Estas poblaciones no existen en realidad; son **poblaciones hipotéticas**, imaginadas en la mente de la investigadora. Entonces, es imposible seleccionar una muestra aleatoria simple usando los métodos del ejemplo 7.1. En cambio, la investigadora selecciona lo que ella cree que son 10 muestras *representativas* de mineral y espera que estas muestras se *comportarán como si* se hubieran seleccionado al azar de las dos poblaciones.

La investigadora puede, no obstante, seleccionar al azar las cinco muestras a medir con cada método. Numere las muestras del 1 al 10. Las cinco muestras seleccionadas para el nuevo método pueden corresponder a cinco números aleatorios de un dígito. Use esa secuencia de dígitos aleatorios generados en una calculadora científica:

948247817184610

Como no se puede seleccionar dos veces la misma muestra de mineral, hay que saltarse cualquier dígito que ya haya sido escogido. Las muestras 9, 4, 8, 2 y 7 se medirán usando el nuevo método. Las otras muestras, es decir 1, 3, 5, 6 y 10, se medirán usando el método estándar.

Además del *muestreo aleatorio simple*, hay otros planes muestrales con carácter aleatorio y, por tanto, dan una base probabilista para hacer inferencias. Tres de esos planes están basados en *muestreo estratificado, conglomerado* y *sistemático.*

Cuando la población está formada por dos o más subpoblaciones, llamadas **estratos**, un plan muestral que asegura que cada subpoblación está representada en la muestra se denomina **muestra aleatoria estratificada**.

Definición Un **muestreo aleatorio estratificado** comprende seleccionar una muestra aleatoria simple de cada uno de un número dado de subpoblaciones o **estratos**.

Las opiniones de la ciudadanía, acerca de la construcción de un centro de artes interpretativas, podrían ser recolectadas usando una muestra aleatoria estratificada con distritos de votación urbanos como estratos. Las votaciones nacionales suelen comprender alguna forma muestral aleatorio estratificado con estados como estratos.

Se utiliza otra forma muestral aleatorio cuando las unidades muestrales disponibles son grupos de elementos, llamados **conglomerados**. Por ejemplo, una familia es un *conglomerado* de personas que viven juntas. Una manzana o vecindario de una ciudad podrían ser una cómoda unidad muestral y podría ser considerada un *conglomerado* para un plan determinado muestral.

Definición Una **muestra de conglomerados** es una simple muestra aleatoria tomada de los conglomerados disponibles en la población.

Cuando un conglomerado particular se incluye en la muestra, se toma un censo de cada uno de los elementos del conglomerado.

A veces la población a ser muestreada está ordenada, por ejemplo una lista alfabetizada de personas con licencias de manejo, una lista de usuarios de la compañía de luz por direcciones de servicio o una lista de clientes por números de cuenta. En estas y otras situaciones, se escoge un elemento al azar de los primeros k elementos y, a continuación, cada k-ésimo elemento de ahí en adelante se incluye en la muestra.

Definición Una **muestra aleatoria sistemática 1 en *k*** involucra la selección aleatoria de uno de los primeros k elementos de una población ordenada y luego la selección sistemática de cada k-ésimo elemento de ahí en adelante.

MI CONSEJO

Todos los planes muestral empleados para hacer inferencias comprenden el *proceso aleatorio*.

No todos los planes muestrales, sin embargo, comprenden una selección aleatoria. Es probable que usted haya oído de las encuestas telefónicas no aleatorias, en las que las personas que desean expresar apoyo a una pregunta llaman a un "número 900" y los que se oponen llaman a un segundo "número 900". Cada persona debe pagar por su llamada. Es obvio que quienes llaman no representan la población en general. Este tipo muestral es una forma de una **muestra de conveniencia**, es decir, una muestra que se puede obtener de manera fácil y sencilla sin selección aleatoria. Hacer publicidad a personas a quienes se les pagará una cuota por participar en un experimento produce una muestra de conveniencia. El **muestreo de juicio** permite que la persona que haga el muestreo decida quién estará o no incluido en la muestra. El **muestreo de cuota**, en el que la composición de la muestra debe reflejar la composición de la población en alguna característica preseleccionada, con frecuencia tiene un componente no aleatorio en el proceso de selección. **Recuerde que las muestras no aleatorias se pueden describir pero no se pueden usar para hacer inferencias**.

7.2 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

7.1 Una población está formada por $N = 500$ unidades experimentales. Use una tabla numérica aleatoria para seleccionar una muestra aleatoria de $n = 20$ unidades experimentales. (SUGERENCIA: Como es necesario usar números de tres dígitos, se pueden asignar dos números de tres dígitos a cada una de las unidades muestrales en la forma ilustrada en la tabla.) ¿Cuál es la probabilidad de que cada unidad experimental sea seleccionada para su inclusión en la muestra?

Unidades experimentales	Números aleatorios
1	001, 501
2	002, 502
3	003, 503
4	004, 504
.	.
.	.
.	.
499	499, 999
500	500, 000

7.2 Un analista político desea seleccionar una muestra de $n = 20$ personas de entre una población de 2000. Use la tabla numérica aleatoria para identificar las personas a ser incluidas en la muestra.

7.3 Una población contiene 50 mil votantes. Use la tabla numérica aleatoria para identificar los votantes a ser incluidos en una muestra aleatoria de $n = 15$.

7.4 Una pequeña ciudad contiene 20 mil votantes. Use la tabla numérica aleatoria para identificar los votantes a ser incluidos en una muestra aleatoria de $n = 15$.

7.5 Cada décima persona Una muestra aleatoria de opinión pública, en una pequeña ciudad, se obtuvo al seleccionar cada décima persona que pasara por la esquina de mayor movimiento en el centro de la ciudad. ¿Esta muestra tendrá las características de una muestra aleatoria seleccionada de entre los ciudadanos? Explique.

7.6 Parques y recreación Se envió por correo un cuestionario a mil votantes municipales registrados seleccionados al azar. Sólo 500 cuestionarios fueron devueltos y, de éstos, 360 que contestaron se oponían rotundamente a un recargo propuesto para sostener al Departamento de Parques y Recreación de la ciudad. ¿Está usted dispuesto a aceptar la cifra de 72% como estimación válida del porcentaje en la ciudad que se oponen al recargo? ¿Por qué sí o por qué no?

7.7 Listas del DMV En muchos estados, unas listas de posibles miembros de jurados se conforman a partir de listas de registro de votantes, así como de registros del Departamento de Vehículos a Motor o conductores con licencia de manejo y propietarios de autos. ¿En qué formas podría esta lista no cubrir adecuadamente ciertos sectores de la población?

7.8 Sexo y violencia Una pregunta en un cuestionario de cierta encuesta dice: "¿No está usted de acuerdo en que hay demasiado sexo y violencia durante las mejores horas en televisión?" Comente sobre posibles problemas con las respuestas a esta pregunta. Sugiera una mejor forma de plantear la pregunta.

APLICACIONES

7.9 Cáncer en ratas La publicación *Press Enterprise* identificó un producto derivado de la cloración llamado MX que ha estado ligado al cáncer en ratas.[1] Un científico desea realizar un estudio de validación usando 25 ratas en el grupo experimental, cada una va a recibir una dosis fija de MX y 25 ratas en un grupo de control que no recibirá el MX. Determine el esquema de aleatoriedad para asignar las 50 ratas individuales a los dos grupos.

7.10 ¿Sesgo racial? ¿Es importante la carrera de un entrevistador? Esta pregunta fue investigada por Chris Gilberg y colegas, y publicada en una edición de la revista *Chance*.[2] El entrevistador preguntaba: "¿Piensa usted que la acción afirmativa debe usarse como criterios de selección de ocupación?" con posibles respuestas de sí o no.

a. ¿Qué problemas podría usted esperar con respuestas a esta pregunta cuando las hacen entrevistadores de diferentes orígenes étnicos?

b. Cuando las personas eran entrevistadas por un afroamericano, la respuesta era alrededor de 70% a favor de una acción afirmativa, aproximadamente 35% cuando eran entrevistadas por un asiático y alrededor de 25% cuando eran entrevistadas por un caucásico. ¿Estos resultados apoyan su respuesta al inciso a)?

7.11 Juventud de americanos nativos En el *American Journal of Human Biology*, Chery Smith y Stefanie Fila publicaron un estudio acerca de jóvenes americanos nativos citadinos.[3] El objetivo del estudio era determinar lo apropiado de una herramienta de evaluación para identificar medidas de dieta para uso en esta población. Los sujetos eran jóvenes americanos nativos que estudiaban en un programa después de clase en Minneapolis, MN. Los 61 niños entre 9 y 13 años de edad que cumplieron con los requisitos de los objetivos de estudio fueron incluidos en el experimento.

a. Describa el plan muestral empleado para seleccionar participantes de estudio.

b. ¿Qué mecanismo de probabilidad se utilizó para seleccionar esta muestra de 61 adolescentes americanos nativos de 9 a 13 años de edad?

c. ¿Se pueden hacer inferencias válidas usando los resultados de este estudio? ¿Por qué sí o por qué no?

d. Si usted tuviera que idear un plan alternativo muestral, ¿qué cambiaría?

7.12 Adelgazador de sangre Se realizó un estudio de un adelgazador experimental de sangre, para determinar si funciona mejor que la simple tableta de aspirina para proteger de ataques al corazón y de apoplejías.[4] El estudio, publicado en la *Press Enterprise*, comprendió 19 185 personas que habían sufrido de ataques al corazón, apoplejías o dolor de arterias obstruidas. Cada una de estas personas fue asignada para tomar ya fuera la aspirina o el medicamento experimental de 1 a 3 años. Suponga que cada una tenía la misma probabilidad de ser asignada a una de las dos medicaciones.

a. Diseñe un plan para hacer aleatoria la asignación de medicaciones a los pacientes.

b. ¿Habrá igual número de pacientes en cada grupo de tratamiento? Explique.

7.13 A la Luna Dos encuestas Gallup diferentes se llevaron a cabo para *CNN/USA Today*, donde aparecía lo que pensaba la sociedad acerca del programa espacial de Estados Unidos.[5] Veamos a continuación una pregunta de cada encuesta, junto con las respuestas de los estadounidenses encuestados

Exploración espacial

Encuesta Gallup/CNN/USA Today: Dic.5-7, 2003: nacional:

"¿Estaría usted a favor o en contra de un nuevo programa espacial de Estados Unidos para enviar astronautas a la Luna?", Forma A (N = 510, MoE ± 5)

	A favor %	En contra %	No tiene opinión %
12/03	53	45	2

"¿Estaría usted a favor o en contra de que el gobierno gaste miles de millones de dólares para enviar astronautas a la Luna?", Forma B (N = 494, MoE ± 5)

	A favor %	En contra %	No tiene opinión %
12/03	31	67	2

a. Lea las dos preguntas de la encuesta. ¿Cuál de las dos redacciones está más insesgada? Explique.

b. Vea las respuestas para las dos encuestas. ¿Cómo explicaría usted las grandes diferencias en los porcentajes ya sea a favor o en contra del nuevo programa?

7.14 Estados Unidos, ¡pregunta! Una encuesta de la política nacional, titulada "Estados Unidos, ¡pregunta!" fue enviada por la Comisión Nacional Republicana al Congreso a votantes del 49 Distrito del Congreso, pidiendo opiniones en varios asuntos políticos.[6] A continuación veamos algunas preguntas de la encuesta:

- En años recientes, ¿el gobierno federal ha intervenido más, o menos, en los asuntos personales o profesionales de usted?
- ¿Tiene razón el presidente al tratar de refrenar el tamaño y alcance del gobierno federal, contra los deseos de los cinco grandes demócratas?
- ¿Piensa que la pena de muerte es un factor disuasivo para la delincuencia?
- ¿Está usted de acuerdo que a los demócratas obstruccionistas no se les permita obtener el control del Congreso de Estados Unidos en las próximas elecciones?

Comente sobre el efecto del sesgo en la redacción sobre las respuestas reunidas usando esta encuesta.

7.3 ESTADÍSTICA Y DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Cuando se selecciona una muestra aleatoria de una población, las medidas numéricas descriptivas que se calculen de la muestra se denominan **estadísticas**. Las estadísticas varían o cambian para cada muestra aleatoria diferente que se escoja; esto es, son *variables aleatorias.* Las distribuciones de probabilidad para estadísticas se llaman **distribuciones muestrales** porque, en muestreos repetidos, dan esta información:

- Qué valores de la estadística pueden presentarse
- Con qué frecuencia se presenta cada valor

Definición La **distribución muestral de una estadística** es la distribución de probabilidad para los posibles valores de la estadística, que resulta cuando muestras aleatorias de tamaño n se sacan repetidamente de la población.

Hay tres formas de hallar la distribución muestral de una estadística:

1. Deducir la distribución *matemáticamente* usando las leyes de probabilidad.
2. Usar una *simulación* para aproximar la distribución. Esto es, saque un gran número de muestras de tamaño n, calculando el valor de la estadística para cada muestra y tabule los resultados en un histograma de frecuencia relativa. Cuando

el número de muestras es grande, el histograma será muy cercano a la distribución teórica muestral.

3. Usar *teoremas estadísticos* para obtener distribuciones muestrales exactas o aproximadas.

El siguiente ejemplo demuestra cómo deducir las distribuciones muestrales de dos estadísticas para una población muy pequeña.

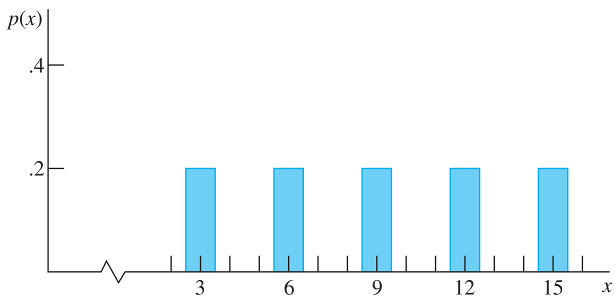
EJEMPLO 7.3

Una población está formada por $N = 5$ números: 3, 6, 9, 12, 15. Si una muestra aleatoria de tamaño $n = 3$ se selecciona sin reemplazo, encuentre las distribuciones muestrales para la media muestral $\bar{x}$ y la mediana m.

Solución Usted está muestreando de entre la población que aparece en la figura 7.1. Contiene cinco números distintos y cada uno es igualmente probable, con probabilidad $p(x) = 1/5$. Con facilidad puede hallar la media poblacional y mediana como

$$\mu = \frac{3 + 6 + 9 + 12 + 15}{5} = 9 \quad \text{y} \quad M = 9$$

FIGURA 7.1
Histograma de probabilidad para los $N = 5$ valores poblacionales del ejemplo 7.3



MI CONSEJO
Las distribuciones muestrales pueden ser discretas o continuas.

Hay 10 posibles muestras aleatorias de tamaño $n = 3$ y cada una de ellas es igualmente probable, con probabilidad 1/10. Estas muestras, junto con los valores calculados de $\bar{x}$ y m para cada una, se ven en la tabla 7.3. Usted observará que algunos valores de $\bar{x}$ son más probables que otros porque se presentan en más de una muestra. Por ejemplo,

$$P(\bar{x} = 8) = \frac{2}{10} = .2 \quad \text{y} \quad P(m = 6) = \frac{3}{10} = .3$$

Los valores de la tabla 7.3 están tabulados, y las distribuciones muestrales para $\bar{x}$ y m se ven en la tabla 7.4 y la figura 7.2.

Como la población de $N = 5$ valores es simétrica cerca del valor de $x = 9$, la *media poblacional* y la *mediana* son iguales a 9. Parecería razonable, por tanto, considerar usar ya sea $\bar{x}$ o m como estimador posible de $M = \mu = 9$. ¿Cuál estimador escogería usted? De la tabla 7.3 se ve que, al usar m como estimador, estaría en un error de $9 - 6 = 3$ con probabilidad .3 o de $9 - 12 = -3$ con probabilidad .3. Esto es, el error en estimación usando m sería 3 con probabilidad .6. Al usar $\bar{x}$, no obstante, un error de 3 ocurriría con probabilidad de sólo .2. Sólo en estos casos, podría usarse $\bar{x}$ como estimador en preferencia sobre m.

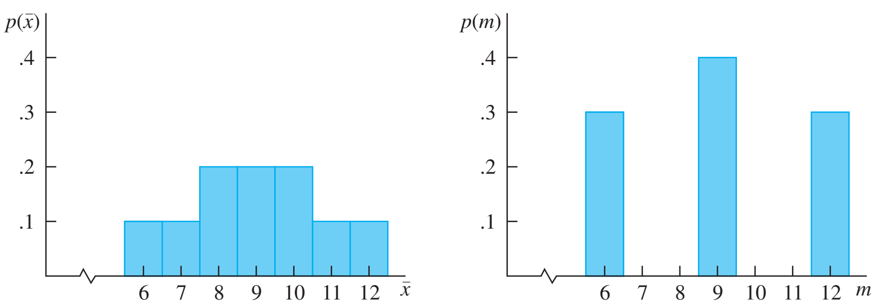
TABLA 7.3 **Valores de $\bar{x}$ y m para muestreo aleatorio simple cuando $n = 3$ y $N = 5$**

Muestra	Valores muestrales	$\bar{x}$	m
1	3, 6, 9	6	6
2	3, 6, 12	7	6
3	3, 6, 15	8	6
4	3, 9, 12	8	9
5	3, 9, 15	9	9
6	3, 12, 15	10	12
7	6, 9, 12	9	9
8	6, 9, 15	10	9
9	6, 12, 15	11	12
10	9, 12, 15	12	12

TABLA 7.4 **Distribuciones muestrales para a) la media muestral y b) la mediana muestral**

a)	$\bar{x}$	$p(\bar{x})$	*b)*	m	$p(m)$
	6	.1		6	.3
	7	.1		9	.4
	8	.2		12	.3
	9	.2			
	10	.2			
	11	.1			
	12	.1			

FIGURA 7.2
Histogramas de probabilidad para las distribuciones muestrales de la media muestral, $\bar{x}$ y la mediana muestral, m, del ejemplo 7.3



MI CONSEJO
Casi toda estadística tiene una media y una desviación estándar (o *error estándar*) que describe su centro y dispersión.

No fue difícil deducir estas distribuciones muestrales en el ejemplo 7.3 porque el número de elementos en la población era muy pequeño. Cuando éste no es el caso, puede que sea necesario usar uno de estos métodos:

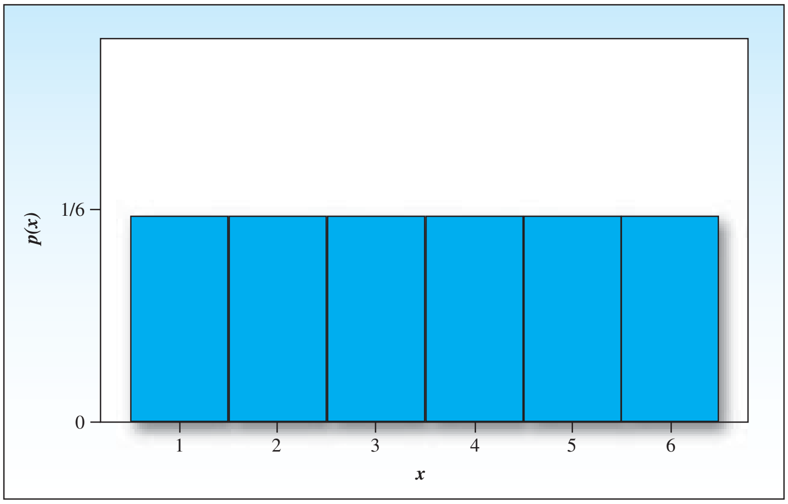
- Use una simulación para aproximar la distribución muestral de manera empírica.
- Apóyese en teoremas estadísticos y resultados teóricos.

Un teorema estadístico importante, que describe la distribución muestral de estadísticas que son sumas o promedios, se presenta en la siguiente sección.

7.4 EL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

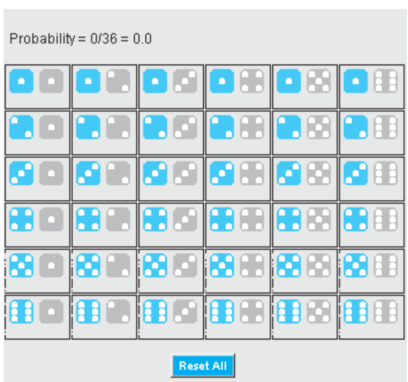
El **teorema del límite central** dice que, bajo condiciones más bien generales, las sumas y medias de muestras aleatorias de mediciones tomadas de una población tienden a tener una distribución aproximadamente normal. Suponga que se tira un dado balanceado $n = 1$ vez. La variable aleatoria x es el número observado en la cara superior. Esta variable aleatoria conocida puede tomar seis valores, cada uno con probabilidad 1/6 y su distribución de probabilidad se muestra en la figura 7.3. La forma de la distribución es *plana* o *uniforme* y simétrica alrededor de la media $\mu = 3.5$, con una desviación estándar $\sigma = 1.71$. (Véase la sección 4.8 y el ejercicio 4.84.)

FIGURA 7.3
Distribución de probabilidad para x, el número que aparece en un solo tiro de un dado



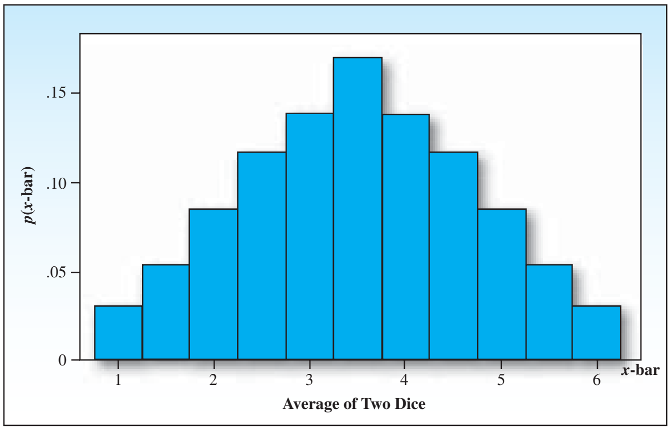
Ahora, tome un tamaño muestral de $n = 2$ de esta población; esto es, tire dos veces el dado y registre la suma de los números de las dos caras superiores, $\Sigma x_i = x_1 + x_2$. La tabla 7.5 muestra los 36 posibles resultados, cada uno con probabilidad 1/36. Las sumas están tabuladas y cada una de las posibles sumas está dividida entre $n = 2$ para obtener un promedio. El resultado es la **distribución muestral** de $\bar{x} = \Sigma x_i/n$, que se ve en la figura 7.4. Usted debe observar la considerable diferencia en la forma de la distribución muestral. Ahora tiene casi forma de montículo pero todavía es simétrica alrededor de la media $\mu = 3.5$.

TABLA 7.5 **Sumas de las caras superiores de dos dados**



	Primer dado					
Segundo dado	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

FIGURA 7.4
Distribución muestral de $\bar{x}$ para $n = 2$ dados



Usando el *MINITAB*, generamos las distribuciones muestrales de $\bar{x}$ cuando $n = 3$ y $n = 4$. Para $n = 3$, la distribución muestral de la figura 7.5 con toda claridad muestra la forma de montículo de la distribución normal de probabilidad, todavía centrada en $\mu = 3.5$. Observe también que la dispersión de la distribución es lentamente *decreciente* cuando *aumenta* el tamaño muestral n. La figura 7.6 muestra la forma espectacular que la distribución de $\bar{x}$ está distribuida normalmente en forma aproximada con base en una muestra de sólo $n = 4$. Este fenómeno es el resultado de un importante teorema estadístico llamado **teorema del límite central** (**TLC**).

FIGURA 7.5
Distribución muestral *MINITAB* de $\bar{x}$ para $n = 3$ dados

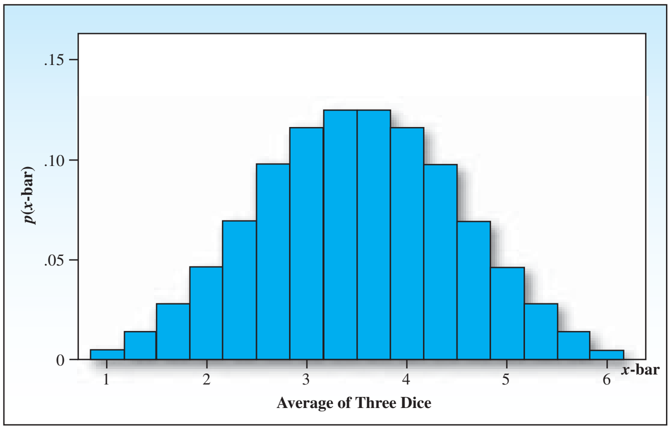
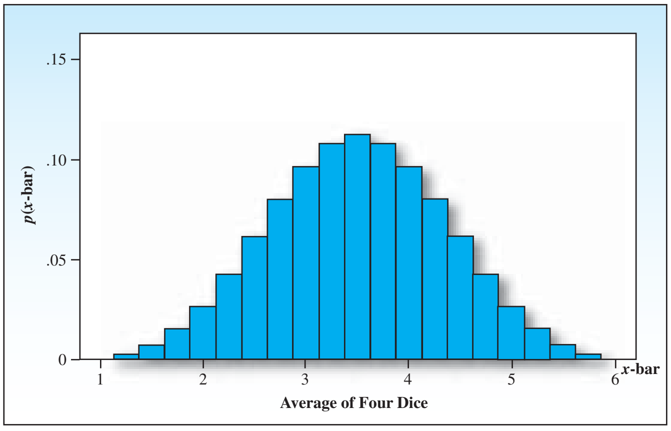


FIGURA 7.6
Distribución muestral *MINITAB* de $\bar{x}$ para $n = 4$ dados



Teorema del límite central

Si muestras aleatorias de n observaciones se sacan de una población no normal con media finita μ y desviación estándar σ, entonces, cuando n es grande, la distribución de muestreo de la media muestral $\bar{x}$ está distribuida normalmente en forma aproximada, con media μ y desviación estándar

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La aproximación se hace más precisa cuando n se hace grande.

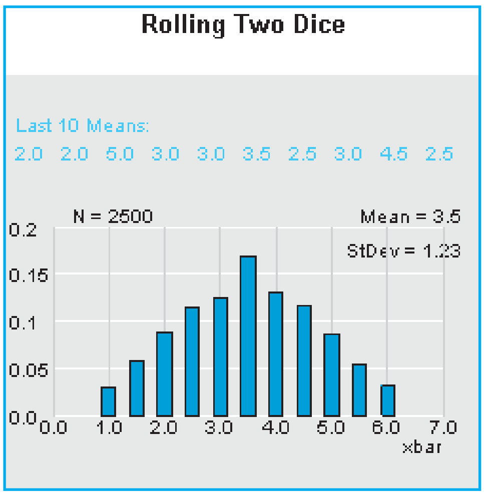
Cualquiera que sea su forma, la distribución muestral de $\bar{x}$ siempre tiene una media idéntica a la media de la población muestreada y una desviación estándar igual a la desviación poblacional estándar σ dividida entre $\sqrt{n}$. En consecuencia, *la dispersión de la distribución de medias muestrales es considerablemente menor que la dispersión de la población muestreada.*

El teorema del límite central se puede expresar de otro modo para aplicar a la **suma de las mediciones muestrales Σx_i**, que, cuando n se hace grande, también tiene una distribución aproximadamente normal con media $n\mu$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{n}$.

MI APPLET

El applet Java llamado **The Central Limit Theorem** (**El teorema del límite central**) se puede usar para efectuar una *simulación* para las distribuciones muestrales del promedio de uno, dos, tres o cuatro dados. La figura 7.7 muestra el applet después de que el par de dados ($n = 2$) ha sido tirado 2500 veces. Esto no es tan difícil como parece, puesto que sólo hay que presionar el botón Roll 100 Sets 25 veces. La simulación muestra los posibles valores para $\bar{x} = \Sigma x_i/10$ y también muestra la media y desviación estándar para estas 2500 mediciones. La media, 3.5, es exactamente igual a $\mu = 3.5$. ¿Cuál es la desviación estándar para estas 2500 mediciones? ¿Es cercana al valor teórico, $\sigma/\sqrt{n} = \dfrac{1.71}{\sqrt{2}} = 1.21$? Usaremos este applet otra vez para los ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

FIGURA 7.7
Applet Central Limit Theorem (Teorema del límite central)



MI CONSEJO

La distribución muestral de $\bar{x}$ siempre tiene una media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$. El teorema del límite central ayuda a describir su **forma.**

La aportación importante del teorema del límite central está en la inferencia estadística. Muchos estimadores que se usan para hacer inferencias acerca de parámetros poblacionales son sumas o promedios de las mediciones muestrales. Cuando el tamaño muestral es grande lo suficiente, se puede esperar que estos estimadores tengan distribuciones muestral que sean aproximadamente normales. Entonces se puede usar la distribución normal para describir el comportamiento de estos estimadores en muestreo repetido y evaluar la probabilidad de observar ciertos resultados muestrales. Al igual que en el capítulo 6, estas probabilidades se calculan usando la variable aleatoria normal estándar

$$z = \frac{\text{Estimador} - \text{Media}}{\text{Desviación estándar}}$$

Cuando vuelva usted a leer el teorema del límite central, podrá ver que la aproximación es válida mientras el tamaño muestral n sea "grande", pero ¿qué tan grande es "grande"? Desafortunadamente, no hay una respuesta clara a esta pregunta. El valor apropiado de n depende de la forma de la población de la cual se muestrea, y cómo se desea usar la aproximación. No obstante, ayudan estas guías:

¿CÓMO DETERMINO CUÁNDO EL TAMAÑO MUESTRAL ES LO SUFICIENTE GRANDE?

- Si la población muestreada es **normal**, entonces la distribución muestral de $\bar{x}$ también será normal, sin importar cuál sea el tamaño de la muestra que se escoja. Este resultado se puede demostrar en forma teórica, pero no debe ser demasiado difícil aceptarla sin prueba.
- Cuando la población muestreada es aproximadamente **simétrica**, la distribución muestral de $\bar{x}$ se hace también aproximadamente normal para valores relativamente pequeños de n. Recuerde la rapidez con la que la distribución "plana" del ejemplo de los dados tomó la forma de montículo ($n = 3$).
- Cuando la población muestreada está **sesgada**, el tamaño muestral n debe ser más grande, con n al menos 30 antes que la distribución muestral de $\bar{x}$ se haga aproximadamente normal.

Estas guías sugieren que, para muchas poblaciones, la distribución muestral de $\bar{x}$ será aproximadamente normal para tamaños muestrales moderados: una excepción a esta regla se presenta al muestrear una población binomial cuando p o $q = (1 - p)$ es muy pequeña. Cuando aparezcan aplicaciones específicas del teorema del límite central, daremos el tamaño muestral apropiado n.

7.5 LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA MUESTRAL

Si la media poblacional μ es desconocida, se pueden seleccionar varias *estadísticas* como estimador; la media muestral $\bar{x}$ y la mediana muestral m son dos que con facilidad llegan a nuestra mente. ¿Cuál debe usarse? Considere estos criterios al seleccionar el estimador para μ:

- ¿Es fácil o difícil de calcular?
- ¿Produce estimaciones que sean demasiado altas o demasiado bajas de manera consistente?
- ¿Es más o menos variable que otros estimadores posibles?

Las distribuciones muestrales para $\bar{x}$ y m con $n = 3$ para la pequeña población del ejemplo 7.3 mostraron que, en términos de estos criterios, la media muestral funcionó mejor que la mediana muestral como estimador de μ. En muchas situaciones, la media muestral $\bar{x}$ tiene propiedades deseables como un estimador que no son compartidas por otros estimadores competidores; por tanto, se emplea en forma más general.

LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA MUESTRAL, $\bar{x}$

- Si una muestra aleatoria de n mediciones se selecciona de una población con media μ y desviación estándar σ, la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$ tendrá media μ y desviación estándar†

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Si la población tiene una distribución *normal*, la distribución muestral de $\bar{x}$ estará *exactamente* distribuida en forma normal, *cualquiera que sea el tamaño muestral* n.
- Si la distribución poblacional es *no normal*, la distribución muestral de $\bar{x}$ estará distribuida normalmente *en forma aproximada* para muestras grandes (por el teorema del límite central).

Error estándar

Definición La desviación estándar de una estadística empleada como estimador de un parámetro poblacional también se denomina **error estándar del estimador** (abreviado **SE**) porque se refiere a la precisión denomina. Por tanto, la desviación estándar de $\bar{x}$, dada por $\sigma/\sqrt{n}$, se conoce como **error estándar de la media** (abreviada SE($\bar{x}$) o sólo SE).

† Cuando muestras repetidas de tamaño n se seleccionan al azar de entre una población *finita* con N elementos cuya media sea μ y cuya varianza sea σ^2, la desviación estándar de $\bar{x}$ es

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

donde σ^2 es la varianza poblacional. Cuando N es grande con respecto al tamaño muestral n, $\sqrt{(N-n)(N-1)}$ es aproximadamente igual a 1, y la desviación estándar de $\bar{x}$ es

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo probabilidades para la media muestral $\bar{x}$?

Si se sabe que la distribución muestral de $\bar{x}$ es *normal* o *normalmente aproximada*, se puede describir el comportamiento de la media muestral $\bar{x}$ al calcular la probabilidad de observar ciertos valores de $\bar{x}$ en muestreo repetido.

1. Encuentre μ y calcule SE $(\bar{x}) = \sigma/\sqrt{n}$.
2. Escriba el evento de interés en términos de $\bar{x}$ y localice el área apropiada en la curva normal.
3. Convierta los valores necesarios de $\bar{x}$ en valores z usando

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

4. Use la tabla 3 del apéndice I para calcular la probabilidad.

Repertorio de ejercicios (Llene los espacios en blanco)

A. Usted toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$ de una distribución con media $\mu = 75$ y $\sigma = 12$. La distribución muestral de $\bar{x}$ será aproximadamente ________ con una media de ______ y una desviación estándar (o error estándar) de ______.

B. Para hallar la probabilidad de que la media muestral exceda de 80, anote el evento de interés. ______
Cuando $\bar{x} = 80$,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \underline{\qquad}$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\bar{x} > \underline{\qquad}) = P(z > \underline{\qquad}) = 1 - \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

C. Para hallar la probabilidad de que la media muestral sea entre 70 y 72, anote el evento de interés. ______
Cuando $\bar{x} = 70$ y $\bar{x} = 72$,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \underline{\qquad} \text{ y } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \underline{\qquad}$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\underline{\qquad} < \bar{x} < \underline{\qquad}) = P(\underline{\qquad} < z < \underline{\qquad})$$
$$= \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina la tabla z? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

EJEMPLO 7.4

La duración de la enfermedad de Alzheimer desde el principio de síntomas hasta el fallecimiento varía de 3 a 20 años; el promedio es 8 años con una desviación estándar de 4 años. El administrador de un gran centro médico al azar selecciona los registros médicos de 30 pacientes de Alzheimer ya fallecidos, de la base de datos del centro médico y anota la duración promedio. Encuentre las probabilidades aproximadas para estos eventos:

1. La duración promedio es menor a 7 años.
2. La duración promedio excede de 7 años.
3. La duración promedio está a no más de 1 año de la media poblacional $\mu = 8$.

MI CONSEJO

Si x es normal, $\bar{x}$ es normal para cualquier n.

Si x no es normal, $\bar{x}$ es aproximadamente normal para n grande.

Solución Como el administrador ha seleccionado una muestra grande de la base de datos en este centro médico, puede sacar conclusiones acerca de pacientes pasados, presentes o futuros con enfermedad de Alzheimer en este centro médico. Si, por el contrario, este centro médico puede ser considerado como representativo de otros centros médicos del país, puede ser posible sacar conclusiones de más largo alcance.

¿Qué se puede decir acerca de la forma de la población muestreada? No es simétrica, porque la media $\mu = 8$ no está a la mitad entre los valores máximo y mínimo. Como la media está más cercana al valor mínimo, la distribución está sesgada a la derecha, con unos pocos pacientes viviendo largo tiempo después que principia la enfermedad. Cualquiera que sea la forma de la distribución poblacional, no obstante, la distribución muestral de $\bar{x}$ tiene una media de $\mu = 8$ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n} = 4/\sqrt{30} = .73$. Además, como el tamaño muestral es $n = 30$, el teorema del límite central asegura la normalidad aproximada de la distribución muestral de $\bar{x}$.

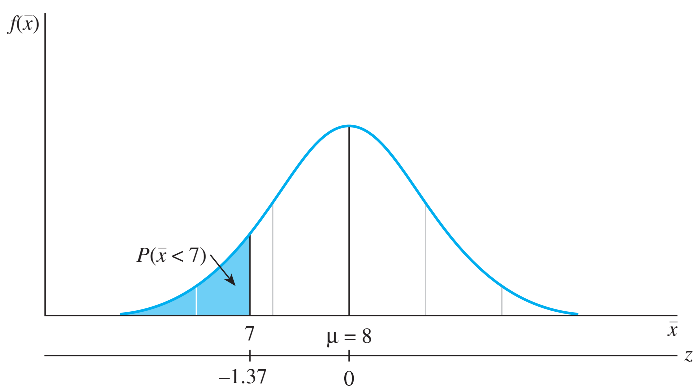
1. La probabilidad de que $\bar{x}$ sea menor a 7 está dada por el área sombreada de la figura 7.8. Para hallar esta área, es necesario calcular el valor de z correspondiente a $\bar{x} = 7$:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7 - 8}{.73} = -1.37$$

De la tabla 3 del apéndice I se puede hallar el área acumulativa correspondiente a $z = -1.37$ y

$$P(\bar{x} < 7) = P(z < -1.37) = .0853$$

FIGURA 7.8
Probabilidad de que $\bar{x}$ sea menor a 7 para el ejemplo 7.4



[NOTA: Se debe usar $\sigma/\sqrt{n}$ (no σ) en la fórmula para z porque estamos buscando un área bajo la distribución muestral para $\bar{x}$, no bajo la distribución de probabilidad para x.]

MI CONSEJO

Recuerde que para variables aleatorias continuas, no hay probabilidad asignada a un punto solo. Por tanto, $P(\bar{x} \le 7) = P(\bar{x} < 7)$.

2. El evento de que $\bar{x}$ exceda de 7 es el complemento del evento que $\bar{x}$ sea menor a 7. Entonces, la probabilidad de que $\bar{x}$ exceda de 7 es

$$P(\bar{x} > 7) = 1 - P(\bar{x} \le 7)$$
$$= 1 - .0853 = .9147$$

3. La probabilidad de que $\bar{x}$ se encuentre a no más de 1 año de $\mu = 8$ es el área sombreada en la figura 7.9. El valor z correspondiente a $\bar{x} = 7$ es $z = -1.37$, del inciso 1 y el valor z para $\bar{x} = 9$ es

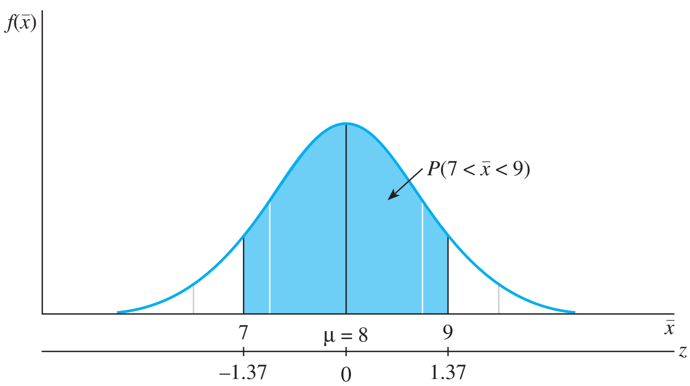
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{9 - 8}{.73} = -1.37$$

La probabilidad de interés es

$$P(7 < \bar{x} < 9) = P(-1.37 < z < 1.37)$$
$$= .9147 - .0853 = .8294$$

FIGURA 7.9

La probabilidad de que $\bar{x}$ se encuentre a no más de 1 año de $\mu = 8$ para el ejemplo 7.4



MI APPLET

El ejemplo 7.4 se puede resolver usando el applet **Normal Probabilities for Means (Probabilidades normales para medias)**. Si usted teclea los valores para $\bar{x}$, σ, μ y n (presiona “Enter” para registrar cada uno de los cambios) y ajusta la lista descendente que está en la parte inferior del applet, puede calcular el área a la derecha o izquierda de z_0, el área en dos colas o el área entre $-z_0$ y z_0. Por el contrario, si necesita hallar el valor de $\bar{x}$ que corta cierta superficie bajo la curva, introduzca el área en la caja marcada “prob:” en la parte inferior del applet y éste dará el valor de $\bar{x}$. El applet de la figura 7.10 está ajustado para calcular $P(7 < \bar{x} < 9) = .829$ correcta a tres lugares decimales. Usted usará este applet para los ejercicios Mi Applet del final de este capítulo.

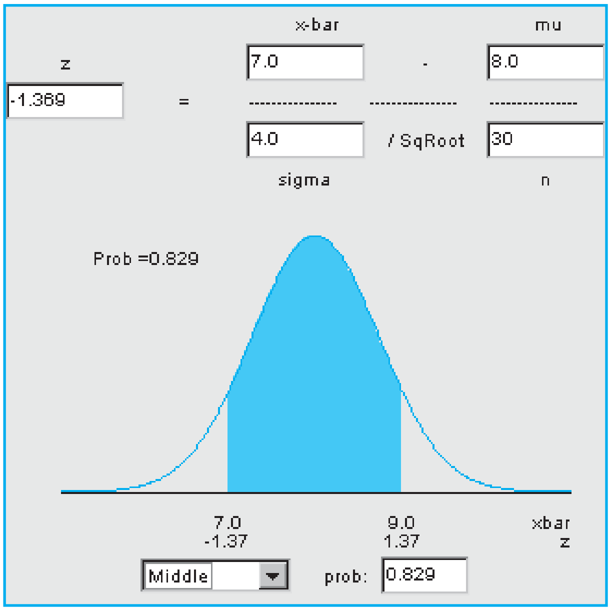


FIGURA 7.10
Applet Normal Probabilities for Means

EJEMPLO 7.5

Para evitar dificultades con la Comisión Federal de Comercio de EE.UU. o con oficinas locales y estatales de protección al consumidor, un embotellador de refrescos debe estar razonablemente seguro de que sus botellas de 12 onzas en realidad contengan 12 onzas de líquido. Para determinar si una máquina está funcionando de manera satisfactoria, un embotellador muestrea al azar 10 botellas por hora y mide la cantidad de líquido de cada botella. La media $\bar{x}$ de las 10 medidas llenas se usa para determinar si se reajusta la cantidad de líquido introducido en la botella por la máquina llenadora. Si los registros muestran que la cantidad de líquido por botella está normalmente distribuida, con una desviación estándar de .2 onzas y si la máquina embotelladora está ajustada para producir un llenado medio por botella de 12.1 onzas, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que la media muestral $\bar{x}$ de las 10 botellas sea menor a 12 onzas?

Solución La media de la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$ es idéntica a la media de la población de llenados de botella, es decir, $\mu = 12.1$ onzas y el error estándar (SE) de $\bar{x}$ es

$$\text{SE} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{.2}{\sqrt{10}} = .063$$

(NOTA: σ es la desviación estándar de la población de llenados de botella y n es el número de botellas de la muestra.) Como la cantidad de llenado está distribuida normalmente, $\bar{x}$ también está distribuida normalmente, como se ve en la figura 7.11.

Para hallar la probabilidad de que $\bar{x}$ sea menor a 12 onzas, exprese el valor $\bar{x} = 12$ en unidades de desviación estándar:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{12 - 12.1}{.063} = -1.59$$

Entonces

$$P(\bar{x} < 12) = P(z < -1.59) = .0559 \approx .056$$

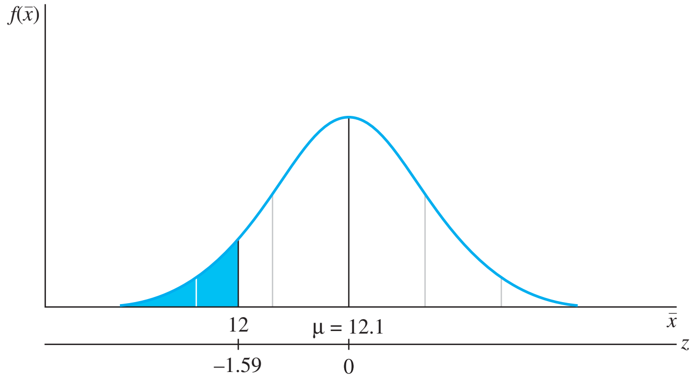


FIGURA 7.11
Distribución de probabilidad de $\bar{x}$, la media de los $n = 10$ llenados de botellas, para el ejemplo 7.5

Entonces, si la máquina está ajustada para producir un llenado promedio de 12.1 onzas, el llenado medio $\bar{x}$ de una muestra de 10 botellas será menor a 12 onzas con una probabilidad igual a .056. Cuando se presenta esta señal de riesgo ($\bar{x}$ es menor a 12), el embotellador toma una muestra más grande para volver a verificar el ajuste de la máquina llenadora.

7.5 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS (LLENE LOS ESPACIOS EN BLANCO)

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 268.

7.15 Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 49$ de una distribución con media de $\mu = 53$ y $\sigma = 21$. La distribución muestral de $\bar{x}$ será aproximadamente ________ con una media de _____ y una desviación estándar (o error estándar) de _____.

7.16 Consulte el ejercicio 7.15. Para hallar la probabilidad de que la media muestral sea mayor a 55, anote el evento de interés. ________ Cuando $\bar{x} = 55$,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \_\_\_\_\_$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\bar{x} > \_\_\_\_\_) = P(z > \_\_\_\_\_) = 1 - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

7.17 Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 40$ de una distribución con media $\mu = 100$ y $\sigma = 20$. La distribución muestral de $\bar{x}$ será aproximadamente _____ con una media de _____ y una desviación estándar (o error estándar) de _____.

7.18 Consulte el ejercicio 7.17. Para hallar la probabilidad de que la media muestral sea entre 105 y 110, anote el evento de interés. ________ Cuando $\bar{x} = 105$ y $\bar{x} = 110$,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \_\_\_\_\_ \text{ y } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \_\_\_\_\_$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\_\_\_\_\_ < \bar{x} < \_\_\_\_\_) = P(\_\_\_\_\_ < z < \_\_\_\_\_)$$
$$= \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

TÉCNICAS BÁSICAS

7.19 Muestras aleatorias de tamaño n se seleccionaron de poblaciones con las medias y varianzas dadas aquí. Encuentre la media y desviación estándar de la distribución muestral de la media muestral en cada caso:

a. $n = 36, \mu = 10, \sigma^2 = 9$

b. $n = 100, \mu = 5, \sigma^2 = 4$

c. $n = 8, \mu = 120, \sigma^2 = 1$

7.20 Consulte el ejercicio 7.19.

a. Si las poblaciones muestreadas son normales, ¿cuál es la distribución muestral de $\bar{x}$ para los incisos a), b) y c)?

b. De acuerdo con el teorema del límite central, si las poblaciones muestreadas *no son* normales, ¿qué se puede decir acerca de la distribución muestral de $\bar{x}$ para los incisos a), b) y c)?

MIS DATOS EX0721

7.21 Una población está formada por $N = 5$ números: 1, 3, 5, 6 y 7. Se puede demostrar que la media y desviación estándar para esta población son $\mu = 4.4$ y $\sigma = 2.15$, respectivamente.

a. Construya un histograma de probabilidad para esta población.

b. Use la tabla de números aleatorios, tabla 10 del apéndice I, para seleccionar una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ con remplazo de la población. Calcule la media muestral, $\bar{x}$. Repita este procedimiento, calculando la media muestral $\bar{x}$ para su segunda muestra. (SUGERENCIA: Asigne los dígitos aleatorios 0 y 1 a la medición $x = 1$; asigne dígitos 2 y 3 a la medición $x = 3$ y así sucesivamente.)

c. Para simular la distribución muestral de $\bar{x}$, hemos seleccionado 50 muestras más de tamaño $n = 10$ con restitución y hemos calculado las correspondientes medias muestrales. Construya un histograma de frecuencia relativa para estos 50 valores de $\bar{x}$. ¿Cuál es la forma de esta distribución?

4.8	4.2	4.2	4.5	4.3	4.3	5.0	4.0	3.3	4.7
3.0	5.9	5.7	4.2	4.4	4.8	5.0	5.1	4.8	4.2
4.6	4.1	3.4	4.9	4.1	4.0	3.7	4.3	4.3	4.5
5.0	4.6	4.1	5.1	3.4	5.9	5.0	4.3	4.5	3.9
4.4	4.2	4.2	5.2	5.4	4.8	3.6	5.0	4.5	4.9

7.22 Consulte el ejercicio 7.21.

a. Use el método de entrada de datos de su calculadora para hallar la media y desviación estándar de los 50 valores de $\bar{x}$ dados en el ejercicio 7.21, inciso c).

b. Compare los valores calculados en el inciso a) contra la media teórica μ y la desviación estándar teórica $\sigma/\sqrt{n}$ para la distribución muestral de $\bar{x}$. ¿Qué tanto se acercan los valores calculados de las 50 mediciones a los valores teóricos?

7.23 Una muestra aleatoria de n observaciones se selecciona de una población con desviación estándar $\sigma = 1$. Calcule el error estándar de la media (SE) para estos valores de n:

a. $n = 1$ **b.** $n = 2$ **c.** $n = 4$
d. $n = 9$ **e.** $n = 16$ **f.** $n = 25$
g. $n = 100$

7.24 Consulte el ejercicio 7.23. Grafique el error estándar de la media (SE) contra el tamaño muestral n y enlace los puntos con una curva suave. ¿Cuál es el efecto de aumentar el tamaño muestral sobre el error estándar?

7.25 Suponga que se selecciona una muestra aleatoria de $n = 25$ observaciones de entre una población que está distribuida normalmente, con media igual a 106 y desviación estándar igual a 12.

a. Dé la media y desviación estándar de la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$.

b. Encuentre la probabilidad de que $\bar{x}$ exceda de 110.

c. Encuentre la probabilidad de que la media muestral se desvíe de la media poblacional $\mu = 106$ en no más de 4.

APLICACIONES

7.26 Salarios de profesorado Suponga que el profesorado de una universidad, con el rango de profesor en dos instituciones de dos años, ganan un promedio de \$64 571 por año[7] con una desviación estándar de \$4 000. En un intento por verificar este nivel de salario, se seleccionó una muestra de 60 profesores de entre una base de datos del personal para todas las instituciones de dos años en Estados Unidos.

a. Describa la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$.

b. ¿Dentro de qué límites se esperaría que esté el promedio muestral, con probabilidad .95?

c. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\bar{x}$ sea mayor a \$66 000.

d. Si su muestra aleatoria en realidad produjo una media muestral de \$66 000, ¿consideraría usted que esto es poco común? ¿Qué conclusión podría sacar?

7.27 Error de medición Cuando químicos investigadores realizan experimentos, pueden obtener resultados ligeramente diferentes en repeticiones diferentes, aunque el experimento sea realizado de manera idéntica cada vez. Estas diferencias se deben a un fenómeno llamado "error de medición".

a. Haga una lista de algunas variables en un experimento de química que podrían causar algunos pequeños cambios en la medición de la respuesta final.

b. Si se desea verificar que el error de medición es pequeño, se puede repetir el experimento y tomar el promedio muestral de todas las mediciones. Para reducir la cantidad de variabilidad en el promedio de mediciones, ¿debe usarse un número de repeticiones grande o pequeño? Explique.

7.28 Tomates Explique por qué el peso de un empaque de una docena de tomates debe estar distribuido normalmente en forma aproximada si la docena de tomates representa una muestra aleatoria.

7.29 Bacterias en el agua Use el teorema del límite central para explicar por qué una variable aleatoria de Poisson, por ejemplo, el número de un tipo particular de bacterias en un pie cúbico de agua, tiene una distribución que puede ser aproximada por una distribución normal cuando la media μ es grande. (SUGERENCIA: Un pie cúbico de agua contiene 1728 pulgadas cúbicas de este líquido.)

7.30 Resistencia del papel Un fabricante de papel que se usa para empaque exige una resistencia mínima de 20 libras por pulgada cuadrada. Para verificar la calidad del papel, cada hora se selecciona una muestra aleatoria de 10 piezas de papel de entre la producción de la hora previa, registrándose la medición de su resistencia para cada una. La desviación estándar σ de las mediciones de resistencia, calculada al agrupar la suma de cuadrados de desviaciones de muchas muestras, se sabe que es igual a 2 libras por pulgada cuadrada y las mediciones de resistencia están normalmente distribuidas.

a. ¿Cuál es la distribución muestral aproximada de la media muestral de $n = 10$ piezas de papel de prueba?

b. Si la media de la población de mediciones de resistencia es 21 libras por pulgada cuadrada, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que, para una muestra aleatoria de $n = 10$ piezas de papel, $\bar{x} < 20$?

c. ¿Qué valor se seleccionaría para la resistencia media del papel, μ, para que $P(\bar{x} < 20)$ sea igual a .001?

7.31 Niveles de potasio El requerimiento normal diario de potasio en seres humanos está en el intervalo de 2 000 a 6 000 miligramos (mg), con cantidades grandes necesarias durante los meses calurosos de verano. La cantidad de potasio en alimentos varía, dependiendo de éstos. Por ejemplo, hay alrededor de 7 mg en un refresco de cola, 46 mg en una cerveza, 630 mg en un plátano (banano), 300 mg en una zanahoria y 440 mg en un vaso de jugo de naranja. Suponga que la distribución de potasio en un plátano está distribuida normalmente, con media igual a 630 mg y desviación estándar de 40 mg por plátano. Usted toma $n = 3$ plátanos al día y T es el número total de miligramos de potasio que recibe de ellos.

a. Encuentre la media y desviación estándar de T.

b. Encuentre la probabilidad de que su ingesta diaria de potasio de los tres plátanos exceda de 2 000 mg. (SUGERENCIA: Observe que T es la suma de tres variables aleatorias, x_1, x_2 y x_3, donde x_1 es la cantidad de potasio en el plátano 1, etcétera.)

7.32 Venta de deli El total de ventas diarias x, en la sección de bocadillos (llamados delicatessen o deli), es la suma de las ventas generadas por un número fijo de clientes que hacen compras en un día determinado.

a. ¿Qué clase de distribución de probabilidad se espera que tenga el total de ventas diarias? Explique.

b. Para este mercado particular, el promedio de venta por cliente en la sección delicatessen es \$8.50 con $\sigma = \$2.50$. Si 30 clientes hacen compras de deli en un día determinado, dé la media y desviación estándar de la distribución de probabilidad del total de ventas diarias, x.

7.33 Temperaturas normales En el ejercicio 1.67, Allen Shoemaker dedujo una distribución de temperaturas del cuerpo humano con una forma distintiva de montículo.[8] Suponga que consideramos que las temperaturas de personas sanas es aproximadamente normal, con una media de 98.6 grados y desviación estándar de 0.8 grados.

a. Si al azar se seleccionan 130 personas sanas, ¿cuál es la probabilidad de que la temperatura promedio para ellas sea de 98.25 grados o menor?

b. ¿Consideraría usted que una temperatura promedio de 98.25 grados es un suceso poco común, dado que la verdadera temperatura promedio de personas sanas es de 98.6 grados? Explique.

7.34 Deportes y lesiones del tendón de Aquiles Algunos deportes en los que se practica una cantidad considerable de carreras, saltos de altura o de longitud, pone a los participantes en riesgo de tendinopatía de Aquiles (AT), que es una inflamación y engrosamiento del tendón de Aquiles. Un estudio de *The American Journal of Sports Medicine* observó el diámetro (en mm) de tendones afectados y no afectados de pacientes que participaron en estos tipos de actividades deportivas.[9] Suponga que los diámetros del tendón de Aquiles en la población general tienen una media de 5.97 milímetros (mm) con una desviación estándar de 1.95 mm.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra seleccionada al azar de 31 pacientes produzca un diámetro promedio de 6.5 mm o menos para el tendón no afectado?

b. Cuando los diámetros del tendón afectado se midieron para una muestra de 31 pacientes, el diámetro promedio fue 9.80. Si el promedio del diámetro del tendón en la población de pacientes con AT no es diferente del promedio del diámetro de tendones no afectados (5.97 mm), ¿cuál es la probabilidad de observar un promedio de diámetro de 9.80 o mayor?

c. ¿Qué conclusiones podrían sacarse de los resultados del inciso b)?

7.6 LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL

Hay numerosos ejemplos prácticos de la variable aleatoria x binomial. Una aplicación común se relaciona con la preferencia del consumidor o encuestas de opinión, donde usamos una muestra aleatoria de n personas, para estimar la proporción p de personas en la población que tienen una característica especificada. Si x de las personas muestreadas tienen esta característica, entonces la proporción muestral

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

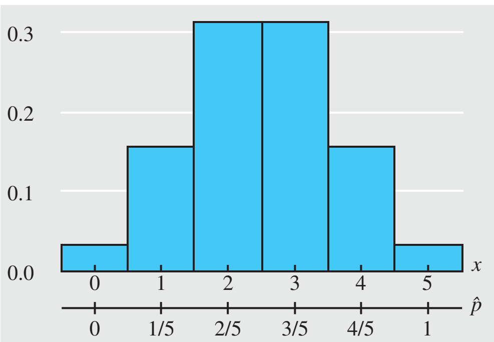
se puede usar para estimar la proporción poblacional p (figura 7.12).†

La variable aleatoria x binomial tiene una distribución de probabilidad $p(x)$, descrita en el capítulo 5, con media np y desviación estándar $\sqrt{npq}$. Como $\hat{p}$ es simplemente el valor de x, expresado como proporción $\left(\hat{p} = \frac{x}{n}\right)$, la distribución muestral de $\hat{p}$ es idéntica a la distribución de probabilidad de x, excepto que tiene una nueva escala a lo largo del eje horizontal.

MI CONSEJO

P: ¿Cómo saber si es o no es binomial? **R:** Vea si la medición tomada en una sola unidad experimental de la muestra es del tipo "éxito/fracaso". Si es así, probablemente es binomial.

FIGURA 7.12
Distribución muestral de la variable aleatoria x binomial y la proporción muestral $\hat{p}$



Debido a este cambio de escala, la media y desviación estándar de $\hat{p}$ también tienen cambio de escala, de modo que la media de la distribución muestral de $\hat{p}$ es p, y su error estándar es

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \text{donde } q = 1 - p$$

Por último, así como podemos aproximar la distribución de probabilidad de x con una distribución normal cuando el tamaño muestral n es grande, podemos hacer lo mismo con la distribución muestral de $\hat{p}$.

† Un "sombrero" puesto sobre el símbolo de un parámetro poblacional denota una estadística utilizada para estimar el parámetro poblacional. Por ejemplo, el símbolo $\hat{p}$ denota la proporción muestral.

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL, $\hat{p}$

- Si una muestra aleatoria de n observaciones se selecciona de una población binomial con parámetro p, entonces la distribución muestral de la proporción muestral

  $$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

  tendrá una media

  $$p$$

  y una desviación estándar

  $$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \text{donde } q = 1 - p$$

- Cuando el tamaño muestral n es grande, la distribución muestral de $\hat{p}$ puede ser aproximada por una distribución normal. La aproximación será adecuada si $np > 5$ y $nq > 5$.

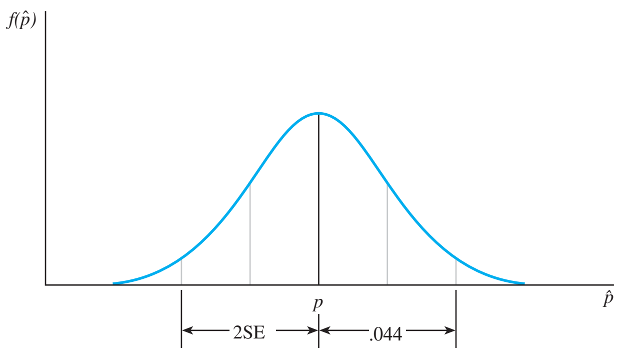
EJEMPLO 7.6

En una encuesta, a 500 madres y padres se les preguntó sobre la importancia del deporte para hijos e hijas. De los padres entrevistados, 60% estuvieron de acuerdo que los géneros son iguales y deben tener iguales oportunidades de participar en deportes. Describa la distribución muestral de la proporción muestral $\hat{p}$ de padres que están de acuerdo en que los géneros son iguales y deben tener iguales oportunidades.

Solución Se puede suponer que los 500 padres representan una muestra aleatoria de los padres de todos los hijos e hijas en Estados Unidos y que la verdadera proporción de la población es igual a algún valor desconocido que se puede llamar p. La distribución muestral de $\hat{p}$ puede ser aproximada por una distribución muestral,† con media igual a p (véase la figura 7.13) y error estándar

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

FIGURA 7.13
Distribución muestral para $\hat{p}$ basada en una muestra de $n = 500$ padres para el ejemplo 7.6



† Si se verifican las condiciones que permiten la aproximación normal a la distribución de $\hat{p}$, se puede ver que $n = 500$ es adecuado para valores de p cercanos a .60 porque $\hat{p}$ y $\hat{q}$ son mayores que 5.

Se puede ver de la figura 7.13 que la distribución muestral de $\hat{p}$ está centrada sobre su media p. Aun cuando no se sabe el valor exacto de p (la proporción muestral $\hat{p}$ puede ser mayor o menor de p), puede hallarse un valor aproximado para la desviación estándar de la distribución muestral usando la proporción muestral $\hat{p}$ para aproximar el valor desconocido de p. Entonces,

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.60)(3.40)}{500}} = .022$$

Por tanto, aproximadamente 95% del tiempo, $\hat{p}$ caerá en no más de $2\text{SE} \approx .044$ del (desconocido) valor de p.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo probabilidades para la proporción muestral $\hat{p}$?

1. Encuentre los valores necesarios de n y p.
2. Verifique si la aproximación normal a la distribución binomial es apropiada ($np > 5$ y $nq > 5$).
3. Anote el evento de interés en términos de $\hat{p}$ y localice el área apropiada en la curva normal.
4. Convierta los valores necesarios de $\hat{p}$ en valores z usando

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

5. Use la tabla 3 del apéndice I para calcular la probabilidad.

Repertorio de ejercicios (Llene los espacios en blanco)

A. Tome una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$ de una distribución binomial con media $p = .4$. La distribución muestral de $\hat{p}$ será aproximadamente _____ con una media de _____ y una desviación estándar (o error estándar) de _____.

B. Para hallar la probabilidad de que la proporción muestral exceda de .5, anote el evento de interés. _____
Cuando $\hat{p} = .5$,

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \_\_\_\_\_$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\hat{p} > \_\_\_\_\_) = P(z > \_\_\_\_\_) = 1 - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

(*continúa*)

C. Para hallar la probabilidad de que la proporción muestral sea entre .5 y .6, anote el evento de interés. _____
Cuando $\hat{p} = .5$ y $\hat{p} = .6$,

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \_\_\_\_\_ \text{ y } z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \_\_\_\_\_$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\_\_\_\_\_ < \hat{p} < \_\_\_\_\_) = P(\_\_\_\_\_ < z < \_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina la tabla z? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

EJEMPLO 7.7

Consulte el ejemplo 7.6. Suponga que la proporción p de padres en la población es en realidad igual a .55. ¿Cuál es la probabilidad de observar una proporción muestral igual de grande o mayor que el valor observado $\hat{p} = .60$?

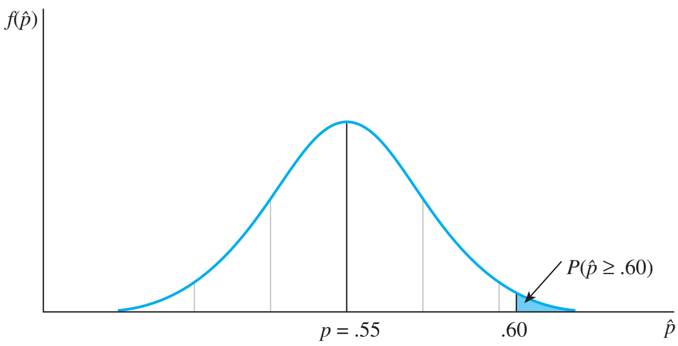
Solución La figura 7.14 muestra la distribución muestral de $\hat{p}$ cuando $p = .55$, con el valor observado $\hat{p} = .60$ ubicado sobre el eje horizontal. La probabilidad de observar una proporción muestral $\hat{p}$ igual o mayor a .60 es aproximada por el área sombreada en la cola superior de esta distribución normal con

$$p = .55$$

y

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.55)(.45)}{500}} = .0222$$

FIGURA 7.14
Distribución muestral de $\hat{p}$ para $n = 500$ y $p = .56$ para el ejemplo 7.7



Para hallar el área sombreada, primero calcule el valor z correspondiente a $\hat{p} = .60$:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{.60 - .55}{.0222} = 2.25$$

Usando la tabla 3 del apéndice I, encontramos

$$P(\hat{p} > .60) \approx P(z > 2.25) = 1 - .9878 = .0122$$

Esto es, si fuéramos a seleccionar una muestra aleatoria de $n = 500$ observaciones de una población con proporción p igual a .55, la probabilidad de que la proporción muestral $\hat{p}$ sería tan grande o mayor a .60 es de sólo .0122.

Cuando la distribución normal se utilizó en el capítulo 6 para aproximar las probabilidades binomiales asociadas con x, una corrección de $\pm.5$ se aplicó para mejorar la aproximación. La corrección equivalente aquí es $\pm(.5/n)$. Por ejemplo, para $\hat{p} = .60$ el valor de z con la corrección es

$$z_1 = \frac{(.60 - .001) - .55}{\sqrt{\frac{(.55)(.45)}{500}}} = 2.20$$

con $P(\hat{p} > .60) \approx .0139$. A una precisión de dos lugares decimales, este valor concuerda con el resultado anterior. Cuando n es grande, el efecto de usar la corrección es por lo general insignificante. Usted debe resolver problemas de este capítulo y los restantes *sin* el factor de corrección a menos que específicamente se le solicite.

7.6 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS (LLENE LOS ESPACIOS EN BLANCO)

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 277.

7.35 Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 50$ de una distribución binomial con media de $p = .7$. La distribución muestral de $\hat{p}$ será aproximadamente ________ con una media de ______ y una desviación estándar (o error estándar) de ______.

7.36 Para hallar la probabilidad de que la proporción muestral sea menor a .8, anote el evento de interés. ______
Cuando $\hat{p} = .8$,

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \underline{\qquad}$$

Encuentre la probabilidad:

$$P(\hat{p} < \underline{\qquad}) = P(z < \underline{\qquad}) = \underline{\qquad}$$

TÉCNICAS BÁSICAS

7.37 Muestras aleatorias de tamaño n se seleccionaron de poblaciones binomiales con parámetros poblacionales p dados aquí. Encuentre la media y la desviación estándar de la distribución muestral de la proporción muestral $\hat{p}$ en cada caso:

a. $n = 100, p = .3$
b. $n = 400, p = .1$
c. $n = 250, p = .6$

7.38 ¿Es apropiado usar la distribución normal para aproximar la distribución muestral de $\hat{p}$ en las siguientes circunstancias?

a. $n = 50, p = .05$
b. $n = 75, p = .1$
c. $n = 250, p = .99$

7.39 Muestras aleatorias de tamaño $n = 75$ se seleccionaron de una población binomial con $p = .4$. Use la distribución normal para aproximar las siguientes probabilidades:

a. $P(\hat{p} \leq .43)$

b. $P(.35 \leq \hat{p} \leq .43)$

7.40 Muestras aleatorias de tamaño $n = 500$ se seleccionaron de una población binomial con $p = .1$.

a. ¿Es apropiado usar la distribución normal para aproximar la distribución muestral de $\hat{p}$? Verifique para asegurarse que estén satisfechas las condiciones necesarias.

Usando los resultados del inciso a), encuentre estas probabilidades:

b. $\hat{p} > .12$

c. $\hat{p} < .10$

d. $\hat{p}$ está a no más de .02 de p

7.41 Calcule SE($\hat{p}$) para $n = 100$ y estos valores de p:

a. $p = .01$ **b.** $p = .10$ **c.** $p = .30$

d. $p = .50$ **e.** $p = .70$ **f.** $p = .90$

g. $p = .99$

h. Grafique SE($\hat{p}$) contra p en papel de gráfica y trace una curva suave que pase por los puntos. ¿Para qué valor de p es máxima la desviación estándar de la distribución muestral de $\hat{p}$? ¿Qué ocurre al error estándar cuando p es cercano a 0 o a 1.0?

7.42 a. ¿Es apropiada la aproximación normal a la distribución muestral cuando $n = 400$ y $p = .8$?

b. Use los resultados del inciso a) para hallar la probabilidad de que $\hat{p}$ es mayor a) .83.

c. Use los resultados del inciso a), para hallar la probabilidad de que $\hat{p}$ está entre .76 y .84.

APLICACIONES

7.43 Bajar de peso Reportajes en periódicos nos dicen que el estadounidense promedio tiene sobrepeso. Muchos de nosotros hemos tratado de bajar de peso cuando terminamos la preparatoria o la universidad. Y, en efecto, sólo 19% de adultos dicen que no sufren de problemas de pérdida de peso.[10] Suponga que la cifra de 19% es correcta y que se selecciona una muestra aleatoria de $n = 100$ adultos.

a. La distribución de $\hat{p}$, es decir, la proporción muestral de adultos que no sufren de excesos de peso, ¿tiene una distribución normal aproximada? Si es así, ¿cuál es su media y desviación estándar?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral $\hat{p}$ exceda de .25?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que $\hat{p}$ se encuentre dentro del intervalo .25 a .30?

d. ¿Qué se podría concluir acerca de p si la proporción muestral excede de .30?

7.44 Costos de prescripciones El costo de prescripciones de patente se fija para dar apoyo a investigación y desarrollo de estos medicamentos, que pueden tardar hasta 20 años. Sin embargo, una mayoría de estadounidenses dice que los costos de medicamentos de patente (66%), los costos de hospital (64%) y visitas de médicos (55%) son irracionalmente altos.[11] Suponga que se toma una muestra aleatoria de $n = 1000$ adultos. Sea $\hat{p}$ la proporción de adultos que dicen que los precios de medicinas con receta son irracionalmente altos.

a. ¿Cuál es la distribución exacta de $\hat{p}$? ¿Cómo se puede aproximar la distribución de $\hat{p}$?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que $\hat{p}$ exceda de .68?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que $\hat{p}$ se encuentre entre .64 y .68?

d. ¿Un porcentaje muestral de 70% estaría en contra del valor reportado de 66%?

7.45 M&M'S De acuerdo con el sitio web de M&M'S, el porcentaje promedio de dulces M&M'S cafés de un paquete de chocolates M&M'S de leche es 13%.[12] (Este porcentaje varía, no obstante, entre los diferentes tipos de los M&M'S empacados.) Suponga que al azar se selecciona un paquete de chocolates M&M'S de leche que contiene 55 dulces y se determina la proporción de dulces M&M'S cafés del paquete.

a. ¿Cuál es la distribución aproximada de la proporción muestral de dulces M&M'S cafés en un paquete que contiene 55 dulces?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral de dulces cafés sea menor a 20%?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral exceda de 35%?

d. ¿Dentro de qué intervalo espera usted que la proporción muestral se encuentre alrededor de 95% del tiempo?

7.46 El "proyecto de ley de la hamburguesa con queso" En la primavera de 2004, el Congreso de Estados Unidos consideró un proyecto de ley que impediría a estadounidenses demandaran a gigantes de la comida rápida como McDonald's por hacerles engordar. Aun cuando la industria de la comida rápida puede no ser culpable, un estudio realizado por el Hospital Infantil de Boston informa que alrededor de dos tercios de adultos estadounidenses y alrededor de 15% de niños y adolescentes presentan sobrepeso.[13] Se seleccionó una muestra aleatoria de 100 niños.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral de niños con sobrepeso exceda de 25%?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral de niños con sobrepeso sea menor a 12%?

c. ¿Sería poco común hallar que 30% de los niños muestreados tuvieran sobrepeso? Explique.

7.47 ¡Ah, las nueces! ¿Es usted un "puritano" del chocolate, o le gustan otros ingredientes en su chocolate? *American Demographics* informa que casi 75% de los consumidores gustan de ingredientes tradicionales como nueces o caramelos en su chocolate. Son menos entusiastas hacia el gusto de la menta o el café, que dan sabores más distintivos.[14] Una muestra aleatoria de 200 consumidores se selecciona y se registra el número de quienes gustan de las nueces o caramelo en su chocolate.

a. ¿Cuál es la distribución muestral aproximada para la proporción muestral $\hat{p}$? ¿Cuáles son la media y distribución estándar para esta distribución?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral sea mayor a 80%?

c. ¿Dentro de qué límites se esperaría que la proporción muestral se encuentre alrededor de 95% del tiempo?

7.7 UNA APLICACIÓN MUESTRAL: CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS (OPCIONAL)

La metodología del control estadístico de procesos (CEP) fue inventada para observar, controlar y mejorar productos y servicios. Los cojinetes de acero deben apegarse a especificaciones de dimensiones y dureza, los productos químicos industriales tienen un bajo nivel especificado de impurezas y las empresas de contaduría deben reducir al mínimo y finalmente eliminar asientos incorrectos en contabilidades. Con frecuencia se dice que el control estadístico de procesos está formado por 10% de estadística y 90% de ingeniería y sentido común. Desde el punto de vista estadístico podemos observar la media de un proceso y decir cuándo es que la media cae fuera de límites asignados previamente, pero no podemos decir *por qué* está fuera de control. Contestar esta última pregunta requiere de conocimiento del proceso y capacidad de resolver problemas, es decir, el otro 90%.

La calidad de un producto suele ser supervisada con el uso de gráficas estadísticas de control. Las mediciones en la variable de un proceso a ser observado cambian con el tiempo. Se dice que la causa de un cambio en la variable es *asignable* si puede ser localizada y corregida. Otra variación, los pequeños cambios fortuitos debidos a la alteración del ambiente de producción, que no sea controlable se considera como *variación aleatoria.* Si la variación en la variable de un proceso es sólo aleatoria, se dice que el proceso está *en control.* El primer objetivo en el control estadístico de procesos es eliminar causas asignables de variación en la variable del proceso y luego poner el proceso bajo control. El siguiente paso es reducir la variación y poner las mediciones en la variable del proceso dentro de *límites de especificación*, es decir, límites dentro de los cuales deben caer las mediciones sobre objetos o servicios utilizables.

Una vez que un proceso esté en control y esté produciendo un producto satisfactorio, sus variables son supervisadas con **gráficas de control**. Se toman muestras de n artículos del proceso a intervalos especificados y se calcula una estadística muestral. Estas estadísticas se grafican en la tabla de control, de modo que el proceso se puede verificar respecto a cambios en la variable del proceso que podrían indicar problemas de control.

Una gráfica de control para la media del proceso: la gráfica $\bar{x}$

Suponga que n artículos se seleccionan al azar del proceso de producción a intervalos iguales y que se registran mediciones en la variable del proceso. Si el proceso está en control, las medias muestrales deben variar alrededor de la media poblacional μ en forma aleatoria. Además, de acuerdo con el teorema del límite central, la distribución muestral de $\bar{x}$ debe ser aproximadamente normal, de modo que casi todos los valores de $\bar{x}$ caen en el intervalo $(\mu \pm 3 \text{ SE}) = \mu \pm 3(\sigma/\sqrt{n})$. Aun cuando los valores exactos de μ y σ sean desconocidos, se pueden obtener estimaciones precisas con el uso de mediciones muestrales.

Toda gráfica de control tiene una *línea de centro* y *límites de control*. La línea del centro para la **gráfica $\bar{x}$** es la estimación de μ, el gran promedio de todas las estadísticas muestrales calculadas de las mediciones en la variable del proceso. Los *límites de control* superior e inferior están colocados a tres desviaciones estándar arriba y debajo de la línea de centro. Si se observa la media del proceso con base en k muestras de tamaño n tomadas a intervalos regulares, la línea de centro es $\bar{\bar{x}}$, el promedio de las medias muestrales y los límites de control están en $\bar{\bar{x}} \pm 3(\sigma/\sqrt{n})$, con σ estimada por s, la desviación estándar de las mediciones nk.

EJEMPLO 7.8

Un sistema estadístico de observación del control del proceso muestrea los diámetros interiores de $n = 4$ cojinetes por hora. En la tabla 7.6 aparecen los datos para $k = 25$ muestras por hora. Construya una gráfica $\bar{x}$ para vigilar la media del proceso.

Solución La media muestral se calculó para cada una de las $k = 25$ muestras. Por ejemplo, la media para la muestra 1 es

$$\bar{x} = \frac{.992 + 1.007 + 1.016 + .991}{4} = 1.0015$$

TABLA 7.6 **25 muestras por hora de diámetros de cojinetes, $n = 4$ cojinetes por muestra**

Muestra	Mediciones de muestra				Media muestral, $\bar{x}$
1	.992	1.007	1.016	.991	1.00150
2	1.015	.984	.976	1.000	.99375
3	.988	.993	1.011	.981	.99325
4	.996	1.020	1.004	.999	1.00475
5	1.015	1.006	1.002	1.001	1.00600
6	1.000	.982	1.005	.989	.99400
7	.989	1.009	1.019	.994	1.00275
8	.994	1.010	1.009	.990	1.00075
9	1.018	1.016	.990	1.011	1.00875
10	.997	1.005	.989	1.001	.99800
11	1.020	.986	1.002	.989	.99925
12	1.007	.986	.981	.995	.99225
13	1.016	1.002	1.010	.999	1.00675
14	.982	.995	1.011	.987	.99375
15	1.001	1.000	.983	1.002	.99650
16	.992	1.008	1.001	.996	.99925
17	1.020	.988	1.015	.986	1.00225
18	.993	.987	1.006	1.001	.99675
19	.978	1.006	1.002	.982	.99200
20	.984	1.009	.983	.986	.99050
21	.990	1.012	1.010	1.007	1.00475
22	1.015	.983	1.003	.989	.99750
23	.983	.990	.997	1.002	.99300
24	1.011	1.012	.991	1.008	1.00550
25	.987	.987	1.007	.995	.99400

Las medias muestrales se ven en la última columna de la tabla 7.6. La línea del centro está situada en el promedio de las medias muestrales, o sea

$$\bar{\bar{x}} = \frac{24.9675}{25} = .9987$$

El valor calculado de s, la desviación muestral estándar de todas las $nk = 4(25) = 100$ observaciones, es $s = .011458$ y el error estándar estimado de la media de $n = 4$ observaciones es

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{.011458}{\sqrt{4}} = .005729$$

Los límites de control superior e inferior se encuentran como

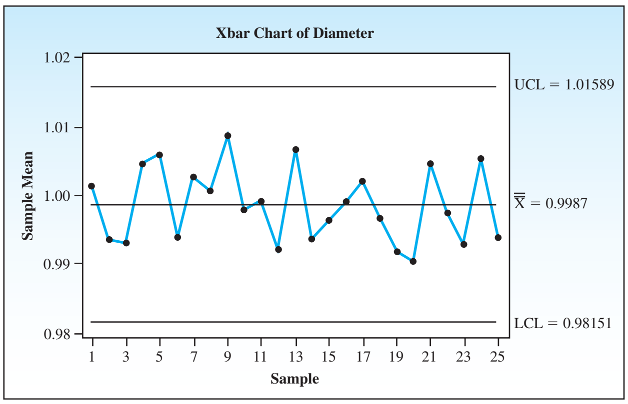
$$\text{UCL} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{s}{\sqrt{n}} = .9987 + 3(.005729) = 1.015887$$

y

$$\text{LCL} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{s}{\sqrt{n}} = .9987 - 3(.005729) = .981513$$

La figura 7.15 muestra una salida impresa *MINITAB* de la gráfica $\bar{x}$ construida a partir de los datos. Si se supone que las muestras empleadas para construir la gráfica $\bar{x}$ se recolectaron cuando el proceso estaba en control, la gráfica se puede usar ahora para detectar cambios en la media del proceso. Las medias muestrales se grafican periódicamente y, si una media muestral cae fuera de los límites de control, debe comunicarse una advertencia. El proceso debe verificarse para localizar la causa de la media anormalmente grande o pequeña.

FIGURA 7.15
Gráfica *MINITAB* $\bar{x}$ para el ejemplo 7.8



Una gráfica de control para la proporción de piezas defectuosas: la gráfica *p*

A veces la observación hecha en un artículo es simplemente para saber si satisface o no las especificaciones; entonces, se juzga como defectuosa o no defectuosa. Si la fracción de piezas defectuosas producidas por el proceso es p, entonces x, el número de defectuosas en una muestra de n artículos, tiene una distribución binomial.

Para supervisar un proceso para ver si hay artículos defectuosos, se seleccionan muestras de tamaño n a intervalos periódicos y se calcula la proporción muestral $\hat{p}$. Cuando el proceso está en control, $\hat{p}$ debe caer en el intervalo $p \pm 3\text{SE}$, donde p es la proporción de defectuosas en la población (o la fracción defectuosa del proceso) con error estándar

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

La fracción defectuosa del proceso es desconocida pero puede calcularse por el promedio de las proporciones muestrales k:

$$\bar{p} = \frac{\Sigma \hat{p}_i}{k}$$

y el error estándar es estimado por

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

La línea de centro para la **gráfica *p*** está ubicado en $\bar{p}$, y los límites de control superior e inferior son

$$\text{UCL} = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

y

$$\text{LCL} = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

EJEMPLO 7.9

Un fabricante de bolígrafos muestrea al azar 400 bolígrafos por día y prueba cada uno de ellos para ver si el flujo de tinta es aceptable. Las proporciones de bolígrafos juzgados como defectuosos por día, en un periodo de 40 días, se ven en la tabla 7.7. Construya una gráfica de control para la proporción $\hat{p}$ de muestras defectuosas en $n = 400$ bolígrafos seleccionados del proceso.

TABLA 7.7 **Proporciones de muestras defectuosas en $n = 400$ bolígrafos**

Día	Proporción	Día	Proporción	Día	Proporción	Día	Proporción
1	.0200	11	.0100	21	.0300	31	.0225
2	.0125	12	.0175	22	.0200	32	.0175
3	.0225	13	.0250	23	.0125	33	.0225
4	.0100	14	.0175	24	.0175	34	.0100
5	.0150	15	.0275	25	.0225	35	.0125
6	.0200	16	.0200	26	.0150	36	.0300
7	.0275	17	.0225	27	.0200	37	.0200
8	.0175	18	.0100	28	.0250	38	.0150
9	.0200	19	.0175	29	.0150	39	.0150
10	.0250	20	.0200	30	.0175	40	.0225

Solución La estimación de la proporción de piezas defectuosas del proceso es el promedio de las $k = 40$ proporciones muestrales de la tabla 7.7. Por tanto, la línea del centro de la gráfica de control está ubicada en

$$\bar{p} = \frac{\Sigma \hat{p}_i}{k} = \frac{.0200 + .0125 + \cdots + .0225}{40} = \frac{.7600}{40} = .019$$

Una estimación del SE, es decir el error estándar de las proporciones muestrales, es

$$\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = \sqrt{\frac{(.019)(.981)}{400}} = .00683$$

y $3\text{SE} = (3)(.00683) = .0205$. Por tanto, los límites de control superior e inferior para la gráfica p están ubicados en

$$\text{límite superior de control} = \bar{p} + 3\text{SE} = .0190 + .0205 = .0395$$

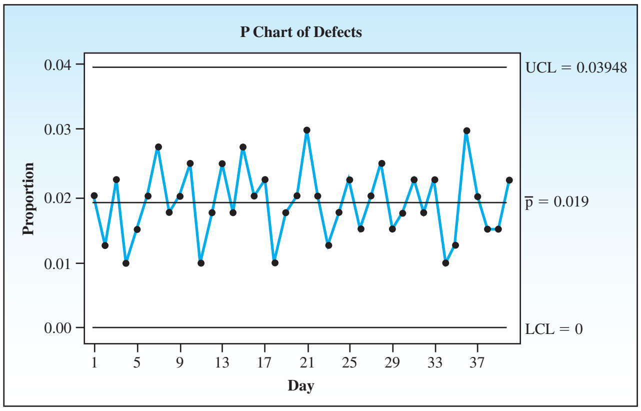
y

$$\text{límite inferior de control} = \bar{p} - 3\text{SE} = .0190 - .0205 = -.0015$$

O bien, como p no puede ser negativa, el límite inferior de control o LCL $= 0$.

La gráfica de control p se muestra en la figura 7.16. Observe que las 40 proporciones muestrales caen dentro de los límites de control. Si una proporción muestral recolectada en algún tiempo futuro cae fuera de los límites de control, el fabricante debe ocuparse de un aumento en el porcentaje de piezas defectuosas, además de tomar las medidas necesarias para buscar las posibles causas de este aumento.

FIGURA 7.16
Gráfica p del *MINITAB* para el ejemplo 7.9



Otras gráficas de control que por lo general se utilizan son la *gráfica R*, que se usa para vigilar la variación de la variable del proceso por medio del intervalo muestral y la *gráfica c*, que se usa para vigilar el número de defectos por pieza.

7.7 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

7.48 Las medias muestrales se calcularon para 30 muestras de tamaño $n = 10$ para un proceso que se juzgó en control. Las medias de los 30 valores $\bar{x}$ y la desviación estándar de las 300 mediciones combinadas fueron $\bar{\bar{x}} = 20.74$ y $s = .87$, respectivamente.

a. Use los datos para determinar los límites superior e inferior de control para una gráfica $\bar{x}$.

b. ¿Cuál es el propósito de una gráfica $\bar{x}$?

c. Construya una gráfica $\bar{x}$ para el proceso y explique cómo se puede usar.

7.49 Las medias muestrales se calcularon para 40 muestras de tamaño $n = 5$ para un proceso que se juzgó en control. Las medias de los 40 valores y la desviación estándar de las 200 mediciones combinadas fueron $\bar{\bar{x}} = 155.9$ y $s = 4.3$, respectivamente.

a. Use los datos para determinar los límites superior e inferior de control para una gráfica $\bar{x}$.

b. Construya una gráfica $\bar{x}$ para el proceso y explique cómo se puede usar.

7.50 Explique la diferencia entre una gráfica $\bar{x}$ y una gráfica p.

7.51 Muestras de $n = 100$ artículos se seleccionaron cada hora durante un periodo de 100 horas y la proporción muestral de defectuosas se calculó cada hora. La media de las 100 proporciones muestrales fue de .035.

a. Use los datos para determinar los límites superior e inferior de control para una gráfica p.

b. Construya una gráfica p para el proceso y explique cómo se puede usar.

7.52 Muestras de $n = 200$ artículos se seleccionaron cada hora durante un periodo de 100 horas y la proporción muestral de defectuosas se calculó cada hora. La media de las 100 proporciones muestrales fue de .041.

a. Use los datos para determinar los límites superior e inferior de control para una gráfica p.

b. Construya una gráfica p para el proceso y explique cómo se puede usar.

APLICACIONES

7.53 Veintiuno Un casino de juegos de azar registra y grafica la ganancia o pérdida diaria media, de cinco mesas de veintiuno, en una gráfica $\bar{x}$. La media general de las medias muestrales y la desviación estándar de los datos combinados de 40 semanas fueron $\bar{\bar{x}} = \$10\,752$ y $s = \$1\,605$, respectivamente.

a. Construya una gráfica $\bar{x}$ para la ganancia diaria media por mesa de veintiuno.

b. ¿Cómo puede ser de valor esta gráfica $\bar{x}$ al gerente del casino?

7.54 Remaches de latón Un fabricante de remaches de latón muestrea al azar 400 remaches cada hora y calcula la proporción de los defectuosos de la muestra. La proporción media muestral calculada de 200 muestras era igual a .021. Construya una gráfica de control para la proporción de defectuosos en muestras de 400 remaches. Explique la forma en que la gráfica de control puede ser de valor para un gerente.

MIS DATOS EX0755

7.55 Especificaciones en madera El gerente de una compañía de materiales de construcción muestrea al azar la madera que recibe para ver si cumple con especificaciones de calidad. De cada embarque, 100 piezas de madera de 2 × 4 son inspeccionadas y juzgadas de acuerdo a si son de primera (aceptable) o de segunda (defectuosa) clase. Las proporciones de piezas de madera de 2 × 4 de segunda registradas para 30 embarques fueron como sigue:

.14	.21	.19	.18	.23	.20	.25	.19	.22	.17
.21	.15	.23	.12	.19	.22	.15	.26	.22	.21
.14	.20	.18	.22	.21	.13	.20	.23	.19	.26

Construya una gráfica de control para la proporción de piezas de madera de 2 × 4 en muestras de 100 piezas de madera. Explique la forma en que la gráfica de control puede ser empleada por el gerente de la compañía de materiales de construcción.

7.56 Planta generadora de electricidad a base de carbón Una planta generadora de electricidad a base de carbón prueba y mide tres especímenes de carbón al día, para vigilar el porcentaje de ceniza en el carbón. La media general de 30 medias muestrales diarias y la desviación estándar combinada de todos los datos fueron $\bar{\bar{x}} = 7.24$ y $s = .07$, respectivamente. Construya una gráfica $\bar{x}$ para el proceso y explique la forma en que puede ser de valor para el gerente de la planta generadora de electricidad.

MIS DATOS EX0757

7.57 Planta nuclear de energía eléctrica Los datos de la tabla son medidas de la radiación en partículas de aire en una planta nuclear de energía eléctrica. Cuatro mediciones se registraron a intervalos semanales en un periodo de 26 semanas. Use los datos para construir una gráfica $\bar{x}$ y grafique los 26 valores de $\bar{x}$. Explique la forma en que se puede usar la gráfica.

Semana	Radiación			
1	.031	.032	.030	.031
2	.025	.026	.025	.025
3	.029	.029	.031	.030
4	.035	.037	.034	.035
5	.022	.024	.022	.023
6	.030	.029	.030	.030
7	.019	.019	.018	.019
8	.027	.028	.028	.028
9	.034	.032	.033	.033
10	.017	.016	.018	.018
11	.022	.020	.020	.021
12	.016	.018	.017	.017
13	.015	.017	.018	.017
14	.029	.028	.029	.029
15	.031	.029	.030	.031
16	.014	.016	.016	.017
17	.019	.019	.021	.020
18	.024	.024	.024	.025
19	.029	.027	.028	.028
20	.032	.030	.031	.030
21	.041	.042	.038	.039
22	.034	.036	.036	.035
23	.021	.022	.024	.022
24	.029	.029	.030	.029
25	.016	.017	.017	.016
26	.020	.021	.020	.022

7.58 Bates de béisbol Una planta fabricante de maderas duras tiene varias líneas de producción diferentes para hacer bates de béisbol de diferentes pesos. Una de esas líneas de producción está diseñada para producir bates que pesan 32 onzas. Durante un tiempo, cuando se sabe que el proceso de producción está en control estadístico, el peso promedio de un bate se encontró que era de 31.7 onzas. Los datos observados se reunieron de 50 muestras, cada una de ellas formada de 5 mediciones. Se encontró que la desviación estándar de todas las muestras era $s = .2064$ onzas. Construya una gráfica $\bar{x}$ para vigilar el proceso de producción de bates de 32 onzas.

7.59 Más bates de béisbol Consulte el ejercicio 7.58 y suponga que, durante un día cuando el estado del proceso de producción de bates de 32 onzas era desconocido, se obtuvieron las siguientes mediciones a intervalos de una hora.

Hora	$\bar{x}$	Hora	$\bar{x}$
1	31.6	4	33.1
2	32.5	5	31.6
3	33.4	6	31.8

Cada medición representa una estadística calculada de una muestra de cinco pesos de bates seleccionados del proceso de producción durante cierta hora. Use la gráfica de control construida en el ejercicio 7.58 para supervisar el proceso.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Planes muestrales y diseños experimentales

1. Muestreo aleatorio simple
   a. Cada posible muestra de tamaño n es igualmente probable de ocurrir.
   b. Use una computadora o tabla de números aleatorios.
   c. Los problemas son: sin respuesta, baja cobertura y sesgo verbal.
2. Otros planes muestrales con aleatorización
   a. Muestreo aleatorio estratificado
   b. Muestreo de conglomerado
   c. Muestreo sistemático de 1 en k
3. Muestreo no aleatorio
   a. Muestreo de conveniencia
   b. Muestreo de juicio
   c. Muestreo de cuota

II. Estadísticas y distribuciones muestrales

1. Las distribuciones muestrales describen los posibles valores de una estadística y con qué frecuencia se presentan en muestreo repetido.
2. Las distribuciones muestrales se pueden deducir matemáticamente, aproximarse en forma empírica o hallarse usando teoremas estadísticos.
3. El teorema del límite central dice que las sumas y promedios de mediciones de una población no normal, con media μ finita y desviación estándar σ, tienen distribuciones aproximadamente normales para muestras grandes de tamaño n.

III. Distribución muestral de la media muestral

1. Cuando muestras de tamaño n se sacan al azar de una población normal con media μ y varianza σ^2, la media muestral $\bar{x}$ tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$.
2. Cuando muestras de tamaño k se sacan al azar de una población no normal con media μ y varianza σ^2, el teorema del límite central asegura que la media muestral $\bar{x}$ tendrá una distribución aproximadamente normal con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$ cuando n es grande ($n \geq 30$).
3. Las probabilidades que contengan la media muestral pueden calcularse al estandarizar el valor de $\bar{x}$ usando z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

IV. Distribución muestral de la proporción muestral

1. Cuando muestras de tamaño n se toman de una población binomial con parámetro p, la proporción muestral $\hat{p}$ tendrá una distribución aproximadamente normal con media p y desviación estándar $\sqrt{pq/n}$ mientras $np > 5$ y $nq > 5$.
2. Las probabilidades que comprendan la proporción muestral se pueden calcular al estandarizar el valor $\hat{p}$ usando z:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

V. Control estadístico de un proceso

1. Para vigilar un proceso cuantitativo, use una gráfica $\bar{x}$. Seleccione k muestras de tamaño n y calcule la media general $\bar{\bar{x}}$ y la desviación estándar s de todas las nk mediciones. Genere límites de control superiores e inferiores como

$$\bar{\bar{x}} \pm 3\frac{s}{\sqrt{n}}$$

   Si una media muestral excede de estos límites, el proceso está fuera de control.
2. Para vigilar un proceso *binomial*, use una gráfica p. Seleccione k muestras de tamaño n y calcule el promedio de las proporciones muestrales como

$$\bar{p} = \frac{\Sigma \hat{p}_i}{k}$$

   Genere límites de control superiores e inferiores como

$$\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}\ (1 - \bar{p}\ )}{n}}$$

   Si una proporción muestral excede de estos límites, el proceso está fuera de control.

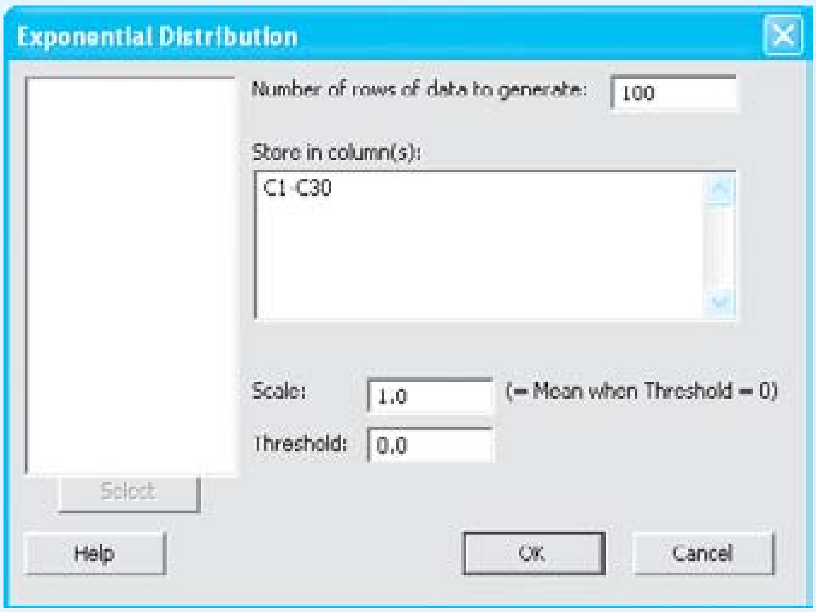
MI **MINITAB**

El teorema del límite central en operación

El *MINITAB* es una herramienta perfecta para explorar la forma en que el teorema del límite central funciona en la práctica. Recuerde que, según el teorema del límite central, si muestras aleatorias de tamaño n se sacan de una población no normal con media μ y desviación estándar σ, entonces cuando n es grande, la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$ será aproximadamente normal con la misma media μ y con error estándar $\sigma/\sqrt{n}$. Intentemos muestrear a partir de una población no normal con la ayuda del *MINITAB*.

En una hoja de trabajo *MINITAB* nueva, genere 100 muestras de tamaño $n = 30$ de una distribución no normal llamada distribución exponencial. Use **Calc** → **Random Data** → **Exponential**. Teclee **100** para el número de renglones de datos y guarde los resultados en C1-C30 (véase la figura 7.17). Deje la media en el valor predeterminado de 1.0, el umbral en 0.0 y dé un clic en **OK**. Los datos se generan y guardan en la hoja de trabajo. Use **Graph** → **Histogram** → **Simple** para ver la distribución de algunos de los datos, por ejemplo C1 (como en la figura 7.18). Observe que la distribución no tiene forma de montículo; está sumamente sesgada a la derecha.

FIGURA 7.17



Para la distribución exponencial que hemos empleado, la media y desviación estándar son $\mu = 1$ y $\sigma = 1$, respectivamente. Verifique las estadísticas descriptivas para una de las columnas (use **Stat** → **Basic Statistics** → **Display Descriptive Statistics**) y se verá que las 100 observaciones tienen una media muestral y desviación estándar que son *cercanas* pero no exactamente iguales a 1. A continuación, genere 100 valores de $\bar{x}$ con base en muestras de tamaño $n = 30$ al crear una columna de medias para los 100 renglones. Use **Calc** → **Row Statistics** y seleccione **Mean**. Para promediar las entradas en todas las 30 columnas, seleccione o teclee **C1-C30** en la caja de variables de Entrada y guarde los resultados en **C31** (véase la figura 7.19). Ahora podrá ver la distribución de las medias muestrales usando **Graph** → **Histogram** → **Simple**, seleccionando **C31** y dando un clic en **OK**. La distribución de las 100 medias muestrales generadas para nuestro ejemplo se ilustran en la figura 7.20.

FIGURA 7.18

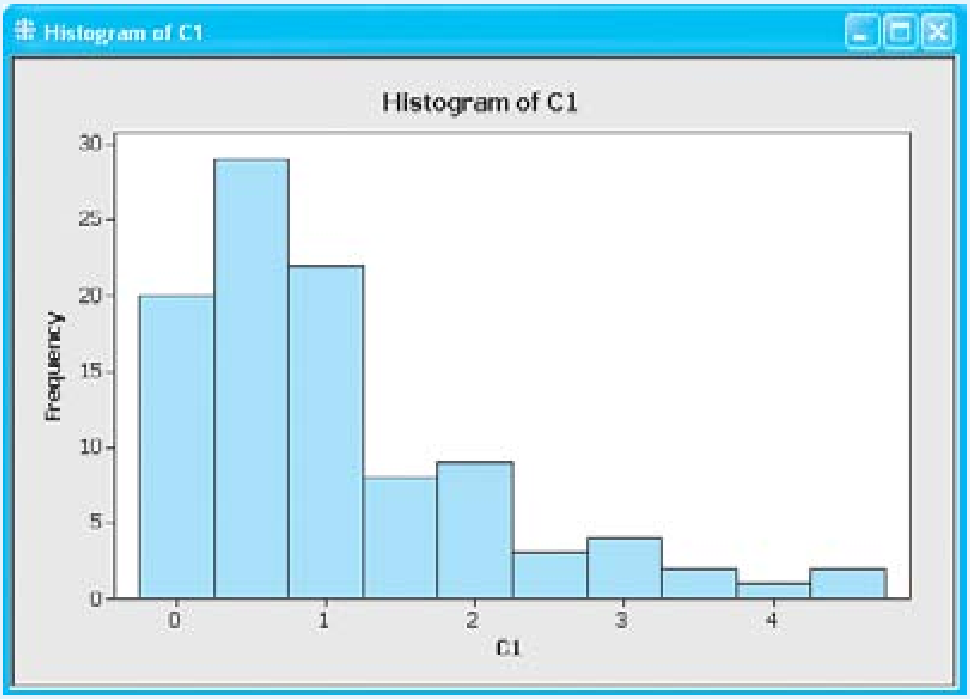


FIGURA 7.19

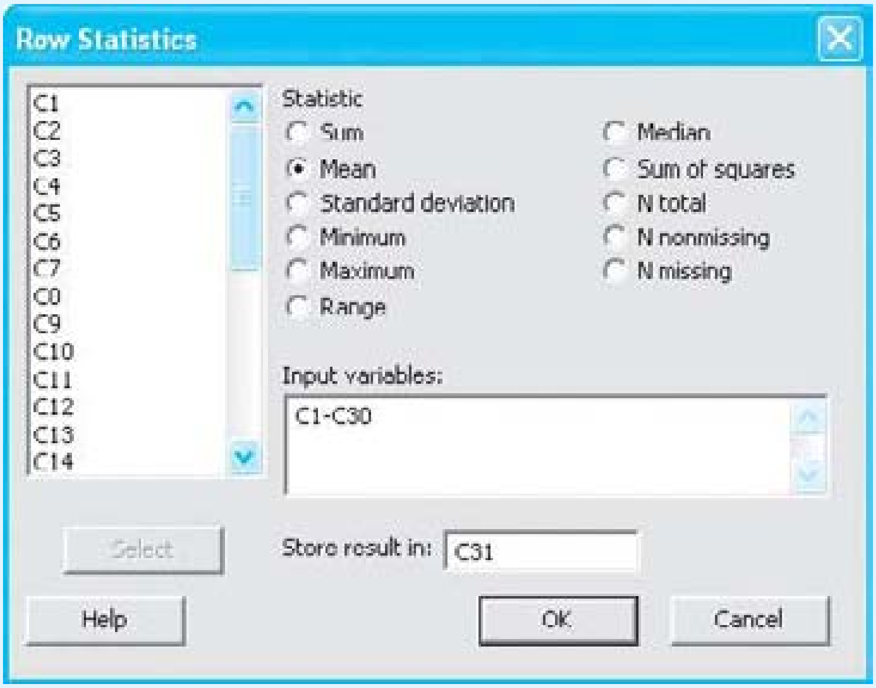
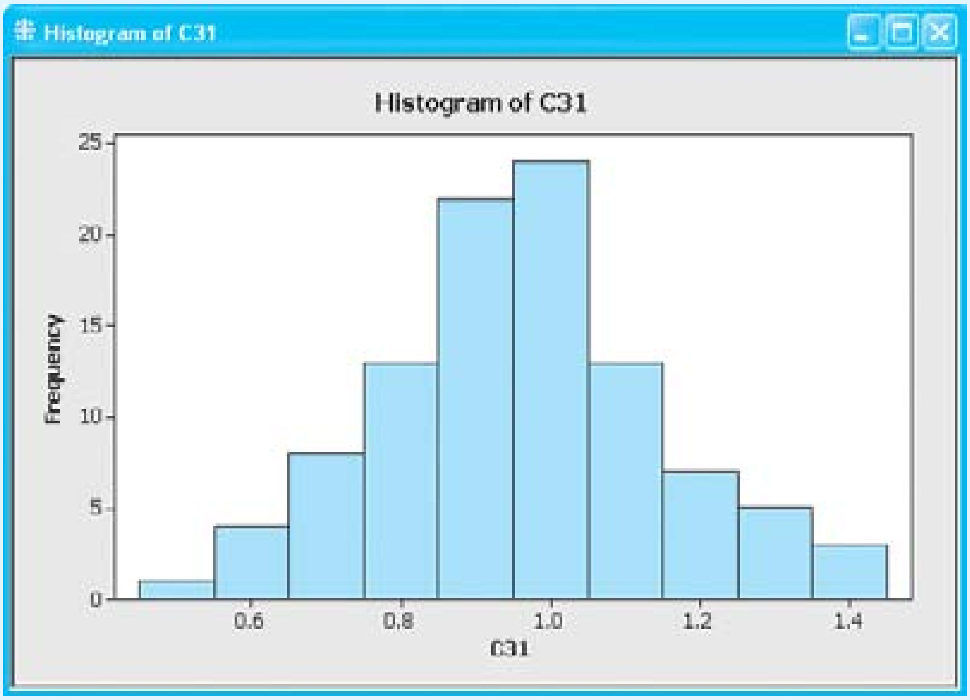


FIGURA 7.20



Observe la distintiva forma de montículo de la distribución de la figura 7.20 en comparación con la distribución original de la figura 7.18. También, si verifica las estadísticas descriptivas para C31, encontrará que la media y desviación estándar de nuestras 100 medias muestrales no son demasiado diferentes de los valores teóricos, $\mu = 1$ y $\sigma/\sqrt{n} = 1/\sqrt{30} = .18$. (Para nuestros datos, la media muestral es .9645 y la desviación estándar es .1875.) Como sólo teníamos 100 muestras, nuestros resultados no son *exactamente* iguales a los valores teóricos. Si hubiéramos generado un número *infinito* de muestras, hubiéramos obtenido una cantidad exacta. ¡Éste es el teorema del límite central en operación!

Ejercicios suplementarios

7.60 Una población finita consta de cuatro elementos: 6, 1, 3, 2.

a. ¿Cuántas muestras diferentes de tamaño $n = 2$ se pueden seleccionar de esta población si se muestrea sin reemplazo? (El muestreo se dice que es *sin reemplazo* si un elemento no puede ser seleccionado dos veces para la misma muestra.)

b. Haga una lista de posibles muestras de tamaño $n = 2$.

c. Calcule la media muestral para cada una de las muestras dadas en el inciso b).

d. Encuentre la distribución muestral de $\bar{x}$. Use un histograma de probabilidad para graficar la distribución muestral de $\bar{x}$.

e. Si los cuatro valores poblacionales son igualmente probables, calcule el valor de la media poblacional μ. ¿Alguna de las muestras de la lista del inciso b) producen un valor de $\bar{x}$ exactamente igual a μ?

7.61 Consulte el ejercicio 7.60. Encuentre la distribución muestral para $\bar{x}$ si muestras aleatorias de tamaño $n = 3$ se seleccionan *sin reemplazo*. Grafique la distribución muestral de $\bar{x}$.

7.62 Tubos de plomo Estudios realizados indican que el agua potable, suministrada por algunos viejos sistemas de tuberías con forro interior de plomo (cañerías) en las ciudades, puede contener niveles peligrosos de plomo. Un estudio importante del sistema de abastecimiento de agua de Boston mostró que la distribución de lecturas de contenido de plomo para muestras individuales de agua tenía una media y desviación estándar de aproximadamente .033 miligramos por litro (mg/l) y .10 mg/l, respectivamente.[15]

a. Explique por qué piensa usted que esta distribución está o no está normalmente distribuida.

b. Debido a que los investigadores están preocupados por la forma de la distribución del inciso a), calcularon el promedio de los niveles diarios de plomo en 40 lugares de cada uno de los 23 días seleccionados al azar. ¿Qué se puede decir acerca de la forma de la distribución del promedio de niveles diarios de plomo de los que se tomó la muestra de 23 días?

c. ¿Cuáles son la media y desviación estándar de la distribución del promedio de niveles de plomo en el inciso b)?

7.63 Biomasa La cantidad total de vegetación presente en los bosques de nuestro planeta es importante para ecologistas y políticos, porque las plantas verdes absorben bióxido de carbono. Una evaluación demasiado baja de la masa vegetativa de la Tierra, o biomasa, significa que gran parte del bióxido de carbono emitido por la actividad humana (principalmente por la quema de combustibles fósiles) no será absorbido y ocurrirá un aumento de bióxido de carbono que producirá alteración del clima. Estudios realizados[16] indican que la biomasa para bosques tropicales, estimada en unos 35 kilogramos por metro cuadrado (kg/m^2), puede en realidad ser demasiado alta y que los valores de biomasa tropical varían de una región a otra de alrededor de 5 a 55 kg/m^2. Supongamos que usted mide la biomasa tropical en 400 lugares seleccionados al azar, de un metro cuadrado cada uno.

a. Aproxime σ, la desviación estándar de las mediciones de biomasa.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio muestral se encuentre dentro de dos unidades del verdadero promedio de biomasa tropical?

c. Si el promedio muestral obtenido es $\bar{x} = 31.75$, ¿qué concluiría usted acerca de la estimación excesiva que preocupa a científicos?

7.64 Cascos de protección Los requisitos de seguridad para cascos de protección utilizados por trabajadores de la construcción y otros, establecidos por el American National Standards Institute (ANSI), especifican que cada uno de tres cascos pase la siguiente prueba. Se coloca un casco sobre una forma de cabeza de aluminio. Se deja caer una esfera de acero de 8 libras de peso sobre el casco desde una altura de 5 pies y se mide la fuerza resultante en la parte inferior de la forma de cabeza. La fuerza ejercida en la forma de cabeza por cada uno de los tres cascos debe ser menor a 1000 libras y el promedio de los tres debe ser menor a 850 libras. (Se desconoce la relación entre esta prueba y el daño real a una cabeza humana.) Suponga que la fuerza ejercida está normalmente distribuida y por tanto la media muestral de tres mediciones de la fuerza está normalmente distribuida. Si una muestra aleatoria de tres cascos se selecciona de un envío con una media igual a 900 y $\sigma = 100$, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral satisfaga la norma del ANSI?

7.65 Imágenes y memoria Un psicólogo investigador está planeando un experimento para determinar si el uso de imágenes, es decir describir una palabra en la mente, afecta la capacidad de las personas para aprender de memoria algo. El investigador desea usar dos grupos de sujetos: un grupo que memoriza un conjunto de 20 palabras usando la técnica de imágenes y un grupo que no usa imágenes.

a. Use una técnica de aleatorización para dividir un grupo de 20 individuos en dos grupos de igual tamaño.

b. ¿Cómo puede el investigador seleccionar al azar el grupo de 20 individuos?

c. Suponga que el investigador ofrece pagar $50 a cada participante del experimento y utiliza a los primeros 20 estudiantes que lo solicitan. ¿Este grupo se comportaría como si fuera una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 20$?

7.66 Abortos legales Los resultados de una encuesta del *Newsweek* respecto a puntos de vista sobre el aborto, dados en la tabla que sigue, muestran que no hay consenso sobre este asunto entre los estadounidenses.[17]

Encuesta del Newsweek realizada por Princeton Survey Research Associates International. Oct. 26-27, 2006. $N = 1002$ adultos en todo el país. MoE $\pm$ 3 (para todos los adultos).

"¿Con cuál lado del debate político sobre el problema del aborto simpatiza usted más: el movimiento del derecho a la vida que cree que el aborto es quitar la vida y debe ser proscrito; O BIEN, el movimiento a favor de elección libre que piensa que una mujer tiene el derecho a escoger qué hacer con su cuerpo, incluyendo decidir tener un aborto?" (Opciones alternadas)

	Derecho a la vida %	Elección libre %	Ninguno %	No está seguro %
Todos los adultos	39	53	3	5
Republicanos	62	31	4	3
Demócratas	25	69	2	4
Independientes	35	57	4	4

a. ¿Es éste un estudio de observación o un experimento planeado?

b. ¿Hay posibilidad de problemas en respuestas que surgen por la naturaleza un tanto sensible del tema? ¿Qué clases de sesgos podrían ocurrir?

7.67 Rábanos que brotan Un experimento de biología se diseñó para determinar si las semillas nacientes de rábanos inhiben la germinación de semillas de lechuga.[18] Se utilizaron tres cajas de Petri de 10 centímetros. La primera contenía 26 semillas de lechuga; la segunda, 26 semillas de rábano y, la tercera, 13 semillas de lechuga y 13 de rábano.

a. Suponga que el experimentador tenía un paquete de 50 semillas de rábanos y otro de 50 semillas de lechuga. Diseñe un plan para asignar al azar las semillas de rábanos y lechuga a los tres grupos de tratamiento.

b. ¿Qué suposiciones debe hacer el experimentador acerca de los paquetes de 50 semillas para asegurar lo aleatorio del experimento?

7.68 9/11 Un estudio de alrededor de $n = 1000$ personas en Estados Unidos, durante los días 21-22 de septiembre de 2001, dejó ver que 43% de quienes respondieron indicaron que estaban menos dispuestos a volar después de los eventos del 11 de septiembre de 2001.[19]

a. ¿Es éste un estudio de observación o un experimento diseñado?

b. ¿Qué problemas podrían haber ocurrido debido a la naturaleza sensible del tema? ¿Qué clases de sesgos podrían haber ocurrido?

7.69 Servicio telefónico Suponga que el ejecutivo de una compañía telefónica desea seleccionar una muestra aleatoria de $n = 20$ (se usa un número pequeño para simplificar el ejercicio) de entre 7000 clientes para un estudio de las actitudes de clientes respecto al servicio. Si los clientes se numeran con fines de identificación, indique los clientes a quienes incluiría usted en su muestra. Use la tabla de número aleatorio y explique cómo seleccionaría su muestra.

7.70 Rh positivo La proporción de personas con tipo de sangre Rh positivo es 85%. Usted tiene una muestra aleatoria de $n = 500$ personas.

a. ¿Cuáles son la media y desviación estándar de $\hat{p}$, la proporción muestral con tipo de sangre Rh positivo?

b. ¿La distribución de $\hat{p}$ es aproximadamente normal? Justifique su respuesta.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral $\hat{p}$ exceda de 82%?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral se encuentre entre 83% y 88%?

e. 99% del tiempo, ¿la proporción muestral estaría entre cuáles dos límites?

7.71 ¿Qué diseño de estudio se utiliza en cada una de estas situaciones?

a. Se selecciona una muestra aleatoria de $n = 50$ manzanas de ciudad y se realiza un censo por cada vivienda unifamiliar en cada manzana.

b. Una patrulla de caminos detiene a uno de cada 10 vehículos en una calle determinada, entre las 9:00 a.m. y las 3:00 p.m. para efectuar una revisión rutinaria sobre seguridad de tránsito.

c. Cien familias en cada una de cuatro delegaciones citadinas son encuestadas respecto a un referendo pendiente de desgravación de impuestos.

d. Se inspecciona uno de cada 10 árboles de una plantación de tala de pinos si está infestado del gusano barrenador.

e. Una muestra aleatoria de $n = 1000$ contribuyentes de la ciudad de San Bernardino es seleccionada por el Servicio de impuestos interno y se auditan sus declaraciones de impuestos.

7.72 Cargas de elevadores La carga máxima (con un generoso factor de seguridad) para el elevador de un edificio de oficinas es de 2000 libras. La distribución de frecuencia relativa de los pesos de todos los hombres y mujeres que usan el elevador tiene forma de montículo (ligeramente sesgada a los pesos pesados), con una media μ igual a 150 libras y desviación estándar σ de 35 libras. ¿Cuál es el número máximo de personas que se pueden permitir en el elevador, si se desea que el peso total de ellas exceda del peso máximo con una pequeña probabilidad (por ejemplo, cercano a .01)? (SUGERENCIA: Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son observaciones independientes hechas en una variable aleatoria x, y si x tiene media μ y varianza σ^2, entonces la media y varianza de Σx_i son $n\mu$ y $n\sigma^2$, respectivamente. Este resultado se dio en la sección 7.4.)

7.73 Paquetes de alambrado El número de paquetes de alambrado que pueden ser ensamblados por los empleados de una compañía tiene una distribución normal, con una media igual a 16.4 por hora y una desviación estándar de 1.3 por hora.

a. ¿Cuáles son la media y desviación estándar del número x de paquetes producidos por trabajador en un día de 8 horas?

b. ¿Se espera que la distribución de probabilidad de x sea de forma de montículo y aproximadamente normal? Explique.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador produzca al menos 135 paquetes por día de 8 horas?

7.74 Paquetes de alambrado, continúa Consulte el ejercicio 7.73. Suponga que la compañía emplea 10 ensambladores de paquetes de alambrado.

a. Encuentre la media y desviación estándar de la producción diaria de la compañía (día de 8 horas) de paquetes de alambrado.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la producción diaria de la compañía sea menor a 1280 paquetes de alambrado por día?

MIS DATOS EX0775

7.75 Focos defectuosos La tabla siguiente es una lista del número de focos defectuosos de 60 watts, hallados en muestras de 100 focos seleccionados en 25 días del proceso de un fabricante. Suponga que durante estos 25 días el proceso de manufactura no estuvo produciendo una parte excesivamente grande de focos defectuosos.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Defectuosos	4	2	5	8	3	4	4	5	6	1

Día	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Defectuosos	2	4	3	4	0	2	3	1	4	0

Día	21	22	23	24	25
Defectuosos	2	2	3	5	3

a. Construya una gráfica p para vigilar el proceso de manufactura y grafique los datos.

b. ¿Qué tan grande debe ser la fracción de artículos defectuosos en una muestra seleccionada del proceso de manufactura, antes que se considere que el proceso está fuera de control?

c. Durante un día determinado, suponga que una muestra de 100 artículos se selecciona del proceso de manufactura y se encuentran 15 focos defectuosos. Si se toma una decisión de cerrar el proceso de manufactura, en un intento por localizar la fuente de la variación sobreentendida controlable, explique la forma en que esta decisión puede llevar a conclusiones erróneas.

7.76 Focos, continúa Una cadena de ferreterías compra grandes cantidades de focos, del fabricante descrito en el ejercicio 7.75 y especifica que cada embarque debe contener no más de 4% de defectuosos. Cuando el proceso de manufactura está en control, ¿cuál es la probabilidad de que sean satisfechas las especificaciones de la cadena de ferreterías?

7.77 Focos, otra vez Consulte el ejercicio 7.75. Durante una semana determinada, el número de focos defectuosos en cada una de cinco muestras de entre 100 se encontraron 2, 4, 9, 7 y 11. ¿Hay razón para creer que el proceso de producción ha estado produciendo una proporción excesiva de focos defectuosos en cualquier tiempo durante la semana?

MIS DATOS EX0778

7.78 Tomates enlatados Durante largas series de producción de tomates enlatados, los pesos promedio (en onzas) de muestras de cinco latas de tomates de calidad estándar, en forma de puré, se tomaron en 30 puntos de control durante un periodo de 11 días. Estos resultados se muestran en la tabla.[20] Cuando la máquina está funcionando normalmente, el peso promedio por lata es de 21 onzas con una desviación estándar de 1.20 onzas.

a. Calcule los límites superior e inferior de control y la línea del centro para la gráfica $\bar{x}$.

b. Grafique los datos muestrales en la gráfica $\bar{x}$ y determine si la operación de la máquina está en control.

Muestra número	Peso promedio	Muestra número	Peso promedio
1	23.1	16	21.4
2	21.3	17	20.4
3	22.0	18	22.8
4	21.4	19	21.1
5	21.8	20	20.7
6	20.6	21	21.6
7	20.1	22	22.4
8	21.4	23	21.3
9	21.5	24	21.1
10	20.2	25	20.1
11	20.3	26	21.2
12	20.1	27	19.9
13	21.7	28	21.1
14	21.0	29	21.6
15	21.6	30	21.3

Fuente: Adaptado de J. Hackl, *Journal of Quality Technology*, abril de 1991. Utilizado con permiso.

7.79 Pepsi o Coca La batalla por la preferencia del consumidor continúa entre Pepsi y Coca-Cola. ¿Cómo se pueden conocer las preferencias de usted? Hay una página web donde se puede votar por una de las dos bebidas de cola si da un clic en el vínculo que dice PAY CASH por su opinión. Explique por qué quienes responden no representan una muestra aleatoria de las opiniones de compradores o consumidores de estos refrescos. Explique los tipos de distorsiones que podrían comenzar a notarse en una encuesta de opiniones en internet.

7.80 Fresas Un experimentador desea hallar una temperatura apropiada a la cual almacenar fresas frescas, para reducir al mínimo la pérdida de ácido ascórbico. Hay 20 recipientes de almacenamiento, cada uno con temperatura controlable, en los que se pueden guardar fresas. Si han de usarse dos temperaturas de almacenamiento, ¿cómo podría el experimentador asignar los 20 contenedores a una de las dos temperaturas?

7.81 Llenado de latas de refrescos Un embotellador de bebidas gaseosas empaca latas en paquetes de seis. Suponga que el líquido por lata tiene una distribución normal aproximada con una media de 12 onzas de líquido y una desviación estándar de 0.2 onzas de líquido.

a. ¿Cuál es la distribución del total de líquido para una caja de 24 latas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el total de líquido para una caja sea menor a 286 onzas de líquido?

c. Si un paquete de seis latas de refresco se puede considerar como muestra aleatoria de tamaño $n = 6$ de la población, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de líquido por lata para un paquete de seis latas de refresco sea menor a 11.8 onzas de líquido?

7.82 Peso total al envasar Paquetes de alimento cuyo peso promedio es 16 onzas, con desviación estándar de 0.6 onzas, se envían en cajas de 24 paquetes. Si los pesos de paquete están normalmente distribuidos en forma aproximada, ¿cuál es la probabilidad de que una caja de 24 paquetes pese más de 392 onzas (24.5 libras)?

7.83 Componentes electrónicos Un proceso de manufactura está diseñado para producir un componente electrónico para uso en pequeños televisores portátiles. Los componentes son todos de tamaño estándar y no necesitan apegarse a ninguna característica mensurable, pero a veces son inoperables cuando emergen del proceso de manufactura. Se seleccionaron 15 muestras del proceso por tiempos cuando se sabía que el proceso estaba en control. Quince componentes se observaron dentro de cada muestra y se registró el número de componentes inoperables.

6, 7, 3, 5, 6, 8, 4, 5, 7, 3, 1, 6, 5, 4, 5

Construya una gráfica p para vigilar el proceso de manufactura.

MI APPLET Ejercicios

7.84 Dados Consulte el experimento de lanzar un dado con $n = 1$ en la sección 7.4, en el que x es el número en la cara superior de un solo dado balanceado.

a. Use las fórmulas de la sección 4.8 para verificar que $\mu = 3.5$ y $\sigma = 1.71$ para esta población.

b. Use el applet **Central Limit Theorem** para tirar un solo dado al menos 2000 veces. (Su simulación se puede hacer rápidamente usando el botón Roll 100 Sets.) ¿Cuáles son la media y desviación estándar de estas 2000 observaciones? ¿Cuál es la forma del histograma?

c. Compare los resultados del inciso b) con la distribución real de probabilidad que se muestra en la figura 7.3 y la media real y desviación estándar en el inciso a). Deben ser similares.

7.85 Dados Se lanzan dos dados balanceados y se registra el número promedio de las dos caras superiores.

a. Use los valores $\mu = 3.5$ y $\sigma = 1.71$ del ejercicio 7.84. ¿Cuáles son la media y desviación estándar teóricas de la distribución muestral para $\bar{x}$?

b. Use el applet **Central Limit Theorem** para lanzar un solo dado al menos 2000 veces. (Su simulación se puede hacer rápidamente usando el botón Roll 100 Sets.) ¿Cuáles son la media y desviación estándar de estas 2000 observaciones? ¿Cuál es la forma del histograma?

c. Compare los resultados del inciso b) con la distribución real de probabilidad que se ve en la figura 7.4 y la media y desviación estándar reales del inciso a).

7.86 Repita las instrucciones del ejercicio 7.85 cuando se lancen tres dados.

7.87 Repita las instrucciones del ejercicio 7.85 cuando se lancen cuatro dados.

7.88 Suponga que una muestra aleatoria de $n = 5$ observaciones se selecciona de una población que está normalmente distribuida, con media igual a 1 y desviación estándar igual a .36.

a. Dé la media y desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{x}$.

b. Encuentre la probabilidad de que $\bar{x}$ exceda de 1.3, usando el applet **Normal Probabilities for Means**.

c. Encuentre la probabilidad de que la media muestral $\bar{x}$ sea menor a .5.

d. Encuentre la probabilidad de que la media muestral se desvíe de la media poblacional $\mu = 1$ en más de .4.

7.89 Baterías Se sabe que cierto tipo de baterías para automóvil dura un promedio de 1110 días con una desviación estándar de 80 días. Si 400 de estas baterías se seleccionan, use el applet **Normal Probabilities for Means** para hallar las siguientes probabilidades para la duración promedio de vida de las baterías seleccionadas:

a. El promedio está entre 1100 y 1110.

b. El promedio es mayor a 1120.

c. El promedio es menor a 900.

CASO PRÁCTICO

Muestreo de la Ruleta de Monte Carlo

La técnica de simular un proceso que contiene elementos aleatorios y repetir el proceso una y otra vez, para ver cómo se comporta, recibe el nombre de **método de Monte Carlo**. Se usa ampliamente en finanzas y otros campos para investigar las propiedades de una operación que está sujeta a efectos aleatorios, por ejemplo el clima, la conducta humana, etcétera. Por ejemplo, se podría modelar el comportamiento del inventario de una compañía manufacturera al crear, en papel, llegadas y salidas diarias de productos manufacturados desde el almacén de la compañía. Cada día, un número aleatorio de artículos producidos por la compañía sería recibido en inventario. Del mismo modo, cada día un número aleatorio de pedidos de diferentes tamaños aleatorios se enviaría. Con base en la entrada y salida de artículos, se podría calcular el inventario o sea el número de artículos disponibles al finalizar cada día. Los valores de las variables aleatorias, el número de artículos producidos, el número de pedidos y el número de artículos por pedido necesarios para la simulación de cada día, se obtendría de distribuciones teóricas de observaciones que modelan muy de cerca las correspondientes distribuciones de las variables que se han observado en el tiempo de la operación de manufactura. Al repetir la simulación del suministro, el envío y el cálculo del inventario diario para un gran número de días (un muestreo de lo que podría realmente ocurrir), se puede observar el comportamiento del inventario diario de la planta. El método de Monte Carlo es particularmente valioso porque hace posible que el fabricante vea cómo se comportaría el inventario diario, cuando se hacen ciertos cambios en el patrón de abastecimiento o en algún otro aspecto de la operación que podría ser controlado.

En un artículo titulado “El Camino a Monte Carlo”, Daniel Seligman comenta sobre el método de Monte Carlo, observando que aun cuando la técnica se utiliza ampliamente en escuelas de finanzas para estudiar el presupuesto de capital, planeación de inventarios y administración de flujos de efectivo, nadie parece haber usado el procedimiento para estudiar lo bien que la haríamos si fuéramos a jugar en Monte Carlo.[21]

Para seguir sobre esta idea, Seligman programó su computadora personal para simular el juego de la ruleta. La ruleta es una rueda con su borde dividido en 38 buchacas. Treinta y seis de éstas están numeradas del 1 al 36 y tienen colores alternados de rojo y negro. Las dos buchacas restantes tienen color verde y están marcadas 0 y 00. Para jugar en la ruleta, se apuesta cierta cantidad de dinero a una o más buchacas, a continuación de lo cual la rueda se hace girar hasta detenerse. Una pequeña esfera cae en una ranura en la rueda para indicar el número ganador. Si usted tiene dinero en ese número, gana una cantidad especificada. Por ejemplo, si fuera a jugar el número 20, la paga sería 35 a 1. Si la rueda no se detiene en ese número, usted pierde su apuesta. Seligman decidió ver cómo serían sus ganancias (o pérdidas) nocturnas si fuera a apostar \$5 en cada giro de la rueda y repetir el proceso 200 veces por noche. Hizo esto 365 veces, con lo cual simulaba los resultados de 365 noches en el casino. Sin ninguna sorpresa, la “ganancia” media por noche de \$1000 para las 365 noches fue una *pérdida* de \$55, el promedio de las ganancias retenidas por la casa. La sorpresa, de acuerdo con Seligman, fue la extrema variabilidad de las “ganancias” nocturnas. Siete veces, de entre las 365, el jugador ficticio perdió la apuesta de \$1000 y sólo una vez ganó un máximo de \$1160. En 141 noches, la pérdida fue más de \$250.

1. Para evaluar los resultados del experimento de Monte Carlo de Seligman, primero encuentre la distribución de probabilidad de la ganancia x en una sola apuesta de \$5.
2. Encuentre el valor y varianza esperados de la ganancia x del punto 1.

3. Encuentre el valor esperado y varianza para la ganancia de la noche, la suma de las ganancias o pérdidas para las 200 apuestas de $5 cada una.
4. Use los resultados del punto 2 para evaluar la probabilidad de que 7 de entre 365 noches resulten en una pérdida de la apuesta total de $1000.
5. Use los resultados del punto 3 para evaluar la probabilidad de que las ganancias más grandes de la noche fuera de hasta $1160.

8

Estimación de muestras grandes

© Hughstoneian/Dreamstime

OBJETIVO GENERAL

En capítulos previos, usted ya se enteró de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias y las distribuciones muestrales de varias estadísticas que, para tamaños muestrales grandes, pueden ser aproximadas por una distribución normal de acuerdo con el teorema del límite central. Este capítulo presenta un método para estimar parámetros poblacionales e ilustra el concepto con ejemplos prácticos. El teorema del límite central y las distribuciones muestrales presentadas en el capítulo 7 desempeñan un papel clave para evaluar la confiabilidad de estimaciones.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo estimo una media o proporción poblacional?
¿Cómo escojo el tamaño muestral?

¿Qué tan confiable es la encuesta?

¿Hacer encuestas nacionales por las organizaciones de Harris y Gallup, los medios de comunicación y otras brindan estimaciones precisas de los porcentajes de personas en Estados Unidos que tienen diversos hábitos alimenticios? El Caso práctico al final de este capítulo examina la confiabilidad de una encuesta realizada por CBS News, utilizando teoría de estimación de muestras grandes.

8.1 DÓNDE HEMOS ESTADO

Los primeros siete capítulos de este libro han dado a usted el material que necesitará para entender una inferencia estadística y cómo puede aplicarse ésta en situaciones prácticas. Los primeros tres capítulos se refieren al uso de estadísticas descriptivas, tanto gráficas como numéricas, para describir e interpretar conjuntos de mediciones. En los siguientes tres capítulos vimos probabilidad y distribuciones de probabilidad, que son las herramientas básicas empleadas para describir *poblaciones* de mediciones. Las distribuciones binomiales y normales se destacaron como importantes para aplicaciones prácticas. Numerosas estadísticas son sumas o promedios calculados de mediciones muestrales. El teorema del límite central dice que, incluso si las poblaciones muestrales no son normales, las distribuciones muestrales de esas *estadísticas* serán aproximadamente normales cuando el tamaño muestral n es grande. Estas estadísticas son las herramientas que se usarán para *estadísticas inferenciales*, es decir, hacer inferencias acerca de una población usando información contenida en una muestra.

8.2 A DÓNDE VOY; INFERENCIA ESTADÍSTICA

La inferencia, específicamente la toma y predicción de decisiones, tiene siglos de antigüedad y desempeña un papel muy importante en la vida de casi todas las personas. Veamos a continuación algunas aplicaciones:

- El gobierno necesita predecir las tasas de interés a corto y largo plazos.
- Un corredor financiero desea pronosticar el comportamiento del mercado de acciones.
- Un metalurgista desea determinar si un nuevo tipo de acero es más resistente a altas temperaturas que el actual.
- Una consumidora desea estimar el precio de venta de su casa antes de ponerla en el mercado.

MI CONSEJO

Parámetro ⇔ **p**oblación.
Estadística ⇔ **m**uestra.

Hay muchas formas de tomar estas decisiones o predicciones, algunas son subjetivas y otras son objetivas por naturaleza. ¿Qué tan buenas serán las predicciones o decisiones? Aun cuando usted pueda pensar que su propia capacidad de tomar decisiones es muy buena, la experiencia sugiere que éste puede no ser el caso. Es la función del estadístico matemático dar métodos de toma de inferencia estadística son mejores y más confiables que únicamente cálculos subjetivos.

La inferencia estadística se ocupa de tomar decisiones o predicciones acerca de **parámetros**, es decir, las medidas numéricas descriptivas que caracterizan a una población. Tres parámetros que encontramos en capítulos anteriores son la media poblacional μ, la desviación poblacional estándar σ y la proporción binomial p. En inferencia estadística, un problema práctico se expone de otra forma en el marco de una población con un parámetro específico de interés. Por ejemplo, el metalurgista podría medir el *promedio* de coeficientes de expansión de ambos tipos de acero y luego comparar sus valores.

Los métodos para hacer inferencias acerca de parámetros poblacionales caen en una de dos categorías:

- **Estimación:** Estimar o predecir el valor del parámetro
- **Prueba de hipótesis:** Tomar una decisión acerca del valor de un parámetro, con base en alguna idea preconcebida acerca de cuál podría ser su valor

EJEMPLO 8.1

Los circuitos en computadoras y otros equipos electrónicos están formados por una o más tarjetas de circuito impreso (PCB) y es frecuente que las computadoras sean reparadas con sólo cambiar una o más de estas tarjetas. En un intento por hallar el ajuste apropiado de un proceso de chapa aplicado a uno de los lados de una PCB, un supervisor de producción podría *estimar* el grosor aproximado de chapa de cobre en las PCB usando muestras de varios días de operación. Como no sabe del grosor promedio μ antes de observar el proceso de producción, el suyo es un problema de *estimación.*

EJEMPLO 8.2

El supervisor del ejemplo 8.1 recibe instrucciones del propietario de la planta de que el grosor de la chapa de cobre no debe ser menor a .001 de pulgada, para que el proceso esté en control. Para decidir si el proceso está o no está en control, el supervisor debe formular una prueba. Podría *hacer una hipótesis* de que el proceso está en control, es decir, suponer que el grosor promedio de la chapa de cobre es .001 o más, y usar muestras de varios días de operación para decidir si es o no es correcta su hipótesis. El método de la toma de decisión del supervisor se denomina *prueba de hipótesis.*

¿Cuál método de inferencia debe usarse? Esto es, ¿el parámetro debe ser estimado o se debe probar una hipótesis respecto a su valor? La respuesta está dictada por la pregunta práctica planteada y a veces es determinada por preferencias personales. Como la estimación y las pruebas de hipótesis se usan con frecuencia en literatura científica, incluimos ambos métodos en éste y el siguiente capítulo.

Un problema estadístico, que comprende planeación, análisis y toma de inferencias, está incompleto sin una medida de la **bondad de la inferencia**. Esto es, ¿qué tan preciso o confiable es el método empleado? Si una corredora financiera predice que el precio de una acción será de $80 el próximo lunes, ¿estaría usted dispuesto a tomar acciones para comprar o vender su acción sin saber qué tan confiable es la predicción de ella? ¿La predicción estará a no más de $1, $2 o $10 del precio real el próximo lunes? Los procedimientos estadísticos son importantes porque dan dos tipos de información:

- Métodos para hacer la inferencia
- Una medida numérica de la bondad o confiabilidad de la inferencia

8.3 TIPOS DE ESTIMADORES

Para estimar el valor de un parámetro poblacional, se puede usar información de la muestra en la forma de un **estimador**. Los estimadores se calculan usando información de las observaciones muestrales y, en consecuencia, por definición son también *estadísticas*.

Definición Un **estimador** es una regla, generalmente expresada como fórmula, que nos dice cómo calcular una estimación basada en información de la muestra.

Los estimadores se usan en dos formas diferentes:

- **Estimación puntual:** Con base en datos muestrales, se calcula un solo número para estimar el parámetro poblacional. La regla o fórmula que describe este cálculo se denomina **estimador puntual** y el número resultante recibe el nombre de **estimación puntual**.

- **Estimación de intervalo:** Con base en datos muestrales, dos números se calculan para formar un intervalo dentro del cual se espera esté el parámetro. La regla o fórmula que describe este cálculo se denomina **estimador de intervalo** y el par de números resultantes se llama **estimación de intervalo** o **intervalo de confianza**.

EJEMPLO 8.3

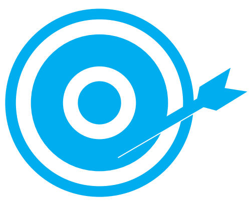
Un veterinario desea estimar el aumento mensual promedio en el peso de cachorros de raza golden retriever, de 4 meses de edad, que han sido puestos a dieta de carne de cordero y arroz. La *población* está formada por los aumentos mensuales en el peso de todos los cachorros de raza golden retriever a los que se da esta dieta particular. El veterinario desea estimar el parámetro desconocido μ, el aumento mensual promedio en el peso para esta población *hipotética*. Un posible *estimador* basado en datos muestrales es la media muestral, $\bar{x} = \Sigma x_i/n$. Podría usarse en la forma de un solo número o *estimación puntual*, por ejemplo 3.8 libras, o podría usarse una *estimación de intervalo* y estimar que el aumento promedio en el peso será entre 2.7 y 4.9 libras.

Los procedimientos de estimación tanto puntuales como de intervalo usan información dada por la distribución muestral del estimador específico que se haya escogido para usarse. Empezaremos por exponer la *estimación puntual* y su uso para estimar medias poblacionales y proporciones.

8.4 ESTIMACIÓN PUNTUAL

MI CONSEJO

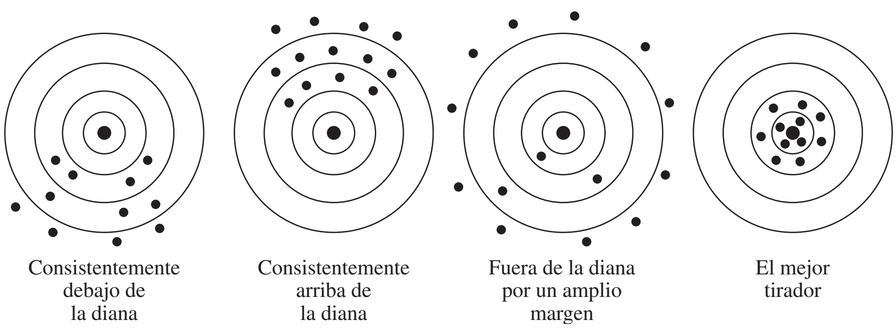
Parámetro = diana del blanco.
Estimador = bala o flecha.



En una situación práctica, puede haber varias estadísticas que podrían usarse como estimadores puntuales para un parámetro poblacional. Para determinar cuál de las opciones es mejor, usted necesita saber cómo se comporta el estimador en muestreo repetido, descrito por su *distribución muestral.*

Por medio de analogía, considere en disparar un revólver a un blanco. El parámetro de interés es la diana a la cual se disparan balas. Cada bala representa una sola estimación muestral, disparada por el revólver, que representa el estimador. Suponga que un amigo dispara una sola bala y acierta en la diana. ¿Se puede concluir que él es un excelente tirador? ¿Se pondría usted de pie junto al blanco cuando él dispare una segunda bala? Es probable que no, porque no tiene medida de lo bien que él dispare en intentos repetidos. ¿Siempre acierta en el blanco o sus tiros son demasiado altos o demasiado bajos en forma consistente? ¿Sus tiros se agrupan alrededor del blanco o fallan acertar en el blanco por un amplio margen? La figura 8.1 muestra varias configuraciones del blanco. ¿Cuál blanco escogería usted como perteneciente al mejor tiro?

FIGURA 8.1
¿Cuál tirador es el mejor?

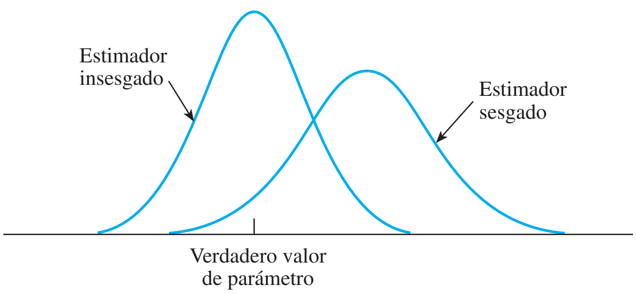


Las distribuciones muestrales dan información que se puede usar para seleccionar el **mejor estimador**. ¿Qué características serían valiosas? Primero, la **distribución muestral del estimador puntual debe estar centrada sobre el verdadero valor del parámetro a ser estimado**. Esto es, el estimador no debe subestimar o sobreestimar de manera consistente al parámetro de interés. Un estimador como éste se dice que es **insesgado**.

Definición Se dice que un estimador de un parámetro es **insesgado** si la media de su distribución es igual al verdadero valor del parámetro. De otro modo, se dice que el estimado está **sesgado**.

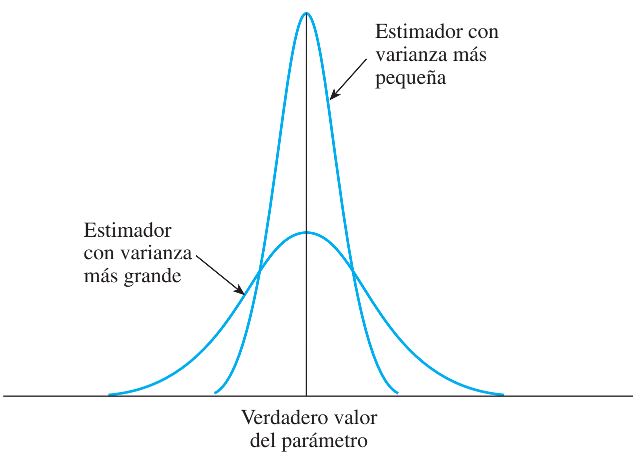
Las distribuciones muestrales para un estimador insesgado y estimador sesgado se ven en la figura 8.2. La distribución muestral para el estimador sesgado está corrida a la derecha del verdadero valor del parámetro. Este estimador sesgado es más probable que uno insesgado para sobreestimar el valor del parámetro.

FIGURA 8.2
Distribuciones para estimadores sesgados e insesgados



La segunda característica deseable de un estimador es que **la dispersión** (**medida por la varianza**) **de la distribución muestral debe ser tan pequeña como sea posible**. Esto asegura que, con una alta probabilidad, una estimación individual caerá cerca del valor verdadero del parámetro. Las distribuciones muestrales para dos estimadores insesgados, una con una varianza pequeña† y la otra con una varianza más grande, como se ve en la figura 8.3.

FIGURA 8.3
Comparación de variabilidad de un estimador



† En general, los estadísticos usan el término *varianza de un estimador* cuando en realidad es la varianza de la distribución muestral del estimador. Esta expresión contraída se usa casi universalmente.

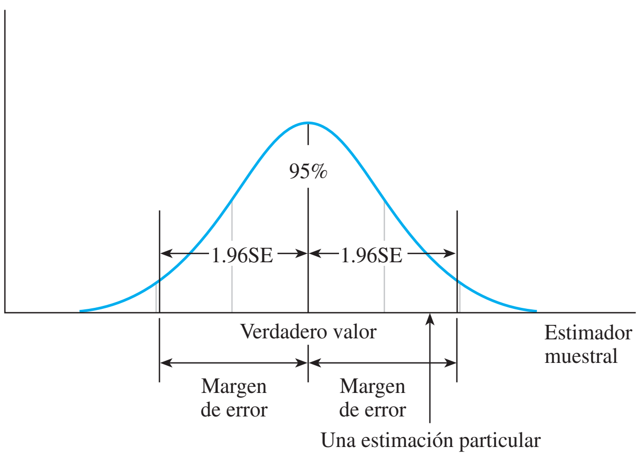
Por supuesto que sería preferible el estimador con la varianza más pequeña, porque las estimaciones tienden a estar más cerca del verdadero valor del parámetro que en la distribución con la varianza más grande.

En situaciones muestrales prácticas, es posible saber que la distribución muestral de un estimador está centrada alrededor del parámetro que se trate de estimar, pero todo lo que se tiene es la estimación calculada de las n mediciones contenidas en la muestra. ¿A qué distancia del verdadero valor del parámetro estará esta estimación? ¿Qué tan cercana está la diana o blanco de la bala del tirador? La distancia entre la estimación y el verdadero valor del parámetro se denomina **error de estimación**.

Definición La distancia entre una estimación y el parámetro estimado recibe el nombre de **error de estimación**.

En este capítulo, usted puede suponer que los tamaños muestrales son siempre grandes y, por tanto, que los estimadores *insesgados* que estudiará tienen distribuciones muestrales que pueden ser aproximadas por una distribución normal (por el teorema del límite central). Recuerde que, para cualquier estimador puntual con una distribución normal, la regla empírica dice que aproximadamente 95% de todas las estimaciones puntuales estarán a no más de dos (o más exactamente, 1.96) desviaciones estándar de la media de esa distribución. Para estimadores *insesgados*, esto implica que la diferencia entre el estimador puntual y el verdadero valor del parámetro será menor a 1.96 desviaciones estándar o 1.96 errores estándar (SE). Esta cantidad, llamada el 95% de **margen de error** (o simplemente "**margen de error**"), da un límite superior práctico para el error de estimación (véase la figura 8.4). Es posible que el error de estimación exceda este margen de error, pero eso es muy poco probable.

FIGURA 8.4
Distribución muestral de un estimador insesgado



MI CONSEJO

95% de margen de error $=$ 1.96 $\times$ error estándar.

ESTIMACIÓN PUNTUAL DEL PARÁMETRO DE UNA POBLACIÓN

- Estimador puntual: estadística calculada usando mediciones muestrales
- 95% de margen de error: 1.96 $\times$ error estándar del estimador

Las distribuciones muestrales para dos estimadores puntuales insesgados se estudiaron en el capítulo 7. Se puede demostrar que estos dos estimadores puntuales tienen la *mínima variabilidad* de todos los estimadores insesgados y, por lo tanto, son los *mejores estimadores* que se pueden hallar en cada situación.

La variabilidad del estimador se mide usando este error estándar. No obstante, usted podrá haber observado que el error estándar suele depender de parámetros desconocidos, por ejemplo σ o p. Estos parámetros deben estimarse usando estadísticas muestrales como son s y $\hat{p}$. Aun cuando no exactamente correcto, por lo general los experimentadores se refieren al error estándar estimado como *el error estándar*.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo estimo una media o proporción poblacional?

- Para estimar la media poblacional μ para una población cuantitativa, el estimador puntual $\bar{x}$ es *insesgado* con el error estándar estimado como

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}}^{\dagger}$$

El 95% de margen de error cuando $n \geq 30$ se estima como

$$\pm 1.96\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

- Para estimar la proporción poblacional p para una población binomial, el estimador puntual $\hat{p} = x/n$ es *insesgado*, con un error estándar estimado como

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

El 95% de margen de error se estima como

$$\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Suposiciones: $n\hat{p} > 5$ y $n\hat{q} > 5$.

EJEMPLO 8.4

Un ambientalista está realizando un estudio del oso polar, especie que se encuentra en el océano Ártico y sus alrededores. Su zona de distribución está limitada por la existencia de hielo en el mar, que usan como plataforma para cazar focas, principal sostén de los osos. La destrucción de su hábitat en el hielo del Ártico, que se ha atribuido al calentamiento global, amenaza la supervivencia de los osos como especie; puede extinguirse antes de un siglo.[1] Una muestra aleatoria de $n = 50$ osos polares produjo un peso promedio de 980 libras con una desviación estándar de 105 libras. Use esta información para estimar el peso promedio de todos los osos polares del Ártico.

Solución La variable aleatoria medida es el peso, una variable aleatoria cuantitativa mejor descrita por su media μ. La estimación puntual de μ, el peso promedio de todos los osos polares del Ártico, es $\bar{x} = 980$ libras. El margen de error se estima como

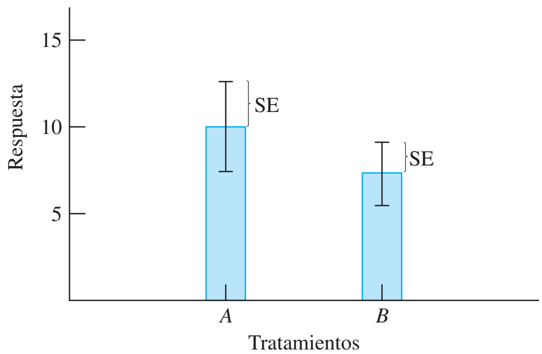
$$1.96\ SE = 1.96\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1.96\left(\frac{105}{\sqrt{50}}\right) = 29.10 \approx 29 \text{ libras}$$

† Cuando se muestrea a partir de una distribución normal, $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ tiene una distribución t, que se estudiará en el capítulo 10. Cuando la muestra es *grande*, este estadístico se encuentra distribuido normalmente en forma aproximada si la población muestreada es normal o no normal.

Se puede tener confianza en que la estimación muestral de 980 libras está a no más de $\pm$ 29 libras de la media poblacional.

Al reportar resultados de una investigación, es frecuente que los investigadores agreguen ya sea la desviación muestral estándar s (a veces llamada SD) o el error estándar $s/\sqrt{n}$ (por lo general llamado SE o SEM) a las estimaciones de medias poblacionales. Siempre se debe buscar una explicación en el texto del informe que diga si el investigador está informando $\bar{x} \pm$ SD o $\bar{x} \pm$ SE. Además, las medias muestrales y desviaciones estándar o errores estándar se presentan como "barras de error" usando el formato gráfico que se ve en la figura 8.5.

FIGURA 8.5
Gráfica de medias de tratamiento y sus errores estándar



EJEMPLO 8.5

Además del peso promedio del oso polar del Ártico, el ambientalista del ejemplo 8.4 también está interesado en las opiniones de adultos sobre el tema del calentamiento global. En particular, desea estimar la proporción de personas que piensan que el calentamiento global es un problema muy serio. En una muestra aleatoria de $n = 100$ adultos, 73% de la muestra indicaron que, de lo que han oído o leído, el calentamiento global es un problema muy serio. Estime la verdadera proporción de población de adultos que piensan que el calentamiento global es un problema muy serio y encuentre el margen de error para la estimación.

Solución El parámetro de interés es ahora p, la proporción de personas en la población que piensan que el calentamiento global es un problema muy serio. El mejor estimador de p es la proporción muestral $\hat{p}$, que para esta muestra es $\hat{p} = .73$. Para hallar el margen de error, usted puede aproximar el valor de p con su estimación $\hat{p} = .73$:

$$1.96 \text{ SE} = 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{.73(.27)}{100}} = .09$$

Con este margen de error, se puede estar bastante cierto de que la estimación de .73 está dentro de $\pm$ .09 del verdadero valor de p. En consecuencia, se puede concluir que el verdadero valor de p podría ser de sólo .64 o de hasta .82. Este margen de error es bastante grande cuando se compare con la estimación misma y refleja el hecho de que se requiere de muestras grandes para alcanzar un pequeño margen de error cuando se estime p.

TABLA 8.1 **Algunos valores calculados de $\sqrt{pq}$**

p	pq	$\sqrt{pq}$	p	pq	$\sqrt{pq}$
.1	.09	.30	.6	.24	.49
.2	.16	.40	.7	.21	.46
.3	.21	.46	.8	.16	.40
.4	.24	.49	.9	.09	.30
.5	.25	.50			

La tabla 8.1 muestra la forma en que el numerador del error estándar de $\hat{p}$ cambia para diversos valores de p. Observe que, para casi todos los valores de p, en especial cuando p está entre .3 y .7, hay muy poco cambio en $\sqrt{pq}$, el numerador del SE, que alcanza su máximo valor cuando $p = .5$. Esto significa que el margen de error usando el estimador $\hat{p}$ también será máximo cuando $p = .5$. Cuando estiman p, algunos entrevistadores rutinariamente usan el margen máximo de error, que a veces recibe el nombre de **error muestrale**, en cuyo caso calculan

$$1.96\ \text{SE} = 1.96\sqrt{\frac{.5(.5)}{n}} \quad \text{o a veces} \quad 2\ \text{SE} = 2\sqrt{\frac{.5(.5)}{n}}$$

Las encuestas Gallup, Harris y Roper generalmente usan tamaños muestrales de alrededor de 1000, de modo que su margen de error es

$$1.96\sqrt{\frac{.5(.5)}{1000}} = .031 \qquad \text{o sea alrededor de 3\%}$$

En este caso, se dice que la estimación está dentro de ± 3 puntos porcentuales de la verdadera proporción de población.

8.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

8.1 Explique lo que significa "margen de error" en estimación puntual.

8.2 ¿Cuáles son dos características del mejor estimador puntual para un parámetro poblacional?

8.3 Calcule el margen de error al estimar una media poblacional μ para estos valores:

a. $n = 30, \sigma^2 = .2$

b. $n = 30, \sigma^2 = .9$

c. $n = 30, \sigma^2 = 1.5$

8.4 Consulte el ejercicio 8.3. ¿Qué efecto tiene una mayor varianza poblacional sobre el margen de error?

8.5 Calcule el margen de error al estimar una media poblacional μ para estos valores:

a. $n = 50, s^2 = 4$

b. $n = 500, s^2 = 4$

c. $n = 5000, s^2 = 4$

8.6 Consulte el ejercicio 8.5. ¿Qué efecto tiene un tamaño muestral aumentado sobre el margen de error?

8.7 Calcule el margen de error al estimar una proporción binomial para cada uno de los siguientes valores de n. Use $p = .5$ para calcular el error estándar del estimador.

a. $n = 30$ **b.** $n = 100$

c. $n = 400$ **d.** $n = 1000$

8.8 Consulte el ejercicio 8.7. ¿Qué efecto tiene aumentar el tamaño muestral sobre el margen de error?

8.9 Calcule el margen de error al estimar una proporción binomial p usando muestras de tamaño $n = 100$ y los siguientes valores para p:

a. $p = .1$ **b.** $p = .3$ **c.** $p = .5$

d. $p = .7$ **e.** $p = .9$

f. ¿Cuál de los valores de p produce el máximo margen de error?

8.10 Suponga que está usted escribiendo un cuestionario para una encuesta muestral que comprende $n = 100$ individuos. El cuestionario va a generar estimaciones para varias proporciones binomiales diferentes. Si desea informar un solo margen de error para la encuesta, ¿qué margen de error del ejercicio 8.9 es el correcto para usar?

8.11 Una muestra aleatoria de $n = 900$ observaciones de entre una población binomial produjo $x = 655$ éxitos. Estime la proporción binomial p y calcule el margen de error.

8.12 Una muestra aleatoria de $n = 50$ observaciones de entre una población cuantitativa produjo $\bar{x} = 56.4$ y $s^2 = 2.6$. Dé la mejor estimación puntual para la media poblacional μ, y calcule el margen de error.

APLICACIONES

8.13 La falla de San Andrés Unos geólogos están interesados en corrimientos y movimientos de la superficie terrestre indicados por fracturas (grietas) de la corteza de nuestro planeta. Una de las fracturas grandes más famosas es la falla de San Andrés, en California. Una geóloga que trata de estudiar el movimiento de los cambios relativos en la corteza terrestre, en un lugar en particular, encontró numerosas fracturas en la estructura local de rocas. En un intento por determinar el ángulo medio de las roturas, ella muestreó $n = 50$ fracturas y encontró que la media muestral y desviación estándar eran de 39.8° y 17.2°, respectivamente. Estime la dirección angular media de las fracturas y encuentre el margen de error para su estimación.

8.14 Biomasa Las estimaciones de la biomasa de la Tierra, es decir, la cantidad total de vegetación que hay en los bosques del planeta, son importantes para determinar la cantidad de dióxido de carbono no absorbido que se espera permanezca en la atmósfera terrestre.[2] Suponga que una muestra de 75 terrenos de un metro cuadrado, escogidos al azar en bosques boreales de América del Norte, produjo una biomasa media de 4.2 kilogramos por metro cuadrado (kg/m^2), con una desviación estándar de 1.5 kg/m^2. Estime el promedio de biomasa para los bosques boreales de América del Norte y encuentre el margen de error para su estimación.

Fuente: Reimpreso con permiso de *Science News,* publicación semanal de Science, copyright 1989 por Science Services, Inc.

8.15 Confianza del consumidor Un aumento en la tasa de ahorros del consumidor está con frecuencia relacionado con la falta de confianza en la economía y se dice que es un indicador de una tendencia a la recesión de la economía. Un muestreo aleatorio de $n = 200$ cuentas de ahorro en una comunidad local mostró un aumento medio en valores de cuentas de ahorro de 7.2% en los últimos 12 meses, con una desviación estándar de 5.6%. Estime el aumento medio en porcentaje en valores de cuentas de ahorros de los últimos 12 meses para depositantes de esta comunidad. Encuentre el margen de error para su estimación.

8.16 Niños multimedia ¿Nuestros hijos pasan el mismo tiempo, disfrutando de actividades al aire libre y jugando con la familia y amigos, que las generaciones previas? O bien, ¿nuestros hijos pasan cada vez más tiempo frente a un televisor, computadora y otros equipos multimedia? Una muestra aleatoria de 250 niños entre ocho y 18 años de edad mostró que 170 niños tenían un televisor en su recámara y 120 de ellos tenían también un juego de video.

a. Estime la proporción de todos los niños y adolescentes, de ocho a 18 años, que tienen un televisor en sus recámaras y calcule el margen de error de su estimación.

b. Estime la proporción de todos los niños y adolescentes, de ocho a 18 años, que tienen un juego de video en sus recámaras y calcule el margen de error de su estimación.

8.17 Inmigración legal En un tiempo en la historia de Estados Unidos, cuando parece haber una preocupación genuina por el número de inmigrantes ilegales que viven en ese país, también parece haber preocupación por el número de inmigrantes legales a los que se les permite entrar al país. En una encuesta reciente que incluyó preguntas acerca de inmigrantes legales e ilegales, 51% de los $n = 900$ votantes registrados entrevistados indicaron que se debería reducir el número de inmigrantes legales que entraran a Estados Unidos.[3]

a. ¿Cuál es la estimación puntual para la proporción de votantes registrados en Estados Unidos, que piensan que se debería reducir el número de inmigrantes que entran a Estados Unidos? Calcule el margen de error.

b. La encuesta informa de un margen de error de $\pm$ 3%. ¿En qué forma fue calculado el margen de error publicado para que se pueda aplicar a todas las preguntas de la encuesta?

8.18 Vacaciones de verano Uno de los principales costos en unas vacaciones planeadas es el del alojamiento. Incluso dentro de una cadena particular de hoteles, los costos pueden variar considerablemente dependiendo del tipo de cuarto y comodidades ofrecidas.[4] Suponga que al azar escogemos 50 facturas de cada una de las bases de datos computarizadas de las cadenas de hoteles Marriott, Radisson y Wyndham, y registramos las tarifas de un cuarto por noche.

	Marriott	Radisson	Wyndham
Promedio muestral	\$170	\$145	\$150
Desviación estándar muestral	17.5	10	16.5

a. Describa la(s) población(es) muestreada(s).

b. Encuentre una estimación puntual para el promedio de tarifa por cuarto para la cadena de hoteles Marriott. Calcule el margen de error.

c. Encuentre una estimación puntual para el promedio de tarifa por cuarto para la cadena de hoteles Radisson. Calcule el margen de error.

d. Encuentre un estimador puntual para el promedio de tarifa por cuarto para la cadena de hoteles Wyndham. Calcule el margen de error.

e. Presente gráficamente los resultados de los incisos b), c) y d), usando la forma que se ve en la figura 8.5. Use estas gráficas para comparar el promedio de tarifas por cuarto para las tres cadenas de hoteles.

8.19 Números "900" Es frecuente que estaciones de radio y televisión transmitan asuntos controversiales durante el tiempo de transmisión y pidan a su auditorio indiquen su acuerdo o desacuerdo con una opinión sobre el asunto. Se realiza una encuesta solicitando a personas del auditorio que están *de acuerdo* llamen a cierto número telefónico 900 y a quienes *no están de acuerdo* que llamen a otro número telefónico 900. Todos los que contestan pagan una cuota por sus llamadas.

a. ¿La técnica de la encuesta resulta en una muestra aleatoria?

b. ¿Qué se puede decir acerca de la validez de los resultados de esa encuesta? ¿Alguien tiene que preocuparse por un margen de error en este caso?

8.20 ¿Hombres en Marte? Los vehículos gemelos en Marte, Spirit y Opportunity, que vagaron por la superficie de Marte hace varios años, encontraron evidencia de que una vez hubo agua en Marte, elevando la posibilidad de que hubiera vida en el planeta. ¿Piensa usted que Estados Unidos debería proseguir un programa para enviar seres humanos a Marte? Una encuesta de opiniones realizada por la Associated Press indicó que 49% de los 1034 adultos encuestados piensan que se debería continuar con ese programa.[5]

a. Estime la verdadera proporción de estadounidenses que piensan que Estados Unidos debería continuar con un programa para enviar seres humanos a Marte. Calcule el margen de error.

b. La pregunta planteada en el inciso a) fue sólo una de otras muchas respecto a nuestro programa espacial que se formularon en la encuesta de opiniones. Si la Associated Press deseaba informar de un error muestral que sería válido para toda la encuesta, ¿qué valor deberían publicar?

8.21 Ratas hambrientas En un experimento para evaluar la intensidad del instinto del hambre en ratas, 30 animales previamente entrenados fueron privados de alimento durante 24 horas. Al término de ese periodo, cada rata fue puesta en una jaula donde se les dio alimento si el animal presionaba una palanca. Para cada animal, se registró el tiempo en el que continuaba presionando la barra (aun cuando no recibiera alimento). Si los datos dieron una media muestral de 19.3 minutos con una desviación estándar de 5.2 minutos, estime el verdadero tiempo medio y calcule el margen de error.

8.5 ESTIMACIÓN DE INTERVALO

Un *estimador de intervalo* es una regla para calcular dos números, por ejemplo a y b, para crear un intervalo del que usted está completamente seguro que contiene el parámetro de interés. El concepto de "completamente seguro" significa "con gran probabilidad". Medimos esta probabilidad usando el **coeficiente de confianza**, designado por $\mathbf{1 - \alpha}$.

MI CONSEJO

Cómo lazar:
parámetro = poste de cerca
estimación de intervalo = lazo.

Definición La probabilidad de que un intervalo de confianza contenga el parámetro estimado se denomina **coeficiente de confianza**.

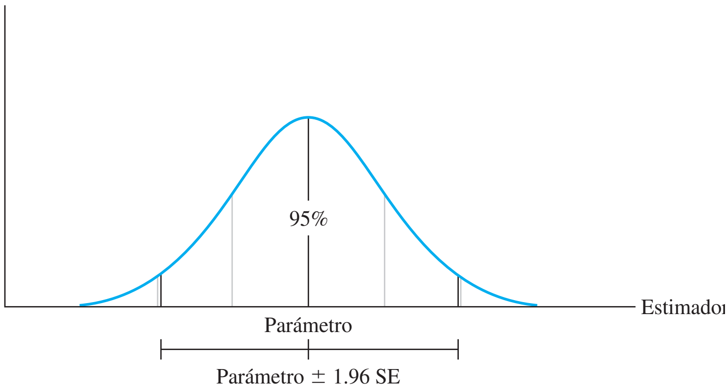
Por ejemplo, es frecuente que los experimentadores construyan intervalos de confianza de 95%, lo cual significa que el coeficiente de confianza, o la probabilidad de que el intervalo contenga el parámetro estimado, sea .95. Se puede aumentar o reducir la cantidad de certeza si se cambia el coeficiente de confianza. Algunos valores que por lo general usan experimentadores son .90, .95, .98 y .99.

Considere una analogía, esta vez lanzar un lazo a un poste de una cerca. El poste de la cerca representa el parámetro que se desea estimar y el lazo formado por la cuerda representa el intervalo de confianza. Cada vez que se lance la cuerda, se espera lazar al poste de la cerca; no obstante, a veces falla el lazo. En alguna forma, cada vez que se saque una muestra y construya un intervalo de confianza para un parámetro, usted espera incluir el parámetro en su intervalo, pero, al igual que el lazo, a veces falla. Su "porcentaje de éxito", es decir la proporción de intervalos que "lazan al poste" en muestreo repetido, es el coeficiente de confianza.

Construcción de un intervalo de confianza

Cuando la distribución muestral de un estimador puntual es aproximadamente normal, se puede construir un estimador de intervalo o **intervalo de confianza** mediante el siguiente razonamiento. Para mayor sencillez, suponga que el coeficiente de confianza es .95 y consulte la figura 8.6.

FIGURA 8.6
Parámetro ± 1.96 SE



- Sabemos que, de todos los valores posibles del estimador que podríamos seleccionar, 95% de ellos estarán en el intervalo

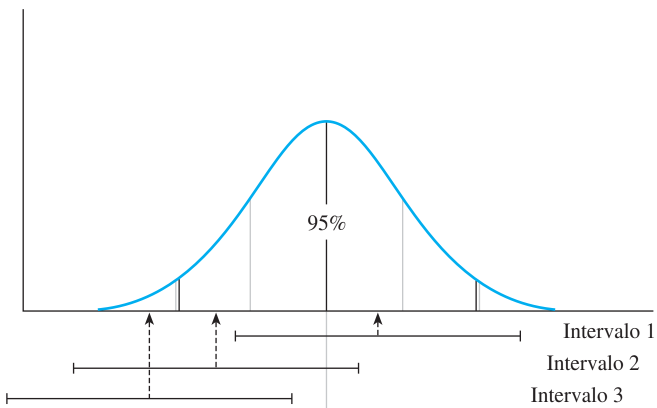
  Parámetro ± 1.96 SE

  que se ve en la figura 8.6.
- Como el valor del parámetro es desconocido, considere construir el intervalo

  estimador ± 1.96 SE

  que tiene el mismo ancho que el primer intervalo, pero tiene un centro variable.
- ¿Con qué frecuencia este intervalo funcionará en forma correcta y encerrará el parámetro de interés? Consulte la figura 8.7.

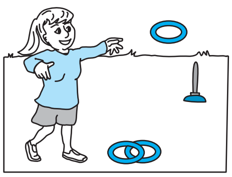
FIGURA 8.7
Algunos intervalos de confianza de 95%



MI CONSEJO

Al igual que en un juego de lanzar un anillo:

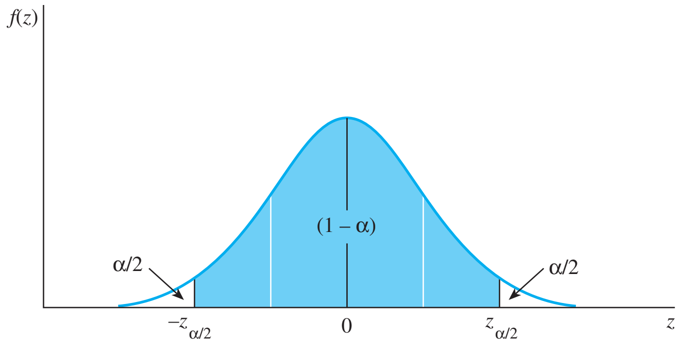
parámetro = estaquilla
estimación de intervalo = anillo.



Los primeros dos intervalos funcionan correctamente, es decir, el parámetro (marcado con una línea punteada) está contenido dentro de ambos intervalos. El tercer intervalo no funciona, porque no encierra al parámetro. Esto ocurrió porque el valor del estimador del centro del intervalo estaba demasiado lejos del parámetro. Por fortuna, valores del estimador sólo caen a esa distancia 5% del tiempo y nuestro procedimiento funcionará en forma correcta 95% del tiempo.

Si se desea, se puede cambiar el *coeficiente de confianza* de $(1 - \alpha) = .95$ a otro nivel de confianza $(1 - \alpha)$. Para lograr esto, es necesario cambiar el valor $z = 1.96$, que localiza un área de .95 en el centro de la curva normal estándar, a un valor de z que localice el área $(1 - \alpha)$ en el centro de la curva, como se ve en la figura 8.8. Como el área total bajo la curva es 1, el área restante en las dos colas es α y cada cola contiene un área $\alpha/2$. El valor de z que tiene "área de cola" $\alpha/2$ a su derecha se denomina $z_{\alpha/2}$, y el área entre $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ es el coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$. Valores de $z_{\alpha/2}$, que por lo general son utilizados por experimentadores, a usted le serán familiares cuando empiece a construir intervalos de confianza para diferentes situaciones prácticas. Algunos de estos valores se dan en la tabla 8.2.

FIGURA 8.8
Ubicación de $z_{\alpha/2}$



INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA GRANDE $(1 - \alpha)100\%$

$$\text{(Estimador puntual)} \pm z_{\alpha/2} \times \text{(error estándar del estimador)}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z con un área $\alpha/2$ en la cola derecha de una distribución normal estándar. Esta fórmula genera dos valores; el **límite inferior de confianza (LCL)** y el **límite superior de confianza (UCL)**.

TABLA 8.2 **Valores de z que comúnmente se usan para intervalos de confianza**

Coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$	α	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
.90	.10	.05	1.645
.95	.05	.025	1.96
.98	.02	.01	2.33
.99	.01	.005	2.58

Intervalo de confianza de muestra grande para una media poblacional μ

Es muy frecuente que problemas prácticos lleven a μ, la media de una población de mediciones cuantitativas. He aquí algunos ejemplos:

- El promedio de calificaciones de estudiantes universitarios en una universidad particular
- El promedio de resistencia de un nuevo tipo de acero
- El número promedio de fallecimientos por categoría de edad
- El promedio de demanda para un nuevo producto de cosmético

Cuando el tamaño muestral n sea grande, la media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimador puntual para la media poblacional μ. Como su distribución muestral es aproximadamente normal, puede usarse para construir un intervalo de confianza de acuerdo con el método general dado ya antes.

UN INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA GRANDE $(1 - \alpha)100\%$ PARA UNA MEDIA POBLACIONAL μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z correspondiente a un área $\alpha/2$ en la cola superior de una distribución z normal estándar y

n = tamaño muestral
σ = desviación estándar de la población muestreada

Si σ es desconocida, puede ser aproximada por la desviación estándar muestral s cuando el tamaño muestral sea grande ($n \geq 30$) y el intervalo aproximado de confianza es

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Otra forma de hallar el intervalo de confianza de muestra grande para una media poblacional μ es empezar con la estadística

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que tiene una distribución normal estándar. Si escribimos $z_{\alpha/2}$ como el valor de z con área $\alpha/2$ a su derecha, entonces se puede escribir

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Esta desigualdad se puede reescribir como

$$-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de modo que

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Los términos $\bar{x} - z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ y $\bar{x} + z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$, que son los límites inferior y superior de confianza, son en realidad cantidades aleatorias que dependen de la media muestral $\bar{x}$. Por tanto, en muestreo repetido, el intervalo aleatorio $\bar{x} \pm z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$, contendrá la media poblacional μ con probabilidad $(1 - \alpha)$.

EJEMPLO 8.6

Un científico interesado en vigilar contaminantes químicos en alimentos y, por lo tanto, la acumulación de contaminantes en la dieta humana, seleccionó una muestra aleatoria de $n = 50$ adultos hombres. Se encontró que el promedio de ingesta diaria de productos lácteos fue de $\bar{x} = 756$ gramos por día, con una desviación estándar de $s = 35$ gramos por día. Use esta información muestral para construir un intervalo de confianza de 95% para la ingesta diaria media de productos lácteos para hombres.

Solución Como el tamaño muestral de $n = 50$ es grande, la distribución de la media muestral $\bar{x}$ está distribuida normalmente en forma aproximada, con media μ y error estándar estimado por $s\sqrt{n}$. El intervalo de confianza aproximado de 95% es

$$\bar{x} \pm 1.96\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$756 \pm 1.96\left(\frac{35}{\sqrt{50}}\right)$$

$$756 \pm 9.70$$

Por tanto, el intervalo de confianza de 95% para μ es de 746.30 a 765.70 gramos por día.

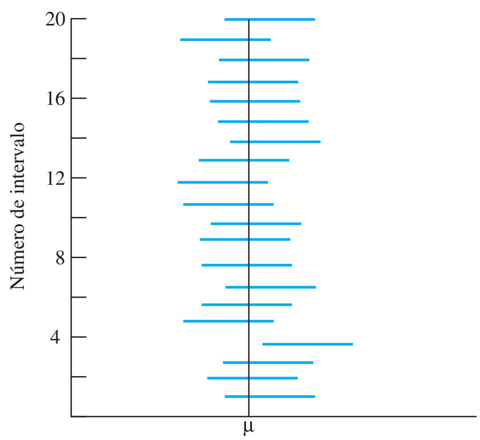
MI CONSEJO

Un intervalo de confianza de 95% nos dice que, si fuéramos a construir muchos de estos intervalos (todos los cuales tendrían puntos extremos ligeramente diferentes), 95% de ellos encierran la media poblacional.

Interpretación del intervalo de confianza

¿Qué significa decir que estamos "95% ciertos" que el valor real de la media poblacional μ está dentro de un intervalo determinado? Si fuéramos a construir 20 de esos intervalos, cada uno usando diferente información muestral, nuestros intervalos podrían verse como los de la figura 8.9. De los 20 intervalos, podría esperarse que 95% de ellos, o sea 19 de cada 20, funcionaran como se planea y contienen μ dentro de sus límites superior e inferior.

FIGURA 8.9
Veinte intervalos de confianza para la media del ejemplo 8.6

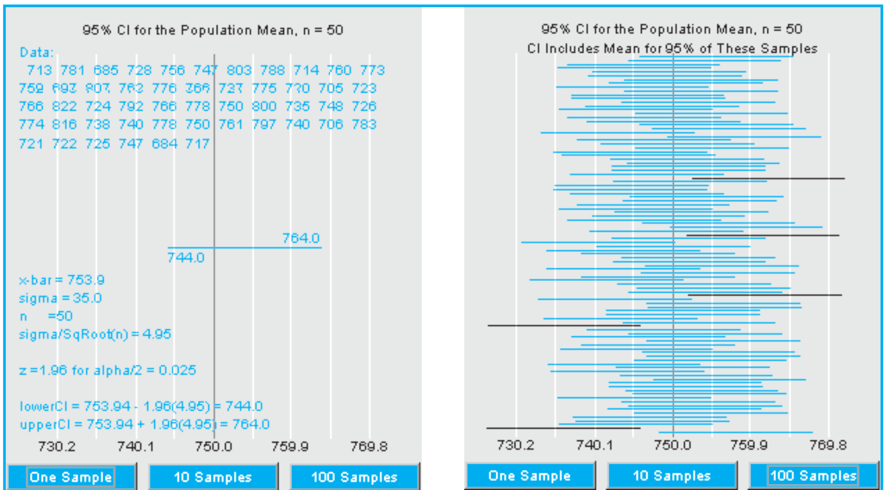


Recuerde que no se puede estar absolutamente seguro de que algún intervalo particular contenga la media μ. Nunca se sabrá si ese intervalo particular es uno de los 19 que "funcionaron", o si es el intervalo que "faltaba". La confianza en el intervalo estimado proviene del hecho de que cuando se calculan intervalos repetidos, 95% de esos intervalos contendrán μ.

MI APPLET

Usted puede tratar este experimento por sí mismo usando el applet Java llamado **Interpreting Confidence Intervals (Interpretación de los intervalos de confianza)**. El applet que se muestra en la figura 8.10a) muestra el cálculo de un intervalo de confianza de 95% para μ cuando $n = 50$ y $\sigma = 35$. Para este intervalo particular de confianza, usamos el botón *One Sample* (*Una Muestra*). Se puede ver el valor de μ como una línea vertical verde en su pantalla (gris en la figura 8.10). Observe que este intervalo de confianza funcionó correctamente y encerró la línea vertical entre sus límites superior e inferior. La figura 8.10b) muestra el cálculo de 100 de esos intervalos, usando el botón *100 Samples*. Los intervalos que no funcionan correctamente se ven en rojo en su pantalla (negro en la figura 8.10). ¿Cuántos intervalos no funcionan? ¿Es cerca del 95% de confianza que decimos tener? El usuario empleará este applet de nuevo para la sección de ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

FIGURA 8.10
Applet Interpreting Confidence Intervals (Interpretación de los intervalos de confianza)



Un buen intervalo de confianza tiene dos características deseables:

- Es tan angosto como es posible. Cuanto más angosto sea el intervalo, más exactamente se habrá localizado el parámetro estimado.
- Tiene un coeficiente de confianza grande, cercano a 1. Cuanto mayor sea el coeficiente de confianza, es más probable que el intervalo contenga el parámetro estimado.

EJEMPLO 8.7

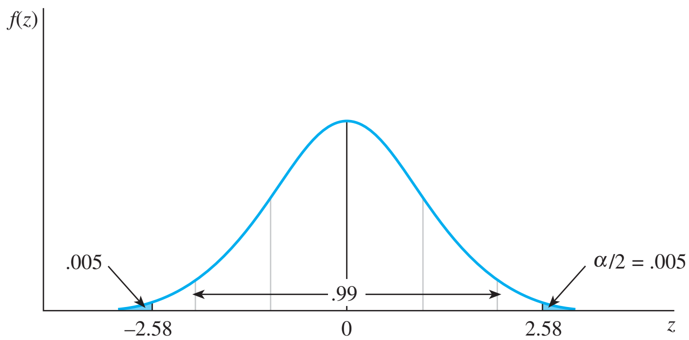
Construya un intervalo de confianza de 99% para la ingesta diaria media de productos lácteos para los hombres adultos del ejemplo 8.6.

Solución Para cambiar el nivel de confianza a .99 se debe hallar el valor apropiado de la z normal estándar que pone el área $(1 - \alpha) = .99$ en el centro de la curva. Este valor, con área de cola $\alpha/2 = .005$ a su derecha, se encuentra de la tabla 8.2 como $z = 2.58$ (véase la figura 8.11). El intervalo de confianza de 99% es entonces

$$\bar{x} \pm 2.58\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$
$$756 \pm 2.58(4.95)$$
$$756 \pm 12.77$$

o sea, 743.23 a 768.77 gramos por día. Este intervalo de confianza es *más ancho* que el intervalo de confianza de 95% del ejemplo 8.6.

FIGURA 8.11
Valores estándar normales para un intervalo de confianza de 99%



MI CONSEJO

Área de cola derecha	Valor z
.05	1.645
.025	1.96
.01	2.33
.005	2.58

El ancho aumentado es necesario para aumentar la confianza, igual que como se desearía un anillo más ancho en su lazo para asegurarse de lazar el poste de una cerca. La única forma de *aumentar la confianza* sin aumentar el ancho del intervalo es *aumentar el tamaño muestral, n*.

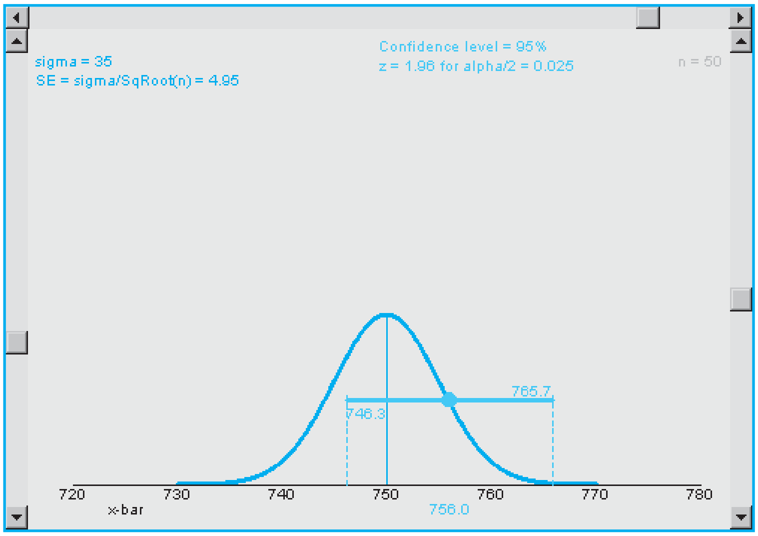
El error estándar de $\bar{x}$,

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mide la variabilidad o dispersión de los valores de $\bar{x}$. Cuanto más variables sean los datos poblacionales, medidos por σ, más variable será $\bar{x}$ y el error estándar será más grande. Por otra parte, si se aumenta el tamaño muestral n, habrá más información para estimar μ. Las estimaciones deben caer más cerca de μ y el error estándar será más pequeño. Se puede usar el applet **Exploring Confidence Intervals (Exploración de intervalos de confianza)**, que se muestra en la figura 8.12, para ver el efecto de cambiar el tamaño muestral n, la desviación estándar σ y el coeficiente de confianza $1 - \alpha$ en el ancho del intervalo de confianza.

Los intervalos de confianza de los ejemplos 8.6 y 8.7 son aproximados porque se sustituyó s como una aproximación para σ. Esto es, en lugar de que el coeficiente de confianza sea .95, el valor especificado en el ejemplo, el verdadero valor del coeficiente puede ser .92, .94 o .97. Pero esta discrepancia es de poco interés desde un punto de vista práctico; en lo que se refiere a la "confianza" del usuario, hay poca diferencia entre estos coeficientes de confianza. Casi todos los estimadores que se emplean en estadística dan intervalos aproximados de confianza, porque las suposiciones sobre las que están basadas no se satisfacen exactamente. Habiendo visto este punto, no continuaremos refiriéndonos a intervalos de confianza como "aproximados". Es de poco interés práctico mientras el coeficiente real de confianza sea cercano al valor especificado.

FIGURA 8.12
Applet Exploring Confidence Intervals



Intervalo de confianza de muestra grande para una proporción poblacional *p*

Muchos experimentos de investigación o estudios muestrales tienen como objetivo la estimación de la proporción de personas u objetos de un grupo grande, que posean cierta característica. Veamos algunos ejemplos:

- La proporción de ventas que se puede esperar en un gran número de contactos de clientes
- La proporción de semillas que germinan
- La proporción de votantes "probables" que planean votar para un candidato político particular

Cada uno es un ejemplo práctico del experimento binomial y el parámetro a estimarse es la proporción binomial p.

Cuando el tamaño muestral es grande, la proporción muestral,

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{Número total de éxitos}}{\text{Número total de intentos}}$$

es el mejor estimador puntual para la proporción poblacional p. Como su distribución muestral es aproximadamente normal, con media p y error estándar SE $= \sqrt{pq/n}$, $\hat{p}$ puede usarse para construir un intervalo de confianza de acuerdo al método general dado en esta sección.

UN INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA GRANDE $(1 - \alpha)100\%$ PARA UNA PROPORCIÓN POBLACIONAL *p*

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z correspondiente a un área de $\alpha/2$ en la cola derecha de una distribución normal z. Como p y q son incógnitas, se estiman con el uso de los mejores estimadores puntuales: $\hat{p}$ y $\hat{q}$. El tamaño muestral se considera grande cuando la aproximación normal a la distribución binomio es adecuada, es decir, cuando $n\hat{p} > 5$ y $n\hat{q} > 5$.

EJEMPLO 8.8

Una muestra aleatoria de 985 "probables" electores, o sea los que probablemente voten en la próxima elección, fueron encuestados durante un maratón telefónico realizado por el Partido Republicano. De ellos, 592 indicaron que tenían la intención de votar por la candidata republicana. Construya un intervalo de confianza de 90% para p, la proporción de electores probables de la población que tienen la intención de votar por la candidata republicana. Con base en esta información, ¿se puede concluir que la candidata ganará la elección?

Solución La estimación puntual para p es

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{592}{985} = .601$$

y el error estándar es

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{(.601)(.399)}{985}} = .016$$

El valor z para un intervalo de confianza de 90% es el valor que tiene área de $\alpha/2 = .05$ en la cola superior de la distribución z, o $z_{.05} = 1.645$ de la tabla 8.2. El intervalo de confianza del 90% para p es entonces

$$\hat{p} \pm 1.645\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$.601 \pm .026$$

o sea $.575 < p < .627$. Se estima que el porcentaje de probables electores que tienen intención de votar por la candidata republicana es entre 57.5% y 62.7%. ¿La candidata ganará la elección? Suponiendo que ella necesita más del 50% de los votos para ganar, y como los límites superior e inferior de confianza exceden de este valor mínimo, se puede decir con 90% de confianza que la candidata ganará.

Hay algunos problemas, no obstante, con este tipo de encuesta muestral. ¿Qué pasa si los electores que se consideran a sí mismos "probables para votar" en realidad no van a las casillas? ¿Qué pasa si un elector cambia de idea entre ahora y el día de la elección? ¿Qué pasa si un elector entrevistado no responde fielmente cuando el trabajador de la campaña le hace preguntas? El intervalo de confianza de 90% que ha construido le da 90% de confianza sólo si ha seleccionado una *muestra aleatoria de entre la población de interés.* Ya no se puede estar seguro de "90% de confianza" si su muestra es sesgada, o si la población de respuestas de votantes cambia antes del día de la elección.

Es posible que usted haya observado que el estimador puntual con su 95% de margen de error se ve muy semejante a un intervalo de confianza de 95% para el mismo parámetro. Esta cercana relación existe para casi todos los parámetros estimados en este libro, pero no es verdadera en general. A veces el mejor estimador puntual para un parámetro *no cae* en la mitad del mejor intervalo de confianza; el mejor intervalo de confianza puede no ser siquiera una función del mejor estimador puntual. Aun cuando ésta es una distinción teórica, debe recordarse que hay una diferencia entre estimación puntual y estimación de intervalo, y que la elección entre las dos depende de la preferencia del experimentador.

8.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

8.22 Encuentre e interprete un intervalo de confianza de 95% para una media poblacional μ para estos valores:

a. $n = 36, \bar{x} = 13.1, s^2 = 3.42$

b. $n = 64, \bar{x} = 2.73, s^2 = .1047$

8.23 Encuentre un intervalo de confianza de 90% para una media poblacional μ para estos valores:

a. $n = 125, \bar{x} = .84, s^2 = .086$

b. $n = 50, \bar{x} = 21.9, s^2 = 3.44$

c. Interprete los intervalos hallados en los incisos a) y b).

8.24 Encuentre un intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para una media poblacional μ para estos valores:

a. $\alpha = .01, n = 38, \bar{x} = 34, s^2 = 12$

b. $\alpha = .10, n = 65, \bar{x} = 1049, s^2 = 51$

c. $\alpha = .05, n = 89, \bar{x} = 66.3, s^2 = 2.48$

8.25 Una muestra aleatoria de $n = 300$ observaciones de una población binomial produjo $x = 263$ éxitos. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para p e interprete el intervalo.

8.26 Suponga que el número de éxitos observado en $n = 500$ intentos de un experimento binomial es 27. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para p. ¿Por qué el intervalo de confianza es más angosto que el intervalo de confianza del ejercicio 8.25?

8.27 Una muestra aleatoria de n mediciones se selecciona de una población con μ media desconocida y desviación estándar $\sigma = 10$ conocida. Calcule el ancho de un intervalo de confianza de 95% para μ para estos valores de n:

a. $n = 100$ **b.** $n = 200$ **c.** $n = 400$

8.28 Compare los intervalos de confianza del ejercicio 8.27. ¿Qué efecto tiene cada una de estas acciones sobre el ancho de un intervalo de confianza?

a. Duplique el tamaño muestral

b. Cuadruplique el tamaño muestral

8.29 Consulte el ejercicio 8.28.

a. Calcule el ancho de un intervalo de confianza de 90% para μ cuando $n = 100$.

b. Calcule el ancho de un intervalo de confianza de 99% para μ cuando $n = 100$.

c. Compare los anchos de intervalos de confianza de 90%, 95% y 99% para μ. ¿Qué efecto tiene un creciente coeficiente de confianza sobre el ancho del intervalo de confianza?

APLICACIONES

8.30 Un experimento de química Debido a una variación en técnicas de laboratorio, impurezas en materiales y otros factores desconocidos, los resultados de un experimento en un laboratorio de química no siempre darán la misma respuesta numérica. En un experimento de electrólisis, un grupo de estudiantes midió la cantidad de cobre precipitado de una solución saturada de sulfato de cobre en un periodo de 30 minutos. Los $n = 30$ estudiantes calcularon una media muestral y desviación estándar igual a .145 y .0051 moles, respectivamente. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la cantidad media de cobre precipitado de la solución en un periodo de 30 minutos.

8.31 Lluvia ácida La lluvia ácida, causada por la reacción de ciertos contaminantes del aire con el agua de lluvia, parece ser un problema creciente en la región noreste de Estados Unidos. (La lluvia ácida afecta al suelo y causa corrosión en superficies metálicas expuestas.) La lluvia pura que cae en aire limpio registra un valor de pH de 5.7 (el pH es una medida de la acidez: 0 es ácido; 14 es alcalino). Suponga que muestras de agua de 40 lluvias se analizan para el contenido del pH y $\bar{x}$ y s son iguales a 3.7 y .5, respectivamente. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para el pH medio en agua de lluvia e interprete el intervalo. ¿Qué suposición debe hacerse para que el intervalo de confianza sea válido?

8.32 Reproductores MP3 ¿Tiene usted un iPod Nano o un Walkman Bean Sony? Éstas y otras marcas de reproductores MP3 están haciéndose cada vez más populares entre los jóvenes estadounidenses. Un estudio acerca de los iPod indicó que 54% de los jóvenes entre 12 y 17 años de edad, 30% de entre 18 y 34 años y 13% de entre 35 y 54 años tienen reproductores MP3.[6] Suponga que estas tres estimaciones están basadas en muestras aleatorias de tamaños 400, 350 y 362, respectivamente.

a. Construya una estimación de intervalo de confianza de 95% para la proporción de personas entre 12 y 17 años que tienen un reproductor MP3.

b. Construya una estimación de intervalo de confianza de 95% para la proporción de personas entre 18 y 34 años que tienen un reproductor MP3.

8.33 Carne para hamburguesa El departamento de carnes de una cadena local de supermercados empaca carne molida usando charolas de dos tamaños: una diseñada para contener alrededor de 1 libra de carne y otra que contiene aproximadamente 3 libras. Una muestra aleatoria de 35 paquetes en las charolas más pequeñas para carne produjo mediciones de peso con un promedio de 1.01 libras y una desviación estándar de .18 libras.

a. Construya un intervalo de confianza de 99% para el peso promedio de todos los paquetes vendidos por esta cadena de supermercados en las charolas de carne más pequeñas.

b. ¿Qué significa la frase "99% de confianza"?

c. Suponga que el departamento de control de calidad de esta cadena de supermercados tiene la intención de que la cantidad de carne molida en las charolas más pequeñas debe ser 1 libra en promedio. ¿El intervalo de confianza del inciso a debe ser del interés del departamento de control de calidad? Explique.

8.34 Abortos legales Los resultados de una encuesta del *Newsweek* respecto a puntos de vista sobre el aborto dados en el ejercicio 7.66 mostró que de $n = 1002$ adultos, 39% favorecieron la postura del "derecho a la vida", en tanto que 53% estuvieron "a favor de la elección libre".[7] La encuesta reportó un margen de error de más o menos 3%.

a. Construya un intervalo de confianza de 90% para la proporción de adultos que están a favor de la postura del "derecho a la vida".

b. Construya un intervalo de confianza de 90% para la proporción de adultos que están "a favor de la elección libre".

8.35 Los SUV (monovolumen) Una encuesta muestral está diseñada para estimar la proporción de vehículos utilitarios deportivos (llamados SUV o monovolumen) en el estado de California. Una muestra aleatoria de 500 registros se selecciona de una base de datos del Departamento de Vehículos de Motor y 68 se clasifican como vehículos utilitarios deportivos.

a. Use un intervalo de confianza de 95% para estimar la proporción de vehículos utilitarios deportivos en California.

b. ¿Cómo se puede estimar la proporción de vehículos utilitarios deportivos en California, con un grado más alto de precisión? (SUGERENCIA: Hay dos respuestas.)

8.36 Compras electrónicas En un informe de por qué los compradores por internet abandonan sus transacciones de ventas en línea, Alison Stein Wellner[8] encontró que las "páginas tardaban demasiado en cargarse" y "el sitio era tan confuso que no pude hallar el producto" eran las dos quejas que más se escucharon. Con base en respuestas de compradores, el tiempo promedio para completar un formato de pedido en línea toma 4.5 minutos. Suponga que $n = 50$ clientes respondieron y que la desviación estándar del tiempo para completar un pedido en línea es de 2.7 minutos.

a. ¿Piensa usted que x, el tiempo para completar el formato de pedido en línea, tiene una distribución en forma de montículo? Si no es así, ¿qué forma esperaría?

b. Si la distribución de los tiempos para completar el formato no es normal, todavía se puede usar la distribución normal estándar para construir un intervalo de confianza para μ, el tiempo medio de completar para compradores en línea. ¿Por qué?

c. Construya un intervalo de confianza de 95% para μ, el tiempo medio de completar par pedidos en línea.

8.37 ¿Qué es normal? ¿Qué *es* normal, cuando se trata de temperaturas corporales de personas? Una muestra aleatoria de 130 temperaturas corporales humanas, dadas por Allen Shoemaker[9] en la *Journal of Statistical Education*, tenía una media de 98.25 grados y una desviación estándar de 0.73 grados.

a. Construya un intervalo de confianza de 99% para la temperatura corporal promedio de personas sanas.

b. El intervalo de confianza construido en el inciso a) contiene el valor de 98.6 grados, que es la temperatura promedio usual citada por médicos y otros especialistas? Si no es así, ¿qué conclusiones se pueden sacar?

8.38 Sacudiendo el voto ¿Qué tan probable es que usted vote en la siguiente elección presidencial? Se tomó una muestra aleatoria de 300 adultos, y 192 de ellos dijeron que siempre votan en elecciones presidenciales.

a. Construya un intervalo de confianza de 95% para la proporción de adultos estadounidenses que dicen que siempre votan en elecciones presidenciales.

b. Un artículo en *American Demographics* reporta este porcentaje de 67%.[10] Con base en el intervalo construido en el inciso a), ¿estaría usted en desacuerdo con ese porcentaje presentado? Explique.

c. ¿Podemos usar la estimación de intervalo del inciso a), para estimar la proporción real de adultos estadounidenses que votaron en la elección presidencial de 2008? ¿Por qué sí o por qué no?

8.6 ESTIMACIÓN DE LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS POBLACIONALES

Un problema de igual importancia que la estimación de una sola media poblacional μ, para una población cuantitativa, es la comparación de dos medias poblacionales. Usted puede hacer comparaciones como éstas:

- Las calificaciones promedio del examen de admisión para el colegio médico (MCAT) para estudiantes cuya especialización fuera bioquímica, y para aquellos cuya especialización fuera biología
- Las producciones promedio en una planta química que usa materias primas suministradas por dos proveedores diferentes
- El promedio de diámetros de tallos de plantas crecidas con dos tipos diferentes de nutrientes

Para cada uno de estos ejemplos, hay dos poblaciones: la primera con media y varianza μ_1 y σ_1^2, y la segunda con media y varianza μ_2 y σ_2^2. Una muestra aleatoria de n_1 mediciones se saca de la población 1 y una segunda muestra aleatoria de tamaño n_2 se saca de manera independiente de la población 2. Por último, las estimaciones de los parámetros poblacionales se calculan a partir de los datos muestrales usando los estimadores $\bar{x}_1$, s_1^2, $\bar{x}_2$ y s_2^2, como se ve en la tabla 8.3.

TABLA 8.3 **Muestras de dos poblaciones cuantitativas**

	Población 1	Población 2
Media	μ_1	μ_2
Varianza	σ_1^2	σ_2^2

	Tamaño muestral 1	Tamaño muestral 2
Media	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Varianza	s_1^2	s_2^2
Muestra	n_1	n_2

Intuitivamente, la diferencia entre dos medias muestrales daría la máxima información acerca de la diferencia real entre dos medias poblacionales y éste es de hecho el caso. El mejor estimador puntual de la diferencia $(\mu_1 - \mu_2)$ entre las medias poblacionales es $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. La distribución muestral de este estimador no es difícil de deducir, pero la expresamos aquí sin demostración.

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS MUESTRALES

Cuando muestras aleatorias independientes de n_1 y n_2 observaciones han sido seleccionadas de entre poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, la distribución muestral de la diferencia $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ tiene las siguientes propiedades:

1. La media de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ es

$$\mu_1 - \mu_2$$

y el error estándar es

$$SE = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

que se puede estimar como

$$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \text{ cuando los tamaños muestrales son grandes.}$$

2. **Si las poblaciones muestreadas están distribuidas normalmente**, entonces la distribución muestral de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ está distribuida normalmente **exactamente**, cualquiera que sea el tamaño muestral.
3. **Si las poblaciones muestreadas no están distribuidas normalmente**, entonces la distribución muestral de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ está distribuida normalmente **aproximadamente** cuando n_1 y n_2 son ambas de 30 o más, debido al teorema del límite central.

Como $(\mu_1 - \mu_2)$ es la media de la distribución muestral, se deduce que $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ es un estimador insesgado de $(\mu_1 - \mu_2)$ con una distribución aproximadamente normal cuando n_1 y n_2 son grandes. Esto es, el estadístico

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

tiene una distribución z normal aproximadamente estándar y los procedimientos generales de la sección 8.5 se pueden usar para construir estimaciones puntuales y de intervalo. Aun cuando la elección entre estimación puntual y de intervalo depende de la preferencia personal del usuario, casi todos los experimentadores escogen construir intervalos de confianza para problemas de dos muestras. Las fórmulas apropiadas para ambos métodos se dan a continuación.

ESTIMACIÓN PUNTUAL DE $(\mu_1 - \mu_2)$ DE MUESTRA GRANDE

Estimador puntual: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

95% margen de error: $\pm 1.96 \text{ SE} = \pm 1.96\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

MI CONSEJO

Área de cola derecha	Valor z
.05	1.645
.025	1.96
.01	2.33
.005	2.58

UN INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA GRANDE DE $(1 - \alpha)100\%$ PARA $(\mu_1 - \mu_2)$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

EJEMPLO 8.9

Las resistencias al desgaste de dos tipos de llantas para automóvil se compararon en muestras de pruebas en camino de $n_1 = n_2 = 100$ llantas para cada tipo. El número de millas hasta el completo desgaste se definió como una cantidad específica de desgaste de la llanta. Los resultados de la prueba se muestran en la tabla 8.4. Estime $(\mu_1 - \mu_2)$, la diferencia en la media de millas hasta el completo desgaste, usando un intervalo de confianza de 99%. ¿Hay diferencia en el promedio de calidad de desgaste para los dos tipos de llantas?

TABLA 8.4 **Resumen de datos muestrales para dos tipos de llantas**

Llanta 1	Llanta 2
$\bar{x}_1 = 26\,400$ millas	$\bar{x}_2 = 25\,100$ millas
$s_1^2 = 1\,440\,000$	$s_2^2 = 1\,960\,000$

Solución La estimación puntual de $(\mu_1 - \mu_2)$ es

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 26\,400 - 25\,100 = 1300 \text{ millas}$$

y el error estándar de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ se estima como

$$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{1\,440\,000}{100} + \frac{1\,960\,000}{100}} = 184.4 \text{ millas}$$

El intervalo de confianza de 99% se calcula como

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm 2.58\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$1300 \pm 2.58(184.4)$$

$$1300 \pm 475.8$$

o sea $824.2 < (\mu_1 - \mu_2) < 1775.8$. La diferencia en el promedio de millas hasta el completo desgaste para los dos tipos de llantas se estima que está entre el límite inferior LCL = 824.2 y el límite superior UCL = 1775.8 millas de desgaste.

Con base en este intervalo de confianza, ¿se puede concluir que hay una diferencia en el promedio de millas hasta el completo desgaste para los dos tipos de llantas? Si no hubiera diferencia en las dos medias poblacionales, entonces μ_1 y μ_2 serían iguales a $(\mu_1 - \mu_2) = 0$. Si observamos el intervalo de confianza construido, se verá que 0 no es uno de los posibles valores para $(\mu_1 - \mu_2)$. Por tanto, no es probable que las medias sean iguales; se puede concluir que hay una diferencia en el promedio de millas hasta el completo desgaste para los dos tipos de llantas. El intervalo de confianza ha permitido *tomar una decisión* acerca de la igualdad de las dos medias poblacionales.

MI CONSEJO

Si 0 no es el intervalo, *se puede* concluir que hay una diferencia en las medias poblacionales.

EJEMPLO 8.10

El científico del ejemplo 8.6 se preguntaba si había diferencia en el promedio de ingesta diaria de productos lácteos entre hombres y mujeres. Él tomó una muestra de $n = 50$ mujeres adultas y registró sus ingestas diarias de productos lácteos en gramos por día. Hizo lo mismo con hombres adultos. En la tabla 8.5 se presenta un resumen de sus resultados muestrales. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en el promedio de ingestas diarias de productos lácteos para hombres y mujeres. ¿Se puede concluir que hay una diferencia en el promedio de ingestas diarias para hombres y mujeres?

TABLA 8.5 **Valores muestrales para ingestas diarias de productos lácteos**

	Hombres	Mujeres
Tamaño muestral	50	50
Media muestral	756	762
Desviación estándar muestral	35	30

Solución El intervalo de confianza se construye usando un valor de z con área de cola $\alpha/2 = .025$ a su derecha, esto es, $z_{.025} = 1.96$. Usando las desviaciones muestrales estándar para aproximar las desviaciones estándar poblacionales desconocidas, el intervalo de 95% de confianza es

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm 1.96\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$(756 - 762) \pm 1.96\sqrt{\frac{35^2}{50} + \frac{35^2}{50}}$$

$$-6 \pm 12.78$$

o sea $-18.78 < (\mu_1 - \mu_2) < 6.78$. Veamos los posibles valores para $(\mu_1 - \mu_2)$ del intervalo de confianza. Es posible que la diferencia $(\mu_1 - \mu_2)$ pudiera ser negativa (lo cual indica que el promedio para mujeres excede del promedio para hombres), pudiera ser positiva (lo cual indica que los hombres tienen el promedio más alto) o pudiera ser 0 (lo cual indica que no hay diferencia entre los promedios). Con base en esta información, *no estaríamos dispuestos a concluir* que hay una diferencia en el promedio de ingestas diarias de productos lácteos para hombres y mujeres.

Los ejemplos 8.9 y 8.10 merecen más comentarios respecto a usar estimaciones muestrales en lugar de parámetros desconocidos. La distribución muestral de

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

tiene una distribución normal estándar para todos los tamaños muestrales cuando ambas poblaciones muestreadas son normales, y una distribución normal estándar *aproximada* cuando las poblaciones muestreadas no sean normales pero los tamaños muestrales sean grandes (≥ 30). Cuando σ_1^2 y σ_2^2 no se conocen y son estimadas por las estimaciones muestrales s_1^2 y s_2^2, la estadística resultante todavía tendrá una distribución normal estándar aproximada cuando los tamaños muestrales sean grandes. El comportamiento de esta estadística cuando las varianzas poblacionales son desconocidas, y los tamaños muestrales sean pequeños, se estudiará en el capítulo 10.

8.6 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

8.39 Muestras aleatorias independientes se seleccionaron de las poblaciones 1 y 2. Los tamaños muestrales, medias y varianzas son como sigue:

	Población 1	Población 2
Tamaño muestral	35	49
Media muestral	12.7	7.4
Varianza muestral	1.38	4.14

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para estimar la diferencia en las medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$.

b. Con base en el intervalo de confianza del inciso a), ¿se puede concluir que hay una diferencia en las medias para las dos poblaciones? Explique.

8.40 Muestras aleatorias independientes se seleccionaron de las poblaciones 1 y 2. Los tamaños muestrales, medias y varianzas son como sigue:

	Población 1	Población 2
Tamaño muestral	64	64
Media muestral	2.9	5.1
Varianza muestral	0.83	1.67

a. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la diferencia en las medias poblacionales. ¿Qué significa la frase "90% seguro"?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en las medias poblacionales. ¿Se puede concluir que hay una diferencia en las dos medias poblacionales? Explique.

APLICACIONES

8.41 Selenio Una pequeña cantidad del oligoelemento selenio, 50-200 microgramos (μg) por día, se considera esencial para una buena salud. Suponga que muestras aleatorias de $n_1 = n_2 = 30$ adultos se seleccionaron de dos regiones de Estados Unidos y que la ingesta diaria de selenio, de líquidos y sólidos, se registró para cada persona. La media y desviación estándar de las ingestas diarias de selenio para los 30 adultos de la región 1 fueron $\bar{x}_1 = 167.1$ y $s_1 = 24.3$ μg, respectivamente. Las estadísticas correspondientes para los 30 adultos de la región 2 fueron $\bar{x}_2 = 140.9$ y $s_2 = 17.6$. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en las ingestas medias de selenio para las dos regiones. Interprete este intervalo.

8.41 9-1-1 Se realizó un estudio para comparar los números medios de llamadas de emergencia a la policía por turno de 8 horas en dos distritos de una gran ciudad. Muestras de 100 turnos de 8 horas se seleccionaron al azar de entre los registros policiales para cada una de las dos regiones y el número de llamadas de emergencia se registró para cada turno. Las estadísticas muestrales se indican a continuación:

	Región	
	1	2
Tamaño muestral	100	100
Media muestral	2.4	3.1
Varianza muestral	1.44	2.64

Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la diferencia en los números medios de llamadas de emergencia a la policía por turno entre los dos distritos de la ciudad. Interprete el intervalo.

8.43 Enseñando biología Al desarrollar un estándar para evaluar la enseñanza de ciencias preuniversitarias en Estados Unidos, se realizó un experimento para evaluar un currículum desarrollado por un maestro, "Biología: un contexto comunitario" (BACC, por sus siglas en inglés) basado en estándares, orientado en actividades y centrado en preguntas. Este método fue comparado con la presentación histórica por medio de lectura, vocabulario y datos aprendidos de memoria. Los estudiantes fueron examinados en conceptos de biología que destacaban conocimientos biológicos y conocimientos de proceso en el sentido tradicional. Los resultados quizá no tan sorprendentes de un examen sobre conceptos de biología, publicados en *The American Biology Teacher*, se muestran en la tabla siguiente.[11]

	Media	Tamaño muestral	Desviación estándar
Examen previo: Todos los grupos de BACC	13.38	372	5.59
Examen previo: Todos los tradicionales	14.06	368	5.45
Después del examen: Todos los grupos de BACC	18.5	365	8.03
Después del examen: Todos los tradicionales	16.5	298	6.96

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la calificación media para el examen previo para todos los grupos de BACC.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la calificación media del examen previo para todos los grupos tradicionales.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en calificaciones medias para los grupos BACC después del examen y los grupos tradicionales después del examen.

d. ¿El intervalo de confianza en c) da evidencia de que hay una diferencia real en las calificaciones de grupo tradicional y BACC después del examen? Explique.

Fuente: De "Performance Assessment of a Standards-Based High School Biology Curriculum", por W. Leonard, B. Speziale y J. Pernick en *The American Biology Teacher,* 2001, 63(5), 310-316. Reimpreso con permiso de National Association of Biology Teachers.

8.44 ¿Está usted a dieta? Se realizó un experimento para comparar las dietas A y B diseñadas para bajar de peso. Se seleccionaron al azar dos grupos de 30 personas con sobrepeso de cada grupo. Uno de los grupos fue puesto a la dieta A y el otro a la B y se registraron sus bajas de peso en un periodo de 30 días. Las medias y desviaciones estándar de las mediciones de baja de peso para los dos grupos se muestran en la tabla. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en reducción media de peso para las dos dietas. Interprete su intervalo de confianza.

Dieta A	Dieta B
$\bar{x}_A = 21.3$	$\bar{x}_B = 13.4$
$s_A = 2.6$	$s_B = 1.9$

8.45 Salarios iniciales Los graduados universitarios están obteniendo más de sus títulos al aumentar los salarios iniciales. Para comparar los salarios iniciales de graduados universitarios que se especializan en ingeniería química y ciencias computacionales, se seleccionaron muestras aleatorias de 50 graduados universitarios recientes en cada especialización y se obtuvo la siguiente información.

Especialización	Media	SD
Ingeniería química	\$53 659	2225
Ciencias computacionales	51 042	2375

a. Encuentre una estimación puntual para la diferencia en salarios iniciales de estudiantes universitarios que se especializan en ingeniería química y ciencias computacionales. ¿Cuál es el margen de error en la estimación de usted?

b. Con base en los resultados del inciso a), ¿piensa usted que hay una diferencia importante en salarios iniciales para ingenieros químicos y de ciencias computacionales? Explique.

8.46 Conocimientos de biología Consulte el ejercicio 8.43. Además de exámenes que comprenden conceptos de biología, los estudiantes también fueron examinados en conocimientos de procesos. Los resultados de exámenes previos y calificaciones después del examen, publicados en *The American Biology Teacher,* se dan a continuación.[11]

	Media	Tamaño muestral	Desviación estándar
Examen previo: Todos los grupos BACC	10.52	395	4.79
Examen previo: Todos los tradicionales	11.97	379	5.39
Después de examen: Todos los grupos BACC	14.06	376	5.65
Después de examen: Todos los tradicionales	12.96	308	5.93

a. Encuentre un intervalo de confianza del 95% de la puntuación media en habilidades del proceso para después del examen para todos los grupos BACC.

b. Encuentre un intervalo de confianza del 95% de la puntuación media en habilidades del proceso para después del examen para todos los grupos tradicionales.

c. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en las puntuaciones medias en habilidades del proceso para después del examen para los grupos BACC y los tradicionales.

d. ¿El intervalo de confianza de c) proporciona evidencia de que hay una diferencia real en las puntuaciones medias de las habilidades del proceso después del examen entre los grupos BACC y los tradicionales? Explique.

Fuente: De "Performance Assessment of a Standards-Based High School Biology Curriculum", por W. Leonard, B. Speziale y J. Pernick en *The American Biology Teacher,* 2001, 63(5), 310-316. Reimpreso con permiso de National Association of Biology Teachers.

8.47 Costos de hoteles Consulte el ejercicio 8.18. Las medias y desviaciones estándar para 50 facturaciones de cada una de las bases de datos de cada una de las tres cadenas de hoteles se dan en la tabla:[4]

	Marriott	Radisson	Wyndham
Promedio muestral	\$170	\$145	\$160
Desviación muestral estándar	17.5	10	16.5

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en el promedio de tarifas de cuartos para las cadenas hoteleras Marriott y Wyndham.

b. Encuentre un intervalo de 99% de confianza para la diferencia en el promedio de tarifas de cuartos para las cadenas hoteleras Radisson y Wyndham.

c. ¿Los intervalos de los incisos a) y b) contienen el valor $(\mu_1 - \mu_2) = 0$? ¿Por qué es esto de interés para el investigador?

d. ¿Los datos indican una diferencia en el promedio de tarifas de cuartos de hotel entre las cadenas Marriott y la Wyndham? ¿Entre las cadenas Radisson y la Wyndham?

8.48 Ruido y estrés Para comparar el efecto del estrés en la forma de ruido sobre la capacidad de realizar un trabajo sencillo, 70 personas fueron divididas en dos grupos. El primer grupo de 30 personas actuó como control, en tanto que el segundo grupo de 40 fueron el grupo experimental. Aun cuando cada persona realizó el trabajo en el mismo cuarto de control, cada una de las personas del grupo experimental tuvo que realizar el trabajo cuando se reproducía música de *rock* a alto volumen. El tiempo para terminar el trabajo se registró para cada individuo y se obtuvo el siguiente resumen:

	Control	Experimental
n	30	40
$\bar{x}$	15 minutos	23 minutos
s	4 minutos	10 minutos

a. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en tiempos medios de terminación para estos dos grupos.

b. Con base en el intervalo de confianza del inciso a), ¿hay suficiente evidencia para indicar una diferencia en el tiempo promedio de terminación para los dos grupos? Explique.

8.49 ¿Qué es normal?, continúa De las 130 personas del ejercicio 8.37, 65 eran mujeres y 65 eran hombres.[9] Las medias y desviación estándar de sus temperaturas se muestran a continuación.

	Hombres	Mujeres
Media muestral	98.11	98.39
Desviación estándar	0.70	0.74

Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en el promedio de temperaturas corporales para hombres contra mujeres. Con base en este intervalo, ¿se puede concluir que hay una diferencia en el promedio de temperaturas para hombres contra mujeres? Explique.

8.7 ESTIMACIÓN DE LA DIFERENCIA ENTRE DOS PROPORCIONES BINOMIALES

Una simple extensión de la estimación de una proporción binomial p es la estimación de la diferencia entre dos proporciones binomiales. Se pueden hacer comparaciones como éstas:

- La proporción de artículos defectuosos manufacturados en dos líneas de producción
- La proporción de votantes mujeres y la proporción de votantes hombres que están a favor de una enmienda de iguales derechos
- Los porcentajes de germinación de semillas no tratadas y semillas tratadas con un fungicida

Estas comparaciones pueden hacerse con la diferencia $(p_1 - p_2)$ entre dos proporciones binomiales, p_1 y p_2. Muestras aleatorias independientes formadas por n_1 y n_2 intentos se sacan de poblaciones 1 y 2, respectivamente, y se calculan las estimaciones muestrales $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$. El estimador insesgado de la diferencia $(p_1 - p_2)$ es la diferencia muestral $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$.

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA DIFERENCIA $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ ENTRE DOS PROPORCIONES MUESTRALES

Suponga que las muestras aleatorias independientes de las observaciones n_1 y n_2 han sido seleccionadas de poblaciones binomiales con parámetros p_1 y p_2, respectivamente. La distribución muestral de la diferencia entre proporciones muestrales

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)$$

tiene estas propiedades:

1. La media de $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ es

$$p_1 - p_2$$

y el error estándar es

$$SE = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

que se estima como

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}$$

2. La distribución muestral de $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ puede ser aproximada por una distribución normal cuando n_1 y n_2 son grandes, debido al teorema del límite central.

Aun cuando el margen de una proporción individual es de 0 a 1, la diferencia entre dos proporciones va de -1 a 1. Para usar una distribución normal para aproximar la distribución de $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$, tanto $\hat{p}_1$ como $\hat{p}_2$ deben ser aproximadamente normales; esto es, $n_1\hat{p}_1 > 5$, $n_1\hat{q}_1 > 5$ y $n_2\hat{p}_2 > 5$, $n_2\hat{q}_2 > 5$.

Las fórmulas apropiadas para estimación puntual y de intervalo se dan a continuación.

ESTIMACIÓN PUNTUAL DE MUESTRA GRANDE DE $(p_1 - p_2)$

Estimador puntual: $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$

95% de margen de error: $\pm\, 1.96\text{ SE} = \pm 1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

UN INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA GRANDE $(1 - \alpha)100\%$ PARA $(p_1 - p_2)$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

Suposición: n_1 y n_2 deben ser suficientemente grandes para que la distribución muestral de $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ puede ser aproximado por una distribución normal, es decir, si $n_1\hat{p}_1$, $n_1\hat{q}_1$, $n_2\hat{p}_2$ y $n_2\hat{q}_2$ son todas mayores a 5.

EJEMPLO 8.11

La propuesta de un bono para la construcción de una escuela será enviada a los votantes en la siguiente elección municipal. Una parte importante del dinero derivado de esta emisión de bonos se empleará en construir escuelas en una zona de rápido desarrollo de la ciudad y lo demás se usará para renovar y actualizar los edificios escolares del resto de ésta. Para evaluar la viabilidad de la propuesta de un bono, a una muestra aleatoria de $n_1 = 50$ residentes de la zona de rápido desarrollo y $n_2 = 100$ de las otras partes de la ciudad, se les preguntó si piensan votar por la propuesta. Los resultados se tabulan en la tabla 8.6.

TABLA 8.6 Valores muestrales para opinión sobre propuesta de bono

	Sección en desarrollo	Resto de la ciudad
Tamaño muestral	50	100
Número a favor de propuesta	38	65
Proporción a favor de propuesta	.76	.65

1. Estime la diferencia en las proporciones verdaderas a favor de la propuesta de bono con un 99% de intervalo de confianza.
2. Si ambas muestras se agrupan en una muestra de tamaño $n = 150$, con 103 a favor de la propuesta, dé una estimación puntual de la proporción de residentes de la ciudad que votarán para la propuesta del bono. ¿Cuál es el margen de error?

Solución

1. La mejor estimación puntual de la diferencia $(p_1 - p_2)$ está dada por

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = .76 - .65 = .11$$

y el error estándar de $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ se estima como

$$\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(.76)(.24)}{50} + \frac{(.65)(.35)}{100}} = .0770$$

Para un intervalo de confianza de 99%, $z_{.005} = 2.58$ y el intervalo aproximado de confianza de 99% se encuentra como

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{.005}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

$$.11 \pm (2.58)(.0770)$$

$$.11 \pm .199,$$

o sea, $(-.089, .309)$. Como este intervalo contiene el valor $(p_1 - p_2) = 0$, es posible que $p_1 = p_2$, lo cual implica que puede no haber diferencia en las proporciones a favor del asunto del bono en las dos secciones de la ciudad.

2. Si no hay diferencia en las dos proporciones, entonces las dos muestras no son realmente diferentes y podrían bien combinarse para obtener una estimación total de la proporción de los residentes de la ciudad que votarán por el asunto del bono. Si ambas muestras se agrupan, entonces $n = 150$ y

$$\hat{p} = \frac{103}{150} = .69$$

Por tanto, la estimación puntual del valor total de p es .69, con un margen de error dado por

$$\pm 1.96\sqrt{\frac{(.69)(.31)}{150}} = \pm 1.96(.0378) = \pm .074$$

Observe que $.69 \pm .074$ produce el intervalo .62 a .76, que incluye sólo proporciones mayores a .5. Por tanto, si las actitudes de votantes no cambian de manera adversa antes de la elección, la propuesta del bono debe aprobarse por una mayoría razonable.

8.7 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

8.50 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 500$ y $n_2 = 500$ observaciones se seleccionaron de entre las poblaciones binomiales 1 y 2, y se observaron $x_1 = 120$ y $x_2 = 147$ éxitos.

a. ¿Cuál es el mejor estimador puntual para la diferencia $(p_1 - p_2)$ en las dos proporciones binomiales?

b. Calcule el error estándar aproximado para la estadística empleada en el inciso a).

c. ¿Cuál es el margen de error para esta estimación puntual?

8.51 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 800$ y $n_2 = 640$ observaciones se seleccionaron de las poblaciones binomiales 1 y 2, y se observaron $x_1 = 337$ y $x_2 = 374$ éxitos.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la diferencia $(p_1 - p_2)$ de las dos proporciones poblacionales. Interprete el intervalo.

b. ¿Qué suposiciones deben hacerse para que el intervalo de confianza sea válido? ¿Se satisfacen estas suposiciones?

8.52 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 1265$ y $n_2 = 1688$ observaciones se seleccionaron de las poblaciones binomiales 1 y 2, y se observaron $x_1 = 849$ y $x_2 = 910$ éxitos.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia $(p_1 - p_2)$ de las dos proporciones poblacionales. ¿Qué significa "99% de confianza"?

b. Con base en el intervalo de confianza del inciso a), ¿se puede concluir que hay una diferencia en las dos proporciones binomiales? Explique.

APLICACIONES

8.53 M&M'S ¿La compañía Mars Incorporate, usa la misma proporción de dulces rojos en sus variedades sencilla y de cacahuate? Una muestra aleatoria de 56 M&M'S sencillos contenía 12 dulces rojos y otra muestra aleatoria de 32 M&M'S de cacahuate contenía ocho dulces rojos.

a. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en las proporciones de dulces rojos para las variedades sencilla y de cacahuate.

b. Con base en el intervalo de confianza del inciso a), ¿se puede concluir que hay una diferencia en las proporciones de dulces rojos para las variedades sencilla y de cacahuate? Explique.

8.54 Realidades diferentes Los votantes en las elecciones de medio periodo de 2006 mostraron que las diferencias entre demócratas y republicanos se extienden más allá de asuntos de opinión y en realidad incluyen la forma en que ven el mundo.[12] Los tres problemas más importantes mencionados por demócratas y republicanos se detallan a continuación.

	1°	2°	3°
Republicanos ($n = 995$)	Terrorismo 42%	Economía 41%	Guerra de Irak 37%
Demócratas ($n = 1094$)	Guerra de Irak 60%	Economía 44%	Atención a la salud 44%

Utilice un procedimiento de estimación de muestra grande para comparar las proporciones de republicanos y demócratas que mencionaron la economía como un asunto importante en las elecciones. Explique sus conclusiones.

8.55 Aficionados al béisbol El primer día del béisbol es a fines de marzo y termina en octubre con la Serie Mundial. ¿El apoyo de los aficionados aumenta a medida que avanza la temporada? Dos encuestas de la CNN/*USA Today*/Gallup, una de ellas realizada en marzo y la otra en noviembre, contenían muestras aleatorias de 1001 adultos de 18 años de edad o más. En la muestra de marzo, 45% de los adultos dijeron ser aficionados del béisbol profesional, en tanto que 51 de los adultos de la muestra de noviembre dijo que eran aficionados.[13]

a. Construya un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en la proporción de adultos que dicen ser aficionados en marzo contra noviembre.

b. ¿Los datos indican que la proporción de adultos que dicen ser aficionados aumenta en noviembre, más o menos en el tiempo de la Serie Mundial? Explique.

8.56 Béisbol y esteroides Consulte el ejercicio 8.55. En la encuesta de opiniones de marzo, suponga que 451 adultos se identificaron como aficionados al béisbol, en tanto que otros 550 no eran aficionados. Se planteó la siguiente pregunta:

¿Los jugadores de béisbol de ligas mayores deben o no ser examinados para ver si consumen esteroides u otras drogas que mejoran el rendimiento?

Suponga que 410 de los aficionados al béisbol y 505 de quienes no son aficionados contestaron en forma afirmativa a esta pregunta.

a. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en la proporción de adultos (aficionados contra no aficionados) que están a favor de una prueba obligatoria de detección de drogas para jugadores profesionales de béisbol.

b. ¿Los datos indican que hay una diferencia en la proporción de aficionados contra no aficionados que están a favor de una prueba obligatoria de detección de drogas para jugadores profesionales de béisbol? Explique.

8.57 Pescar un resfrío ¿Las personas cultas tienen menos resfriados? Un estudio del *Chronicle of Higher Education* fue realizado por científicos de la Carnegie Mellon University, la Universidad de Pittsburgh y la Universidad de Virginia. Encontraron que las personas que tienen sólo unas pocas reuniones sociales tienen menos resfriados que quienes participan en varias actividades sociales.[14] Suponga que de los 276 hombres y mujeres sanos examinados, $n_1 = 96$ tenían sólo pocas reuniones sociales y $n_2 = 105$ estaban ocupados con seis o más actividades. Cuando estas personas se exponían al virus del resfriado, se observaron los siguientes resultados:

	Pocas reuniones sociales	Muchas reuniones sociales
Tamaño muestral	96	105
Porcentaje con resfriado	62%	35%

a. Construya un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en las dos proporciones poblacionales.

b. ¿Parece haber una diferencia en las proporciones poblacionales para los dos grupos?

c. Podría pensarse que entrando en contacto con más personas llevaría a más resfriados, pero los datos muestran el efecto opuesto. ¿Cómo se puede explicar este hallazgo inesperado?

8.58 ¡Sindicato, Sí! Un muestreo de candidatos políticos, 200 escogidos del Oeste y 200 del Este, se clasificó de acuerdo a si el candidato recibió apoyo de un sindicato nacional del trabajo y si el candidato ganó. En el Oeste, 120 ganadores tuvieron apoyo sindical y, en el Este, 142 ganadores tuvieron el apoyo de un sindicato nacional. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las proporciones de ganadores con apoyo sindical en el Oeste contra el Este. Interprete este intervalo.

8.59 Orden de nacimiento y éxito universitario En un estudio de la relación entre el orden de nacimiento y éxito universitario, un investigador encontró que 126 de entre una muestra de 180 graduados universitarios eran primogénitos o hijos únicos. En una muestra de 100 no graduados de edad y nivel socioeconómico comparables, el número de primogénitos o hijos únicos fue 54. Estime la diferencia entre las proporciones de primogénitos o hijos únicos en las dos poblaciones de las cuales se tomaron estas muestras. Use un intervalo de confianza de 90% e interprete sus resultados.

8.60 Siguiente generación Nacidos entre 1980 y 1990, la Generación Siguiente ha vivido en un mundo posterior a la Guerra Fría y un tiempo de relativa prosperidad económica en Estados Unidos, pero también han conocido el 11 de septiembre y el temor a otro ataque, dos Guerras del Golfo, la tragedia de la Secundaria de Columbine, el huracán Katrina y la creciente polarización de discursos públicos. Más que cualquiera que llegó antes, la Generación Siguiente está comprometida con la tecnología y la gran mayoría depende de ella.[15] Suponga que de una encuesta de 500 estudiantes mujeres y 500 hombres de la Generación Siguiente, 345 de las mujeres y 365 de los hombres dijeron que decidieron asistir a la universidad para ganar más dinero.

a. Construya un intervalo de confianza de 98% para la diferencia en las proporciones de estudiantes mujeres y hombres que decidieron asistir a la universidad para ganar más dinero.

b. ¿Qué significa decir que está "98% seguro"?

c. Con base en el intervalo de confianza del inciso a), ¿se puede concluir que hay una diferencia en las proporciones de estudiantes mujeres y hombres que decidieron asistir a la universidad para ganar más dinero?

8.61 ¿Excedrina o Tylenol? En un estudio para comparar los efectos de dos analgésicos se encontró que, de $n_1 = 200$ personas seleccionadas al azar y a las que se dieron instrucciones de usar el primer analgésico, 93% indicaron que alivió su dolor. De $n_2 = 450$ personas seleccionadas al azar para usar el segundo analgésico, 96% indicaron que les alivió el dolor.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en las proporciones que experimentan alivio por estos dos analgésicos.

b. Con base en el intervalo de confianza del inciso a), ¿hay suficiente evidencia para indicar una diferencia en las proporciones que experimentan alivio para los dos analgésicos? Explique.

8.62 Accidentes automovilísticos Los registros del año pasado sobre accidentes automovilísticos, en una sección determinada de carreteras, se clasificaron de acuerdo a si las pérdidas resultantes eran de \$1000 o más y si una lesión física resultó del accidente. Los datos siguen:

	Menos de \$1000	\$1000 o más
Número de accidentes	32	41
Número donde hubo lesionados	10	23

a. Estime la verdadera proporción de accidentes donde hubo lesionados cuando el daño fue de \$1000 o más, para secciones similares de carretera, y encuentre el margen de error.

b. Estime la verdadera diferencia en la proporción de accidentes donde hubo lesionados en accidentes con pérdidas menores a \$1000 y aquellos con pérdidas de \$1000 o más. Use un intervalo de confianza de 95%.

8.8 LÍMITES DE CONFIANZA A UNA COLA

Los intervalos de confianza estudiados en las secciones 8.5-8.7 a veces reciben el nombre de **intervalos de confianza a dos colas**, porque producen límites superiores (UCL) e inferiores (LCL) para el parámetro de interés, pero a veces un experimentador está interesado en sólo uno de estos límites; esto es, necesita sólo un límite superior (o posiblemente un límite inferior) para el parámetro de interés. En este caso, se puede construir un **límite de confianza de una cola** para el parámetro de interés, por ejemplo μ, p, $\mu_1 - \mu_2$ o $p_1 - p_2$.

Cuando la distribución muestral de un estimador puntual es aproximadamente normal, se puede usar un argumento similar al de la sección 8.5 para mostrar que los límites de confianza de una cola, construidos usando las siguientes ecuaciones *cuando el tamaño muestral es grande*, contendrán el verdadero valor del parámetro de interés $(1 - \alpha)100\%$ del tiempo en muestreo repetido.

UN LÍMITE INFERIOR DE CONFIANZA $(1 - \alpha)100\%$ (LCB)

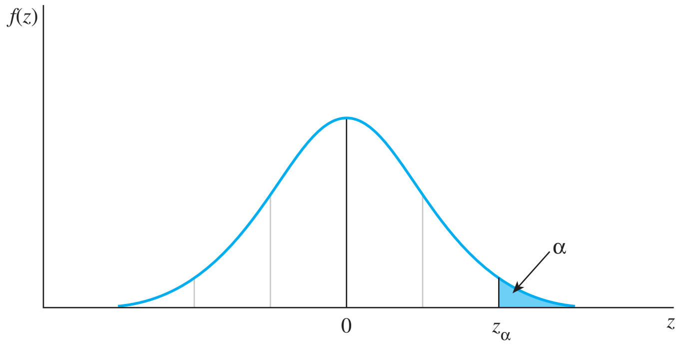
(Estimador puntual) $- z_\alpha \times$ (Error estándar del estimador)

UN LÍMITE SUPERIOR DE CONFIANZA $(1 - \alpha)100\%$ (UCB)

(Estimador puntual) $+ z_\alpha \times$ (Error estándar del estimador)

El valor z para un límite de confianza de una cola $(1-\alpha)100\%$, z_α, localiza un área α en una sola cola de la distribución normal, como se muestra en la figura 8.13.

FIGURA 8.13
Valor z para un límite de confianza de una cola



EJEMPLO 8.12

Una corporación planea emitir algunos documentos a corto plazo y espera que el interés que tendrá para pagar no rebasará el 11.5%. Para obtener alguna información acerca de este problema, la corporación vendió 40 documentos, uno a través de cada una de las 40 empresas de corretaje de acciones. La media y desviación estándar para las 40 tasas de interés fueron 10.3% y .31%, respectivamente. Como la corporación está interesada en sólo un límite superior en las tasas de interés, encuentre un límite superior de confianza de 95% para la tasa media de interés que la corporación tendrá que pagar por los documentos.

Solución Como el parámetro de interés es μ, el estimador puntual es $\bar{x}$ con error estándar SE $\approx \frac{s}{\sqrt{n}}$. El coeficiente de confianza es .95, de modo que $\alpha = .05$ y $z_{.05} = 1.645$. Por lo tanto, el límite superior de confianza de 95% es

$$\text{UCB} = \bar{x} + 1.645\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 10.3 + 1.645\left(\frac{.31}{\sqrt{40}}\right) = 10.3 + .0806 = 10.3806$$

Entonces, se puede estimar que la tasa media de interés que la corporación tendrá que pagar sobre sus documentos será menos al 10.3806%. La corporación no debe preocuparse por sus tasas de interés que rebasen del 11.5%. ¿Qué tan seguro está usted de esta conclusión? Bastante seguro, porque los intervalos construidos en esta forma contienen a μ, el 95% del tiempo.

8.9 SELECCIÓN DEL TAMAÑO MUESTRAL

Diseñar un experimento es en esencia un plan para comprar cierta cantidad de información. Así como el precio que se paga por un juego de video varía dependiendo de dónde y cuándo se compra, el precio de información estadística varía dependiendo de cómo y dónde se recolecta la información. Al igual que cuando se compra cualquier producto, se debe comprar tanta información estadística como sea posible por el mínimo costo posible.

La cantidad total de información relevante en una muestra es controlada por dos factores:

- El **plan muestral** o **diseño experimental**: el procedimiento para recolectar la información
- El **tamaño muestral *n***: la cantidad de información recolectada

Se puede aumentar la cantidad de información recolectada al *aumentar* el tamaño muestral o quizá al *cambiar* el tipo de plan muestral o diseño experimental que se utilice. Trataremos el plan muestral más sencillo, es decir, el muestreo aleatorio de una población relativamente grande y nos concentraremos en las formas para escoger el tamaño muestral n necesario para comprar una cantidad determinada de información.

Un investigador hace poco progreso al planear un experimento antes de encontrar el problema del tamaño muestral. **¿Cuántas mediciones deben incluirse en la muestra?** ¿Cuánta información desea comprar el investigador? La cantidad total de información de la muestra afectará la confiabilidad o bondad de las inferencias hechas por el investigador y es esta confiabilidad la que debe él especificar. En un problema de estimación estadística, la precisión de la estimación es medida por el *margen de error* o el *ancho del intervalo de confianza*. Como estas dos mediciones son una función del tamaño muestral, especificar la precisión determina el tamaño muestral necesario.

Por ejemplo, suponga que se desea estimar el promedio de producción diaria μ de un proceso químico y se necesita que el margen de error sea menor a 4 toneladas. Esto significa que, aproximadamente 95% del tiempo en muestreo repetido, la distancia entre la media muestral $\bar{x}$ y la media poblacional μ será menor a 1.96 SE. Se desea que esta cantidad sea menor a 4. Esto es,

$$1.96 \text{ SE} < 4 \quad \text{o} \quad 1.96\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < 4$$

Despejando n, resulta

$$n > \left(\frac{1.96}{4}\right)^2 \sigma^2 \quad \text{o} \quad n > .24\sigma^2$$

Si se conoce σ, la desviación estándar poblacional, se puede sustituir su valor en la fórmula y despejar n. Si σ es desconocida, que suele ser el caso, se puede usar la mejor aproximación disponible:

- Una estimación s se obtiene de una muestra previa
- Una estimación del rango basada en el conocimiento de las mediciones máximas y mínimas posibles: $\sigma \approx \text{Rango}/4$

Para este ejemplo, suponga que un estudio previo del proceso químico produjo una desviación muestral estándar de $s = 21$ toneladas. Entonces

$$n > .24\sigma^2 = .24(21)^2 = 105.8$$

Usando una muestra de tamaño $n = 106$ o mayor, se puede estar razonablemente seguro (con probabilidad aproximadamente igual a .95) que su estimación del promedio de producción estará a no más de $\pm$ 4 toneladas del promedio real de producción.

La solución $n = 106$ es sólo aproximada porque tenía que usarse un valor aproximado de σ para calcular el error estándar de la media. Aun cuando esto puede ser molesto, es el mejor método existente para seleccionar el tamaño muestral y es ciertamente mejor que adivinar.

A veces los investigadores requieren un nivel de confianza diferente al 95% de confianza especificado por el margen de error. En este caso, la mitad del ancho del intervalo de confianza da la medida precisa para su estimación; esto es, el límite B en el error de su estimación es

$$z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < B$$

Este método de seleccionar el tamaño muestral se puede usar para los cuatro procedimientos de estimación presentados en este capítulo. El procedimiento general se describe a continuación.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo selecciono el tamaño muestral?

Determine el parámetro y el error estándar a estimarse de su estimador puntual. A continuación proceda como sigue:

1. Escoja B, el límite en el error de su estimación y un coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$.
2. Para un problema de una muestra, de esta ecuación despeje el tamaño muestral n:

   $z_{\alpha/2} \times$ (error estándar del estimador) $\leq B$

   donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de z que tiene un área $\alpha/2$ a su derecha.
3. Para un problema de dos muestras, haga $n_1 = n_2 = n$ y resuelva la ecuación del paso 2.

[NOTA: Para casi todos los estimadores (todos presentados en este texto), el error estándar es una función del tamaño muestral n.]

Repertorio de ejercicios

Llene los espacios en blanco de la tabla siguiente y encuentre los tamaños muestrales necesarios. El primer problema ya ha sido resuelto.

Tipo de datos	Una o dos muestras	Margen de error	p o σ	Límite B	Resuelva esta desigualdad	Tamaño muestral
Binomio	1	$-1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}$ —	$p \approx .4$	.1	$-1.96\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq .1$	$n \geq$ 93
______	______	$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sigma \approx 6$	1	______ ≤ 1	$n \geq$ ______
Cuantitativo	2	______	$\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx 6$	2	______ ≤ 2	$n_1 = n_2 \geq$ ______
______	______	$1.96\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$	$p_1 \approx p_2 \approx .4$	.05	______ $\leq .05$	$n_1 = n_2 \geq$ ______

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina la tabla z? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

EJEMPLO 8.13

Los productores de tubo de plástico de polivinilo desean tener un suministro de tubos suficiente para satisfacer las necesidades del mercado. Desean encuestar mayoristas que compren tubos de polivinilo para estimar la proporción que planea aumentar sus compras el año próximo. ¿Qué tamaño muestral se requiere si desean que su estimación se encuentre a no más de .04 de la proporción real con probabilidad igual a .90?

Solución Para este ejemplo particular, el límite B en el error de la estimación es .04. Como el coeficiente de confianza es $(1 - \alpha) = .90$, α debe ser igual a .10 y $\alpha/2$ es .05. El valor z correspondiente a un área igual a .05 en la cola superior de la distribución z es $z_{.05} = 1.645$. Entonces se requiere

$$1.645 \text{ SE} = 1.645 \sqrt{\frac{pq}{n}} = .04$$

Para despejar n de esta ecuación, se debe sustituir un valor aproximado de p en la ecuación. Si se desea estar seguro que la muestra es suficientemente grande, debe usarse $p = .5$ (sustituir $p = .5$ dará la máxima solución posible para n porque el máximo valor de pq se presenta cuando $p = q = .5$). Entonces

$$1.645\sqrt{\frac{(.5)(.5)}{n}} \leq .04$$

o bien

$$\sqrt{n} \geq \frac{(1.645)(.5)}{.04} = 20.56$$

$$n \geq (20.56)^2 = 422.7$$

Por tanto, los productores deben incluir al menos 423 mayoristas en su encuesta si desean estimar la proporción p correcta a no más de .04.

EJEMPLO 8.14

Un director de personal desea comparar la efectividad de dos métodos de capacitar empleados industriales a realizar cierta operación de ensamble. Un número de empleados se ha de dividir en dos grupos iguales: el primero recibiendo capacitación del método 1 y, el segundo, el método de capacitación 2. Cada uno efectuará la operación de ensamble y el tiempo de ensamblado se registrará. Se espera que las mediciones para ambos grupos tendrán una variación de alrededor de 8 minutos. Para que la estimación de la diferencia en tiempos medios de ensamble sea correcta a no más de 1 minuto de variación, con una probabilidad igual a .95, ¿cuántos trabajadores deben estar incluidos en cada grupo de capacitación?

Solución Haciendo $B = 1$ minuto, tenemos

$$1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq 1$$

Como se desea que n_1 sea igual a n_2, se puede hacer $n_1 = n_2 = n$ y obtener la ecuación

$$1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \leq 1$$

Como ya observamos, la variabilidad (intervalo) de cada método de ensamble es aproximadamente igual y, por lo tanto, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Como el intervalo, igual a 8 minutos, es aproximadamente igual a 4σ, tenemos

$$4\sigma \approx 8 \quad \text{o sea} \quad \sigma \approx 2$$

Sustituyendo este valor por σ_1 y σ_2 en la ecuación anterior, se obtiene

$$1.96\sqrt{\frac{(2)^2}{n} + \frac{(2)^2}{n}} \le 1$$
$$1.96\sqrt{\frac{8}{n}} \le 1$$
$$\sqrt{n} \ge 1.96\sqrt{8}$$

Resolviendo, tenemos $n \ge 31$. Por tanto, cada grupo debe contener al menos $n = 31$ trabajadores.

La tabla 8.7 contiene un resumen de las fórmulas empleadas para determinar los tamaños muestrales requeridos para estimación, con un límite dado en el error de la estimación o ancho de intervalo de confianza W ($W = 2B$). Observe que para estimar p, la fórmula del tamaño muestral usa $\sigma^2 = pq$, en tanto que para estimar $(p_1 - p_2)$, la fórmula del tamaño muestral usa $\sigma_1^2 = p_1q_1$ y $\sigma_2^2 = p_2q_2$.

TABLA 8.7 **Fórmulas para tamaño muestral**

Parámetro	Estimador	Tamaño muestral	Suposiciones
μ	$\bar{x}$	$n \ge \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{B^2}$	
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$n \ge \frac{z_{\alpha/2}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{B^2}$	$n_1 = n_2 = n$
p	$\hat{p}$	$n \ge \frac{z_{\alpha/2}^2 pq}{B^2}$	
		o	
		$n \ge \frac{(.25)z_{\alpha/2}^2}{B^2}$	$p = .5$
$p_1 - p_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$n \ge \frac{z_{\alpha/2}^2(p_1q_1 + p_2q_2)}{B^2}$	$n_1 = n_2 = n$
		o	
		$n \ge \frac{2(.25)z_{\alpha/2}^2}{B^2}$	$n_1 = n_2 = n$ y $p_1 = p_2 = .5$

8.9 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 331.

8.63 Llene los espacios en blanco de la tabla siguiente y encuentre los tamaños muestrales necesarios.

Tipo de datos	Una o dos muestras	Margen de error	p o σ	Límite B	Resuelva esta desigualdad	Tamaño muestral
Binomio	1	______	$p \approx .5$	.05	______ $\le .05$	$n \ge$ ______
______	______	$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sigma \approx 10$	2	______ ≤ 2	$n \ge$ ______

8.64 Llene los espacios en blanco de la tabla siguiente y encuentre los tamaños muestrales necesarios.

Tipo de datos	Una o dos muestras	Margen de error	p o σ	Límite B	Resuelva esta desigualdad	Tamaño muestral
Cuantitativo	2	______	$\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx 10$	4	______ ≤ 4	$n_1 = n_2 \geq$ ______
______	______	$1.96\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$	$p_1 \approx p_2 \approx .5$	.10	______ $\leq .10$	$n_1 = n_2 \geq$ ______

TÉCNICAS BÁSICAS

8.65 Encuentre un límite superior de confianza de una cola al 90% para la media poblacional μ para estos valores:

a. $n = 40, s^2 = 65, \bar{x} = 75$

b. $n = 100, s = 2.3, \bar{x} = 1.6$

8.66 Encuentre un límite inferior de confianza al 99% para la proporción binomial p cuando una muestra aleatoria de $n = 400$ intentos produjo $x = 196$ éxitos.

8.67 Muestras aleatorias independientes de tamaño 50 son sacadas de dos poblaciones cuantitativas, produciendo la información muestral de la tabla. Encuentre un límite superior de confianza de 95% para la diferencia en las dos medias poblacionales.

	Muestra 1	Muestra 2
Tamaño muestral	50	50
Media muestral	12	10
Desviación estándar muestral	5	7

8.68 Supongamos que usted desea estimar una media poblacional basada en una muestra aleatoria de n observaciones y experiencias anteriores sugieren que $\sigma = 12.7$. Si desea estimar μ correcta a no más de 1.6 de variación, con probabilidad igual a .95, ¿cuántas observaciones deben estar incluidas en su muestra?

8.69 Supongamos que usted desea estimar un parámetro binomial p correcto a no más de .04 de variación, con probabilidad igual a .95. Si sospecha que p es igual a algún valor entre .1 y .3 y desea estar seguro que su muestra es suficientemente grande, ¿qué tan grande debe ser n? (SUGERENCIA: Cuando calcule el error estándar, use el valor de p en el intervalo $.1 < p < .3$ que dará el tamaño muestral más grande.)

8.70 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = n_2 = n$ observaciones han de seleccionarse de cada una de las poblaciones 1 y 2. Si se desea estimar la diferencia entre las dos medias poblacionales correctas a no más de .17 de variación, con probabilidad igual a .90, ¿qué tan grande deben ser n_1 y n_2? Suponga que se conocen $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 \approx 27.8$.

8.71 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = n_2 = n$ observaciones han de seleccionarse de cada una de las poblaciones 1 y 2. Si se desea estimar la diferencia entre las dos medias poblacionales correctas a no más de .05 de variación, con probabilidad igual a .98, ¿qué tan grande deben ser n? Suponga que no hay información anterior en los valores de p_1 y p_2, pero que usted desea asegurarse de tener un número adecuado de observaciones en las muestras.

APLICACIONES

8.72 Gastos de operación Una muestra aleatoria de los costos mensuales de operación de una compañía para $n = 36$ meses produjo una media muestral de \$5474 y una desviación estándar de \$764. Encuentre un límite superior de confianza para los gastos mensuales medios de la compañía.

8.73 Inmigración legal El ejercicio 8.17 analizó una encuesta de investigación realizada por Fox News by Opinion Dynamics respecto a opiniones acerca del número de inmigrantes legales que entran a Estados Unidos.[3] Suponga que está usted diseñando una encuesta de este tipo.

a. Explique cómo seleccionaría su muestra. ¿Qué problemas podría encontrar en este proceso?

b. Si usted desea estimar el porcentaje de la población que está de acuerdo con una frase particular en su cuestionario de encuesta, correcto a no más de 1% con probabilidad .95, ¿aproximadamente cuántas personas tendrían que ser encuestadas?

8.74 Corrupción política Un cuestionario está diseñado para investigar actitudes acerca de corrupción política en el gobierno. Al experimentador le gustaría encuestar a dos grupos diferentes, republicanos y demócratas, y comparar las respuestas contra varias preguntas de "sí/no" para los dos grupos. El experimentador requiere que el error muestral para la diferencia en la proporción de respuestas positivas para los dos grupos no sea más de $\pm$ 3 puntos porcentuales. Si las dos muestras son del mismo tamaño, ¿qué tan grandes deben ser las muestras?

8.75 ¡Menos carne roja! Muchos estadounidenses están ahora más conscientes de la importancia de una buena nutrición y algunos investigadores creen que podemos estar alterando nuestras dietas para incluir menos carne roja y más frutas y verduras. Para probar esta teoría, una investigadora decide seleccionar registros de nutrición en hospitales, para personas encuestadas hace 10 años y comparar el promedio de cantidad de carne consumida por año contra las cantidades consumidas por un número igual de personas a quienes ella entrevistará este año. Ella sabe que la cantidad de carne consumida anualmente por los estadounidenses varía de 0 a alrededor de 104 libras. ¿Cuántas personas debe seleccionar la investigadora de cada grupo si ella desea estimar la diferencia en el promedio anual de consumo de carne per cápita, correcto a no más de 5 libras con 99% de confianza?

8.76 Carne roja, continúa Consulte el ejercicio 8.75. La investigadora selecciona dos grupos de 400 personas cada uno y recolecta la siguiente información muestral en el consumo anual de carne de res ahora y hace 10 años:

	Hace 10 años	Este año
Media muestral	73	63
Desviación muestral estándar	25	28

a. A la investigadora le gustaría demostrar que el consumo per cápita de carne ha disminuido en los últimos 10 años, de modo que necesita demostrar que la diferencia en los promedios es mayor a 0. Encuentre un límite inferior de confianza de 99% para la diferencia en el promedio de consumos per cápita de carne de res para los dos grupos.

b. ¿Qué conclusiones puede sacar la investigadora usando el límite de confianza del inciso a)?

8.77 Temporada de cacería Si una dependencia de fauna silvestre desea estimar el número medio de días de cacería por cazador, para todos los cazadores con licencia en el estado durante una temporada determinada, con un límite en el error de estimación igual a dos días de cacería, ¿cuántos cazadores deben estar incluidos en la encuesta? Suponga que los datos recolectados en encuestas anteriores han demostrado que σ es aproximadamente igual a 10.

8.78 Lluvia contaminada Supongamos que usted desea estimar el pH medio de lluvia en una zona que sufre de fuerte contaminación debida a la descarga de humo de una planta generadora de electricidad. Se sabe que σ está en la cercanía de .5 pH y que se desea estimar que se encuentre dentro de .1 de μ, con una probabilidad cercana a .95. ¿Aproximadamente cuántas precipitaciones de lluvia deben incluirse en su muestra (una lectura de pH por lluvia)? ¿Sería válido seleccionar todos sus especímenes de una sola lluvia? Explique.

8.79 pH en lluvia Consulte el ejercicio 8.78. Suponga que se desea estimar la diferencia entre la acidez media para lluvias en dos lugares diferentes, uno en una zona relativamente no contaminada a lo largo del océano y la otra en una zona sujeta a fuerte contaminación del aire. Si usted desea que su estimación sea correcta al .1 de pH más cercano, con probabilidad cercana a .90, ¿aproximadamente cuántas lluvias (valores de pH) tendrían que incluirse en cada muestra? (Suponga que la varianza de las mediciones de pH es aproximadamente .25 en ambos lugares y que las muestras serán de igual tamaño.)

8.80 Promedios de calificaciones Se desea estimar la diferencia en promedios de calificaciones entre dos grupos de estudiantes universitarios, precisa a no más de .2 puntos, con probabilidad aproximadamente igual a .95. Si la desviación estándar de las mediciones de calificaciones es aproximadamente igual a .6, ¿cuántos estudiantes deben incluirse en cada grupo? (Suponga que los grupos serán de igual tamaño.)

8.81 Selenio, otra vez Refiérase a la comparación de la ingesta diaria de selenio, que toman adultos en dos regiones diferentes de Estados Unidos, que vimos en el ejercicio 8.41. Supongamos que se desea estimar la diferencia en las ingestas diarias medias entre las dos regiones, correcta a no más de 5 microgramos de variación, con probabilidad igual a .90. Si se planea seleccionar un número igual de adultos de entre las dos regiones (es decir, $n_1 = n_2$), ¿qué tan grandes deben ser n_1 y n_2?

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Tipos de estimadores

1. Estimador puntual: un solo número se calcula para estimar el parámetro poblacional.
2. Estimador de intervalo: dos números se calculan para formar un intervalo que, con cierta cantidad de confianza, contiene al parámetro.

II. Propiedades de buenos estimadores

1. Insesgado: el valor promedio del estimador es igual al parámetro a ser estimado.
2. Varianza mínima: de todos los estimadores insesgados, el mejor estimador tiene una distribución muestral con el error estándar más pequeño.
3. El margen de error mide la distancia máxima entre el estimador y el verdadero valor del parámetro.

III. Estimadores puntuales de muestra grande

Para estimar uno de cuatro parámetros poblacionales cuando los tamaños muestrales sean grandes, use los siguientes estimadores puntuales con los márgenes de error apropiados.

Parámetro	Estimador puntual	95% de margen de error
μ	$\bar{x}$	$\pm 1.96\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
p	$\hat{p} = \frac{x}{n}$	$\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\pm 1.96\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
$p_1 - p_2$	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)$	$\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

IV. Estimadores de intervalo de muestra grande

Para estimar uno de cuatro parámetros poblacionales cuando los tamaños muestrales son grandes, use los siguientes estimadores de intervalo.

Parámetro	Intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$
μ	$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
p	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$
$\mu_1 - \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
$p_1 - p_2$	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

1. Todos los valores del intervalo son posibles valores para el parámetro poblacional desconocido.
2. Es improbable que algunos valores fuera del intervalo sean el valor del parámetro desconocido.
3. Para comparar dos medias poblacionales o proporciones, busque el valor 0 en el intervalo de confianza. Si 0 está en el intervalo, es posible que las dos medias poblacionales o proporciones sean iguales y no debería declararse una diferencia. Si 0 no está en el intervalo, es improbable que las dos medias o proporciones sean iguales y se puede declarar con seguridad una diferencia.

V. Límites de confianza de una cola

Utilice ya sea el límite superior (+) o el inferior (−) de dos colas, con el valor crítico de z cambiado de $z_{\alpha/2}$ a z_{α}.

VI. Selección del tamaño muestral

1. Determine el tamaño del margen de error, B, que esté usted dispuesto a tolerar.
2. Seleccione el tamaño muestral al despejar n o $n = n_1 = n_2$ en la desigualdad: $z_{\alpha/2} \le B$, donde SE (error estándar) es una función del tamaño muestral n.
3. Para poblaciones cuantitativas, estime la desviación poblacional estándar usando un valor previamente calculado de s o la aproximación de rango $\sigma \approx$ Margen/4.
4. Para poblaciones binomiales, use el método conservativo y aproxime p usando el valor $p = .5$.

Ejercicios suplementarios

8.82 Exprese el teorema del límite central. ¿De qué valor es el teorema del límite central en estimación estadística de muestra grande?

8.83 Una muestra aleatoria de $n = 64$ observaciones tiene una media de $\bar{x}$ y una desviación estándar $s = 3.9$.

a. Dé la estimación puntual de la media poblacional μ y encuentre el margen de error para su estimación.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para μ. ¿Qué significa "90% seguro"?

c. Encuentre un límite inferior de confianza de 90% para la media poblacional μ. ¿Por qué este límite es diferente del límite inferior de confianza del inciso b)?

d. ¿Cuántas observaciones son necesarias para estimar μ a no más de .5, con probabilidad igual a .95?

8.84 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 50$ y $n_2 = 60$ observaciones se seleccionaron de las poblaciones 1 y 2, respectivamente. Los tamaños muestrales y estadísticas muestrales calculadas se dan en la tabla:

	Población 1	Población 2
Tamaño muestral	5	60
Media muestral	100.4	96.2
Desviación muestral estándar	0.8	1.3

Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la diferencia en medias poblacionales e interprete el intervalo.

8.85 Consulte el ejercicio 8.84. Supongamos que se desea estimar $(\mu_1 - \mu_2)$ correcta a no más de .2, con probabilidad igual a .95. Si planea usar tamaños muestrales iguales, ¿qué tan grande deben ser n_1 y n_2?

8.86 Una muestra aleatoria de $n = 500$ observaciones de una población binomial produjo $x = 240$ éxitos.

a. Encuentre una estimación puntual para p y el margen de error para su estimador.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para p. Interprete este intervalo.

8.87 Consulte el ejercicio 8.86. ¿Qué tan grande debe ser una muestra si se desea estimar p correcta a no más de .025, con probabilidad igual a .90?

8.88 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 40$ y $n_2 = 80$ observaciones se seleccionaron de entre las poblaciones binomiales 1 y 2, respectivamente. El número de éxitos en las dos muestras fueron $x_1 = 17$ y $x_2 = 23$. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia entre las dos proporciones poblacionales binomiales. Interprete este intervalo.

8.89 Consulte el ejercicio 8.88. Supongamos que se desea estimar $(p_1 - p_2)$ correcta a no más de .06, con probabilidad igual a .99 y se planea usar tamaños muestrales iguales, es decir, $n_1 = n_2$. ¿Qué tan grande deben ser n_1 y n_2?

8.90 Cocina étnica Grupos étnicos en Estados Unidos compran diferentes cantidades de diversos productos alimenticios debido a su cocina étnica. Los asiáticos compran menos verduras enlatadas que otros grupos y los hispanoamericanos compran más aceite de cocina. A una investigadora interesada en la segmentación de mercado para estos dos grupos le gustaría estimar la proporción de familias que seleccionan ciertas marcas de varios productos. Si la investigadora desea que estas estimaciones se encuentren a no más de .03 con probabilidad de .95, ¿cuántas familias debe ella incluir en las muestras? Suponga que los tamaños muestrales son iguales.

8.91 Mujeres en Wall Street Las mujeres en Wall Street pueden ganar grandes salarios, pero es posible que tengan que hacer sacrificios en sus vidas personales. De hecho, muchas mujeres en la industria de valores tienen que hacer sacrificios personales importantes. Una encuesta de 482 mujeres y 356 hombres encontró que sólo la mitad de las mujeres tienen hijos, en comparación con tres cuartos de los hombres encuestados.[16]

a. ¿Cuáles son los valores de $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ para las mujeres y hombres en esta encuesta?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en la proporción de mujeres y hombres en Wall Street que tienen hijos.

c. ¿Qué conclusiones se pueden sacar respecto a los grupos comparadas en el inciso b)?

8.92 Fumar y presión sanguínea Se realizó un experimento para estimar el efecto de fumar en la presión sanguínea de un grupo de 35 fumadores. Se obtuvo la diferencia para cada participante al tomar la diferencia en las lecturas de presión sanguínea al principio del experimento y otra vez cinco años más adelante. El aumento de la media muestral, medido en milímetros de mercurio, fue de $\bar{x} = 9.7$. La desviación estándar muestral fue $s = 5.8$. Estime el aumento medio en presión sanguínea que se esperaría para fumadores de cigarrillos en el espacio de tiempo indicado por el experimento. Encuentre el margen de error. Describa la población asociada con la media que haya estimado.

8.93 Presión sanguínea, continúa Con el uso de un coeficiente de confianza igual a .90, ponga un intervalo de confianza en el aumento medio de presión sanguínea para el ejercicio 8.92.

8.94 Concentración de yodo Con base en mediciones repetidas de la concentración de yodo en una solución, un químico informa la concentración como 4.614, con un "margen de error de .006".

a. ¿Cómo se interpretaría el "margen de error" del químico?

b. Si la concentración informada se basa en una muestra aleatoria de $n = 30$ mediciones, con una desviación muestral estándar $s = .017$, ¿estaría usted de acuerdo en que el "margen de error" del químico es .006?

8.95 Estaturas Si se supone que las estaturas de hombres están normalmente distribuidas con una desviación estándar de 2.5 pulgadas, ¿qué tan grande debe tomarse una muestra para estar razonablemente seguro (probabilidad .95) de que la media muestral no difiere de la media verdadera (media poblacional) en más de .50 en valor absoluto?

8.96 Alimento para pollos Un experimentador alimentó con diferentes raciones, A y B, a dos grupos de 100 pollos cada uno. Suponga que todos los factores que no sean raciones son iguales para ambos grupos. De los pollos alimentados con la ración A, 13 murieron y de los pollos alimentados con la ración B, seis murieron.

a. Construya un intervalo de confianza de 98% para la verdadera diferencia en porcentajes de mortalidad para las dos raciones.

b. ¿Se puede concluir que hay una diferencia en los porcentajes de mortalidad para las dos raciones?

8.97 Antibióticos Se desea estimar la producción media por hora para un proceso que manufactura un antibiótico. Se observa el proceso durante 100 periodos de una hora escogidos al azar, con los resultados de $\bar{x} = 34$ onzas por hora y $s = 3$. Estime la producción media por hora para el proceso usando un intervalo de confianza de 95%.

8.98 Queso y refrescos El estadounidense promedio se ha acostumbrado a comer fuera de casa, en especial en restaurantes de comida rápida. En parte como resultado de este hábito de consumir comida rápida, el consumo per cápita de queso (el principal ingrediente en una pizza) y de bebidas gaseosas no de dieta, ha aumentado considerablemente desde hace una década. Un estudio en el *American Demographics* informa que el estadounidense promedio consume 25.7 libras de queso y bebe 40 galones (o aproximadamente 645 porciones de 8 onzas) de refrescos no de dieta al año.[17] Para probar la precisión de estos promedios publicados, se selecciona una muestra aleatoria de 40 consumidores y se registran estas estadísticas resumidas:

	Queso (lbs/año)	Refrescos (gal/año)
Media muestral	28.1	39.2
Desviación muestral estándar	3.8	4.5

Use su conocimiento de estimación estadística para estimar el promedio de consumo anual per cápita de estos dos productos. ¿Esta muestra hace que usted apoye o cuestione la precisión de los promedios reportados? Explique.

8.99 Alimentación sana ¿No saben los estadounidenses que comer pizzas y papas a la francesa lleva al sobrepeso? En el mismo artículo del *American Demographics* citado en el ejercicio 8.98, un estudio de mujeres que preparan la comida principal en sus casas informó estos resultados:

- 90% saben que la obesidad causa problemas de salud.
- 80% saben que un consumo elevado de grasas puede llevar a problemas de salud.
- 86% saben que el colesterol es un problema de salud.
- 88% saben que el sodio puede tener efectos negativos en la salud.

a. Suponga que este estudio se basó en una muestra aleatoria de 750 mujeres. ¿Qué tan precisos espera usted que sean los porcentajes dados líneas antes al estimar los porcentajes poblacionales reales? (SUGERENCIA: Si éstos son los únicos cuatro porcentajes para los cuales se necesita un margen de error, una estimación conservadora para p es $p \approx .80$.)

b. Si usted desea aumentar su error muestral a $\pm$ 1%, ¿qué tan grande debe tomar una muestra?

8.100 Girasoles En un artículo del *Annals of Botany*, un investigador informó los diámetros basales de tallos de dos grupos de girasoles dicotiledóneos: los que se dejaron balancearse libremente al viento y a los que se les aplicó un soporte artificial.[18] Un experimento similar fue realizado para plantas de maíz monocotiledóneas. Aun cuando los autores midieron otras variables en un diseño experimental más complicado, suponga que cada grupo estuvo formado por 64 plantas (un total de 128 girasoles y 128 plantas de maíz). Los valores indicados en la tabla siguiente son las medias muestrales más o menos el error estándar.

	Girasol	Maíz
Sin soporte	35.3 ± .72	16.2 ± .41
Con soporte	32.1 ± .72	14.6 ± .40

Use sus conocimientos de estimación estadística para comparar los diámetros basales de plantas sin y con soporte para las dos plantas. Escriba un párrafo que describa sus conclusiones, asegurándose de incluir una medida de la precisión de su inferencia.

8.101 ¿Una mujer presidenta? Durante años, casi todos los estadounidenses dicen que votarían por una mujer para presidenta SI fuera apta para ello y SI fuera de su propio partido político. Pero, ¿está listo Estados Unidos para que una mujer sea su presidenta? Una encuesta de la CBS/New York Times hizo esta pregunta de una muestra aleatoria de 1229 personas adultas, con los siguientes resultados:[19]

	% que respondieron "Sí"	
	Ahora	1999
Total	55%	48%
Hombres	60	46
Mujeres	51	49
Republicanos	48	47
Demócratas	61	44
Independientes	55	54

a. Construya un intervalo de confianza de 95% para la proporción de todos los estadounidenses que ahora piensan que Estados Unidos está listo para una mujer presidenta.

b. Si hubiera $n_1 = 610$ hombres y $n_2 = 619$ mujeres en la muestra, construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en la proporción de hombres y mujeres que ahora piensan que Estados Unidos está listo para una mujer presidenta. ¿Se puede concluir que la proporción de hombres que ahora piensan que este país está listo para una mujer presidenta es mayor que la proporción de mujeres? Explique.

c. Veamos a los porcentajes de respuestas "sí" para republicanos, demócratas e independientes ahora comparados con los porcentajes en 1999. ¿Se puede pensar en una razón por la cual el porcentaje de demócratas podría haber cambia en forma tan importante?

8.102 Costos de universidad El director administrativo de un colegio para hombres desea estimar el costo promedio del primer año para estudiantes de primer grado en una universidad particular, correcto a no más de $500, con una probabilidad de .95. Si una muestra aleatoria de estudiantes de primer año ha de seleccionarse y a cada uno se le pide llevar datos financieros, ¿cuántos deben estar incluidos en la muestra? Suponga que el director sólo sabe que el margen de gastos va a variar de aproximadamente $4800 a $13 000.

8.103 Control de calidad Un ingeniero de control de calidad desea estimar la fracción de defectos en un lote grande de cartuchos de película. De experiencias previas, él sabe que la fracción real de defectos debe estar alrededor de .05. ¿Qué tan grande debe tomar una muestra si él desea estimar la verdadera fracción a no más de .01, usando un intervalo de confianza de 95%?

8.104 Tarjetas de circuitos Muestras de 400 tarjetas de circuito impreso se seleccionaron de cada una de dos líneas de producción A y B. La línea A produjo 40 defectuosas y la B produjo 80 defectuosas. Estime la diferencia en las fracciones reales de defectuosas para las dos líneas con un coeficiente de confianza de .90.

8.105 Tarjetas de circuitos II Consulte el ejercicio 8.104. Suponga que 10 muestras de $n = 400$ tarjetas de circuito impreso se probaron y se construyó un intervalo de confianza para p para cada una de las 10 muestras. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los intervalos no contenga el verdadero valor de p? ¿Y de que al menos un intervalo no contenga el verdadero valor de p?

8.106 Hockey sobre hielo La capacidad de acelerar rápidamente es un atributo importante para un jugador de hockey sobre hielo. G. Wayne Marino investigó algunas de las variables relacionadas con la aceleración y rapidez de un jugador de hockey desde una posición en reposo.[20] Sesenta y nueve jugadores, titulares e intramuros, de la Universidad de Illinois se incluyeron en el experimento. A cada jugador se le indicó que se moviera con la mayor rapidez posible desde una posición de reposo, para recorrer una distancia de 6 metros. Las medias y desviaciones estándar de algunas de las variables registradas para cada uno de los 69 patinadores se ven en la tabla siguiente:

	Media	Desv. Est.
Peso (kilogramos)	75.270	9.470
Largo de zancada (metros)	1.110	.205
Rapidez de zancada (zancada/s)	3.310	.390
Promedio de aceleración (m/s^2)	2.962	.529
Velocidad instantánea (m/s)	5.753	.892
Tiempo para patinar (s)	1.953	.131

a. Dé la fórmula que usaría para construir un intervalo de confianza de 95% para una de las medias poblacionales (por ejemplo, tiempo medio para patinar la distancia de 6 m).

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para el tiempo medio para patinar. Interprete este intervalo.

8.107 Hockey sobre hielo, continúa El ejercicio 8.106 presentó estadísticas de un estudio de arranques rápidos de patinadores de hockey sobre hielo. La media y desviación estándar de las 69 mediciones individuales de promedio de aceleración, en la distancia de 6 metros, fueron 2.962 y .529 metros por segundo, respectivamente.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para esta media poblacional. Interprete el intervalo.

b. Suponga que usted no está satisfecho con el ancho de este intervalo de confianza y desea cortar el intervalo a la mitad al aumentar el tamaño muestral. ¿Cuántos patinadores (en total) tendrían que incluirse en el estudio?

8.108 Hockey sobre hielo, continúa La media y desviación estándar, de las magnitudes de rapidez de la muestra de 69 patinadores al final de la distancia de 6 metros del ejercicio 8.106, fueron 5.753 y .892 metros por segundo, respectivamente.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la velocidad media en la marca de 6 metros. Interprete el intervalo.

b. Supongamos que usted desea repetir el experimento y desea estimar esta velocidad media a no más de .1 segundos, con probabilidad .99. ¿Cuántos patinadores tendrían que incluirse en su muestra?

8.109 Trabajadores en escuelas Además de profesores y personal administrativo, las escuelas también tienen otros empleados entre los que se incluyen conductores de autobuses escolares, custodios y trabajadores de cafeterías. El promedio de salario por hora es \$14.18 para conductores de autobuses, \$12.61 para custodios y \$10.33 para trabajadores de cafeterías.[21] Suponga que un distrito escolar emplea $n = 36$ conductores de autobuses que ganan un promedio de \$11.45 por hora con una desviación estándar de $s = \$2.84$. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para el promedio de sueldo por hora de conductores de autobuses en distritos escolares semejantes a este. ¿Su intervalo de confianza contiene el promedio indicado de \$14.18? ¿Qué se puede concluir acerca de salarios por hora para conductores de autobuses en este distrito escolar?

8.110 Reincidencia Se utilizó una técnica experimental de rehabilitación en prisioneros liberados. Se demostró que 79 de 121 hombres sometidos a la técnica prosiguieron con vidas útiles y sin delincuencia durante un periodo de tres años después de su liberación. Encuentre un intervalo de confianza para p, la probabilidad de que un prisionero sometido a la técnica de rehabilitación seguirá una vida sin delincuencia durante al menos tres años después de ser liberados.

8.111 Densidad relativa Si 36 mediciones de la densidad relativa del aluminio tuvieron una media de 2.705 y una desviación estándar de .028, construya un intervalo de confianza del 98% para la densidad relativa real del aluminio.

8.112 Investigación de audiología En un estudio para establecer el umbral absoluto de audibilidad, a 70 estudiantes hombres de primer año de universidad se les pidió participaran. Cada individuo fue sentado en un cuarto a prueba de sonidos y se presentó un tono de 150 H a un gran número de niveles de estímulo en un orden aleatorio. A la persona se le indicó presionara un botón si detectaba el sonido; el experimentador registró el nivel más bajo de estímulo al cual fue detectado el tono. La media para el grupo fue de 21.6 dB con $s = 2.1$. Estime el umbral medio absoluto para todos los estudiantes universitarios de primer año y calcule el margen de error.

8.113 Derecho o zurdo Un investigador clasificó a sus sujetos como innatamente derechos o zurdos al comparar los anchos de las uñas de sus pulgares. Él tomó una muestra de 400 hombres y encontró que 80 podrían clasificarse como zurdos de acuerdo con este criterio. Estime la proporción de todos los hombres de la población que resultarían zurdos, usando un intervalo de confianza de 95%.

8.114 La garrapata roja de cítricos Una entomóloga desea estimar el tiempo promedio de desarrollo de la garrapata roja de cítricos, a no más de .5 de día. De los experimentos previos, se sabe que σ es cercana a los cuatro días. ¿Qué tan grande debe ser la muestra que tome la entomóloga para tener 95% de confianza de su estimación?

8.115 La garrapata roja de cítricos, continúa Un productor piensa que uno de cada cinco de sus árboles de cítricos está infectado con la garrapata roja de cítricos mencionada en el ejercicio 8.114. ¿Qué tan grande debe ser la muestra tomada si el productor desea estimar, a no más de .08, la proporción de sus árboles que están infectados con la garrapata roja de cítricos?

MI APPLET Ejercicios

8.116 Consulte el applet **Interpreting Confidence Intervals**.

a. Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño $n = 50$ de una población con media μ desconocida y una desviación estándar conocida $\sigma = 35$. Calcule la mitad del ancho de un intervalo de confianza de 95% para μ. ¿Cuál sería el ancho de este intervalo?

b. Use el botón One Sample para crear un intervalo individual de confianza para μ. ¿Cuál es el ancho de este intervalo? Compare sus resultados con el cálculo que hizo en el inciso a).

8.117 Consulte el applet **Interpreting Confidence Intervals**.

a. Use el botón 10 Samples para crear 10 intervalos de confianza para μ.

b. ¿Qué observa acerca de los anchos de estos intervalos?

c. ¿Cuántos de los intervalos funcionan adecuadamente y contienen el verdadero valor de μ?

d. Intente esta simulación nuevamente al dar un clic en el botón 10 Samples unas cuantas veces más y contando el número de intervalos que funcionan correctamente. ¿Es cercano a nuestro nivel de confianza de 95%?

8.118 Consulte el applet **Interpreting Confidence Intervals**.

a. Use el botón 100 Samples para crear 100 intervalos de confianza para μ.

b. ¿Qué observa acerca de los anchos de estos intervalos?

c. ¿Cuántos de los intervalos funcionan adecuadamente y contienen el verdadero valor de μ?

d. Intente esta simulación nuevamente al dar un clic en el botón 100 Samples unas cuantas veces más y contando el número de intervalos que funcionan correctamente. ¿Es cercano a nuestro nivel de confianza de 95%?

8.119 Suponga que se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n con media $\mu = 750$ y desviación estándar σ. El applet **Exploring Confidence Intervals** muestra la distribución muestral de $\bar{x}$ y un intervalo de confianza representativo, calculado como

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

a. El applet se carga con $n = 50$, $\sigma = 35$ y $\bar{x} = 756$. Calcule la mitad del ancho de un intervalo de confianza de 95% para μ.

b. Calcule los límites superior e inferior de confianza y compare estos límites contra los puntos extremos del intervalo que se ve en el applet.

c. ¿El intervalo de confianza funciona correctamente? Esto es, ¿contiene el verdadero valor de $\mu = 750$?

8.120 Consulte el applet **Exploring Confidence Intervals**.

a. Use el applet para hallar los valores de $z_{\alpha/2}$ para un intervalo de confianza de 99%. ¿Para un intervalo de confianza de 95%? ¿Para un intervalo de confianza de 90%?

b. ¿Qué efecto tiene reducir el nivel de confianza sobre el ancho del intervalo de confianza?

c. Un intervalo más angosto indica una estimación más precisa de μ, formada por un margen más pequeño de valores. Para obtener una estimación más precisa al usar un valor más pequeño de z, ¿qué se ha sacrificado?

8.121 Consulte el applet **Exploring Confidence Intervals**.

a. Mueva el cursor marcado "n" de abajo hacia arriba.

b. ¿Cuál es el efecto de aumentar el tamaño muestral sobre el error estándar de $\bar{x}$? ¿Sobre el ancho del intervalo de confianza?

c. ¿Puede usted considerar una explicación práctica para los fenómenos que observa en el inciso b)?

8.122 Consulte el applet **Exploring Confidence Intervals**.

a. Mueva el cursor marcado "sigma" de abajo hacia arriba.

b. ¿Cuál es el efecto de aumentar la variabilidad sobre el error estándar de $\bar{x}$? ¿Sobre el ancho del intervalo de confianza?

c. ¿Puede usted considerar una explicación práctica para los fenómenos que observa en el inciso b)?

CASO PRÁCTICO

¿Qué tan confiable es esa encuesta? CBS News: ¿Cómo y dónde come el pueblo de Estados Unidos?

Cuando los estadounidenses salen a comer a restaurantes, muchos de ellos escogen alimentos de Estados Unidos, pero el gusto por comida mexicana, china e italiana varían de una región a otra en Estados Unidos. En una encuesta telefónica realizada por la CBS[22] del 30 de octubre al 1 de noviembre de 2005, se encontró que 39% de las familias comían juntos siete noches por semana, ligeramente menos que el 46% de familias que dijeron comer juntos siete días por semana en una encuesta de 1990 por la CBS. Casi todos los estadounidenses, hombres y mujeres, cocinan algo cuando comen en casa, como lo informa la tabla siguiente donde comparamos el número de comidas por la tarde, personalmente cocinadas por semana por hombres y mujeres.

Número de comidas cocinadas	3 o menos	4 o menos
Hombres	76	24
Mujeres	33	67

La frecuencia con la que los estadounidenses comen en restaurantes es principalmente una función del ingreso. "Mientras que casi todas las familias que ganan más de $50 000 pidieron comida de restaurante al menos una vez la semana pasada, 75% de los que ganan menos de $15 000 no la piden en absoluto."

Ingreso	Ninguna	1-3 noches	4 o más noches
Todos	47	49	4
Menos de $15 000	75	19	6
$15-$30 000	58	39	3
$30-$50 000	59	38	3
Más de $50 000	31	64	5

A pesar de toda la publicidad negativa acerca de la obesidad y altas calorías asociadas con hamburguesas y papas fritas, muchos estadounidenses continúan consumiendo comida rápida para ahorrar tiempo dentro de sus apretadas agendas.

Noches de comida rápida	0	1	2-3	4+
Con niños	47	30	19	4
Sin niños	59	20	16	5

Noches de comida rápida	0	1	2-3	4+
Hombres	46	28	20	6
Mujeres	63	20	15	2

Cincuenta y tres por ciento de familias con niños consumieron comida rápida al menos una vez la semana pasada, comparado con el 41% de familias sin hijos. Además, 54% de los hombres consumieron comida rápida al menos una vez la semana pasada, en comparación con sólo 37% de las mujeres.

La descripción de los métodos de encuesta que dio lugar a estos datos se expresó como sigue:

> *"Esta encuesta fue realizada a nivel nacional entre una muestra aleatoria de 936 adultos, entrevistados por teléfono del 30 de octubre al 1 de noviembre, 2005. El error debido al muestreo para resultados basados en toda la muestra podría ser más o menos tres puntos porcentuales."*

1. Verifique el margen de error de $\pm$ 3 puntos porcentuales como lo indica la muestra de $n = 936$ adultos. Suponga que la muestra contenida en igual número de hombres y mujeres, o 468 hombres y 468 mujeres. ¿Cuál es el margen de error para hombres y para mujeres?
2. Los números de las tablas indican el número de personas/familias en las categorías? Si no es así, ¿qué representan esos números?
3. a. Construya un intervalo de confianza de 95% para las proporciones de estadounidenses que comieron juntos siete noches por semana.
   b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en la proporción de mujeres y hombres que personalmente cocinan al menos cuatro o más comidas por semana.
   c. Construya un intervalo de confianza de 95% para la proporción de estadounidenses que comen en restaurantes al menos una vez a la semana.
4. Si estas preguntas se formulan ahora, ¿esperaría usted que las respuestas fueran similares a las publicadas aquí, o esperaría usted que difieran en forma significativa?

9

Pruebas de hipótesis de muestras grandes

© Valentyn75/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

En este capítulo, el concepto de una prueba estadística de hipótesis se introduce de manera formal. Las distribuciones muestrales de estadísticos presentadas en los capítulos 7 y 8, se usan para construir pruebas de muestra grande respecto a los valores de parámetros poblacionales de interés para el experimentador.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

Regiones de rechazo, valores *p* y conclusiones
¿Cómo calculo β?

¿Una aspirina al día…?

¿Una aspirina reduce el riesgo de ataque cardiaco? Un estudio muy grande de médicos de Estados Unidos demostró que una sola aspirina tomada en días alternados redujo a la mitad un ataque al corazón en hombres. No obstante, tres días después, un estudio hecho en Inglaterra informó de una conclusión completamente opuesta. ¿Cómo puede ser esto? El estudio práctico al final de este capítulo observa la forma en que se realizaron los estudios y usted analizará los datos usando técnicas de muestras grandes.

9.1

PRUEBA DE HIPÓTESIS ACERCA DE PARÁMETROS POBLACIONALES

En situaciones prácticas, una inferencia estadística puede comprender la estimación de un parámetro poblacional o tomar decisiones acerca del valor del parámetro. Por ejemplo, si una compañía farmacéutica está fermentando un tanque de antibiótico, se pueden usar muestras del tanque para *estimar* la potencia media μ para todo el antibiótico del tanque. En contraste, suponga que la compañía no se interesa en la potencia media exacta del antibiótico, sino sólo satisfacer los estándares de potencia mínimos del gobierno. Entonces la compañía puede usar muestras del tanque para decidir entre estas dos posibilidades:

- La potencia media μ no excede la potencia mínima permisible.
- La potencia media μ excede la potencia mínima permisible.

El problema de la compañía farmacéutica ilustra una **prueba estadística de hipótesis**.

El razonamiento empleado en una prueba estadística de hipótesis es similar al proceso en un tribunal. Al procesar a una persona por robo, el tribunal debe decidir entre inocencia y culpabilidad. Cuando el juicio se inicia, se supone que la persona acusada es *inocente*. El proceso recaba y presenta toda evidencia disponible en un intento para contradecir la hipótesis de inocencia y por tanto obtener una condena. Si hay evidencia suficiente contra inocencia, el tribunal rechazará la hipótesis de inocencia y declarará *culpable* al demandado. Si el proceso no presenta suficiente evidencia para demostrar que el demandado es culpable, el tribunal le hallará *no culpable*. Observe que esto no demuestra que el demandado es inocente, sino sólo que no hubo evidencia suficiente para concluir que el demandado era culpable.

Empleamos este mismo tipo de razonamiento para explicar los conceptos básicos de prueba de hipótesis. Estos conceptos se utilizan para probar los cuatro parámetros poblacionales expuestos en el capítulo 8: una sola media poblacional o proporción (μ o p) y la diferencia entre dos medias poblacionales o proporciones ($\mu_1 - \mu_2$ o $p_1 - p_2$). Cuando los tamaños muestrales son grandes, los estimadores puntuales para cada uno de estos cuatro parámetros tienen distribuciones muestrales normales, de modo que las cuatro pruebas estadísticas de muestras grandes siguen el mismo modelo general.

9.2

UNA PRUEBA ESTADÍSTICA DE HIPÓTESIS

Una prueba estadística de hipótesis está formada de cinco partes:

1. La hipótesis nula, denotada por H_0
2. La hipótesis alternativa, denotada por H_a
3. El estadístico de prueba y su valor p
4. La región de rechazo
5. La conclusión

Cuando se especifiquen estos cinco elementos, se define una prueba particular; cambiar una o más de las partes crea una nueva prueba. Veamos con más detalle cada parte de la prueba estadística de hipótesis.

1–2

Definición Las dos hipótesis en competencia son la **hipótesis alternativa H_a**, generalmente la hipótesis que el investigador desea apoyar y la **hipótesis nula H_0**, una contradicción de la hipótesis alternativa.

Como pronto veremos, es más fácil presentar apoyo para la hipótesis alternativa al demostrar que la hipótesis nula es falsa. En consecuencia, el investigador estadístico siempre empieza por suponer que la hipótesis nula H_0 es verdadera. El investigador utiliza entonces los datos muestrales para decidir si la evidencia está a favor de H_a más que de H_0 y saca una de dos **conclusiones**:

- Rechaza H_0 y concluye que H_a es verdadera.
- Acepta (no rechaza) H_0 como verdadera.

EJEMPLO 9.1

Se desea demostrar que el promedio de salario por hora de carpinteros en el estado de California es diferente de $14, que es el promedio nacional. Ésta es la hipótesis alternativa, escrita como

2 $$H_a : \mu \neq 14$$

La hipótesis nula es

1 $$H_0 : \mu = 14$$

A usted le gustaría rechazar la hipótesis nula, con lo que concluye que la media en California no es igual a $14.

EJEMPLO 9.2

Un proceso de maquinado produce un promedio de 3% de piezas defectuosas. Usted está interesado en demostrar que un simple ajuste en una máquina reducirá p, la proporción de piezas defectuosas producidas en el proceso de maquinado. Entonces, la hipótesis alternativa es

2 $$H_a : p < .03$$

y la hipótesis nula es

1 $$H_0 : p = .03$$

Si puede rechazar H_0, se puede concluir que el proceso ajustado produce menos de 3% de piezas defectuosas.

MI CONSEJO

Dos colas ⇔ buscar un signo $\neq$ en H_a.

Una cola ⇔ buscar un signo $>$ o $<$ en H_a.

Hay una diferencia en las formas de la hipótesis alternativa dada en los ejemplos 9.1 y 9.2. En el ejemplo 9.1, no se sugiere diferencia direccional para el valor de μ; esto es, μ podría ser mayor o menor que $14 si H_a es verdadera. Este tipo de prueba se denomina **prueba de hipótesis de dos colas**. En el ejemplo 9.2, no obstante, estamos específicamente interesados en detectar una diferencia direccional en el valor de p; esto es, si H_a es verdadera, el valor de p es menor a .03. Este tipo de prueba se denomina **prueba de hipótesis de una cola**.

La decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula está basada en información contenida en una muestra sacada de la población de interés. Esta información toma estas formas:

3
- **Estadística de prueba:** un solo número calculado a partir de los datos muestrales
- **Valor *p*:** probabilidad calculada usando la prueba estadística

Cualquiera de estas mediciones, o ambas, actúan como quienes toman decisiones para el investigador al decidir si rechazar o aceptar H_0.

EJEMPLO 9.3

Para la prueba de hipótesis del ejemplo 9.1, el promedio de salario por hora $\bar{x}$ para una muestra aleatoria de cien carpinteros en California podría dar un buen *estadístico de prueba* para probar

$$H_0 : \mu = 14 \quad \text{contra} \quad H_a : \mu \neq 14$$

Si la hipótesis nula H_0 es verdadera, entonces la media muestral no debe estar demasiado lejana de la media poblacional $\mu = 14$. Suponga que esta muestra produce una media muestral $\bar{x}$ con desviación estándar $s = 2$. ¿Es probable o improbable que ocurra esta evidencia muestral, si en realidad H_0 es verdadera? Se pueden usar dos medidas para averiguarlo. Como el tamaño muestral es grande, la distribución muestral de $\bar{x}$ es aproximadamente normal con media $\mu = 14$ y error estándar $\sigma/\sqrt{n}$, estimada como

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{100}} = .2$$

- El **estadístico de prueba** $\bar{x} = 15$ está a

3

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \frac{15 - 14}{.2} = 5$$

desviaciones estándar de la media poblacional μ.

- El **valor *p*** es la probabilidad de observar un estadístico de prueba tanto o más extremo que el valor observado, si en realidad H_0 es verdadera. Para este ejemplo, definimos "extremo" tan abajo o tan arriba de lo que hubiéramos esperado. Esto es,

$$\text{valor } p = P(z > 5) + P(z < -5) \approx 0$$

El *valor grande del estadístico de prueba* y el *valor p pequeño* quieren decir que se ha observado un evento muy poco probable, si en realidad H_0 es verdadera y $\mu = 14$.

¿Cómo se decide si rechazar o aceptar H_0? Todo el conjunto de valores que pueda tomar el estadístico de prueba se divide en dos conjuntos o regiones. Un conjunto, formado de valores que apoyan la hipótesis alternativa y llevan a rechazar H_0, se denomina
4 **región de rechazo**. El otro, formado de valores que apoyan la hipótesis nula, recibe el nombre de **región de aceptación**.

Por ejemplo, en el ejemplo 9.1, uno estaría inclinado a creer que el promedio de salario por hora en California fuera diferente de \$14 si la media muestral es mucho menor de \$14 o mucho mayor de \$14. La región de rechazo de dos colas está formada por valores muy pequeños y muy grandes de $\bar{x}$, como se ve en la figura 9.1. En el ejemplo 9.2, como se desea demostrar que el porcentaje de defectos ha *disminuido*, estaríamos inclinados a rechazar H_0 para valor de $\hat{p}$ que sean mucho menores a .03. Sólo valores *pequeños* de $\hat{p}$ pertenecen a la región de rechazo de cola izquierda que se ilustra en la figura 9.2. Cuando la región de rechazo está en la cola izquierda de la distribución, la prueba se llama **prueba de cola izquierda**. Una prueba con su región de rechazo en la cola derecha recibe el nombre de **prueba de cola derecha**.

FIGURA 9.1
Regiones de rechazo y aceptación para el ejemplo 9.1

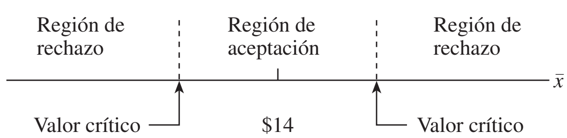
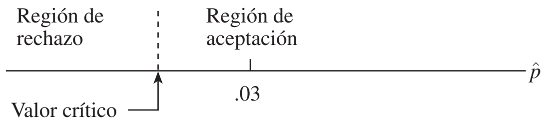


FIGURA 9.2
Regiones de rechazo y aceptación para el ejemplo 9.2



5 Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, entonces se rechaza la hipótesis nula. Si el estadístico de prueba cae en la región de aceptación, entonces la hipótesis nula se acepta o la prueba se juzga como no concluyente. Vamos a aclarar los diferentes tipos de conclusiones que son apropiados cuando consideremos varios ejemplos prácticos por prueba de hipótesis.

Por último, ¿cómo se decide sobre los **valores críticos** que separan las regiones de aceptación y rechazo? Es decir, ¿cómo se decide cuánta evidencia estadística se necesita antes de rechazar H_0? Esto depende de la cantidad de confianza que el investigador desea unir a las conclusiones de prueba y el **nivel de significancia** α, el riesgo que estemos dispuestos a tomar si se toma una decisión incorrecta.

Definición Un **error tipo I** para una prueba estadística es el error de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. El **nivel de significancia (nivel de significancia)** para una prueba estadística de hipótesis es

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar falsamente } H_0) = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando es verdadera})$$

Este valor α representa el *máximo riesgo tolerable* de rechazar incorrectamente H_0. Una vez fijo este nivel de significancia, la región de rechazo se puede fijar para permitir que el investigador rechace H_0 con un grado fijo de confianza en la decisión.

En la siguiente sección, mostraremos cómo usar una prueba de hipótesis para probar el valor de una media poblacional μ. Cuando continuemos, aclararemos algunos de los detalles computacionales y agregaremos algunos conceptos adicionales para completar la comprensión de las pruebas de hipótesis.

9.3 UNA PRUEBA DE MUESTRA GRANDE ACERCA DE UNA MEDIA POBLACIONAL

Considere una muestra aleatoria de n mediciones sacadas de una población que tiene media μ y desviación estándar σ. Se desea probar una hipótesis de la forma[†]

1 $$H_0 : \mu = \mu_0$$

donde μ_0 es algún valor hipotético para μ, contra una hipótesis alternativa de una cola:

2 $$H_a : \mu > \mu_0$$

MI CONSEJO
La hipótesis nula *siempre* tendrá signo "igual a".

El subíndice cero indica el valor del parámetro especificado por H_0. Observe que H_0 da un valor exacto para el parámetro a probar, mientras que H_a da un rango de posibles valores para μ.

[†]Observe que si la prueba rechaza la hipótesis nula $\mu = \mu_0$ a favor de la hipótesis alternativa $\mu > \mu_0$, entonces ciertamente rechazará una hipótesis nula que incluye $\mu < \mu_0$, porque esto es incluso más contradictorio para la hipótesis alternativa. Por esta razón, en este texto indicamos la hipótesis nula para una prueba de una cola como $\mu = \mu_0$ y no como $\mu \leq \mu_0$.

Lo esencial de la prueba

La media muestral $\bar{x}$ es la mejor estimación del valor real de μ, que está por ahora en cuestión. ¿Qué valores de $\bar{x}$ le llevarían a pensar que H_0 es falsa y μ es, de hecho, mayor que el valor hipotético? Los valores de $\bar{x}$ que son extremadamente *grandes* implicarían que μ es mayor que lo hipotético. En consecuencia, debe rechazarse H_0 si $\bar{x}$ es demasiado grande.

El siguiente problema es definir lo que significa "demasiado grande". No es probable que ocurran valores de $\bar{x}$ que se encuentren a demasiadas desviaciones estándar a la derecha de la media. Por tanto, se puede definir "demasiado grande" como estar a demasiadas desviaciones estándar de μ_0. Pero, ¿qué es "demasiado"? Esta pregunta puede contestarse usando el *nivel de significancia* α, la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es *verdadera*.

Recuerde que el error estándar de $\bar{x}$ se estima como

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

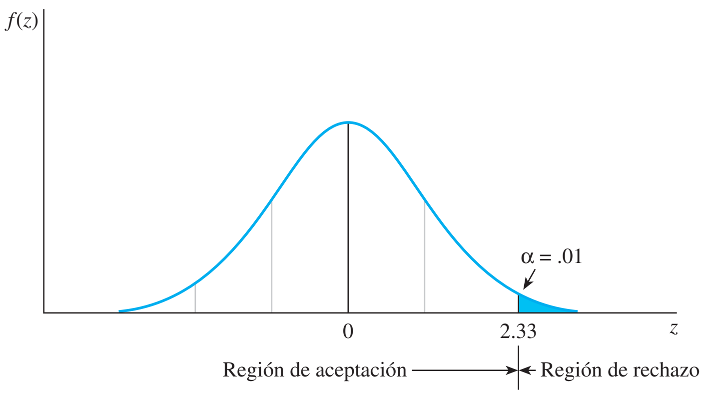
Como la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$ es aproximadamente normal cuando n **es grande**, el número de desviaciones estándar que $\bar{x}$ está desde μ_0 se puede medir usando el **estadístico estandarizado de prueba**,

3

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

que tiene una distribución estándar normal cuando H_0 es verdadera y μ_0 es verdadera y $\mu = \mu_0$. El nivel de significancia α es igual al área bajo la curva normal que se encuentra
4 arriba de la región de rechazo. Entonces, si se desea $\alpha = .01$, se rechazará H_0 cuando $\bar{x}$ se encuentre a más de 2.33 desviaciones estándar a la derecha de μ_0. De manera equivalente, se rechazará H_0 si el estadístico de prueba estandarizado z es mayor a 2.33 (véase la figura 9.3).

FIGURA 9.3
Región de rechazo para una prueba de cola derecha con $\alpha = .01$



EJEMPLO 9.4

El promedio semanal de ganancias para trabajadoras sociales es \$670. ¿Los hombres de la misma posición tienen ganancias semanales promedio más altas que los de las mujeres? Una muestra aleatoria de $n = 40$ trabajadores sociales mostró $\bar{x} = \$725$ y $s = \$102$. Pruebe la hipótesis apropiada usando $\alpha = .01$.

MI CONSEJO

Para pruebas de una cola, busque palabras direccionales como "mayor", "menor que", "más alto", "más bajo", etcétera.

Solución A usted le gustaría demostrar que el promedio semanal de ganancias para hombres es mayor a \$670, que es el promedio de las mujeres. En consecuencia, si μ es el promedio semanal de ganancias para trabajadores sociales de sexo masculino, se puede demostrar la prueba formal de hipótesis en pasos:

1–2 **Hipótesis nula y alternativa:**

$$H_0: \mu = 670 \quad \text{contra} \quad H_a: \mu > 670$$

3 **Estadística de prueba:** Usando la información muestral, con s como estimación de la desviación poblacional estándar, calcule

$$z \approx \frac{\bar{x} - 670}{s/\sqrt{n}} = \frac{725 - 670}{102/\sqrt{40}} = 3.41$$

4 **Región de rechazo:** Para esta prueba de una cola, valores de $\bar{x}$ mucho mayores a 670 llevarían a rechazar H_0; o bien, lo que es equivalente, a valores del *estadístico de prueba estandarizado z* en la cola derecha de la distribución estándar normal. Para controlar el riesgo de tomar una decisión incorrecta cuando $\alpha = .01$, se debe establecer el **valor crítico** que separe las regiones de rechazo y aceptación para que el área de la cola derecha sea exactamente $\alpha = .01$. Este valor se encuentra en la tabla 3 del apéndice I como $z = 2.33$, como se ve en la figura 9.3. La hipótesis nula será rechazada si el valor observado del estadístico de prueba, z, es mayor a 2.33.

5 **Conclusión:** Compare el valor observado del estadístico de prueba, $z = 3.41$, con el valor crítico necesario para rechazo, $z = 2.33$. Como el valor observado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se puede rechazar H_0 y concluir que el promedio semanal de ganancia para trabajadores sociales de sexo masculino es más alta que el promedio para trabajadoras. La probabilidad de que se tome una decisión incorrecta es $\alpha = .01$.

MI CONSEJO

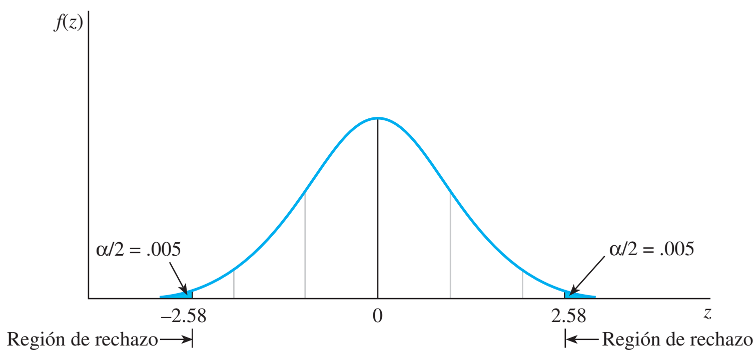
Si la prueba es de dos colas, no se verá ninguna palabra direccional. El experimentador sólo estará buscando una "diferencia" respecto al valor hipotético.

Si se desea detectar desviaciones mayores o menores a μ_0, entonces la hipótesis alternativa es de *dos colas*, escrita como

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

lo cual implica que ya sea $\mu > \mu_0$ o que $\mu < \mu_0$. Valores de $\bar{x}$ que sean "demasiado grandes" o "demasiado pequeños" en términos de su distancia desde μ_0 se colocan en la región de rechazo. Si se escoge $\alpha = .01$, el área de la región de rechazo se divide igualmente entre las dos colas de la distribución normal, como se ve en la figura 9.4. Con el uso del estadístico de prueba estandarizado z, se puede rechazar H_0 si $z > 2.58$ o $z < -2.58$. Para valores diferentes de α, los valores críticos de z que separan las regiones de rechazo y aceptación cambiarán de conformidad.

FIGURA 9.4
Región de rechazo para una prueba de dos colas con $\alpha = .01$



EJEMPLO 9.5

La producción diaria para una planta química local ha promediado 880 toneladas en los últimos años. A la gerente de control de calidad le gustaría saber si este promedio ha cambiado en meses recientes. Ella selecciona al azar 50 días de entre la base de datos y calcula el promedio y desviación estándar de las $n = 50$ producciones como $\bar{x} = 871$ toneladas y $s = 21$ toneladas, respectivamente. Pruebe la hipótesis apropiada usando $\alpha = .05$.

Solución

1–2 **Hipótesis nula y alternativa:**

$$H_0\colon \mu = 880 \quad \text{contra} \quad H_a\colon \mu \neq 880$$

3 **Estadístico de prueba:** La estimación puntual para μ es $\bar{x}$. Por tanto, la estadística de prueba es

$$z \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{871 - 880}{21/\sqrt{50}} = -3.03$$

4 **Región de rechazo:** Para esta prueba de dos colas se usan valores de z en las colas derecha e izquierda de la distribución estándar normal. Usando $\alpha = .05$, los **valores críticos** que separan las regiones de rechazo y aceptación cortan áreas de $\alpha/2 = .025$ en las colas derecha e izquierda. Estos valores son $z = \pm 1.96$ y la hipótesis nula será rechazada si $z > 1.96$ o $z < -1.96$.

5 **Conclusión:** Como $z = -3.03$ y el valor calculado de z cae en la región de rechazo, la gerente puede rechazar la hipótesis nula de que $\mu = 880$ toneladas y concluir que ha cambiado. La probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera y $\alpha = .05$, una probabilidad bastante pequeña. Por tanto, ella está razonablemente segura que su decisión es correcta.

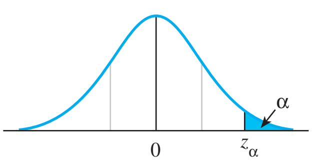
PRUEBA DE ESTADÍSTICA DE MUESTRA GRANDE PARA μ

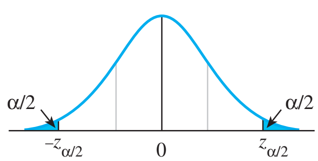
1. Hipótesis nula: $H_0 : \mu = \mu_0$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \mu > \mu_0$	$H_a : \mu \neq \mu_0$
(o $H_a : \mu < \mu_0$)	

3. Estadístico de prueba: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ estimado como $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$z > z_\alpha$ (o $z < -z_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa es $H_a : \mu < \mu_0$)	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$





Suposiciones: Las n observaciones de la muestra se seleccionan al azar de entre la población y n es grande, por ejemplo, $n \geq 30$.

Cálculo del valor *p*

En los ejemplos previos, la decisión de rechazar o aceptar H_0 se tomó al comparar el valor calculado del estadístico de prueba con un valor crítico de z basado en el nivel de significancia α de la prueba. No obstante, diferentes niveles de significancia pueden llevar a diferentes conclusiones. Por ejemplo, si en una prueba de cola derecha, el estadístico de prueba es $z = 2.03$, se puede rechazar H_0 al nivel de significancia de 5% porque el estadístico de prueba excede de $z = 1.645$. Sin embargo, no se puede rechazar H_0 al nivel de significancia de 1% porque el estadístico de prueba es menor a $z = 2.33$ (véase la figura 9.5). Para evitar ambigüedades en las conclusiones, algunos experimentadores prefieren usar un nivel de significancia variable llamada **valor *p*** para la prueba.

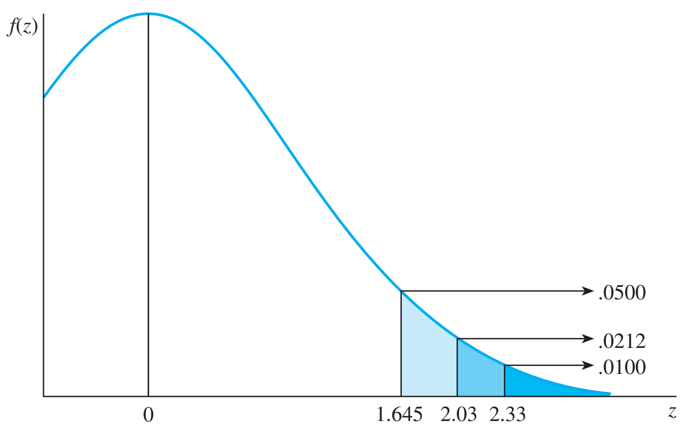
Definición El **valor *p*** o nivel de significancia observado de una prueba estadística es el valor más pequeño de α para el cual H_0 se puede rechazar. Es el *riesgo real* de cometer un error tipo I, si H_0 es rechazada con base en el valor observado del estadístico de prueba. El valor p mide la fuerza de la evidencia contra H_0.

En la prueba de cola derecha con estadística observada de prueba $z = 2.03$, el valor crítico más pequeño que se puede usar y todavía rechazar H_0 es $z = 2.03$. Para este valor crítico, el riesgo de una decisión incorrecta es

$$P(z \geq 2.03) = 1 - .9788 = .0212$$

Esta probabilidad es el *valor p* para la prueba. *Observe que es en realidad el área a la derecha del valor calculado del estadístico de prueba.*

FIGURA 9.5
Regiones variables de rechazo



MI CONSEJO
Valor p = área de cola (una o dos colas) "más allá" del valor observado del estadístico de prueba.

Un *valor p pequeño* indica que el valor observado del estadístico de prueba se encuentra alejado del valor hipotético de μ. Esto presenta fuerte evidencia de que H_0 es falsa y debe ser rechazada. *Valores de p grandes* indican que la estadística observada de prueba no está alejada de la media hipotética y no apoya el rechazo de H_0. ¿Qué tan pequeño necesita ser el valor p antes que H_0 pueda ser rechazada?

Definición Si el valor p es menor o igual a un nivel de significancia α asignado previamente, entonces la hipótesis nula puede ser rechazada y se puede informar que los resultados son **estadísticamente significativos** al nivel α.

En el ejemplo previo, si se escoge $\alpha = .05$ como nivel de significancia, H_0 puede ser rechazada porque el valor p es menor a .05. No obstante, si se escoge $\alpha = .01$ como nivel de significancia, el valor p (.0212) no es suficientemente pequeño para permitir el rechazo de H_0. Los resultados son significativos al nivel de 5%, pero no al de 1%. Pueden verse estos resultados publicados en revistas profesionales como ($p < .05$) *significativo*.†

EJEMPLO 9.6

Consulte el ejemplo 9.5. La gerente de control de calidad desea saber si la producción diaria en una planta química local, que ha promediado 880 toneladas en los últimos años, ha cambiado en años recientes. Una muestra aleatoria de 50 días da una producción promedio de 871 toneladas con desviación estándar de 21 toneladas. Calcule el valor p para esta prueba de hipótesis de dos colas. Use el valor p para sacar conclusiones con respecto a la prueba estadística.

Solución La región de rechazo para esta prueba de hipótesis de dos colas se encuentra en ambas colas de la distribución normal de probabilidad. Como el valor observado del estadístico de prueba es $z = -3.03$, la región de rechazo más pequeña que se puede usar y todavía rechazar H_0 es $|z| > 3.03$. Para esta región de rechazo, el valor de α es el valor p:

$$\text{Valor } p = P(z > 3.03) + P(z < -3.03) = (1 - .9988) + .0012 = .0024$$

Observe que el valor p de dos colas es en realidad dos veces el área de cola correspondiente al valor calculado de la estadística de prueba. Si este valor $p = .0024$ es menor o igual al nivel de significancia α asignado previamente, H_0 puede ser rechazada. Para esta prueba, se puede rechazar H_0 ya sea al nivel de significación de 1% o de 5%.

Si el investigador está leyendo un informe de investigación, ¿qué tan pequeño debe ser el valor p antes que se decida a rechazar H_0? Numerosos investigadores usan una "escala de cálculo" para clasificar sus resultados.

- Si el valor p es menor a .01, H_0 se rechaza. Los resultados son **altamente significativos**.
- Si el valor p está entre .01 y .05, H_0 se rechaza. Los resultados son **estadísticamente significativos**.
- Si el valor p está entre .05 y .10, H_0 por lo general no se rechaza. Los resultados son sólo **tendentes hacia significancia estadística**.
- Si el valor p es mayor a .10, H_0 no es rechazada. Los resultados **no son estadísticamente significativos**.

EJEMPLO 9.7

Los estándares establecidos por dependencias del gobierno indican que los estadounidenses no deben exceder una ingesta diaria de sodio con promedio de 3300 miligramos (mg). Para averiguar si los estadounidenses están excediendo este límite, se seleccionó una muestra de cien de ellos y se encontró que la media y desviación estándar de ingesta diaria de sodio era de 3400 mg y 1100 mg, respectivamente. Use $\alpha = .05$ para efectuar una prueba de hipótesis.

†Al informar la significancia estadística, muchos investigadores escriben ($p < .05$) o ($P < .05$) para indicar que el valor p de la prueba fue menor a .05, haciendo los resultados importantes al nivel de 5%. El símbolo p o P de la expresión no tiene relación con nuestra notación para probabilidad o con el parámetro binomial p.

Solución Las hipótesis a probarse son

$$H_0 : \mu = 3300 \quad \text{contra} \quad H_a : \mu > 3300$$

y el estadístico de prueba es

$$z \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{3400 - 3300}{1100/\sqrt{100}} = .91$$

Los dos métodos desarrollados en esta sección dan las mismas conclusiones.

MI CONSEJO

Valor p pequeño $\Leftrightarrow$ valor z grande.

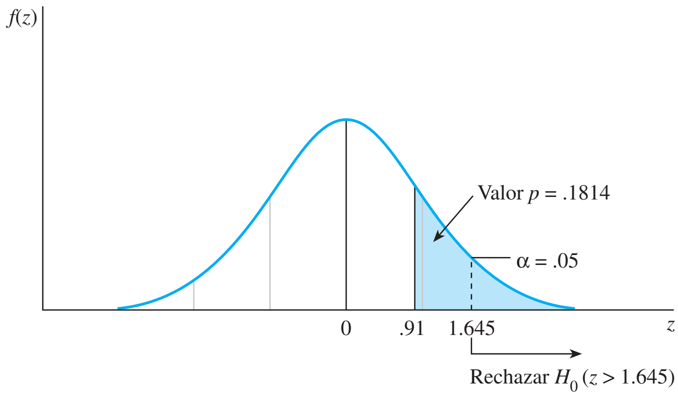
Valor p pequeño $\Rightarrow$ rechazar H_0. ¿Qué tan pequeño? Valor $p \leq \alpha$.

- **Método del valor crítico:** Como el nivel de significancia es $\alpha = .05$ y la prueba es de una cola, la región de rechazo está determinada por un valor crítico con área de cola igual a $\alpha = .05$; esto es, H_0 puede ser rechazada si $z > 1.645$. Como $z = .91$ no es mayor que el valor crítico, H_0 no es rechazada (véase la figura 9.6).
- **Método del valor *p*:** Calcule el valor p, la probabilidad de que z es mayor o igual a $z = .91$:

$$\text{Valor } p = P(z > .91) = 1 - .8186 = .1814$$

La hipótesis nula puede ser rechazada sólo si el *valor p es menor o igual al nivel de significancia especificado de 5%*. Por tanto, H_0 no es rechazada y los resultados *no son estadísticamente significativos* (véase la figura 9.6). No hay suficiente evidencia para indicar que el promedio de ingesta diaria de sodio exceda de 3300 mg.

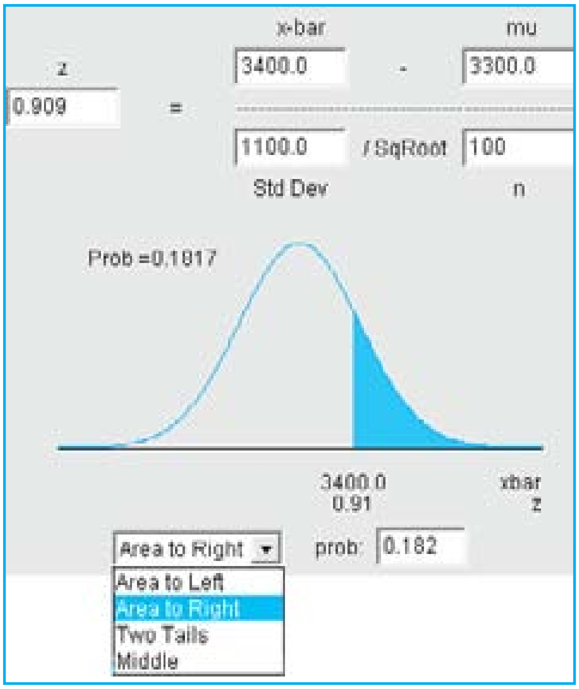
FIGURA 9.6
Región de rechazo y valor p para el ejemplo 9.7



MI APPLET

Se puede usar el applet **Large-Sample Test of a Population Mean (Prueba de muestras grandes de una media poblacional)** para visualizar los valores p para pruebas de una o de dos colas de la media poblacional μ (figura 9.7), pero recuerde que estas pruebas z están restringidas a muestras de tamaño $n \geq 30$. El applet no prohíbe introducir un valor de $n < 30$, pero hay que tener cuidado de verificar el tamaño muestral antes de empezar. El procedimiento sigue el mismo modelo que con applets previos. Se introducen los valores de $\bar{x}$, n y s, recuerde presionar "Enter" después de cada entrada para registrar los cambios. El applet calculará z (usando precisión completa) y da la opción de escoger valores p de una o de dos colas (*Área a la izquierda, Área a la derecha* o *Dos Colas*), así como área *Central* que el usuario no necesitará.

FIGURA 9.7
Applet Large-Sample Test of a Population Mean



Para los datos del ejemplo 9.7, el valor p es el área de una cola a la derecha de $z = .909$. ¿Los resultados mostrados en el applet confirman nuestras conclusiones del ejemplo 9.7? Recuerde que el applet usa precisión completa para el cálculo de z y su probabilidad correspondiente. Esto significa que la probabilidad que calculamos usando la tabla 3 del apéndice I puede ser ligeramente diferente respecto de la probabilidad mostrada en el applet.

Observe que estos dos métodos son iguales en realidad, como se ve en la figura 9.6. Tan pronto como el valor calculado del estadístico de prueba z se hace *mayor que* el valor crítico, z_α, el valor p se hace *menor que* el nivel de significancia α. Se puede usar el más cómodo de los dos métodos; las conclusiones a las que se llegue siempre serán iguales. El método del valor p tiene dos ventajas:

- La salida estadística de paquetes como el *MINITAB* por lo general informa del valor p de la prueba.
- Con base en el valor p, los resultados de la prueba se pueden evaluar usando cualquier nivel de significancia que se desee. Muchos investigadores informan del nivel de significancia más pequeño posible para el cual los resultados son *estadísticamente significativos.*

A veces es fácil confundir el nivel de significancia α con el valor p (o nivel de significancia observado). Ambos son probabilidades calculadas como áreas en las colas de la distribución muestral de la estadística de prueba. No obstante, el nivel de significancia α es establecido previamente por el experimentador antes de recolectar los datos. El valor p está unido de manera directa a los datos y en realidad describe qué tan probables o improbables son los resultados muestrales, suponiendo que H_0 sea verdadera. *Cuanto más pequeño sea el valor p, más improbable es que H_0 sea verdadera.*

MI ENTRENADOR PERSONAL

Regiones de rechazo, valores *p* y conclusiones

El nivel de significancia, α, permite establecer el riesgo que estamos dispuestos a correr al tomar una decisión incorrecta en una prueba de hipótesis.

- Para establecer la región de rechazo, escoja un **valor crítico** de z de modo que el área en la(s) cola(s) de la distribución z sea α para una prueba de una cola o $\alpha/2$ para una prueba de dos colas. Use la cola derecha para una prueba de cola superior y la cola izquierda para una prueba de cola inferior. Rechace H_0 cuando el estadístico de prueba exceda del valor crítico y caiga en la región de rechazo.
- Para hallar un **valor *p***, encuentre el área en la cola "más allá" del estadístico de prueba. Si la prueba es de una cola, éste es el valor p. Si la prueba es de dos colas, ésta es sólo la mitad del valor p y debe duplicarse. Rechace H_0 cuando el valor p sea menor a α.

Reportorio de ejercicios

A. **Método del valor crítico:** Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente. El primer problema ya está resuelto.

Estadístico de prueba	Nivel de significancia	¿Prueba de una o dos colas?	Valor crítico	Región de rechazo	Conclusión
$z = 1.4$	$\alpha = .05$	Una sola (superior)	1.645	$z > 1.645$	No rechazar H_0
$z = 2.46$	$\alpha = .01$	Una sola (superior)			
$z = -0.74$	$\alpha = .05$	Dos colas			
$z = -6.12$	$\alpha = .01$	Dos colas			

B. **Método del valor *p*:** Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente. El primer problema ya está resuelto.

Estadístico de prueba	Nivel de significancia	¿Prueba de una o dos colas?	Valor *p*	¿Valor $p < \alpha$?	Conclusión
$z = 1.4$	$\alpha = .05$	Una cola (superior)	.0808	No	No rechazar H_0
$z = 2.46$	$\alpha = .01$	Una cola (superior)			
$z = -0.74$	$\alpha = .05$	Dos colas			
$z = -6.12$	$\alpha = .01$	Dos colas			

Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina los valores p y regiones de rechazo? Puede saltarse el Repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

Dos tipos de errores

Uno podría preguntarse por qué, cuando H_0 no fue rechazada en el ejemplo previo, no dijimos que H_0 era definitivamente verdadera y $\mu = 3300$. Esto es porque, si escogemos *aceptar* H_0, debemos tener una medida de la probabilidad de error asociada con esta decisión.

Como hay dos opciones en una prueba estadística, también hay dos tipos de errores que se pueden cometer. En la sala de juzgado, el demandado podría ser considerado no culpable cuando en realidad es culpable, o viceversa; lo mismo es cierto en una prueba estadística. De hecho, la hipótesis nula puede ser verdadera o falsa, cualquiera que sea la decisión que tome el experimentador. Estas dos posibilidades, junto con las dos decisiones que puede tomar el investigador, se ven en la tabla 9.1.

TABLA 9.1 **Tabla de decisión**

	Hipótesis nula	
Decisión	Verdadera	Falsa
Rechazar H_0	Error tipo I	Decisión correcta
Aceptar H_0	Decisión correcta	Error tipo II

Además del error tipo I con probabilidad α definida antes en esta sección, es posible cometer un segundo error, llamado **error tipo II**, que tiene probabilidad β.

Definición Un **error tipo I** para una prueba estadística es el error de rechazar la hipótesis nula cuando sea verdadera. La probabilidad de cometer un error tipo I se denota por el símbolo α.

Un **error tipo II** para una prueba estadística es el error de aceptar la hipótesis nula cuando es falsa y alguna hipótesis alternativa es verdadera. La probabilidad de cometer un error tipo II se denota por el símbolo β.

Observe que la probabilidad de un error tipo I es exactamente igual que el **nivel de significancia** α y, por tanto, es controlada por el investigador. Cuando H_0 es rechazada, se tiene una medida precisa de la confiabilidad de la inferencia; la probabilidad de una decisión incorrecta es α, pero la probabilidad β de un error tipo II no siempre es controlada por el experimentador. De hecho, cuando H_0 es falsa y H_a es verdadera, puede que no sea posible especificar un valor exacto para μ, sino sólo un intervalo de valores. Esto hace difícil, si no imposible, calcular β. Sin una medida de confiabilidad, no es inteligente concluir que H_0 sea verdadera. En lugar de arriesgarse a una decisión incorrecta, el experimentador debe detener el juicio, concluyendo que *no hay evidencia suficiente para rechazar* H_0. En lugar de *aceptar* H_0, *no se debe rechazar* H_0.

MI CONSEJO

$\alpha = P$(rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera).

$\beta = P$(aceptar H_0 cuando H_0 es falsa).

Recuerde que "*aceptar*" *una hipótesis particular significa decidir en su favor.* Cualquiera que sea el resultado de una prueba, nunca se está *seguro* que la hipótesis que se "acepte" es verdadera. *Siempre hay un riesgo de estar equivocado* (*medido por* α *o* β). En consecuencia, nunca "acepte" H_0 si β es desconocida o su valor es inaceptable para el experimentador. Cuando ocurra esta situación, se debe detener el juicio y recolectar más información.

El poder de una prueba estadística

La bondad de una prueba estadística se mide por el tamaño de las dos tasas de error: α, la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera, y β, la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es falsa y H_a es verdadera. Una "buena" prueba es aquella para la que estas tasas de error son pequeñas. El experimentador empieza por seleccionar α, la probabilidad de un error tipo I. Si él o ella decide controlar el valor de β, la probabilidad de aceptar H_0 cuando H_a es verdadera, entonces se selecciona un tamaño muestral apropiado.

Otra forma de evaluar una prueba es ver el complemento de un error tipo II, es decir, rechazar H_0 cuando H_a es verdadero, lo cual tiene probabilidad

$$1 - \beta = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } H_a \text{ es verdadera})$$

La cantidad $(1 - \beta)$ se denomina **potencia** de la prueba debido a que mide la probabilidad de tomar la acción que deseamos que ocurra, **esto** es, rechazar la hipótesis nula cuando es falsa y H_a es verdadera.

Definición La prueba **estadística de potencia**, dada como

$$1 - \beta = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } H_a \text{ es verdadera})$$

mide la capacidad de la prueba para funcionar como se requiere.

Una gráfica de $(1 - \beta)$, la probabilidad de rechazar H_0 cuando en realidad H_0 es falsa, como función del valor verdadero del parámetro de interés se denomina **curva de potencia** para la prueba estadística. En el ideal, nos gustaría que α fuera pequeña y la *potencia* $(1 - \beta)$ fuera grande.

EJEMPLO 9.8

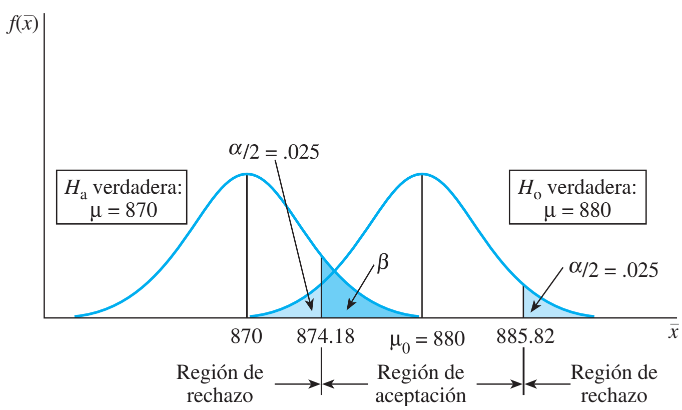
Consulte el ejemplo 9.5. Calcule β y la potencia de la prueba $(1 - \beta)$ cuando μ sea en realidad igual a 870 toneladas cortas.

Solución La región de aceptación para la prueba del ejemplo 9.5 está ubicada en el intervalo $[\mu_0 \pm 1.96(s/\sqrt{n})]$. Sustituyendo valores numéricos, resulta

$$880 \pm 1.96\left(\frac{21}{\sqrt{50}}\right) \quad \text{o} \quad 874.18 \text{ a } 885.82$$

La probabilidad de aceptar H_0, dada $\mu = 870$, es igual al área bajo la distribución muestral para la estadística de prueba $\bar{x}$ en el intervalo de 874.18 a 885.82. Como $\bar{x}$ está normalmente distribuida con una media de 870 y $SE = 21/\sqrt{50} = 2.97$, β es igual al área bajo la curva normal con $\mu = 870$ ubicada entre 874.18 y 885.82 (véase la figura 9.8). Al calcular los valores z correspondientes a 874.18 y 885.82, tendremos

FIGURA 9.8
Cálculo de β en el ejemplo 9.8



$$z_1 \approx \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{874.18 - 870}{21/\sqrt{50}} = 1.41$$

$$z_2 \approx \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{885.82 - 870}{21/\sqrt{50}} = 5.33$$

Entonces

$$\beta = P(\text{aceptar } H_0 \text{ cuando } \mu = 870) = P(874.18 < \bar{x} < 885.82 \text{ cuando } \mu = 870)$$
$$= P(1.41 < z < 5.33)$$

Se puede ver de la figura 9.8 que el área bajo la curva normal con $\mu = 870$ arriba de $\bar{x} = 885.82$ (o $z = 5.33$) es insignificante. Por tanto,

$$\beta = P(z > 1.41)$$

De la tabla 3 del apéndice I se puede hallar

$$\beta = 1 - .9207 = .0793$$

En consecuencia, la potencia de la prueba es

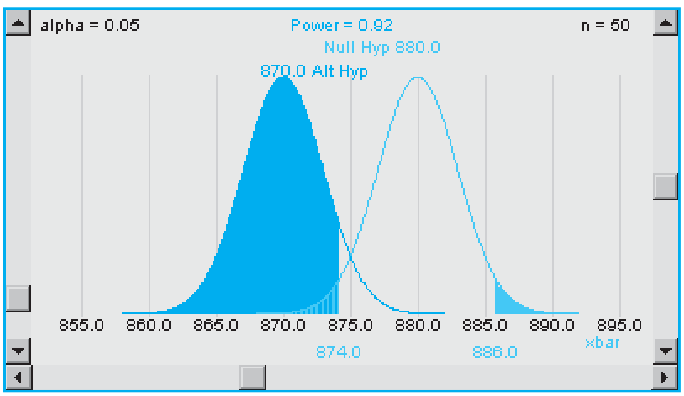
$$1 - \beta = 1 - .0793 = .9207$$

La probabilidad de rechazar correctamente H_0, dado que μ es en realidad igual a 870, es .9207, o alrededor de 92 probabilidades en 100.

MI APPLET

Se puede usar el applet **Power of a *z*-Test (Potencia de una prueba *z*)** para calcular la potencia para la prueba hipotética del ejemplo 9.8 y también para la misma prueba cuando se cambie el tamaño muestral. Consulte la figura 9.9. El applet de la figura 9.9 muestra un tamaño muestral de $n = 50$. El cursor de la parte inferior del applet permite cambiar el valor verdadero de μ; la potencia se recalcula cuando cambia la media. ¿Cuál es el verdadero valor de μ y la potencia de la prueba mostrada en el applet? Compare esto con el valor hallado en la tabla 9.2. El cursor del lado izquierdo del applet permite cambiar α y el cursor de la derecha permite cambiar el tamaño muestral n. Recuerde que *n debe ser ≥ 30* para que la prueba z sea apropiada. Se usarán estos applets para explorar potencia usando los Ejercicios MiApplet al final del capítulo.

FIGURA 9.9
Applet Power of a *z*-Test



Se pueden calcular valores de $(1 - \beta)$ para diversos valores de μ_a diferentes a $\mu_0 = 880$ para medir la potencia de la prueba. Por ejemplo, si $\mu_a = 885$,

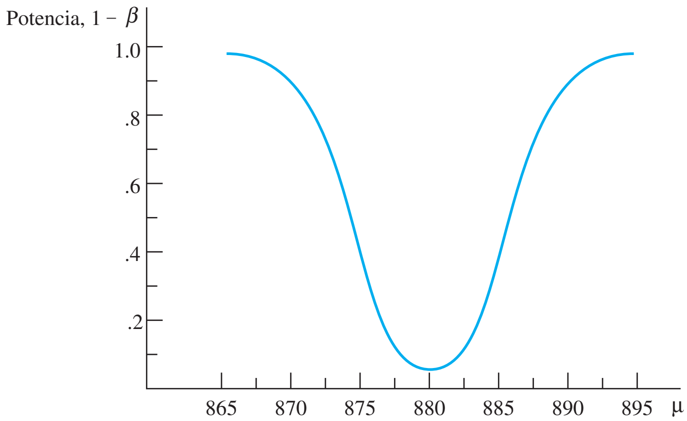
$$\beta = P(874.18 < \bar{x} < 885.82 \text{ cuando } \mu = 885)$$
$$= P(-3.64 < z < .28)$$
$$= .6103 - 0 = .6103$$

y la potencia es $(1 - \beta) = .3897$. La tabla 9.2 muestra la potencia de la prueba para diversos valores de μ_a y en la figura 9.10 se grafica una curva de potencia. Observe que la potencia de la prueba aumenta cuando aumenta la distancia entre μ_a y μ_0. El resultado es una curva en forma de U para esta prueba de dos colas.

TABLA 9.2 **Valor de $(1 - \beta)$ para diversos valores de μ_a para el ejemplo 9.8**

μ_a	$(1 - \beta)$	μ_a	$(1 - \beta)$
865	.9990	883	.1726
870	.9207	885	.3897
872	.7673	888	.7673
875	.3897	890	.9207
877	.1726	895	.9990
880	.0500		

FIGURA 9.10
Curva de potencia para el ejemplo 9.8



Hay numerosos enlaces importantes entre las dos tasas de error, α y β, la potencia, $(1 - \beta)$, y el tamaño muestral, n. Vea las dos curvas que se ilustran en la figura 9.8.

- Si α (la suma de las dos áreas de cola de la curva de la derecha) aumenta, el área sombreada correspondiente a β disminuye y viceversa.
- La única forma de disminuir β para una α fija es "comprar" más información, es decir, aumentar el tamaño muestral n.

¿Qué ocurriría al área β cuando la curva de la izquierda se acerca a la curva de la derecha ($\mu = 880$)? Con la región de rechazo de la curva derecha fija, el valor de β *aumentará*. ¿Qué efecto tiene esto en la potencia de la prueba? Veamos la figura 9.10.

También es posible que el experimentador utilice el applet **Power of a z-Test** para ayudarse a visualizar las siguientes expresiones:

- Cuando aumenta la distancia entre los valores verdadero (μ_a) e hipotético (μ_0) de la media, la potencia $(1 - \beta)$ aumenta. La prueba es mejor para detectar *diferencias* cuando la distancia es *grande*.
- Cuanto más se acerque el verdadero valor (μ_a) al valor hipotético (μ_0), menos potencia tiene $(1 - \beta)$ para detectar la diferencia.
- La única forma de aumentar la potencia $(1 - \beta)$ para una α fija es "comprar" más información, es decir, aumentar el tamaño muestral, n.

El experimentador debe decidir sobre los valores de α y β, o sea medir los riesgos de los posibles errores que él o ella puedan tolerar. Él o ella deben decidir cuánta potencia es necesaria para detectar diferencias que sean prácticamente importantes en el experimento. Una vez tomadas estas decisiones, el tamaño muestral puede escogerse al consultar las curvas de potencia correspondientes a diversos tamaños muestrales para la prueba escogida.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo β?

1. Encuentre el valor o valores críticos de $\bar{x}$ usados para separar las regiones de aceptación y rechazo.
2. Usando uno o más valores para μ consistentes con la hipótesis alternativa H_a, calcule la probabilidad de que la media muestral $\bar{x}$ caiga en la *región de aceptación*. Esto produce el valor $\beta = P(\text{aceptar } H_a \text{ cuando } \mu = \mu_a)$.
3. Recuerde que la **potencia** de la prueba es $(1 - \beta)$.

9.3 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 355.

9.1 Método del valor crítico Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

Estadístico de prueba	Nivel de significancia	¿Prueba de una o dos colas?	Valor crítico	Región de rechazo	Conclusión
$z = 0.88$	$\alpha = .05$	Dos colas			
$z = -2.67$	$\alpha = .05$	Una cola (inferior)			
$z = 5.05$	$\alpha = .01$	Dos colas			
$z = -1.22$	$\alpha = .01$	Una cola (inferior)			

9.2 Método del valor p Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

Estadístico de prueba	Nivel de significancia	¿Prueba de una o dos colas?	Valor p	¿Valor $p < \alpha$?	Conclusión
$z = 3.01$	$\alpha = .05$	Dos colas			
$z = 2.47$	$\alpha = .05$	Una cola (superior)			
$z = -1.30$	$\alpha = .01$	Dos colas			
$z = -2.88$	$\alpha = .01$	Una cola (inferior)			

TÉCNICAS BÁSICAS

9.3 Encuentre las regiones de rechazo apropiadas para la estadística de prueba z de muestras grandes en estos casos:

a. Una prueba de cola derecha con $\alpha = .01$

b. Una prueba de dos colas al nivel de significancia de 5%

c. Una prueba de cola izquierda al nivel de significancia de 1%

d. Una prueba de dos colas con $\alpha = .01$

9.4 Encuentre el valor p para las siguientes pruebas z de muestras grandes:

a. Una prueba de cola derecha con z observada $= 1.15$

b. Una prueba de dos colas con z observada $= -2.78$

c. Una prueba de cola izquierda con z observada $= -1.81$

9.5 Para las tres pruebas dadas en el ejercicio 9.4, use el valor p para determinar la significancia de los resultados. Explique lo que significa "estadísticamente significativo" en términos de rechazar o aceptar H_0 y H_a.

9.6 Una muestra aleatoria de $n = 35$ observaciones de una población cuantitativa produjo una media de $\bar{x} = 2.4$ y una desviación estándar $s = .29$. Suponga que el objetivo de su investigación es demostrar que la media poblacional μ excede de 2.3.

a. Dé la hipótesis nula y alternativa para la prueba.

b. Localice la región de rechazo para la prueba usando un nivel de significancia de 5%.

c. Encuentre el error estándar de la media.

d. Antes de realizar la prueba, use su intuición para decidir si es probable o improbable la media muestral $\bar{x} = 2.4$, suponiendo que $\mu = 2.3$. Ahora realice la prueba. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que $\mu > 2.3$?

9.7 Consulte el ejercicio 9.6.

a. Calcule el valor p para la estadística de prueba del inciso d).

b. Use el valor p para sacar una conclusión al nivel de significancia de 5%.

c. Compare la conclusión del inciso b) con la conclusión alcanzada en el inciso d) del ejercicio 9.6. ¿Son iguales?

9.8 Consulte el ejercicio 9.6. Usted desea probar $H_0 : \mu = 2.3$ contra $H_a: \mu > 2.3$.

a. Encuentre el valor crítico de $\bar{x}$ usado para rechazar H_0.

b. Calcule $\beta = P(\text{aceptar } H_0 \text{ cuando } \mu = 2.4)$.

c. Repita el cálculo de β para $\mu = 2.3$, 2.5 y 2.6.

d. Use los valores de β de los incisos b) y c) para graficar la curva de potencia para la prueba.

9.9 Una muestra aleatoria de 100 observaciones de una población cuantitativa produjo una media muestral de 26.8 y una desviación muestral estándar de 6.5. Use el método del valor p para determinar si la media poblacional es diferente de 28. Explique sus conclusiones.

APLICACIONES

9.10 Porcentajes de ocupación en líneas aéreas Los altos porcentajes de ocupación en vuelos regulares son esenciales para la rentabilidad corporativa. Suponga que un vuelo regular debe promediar al menos 60% de ocupación para ser rentable y un examen del porcentaje de ocupación para 120 vuelos de las 10:00 a.m. de Atlanta a Dallas mostró una ocupación media por vuelo de 58% y una desviación estándar de 11%.

a. Si μ es la ocupación media por vuelo y si la compañía decide determinar si este vuelo es rentable o no lo es, dé la hipótesis alternativa y nula para la prueba.

b. ¿La hipótesis alternativa del inciso a) implica una prueba de una o de dos colas? Explique.

c. ¿Los datos de ocupación para los 120 vuelos sugieren que este vuelo regular no es rentable? Pruebe usando $\alpha = .05$.

9.11 Carne para hamburguesa El ejercicio 8.33 se refiere al departamento de carnes de una cadena local de supermercados que empaca carne molida en charolas de dos tamaños. La charola más pequeña está diseñada para contener 1 libra de carne. Una muestra aleatoria de 35 paquetes de la charola más pequeña de carne produjo mediciones de peso con un promedio de 1.01 libras y una desviación estándar de .18 libras.

a. Si usted fuera el gerente de control de calidad y deseara asegurarse que la cantidad promedio de carne molida era en realidad de 1 libra, ¿cuáles hipótesis probaría?

b. Encuentre el valor p para la prueba y úselo para efectuar la prueba del inciso a).

c. ¿De qué modo usted, como gerente de control de calidad, informa los resultados de su estudio a un grupo de interés del consumidor?

9.12 Especies invasoras En un estudio de la perniciosa manzanilla cimarrona gigante, una de las especies herbáceas más altas en Europa, Jan Pergl[1] y asociados compararon la densidad de estas plantas en lugares controlados y no controlados de la región del Cáucaso en Rusia. En su zona nativa, la densidad promedio se encontró que era de cinco plantas por metro cuadrado. En la zona invadida en la República Checa, una muestra de $n = 50$ plantas produjo una densidad promedio de 11.17 plantas por metro cuadrado con una desviación estándar de 3.9 plantas por metro cuadrado.

a. ¿La zona invadida en la república checa tiene una densidad promedio de manzanilla cimarrona gigante que es diferente de $\mu = 5$ al nivel de significancia $\alpha = -.05$?

b. ¿Cuál es el valor p asociado con la prueba del inciso a)? ¿Puede usted rechazar H_0 al nivel de significancia de 5% usando el valor p?

9.13 Potencia de un antibiótico Un fabricante de medicamentos dijo que la potencia media de uno de sus antibióticos fue 80%. Se probó una muestra aleatoria de $n = 100$ cápsulas y produjo una media muestral de $\bar{x} = 79.7\%$ con una desviación estándar de $s = .8\%$. ¿Los datos presentan suficiencia evidencia para refutar lo dicho por el fabricante? Sea $\alpha = .05$.

a. Exprese la hipótesis nula a ser probada.

b. Exprese la hipótesis alternativa.

c. Realiza una prueba estadística de la hipótesis nula y exprese su conclusión.

9.14 Horario flexible Numerosas compañías tienen ahora un *horario flexible*, en el que un trabajador programa sus propias horas de trabajo o "comprime" el tiempo de semanas de trabajo. Una compañía que estaba contemplando la instalación de un programa de horario flexible estimó que necesitaba una media mínima de 7 horas por día por trabajador de ensamble para operar de manera eficiente. A cada uno de una muestra aleatoria de 80 ensambladores de la compañía se les pidió que enviaran un programa de horario flexible. Si el número medio de horas por día para el lunes era de 6.7 horas y la desviación estándar fue de 2.7 horas, ¿los datos dan suficiente evidencia para indicar que el número medio de horas trabajadas por día los lunes, para todos los ensambladores de la compañía, será menor a 7 horas? Pruebe usando $\alpha = .05$.

9.15 ¿La educación universitaria da resultados? Un artículo del *Time* que describe varios aspectos de la vida de los estadounidenses indicó que la educación superior da resultados positivos. Los egresados de universidad trabajan 7.4 horas por día, menos que quienes no tienen educación universitaria.[2] Suponga que el día hábil promedio, para una muestra aleatoria de $n = 100$ personas que tenían menos de cuatro años de educación universitaria, se calculó de $\bar{x} = 7.9$ horas con una desviación estándar de $s = 1.9$ horas.

a. Use el método del valor p para probar la hipótesis de que el número promedio de horas trabajadas, por personas que no tienen título universitario, es mayor que los que sí lo tienen. ¿A qué nivel se puede rechazar H_0?

b. Si usted fuera egresado de universidad, ¿cómo expresaría su conclusión para estar en la mejor posición?

c. Si no fuera egresado de universidad, ¿cómo expresaría su conclusión?

9.16 ¿Qué es normal? ¿Qué *es* normal, cuando se trata de temperaturas corporales de personas? Una muestra aleatoria de 130 temperaturas corporales en personas, dada por Allen Shoemaker[3] en la *Journal of Statistical Education*, tuvo una media de 98.25 grados y una desviación estándar de 0.73 grados. ¿Los datos indican que el promedio de temperatura corporal para personas sanas es diferente de 98.6 grados, que es el promedio de temperatura citada por médicos y otros especialistas? Pruebe usando los dos métodos dados en esta sección.

a. Use el método del valor p con $\alpha = .05$.

b. Use el método del valor crítico con $\alpha = .05$.

c. Compare las conclusiones de los incisos a) y b). ¿Son iguales?

d. El estándar de 98.6 fue deducido por un médico alemán en 1868, quien dijo haber registrado un millón de temperaturas en el curso de su investigación.[4] ¿Qué conclusiones se pueden sacar acerca de la investigación de este último, teniendo en cuenta las conclusiones del mismo en los incisos a) y b)?

9.17 Deportes y lesiones en el tendón de Aquiles Algunos deportes en los que hay que correr distancias considerables, saltar con o sin garrocha, ponen a los participantes en riesgo de tendinopatía de Aquiles (AT), que es una inflamación y engrosamiento del tendón de Aquiles. Un estudio de *The American Journal of Sports Medicine* vio el diámetro (en mm) de los tendones afectados para pacientes que participaron en estos tipos de actividades deportivas.[5] Suponga que los diámetros del tendón de Aquiles en la población en general tienen una media de 5.97 milímetros (mm). Cuando los diámetros del tendón afectado se midieron para una muestra aleatoria de 31 pacientes, el diámetro promedio fue de 9.80 con una desviación estándar de 1.95 mm. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que el diámetro promedio del tendón para pacientes con AT es mayor a 5.97 mm? Pruebe al nivel de 5% de significancia.

9.4 UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS DE MUESTRAS GRANDES PARA LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS POBLACIONALES

En numerosas situaciones, la pregunta estadística a ser contestada involucra una comparación de dos medias poblacionales. Por ejemplo, el U.S. Postal Service está interesado en reducir su enorme gasto de 350 millones de galones de gasolina al año al cambiar sus camiones de motor de gasolina por camiones eléctricos. Para determinar si se obtienen ahorros importantes en costos de operación al cambiar a camiones eléctricos, debe efectuarse un estudio piloto usando, por ejemplo, cien camiones convencionales del correo con motor de gasolina y cien camiones eléctricos operados bajo condiciones similares.

El estadístico que resume la información muestral respecto a la diferencia en medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$ es la diferencia en medias muestrales $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$. Por tanto, al probar si la diferencia en medias muestrales indica que la diferencia verdadera en medias poblacionales difiere de un valor especificado, $(\mu_1 - \mu_2) = D_0$, se puede usar el error estándar de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$,

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad \text{estimada por} \quad SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

en la forma de un estadístico z para medir a cuántas desviaciones estándar se encuentra la diferencia $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ desde la diferencia hipotética D_0. A continuación se describe el procedimiento formal de prueba.

PRUEBA ESTADÍSTICA DE MUESTRAS GRANDES PARA $(\mu_1 - \mu_2)$

1. Hipótesis nula: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$, donde D_0 es alguna diferencia especificada que se desea probar. Para muchas pruebas, el experimentador hará hipótesis de que no hay diferencia entre μ_1 y μ_2; esto es, $D_0 = 0$.
2. Hipótesis alternativa:

   Prueba de una cola

   $H_a : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$
   [o $H_a : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$]

   Prueba de dos colas

   $H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$

3. Estadístico de prueba: $z \approx \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{SE} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

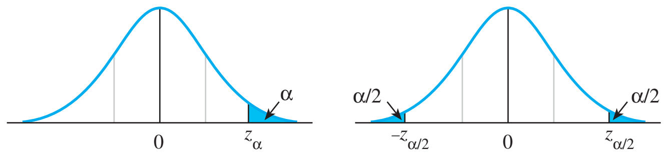
   Prueba de una cola

   $z > z_\alpha$
   [o $z < -z_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa es $H_a : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$]

   Prueba de dos colas

   $z > z_{\alpha/2}$ o bien $z < -z_{\alpha/2}$

   o cuando el valor $p < \alpha$



Suposiciones: Las muestras son seleccionadas al azar y de manera independiente de las dos poblaciones $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$.

EJEMPLO 9.9

Para determinar si la propiedad de un auto afecta el rendimiento académico de un estudiante, se tomaron dos muestras aleatorias de 100 estudiantes de sexo masculino. El promedio de calificaciones para los $n_1 = 100$ que no eran dueños de autos tuvieron un promedio y variancia igual a $\bar{x}_1 = 2.70$ y $s_1^2 = .36$, en tanto que $\bar{x}_2 = 2.54$ y $s_2^2 = .40$ para los $n_2 = 100$ propietarios de autos. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el rendimiento medio entre propietarios de autos y no propietarios? Pruebe usando $\alpha = .05$.

Solución Para detectar una diferencia, si existe, entre los rendimientos académicos medios para no propietarios de autos μ_1 y los propietarios μ_2, probaremos la hipótesis nula de que no hay diferencia entre las medias contra la hipótesis alternativa de que $(\mu_1 - \mu_2) \neq 0$; esto es,

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0 = 0 \quad \text{contra} \quad H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

Sustituyendo en la fórmula para el estadístico de prueba, obtenemos

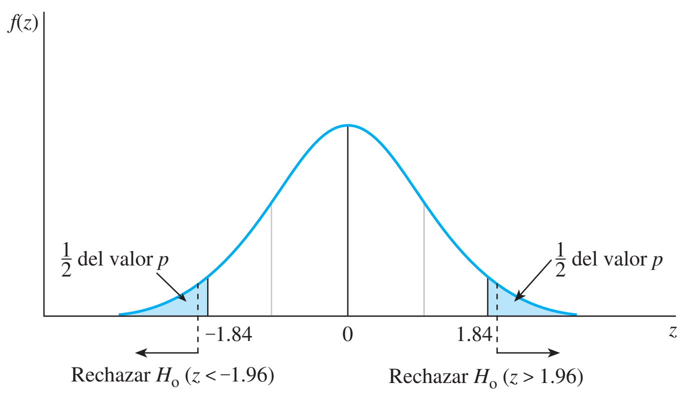
$$z \approx \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{2.70 - 2.54}{\sqrt{\dfrac{.36}{100} + \dfrac{.40}{100}}} = 1.84$$

MI CONSEJO

|Estadístico de prueba| > |Valor crítico| ⇔ rechazar H_0.

- **El método del valor crítico:** Usando una prueba de dos colas con nivel de significancia $\alpha = .05$, se pone $\alpha/2 = .025$ en cada cola de la distribución z y se rechaza H_0 si $z > 1.96$ o $z < -1.96$. Como $z = 1.84$ no excede de 1.96 y no es menor a -1.96, H_0 no puede ser rechazada (véase la figura 9.11). Esto es, hay evidencia insuficiente para declarar una diferencia en el promedio de los rendimientos académicos para los dos grupos. Recuerde que no debe estar dispuesto a *aceptar* H_0, es decir, declarar que las dos medias son iguales, sino hasta que β sea evaluada para algunos valores significativos de $(\mu_1 - \mu_2)$.

FIGURA 9.11
Región de rechazo y valor p para el ejemplo 9.9



- **El método del valor p:** Calcule el valor p, la probabilidad de que z es mayor a $z = 1.84$ más la probabilidad de que z sea menor a $z = -1.84$, como se muestra en la figura 9.11:

$$\text{Valor } p = P(z > 1.84) + P(z < -1.84) = (1 - .9671) + .0329 = .0658$$

El valor p se encuentra entre .10 y .05, de modo que se puede rechazar H_0 al nivel .10 pero no al nivel de significancia .05. Como el valor p de .0658 excede del nivel de significancia especificado $\alpha = .05$, H_0 no puede ser rechazada. De nuevo, el experimentador no debería estar dispuesto a *aceptar* H_0 sino hasta que β sea evaluada para algunos valores significativos de $(\mu_1 - \mu_2)$.

Prueba de hipótesis e intervalos de confianza

Si usamos el método del valor crítico o del valor p para probar hipótesis acerca de $(\mu_1 - \mu_2)$, siempre llegaremos a la misma conclusión porque el valor calculado del estadístico de prueba y el valor crítico están relacionados *exactamente* en la misma forma que están relacionados el valor p y el nivel de significancia α. Hay que recordar que los intervalos de confianza construidos en el capítulo 8 podrían también usarse para contestar preguntas acerca de la diferencia entre dos medias poblacionales. De hecho, para una prueba de dos colas, el intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para el parámetro de interés se puede usar para probar su valor, igual que como hicimos de manera informal en el capítulo 8. El valor de α indicado por el coeficiente de confianza en el intervalo de confianza es equivalente al nivel de significancia α en la prueba estadística. Para una prueba de una cola, el método equivalente del intervalo de confianza usaría los límites de confianza de una cola de la sección 8.8 con coeficiente de confianza α. Además, con el método del intervalo de confianza, se gana un margen de posibles valores para el parámetro de interés, cualquiera que sea el resultado de la prueba de hipótesis.

- Si el intervalo de confianza que se construye *contiene* el valor del parámetro especificado por H_0, entonces ese valor es uno de los posibles valores del parámetro y H_0 no debe ser rechazada.
- Si el valor hipotético *se encuentra fuera* de los límites de confianza, la hipótesis nula es rechazada al nivel de significancia α.

EJEMPLO 9.10 Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en el promedio de rendimiento académico entre propietarios y no propietarios de autos. Usando el intervalo de confianza, ¿se puede concluir que hay una diferencia en las medias poblacionales para los dos grupos de estudiantes?

Solución Para el estadístico de muestras grandes estudiado en el capítulo 8, el intervalo de confianza de 95% se da como

$$\text{Estimador puntual} \pm 1.96 \times (\text{Error estándar del estimador})$$

Para la diferencia en dos medias poblacionales, el intervalo de confianza se aproxima como

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm 1.96\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$(2.70 - 2.54) \pm 1.96\sqrt{\frac{.36}{100} + \frac{.40}{100}}$$

$$.16 \pm .17$$

o sea $-.01 < (\mu_1 - \mu_2) < .33$. Este intervalo da un margen de posibles valores para la diferencia en las medias poblacionales. Como la diferencia hipotética, $(\mu_1 - \mu_2) = 0$, está contenida en el intervalo de confianza, no se debería rechazar H_0. Vea los signos de los posibles valores del intervalo de confianza. No se puede decir por el intervalo si la diferencia en las medias es negativa $(-)$, positiva $(+)$ o cero (0), donde este último indicaría que las dos medias son iguales. En consecuencia, realmente no se puede llegar a una conclusión en términos de la pregunta planteada. No hay suficiente evidencia para indicar que haya diferencia en el promedio de rendimientos para propietarios y no propietarios de autos. La conclusión es igual a la que se llegó en el ejemplo 9.9.

9.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

9.18 Muestras aleatorias independientes de 80 mediciones se tomaron de dos poblaciones cuantitativas, 1 y 2. A continuación veamos un resumen de los datos muestrales:

	Muestra 1	Muestra 2
Tamaño muestral	80	80
Media muestral	11.6	9.7
Varianza muestral	27.9	38.4

a. Si el objetivo de la investigación es demostrar que μ_1 es mayor que μ_2, exprese hipótesis nula y alternativa que escogería para una prueba estadística.

b. ¿ La prueba del inciso a) es de una o de dos colas?

c. Calcule el estadístico de prueba que usaría para la prueba del inciso a). Con base en su conocimiento de la distribución normal estándar, ¿es ésta una observación probable o no probable, suponiendo que H_0 es verdadera y las dos medias poblacionales son iguales?

d. *Método del valor p:* encuentre el valor p para la prueba. Pruebe una diferencia significativa en las medias poblacionales al nivel de significancia de 1%.

e. *Método del valor crítico:* encuentre la región de rechazo cuando $\alpha = .01$. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las medias poblacionales?

9.19 Muestras aleatorias independientes de 36 y 45 observaciones se sacan de dos poblaciones cuantitativas, 1 y 2, respectivamente. A continuación se muestra el resumen de datos muestrales:

	Muestra 1	Muestra 2
Tamaño muestral	36	45
Media muestral	1.24	1.31
Varianza muestral	.0560	.0540

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la media para la población 1 es menor que la media para la población 2? Use uno de los dos métodos de prueba presentados en esta sección y explique sus conclusiones.

9.20 Suponga que deseamos detectar una diferencia entre μ_1 y μ_2 (ya sea $\mu_1 > \mu_2$ o $\mu_1 < \mu_2$) y, en lugar de correr una prueba de dos colas usando $\alpha = .05$, se usa el siguiente procedimiento de prueba. Se espera hasta haber recolectado los datos muestrales y haber calculado $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$. Si $\bar{x}_1$ es mayor que $\bar{x}_2$, se escoge la hipótesis alternativa $H_a : \mu_1 > \mu_2$ y corre una prueba de una cola poniendo $\alpha_1 = .05$ en la cola superior de la distribución z. Si, por el contrario, $\bar{x}_2$ es mayor que $\bar{x}_1$, se invierte el procedimiento y corre una prueba de una cola, poniendo $\alpha_2 = .05$ en la cola inferior de la distribución z. Si usted usa este procedimiento y si μ_1 en realidad es igual a μ_2, ¿cuál es la probabilidad α de que concluya que μ_1 en realidad no sea igual a μ_2 (es decir, cuál es la probabilidad α de que incorrectamente se rechace H_0 cuando H_0 es verdadera)? Este ejercicio demuestra por qué pruebas estadísticas deben ser formuladas *antes* de observar los datos.

APLICACIONES

9.21 ¿Cura para el resfriado común? Se planeó un experimento para comparar el tiempo medio (en días), necesario para recuperarse de un resfriado común, en personas a las que a diario se les dio una dosis de 4 miligramos (mg) de vitamina C contra otras a las que no se dio un suplemento vitamínico. Suponga que 35 adultos fueron seleccionados al azar para cada categoría del tratamiento y que los tiempos medios de recuperación y desviaciones estándar para los dos grupos fueron como sigue:

	Sin suplemento vitamínico	4 mg de vitamina C
Tamaño muestral	35	35
Media muestral	6.9	5.8
Desviación muestral estándar	2.9	1.2

a. Suponga que el objetivo de su investigación es demostrar que el uso de vitamina C reduce el tiempo medio necesario para recuperarse de un resfriado común y sus complicaciones. Dé las hipótesis nula y alternativa para la prueba. ¿Esta prueba es de una o de dos colas?

b. Realice la prueba estadística de la hipótesis nula del inciso a) y exprese su conclusión. Pruebe usando $\alpha = .05$.

9.22 Alimentación sana Los estadounidenses son ahora más conscientes de la importancia de una buena nutrición y algunos investigadores creen que podemos estar alterando nuestras dietas para incluir menos carne roja y más frutas y verduras. Para probar la teoría de que el consumo de carne roja ha disminuido en los últimos 10 años, un investigador decide seleccionar los registros de nutrición de hospital para 400 personas encuestadas hace 10 años, comparando su cantidad promedio de carne consumida anualmente con respecto a cantidades consumidas por igual número de personas entrevistadas este año. Los datos se dan en la tabla.

	Hace 10 años	Este año
Media muestral	73	63
Desviación muestral estándar	25	28

a. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para indicar que el consumo de carne roja per cápita ha disminuido en los últimos 10 años? Pruebe al nivel de significancia del 1%.

b. Encuentre un límite inferior de confianza de 99% para la diferencia en el promedio de consumos de carne per cápita para los dos grupos. (Este cálculo se hizo como parte del ejercicio 8.76.) ¿El límite de confianza confirma sus conclusiones del inciso a)? Explique. ¿Qué información adicional le da el límite de confianza?

9.23 Niveles de plomo en agua potable Análisis realizados en muestras de agua potable para 100 casas, en cada una de dos diferentes secciones de una ciudad, dieron las siguientes medias y desviaciones estándar de niveles de plomo (en partes por millón):

	Sección 1	Sección 2
Tamaño muestral	100	100
Media	34.1	36.0
Desviación estándar	5.9	6.0

a. Calcule el estadístico de prueba y su valor p (nivel de significancia observado) para probar una diferencia en las dos medias poblacionales. Use el valor p para evaluar la significancia estadística de los resultados al nivel de 5%.

b. Use un intervalo de confianza de 95% para estimar la diferencia en los niveles medios de plomo para las dos secciones de la ciudad.

c. Suponga que ingenieros ambientales del municipio se preocuparán sólo si detectan una diferencia de más de 5 partes por millón en las dos secciones de la ciudad. Con base en su intervalo de confianza en el inciso b), ¿la significancia estadística del inciso a) es de *importancia práctica* para los ingenieros del municipio? Explique.

9.24 Salarios iniciales, otra vez En un intento por comparar los salarios iniciales para estudiantes universitarios que tienen especialidad en ingeniería química y ciencias computacionales (véase el ejercicio 8.45), se seleccionaron muestras aleatorias de 50 recién graduados universitarios en cada especialidad y se obtuvo la siguiente información.

Especialidad	Media	Desv. Est.
Ingeniería química	\$53 659	2225
Ciencias computacionales	51 042	2375

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en salarios iniciales promedio para graduados universitarios con especialidad en ingeniería química y ciencias computacionales? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Compare sus conclusiones del inciso a) con los resultados del inciso b) del ejercicio 8.45. ¿Son iguales? Explique.

9.25 Costos de hotel En el ejercicio 8.18, exploramos el costo promedio de alojamiento en tres cadenas hoteleras diferentes.[6] Al azar seleccionamos 50 estados de cuenta de las bases de datos de las cadenas hoteleras Marriott, Radisson y Wyndham, y registramos las tarifas de un cuarto por noche. Una parte de los datos muestrales se ven en la tabla.

	Marriott	Radisson
Promedio muestral	\$170	\$145
Desviación estándar muestral	17.5	10

a. Antes de ver los datos, ¿tiene usted una idea preconcebida de la dirección de la diferencia entre las tarifas promedio por cuarto para estos dos hoteles? Si no es así, ¿qué hipótesis nula y alternativa deben probarse?

b. Use el método del *valor crítico* para determinar si hay una diferencia importante en el promedio de tarifas por cuarto para las cadenas hoteleras Marriott y Radisson. Use $\alpha = .01$.

c. Encuentre el valor p para esta prueba. ¿Este valor p confirma los resultados del inciso b)?

9.26 Costos de hotel II Consulte el ejercicio 9.25. La tabla siguiente muestra los datos muestrales recolectados para comparar las tarifas promedio por cuarto en las cadenas hoteleras Wyndham y Radisson.[6]

	Wyndham	Radisson
Promedio muestral	\$150	\$145
Desviación estándar muestral	16.5	10

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en la tarifa promedio por cuarto para las cadenas hoteleras Wyndham y Radisson? Use $\alpha = .05$.

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en las tarifas promedio por cuarto para las dos cadenas. ¿Este intervalo confirma sus conclusiones del inciso a)?

9.27 MMT en gasolina La adición de MMT, un compuesto que contiene manganeso (Mn), a la gasolina como enriquecedor de octano ha causado preocupación por la exposición de personas al Mn, porque las elevadas ingestas han estado ligadas a graves efectos en la salud. En un estudio de concentraciones en el aire ambiente de Mn fino, Wallace y Slonecker (*Journal of the Air and Waste Management Association*) presentaron la siguiente información resumida de las cantidades de Mn fino (en nanogramos por metro cúbico) en casi todos los parques nacionales y en la mayor parte de zonas urbanas en California.[7]

	Parques nacionales	California
Media	.94	2.8
Desviación estándar	1.2	2.8
Número de lugares	36	26

a. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que las concentraciones medias difieren para los dos tipos de lugares al nivel de significancia $\alpha = .05$? Use la prueba z de muestra grande. ¿Cuál es el valor p de esta prueba?

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para $(\mu_1 - \mu_2)$. ¿Este intervalo confirma sus conclusiones del inciso a)?

9.28 Ruido y estrés En el ejercicio 8.48, usted comparó el efecto del estrés en la forma de ruido sobre la capacidad para realizar una tarea sencilla. Setenta personas se dividieron en dos grupos; el primer grupo de 30 personas actuó como control, en tanto que el segundo grupo de 40 fue el grupo experimental. Aun cuando cada persona realizó la tarea en el mismo cuarto de control, cada una de las del grupo experimental tuvo que realizar la tarea al tiempo que se escuchaba música de rock muy fuerte. Se registró el tiempo para terminar la tarea para cada persona y se obtuvo el siguiente resumen:

	Control	Experimental
n	30	40
$\bar{x}$	15 minutos	23 minutos
s	4 minutos	10 minutos

a. ¿Hay evidencia suficiente para indicar que el tiempo promedio para terminar la tarea fue más largo para el grupo experimental "música de rock"? Pruebe al nivel de significancia de 1%.

b. Construya un límite superior de 99% de una cola para la diferencia (control − experimental) en tiempos promedio para los dos grupos. ¿Este intervalo confirma sus conclusiones del inciso a)?

9.29 ¿Qué es normal II? De las 130 personas del ejercicio 9.16, 65 eran mujeres y 65 hombres.[3] Las medias y desviaciones estándar de sus temperaturas se indican a continuación.

	Hombres	Mujeres
Media muestral	98.11	98.39
Desviación estándar	0.70	0.74

a. Use el método del valor p para una diferencia significativa en las temperaturas promedio para hombres contra mujeres.

b. ¿Los resultados son importantes al nivel del 5%? ¿Y al nivel del 1%?

9.5 UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS DE MUESTRAS GRANDES PARA UNA PROPORCIÓN BINOMIAL

Cuando una muestra aleatoria de n intentos idénticos se saca de una población binomial, la proporción muestral $\hat{p}$ tiene una distribución aproximadamente normal cuando n es grande, con media p y error estándar

$$SE = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Cuando se prueba una hipótesis acerca de p, la proporción en la población que posee cierto atributo, la prueba sigue la misma forma general que las pruebas de muestra grande de la sección 9.3 y 9.4. Para probar una hipótesis de la forma

$$H_0 : p = p_0$$

contra una alternativa de una o de dos colas

$$H_a : p > p_0 \quad \text{o} \quad H_a : p < p_0 \quad \text{o} \quad H_a : p \neq p_0$$

la estadística de prueba se construye usando $\hat{p}$, el mejor estimador de la verdadera proporción poblacional p. La proporción muestral $\hat{p}$ es estandarizada, usando la media hipotética y error estándar, para formar una estadística de prueba z, que tiene una distribución normal estándar si H_0 es verdadera. Esta prueba de muestra grande se resume a continuación.

PRUEBA ESTADÍSTICA DE MUESTRAS GRANDES PARA p

1. Hipótesis nula: $H_0 : p = p_0$
2. Hipótesis alternativa:

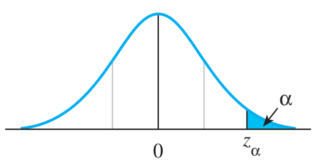
Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : p > p_0$ (o $H_a : p < p_0$)	$H_a : p \neq p_0$

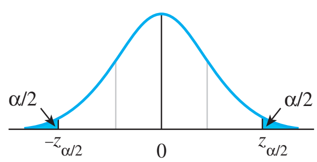
3. Estadístico de prueba: $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\text{SE}} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$ con $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$

   donde x es el número de éxitos en n intentos binomiales.†
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$z > z_\alpha$ (o $z < -z_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa sea $H_a : p < p_0$)	$z > z_{\alpha/2}$ o bien $z < -z_{\alpha/2}$

   o cuando el valor $p < \alpha$





Suposición: El muestreo satisface las suposiciones de un experimento binomial (véase la sección 5.2) y n es lo suficientemente grande para que la distribución muestral de $\hat{p}$ puede ser aproximada por una distribución normal ($np_0 > 5$ y $nq_0 > 5$).

†Un estadístico muestral o de prueba equivalente se puede hallar multiplicando el numerador y denominador por z por n para obtener

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$$

EJEMPLO 9.11

A cualquier edad, alrededor de 20% de estadounidenses adultos participan en actividades de acondicionamiento físico al menos dos veces a la semana. No obstante, estas actividades cambian a medida que las personas envejecen y, ocasionalmente, los participantes se convierten en no participantes. En una encuesta local de $n = 100$ adultos de más de 40 años, un total de 15 personas indicaron que participaron en estas actividades al menos dos veces a la semana. ¿Estos datos indican que el porcentaje de participación para adultos de más de 40 años de edad es considerablemente menor a la cifra de 20%? Calcule el valor p y úselo para sacar las conclusiones apropiadas.

Solución Suponiendo que el procedimiento de muestreo satisfaga los requisitos de un experimento binomial, se puede contestar la pregunta planteada usando una prueba de hipótesis de una cola:

$$H_0: p = .2 \quad \text{contra} \quad H_a: p < .2$$

Empiece por suponer que H_0 es verdadera, es decir, el verdadero valor de p es $p_0 = .2$. Entonces $\hat{p} = x/n$ tendrá una distribución normal aproximada con media p_0 y error estándar $\sqrt{p_0q_0/n}$. (NOTA: Esto es diferente del procedimiento de estimación en el que el error estándar desconocido es estimado por $\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$.) El valor observado de $\hat{p}$ es $15/100 = .15$ y el estadístico de prueba es

MI CONSEJO

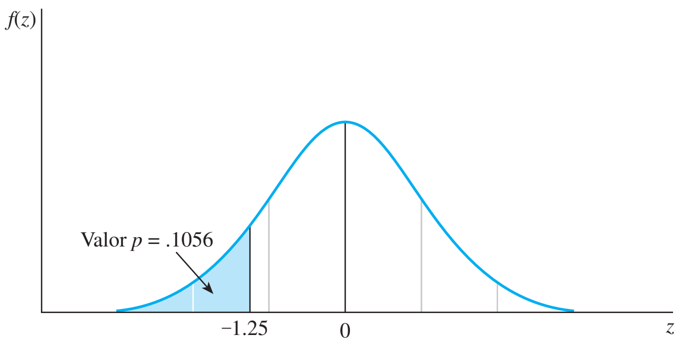
Valor $p \leq \alpha \Leftrightarrow$ rechazar H_0.
Valor $p > \alpha \Leftrightarrow$ no rechazar H_0.

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0q_0}{n}}} = \frac{.15 - .20}{\sqrt{\dfrac{(.20)(.80)}{100}}} = -1.25$$

El Valor p asociado con esta prueba se encuentra como el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $z = -1.25$ como se ve en la figura 9.12. Por tanto,

$$\text{Valor } p = P(z < -1.25) = .1056$$

FIGURA 9.12
Valor p para el ejemplo 9.11



Si el investigador usa las guías para evaluar valores p, entonces .1056 es mayor que .10 y no rechazaría H_0. Hay suficiente evidencia para concluir que el porcentaje de adultos de más de 40 años que participan en actividades de acondicionamiento físico dos veces a la semana es menor a 20%.

Significancia estadística e importancia práctica

Es importante entender la diferencia entre resultados que sean "significativos" y resultados que son prácticamente "importantes". En lenguaje de estadística, la palabra *significativo* no necesariamente quiere decir "importante", sino sólo que los resultados podrían no haber ocurrido por casualidad. Por ejemplo, suponga que en el ejemplo 9.11, la investigadora había empleado $n = 400$ adultos en su experimento y había observado la misma proporción muestral. El estadístico de prueba es ahora

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{.15 - .20}{\sqrt{\frac{(.20)(.80)}{400}}} = -1.25$$

con

$$\text{Valor } p = P(z < -2.50) = .0062$$

Ahora los resultados son *altamente significativos*: H_0 es rechazada y hay suficiente evidencia para indicar que el porcentaje de adultos de más de 40 años que participan en actividades de acondicionamiento físico es menor a 20%. No obstante, ¿esta baja en actividad es realmente *importante*? Supongamos que los médicos estarían preocupados sólo por una baja en actividad física de más de 10%. Si hubiera habido una baja de más de 10% en actividad física, esto implicaría que el verdadero valor de p era menor a .10. ¿Cuál es el máximo valor posible de p? Usando un límite de confianza de 95% de una cola, tendremos

$$\hat{p} + 1.645\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$.15 + 1.645\sqrt{\frac{(.15)(.85)}{400}}$$

$$.15 + .029$$

o sea $p < .179$. La actividad física para adultos de 40 años o más ha bajado de 20% pero no se puede decir que haya bajado por debajo de 10%. Entonces, los resultados, aun cuando *estadísticamente significativos,* no son *prácticamente importantes.*

En este libro, usted aprenderá a determinar si los resultados son estadísticamente significativos pero, cuando use estos procedimientos en una situación práctica, también debe asegurarse que los resultados sean prácticamente importantes.

9.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

9.30 Una muestra aleatoria de $n = 1000$ observaciones de una población binomial produjo $x = 279$.

a. Si su hipótesis de investigación es que p sea menor a .3, ¿qué debe escoger para su hipótesis alternativa? ¿Y para su hipótesis nula?

b. ¿Cuál es el valor crítico que determina la región de rechazo para su prueba con $\alpha = .05$?

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que p es menor a .3? Use un nivel de significancia de 5%.

9.31 Una muestra aleatoria de $n = 1400$ observaciones de una población binomial produjo $x = 529$.

a. Si la hipótesis de su investigación es que p difiera de .4, ¿cuáles hipótesis debe probar?

b. Calcule el estadístico de prueba y su valor p. Use el valor p para evaluar la significancia estadística de los resultados al nivel del 1%.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que p es diferente de .4?

9.32 Una muestra aleatoria de 120 observaciones fue seleccionada de una población binomial y se observaron 72 éxitos. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que p es mayor a .5? Use uno de los dos métodos de prueba presentados en esta sección y explique sus conclusiones.

APLICACIONES

9.33 Obesidad infantil Según la encuesta “What America Eats” (Lo que comen en Estados Unidos) de la revista *PARADE* donde intervienen $n = 1015$

adultos, casi la mitad de los padres dicen que el peso de sus hijos está bien.[8] Sólo 9% de los padres describen a sus hijos como obesos. No obstante, la Asociación Americana de Obesidad dice que el número de niños y adolescentes con sobrepeso es al menos 15%. Suponga que el número de padres de la muestra es $n = 750$ y el número de padres que describen a sus hijos como obesos es $x = 68$.

a. ¿Cómo procedería para probar la hipótesis de que la proporción de padres que describen a sus hijos como obesos es menor que la proporción real publicada por la Asociación Americana de Obesidad?

b. ¿Qué conclusión se puede sacar de estos datos al nivel de significancia de $\alpha = .05$?

c. ¿Cuál es el valor p asociado con esta prueba?

9.34 Genética de plantas Una peonia con pétalos rojos fue cruzada con otra planta que tenía pétalos rayados. Un genetista dice que 75% de los descendientes que resulten de esta cruza tendrán flores rojas. Para probar su dicho, 100 semillas de esta cruza se seleccionaron y germinaron, y 58 plantas tenían pétalos rojos.

a. ¿Qué hipótesis debe usarse para probar lo dicho por el genetista?

b. Calcule el estadístico de prueba y su valor p. Use el valor p para evaluar la significancia estadística de los resultados al nivel del 1%.

9.35 Detección temprana del cáncer de pecho De las mujeres a las que se diagnosticó cáncer de pecho en su etapa temprana, un tercio murieron finalmente de la enfermedad. Suponga que el departamento de salud pública de una comunidad instituyó un programa de selección para la detección temprana de ese cáncer y aumentar el porcentaje de sobrevivencia p de las diagnosticadas con la enfermedad. Una muestra aleatoria de 200 mujeres se seleccionó de entre las que eran seleccionadas periódicamente por el programa y a las que se les diagnosticó la enfermedad. Con x representemos el número de las de la muestra que sobreviven a la enfermedad.

a. Si se desea detectar si el programa de selección ha sido efectivo, exprese la hipótesis nula que deba probarse.

b. Indique la hipótesis alternativa.

c. Si 164 mujeres de la muestra de 200 sobreviven a la enfermedad, ¿se puede concluir que el programa de selección de la comunidad fue efectivo? Pruebe usando $\alpha = .05$ y explique las conclusiones prácticas a partir de su prueba.

d. Encuentre el valor p para la prueba e interprételo.

9.36 Mosca blanca de la remolacha Suponga que 10% de los campos en una zona agrícola dada está infestado de la mosca blanca de la remolacha. Cien campos de esta zona se seleccionan al azar y se encuentra que 25 de ellos están infestados de la mosca blanca.

a. Suponiendo que el experimento satisface las condiciones del experimento binomial, ¿los datos indican que la proporción de campos infestados es mayor de lo esperado? Use el método del valor p y pruebe usando un nivel de significancia del 5%.

b. Si se encuentra que la proporción de campos infestados es significativamente mayor a .10, ¿por qué es esto de significancia práctica para la agrónoma? ¿Qué conclusiones prácticas podría ella sacar de los resultados?

9.37 ¿Café o azul? Un artículo del *Washington Post* expresó que casi 45% de la población de estadounidenses nace con ojos cafés, aun cuando no necesariamente siguen así.[9] Para probar lo dicho por el periódico, se seleccionó una muestra aleatoria de 80 personas y 32 de ellas tenían ojos cafés. ¿Hay suficiente evidencia para impugnar lo dicho por el periódico respecto a la proporción de personas de ojos cafés en Estados Unidos? Use $\alpha = .01$.

9.38 Lentes de contacto a colores Consulte el ejercicio 9.37. Los lentes de contacto, que usan unos 26 millones de estadounidenses, vienen en numerosos estilos y colores. Casi todas las personas usan lentes suaves, siendo los más populares las variedades azules (25%), seguidos de verdes (24%) y luego color de avellana o cafés. Se revisó el color de lentes de una muestra aleatoria de 80 usuarios de lentes de contacto de color y, de estas personas, 22 usaban lentes azules y sólo 15 usaban lentes verdes.[9]

a. ¿Los datos muestrales dan suficiente evidencia para indicar que la proporción de usuarios de lentes de contacto a color que usan lentes azules es diferente de 25%? Use $\alpha = .05$.

b. ¿Los datos muestrales dan suficiente evidencia para indicar que la proporción de usuarios de lentes de contacto a color que usan lentes verdes es diferente de 24%? Use $\alpha = .05$.

c. ¿Hay alguna razón para efectuar una prueba de una cola ya sea para el inciso a) o el b)? Explique.

9.39 Una cura para el insomnio Un experimentador ha preparado un nivel de dosis de medicamento que dice inducirá el sueño al menos a 80% de las personas que suman de insomnio. Después de examinar la dosis, pensamos que su cifra respecto a la efectividad de su dosis está inflada. En un intento para refutar su dicho, administramos su dosis prescrita a 50 personas con insomnio y observamos que 37 de ellos habían tenido sueño inducido por la dosis del medicamento. ¿Hay suficiente evidencia para refutar su dicho al nivel de significancia de 5%?

9.40 ¿Quién vota? Alrededor de tres cuartas partes del electorado de Estados Unidos están registrados para votar, pero muchos no se molestan en votar el día de elecciones. Sólo 64% votaron en 1992 y 60% en 2000, pero la concurrencia en elecciones fuera del año es incluso más baja. Un artículo en el *Time* dijo que 35% de adultos estadounidenses son votantes registrados que siempre votan.[10] Para probar esto, se seleccionó una muestra aleatoria de $n = 300$ ciudadanos y $x = 123$ eran votantes regulares registrados que siempre votaban. ¿Esta muestra da suficiente evidencia para indicar que el porcentaje de adultos que dicen que siempre votan es diferente del porcentaje publicado en el *Time*? Pruebe usando $\alpha = .01$.

9.41 El mejor amigo del hombre La Sociedad protectora de animales informa que hay alrededor de 65 millones de perros en Estados Unidos y que aproximadamente 40% de todas las familias en Estados Unidos tienen al menos un perro.[11] En una muestra aleatoria de 300 familias, 114 dijeron que tenían al menos un perro. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar que la proporción de familias con al menos un perro es diferente de la publicada por la Humane Society? Pruebe usando $\alpha = .05$.

9.6 UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS DE MUESTRAS GRANDES PARA LA DIFERENCIA ENTRE DOS PROPORCIONES BINOMIALES

Cuando se seleccionaron muestras aleatorias e independientes de dos poblaciones *binomiales*, el punto central del experimento puede ser la diferencia $(p_1 - p_2)$ en las proporciones de individuos u objetos que poseen una característica especificada en las dos poblaciones. En esta situación, usted puede usar la diferencia en las proporciones muestrales $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ junto con su error estándar,

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

en la forma de un estadístico z para probar una diferencia significativa en las dos proporciones poblacionales. La hipótesis nula a probarse suele ser de la forma

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{o} \quad H_0 : (p_1 - p_2) = 0$$

contra una hipótesis alternativa ya sea de una cola o de dos colas. La prueba formal de hipótesis se resume en la siguiente plana. Al estimar el error muestral para el estadístico z, se debe usar el hecho de que cuando H_0 es verdadera, las dos proporciones poblacionales son iguales a algún valor común, por ejemplo p. Para obtener la mejor estimación de este valor común, los datos muestrales son "agrupados" y la estimación de p es

MI CONSEJO

Recuerde: Cada intento resulta en uno de dos resultados (E o F).

$$\hat{p} = \frac{\text{Número total de éxitos}}{\text{Número total de intentos}} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Recuerde que, para que la diferencia de las proporciones muestrales tengan una distribución aproximadamente normal, los tamaños muestrales deben ser grandes y las proporciones no deben estar demasiado cerca de 0 o 1.

PRUEBA ESTADÍSTICA DE MUESTRAS GRANDES PARA $(p_1 - p_2)$

1. Hipótesis nula: $H_0 : (p_1 - p_2) = 0$ o equivalentemente $H_0 : p_1 = p_2$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : (p_1 - p_2) > 0$	$H_a : (p_1 - p_2) \neq 0$
[o $H_a : (p_1 - p_2) < 0$]	

3. Estadístico de prueba: $z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\text{SE}} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n_1} + \dfrac{p_2q_2}{n_2}}} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{pq}{n_1} + \dfrac{pq}{n_2}}}$

   donde $\hat{p}_1 = x_1/n_1$ y $\hat{p}_2 = x_2/n_2$. Como el valor común de $p_1 = p_2 = p$ (empleado en el error estándar) se desconoce, se estima con

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

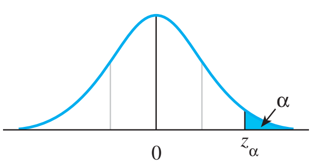
   y el estadístico de prueba es

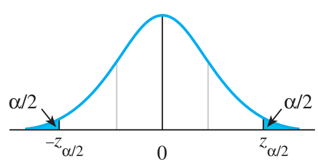
$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}} \quad \text{o} \quad z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$z > z_\alpha$	$z > z_{\alpha/2}$ o bien $z < -z_{\alpha/2}$
[o $z < -z_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa es $H_a : (p_1 - p_2) < 0$]	

   o cuando el valor $p < \alpha$





Suposiciones: Las muestras son seleccionadas al azar y de manera independiente de las dos poblaciones, n_1 y n_2 son grandes lo suficiente para que la distribución muestral de $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ pueda ser aproximada por una distribución normal. Esto es, $n_1\hat{p}_1$, $n_1\hat{q}_1$, $n_2\hat{p}_2$ y $n_2\hat{q}_2$ deben ser mayores a 5 todas.

EJEMPLO 9.12

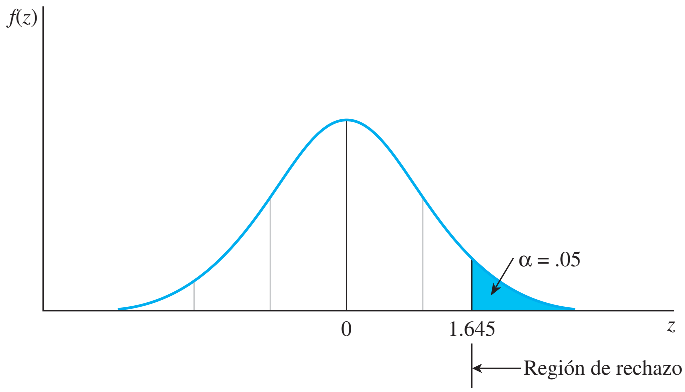
Los registros de un hospital indican que 52 hombres de una muestra de 1000 contra 23 mujeres de una muestra de 1000 fueron ingresados por enfermedad del corazón. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para indicar un porcentaje más alto de enfermedades del corazón entre hombres ingresados al hospital? Use $\alpha = .05$.

Solución Suponga que el número de pacientes ingresados por enfermedad del corazón tiene una distribución aproximada binomial de probabilidad para hombres y mujeres con parámetros p_1 y p_2, respectivamente. Entonces, como el investigador desea determinar si $p_1 > p_2$, probará la hipótesis nula $p_1 = p_2$, es decir, $H_0 : (p_1 - p_2) = 0$ contra la hipótesis alternativa $H_a : p_1 > p_2$ o bien, lo que es equivalente, $H_a : (p_1 - p_2) > 0$. Para efectuar esta prueba, use el estadístico de prueba z y aproxime el error estándar usando la estimación agrupada de p. Como H_a implica una prueba de una cola, puede rechazar H_0 sólo para valores grandes de z. Entonces, para $\alpha = .05$, puede rechazar H_0 si $z > 1.645$ (véase la figura 9.13).

La estimación agrupada de p requerida para el error estándar es

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{52 + 23}{1000 + 1000} = .0375$$

FIGURA 9.13
Ubicación de la región de rechazo para el ejemplo 9.12



y el estadístico de prueba es

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{.052 - .023}{\sqrt{(.0375)(.9625)\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right)}} = 3.41$$

Como el valor calculado de z cae en la región de rechazo, puede rechazar la hipótesis de que $p_1 = p_2$. Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el porcentaje de hombres que ingresan al hospital por enfermedad del corazón es más alto que el de mujeres. (NOTA: Esto no implica que la *incidencia* de enfermedad del corazón sea más alta en hombres. ¡Quizá menos mujeres ingresen al hospital cuando están afectadas por esa enfermedad!)

¿Cuánto *más alta* es la proporción de hombres que de mujeres que ingresan al hospital con enfermedad del corazón? Un límite inferior de una cola de 95% de confianza ayudará a hallar el mínimo valor probable para la diferencia.

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 1.645\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

$$(.052 - .023) - 1.645\sqrt{\frac{.052(.948)}{1000} + \frac{.023(.977)}{1000}}$$

$$.029 - .014$$

o $(p_1 - p_2) > .015$. La proporción de hombres es aproximadamente 1.5% más alta que de mujeres. ¿Esto es de *importancia práctica*? Ésta es una pregunta para que el investigador conteste.

En algunas situaciones puede ser necesario probar para una diferencia D_0 (que no sea 0) entre dos proporciones binomiales. Si éste es el caso, la estadística de prueba se modifica para probar $H_0 : (p_1 - p_2) = D_0$, y una estimación agrupada para un p común ya no se usa en el error estándar. El estadístico de prueba modificado es

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

Aun cuando este estadístico de prueba no se usa con frecuencia, el procedimiento no es diferente de otras pruebas de muestra grande que ya hemos aprendido.

9.6 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

9.42 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 140$ y $n_2 = 140$ observaciones se seleccionaron al azar de las poblaciones binomiales 1 y 2, respectivamente. La muestra 1 tuvo 74 éxitos y la muestra 2 tuvo 81 éxitos.

a. Suponga que no se tiene idea preconcebida en cuanto a cuál parámetro, p_1 o p_2, es el mayor, pero se desea detectar sólo una diferencia entre los dos parámetros si existe una. ¿Cuál escogería usted como hipótesis alternativa para una prueba estadística? ¿La hipótesis nula?

b. Calcule el error estándar de la diferencia en las dos proporciones muestrales, $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$. Asegúrese de usar la estimación agrupada para el valor común de p.

c. Calcule el estadístico de prueba que usaría para la prueba del inciso a). Con base en su conocimiento de la distribución normal estándar, ¿esta observación es probable o es improbable, suponiendo que H_0 sea verdadera y las dos proporciones poblacionales son iguales?

d. *Método del valor p*: Encuentre el valor p para la prueba. Pruebe para una diferencia significativa de las proporciones poblacionales al nivel de significancia del 1%.

e. *Método del valor crítico*: Encuentre la región de rechazo cuando $\alpha = .01$. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las proporciones poblacionales?

9.43 Consulte el ejercicio 9.42. Suponga, por razones prácticas, que sabe que p_1 no puede ser mayor que p_2.

a. Dado este conocimiento, ¿qué debería escoger como hipótesis alternativa para su prueba estadística? ¿Y la hipótesis nula?

b. ¿Su hipótesis alternativa del inciso a) implica una prueba de una o de dos colas? Explique.

c. Realice la prueba y exprese sus conclusiones. Pruebe usando $\alpha = .05$.

9.44 Muestras aleatorias independientes de 280 y 350 observaciones se seleccionaron de poblaciones binomiales 1 y 2, respectivamente. La muestra 1 tuvo 132 éxitos y la muestra 2 tuvo 178 éxitos. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la proporción de éxitos en la población 1 es menor que la proporción en la población 2? Use uno de los dos métodos de prueba presentados en esta sección y explique sus conclusiones.

APLICACIONES

9.45 Tratamiento contra control Se realizó un experimento para probar el efecto de un nuevo medicamento en una infección viral. La infección fue inducida en 100 ratones y éstos se dividieron al azar en dos grupos de 50. El primer grupo, el *grupo de control,* no recibió tratamiento para la infección; el segundo grupo recibió el medicamento. Después de un periodo de 30 días, las proporciones de sobrevivientes, $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$, en los dos grupos se encontraron de .36 y .60, respectivamente.

a. ¿Hay evidencia suficiente para indicar que el medicamento es efectivo para tratar la infección viral? Use $\alpha = .05$.

b. Use un intervalo de confianza de 95% para estimar la diferencia real en los porcentajes de curación para los grupos tratados contra los de control.

9.46 Marketing en cine El marketing a grupos objetivo por edades se ha convertido en un método de publicidad, incluso en anuncios en los cines. Los anunciadores usan software para rastrear la demografía de espectadores y luego decidir el tipo de productos a anunciar antes de una película en particular.[12] Un estadístico que podría ser de interés es la frecuencia con la que adultos e hijos de menos de 18 años asisten al cine en comparación con los adultos sin hijos. Suponga que la base de datos de un cine se utiliza para seleccionar al azar mil compradores adultos de boletos. Estos adultos son encuestados después y se les pregunta si eran espectadores frecuentes en el cine, es decir, ¿van al cine 12 o más veces al año? Los resultados se muestran en la tabla:

	Con hijos menores de 18	Sin hijos
Tamaño muestral	440	560
Número que van 12 o más veces al año	123	145

a. ¿Hay diferencia significativa en las proporciones poblacionales de espectadores frecuentes en estos dos grupos demográficos? Use $\alpha = .01$.

b. ¿Por qué una diferencia estadísticamente significativa en estas proporciones poblacionales sería de *importancia práctica* para el anunciante?

9.47 M&M'S En el ejercicio 8.53, investigamos si Mars, Inc., usa la misma proporción de M&M'S en sus variedades sencillas y de cacahuate. Muestras aleatorias de M&M'S sencillas y de cacahuate dan los siguientes datos muestrales para el experimento:

	Sencillo	Cacahuate
Tamaño muestral	56	32
Número de M&M'S rojos	12	8

Use una prueba de hipótesis para determinar si hay una diferencia significativa en las proporciones de dulces rojos para los dos tipos de M&M'S. Sea $\alpha = .05$ y compare sus resultados con los del ejercicio 8.53.

9.48 Terapia hormonal y enfermedad de Alzheimer En los últimos años, muchos estudios de investigación han demostrado que los beneficios que se buscan con terapia hormonal de reemplazo (HRT) no existen y de hecho esa terapia de cambio hormonal aumenta el riesgo de varias enfermedades graves. Un experimento de cuatro años donde intervinieron 4532 mujeres, publicado en *The Press Enterprise*, se realizó en 39 centros médicos. La mitad de las mujeres tomaron placebos y la otra mitad tomó Prempro, una terapia hormonal de reemplazo que se receta con frecuencia. Hubo 40 casos de demencia en el grupo hormonal y 21 en el de placebos.[13] ¿Hay suficiente evidencia para indicar que el riesgo de demencia es más alto para pacientes que usan Prempro? Pruebe al nivel de significancia del 1%.

9.49 HRT, continúa Consulte el ejercicio 9.48. Calcule un límite inferior de una cola a 99% de confianza para la diferencia en el riesgo de demencia para mujeres que usan terapia hormonal de reemplazo contra las que no lo usan. ¿Esta diferencia sería de *importancia práctica* para una mujer que considera la terapia hormonal de reemplazo (HRT)? Explique.

9.50 Clopidogrel y aspirina Un gran estudio se realizó para probar la efectividad del clopidogrel en combinación con aspirina para prevenir ataques al corazón y cerebrales.[14] La prueba abarcó más de 15 500 personas de 45 años o más de 32 países, incluyendo Estados Unidos, a las que se les había diagnosticado enfermedad cardiovascular y tenían múltiples factores de riesgo. Las personas fueron asignadas al azar a uno de dos grupos. Después de dos años, no hubo diferencia en el riesgo de ataque al corazón, ataque cerebral o muerte por enfermedad cardiaca entre quienes tomaron clopidogrel y baja dosis de aspirina al día y quienes tomaron aspirina en baja dosis más una píldora falsa. La combinación de dos medicamentos en realidad aumentó el riesgo de muerte (5.4% contra 3.8%) o muerte específicamente por enfermedad cardiovascular (3.9% contra 2.2%).

a. Las personas se asignaron al azar a uno de dos grupos. Explique cómo podría usar la tabla numérica aleatoria para hacer estas asignaciones.

b. No se dieron tamaños muestrales en el artículo: no obstante, supongamos que los tamaños muestrales para cada grupo fueron $n_1 = 7720$ y $n_2 = 7780$. Determine si el riesgo de morir era significativamente diferente para los dos grupos.

c. ¿Qué quieren decir los resultados en términos de *significancia práctica*?

9.51 Posición de dormir de un bebé ¿La posición de dormir de un bebé afecta el desarrollo de habilidad motora? En un estudio, publicado en los *Archives of Pedriatic Adolescent Medicine*, 343 infantes de tiempo completo fueron examinados en sus revisiones de cuatro meses en busca de varios puntos importantes de desarrollo, por ejemplo voltearse, sujetar una sonaja, alcanzar un objeto, etcétera.[15] La posición predominante de dormir en bebés, ya sea boca abajo (sobre su estómago), de espaldas o de lado, fue determinada en una entrevista telefónica con los padres. Los resultados muestrales para 320 de los 343 infantes de quienes se recibió información fueron como sigue:

	Boca abajo	Boca arriba o de costado
Número de infantes	121	199
Número que se volteaban	93	119

El investigador informó que era menos probable que los infantes que dormían de costado o de espaldas se voltearan, en la revisión de cuatro meses, que los que dormían principalmente boca abajo ($P < .001$). Use una prueba de muestra grande para confirmar o refutar la conclusión del investigador.

9.7 ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LAS HIPÓTESIS DE PRUEBA

Una prueba estadística de hipótesis es un procedimiento bien definido que hace posible que un experimentador rechace o acepte la hipótesis nula H_0, con riesgos medidos α y β. El experimentador puede controlar el riesgo de falsamente rechazar H_0 al seleccionar un valor apropiado de α. Por el contrario, el valor de β depende del tamaño muestral y de los valores del parámetro bajo prueba que son de importancia práctica para el experimentador. Cuando no se disponga de esta información, un experimentador puede decidir seleccionar un tamaño muestral asequible, con la esperanza de que la muestra contendrá suficiente información para rechazar la hipótesis nula. La probabilidad de que esta decisión sea errónea está dada por α, cuyo valor ha sido establecido por anticipado. Si la muestra no da suficiente evidencia para rechazar H_0, el experimentador puede expresar los resultados de la prueba como "Los datos no apoyan el rechazo de H_0" en lugar de aceptar H_0 sin conocer la probabilidad de error β.

Algunos experimentadores prefieren usar el valor p observado de la prueba, para evaluar la fuerza de la información muestral al decidir rechazar H_0. Estos valores por lo general pueden ser generados por computadora y con frecuencia se usan en informes de resultados estadísticos:

- Si el valor p es mayor a .05, los resultados se publican como NS, es decir, no significativos, al nivel de 5%.
- Si el valor p se encuentra entre .05 y .01, los resultados se publican como $P < .05$ que es significativo al nivel de 5%.
- Si el valor p se encuentra entre .01 y .001, los resultados se publican como $P < .01$ que es "altamente significativo" o significativo al nivel de 1%.
- Si el valor p es menor de .001, los resultados se publican como $P < .001$, es decir, "muy altamente significativos" o significativos al nivel de .1%.

Otros investigadores prefieren construir un intervalo de confianza para un parámetro y efectuar una prueba de manera informal. Si el valor del parámetro especificado por H_0 está incluido dentro de los límites superior e inferior del intervalo de confianza, entonces "H_0 no es rechazada". Si el valor del parámetro especificado por H_0 no está contenido dentro del intervalo, entonces "H_0 es rechazada". Estos resultados concuerdan con una prueba de dos colas; se usan límites de confianza de una cola para alternativas de una cola.

Por último, considere la selección entre una prueba de una cola y una de dos colas. En general, los experimentadores desean saber si un tratamiento ocasiona lo que podría ser un aumento benéfico en un parámetro o que podría ser un decremento perjudicial en un parámetro. Por tanto, casi todas las pruebas son de dos colas a menos que una prueba de una cola sea dictada fuertemente por consideraciones prácticas. Por ejemplo, suponga que sostendrá una pérdida financiera grande si la media μ es mayor que μ_0 pero no si es menor. Entonces usted deseará detectar valores mayores a μ_0 con una alta probabilidad y en consecuencia usa una prueba de cola derecha. En el mismo estilo, si niveles de contaminación mayores a μ_0 producen riesgos de salud críticos, entonces de seguro es deseable detectar niveles más altos a μ_0 con una prueba de hipótesis de cola derecha. En cualquier caso, la selección de una prueba de una o de dos colas debe estar dictada por las consecuencias prácticas que resultan de una decisión para rechazar o no rechazar H_0 a favor de la alternativa.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Partes de una prueba estadística

1. **Hipótesis nula:** una contradicción de la hipótesis alternativa.
2. **Hipótesis alternativa:** la hipótesis que el investigador desea apoyar.
3. **Estadístico de prueba** y su **valor *p*:** evidencia muestral calculada de los datos muestrales.
4. **Región de rechazo; valores críticos** y **niveles de significancia:** valores que separan rechazo y no rechazo de la hipótesis nula.
5. **Conclusión:** rechazar o no rechazar la hipótesis nula, indicando la significancia práctica de la conclusión del usuario.

II. Errores y significancia estadística

1. El **nivel de significancia** α es la probabilidad de rechazar H_0 cuando de hecho es verdadera.
2. El **valor *p*** es la probabilidad de observar un estadístico de prueba como extremo o más extremo que el observado; también, el valor más pequeño de α para el que H_0 puede ser rechazada.
3. Cuando el **valor *p*** es menor que el **nivel de significancia** α, la hipótesis nula es rechazada. Esto ocurre cuando el **estadístico de prueba** excede del **valor crítico**.
4. En un **error Tipo II**, β es la probabilidad de aceptar H_0 cuando de hecho es falsa. La **potencia de la prueba** es $(1 - \beta)$, la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa.

III. Estadísticos de prueba de muestra grande usando distribución *z*

Para probar uno de los cuatro parámetros poblacionales cuando los tamaños muestrales son grandes, use las siguientes estadísticas de prueba:

Parámetro	Estadístico de prueba
μ	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
p	$z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$
$\mu_1 - \mu_2$	$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$
$p_1 - p_2$	$z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ o $z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$

Ejercicios suplementarios

Los ejercicios con asterisco (*) son opcionales.

9.52 **a.** Defina α y β para una prueba estadística de hipótesis.

a. Para un tamaño muestral fijo n, si el valor de α disminuye, ¿cuál es el efecto en β?

b. Para disminuir α y β para un valor alternativo particular de μ, ¿cómo debe cambiar el tamaño muestral?

9.53 ¿Cuál es el valor p para una prueba de hipótesis? ¿Cómo se calcula para una prueba de muestra grande?

9.54 ¿Qué condiciones deben satisfacerse para que la prueba z pueda usarse para probar una hipótesis relativa a una media poblacional μ?

9.55 Defina la potencia de una prueba estadística. A medida que el valor alternativo de μ se aleja de μ_0, ¿cómo se afecta la potencia?

9.56 **Acidez de lluvia** Consulte el ejercicio 8.31 y la recolección de muestras de agua para estimar la acidez media (en pH) de lluvias en el noreste de Estados Unidos. Como se observó, el pH para lluvia pura que cae en aire limpio es alrededor de 5.7. La muestra de $n = 40$ lluvias produjo lecturas de pH con $\bar{x} = 3.7$ y $s = .5$. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el pH medio para lluvias es más ácido ($H_a : \mu < 5.7$ pH) que el agua de lluvia pura? Pruebe usando $\alpha = .05$. Observe que esta inferencia es apropiada sólo para el área en la que se recolectaron especímenes de agua de lluvia.

9.57 Color de máquinas lavadoras Un fabricante de máquinas lavadoras automáticas suministra un modelo particular en uno de tres colores. De las primeras mil lavadoras vendidas, se observa que 400 eran del primer color. ¿Puede usted concluir que más de un tercio de todos los compradores tienen preferencia por el primer color?

a. Encuentre el valor p para la prueba.

b. Si usted piensa realizar su prueba usando $\alpha = .05$, ¿cuáles serán las conclusiones de su prueba?

9.58 Próxima generación Nacida entre 1980 y 1990, la próxima generación fue el tema del ejercicio 8.60.[16] En una encuesta de 500 mujeres y 500 hombres estudiantes de la próxima generación, 345 de las mujeres y 365 hombres informaron que decidieron estudiar en una universidad para ganar más dinero.

a. ¿Hay una diferencia significativa en las proporciones poblacionales de estudiantes mujeres y hombres que decidieron estudiar la universidad para ganar más dinero? Use $\alpha = .01$.

b. ¿Puede considerar alguna razón por la que una diferencia estadísticamente significativa en estas proporciones poblacionales podría ser de *importancia práctica*? ¿Para quién podría ser importante esta diferencia?

9.59 Pesca de robalo El factor pH es una medida de la acidez o alcalinidad del agua. Una lectura de 7.0 es neutral; valores de más de 7.0 indican alcalinidad y, debajo de 7.0 implican acidez. Loren Hill dice que la mejor probabilidad de pescar robalo es cuando el pH del agua está entre 7.5 y 7.9.[17] Supongamos que usted sospecha que la lluvia ácida está bajando el pH de su lugar de pesca favorita y desea determinar si el pH es menor a 7.5.

a. Indique la hipótesis alternativa y nula que escogería para una prueba estadística.

b. ¿La hipótesis alternativa del inciso a) implica una prueba de una o de dos colas? Explique.

c. Suponga que una muestra aleatoria de 30 especímenes de agua dieron lecturas de pH con $\bar{x} = 7.3$ y $s = .2$. Con sólo ver los datos, ¿piensa usted que la diferencia $\bar{x} - 7.5 = -.2$ es suficientemente grande para indicar que el pH medio de las muestras de agua es menor a 7.5? (*No* realice la prueba.)

d. Ahora realice una prueba estadística de las hipótesis del inciso a) e indique sus conclusiones. Pruebe usando $\alpha = .05$. Compare su decisión basada estadísticamente con su decisión intuitiva del inciso c).

9.60 Lotería de Pennsylvania Un abogado de la región central de Pennsylvania informó que el registro de juicios de la oficina del fiscal de distrito (DA) del condado de Northumberland mostró sólo seis sentencias en 27 juicios de enero a mediados de julio de 1997. Respondieron cuatro fiscales de distrito del condado de Pennsylvania, "No nos juzguen por estadísticas".[18]

a. Si la información del abogado es correcta, ¿rechazaría usted lo dicho por el fiscal de distrito de un porcentaje de sentencias de 50% o más?

b. Los registros *reales* muestran que ha habido 455 declaraciones de culpabilidad y 48 casos que han tenido que ir a juicio. Aun suponiendo que las 455 declaraciones de culpabilidad sean *sólo* sentencias de los 503 casos publicados, ¿cuál es el intervalo de confianza de 95% para p, la verdadera proporción de sentencias por este fiscal de distrito?

c. Usando los resultados del inciso b), ¿está usted dispuesto a rechazar una cifra de 50% o mayor para el verdadero porcentaje de sentencias? Explique.

9.61 Venado de cola blanca En un artículo titulado "A Strategy for Big Bucks", Charles Dickey examina estudios de los hábitats de venados de cola blanca que indican que viven y se alimentan dentro de zonas de distribución limitadas, aproximadamente de 150 a 205 acres.[19] Para determinar si hubo una diferencia entre las zonas de distribución de venados localizados en dos zonas geográficas diferentes, se atraparon, marcaron y equiparon con radiotransmisores pequeños 40 venados. Varios meses después, los venados fueron rastreados e identificados, registrándose la distancia x desde su punto de liberación. La media y desviación estándar de las distancias desde el punto de liberación fueron como sigue:

	Lugar 1	Lugar 2
Tamaño muestral	40	40
Media muestral	2980 ft	3205 ft
Desviación estándar muestral	1140 ft	963 ft

a. Si no usted no tiene una razón preconcebida para pensar que una media poblacional es más grande que otra, ¿qué escogería para su hipótesis alternativa? ¿Y para su hipótesis nula?

b. ¿Su hipótesis alternativa del inciso a) implica una prueba de una o de dos colas? Explique.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que las distancias medias difieren para los dos lugares geográficos? Pruebe usando $\alpha = .05$.

9.62 Modelos femeninas En un estudio para evaluar varios efectos de usar una modelo femenina para anunciar automóviles, a cien hombres se les mostraron fotografías de dos automóviles de precio, color y tamaño semejantes, pero de marcas diferentes. Uno de los automóviles se exhibió con una modelo femenina a 50 de los hombres (grupo A), y ambos automóviles se exhibieron sin la modelo a los otros 50 hombres (grupo B). En el grupo A, el automóvil exhibido con la modelo fue juzgado como más costoso por 37 hombres; en el grupo B, el mismo automóvil fue considerado como el más costoso por 23 hombres. ¿Estos resultados indican que usar una modelo femenina influye en el costo percibido de un automóvil? Use una prueba de una cola con $\alpha = .05$.

9.63 Tornillos Muestras aleatorias de 200 tornillos fabricados por una máquina tipo A y 200 fabricados por una máquina tipo B, mostraron 16 y ocho tornillos defectuosos, respectivamente. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para sugerir una diferencia en la operación de los tipos de máquina? Use $\alpha = .05$.

9.64 Biomasa El ejercicio 7.63 informó que la biomasa para bosques tropicales, considerada como de 35 kilogramos por metro cuadrado (kg/m^2), puede de hecho ser demasiado alta y que los valores de biomasa tropical varían de una región a otra, de unos 5 a 55 kg/m^2.[20] Supongamos que usted mide la biomasa tropical en 400 lugares de un metro cuadrado, seleccionados al azar y obtiene $\bar{x} = 31.75$ y $s = 10.5$. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que los científicos están valorando en exceso la biomasa media para bosques tropicales y que la media es de hecho más baja de lo estimado?

a. Indique las hipótesis nula y alternativa a probar.

b. Localice la región de rechazo para la prueba con $\alpha = .01$.

c. Realice la prueba y exprese sus conclusiones.

9.65 Adolescentes y estrés social En un estudio para comparar diferencias étnicas en estrés social en adolescentes, unos investigadores reclutaron personas de tres escuelas de enseñanza media en Houston, Texas.[21] El estrés social entre cuatro grupos étnicos se midió usando la escala llamada Social Attitudinal Familial and Environment Scale for Children (SAFE-C). Además, se recolectó información demográfica acerca de los 316 estudiantes usando cuestionarios administrados por sí mismos. Una tabulación de respuestas de estudiantes a una pregunta relacionada con su condición socioeconómica (SES), comparada con otras familias en las que los estudiantes escogieron una de cinco respuestas (mucho peor, un poco peor, más o menos igual, mejor o mucho mejor) resultó en la tabulación que sigue.

	Euro-americanos	Afroame-ricanos	De origen hispano	De origen asiático
Tamaño muestral	144	66	77	19
Más o menos igual	68	42	48	8

a. ¿Estos datos apoyan la hipótesis de que la proporción de afroamericanos adolescentes, que dicen que su condición socioeconómica es “más o menos igual”, es mejor que la de adolescentes estadounidenses de origen hispano?

b. Encuentre el valor p para la prueba.

c. Si usted planea probar usando $\alpha = .05$, ¿cuál es su conclusión?

9.66* Adolescentes y estrés social, continúa Consulte el ejercicio 9.65. Debió haberse pensado en diseñar una prueba para la cual β es tolerablemente baja cuando p_1 excede de p_2 en una cantidad importante. Por ejemplo, encuentre un tamaño muestral común n para una prueba con $\alpha = .05$ y $\beta \leq .20$ cuando de hecho p_1 excede a p_2 en 0.1. (SUGERENCIA: El valor máximo de $p(1 - p) = .25$.)

9.67 Bajar de peso En una comparación de la reducción media de peso en 1 mes, para mujeres de 20 a 30 años, estos datos muestrales se obtuvieron para cada una de dos dietas:

	Dieta I	Dieta II
Tamaño muestral n	40	40
Media muestral $\bar{x}$	10 lb	8 lb
Variancia muestral s^2	4.3	5.7

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la dieta I produce una mayor reducción media de peso que la dieta II? Use $\alpha = .05$.

9.68 Mayor producción A un agrónomo se le demostró experimentalmente que un nuevo régimen de irrigación/fertilización produce un aumento de 2 bushels por cuadrado (significante al nivel de 1%), cuando se compara con el régimen por ahora en uso. El costo de poner en práctica y usar el nuevo régimen no será un factor si el aumento en producción pasa de 3 bushels por cuadrado. ¿La significancia estadística es igual que la importancia práctica en esta situación? Explique.

9.69 Resistencia de cables a la ruptura Una prueba de las resistencias a la ruptura, en dos tipos diferentes de cables, fue realizada usando muestras de $n_1 = n_2 = 100$ trozos de cada tipo de cable.

Cable I	Cable II
$\bar{x}_1 = 1925$	$\bar{x}_2 = 1905$
$s_1 = 40$	$s_2 = 30$

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre la resistencia media a la ruptura de los dos cables? Use $\alpha = .05$.

9.70 Aplique los frenos La capacidad de frenado se comparó para dos modelos de automóvil del 2008. Muestras aleatorias de 64 automóviles se probaron para cada tipo. La medición registrada fue la distancia (en pies) necesaria para detenerse cuando se aplicaron los frenos a 40 millas por hora. Éstas son las medias y variancias muestrales calculadas:

Modelo I	Modelo II
$\bar{x}_1 = 118$	$\bar{x}_2 = 109$
$s_1^2 = 102$	$s_2^2 = 87$

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre las distancias medias de parada para los dos modelos?

9.71 Aspersión de árboles frutales Un productor de frutas desea probar una nueva fumigación que un fabricante dice *reducirá* la pérdida debida a insectos. Para probar lo dicho, el productor rocía 200 árboles con la nueva fumigación y otros 200 árboles con la fumigación estándar. Se registraron los siguientes datos:

	Nueva fumigación	Fumigación estándar
Producción media por árbol $\bar{x}$ (lb)	240	227
Varianza s^2	980	820

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para concluir que la producción media por árbol tratado con la nueva fumigación es mayor que la de árboles tratados con la fumigación estándar? $\alpha = .05$.

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las producciones medias para las dos fumigaciones.

9.72 Actinomicina D Un biólogo formula la hipótesis de que altas concentraciones de actinomicina D inhiben la síntesis del ácido ribonucleico (RNA) en células y, en consecuencia, la producción de proteínas. Un experimento realizado para probar esta teoría comparó la síntesis del RNA en células tratadas con dos concentraciones de actinomicina D: .6 y .7 microgramos por mililitro. Las células tratadas con la concentración más baja (.6) de actinomicina D mostraron que 55 de entre 70 se desarrollaron normalmente, mientras que 23 de entre 70 parecieron desarrollarse en forma normal para la concentración más alta (.7). ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre los porcentajes de síntesis normal del RNA para células expuestas a las dos diferentes concentraciones de actinomicina D?

a. Encuentre el valor p para la prueba.

b. Si usted planea realizar su prueba usando $\alpha = .05$, ¿cuáles serán las conclusiones de su prueba?

9.73 Calificaciones SAT ¿Cómo se comparan los estudiantes de preparatoria de California con los del resto del país en aptitud, medida por sus calificaciones del SAT (examen de aptitud escolar)? El promedio nacional de calificaciones para la generación de 2005 fueron 508 en expresión verbal y 520 en matemáticas.[22] Suponga que cien estudiantes de California de la generación de 2005 se seleccionaron al azar y que sus calificaciones del SAT se registraron en la tabla siguiente:

	Verbal	Matemáticas
Promedio muestral	499	516
Desviación estándar muestral	98	96

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el promedio de calificación verbal para todos los estudiantes de California de la generación 2005 es diferente del promedio nacional? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el promedio de calificación de matemáticas para todos los estudiantes de California de la generación 2005 es diferente del promedio nacional? Pruebe usando $\alpha = .05$.

c. ¿Podría usted usar estos datos para determinar si hay diferencia entre el promedio de calificaciones de matemáticas y verbal para todos los estudiantes de California de la generación 2005? Explique su respuesta.

9.74 Experimento de un laberinto En un estudio de una carrera en un laberinto, una rata corre en un laberinto en forma de T y se registra el resultado de cada carrera. Una recompensa en forma de alimento se coloca siempre en la salida correcta. Si ocurre un aprendizaje, la rata escogerá la salida de la derecha con más frecuencia que la de la izquierda. Si no hay aprendizaje, la rata debe escoger al azar cualquiera de las dos salidas. Suponga que a la rata se le dan $n = 100$ carreras en el laberinto y que ella escoge la salida derecha $x = 64$ de las veces. ¿Concluiría usted que tiene lugar un aprendizaje? Use el método del valor p y tome una decisión con base en este valor p.

9.75 Los PCB Se han encontrado bifeniles policlorados (PCB) en cantidades peligrosamente altas en algunas aves de caza halladas en pantanos de la costa sudeste de Estados Unidos. La Administración de Alimentos y Drogas (FDA) considera que una concentración de los PCB de más de 5 partes por millón (ppm) en estas aves de caza es peligrosa para consumo humano. Una muestra de 38 aves de caza produjo un promedio de 7.2 ppm con una desviación estándar de 6.2 ppm. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que las ppm medias de los PCB en la población de aves de caza excede del límite recomendado de la FDA de 5 ppm? Use $\alpha = .01$.

9.76* Los PCB, continúa Consulte el ejercicio 9.75.

a. Calcule β y $1 - \beta$ si la verdadera media de ppm de los PCB es 6 ppm.

b. Calcule β y $1 - \beta$ si la verdadera media de ppm de los PCB es 7 ppm.

c. Encuentre la potencia, $1 - \beta$, cuando $\mu = 8, 9, 10$ y 12. Use estos valores para construir una curva de potencia para la prueba del ejercicio 9.75.

d. ¿Para qué valores de μ esta prueba tiene potencia mayor o igual a .90?

9.77 Conspiración del 9/11 Algunos estadounidenses creen que toda la catástrofe del 9/11 fue planeada y ejecutada por oficiales federales para dar a Estados Unidos un pretexto para ir a la guerra en el Medio Oriente y como medio de consolidar y ampliar el poder de la administración vigente en ese entonces. Este grupo de estadounidenses es mayor de lo que se cree. Una encuesta de Scripps-Howard de $n = 1010$ adultos en agosto de 2006 encontró que 36% de los estadounidenses considera ese escenario muy probable o algo probable.[23] En la encuesta siguiente, una muestra aleatoria de $n = 100$ adultos estadounidenses encontró que 26 de los muestreados acordaron que la teoría de la conspiración era probable o algo probable. ¿Esta muestra contradice la cifra del 36% publicada? Pruebe al nivel de significancia de $\alpha = .05$.

9.78 Estaturas y género Es un hecho bien aceptado que los hombres son más altos en promedio que las mujeres. Pero, ¿cuánto más altos? Los géneros de 105 estudiantes biomédicos (ejercicio 1.54) también se registraron y los datos se resumen a continuación:

	Hombres	Mujeres
Tamaño muestral	48	77
Media muestral	69.58	64.43
Desviación estándar muestral	2.62	2.58

a. Efectúe una prueba de hipótesis ya sea para confirmar o refutar nuestro dicho inicial de que los hombres son más altos en promedio que las mujeres. Use $\alpha = .01$.

b. Si los resultados del inciso a) muestran que nuestro dicho era correcto, construya un límite inferior de una cola de 99% de confianza, entre estudiantes universitarios hombres y mujeres. ¿Cuánto más altos son los hombres que las mujeres?

9.79 Inglés como segundo idioma El estado de California está trabajando muy duro para asegurarse que todos los estudiantes de escuelas elementales, cuyo idioma nativo no sea el inglés, adquieran suficiencia en inglés cuando estén en el sexto grado. Su progreso se vigila cada año usando el examen de desarrollo del inglés de California.[24] Los resultados de dos distritos escolares del sur de California para un año escolar reciente se muestran a continuación:

Distrito	Riverside	Palm Springs
Número de estudiantes examinados	6124	5512
Porcentaje que domina el inglés	40	37

¿Estos datos dan suficiente evidencia estadística para indicar que el porcentaje de estudiante que domina el inglés difiere para estos dos distritos? Pruebe usando $\alpha = .01$.

9.80 Nadadores de estilo de pecho ¿Cuánto tiempo de entrenamiento es necesario para ser nadador de estilo de pecho de clase mundial? Un estudio publicado en *The American Journal de Sports Medicine* informó del número de metros por semana nadados por dos grupos de nadadores, los que compitieron sólo en estilo de pecho y los que compitieron en combinado individual (que incluye estilo de pecho). El número de metros por semana practicando el nado de pecho se registró y las estadísticas en resumen se muestran a continuación.[25]

	Nado de pecho	Combinado indiv.
Tamaño muestral	130	80
Media muestral	9017	5853
Desviación estándar muestral	7162	1961

¿Hay suficiente evidencia para indicar una diferencia en el número promedio de metros nadados por estos dos grupos de nadadores? Pruebe usando $\alpha = .01$.

9.81 Nado de pecho, continúa Consulte el ejercicio 9.80.

a. Construya un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en el número promedio de metros nadados en estilo de pecho contra el de combinado individual.

b. ¿Cuánto más tiempo practican los nadadores del estilo de pecho que los de combinado? ¿Cuál es la razón práctica para esta diferencia?

MI APPLET Ejercicios

9.82 Trabajadores escolares En el ejercicio 8.109, el sueldo promedio por hora para trabajadores de cafetería de escuela pública se dio como \$10.33.[26] Si se encuentra que $n = 40$ trabajadores de cafetería de escuela pública seleccionados dentro de un distrito escolar tienen un sueldo promedio por hora de $\overline{x} = \$9.75$ con una desviación estándar de $s = \$1.65$, ¿esta información contradice el promedio publicado de \$10.33?

a. ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa a probar?

b. Use el applet **Large-Sample test of a Population Mean** para hallar el valor observado del estadístico de prueba.

c. Use el applet **Large-Sample test of a Population Mean** para hallar el valor p de esta prueba.

d. Con base en sus resultados del inciso c), ¿qué conclusiones puede sacar acerca del sueldo promedio por hora de $10.33?

9.83 Sueldos por día Los sueldos por día en una industria particular están distribuidos normalmente con una media de $94 y una desviación estándar de $11.88. Suponga que una compañía de esta industria emplea 40 trabajadores y les paga $91.50 por semana en promedio. ¿Pueden estos trabajadores ser vistos como muestra aleatoria de entre todos los trabajadores de la industria?

a. ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa a probar?

b. Use el applet **Large-Sample Test of a Population Mean** para hallar el valor observado de la estadística de prueba.

c. Use el applet **Large-Sample Test of a Population Mean** para hallar el valor p para esta prueba.

d. Si usted planeó realizar su prueba utilizando $\alpha = .01$, ¿cuáles serían las conclusiones de su prueba?

e. ¿Fue necesario saber que los sueldos diarios están normalmente distribuidos? Explique su respuesta.

9.84 Consulte el ejemplo 9.8. Use el applet **Power of a *z*-Test** para verificar la potencia de la prueba de

$$H_0: \mu = 880 \quad \text{contra} \quad H_a: \mu \neq 880$$

para valores de μ iguales a 870, 875, 880, 885 y 890. Compruebe sus respuestas contra los valores mostrados en la tabla 9.2.

9.85 Consulte el ejemplo 9.8.

a. Use el método dado en el ejemplo 9.8 para calcular la potencia de la prueba de

$$H_0: \mu = 880 \quad \text{contra} \quad H_a: \mu \neq 880$$

cuando $n = 30$ y el verdadero valor de μ es 870 toneladas.

b. Repita el inciso a) usando $n = 70$ y $\mu = 870$ toneladas.

c. Use el applet **Power of a *z*-Test** para verificar sus resultados hechos manualmente en los incisos a) y b).

d. ¿Cuál es el efecto de aumentar el tamaño muestral sobre la potencia de la prueba?

9.86 Use el cursor apropiado en el applet **Power of a *z*-Test** para contestar las siguientes preguntas. Escriba una oración para cada inciso, describiendo lo que vea usando el applet.

a. ¿Qué efecto tiene aumentar el tamaño muestral sobre la potencia de la prueba?

b. ¿Qué efecto tiene aumentar la distancia entre el verdadero valor de μ y el valor hipotético, $\mu = 880$, sobre la potencia de la prueba?

c. ¿Qué efecto tiene disminuir el nivel de significancia α sobre la potencia de la prueba?

CASO PRÁCTICO

¿Una aspirina al día...?

El viernes 27 de enero de 1988, la portada del *New York Times* decía: "Se encuentra que el riesgo de un ataque al corazón se reduce al tomar aspirina: se ven efectos salvadores". Un estudio muy grande de médicos de Estados Unidos demostró que una sola aspirina tomada un día sí y un día no reduce a la mitad el riesgo de ataque cardiaco en hombres.[27] Tres días después, un encabezado en el *Times* decía, "Valor de la aspirina diaria discutido en un estudio inglés de ataques al corazón". ¿Cómo pueden dos estudios aparentemente similares, ambos involucrando a doctores como participantes, llegar a conclusiones opuestas?

El estudio de los médicos estadounidenses consistió en dos pruebas clínicas aleatorias en una. La primera probaba la hipótesis de que 325 miligramos (mg) de aspirina tomados un día sí y uno no reduce la mortalidad por enfermedad cardiovascular. La segunda probaba si 50 mg de β-caroteno tomada en días alternados reduce la incidencia de cáncer. De los nombres en una cinta de computadora de la Asociación Médica Americana, 261 248 médicos hombres de entre 40 y 84 años de edad fueron invitados a participar en la prueba. De quienes respondieron, 59 285 estuvieron dispuestos a participar. Después de la exclusión de los médicos que tenía una historia de desórdenes clínicos, o quienes estaban tomando medicina en ese tiempo o tenían reacciones negativas a la aspirina, 22 071 médicos fueron seleccionados al azar en uno de cuatro grupos de tratamiento: 1) aspirina y β-caroteno regulados, 2) aspirina regulada y un placebo de β-caroteno, 3) placebo de aspirina y β-caroteno y 4) placebo de aspirina y placebo de β-caroteno. En esta forma, la mitad fueron asignados para recibir aspirina y la mitad a recibir β-caroteno.

El estudio fue realizado como de "doble ciego", en el que ninguno de los participantes ni los investigadores responsables de seguir a los participantes sabía a cuál grupo pertenecía un participante. Los resultados del estudio estadounidense relacionado con infartos al miocardio (nombre técnico de ataques al corazón) se dan en la tabla siguiente:

	Estudio estadounidense	
	Aspirina ($n = 11\,037$)	Placebo ($n = 11\,034$)
Infarto al miocardio		
Fatal	5	18
No fatal	99	171
Total	104	189

El objetivo del estudio inglés era determinar si 500 mg de aspirina tomada diariamente reduciría la incidencia y la mortalidad por enfermedad cardiovascular. En 1978, todos los médicos del Reino Unido fueron invitados a participar. Después de las exclusiones acostumbradas, 5139 médicos se asignaron de manera aleatoria para tomar aspirina, a menos que surgiera algún problema y un tercio fueron asignados al azar para *evitar* la aspirina. No se utilizaron pastillas de placebo, de modo que el estudio no era ciego. Los resultados del estudio inglés se dan aquí:

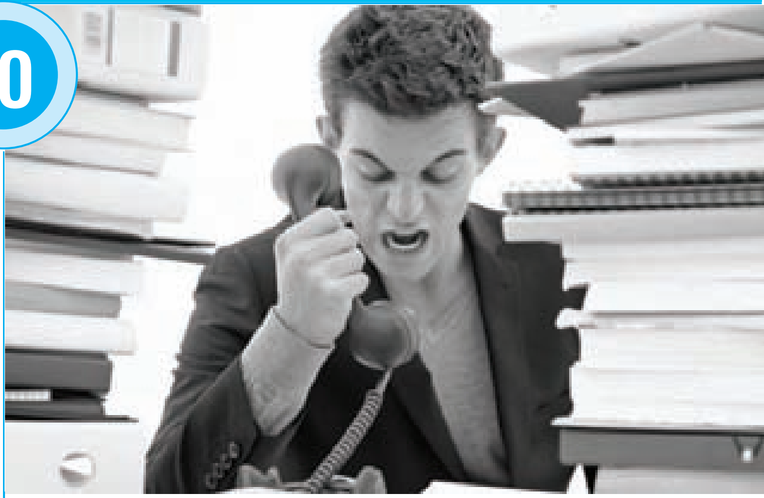
	Estudio inglés	
	Aspirina ($n = 3429$)	Control ($n = 1710$)
Infarto al miocardio		
Fatal	89 (47.3)	47 (49.6)
No fatal	80 (42.5)	41 (43.3)
Total	169 (89.8)	88 (92.9)

Para compensar los números desiguales, el estudio inglés publicó porcentajes por 10 mil personas-año vivas (dados en paréntesis).

1. Pruebe si el estudio estadounidense indica en efecto que el porcentaje de ataques al corazón, para médicos que toman 325 mg de aspirina un día sí y uno no, es significativamente diferente del porcentaje de los de placebo. ¿Se justifica lo dicho por el estudio estadounidense?
2. Repita el análisis usando los datos del estudio inglés en el que un grupo tomó 500 mg de aspirina al día y el grupo de control que no tomó nada. Con base en sus datos, ¿se justifica lo dicho por el estudio inglés?
3. ¿Puede usted considerar algunas razones posibles por las que los resultados de estos dos estudios, que fueron semejantes en algunos aspectos, produjeran conclusiones tan distintas?

10

Inferencia a partir de muestras pequeñas



© Yuri_arcus/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

Los conceptos básicos de estimación estadística de muestra grande y prueba de hipótesis, para situaciones prácticas que involucran medias y proporciones poblacionales, se introdujeron en los capítulos 8 y 9. Como todas estas técnicas se apoyan en el teorema del límite central para justificar la normalidad de los estimadores y estadísticas de prueba, aplican sólo cuando las muestras son grandes. Este capítulo complementa las técnicas de muestra grande al presentar pruebas de muestra pequeña e intervalos de confianza para medias y varianzas poblacionales. A diferencia de sus similares de muestras grandes, estas técnicas de muestra pequeña requieren que las poblaciones muestreadas sean normales o que aproximadamente lo sean.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo decido cuál prueba usar?

¿Le gustaría una semana de cuatro días de trabajo?

¿Un horario flexible de semana de trabajo resulta en beneficios positivos para empleador y empleado? Cuatro beneficios obvios son (1) menos tiempo de viaje de posiciones de campo a la oficina, (2) menos empleados estacionados en el estacionamiento, (3) reducidos gastos de viaje y (4) permiso a empleados para tener otro día libre. Pero, ¿la semana de trabajo flexible hace que los empleados sean más eficientes y les hace tomar menos días por enfermedad o motivos personales? Las respuestas a algunas de estas preguntas se plantean en el caso práctico al final de este capítulo.

10.1 INTRODUCCIÓN

Supongamos que usted necesita correr un experimento para estimar una media poblacional o la diferencia entre dos medias. El proceso de recolectar los datos puede ser muy costoso o lento. Si no se puede recolectar una *muestra grande*, los procedimientos de estimación y prueba de los capítulos 8 y 9 no sirven.

Este capítulo introduce algunos procedimientos estadísticos equivalentes que se pueden usar cuando *el tamaño muestral es pequeño*. Los procedimientos de estimación y prueba comprenden estos parámetros ya conocidos:

- Una sola media poblacional, μ
- La diferencia entre dos medias poblacionales, $(\mu_1 - \mu_2)$
- Una sola varianza poblacional, σ^2
- La comparación de dos varianzas poblacionales, σ_1^2 y σ_2^2

Las pruebas e intervalos de confianza de muestra pequeña para proporciones binomiales se omitirán para nuestro análisis.†

10.2 DISTRIBUCIÓN *t* DE STUDENT

Al efectuar un experimento para evaluar un proceso nuevo pero muy costoso para producir diamantes sintéticos, usted puede estudiar sólo seis diamantes generados por el proceso. ¿Cómo puede usar estas seis mediciones para hacer inferencias acerca del peso promedio μ de diamantes a partir de este proceso?

Al estudiar la distribución muestral de $\bar{x}$ en el capítulo 7, hicimos estos puntos:

- Cuando la población original muestreada sea normal, $\bar{x}$ y $z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tienen distribuciones normales, *para cualquier tamaño muestral*.
- Cuando la población muestreada *no sea* normal, $\bar{x}$, $z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$, y $z \approx (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tienen distribuciones aproximadamente iguales, si el tamaño muestral es *grande*.

MI CONSEJO

Cuando $n < 30$, el teorema del límite central no garantiza que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

sea aproximadamente normal.

Desafortunadamente, cuando el tamaño muestral n sea pequeño, el estadístico $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ *no tiene* una distribución normal. Por tanto, todos los valores críticos de z que utilizamos en los capítulos 8 y 9 ya no son correctos. Por ejemplo, *no se puede* decir que $\bar{x}$ se encontrará a no más de 1.96 errores estándar de μ 95% del tiempo.

Este problema no es nuevo; fue estudiado por expertos en estadística y experimentadores a principios del siglo xx. Para hallar la distribución muestral de esta estadística, hay dos formas de proceder:

- Use un método empírico. Saque repetidas muestras y calcule $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ para cada muestra. La distribución relativa de frecuencia que usted construya usando estos valores aproximarán la forma y ubicación de la distribución muestral.
- Use un método matemático para deducir la función real de densidad o curva que describa la distribución muestral.

†Una prueba de muestra pequeña para el parámetro binomial p se presentará en el capítulo 15.

Este segundo método fue utilizado por un inglés llamado W.S. Gosset en 1908. Él dedujo una complicada fórmula para la función de densidad de

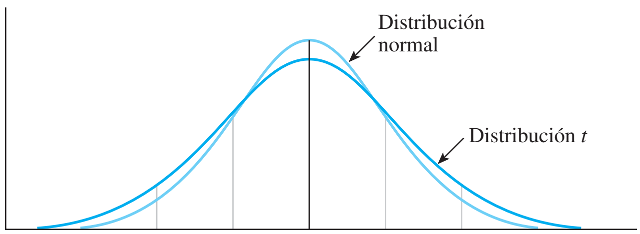
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

para muestras aleatorias de tamaño n desde una población normal y publicó sus resultados bajo el nombre de "Student". Desde entonces, la estadística se conoce como ***t* de Student**. Tiene las siguientes características:

- Tiene forma de montículo y es simétrica alrededor de $t = 0$, igual que z.
- Es más variable que z, con "colas más pesadas"; esto es, la curva t no aproxima al eje horizontal con la misma rapidez que z. Esto es porque el estadístico t abarca dos cantidades aleatorias, $\bar{x}$ y s, en tanto que el estadístico z tiene sólo la media muestral, $\bar{x}$. Se puede ver este fenómeno en la figura 10.1.
- La forma de la distribución t depende del tamaño muestral n. A medida que n aumenta, la variabilidad de t disminuye porque la estimación s de σ está basada en más y más información. En última instancia, cuando n sea infinitamente grande, las distribuciones t y z son idénticas.

FIGURA 10.1

Estándar normal z y la distribución t con 5 grados de libertad



El divisor $(n - 1)$ en la fórmula para la varianza muestral s^2 se denomina **número de grados de libertad (*df*) asociados con s^2**. Determina la *forma* de la distribución t. El origen del término *grados de libertad* es teórico y se refiere al número de desviaciones independientes elevadas al cuadrado en s^2 existentes para estimar σ^2. Estos grados de libertad pueden cambiar para diferentes aplicaciones y, como especifican la distribución t correcta a usar, es necesario recordar que hay que calcular los grados de libertad correctos para cada aplicación.

MI CONSEJO

Para una t de una muestra, $df = n - 1$.

La tabla de probabilidades para la distribución z normal estándar ya no es útil para calcular valores críticos o valores p para el estadístico p. En lugar de ello, se usará la tabla 4 del apéndice I que se reproduce parcialmente en la tabla 10.1. Al indizar un número particular de grados de libertad, la tabla registra t_α, un valor de t que tiene área a de cola a su derecha, como se ve en la figura 10.2.

FIGURA 10.2

Valores tabulados de la t de Student

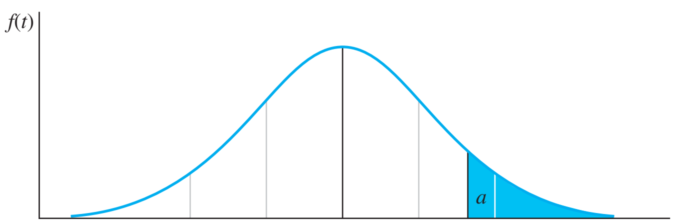


TABLA 10.1 **Formato de la tabla *t* de Student tomado de la tabla 4 del apéndice I**

df	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	*df*
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

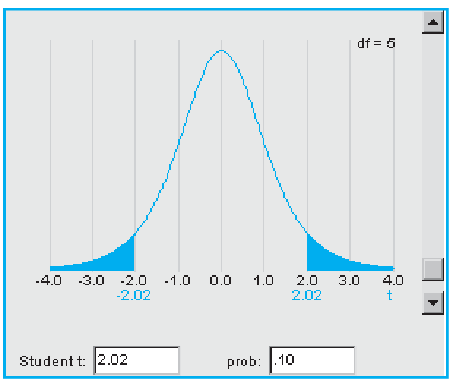
EJEMPLO 10.1

Para una distribución *t* con 5 grados de libertad, el valor de *t* que tiene área .05 a su derecha se encuentra en la fila 5 en la columna marcada $t_{.050}$. Para esta distribución *t* particular, el área a la derecha de $t = 2.015$ es .05; sólo 5% de todos los valores de la estadística *t* rebasarán este valor.

MI APPLET

Se puede usar el applet **Student's *t* Probabilities (Probabilidades *t* de Student)** para hallar el valor *t* descrito en el ejemplo 10.1. El primer applet, que aparece en la figura 10.3, da valores *t* y sus probabilidades de dos colas, en tanto que el segundo applet da valores *t* y probabilidades de una cola. Use el cursor de la derecha del applet para seleccionar los grados de libertad apropiados. Para el ejemplo 10.1, debe seleccionar $df = 5$ y teclear .10 en la caja marcada "prob:" en la parte inferior del primer applet. El applet dará el valor de *t* que ponga .05 en una cola de la distribución *t*. El segundo applet mostrará la *t* idéntica para un área de .05 de una cola. El applet de la figura 10.3 muestra $t = 2.02$ que es correcta a dos lugares decimales. Usaremos este applet para los ejercicios de Mi Applet al final del capítulo.

FIGURA 10.3
Applet Student's *t* Probabilities

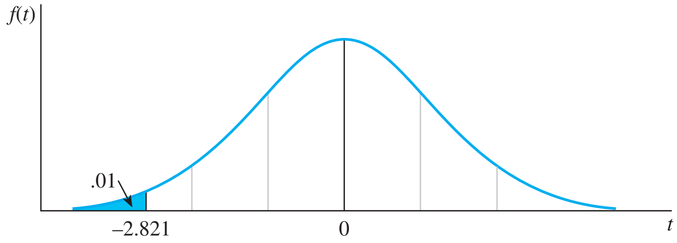


EJEMPLO 10.2

Supongamos que usted tiene una muestra de tamaño $n = 10$ de una distribución normal. Encuentre un valor de t tal que sólo 1% de todos los valores de t sea más pequeño.

Solución Los grados de libertad que especifican la distribución t correcta son $df = n - 1 = 9$, y el valor t necesario debe estar en la parte inferior de la distribución, con área .01 a su izquierda, como se ve en la figura 10.4. Como la distribución t es simétrica alrededor de 0, este valor es simplemente el negativo del valor en el lado derecho con área .01 a su derecha, o $-t_{.01} = -2.821$.

FIGURA 10.4
Distribución *t* para el ejemplo 10.2

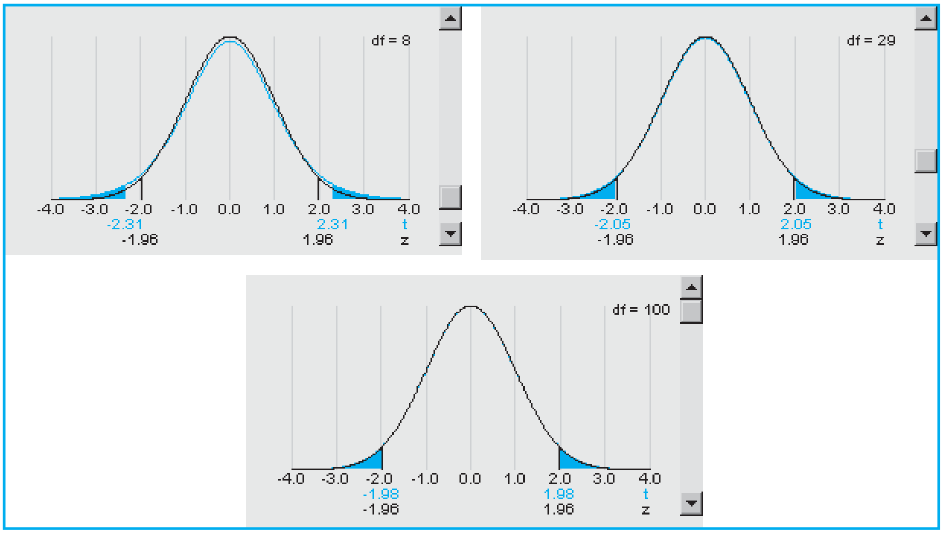


MI APPLET

Comparación de las distribuciones *t* y *z*

Vea una de las columnas de la tabla 10.1. Cuando aumentan los grados de libertad, el valor crítico de t disminuye hasta que, con df = inf., el valor t crítico es igual al valor z crítico para la misma área de cola. Se puede usar el applet **(Comparing *t* and *z*)** para visualizar este concepto. Vea los tres applets de la figura 10.5, que muestran los valores críticos para $t_{.025}$ en comparación con $z_{.025}$ para df = 8 29 y 100. (El cursor del lado derecho del applet permite cambiar el df.) La curva roja (negra en la figura 10.5) es la distribución normal estándar, con $z_{.025} = 1.96$.

FIGURA 10.5
Applet Comparing *t* and *z*



La curva azul es la distribución t. Con 8 grados de libertad, claramente se puede ver una diferencia en las curvas t y z, en especial en los valores críticos que cortan un área de .025 en las colas. Cuando aumentan los grados de libertad, la diferencia en las formas de t y z se hace muy similar, al igual que sus valores críticos, hasta que en $df = 100$ casi no hay diferencia. Esto ayuda a explicar por qué usamos $n = 30$ como línea divisoria un tanto arbitraria entre muestras grandes y pequeñas. Cuando $n = 30$ ($df = 29$), los valores críticos de t son bastante cercanos a sus similares normales. Más que producir una tabla t con filas para muchos más grados de libertad, los valores críticos de z son suficientes cuando el tamaño muestral llega a $n = 30$.

Suposiciones tras la distribución *t* de Student

Los valores críticos de t permiten hacer inferencias confiables *sólo si* el experimentador sigue todas las reglas; esto es, su muestra debe satisfacer estos requisitos especificados por la distribución t:

- La muestra debe ser seleccionada al azar.
- La población de la que haga muestreo debe estar normalmente distribuida.

MI CONSEJO

Suposiciones para *t* de una muestra:

- Muestra aleatoria
- Distribución normal

Estos requisitos pueden parecer bastante restrictivos. ¿Cómo puede posiblemente saberse la forma de la distribución de probabilidad para toda la población si sólo se tiene una muestra? Pero, si éste fuera un problema serio, el estadístico t podría usarse en sólo situaciones muy limitadas. Por fortuna, la forma de la distribución t no es afectada en mucho mientras la población muestreada tenga una distribución *aproximadamente en forma de montículo.* Los estadísticos dicen que el estadístico t es **robusto**, lo cual significa que la distribución de la estadística no cambia de manera significativa cuando se viola la suposición de normalidad.

¿Cómo se puede saber si la muestra es de una población normal? Aun cuando hay procedimientos estadísticos diseñados para este fin, la forma más fácil y rápida de verificar la normalidad es usar las técnicas gráficas del capítulo 2: Trazar una gráfica de puntos o construir una gráfica de tallo y hoja. Mientras esta gráfica tienda a "hacerse montículo" en el centro, se puede estar razonablemente seguro al usar la estadística t para hacer inferencias.

El requisito de muestreo aleatorio, por otra parte, es bastante crítico si se desea producir inferencias confiables. Si la muestra no es aleatoria, o si no se *comporta al menos como* muestra aleatoria, entonces los resultados de su muestra pueden ser afectados por algún factor desconocido y las conclusiones pueden ser incorrectas. Cuando diseñe un experimento o lea acerca de experimentos realizados por otros investigadores, vea de manera crítica la forma en que los datos han sido recolectados.

10.3 INFERENCIAS DE MUESTRA PEQUEÑA RESPECTO A UNA MEDIA POBLACIONAL

Al igual que con una inferencia de muestra grande, una inferencia de muestra pequeña puede comprender ya sea **estimación** o **prueba de hipótesis**, dependiendo de la preferencia del experimentador. En capítulos previos explicamos los aspectos básicos de estos dos tipos de inferencia y los usamos de nuevo ahora con una estadística muestral diferente, $t = (\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$, y una distribución de muestreo diferente, la t de Student, con $(n - 1)$ grados de libertad.

PRUEBA DE HIPÓTESIS DE MUESTRA PEQUEÑA PARA μ

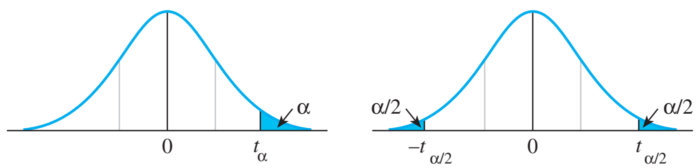
1. Hipótesis nula: $H_0 : \mu = \mu_0$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \mu > \mu_0$	$H_a : \mu \neq \mu_0$
(o, $H_a : \mu < \mu_0$)	

3. Estadístico de prueba: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$t > t_\alpha$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$
(o $t < -t_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa es $H_a : \mu < \mu_0$)	

o cuando el valor $p < \alpha$



Los valores críticos de t, t_α y $t_{\alpha/2}$ están basados en $(n - 1)$ grados de libertad. Estos valores tabulados se pueden hallar usando la tabla 4 del apéndice I o el applet **Student's *t* Probabilities**.

Suposición: La muestra se selecciona al azar de una población normalmente distribuida.

INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA PEQUEÑA $(1 - \alpha)100\%$ PARA μ

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

donde $s/\sqrt{n}$ es el error estándar estimado de $\bar{x}$, a veces conocido como **error estándar de la media**.

EJEMPLO 10.3

Un nuevo proceso para producir diamantes sintéticos puede ser operado a un nivel rentable sólo si el peso promedio de éstos es mayor a .5 quilates. Para evaluar la rentabilidad del proceso, se generan seis diamantes que registran pesos de .46, .61, .52, .48, .57 y .54 quilates. ¿Estas seis mediciones presentan suficiente evidencia para indicar que el peso promedio de los diamantes producidos por el proceso es más de .5 quilates?

Solución La población de pesos de diamantes producidos por este nuevo proceso tiene media μ, y se puede empezar la prueba formal de hipótesis en pasos, como se hizo en el capítulo 9:

1–2 **Hipótesis nula y alternativa:**

H_0: $\mu = .5$ contra H_a: $\mu > .5$

3 **Estadístico de prueba:** Usted puede usar su calculadora para verificar que la media y desviación estándar para los pesos de los seis diamantes son .53 y .0559, respectivamente. El estadístico de prueba es un estadístico t, calculado como

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{.53 - .5}{.0559/\sqrt{6}} = 1.32$$

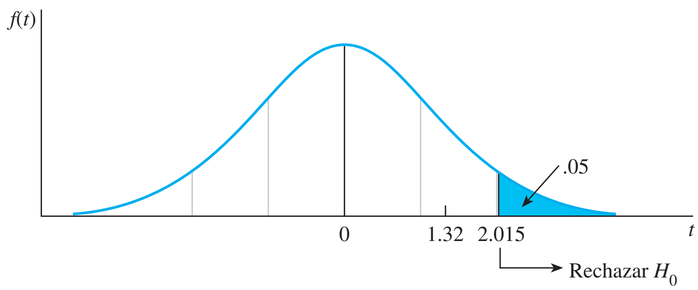
Al igual que con las pruebas de muestra grande, el estadístico de prueba da evidencia para rechazar o aceptar H_0 dependiendo de qué tan lejos se encuentra del centro de la distribución t.

4 **Región de rechazo:** Si se escoge un nivel de significancia de 5% ($\alpha = .05$), la región de rechazo de cola derecha se encuentra usando los valores críticos de t de la tabla 4 del apéndice I. Con $df = n - 1 = 5$, se puede rechazar H_0 si $t > t_{.05} = 2.015$, como se ve en la figura 10.6.

5 **Conclusión:** Como el valor calculado del estadístico de prueba, 1.32, no cae en la región de rechazo, no se puede rechazar H_0. Los datos no presentan suficiente evidencia para indicar que el peso medio de los diamantes exceda de .5 quilates.

FIGURA 10.6

Región de rechazo para el ejemplo 10.3



MI CONSEJO

Un intervalo de confianza de 95% nos dice que, si fuéramos a construir muchos de estos intervalos (todos los cuales tendrían puntos extremos ligeramente diferentes), 95% de ellos rodearían a la media poblacional.

Al igual que en el capítulo 9, la conclusión para *aceptar* H_0 requeriría el difícil cálculo de β, la probabilidad de un error tipo II. Para evitar este problema, escogemos *no rechazar* H_0. Podemos entonces calcular el límite inferior para μ usando un límite inferior de confianza de un lado y muestra pequeña. Este límite es similar al límite de confianza de un lado y muestra grande, excepto que la z_α crítica es sustituida por una t_α crítica de la tabla 4. Para este ejemplo, un límite inferior de confianza de un lado para μ es:

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$.53 - 2.015 \frac{.0559}{\sqrt{6}}$$

$$.53 - .046$$

El límite inferior de 95% para μ es $\mu > .484$. El rango de posibles valores incluye pesos medios de diamantes tanto menores como mayores a .5; esto confirma el fracaso de nuestra prueba para demostrar que μ excede de .5.

Recuerde del capítulo 9 que hay dos formas de efectuar una prueba de hipótesis:

- **El método del valor crítico:** Proponga una región de rechazo basada en los valores críticos de la distribución muestral de la estadística. Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se puede rechazar H_0.
- **El método del valor *p*:** Calcule el valor p con base en el valor observado de la estadística de prueba. Si el valor p es menor que el nivel de significancia, α, se puede rechazar H_0. Si no hay nivel de significancia *preestablecido*, use las guías de la sección 9.3 para juzgar la significancia estadística de sus resultados muestrales.

Usamos el primer método en la solución del ejemplo 10.3 y el segundo método para resolver el ejemplo 10.4.

EJEMPLO 10.4

Las leyendas en latas de 1 galón de pintura por lo general indican el tiempo de secado y el área que puede cubrirse con una capa. Casi todas las marcas de pintura indican que, en una capa, 1 galón cubrirá entre 250 y 500 pies cuadrados, dependiendo de la textura de la superficie a pintarse. Un fabricante, sin embargo, dice que 1 galón de su pintura cubrirá 400 pies cuadrados de área superficial. Para probar su dicho, una muestra aleatoria de 10 latas de 1 galón de pintura blanca se empleó para pintar 10 áreas idénticas usando la misma clase de equipo. Las áreas reales (en pies cuadrados) cubiertas por estos 10 galones de pintura se dan a continuación:

310	311	412	368	447
376	303	410	365	350

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la cobertura promedio difiere de 400 pies cuadrados? Encuentre el valor p para la prueba y úselo para evaluar la significancia estadística de los resultados.

MI CONSEJO

Recuerde del capítulo 2 cómo calcular $\bar{x}$ y s usando el método de entrada de datos en su calculadora.

Solución Para probar el dicho, las hipótesis a probarse son

$$H_0 : \mu = 400 \quad \text{contra} \quad H_a : \mu \neq 400$$

La media muestral y desviación estándar para los datos registrados son

$$\bar{x} = 365.2 \qquad s = 48.417$$

y el estadístico de prueba es

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{365.2 - 400}{48.417/\sqrt{10}} = -2.27$$

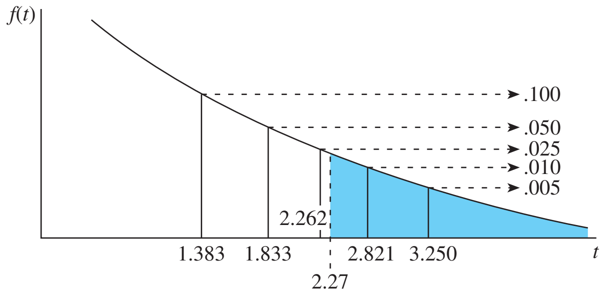
El valor p para esta prueba es la probabilidad de observar un valor de la estadística t como contradictorio a la hipótesis nula como el observado para este conjunto de datos, es decir, $t = -2.27$. Como ésta es una prueba de dos colas, el valor p es la probabilidad de que $t \leq -2.27$ o $t \geq 2.27$.

A diferencia de la tabla z, la tabla para t da los valores de t correspondientes a áreas de cola superior iguales a .100, .050, .025, .010 y .005. En consecuencia, sólo se puede aproximar el área de cola superior que corresponda a la probabilidad de que $t > 2.27$. Como el estadístico t para esta prueba está basada en 9 *df*, nos referimos a la fila correspondiente a $df = 9$ de la tabla 4. Los cinco valores críticos para varias áreas de cola se muestran en la figura 10.7, un agrandamiento de la cola de la distribución t con 9 grados de libertad. El valor $t = 2.27$ cae entre $t_{.025} = 2.262$ y $t_{.010} = 2.821$. Por tanto, el área de cola derecha correspondiente a la probabilidad de que $t > 2.27$ está entre .01 y .025. Como esta área representa sólo la mitad del valor p, se puede escribir

$$.01 < \frac{1}{2}(\text{valor } p) < .025 \quad \text{o} \quad .02 < \text{valor } p < .05$$

FIGURA 10.7

Cálculo del valor p para el ejemplo 10.4 (área sombreada $= \frac{1}{2}$ valor p)



¿Qué nos dice esto acerca de la significancia de los resultados estadísticos? Para rechazar H_0, el valor p debe ser menor al nivel de significancia especificado, α. En consecuencia, podría rechazarse H_0 al nivel de 5% pero no al nivel de 2% o 1%. Por tanto, el valor p para esta prueba por lo general sería informado por el experimentador como

$$\text{valor } p < .05 \qquad (\text{o a veces } P < .05)$$

Para esta prueba de hipótesis, H_0 es rechazada al nivel de significancia de 5%. Hay suficiente evidencia para indicar que la cobertura promedio difiere de 400 pies cuadrados.

¿Dentro de qué límites *realmente* cae este promedio de cobertura? Un intervalo de confianza de 95% da los límites superior e inferior para μ como

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$365.2 \pm 2.262\left(\frac{48.417}{\sqrt{10}}\right)$$

$$365.2 \pm 34.63$$

Entonces, se puede estimar que el promedio de área cubierta por 1 galón de esta marca de pintura está en el intervalo 330.6 a 399.8. Una estimación más precisa del intervalo (un intervalo más corto) puede obtenerse por lo general al aumentar el tamaño muestral. Observe que el límite superior de este intervalo es muy cercano al valor de 400 pies cuadrados, que es la cobertura marcada en la leyenda de la lata. Esto coincide con el hecho de que el valor observado de $t = -2.27$ es sólo ligeramente menor que el valor crítico de cola izquierda de $t_{.025} = -2.262$, haciendo que el valor p sea sólo ligeramente menor a .05.

Casi todos los paquetes de estadística para computadoras contienen programas que ponen en práctica la prueba t de Student o construyen un intervalo de confianza para μ cuando los datos se introducen correctamente en la base de datos de la computadora. Casi todos estos programas calcularán e indicarán el *valor p exacto* de la prueba, lo cual permite en forma rápida y precisa sacar conclusiones acerca de la significancia estadística de los resultados. Los resultados del *MINITAB* de prueba t de una muestra y de procedimientos de intervalo de confianza se dan en la figura 10.8. Además del valor observado de $t = -2.27$ y el intervalo de confianza (330.6, 399.8), la salida da la media muestral, la desviación muestral estándar, el error estándar la media (media de error estándar $= s/\sqrt{n}$), y el valor p exacto de la prueba (P = .049). Esto es consistente con el rango para el valor p que encontramos usando la tabla 4 del apéndice I:

$$.02 < \text{valor } p < .05$$

FIGURA 10.8
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 10.4

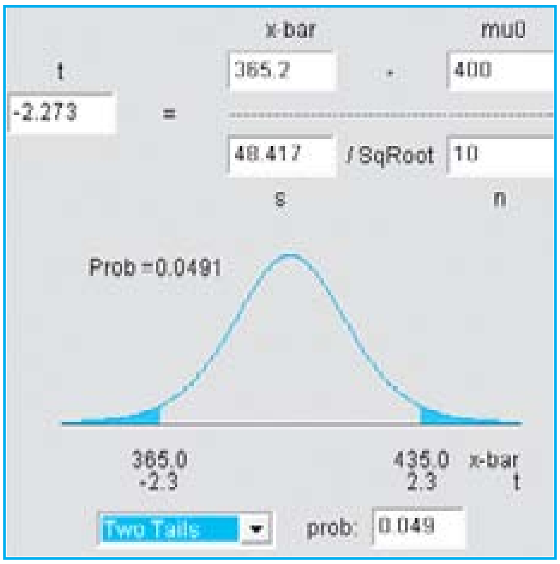
T de una muestra: Área

```
Test of mu = 400  vs  not = 400

Variable        N     Mean       StDev        SE Mean
Area           10    365.2        48.4           15.3

Variable         95% CI                  T          P
Area        (330.6, 399.8)            -2.27      0.049
```

MI APPLET

Puede usarse el applet **Small Sample Test of a Population Mean (Prueba de muestra pequeña de una media poblacional)** para visualizar los valores p para pruebas de una o de dos colas de la media poblacional μ. El procedimiento sigue el mismo patrón que con applets previos. El usuario introduce los valores de $\bar{x}$, n y s y presiona "Enter" después de cada entrada; el applet calculará t y dará la opción de escoger valores p de una o de dos colas (*Área a la Izquierda*, *Área a la Derecha* o *Dos Colas*), así como área *Central* que el usuario no necesitará.

FIGURA 10.9
Applet Small Sample Test of a Population Mean



Para los datos del ejemplo 10.4, el valor p es el área de dos colas a la derecha de $t = 2.273$ y a la izquierda de $t = -2.273$. ¿Puede hallarse este mismo valor p en la salida impresa *MINITAB* de la figura 10.9?

Se puede ver el valor de usar la salida impresa de computadora o el applet Java para evaluar resultados estadísticos:

- El valor p exacto elimina la necesidad de tablas y valores críticos.
- Todos los cálculos numéricos son hechos por el usuario.

El trabajo más importante, que se deja al experimentador, es *interpretar* los resultados en términos de su ¡significancia práctica!

10.3 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

10.1 Encuentre los siguientes valores t en la tabla 4 del apéndice I:

a. $t_{.05}$ para 5 df **b.** $t_{.025}$ para 8 df

c. $t_{.10}$ para 18 df **d.** $t_{.025}$ para 30 df

10.2 Encuentre el (los) valor(es) crítico(s) de t que especifiquen la región de rechazo en estas situaciones:

a. Una prueba de dos colas con $\alpha = .01$ y 12 df.

b. Una prueba de cola derecha con $\alpha = .05$ y 16 df.

c. Una prueba de dos colas con $\alpha = .05$ y 25 df.

d. Una prueba de cola izquierda con $\alpha = .01$ y 7 df.

10.3 Use la tabla 4 del apéndice I para aproximar el valor p para la estadística t en cada situación:

a. Una prueba de dos colas con $t = 2.43$ y 12 df.

b. Una prueba de cola derecha con $t = 3.21$ y 16 df.

c. Una prueba de dos colas con $t = -1.19$ y 25 df.

d. Una prueba de cola izquierda con $t = -8.77$ y 7 df.

MIS DATOS EX1004

10.4 Calificaciones de examen Las calificaciones en un examen de 100 puntos, registradas para 20 estudiantes:

71	93	91	86	75
73	86	82	76	57
84	89	67	62	72
77	68	65	75	84

a. ¿Puede usted suponer razonablemente que estas calificaciones de examen han sido seleccionadas de una población normal?

b. Calcule la media y desviación estándar de las calificaciones.

c. Si estos estudiantes pueden ser considerados como muestra aleatoria de la población de todos los estudiantes, encuentre un intervalo de confianza de 95% para el promedio de calificaciones de examen de la población.

10.5 Las siguientes $n = 10$ observaciones son una muestra de una población normal:

7.4	7.1	6.5	7.5	7.6	6.3	6.9	7.7	6.5	7.0

a. Encuentre la media y desviación estándar de estos datos.

b. Encuentre un límite superior de confianza de una cola, de 99%, para la media poblacional μ.

c. Pruebe $H_0 : \mu = 7.5$ contra $H_a : \mu < 7.5$. Use $\alpha = .01$.

d. ¿Los resultados del inciso b) apoyan sus conclusiones del inciso c)?

APLICACIONES

MIS DATOS EX1006

10.6 Atunes ¿Hay diferencia en los precios del atún, dependiendo del método de empaque? *Consumer Reports* da el precio promedio estimado para una lata de 6 onzas o bolsa de 7.06 onzas de atún, con base en precios pagados a nivel nacional en supermercados.[1] Estos precios están registrados para varias marcas diferentes de atún.

Atún claro en agua		Atún blanco en aceite	Atún blanco en agua	Atún claro en aceite	
.99	.53	1.27	1.49	2.56	.62
1.92	1.41	1.22	1.29	1.92	.66
1.23	1.12	1.19	1.27	1.30	62
.85	.63	1.22	1.35	1.79	.65
.65	.67		1.29	1.23	.60
.69	.60		1.00		.67
.60	.66		1.27		
			1.28		

Fuente: Estudio práctico "Pricing of Tuna" Copyright 2001 por Consumers Union of U.S.Inc., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de junio de 2001 de Consumer Report® sólo con fines educativos. No se permite uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

Suponga que las marcas de atún incluidas en este estudio representan una muestra aleatoria de todas las marcas de atún disponibles en Estados Unidos.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para el precio promedio para atún claro en agua. Interprete este intervalo. Esto es, ¿a qué se refiere ese "95%"?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para el precio promedio del atún blanco en aceite. ¿Cómo se compara el ancho de este intervalo con el ancho del intervalo del inciso a)? ¿Puede explicar por qué?

c. Encuentre intervalos de confianza de 95% para las otras dos muestras (atún blanco en agua y atún claro en aceite). Grafique las cuatro medias de tratamiento y sus errores estándar en una gráfica bidimensional semejante a la figura 8.5. ¿Qué clase de comparaciones generales pueden hacerse acerca de los cuatro tratamientos? (Analizaremos el procedimiento para comparar más de dos medias poblacionales en el capítulo 11.)

10.7 Contenido de O_2 disuelto Los desechos industriales y residuales descargados en nuestros ríos y arroyos absorben oxígeno y, por tanto, reducen la cantidad de oxígeno disuelto disponible para peces y otras formas de fauna acuática. Una agencia estatal requiere un mínimo de 5 partes por millón (ppm) de oxígeno disuelto para que el contenido de oxígeno sea suficiente para sostener vida acuática. Seis especímenes de agua tomados de un río en un lugar específico durante la estación de aguas bajas (julio) dio lecturas de 4.9, 5.1, 4.9, 5.0, 5.0 y 4.7 de oxígeno disuelto. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el contenido de oxígeno disuelto es menor a 5 ppm? Pruebe usando $\alpha = .05$.

10.8 Langostas En un estudio de la infestación de la langosta *Thenus orientalis* por dos tipos de lapas, *Octolasmis tridens* y *O. lowei*, se midieron las longitudes del caparazón (en milímetros) de 10 langostas seleccionadas al azar pescadas en los mares cerca de Singapur:[2]

78	66	65	63	60	60	58	56	52	50

Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la longitud media del caparazón de langostas *T. orientalis*.

MIS DATOS EX1009

10.9 Fumar y capacidad pulmonar Es un hecho reconocido que fumar tiene un efecto deletéreo en la función pulmonar. En un estudio del efecto de fumar sobre la capacidad de difusión de monóxido de carbono (DL) del pulmón, unos investigadores encontraron que los fumadores actuales tenían lecturas de DL considerablemente más bajas que otros que habían sido fumadores o que son no fumadores. Las capacidades de difusión de monóxido de carbono para una muestra aleatoria de $n = 20$ fumadores actuales aparecen a continuación:

103.768	88.602	73.003	123.086	91.052
92.295	61.675	90.677	84.023	76.014
100.615	88.017	71.210	82.115	89.222
102.754	108.579	73.154	106.755	90.479

a. ¿Estos datos indican que la lectura media de DL para fumadores actuales es considerablemente más baja que 100 DL, que es el promedio para no fumadores? Use $\alpha = .01$.

b. Encuentre un límite superior de confianza de una cola de 99% para la lectura media de DL para fumadores actuales. ¿Este límite confirma las conclusiones del inciso a)?

MIS DATOS EX1010

10.10 Brett Favre En el ejercicio 2.36 (EX0236), el número de pases completos por Brett Favre, mariscal de campo de los Empacadores de Green Bay, fue registrado para cada uno de los 16 juegos regulares de la temperada en el verano de 2006 (ESPN.com).[3]

15	31	25	22	22	19
17	28	24	5	22	24
22	20	26	21		

a. Una gráfica de tallo y hoja de las $n = 16$ observaciones se muestra a continuación:

Gráfica de tallo y hoja: Favre

```
Stem-and-leaf of Favre  N  = 16
Leaf Unit = 1.0
LO 5
 2   1  5
 3   1  7
 4   1  9
 6   2  01
(4)  2  2222
 6   2  445
 3   2  6
 2   2  8
 1   3  1
```

Con base en esta gráfica, ¿es razonable suponer que la población original es aproximadamente normal, como se requiere para la prueba *t* de una muestra? Explique.

b. Calcule la media y desviación estándar para los pases completos por juego de Brett Favre.

c. Construya un intervalo de confianza de 95% para estimar los pases completos por juego de Brett Favre.

10.11 Purificación de un compuesto orgánico Es frecuente que químicos orgánicos purifiquen compuestos orgánicos por un método conocido como cristalización fraccional. Un experimentador deseaba preparar y purificar 4.85 gramos (g) de anilina. Diez cantidades de anilina de 4.85 g fueron preparadas y purificadas individualmente a acetanilido. Se registraron los siguientes rendimientos en seco:

3.85	3.80	3.88	3.85	3.90
3.36	3.62	4.01	3.72	3.82

Estime la cantidad media en gramos de acetanilido que pueda ser recuperada de una cantidad inicial de 4.85 g de anilina. Use un intervalo de confianza de 95%.

10.12 Compuestos orgánicos, continúa Consulte el ejercicio 10.11. ¿Aproximadamente cuántos especímenes de 4.85 g de anilina se requieren, si se desea estimar el número medio de gramos de acetanilido correcto a no más de .06 g con probabilidad igual a .95?

10.13 Bulimia Aun cuando hay muchos tratamientos para la bulimia nerviosa, algunas personas no se benefician del tratamiento. En un estudio para determinar qué factores pronostican quién se beneficiará del tratamiento, un artículo en el *British Journal of Clinical Psychology* indica que la autoestima es uno de estos importantes pronosticadores.[4] La tabla siguiente da la media y desviación estándar de calificaciones de autoestima para tratamiento, después del tratamiento y durante un seguimiento:

	Antes del trat.	Después del trat.	Seguimiento
Media muestral $\bar{x}$	20.3	26.6	27.7
Desviación estándar s	5.0	7.4	8.2
Tamaño muestral n	21	21	20

a. Use una prueba de hipótesis para determinar si hay suficiente evidencia para concluir que la media verdadera de tratamiento es menor a 25.

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la media verdadera después de tratamiento.

c. En la sección 10.4, introduciremos técnicas de muestra pequeña para hacer inferencias acerca de la diferencia entre dos medias poblacionales. Sin la formalidad de una prueba estadística, ¿qué está usted dispuesto a concluir acerca de las diferencias entre las tres medias poblacionales muestreadas representadas por los resultados de la tabla?

MIS DATOS EX1014 **10.14 Cantidades de RBC** A continuación veamos las cantidades de células rojas sanguíneas (en 10^6 células por microlitro) de una persona sana, medidas en cada uno de 15 días:

5.4	5.2	5.0	5.2	5.5
5.3	5.4	5.2	5.1	5.3
5.3	4.9	5.4	5.2	5.2

Encuentre una estimación de μ del intervalo de confianza de 95%, la verdadera cantidad media de células rojas sanguíneas durante el periodo de prueba.

MIS DATOS EX1015 **10.15 Carne para hamburguesa** Estos datos son los pesos (en libras) de 27 paquetes de carne molida en un exhibidor de carnes de un supermercado:

1.08	.99	.97	1.18	1.41	1.28	.83
1.06	1.14	1.38	.75	.96	1.08	.87
.89	.89	.96	1.12	1.12	.93	1.24
.89	.98	1.14	.92	1.18	1.17	

a. Interprete las salidas impresas siguientes del *MINITAB* para los procedimientos de prueba de una muestra y de estimación.

Salidas impresas del *MINITAB* para el ejercicio 10.15

T de una muestra: Peso

```
Test of mu = 1  vs  not = 1

Variable       N        Mean    StDev   SE Mean
Weight        27      1.0522   0.1657    0.0319

Variable              95% CI              T        P
Weight        (0.9867, 1.1178)         1.64    0.113
```

b. Verifique los valores calculados de t y los límites de confianza superiores e inferiores.

MIS DATOS EX1016 **10.16 Colesterol** A continuación aparecen los niveles de colesterol seroso de 50 personas seleccionadas al azar de entre los datos del L.A. Heart Data, de un estudio epidemiológico de enfermedades del corazón en empleados del condado de Los Ángeles.[5]

148	304	300	240	368	139	203	249	265	229
303	315	174	209	253	169	170	254	212	255
262	284	275	229	261	239	254	222	273	299
278	227	220	260	221	247	178	204	250	256
305	225	306	184	242	282	311	271	276	248

a. Construya un histograma para los datos. ¿Los datos tienen forma de montículo?

b. Use una distribución t para construir un intervalo de confianza de 95% para los niveles promedio de colesterol seroso para empleados del condado de Los Ángeles.

10.17 Colesterol, continúa Consulte el ejercicio 10.16. Como $n > 30$, use los métodos del capítulo 8 para crear un intervalo de confianza de 95% de muestra grande para el nivel promedio de colesterol seroso para empleados del condado de Los Ángeles. Compare los dos intervalos. (SUGERENCIA: Los dos intervalos deben ser muy semejantes. Ésta es la razón por la que escogimos aproximar la distribución muestral de $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ con una distribución z cuando $n > 30$.)

10.4 INFERENCIAS DE MUESTRA PEQUEÑA PARA LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS POBLACIONALES: MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES

El escenario físico para el problema considerado en esta sección es el mismo que el de la sección 8.6, excepto que los tamaños muestrales ya no son grandes. Muestras aleatorias independientes de n_1 y n_2 mediciones se sacan de dos poblaciones, con medias y varianzas μ_1, σ_1^2, μ_2 y σ_2^2, y el objetivo del experimentador es hacer inferencias acerca de $(\mu_1 - \mu_2)$, la diferencia entre las dos medias poblacionales.

Cuando los tamaños muestrales son pequeños, ya no se puede confiar en el teorema del límite central para asegurar que las medias muestrales sean normales, pero, si las poblaciones originales *son normales*, entonces la distribución muestral de la diferencia en las medias muestrales, $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, será normal (incluso para muestras pequeñas) con media $(\mu_1 - \mu_2)$ y error estándar

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

MI CONSEJO

Suposiciones para la prueba t de dos muestras (independiente):

- Muestras aleatorias independientes
- Distribuciones normales
- $\sigma_1 = \sigma_2$

En los capítulos 7 y 8 empleamos las varianzas muestrales, s_1^2 y s_2^2, para calcular una *estimación* del error estándar, que entonces se utilizó para formar un intervalo de confianza de muestra grande o una prueba de hipótesis basada en el estadístico z de muestras grandes:

$$z \approx \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

Desafortunadamente, cuando los tamaños muestrales son pequeños, este estadístico no tiene una distribución aproximadamente normal ni tiene una distribución t de Student. Para formar una estadística con una distribución de muestreo que pueda deducirse en forma teórica, es necesario hacer una suposición más.

Suponga que la variabilidad de la medición en las dos poblaciones normales es la misma y puede ser medida por una varianza común σ^2. Esto es, *ambas poblaciones tienen exactamente la misma forma*, y $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Entonces el error estándar de la diferencia en las dos medias muestrales es

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Se puede demostrar matemáticamente que, si se usa la estimación muestral apropiada s^2 para la varianza poblacional σ^2, entonces el estadístico de prueba resultante,

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

tiene una *distribución t de Student.* El único problema restante es hallar la estimación muestral s^2 y el número apropiado de *grados de libertad* para el estadístico t.

Recuerde que la varianza poblacional σ^2 describe la forma de las distribuciones normales de donde provienen las muestras del experimentador, de modo que s_1^2 o s_2^2 le darían una estimación de σ^2. Pero, ¿por qué usar sólo una cuando ambas dan información? Un mejor procedimiento es combinar la información en ambas varianzas muestrales usando un *promedio ponderado*, en el que los pesos están determinados por la cantidad relativa de información (el número de mediciones) en cada muestra. Por ejemplo, si la primera muestra contenía el doble de mediciones que la segunda, se podría considerar dar a la primera varianza muestral el doble de peso. Para obtener este resultado, use esta fórmula:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Recuerde de la sección 10.3 que los grados de libertad para el estadístico t de una muestra son $(n - 1)$, el denominador de la estimación muestral s^2. Como s_1^2 tiene $(n_1 - 1)$ *df* y s_2^2 tiene $(n_2 - 1)$ *df*, el número total de grados de libertad es la suma

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$$

que se ve en el denominador de la fórmula para s^2.

CÁLCULO DE s^2

- Si dispone de una calculadora científica, calcule cada una de las dos desviaciones estándar muestrales s_1 y s_2 por separado, usando el procedimiento de entrada de datos para su calculadora particular. Estos valores son elevados al cuadrado y se usan en esta fórmula:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

MI CONSEJO

Para la prueba *t* de dos muestras independientes $df = n_1 + n_2 - 2$.

Se puede demostrar que s^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional común σ^2. Si s^2 se usa para estimar σ^2 y si las muestras se han sacado al azar e independientemente de poblaciones normales con una varianza común, entonces el estadístico

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

tiene una distribución t de Student con $(n_1 + n_2 - 2)$ grados de libertad. La estimación de muestra pequeña y procedimientos de prueba para la diferencia entre dos medias se dan a continuación.

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO A LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS: MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES

1. La hipótesis nula: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$, donde D_0 es alguna diferencia especificada que el experimentador desea probar. Para numerosas pruebas, el experimentador hará una hipótesis de que no hay diferencia entre μ_1 y μ_2; esto es, $D_0 = 0$.
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$ [o $H_a : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$]	$H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$

3. Estadístico de prueba: $t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ donde

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

4. Región de rechazo: rechace H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$t > t_\alpha$ [o $t < -t_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa es $H_a : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$]	

o cuando valor $p < \alpha$

(continúa)

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO A LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS: MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES *(continúa)*

Los valores críticos de t, t_α y $t_{\alpha/2}$ están basados en $(n_1 + n_2 - 2)$ *df*. Los valores tabulados se pueden hallar usando la tabla 4 del apéndice I o el applet **Student's *t* Probabilities**.

Suposiciones: Las muestras se seleccionan al azar y en forma independiente de poblaciones distribuidas normalmente. Las varianzas de las poblaciones σ_1^2 y σ_2^2 son iguales.

INTERVALO DE CONFIANZA $(1 - \alpha)100\%$ DE MUESTRA PEQUEÑA PARA $(\mu_1 - \mu_2)$ CON BASE EN MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

donde s^2 es la estimación agrupada de σ^2.

EJEMPLO 10.5

Puede tomarse un curso con crédito ya sea asistiendo a sesiones de clases en horas y días fijos, o haciendo sesiones en línea que el estudiante puede hacer a su propio paso y en los tiempos que el estudiante escoja. El coordinador del curso desea determinar si estos dos días de tomar el curso resultaron en una diferencia significativa en rendimiento medido por el examen final para el curso. La siguiente información da las calificaciones en un examen con 45 puntos posibles para un grupo de $n_1 = 9$ estudiantes que tomaron el curso en línea y un segundo grupo de $n_2 = 9$ estudiantes que tomaron el curso de clases convencionales. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para indicar que las calificaciones para estudiantes que tomaron el curso en línea son significativamente más altas que las de quienes asistieron a una clase convencional?

TABLA 10.2 Calificaciones de examen para presentaciones en línea y en salón de clase

En línea	Salón de clase
32	35
37	31
35	29
28	25
41	34
44	40
35	27
31	32
34	31

Solución Sean μ_1 y μ_2 las calificaciones medias para el grupo en línea y el grupo del salón de clase, respectivamente. Entonces, como se busca evidencia para apoyar la teoría de que $\mu_1 > \mu_2$, se puede probar la hipótesis nula

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad [\text{o } H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0]$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad [\text{o } H_a : (\mu_1 - \mu_2) > 0]$$

Para efectuar la prueba t para estas dos muestras independientes, se debe suponer que las poblaciones muestreadas son normales y tienen la misma varianza σ^2. ¿Es esto razonable? Las gráficas de tallo y hoja de la figura 10.10 muestran al menos un patrón de "montículo", de modo que la suposición de normalidad no es irracional.

FIGURA 10.10
Gráficas de tallo y hoja para el ejemplo 10.5

En línea		Salón de clase	
2	8	2	579
3	124	3	1124
3	557	3	5
4	14	4	0

Además, las desviaciones estándar de las dos muestras, calculadas como

$$s_1 = 4.9441 \quad \text{y} \quad s_2 = 4.4752$$

MI CONSEJO
Las gráficas de tallo y hoja pueden ayudar a decidir si la suposición de normalidad es razonable.

no son diferentes lo suficiente para que dudemos de que las dos distribuciones pueden tener la misma forma. Si se hacen estas dos suposiciones y se calcula (usando precisión total) la estimación agrupada de la varianza común como

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{8(4.9441)^2 + 8(4.4752)^2}{9 + 9 - 2} = 22.2361$$

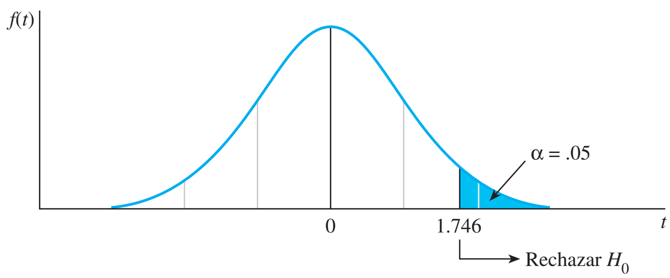
se puede calcular entonces el estadístico de prueba,

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{35.22 - 31.56}{\sqrt{22.2361\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)}} = 1.65$$

MI CONSEJO
Si usa calculadora, no redondee sino hasta el paso final.

La hipótesis alternativa $H_a : \mu_1 > \mu_2$ o, lo que es equivalente, $H_a : (\mu_1 - \mu_2) > 0$ implica que el experimentador debe usar una prueba de una cola en la cola superior de la distribución t con $(n_1 + n_2 - 2) = 16$ grados de libertad. Se puede hallar el valor crítico apropiado para una región de rechazo con $\alpha = .05$ en la tabla 4 del apéndice I, y H_0 será rechazada si $t > 1.746$. Comparando el valor observado del estadístico de prueba $t = 1.65$ con el valor crítico $t_{.05} = 1.746$, no se puede rechazar la hipótesis nula (véase la figura 10.11). Hay insuficiente evidencia para indicar que las calificaciones del curso en línea sean más altas que las calificaciones del curso convencional al nivel de significancia de 5%.

FIGURA 10.11
Región de rechazo para el ejemplo 10.5



EJEMPLO 10.6

Encuentre el valor p que sería reportado para la prueba estadística del ejemplo 10.5.

Solución El valor observado de t para esta prueba de una cola es $t = 1.65$. Por tanto,

$$\text{valor } p = P(t > 1.65)$$

para un estadístico t con 16 grados de libertad. Recuerde que no se puede obtener esta probabilidad directamente de la tabla 4 del apéndice I; sólo se puede *limitar* el valor p usando los valores críticos de la tabla. Como el valor observado, $t = 1.65$, está entre $t_{.100} = 1.337$ y $t_{.050} = 1.746$, el área de cola a la derecha de 1.65 está entre .05 y .10. El valor p para esta prueba se informaría como

$$.05 < \text{valor } p < .10$$

Como el valor p es mayor a .05, casi todos los investigadores informarían los resultados como *no significativos*.

MI APPLET

Se puede usar el applet **Two-Sample *t*-Test: Independent Samples (Prueba *t* para dos muestras: Muestras independientes)**, que se ve en la figura 10.12, para visualizar los valores p para pruebas ya sea de una o de dos colas de la diferencia entre dos medias poblacionales. El procedimiento sigue el mismo patrón que en applets previos. Es necesario introducir un resumen estadístico, es decir, los valores de $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, n_1, n_2, s_1 y s_2 y presionar "Enter" después de cada entrada; el applet calculará t (suponiendo varianzas iguales) y dará la opción de escoger valores p de una o de dos colas (*Área a la Izquierda, Área a la Derecha* o *Dos Colas*), así como un área *Central* que no se necesitará.

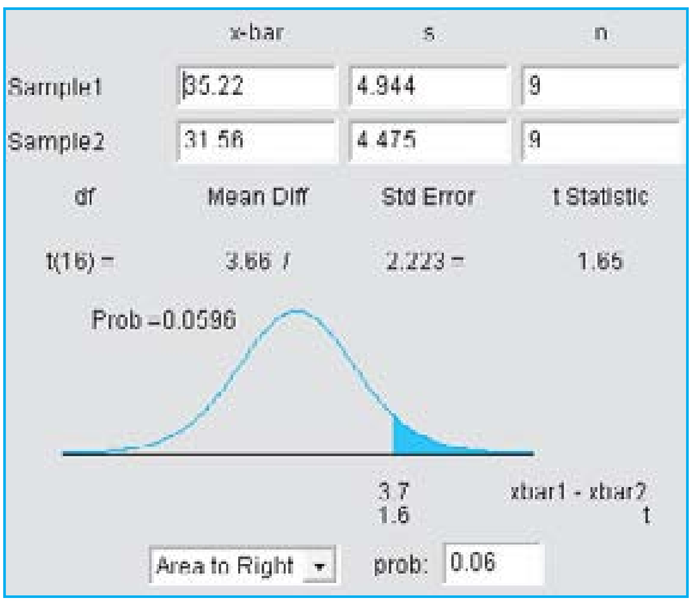


FIGURA 10.12
Applet Two-Sample *t*-Test: Independent Samples

Para los datos del ejemplo 10.5, el valor p es el área de una cola a la derecha de $t = 1.65$. ¿El valor p confirma las conclusiones para la prueba en el ejemplo 10.5?

EJEMPLO 10.7

Use un límite inferior de confianza de 95% para estimar la diferencia $(\mu_1 - \mu_2)$ en el ejemplo 10.5. ¿El límite de confianza inferior indica que el promedio en línea es significativamente más alto que el promedio de salón de clase?

Solución El límite inferior de confianza toma una forma familiar, es decir, el estimador puntual $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ menos una cantidad igual a t_α por el error estándar del estimador. Sustituyendo en la fórmula, se puede calcular el límite inferior de confianza de 95%:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_\alpha\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$(35.22 - 31.56) - 1.746\sqrt{22.2361\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)}$$

$$3.66 - 3.88$$

o $(\mu_1 - \mu_2) > -.22$. Como el valor $(\mu_1 - \mu_2) = 0$ está incluido en el intervalo de confianza, es posible que las dos medias sean iguales. Hay insuficiente evidencia para indicar que el promedio en línea sea más alto que el promedio en salón de clase.

El procedimiento de dos muestras que usa una estimación agrupada de la varianza común σ^2 se apoya en cuatro importantes suposiciones:

MI CONSEJO

Mayor s^2/menor $s^2 < 3$

$\Leftrightarrow$

suposición de varianza es razonable.

- Las muestras deben ser *seleccionadas al azar*. Las muestras no seleccionadas al azar pueden introducir sesgo en el experimento y así alterar los niveles de significancia que el experimentador informe.
- Las muestras deben ser *independientes*. Si no es así, éste no es el procedimiento estadístico apropiado. En la sección 10.5 analizamos otro procedimiento para muestras dependientes.
- Las poblaciones de las cuales se muestrea deben ser *normales*. No obstante, las desviaciones moderadas desde la normalidad no afectan seriamente la distribución del estadístico de prueba, en especial si los tamaños muestrales son casi iguales.
- Las *varianzas poblacionales deben ser iguales* o casi iguales para asegurar que los procedimientos sean válidos.

Si las varianzas poblacionales están lejos de ser iguales, hay un procedimiento alternativo para estimación y prueba que tiene una distribución *t aproximada* en muestreo repetido. Como regla práctica, se debe usar este procedimiento si la razón entre las dos varianzas muestrales

$$\frac{\text{Mayor } s^2}{\text{Menor } s^2} > 3$$

Como las varianzas poblacionales no son iguales, el estimador agrupado s^2 ya no es apropiado, y cada varianza poblacional debe ser estimada por su correspondiente varianza muestral. El estadístico de prueba resultante es

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

Cuando los tamaños muestrales sean *pequeños*, los valores críticos para este estadístico se encuentran usando grados de libertad aproximados por la fórmula

$$df \approx \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{(n_1 - 1)} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{(n_2 - 1)}}$$

Los grados de libertad se toman como la parte entera de este resultado.

Se pueden usar paquetes computarizados como el *MINITAB* para poner en práctica este procedimiento, a veces llamado *aproximación de Satterthwaite's*, así como el *método agrupado* descrito ya antes. De hecho, algunos experimentadores escogen analizar sus datos usando *ambos* métodos. Mientras los dos análisis lleven a las mismas conclusiones, no es necesario preocuparse con la igualdad o desigualdad de varianzas.

La salida impresa *MINITAB*, resultante del método agrupado de análisis para los datos del ejemplo 10.5, se muestra en la figura 10.13. Observe que la razón entre las dos varianzas muestrales, $(4.94/4.48)^2 = 1.22$ es menor a 3, lo cual hace aproximado el método agrupado. El valor calculado de $t = 1.65$ y el valor p exacto $= .059$ con 16 grados de libertad se muestran en la última línea de la salida. El valor p exacto hace muy fácil determinar la significancia o no significancia de los resultados muestrales. Se encontrarán instrucciones al generar esta salida impresa *MINITAB* en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo.

FIGURA 10.13
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 10.5

Two-Sample T-Test and CI: Online, Classroom

```
Two-sample T for Online vs Classroom
             N      Mean      StDev   SE Mean
Online       9      35.22      4.94       1.6
Classroom    9      31.56      4.48       1.5

Difference = mu (Online) - mu (Classroom)
Estimate for difference: 3.67
95% lower bound for difference: -0.21
T-Test of difference = 0 (vs >): T-Value = 1.65  P-Value = 0.059  DF = 16
Both use Pooled StDev = 4.7155
```

Si hay razón para pensar que las suposiciones de normalidad han sido violadas, se puede probar un cambio en lugar de dos distribuciones poblacionales usando la prueba de suma de rango no paramétrica de Wilcoxon del capítulo 15. Este procedimiento de prueba, que requiere menos suposiciones respecto a la naturaleza de las distribuciones de probabilidad poblacionales, es casi igualmente sensible para detectar una diferencia en medias poblacionales cuando las condiciones necesarias para la prueba t se satisfagan. Puede ser más sensible cuando no se satisfaga la suposición de normalidad.

10.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

10.18 Dé el número de grados de libertad para s^2, el estimador agrupado de σ^2, en estos casos:

a. $n_1 = 16, n_2 = 8$

b. $n_1 = 10, n_2 = 12$

c. $n_1 = 15, n_2 = 3$

10.19 Calcule s^2, el estimador agrupado de σ^2, en estos casos:

a. $n_1 = 10, n_2 = 4, s_1^2 = 3.4, s_2^2 = 4.9$

b. $n_1 = 12, n_2 = 21, s_1^2 = 18, s_2^2 = 23$

10.20 Dos muestras aleatorias independientes de tamaños $n_1 = 4$ y $n_2 = 5$ se seleccionan de cada una de dos poblaciones normales:

Población 1	12	3	8	5	
Población 2	14	7	7	9	6

a. Calcule s^2, el estimador agrupado de σ^2.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para $(\mu_1 - \mu_2)$, la diferencia entre las dos medias poblacionales.

c. Prueba $H_0: (\mu_1 - \mu_2) = 0$ contra $H_a: (\mu_1 - \mu_2) < 0$ para $\alpha = .05$. Exprese sus conclusiones.

10.21 Muestras aleatorias independientes de $n_1 = 16$ y $n_2 = 13$ observaciones fueron seleccionadas de dos poblaciones normales con iguales varianzas:

	Población	
	1	2
Tamaño muestral	16	13
Media muestral	34.6	32.2
Varianza muestral	4.8	5.9

a. Supongamos que usted desea detectar una diferencia entre las medias poblacionales. Exprese la hipótesis nula y alternativa para la prueba.

b. Encuentre la región de rechazo para la prueba del inciso a) para $\alpha = .01$.

c. Encuentre el valor del estadístico de prueba.

d. Encuentre el valor p aproximado para la prueba.

e. Realice la prueba y exprese sus conclusiones.

10.22 Consulte el ejercicio 10.21. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para $(\mu_1 - \mu_2)$.

10.23 La salida impresa *MINITAB* muestra una prueba de la diferencia en dos medias poblacionales.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 10.23

Prueba T de dos muestras y CI: muestra 1, muestra 2

```
Two-sample T for Sample 1 vs Sample 2
          N      Mean      StDev   SE Mean
Sample 1  6     29.00       4.00       1.6
Sample 2  7     28.86       4.67       1.8

Difference = mu (Sample 1) - mu (Sample 2)
Estimate for difference: 0.14
95% CI for difference: (-5.2, 5.5)
T-Test of difference = 0 (vs not =):
T-Value = 0.06  P-Value = 0.95  DF = 11
Both use Pooled StDev = 4.38
```

a. ¿Las dos desviaciones muestrales estándar indican que la suposición de una varianza poblacional común es razonable?

b. ¿Cuál es el valor observado del estadístico de prueba? ¿Cuál es el valor p asociado con esta prueba?

c. ¿Cuál es la estimación agrupada s^2 de la varianza poblacional?

d. Use las respuestas al inciso b) para sacar conclusiones acerca de la diferencia en las dos medias poblacionales.

e. Encuentre el intervalo 95% para la diferencia en las medias poblacionales. ¿Este intervalo confirma sus conclusiones del inciso d)?

APLICACIONES

10.24 Dientes sanos Jan Lindhe realizó un estudio sobre el efecto de un enjuague oral antiplaca sobre la acumulación de placa en dientes.[6] Catorce personas cuyos dientes estaban muy limpios y pulidos se asignaron al azar a dos grupos de siete personas cada uno. Ambos grupos fueron asignados para usar enjuagues orales (no cepillado) durante un periodo de dos semanas. El grupo 1 utilizó un enjuague que contenía un agente antiplaca. El grupo 2, el grupo de control, recibió un enjuague similar excepto que, sin saberlo las personas, el enjuague no contenía agente antiplaca. Un índice x de placa, medida de acumulación de placa, fue registrado a las 4, 7 y 14 días. La media y desviación estándar para las mediciones de placa de 14 días se muestran en la tabla para los dos grupos.

	Grupo de control	Grupo antiplaca
Tamaño muestral	7	7
Media	1.26	.78
Desviación estándar	.32	.32

a. Exprese la hipótesis nula y alternativa que deberían usarse para probar la efectividad del enjuague oral antiplaca.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el enjuague oral antiplaca es eficaz? Pruebe usando $\alpha = .05$.

c. Encuentre el valor p aproximado para la prueba.

MIS DATOS EX1025

10.25 Atún, otra vez En el ejercicio 10.6 hemos presentado datos sobre el precio promedio estimado para una lata de 6 onzas o una bolsa de 7.06 onzas de atún, con base en precios pagados a nivel nacional en supermercados. Una parte de los datos se reproduce en la tabla siguiente. Use la salida impresa *MINITAB* para contestar las preguntas.

Atún claro en agua		Atún claro en aceite	
.99	.53	2.56	.62
1.92	1.41	1.92	.66
1.23	1.12	1.30	.62
.85	.63	1.79	.65
.65	.67	1.23	.60
.69	.60		.67
.60	.66		

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 10.25

Prueba T de dos muestras y CI: agua, aceite

```
Two-sample T for Water vs Oil
        N      Mean      StDev   SE Mean
Water   14     0.896     0.400      0.11
Oil     11     1.147     0.679      0.20

Difference = mu (Water) - mu (Oil)
Estimate for difference: -0.251
95% CI for difference: (-0.700, 0.198)
T-Test of difference = 0 (vs not =):
T-Value = -1.16  P-Value = 0.260  DF = 23
Both use Pooled StDev = 0.5389
```

a. ¿Los datos de la tabla presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en los precios promedio de atún claro en agua contra atún claro en aceite? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. ¿Cuál es el valor p para la prueba?

c. El análisis del *MINITAB* usa la estimación agrupada de σ^2. ¿La suposición de iguales varianzas es razonable? ¿Por qué sí o por qué no?

10.26 Corredores y ciclistas El síndrome del compartimiento anterior crónico es una afección caracterizada por dolor inducido por ejercicio en la parte inferior de las piernas. Hinchazón y función dañada en nervios y músculos también acompañan a este dolor, que se alivia con reposo. Susan Beckham y colegas efectuaron un experimento, donde participaron 10 corredores sanos y 10 ciclistas sanos, para determinar si hay diferencias significativas en mediciones de presión dentro del compartimiento anterior del músculo para corredores y ciclistas.[7] El resumen de datos, presión del compartimiento en milímetros de mercurio (Hg), es como sigue:

	Corredores		Ciclistas	
Afección	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar
En reposo	14.5	3.92	11.1	3.98
80% máximo consumo de O_2	12.2	3.49	11.5	4.95
Máximo consumo de O_2	19.1	16.9	12.2	4.47

a. Pruebe para una diferencia significativa en presión del compartimiento entre corredores y ciclistas bajo la condición de reposo. Use $\alpha = .05$.

b. Construya una estimación de intervalo de confianza de 95% de la diferencia en medias para corredores y ciclistas, bajo la condición de ejercitarse a 80% de consumo máximo de oxígeno.

c. Con el fin de probar para una diferencia significativa en presión del compartimiento a máximo consumo de oxígeno, ¿debe usarse la prueba t agrupada o no agrupada? Explique.

10.27 Desinfectantes Un experimento publicado en *The American Biology Teacher* estudió la eficacia de usar 95% de etanol o 20% de blanqueador, como desinfectante para eliminar la contaminación por bacterias y hongos en cultivos de tejidos de plantas. El experimento se repitió 15 veces con cada desinfectante usando berenjenas como tejido de planta cultivada.[8] Cinco cortes por planta se colocaron en una caja de Petri para cada desinfectante y se guardaron a 25ºC durante 4 semanas. La observación informada fue el número de cortes no contaminados de berenjena después del almacenamiento de 4 semanas.

Desinfectante	95% etanol	20% de blanqueador
Media	3.73	4.80
Varianza	2.78095	.17143
n	15	15

Varianza agrupada 1.47619

a. ¿Está usted dispuesto a suponer que las varianzas originales son iguales?

b. Usando la información del inciso a), ¿está usted dispuesto a concluir que hay una diferencia significativa en los números medios de berenjenas no contaminadas para los dos desinfectantes probados?

MIS DATOS EX1028

10.28 Titanio Un geólogo recolectó 20 muestras diferentes de mineral, todas del mismo peso y al azar las dividió en dos grupos. Los contenidos de titanio de las muestras, que encontró usando dos métodos diferentes, se detallan en la tabla:

Método 1					Método 2				
.011	.013	.013	.015	.014	.011	.016	.013	.012	.015
.013	.010	.013	.011	.012	.012	.017	.013	.014	.015

a. Use un método apropiado con el fin de probar para una diferencia significativa en los contenidos promedio de titanio usando los dos métodos diferentes.

b. Determine una estimación del intervalo de confianza de 95% para $(\mu_1 - \mu_2)$. ¿La estimación de su intervalo justifica su conclusión del inciso a)? Explique.

MIS DATOS EX1029

10.29 Pasitas El número de pasitas en cada una de 14 minicajas (tamaño de 1/2 onza) se contó para pasitas de una marca genérica y para las Sunmaid®.

Marca genérica				Sunmaid			
25	26	25	28	25	29	24	24
26	28	28	27	28	24	28	22
26	27	24	25	25	28	30	27
26	26			28	24		

a. Aun cuando las cantidades tienen una distribución normal, ¿estos datos tienen distribuciones aproximadamente normales? (SUGERENCIA: Use un histograma o gráfica de tallo y hoja.)

b. ¿Está usted dispuesto a suponer que las varianzas poblacionales originales son iguales? ¿Por qué?

c. Use el método del valor p para determinar si hay una diferencia significativa en los números medios de pasitas por minicaja. ¿Cuáles son las implicaciones de su conclusión?

10.30 Contenido de O_2 disuelto, continúa Consulte el ejercicio 10.7, en el que medimos el contenido de oxígeno disuelto en agua de río para determinar si un arroyo tenía suficiente oxígeno para soportar vida acuática. Un inspector de control de contaminación sospechaba que la comunidad de un río estaba vertiendo cantidades de aguas negras poco tratadas al río. Para comprobar su teoría, sacó cinco especímenes de agua de río escogidos al azar en un lugar aguas arriba del pueblo, y otros cinco de aguas abajo. Las lecturas de oxígeno disuelto (en partes por millón) son como sigue:

Aguas arriba	4.8	5.2	5.0	4.9	5.1
Aguas abajo	5.0	4.7	4.9	4.8	4.9

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el contenido medio de oxígeno aguas abajo del pueblo es menor que el contenido medio de oxígeno aguas arriba? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Supongamos que usted prefiere la estimación como método de inferencia. Estime la diferencia en los contenidos medios de oxígeno disuelto para lugares aguas arriba y abajo del pueblo. Use un intervalo de confianza de 95%.

MIS DATOS EX1031

10.31 Nadadores de estilo libre En un esfuerzo por comparar los tiempos promedio de natación para dos nadadores, a cada nadador se le pidió nadar en estilo libre una distancia de 100 yardas en tiempos seleccionados al azar. Los nadadores descansaron por completo entre vueltas y no corrieron uno contra otro, de modo que cada muestra de tiempos era una muestra aleatoria independiente. Se muestran los tiempos para cada una de las pruebas para los dos nadadores.

Nadador 1		Nadador 2	
59.62	59.74	59.81	59.41
59.48	59.43	59.32	59.63
59.65	59.72	59.76	59.50
59.50	59.63	59.64	59.83
60.01	59.68	59.86	59.51

Suponga que el nadador 2 fue el ganador del año pasado cuando los dos nadadores compitieron. ¿Le parece que el tiempo promedio para el nadador 2 es todavía más rápido que el tiempo promedio para el nadador 1 en el estilo libre de 100 yardas? Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprete los resultados.

10.32 Nadadores de estilo libre, continúa Consulte el ejercicio 10.31. Construya un límite inferior de confianza de una cola y 95% para la diferencia en los tiempos promedio para los dos nadadores. ¿Este intervalo confirma sus conclusiones en el ejercicio 10.31?

MIS DATOS EX1033

10.33 Comparación de mariscales de campo de la NFL ¿Cómo se compara Brett Favre, mariscal de campo de los empacadores de Green Bay, con Peyton Manning, mariscal de campo de los Potros de Indianápolis? La tabla siguiente muestra el número de pases completos para cada atleta durante la temporada de fútbol de 2006 de la NFL:[3]

Brett Favre			Peyton Manning		
15	17	22	25	32	25
31	28	20	26	30	29
25	24	26	14	27	21
22	5	21	21	20	22
22	22		20	14	
19	24		25	21	

a. ¿Los datos indican que hay una diferencia en el número promedio de pases completos para los dos mariscales de campo? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en el número promedio de pases completos para los dos mariscales de campo. ¿El intervalo de confianza confirma su conclusión del inciso a)? Explique.

MIS DATOS EX1034

10.34 Un hallazgo arqueológico Un artículo en *Archaeometry* involucraba un análisis de 26 muestras de cerámica romano-inglesa, halladas en hornos de cuatro sitios diferentes en el Reino Unido.[9] Las muestras se analizaron para determinar su composición química y el porcentaje de óxido de aluminio en cada una de 10 muestras en dos lugares se muestra a continuación.

Island Thorns	Ashley Rails
18.3	17.7
15.8	18.3
18.0	16.7
18.0	14.8
20.8	19.1

¿Los datos dan suficiente información para indicar que hay una diferencia en el promedio de porcentaje de óxido de aluminio en los dos lugares? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

10.5 INFERENCIAS DE MUESTRA PEQUEÑA PARA LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS: UNA PRUEBA DE DIFERENCIA PAREADA

Para comparar las cualidades de desgaste de dos tipos de llantas de automóvil, A y B, una llanta de tipo A y una de tipo B se asignaron al azar y se montaron en las ruedas traseras de cada uno de cinco automóviles. Éstos se hicieron correr un número especificado de millas y se registró la cantidad de desgaste para cada llanta. Estas mediciones aparecen en la tabla 10.3. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el promedio de desgaste para los dos tipos de llantas?

TABLA 10.3 **Promedio de desgaste para dos tipos de llantas**

Automóvil	Tipo A	Tipo B
1	10.6	10.2
2	9.8	9.4
3	12.3	11.8
4	9.7	9.1
5	8.8	8.3
	$\bar{x}_1 = 10.24$	$\bar{x}_2 = 9.76$
	$s_1 = 1.316$	$s_2 = 1.328$

La tabla 10.3 muestra una diferencia de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = (10.24 - 9.76) = .48$ entre las dos medias muestrales, en tanto que las desviaciones estándar de ambas muestras son aproximadamente 1.3. Dada la variabilidad de los datos y el pequeño número de mediciones, ésta es más bien una diferencia pequeña y es probable que no se sospeche una diferencia en el desgaste promedio para los dos tipos de llantas. Veamos las sospechas usando los métodos de la sección 10.4.

Vea el análisis *MINITAB* de la figura 10.14. La prueba *t agrupada* de dos muestras se usa para probar la diferencia en las medias basada en dos muestras aleatorias independientes. El valor calculado de t usado para probar la hipótesis nula $H_0: \mu_1 = \mu_2$ es $t = .57$ con valor $p = .582$, valor que no es casi suficientemente pequeño para indicar una diferencia significativa en las dos medias poblacionales. El correspondiente intervalo de confianza de 95%, dado como

$$-1.448 < (\mu_1 - \mu_2) < 2.408$$

es bastante ancho y no indica una diferencia significativa en las medias poblacionales.

FIGURA 10.14
Salida impresa *MINITAB* usando prueba *t* para muestras independientes para los datos de llantas

Prueba T de dos muestras y CI: llanta A, llanta B

```
Two-sample T for Tire A vs Tire B
         N       Mean      StDev    SE Mean
Tire A   5      10.24       1.32       0.59
Tire B   5       9.76       1.33       0.59

Difference = mu (Tire A) - mu (Tire B)
Estimate for difference: 0.480
95% CI for difference: (-1.448, 2.408)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 0.57  P-Value = 0.582  DF = 8
Both use Pooled StDev = 1.3221
```

Veamos de nuevo los datos y se observará que la medición del desgaste para el tipo A es mayor que el correspondiente valor para el tipo B, para *cada uno* de los cinco automóviles. ¿No sería esto probable, si en realidad no hay diferencia entre los dos tipos de llantas?

Considere una prueba intuitiva sencilla, basada en la distribución binomial del capítulo 5. Si no hay diferencia en el desgaste medio para los dos tipos de llantas, entonces es igualmente probable o no probable que la llanta A muestre más desgaste que la llanta B. Los cinco automóviles entonces corresponden a cinco intentos binomiales con $p = P$(llanta A muestra más desgaste que la llanta B) $= .5$. ¿Es poco común el valor observado de $x = 5$ diferencias positivas mostradas en la tabla 10.4? La probabilidad de observar $x = 5$ o el igualmente probable valor de $x = 0$ se puede hallar en la tabla 1 del apéndice I que son $2(.031) = .062$, que es bastante pequeño en comparación con la probabilidad de la más potente prueba t, que tenía un valor p de .58. ¿No es peculiar que la prueba t, que usa más información (las mediciones muestrales reales) que la prueba binomial, no dé suficiente información para rechazar la hipótesis nula?

TABLA 10.4 **Diferencias en desgaste de llantas, usando los datos de la tabla 10.3**

Automóvil	A	B	$d = A - B$
1	10.6	10.2	.4
2	9.8	9.4	.4
3	12.3	11.8	.5
4	9.7	9.1	.6
5	8.8	8.3	.5
			$\bar{d} = .48$

Hay una explicación para esta inconsistencia. La prueba t descrita en la sección 10.4 *no es* la prueba estadística propia a usar para nuestro ejemplo. El procedimiento de prueba estadística de la sección 10.4 requiere que las dos muestras sean *independientes y aleatorias.* Ciertamente, el requisito de independencia es violado por la forma en la que se realizó el experimento. El par de mediciones, en las llantas A y B, para un automóvil particular están definitivamente relacionadas. Una mirada a los datos muestra que las lecturas tienen más o menos la misma magnitud para un automóvil particular pero varían en forma marcada de un automóvil a otro. Esto, por supuesto, es exactamente lo que podría esperarse. El desgaste de llantas está determinado en su mayor parte por hábitos de manejo, el balanceo de las ruedas y la superficie del pavimento. Como cada automóvil tiene un conductor diferente, es de esperarse una gran cantidad de variabilidad en los datos de un automóvil a otro.

Al diseñar el experimento de desgaste de llantas, el experimentador vio que las mediciones variarían en gran medida de un automóvil a otro. Si las llantas (cinco del tipo A y cinco del tipo B) se asignaran al azar a las 10 ruedas, resultando en muestras aleatorias *independientes*, esta variabilidad resultaría en un gran error estándar y hacer difícil de detectar una diferencia en las medias. En cambio, el experimentador escogió "parear" las mediciones, comparando el desgaste para llantas tipo A y tipo B en cada uno de los cinco automóviles. Este diseño experimental, a veces llamado diseño de **diferencia pareada** o **pares acoplados**, nos permite eliminar la variabilidad de un auto a otro al ver sólo las cinco mediciones de diferencia mostradas en la tabla 10.4. Estas cinco diferencias forman una sola muestra aleatoria de tamaño $n = 5$.

Observe que en la tabla 10.4 la media muestral de las diferencias, $d = \text{A} - \text{B}$, se calcula como

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n} = .48$$

y es exactamente la misma que la diferencia de las medias muestrales: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = (10.24 - 9.76) = .48$. No debe sorprender que esto se pueda demostrar como verdadero en general y también que la misma relación se cumpla para las medias poblacionales. Esto es, el promedio de las diferencias poblacionales es

$$\mu_d = (\mu_1 - \mu_2)$$

Debido a esto, se pueden usar las diferencias muestrales para probar una diferencia significativa en las dos medias poblacionales, $(\mu_1 - \mu_2) = \mu_d$. La prueba es una prueba t de una sola muestra de las mediciones de diferencia para probar la hipótesis nula

$$H_0 : \mu_d = 0 \qquad [\text{o } H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0]$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a : \mu_d \neq 0 \qquad [\text{o } H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0]$$

Los procedimientos de prueba toman la misma forma que los procedimientos empleados en la sección 10.3 y se describen a continuación.

PRUEBA DE HIPÓTESIS DE DIFERENCIA PAREADA PARA $(\mu_1 - \mu_2) = \mu_d$: MUESTRAS DEPENDIENTES

1. Hipótesis nula: $H_0 : \mu_d = 0$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \mu_d > 0$ (o $H_a : \mu_d < 0$)	$H_a : \mu_d \neq 0$

3. Estadístico de prueba: $t = \dfrac{\bar{d} - 0}{s_d/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$

   donde n = Número de diferencias pareadas
   $\bar{d}$ = Media de las diferencias muestrales
   s_d = Desviación estándar de las diferencias muestrales

4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$t > t_\alpha$ (o $t < -t_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa sea $H_a : \mu_d < 0$)	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

   o cuando valor $p < \alpha$

Los valores críticos de t, t_α y $t_{\alpha/2}$ están basados en $(n - 1)$ df. Estos valores tabulados se pueden hallar usando la tabla 4 o el applet **Student's *t* Probabilities**.

INTERVALO DE CONFIANZA DE MUESTRA PEQUEÑA $(1-\alpha)100\%$ PARA $(\mu_1 - \mu_2) = \mu_d$, CON BASE EN UN EXPERIMENTO DE DIFERENCIA PAREADA

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

Suposiciones: El experimento está diseñado como una prueba de diferencia pareada de modo que las n diferencias representan una muestra aleatoria tomada de una población normal.

EJEMPLO 10.8

¿Los datos de la tabla 10.3 dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el desgaste medio para llantas tipo A y B? Pruebe usando $\alpha = .05$.

Solución Usted puede verificar, usando su calculadora, que el promedio y desviación estándar de las cinco mediciones de diferencia son

$$\bar{d} = .48 \quad \text{y} \quad s_d = .0837$$

Entonces

$$H_0 : \mu_d = 0 \quad \text{y} \quad H_a : \mu_d \neq 0$$

y

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{.48}{.0837/\sqrt{5}} = 12.8$$

El valor crítico de t para una prueba estadística de dos colas, $\alpha = .05$ y 4 *df*, es 2.776. Ciertamente, el valor observado de $t = 12.8$ es muy grande y significativo. En consecuencia, se puede concluir que hay una diferencia en el desgaste medio para llantas tipo A y B.

EJEMPLO 10.9

Encuentre un intervalo de confianza de 95% para $(\mu_1 - \mu_2) = \mu_d$ usando los datos de la tabla 10.3.

Solución Un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre los niveles medios de desgaste es

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

$$.48 \pm 2.776\left(\frac{.0837}{\sqrt{5}}\right)$$

$$.48 \pm .10$$

MI CONSEJO

Los intervalos de confianza siempre se interpretan en la misma forma. En muestreo repetido, los intervalos construidos de este modo encierran el verdadero valor del parámetro $100(1-\alpha)\%$ del tiempo.

o sea $.38 < (\mu_1 - \mu_2) < .58$. ¿Cómo se compara el ancho de este intervalo con el ancho de un intervalo que pudiera haberse construido *si* se hubiera diseñado el experimento en forma no pareada? Es probable que hubiera sido de la misma magnitud que el intervalo calculado en la figura 10.14, donde los datos observados fueron *incorrectamente* analizados usando el análisis no pareado. Este intervalo, $-1.45 < (\mu_1 - \mu_2) < 2.41$, es mucho más ancho que el intervalo pareado, lo cual indica que el diseño de diferencia pareada aumentó la precisión de nuestra estimación y hemos obtenido valiosa información con el uso de este diseño.

La *prueba de diferencia pareada* o *diseño de pares acoplados* empleados en el experimento de desgaste de llantas es un ejemplo sencillo de un diseño experimental denominado **diseño de bloque aleatorizado**.

Cuando hay gran cantidad de variabilidad entre las unidades experimentales, aun antes de ponerse en práctica ningún procedimiento experimental, el efecto de esta variabilidad se puede reducir al mínimo al **bloquear**, es decir, comparar los diferentes procedimientos dentro de grupos de unidades experimentales relativamente similares llamadas **bloques**. De este modo, el "ruido" causado por la gran variabilidad no oculta las verdaderas diferencias entre los procedimientos. En el capítulo 11 analizaremos con más detalle los diseños aleatorizados de bloque.

MI CONSEJO

Prueba de diferencia pareada: $df = n - 1$.

Es importante que recuerde que el *pareo* o *bloqueo* se presenta cuando se planea el experimento y no después de recolectar los datos. Un experimentador puede escoger usar pares de gemelos idénticos para comparar dos métodos de aprendizaje. Un médico puede registrar la presión sanguínea de un paciente antes y después de administrar un medicamento en particular. Una vez que usted haya empleado un diseño pareado para un experimento, ya no tiene oportunidad de usar el análisis pareado de la sección 10.4. La suposición de independencia ha sido violada a propósito y la única opción es usar el análisis pareado descrito aquí.

Aun cuando hacer un pareado fue benéfico en el experimento de desgaste de llantas, éste puede no ser siempre el caso. En el análisis pareado, los grados de libertad para la prueba t se cortan a la mitad, es decir, de $(n + n - 2) = 2(n - 1)$ a $(n - 1)$. Esta reducción *aumenta* el valor crítico de t para rechazar H_0 y también aumenta el ancho del intervalo de confianza para la diferencia en las dos medias. Si el pareado no es eficiente, este aumento no es compensado por una *disminución* en la variabilidad y de hecho se puede perder y no ganar información por el pareado. Esto por supuesto que no ocurrió en todo el experimento, ya que la reducción grande en el error estándar compensó la pérdida en grados de libertad.

Excepto por la notación, el análisis de diferencia pareada es igual que el análisis de una sola muestra presentado en la sección 10.3. No obstante, *MINITAB* da un solo procedimiento llamado **Paired *t*** para analizar las diferencias, como se ve en la figura 10.15. El valor p para el análisis pareado, .000, indica una diferencia *altamente significativa* en las medias. Usted encontrará instrucciones para generar esta salida impresa *MINITAB* en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo.

FIGURA 10.15
Salida impresa *MINITAB* para análisis de diferencia pareada de datos del desgaste de llantas

Prueba T pareada y CI: llanta A, llanta B

```
Paired T for Tire A - Tire B
                    N      Mean       StDev    SE Mean
Tire A              5    10.240       1.316      0.589
Tire B              5     9.760       1.328      0.594
Difference          5    0.4800      0.0837     0.0374

95% CI for mean difference: (0.3761, 0.5839)
T-Test of mean difference = 0 (vs not = 0): T-Value = 12.83  P-Value = 0.000
```

10.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

10.35 Se realizó un experimento de diferencia pareada usando $n = 10$ pares de observación.

a. Pruebe la hipótesis nula $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$ contra $H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$ para $\alpha = .05$, $\bar{d} = .3$ y $s_d^2 = .16$. Dé el valor p aproximado para la prueba.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para $(\mu_1 - \mu_2)$.

c. ¿Cuántos pares de observaciones se necesitan si se desea estimar $(\mu_1 - \mu_2)$ correcta a no más de .1 con probabilidad igual a .95?

10.36 Un experimento de diferencia pareada consta de $n = 18$ pares $\bar{d} = 5.7$, y $s_d^2 = 256$. Suponga que se desea detectar $\mu_d > 0$.

a. Dé la hipótesis nula y alternativa para la prueba.

b. Efectúe la prueba y exprese sus conclusiones.

10.37 Se realizó un experimento de diferencia pareada para comparar las medias de dos poblaciones:

	Pares				
Población	1	2	3	4	5
1	1.3	1.6	1.1	1.4	1.7
2	1.2	1.5	1.1	1.2	1.8

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que μ_1 difiere de μ_2? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba e interprete su valor.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para $(\mu_1 - \mu_2)$. Compare su interpretación del intervalo de confianza con sus resultados de la prueba en el inciso a).

d. ¿Qué suposiciones se deben hacer para lograr que sus inferencias sean válidas?

APLICACIONES

MIS DATOS EX1038

10.38 Seguros de autos El costo del seguro de un automóvil se ha convertido en un asunto difícil en California debido a que las tasas dependen de tantas variables, por ejemplo la ciudad en donde se vive, el número de autos que el usuario asegure y la compañía con la que se asegure. A continuación veamos las primas anuales de 2006-2007 para un hombre soltero, con licencia de 6-8 años, que maneja un Honda Accord 12 600 a 15 000 millas por año y no tiene infracciones ni accidentes.[10]

Ciudad	Allstate	21st Century
Long Beach	$2617	$2228
Pomona	2305	2098
San Bernardino	2286	2064
Moreno Valley	2247	1890

Fuente: www.insurance.ca.gov

a. ¿Por qué se esperaría que estos pares de observaciones fueran dependientes?

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia en el promedio de primas anuales entre seguros Allstate y 21st Century? Pruebe usando $\alpha = .01$.

c. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba e interprete su valor.

d. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en el promedio de primas anuales para seguros Allstate y 21st Century.

e. ¿Puede usar la información de la tabla para hacer comparaciones válidas entre seguros Allstate y 21st Century en todo Estados Unidos? ¿Por qué sí o por qué no?

10.39 Corredores y ciclistas II Consulte el ejercicio 10.26. Además de las presiones del compartimiento, el nivel de creatina fosfoquinasa (CPK) en muestras de sangre, una medida del daño muscular, se determinó para cada uno de los 10 corredores y 10 ciclistas antes y después del ejercicio.[7] El resumen de datos, es decir, valores de CPK en unidades/litro, es como sigue:

	Corredores		Ciclistas	
Afección	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar
Antes de ejercicio	255.63	115.48	173.8	60.69
Después de ejercicio	284.75	132.64	177.1	64.53
Diferencia	29.13	21.01	3.3	6.85

a. Pruebe para una diferencia significativa en valores medios de CPK para corredores y ciclistas antes del ejercicio, bajo la suposición de que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; use $\alpha = .05$. Encuentre una estimación de intervalo de confianza de 95% para la correspondiente diferencia en medias.

b. Pruebe para una diferencia significativa en valores medios de CPK para corredores y ciclistas después del ejercicio, bajo la suposición de que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; use $\alpha = .05$. Encuentre una estimación de intervalo de confianza de 95% para la correspondiente diferencia en medias.

c. Pruebe para una diferencia significativa en valores medios de CPK para corredores antes y después del ejercicio.

d. Encuentre un intervalo de confianza de 95% estimado para la diferencia en la media de los valores de CPK para los ciclistas antes y después del ejercicio. ¿Su estimación indica que no hay diferencia significativa en niveles medios de CPK para ciclistas antes y después del ejercicio?

MIS DATOS EX1040

10.40 Canasta de mercado de Estados Unidos Un anuncio para Albertsons, una cadena de supermercados del oeste de Estados Unidos, dice que Albertsons había tenido precios consistentemente más bajos que otros cuatro supermercados de servicio completo. Como parte de una encuesta realizada por una "compañía independiente de revisión de precios de la canasta de mercado", el promedio total semanal, con base en los precios de alrededor de 95 artículos, se da para dos cadenas diferentes de supermercados registrados durante semanas consecutivas en un mes en particular.

Semana	Albertsons	Ralphs
1	254.26	256.03
2	240.62	255.65
3	231.90	255.12
4	234.13	261.18

a. ¿Hay una diferencia significativa en los precios promedio para estas dos cadenas diferentes de supermercados?

b. ¿Cuál es el valor *p* aproximado para la prueba realizada en el inciso a)?

c. Construya un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en los precios promedio para las dos cadenas de supermercados. Interprete este intervalo.

MIS DATOS EX1041 **10.41 No vuelta a la izquierda** Se realizó un experimento para comparar los tiempos medios de reacción a dos tipos de señalamientos de tránsito: restrictivos (no vuelta a la izquierda) y preventivos (sólo vuelta a la izquierda). Diez conductores se incluyeron en el experimento. A cada uno se le presentaron 40 señalamientos de tránsito, 20 restrictivos y 20 preventivos, en forma aleatoria. El tiempo medio de reacción y el número de acciones correctas se registró para cada conductor. Los tiempos medios de reacción (en milisegundos) a los 20 señalamientos restrictivos y 20 preventivos se muestran aquí para cada uno de los 10 conductores:

Conductor	Restrictivos	Preventivos
1	824	702
2	866	725
3	841	744
4	770	663
5	829	792
6	764	708
7	857	747
8	831	685
9	846	742
10	759	610

a. Explique por qué es un experimento de diferencia pareada; dé razones por las que el pareado debe ser útil al aumentar información sobre la diferencia entre los tiempos medios de reacción a señalamientos de tránsito restrictivos y preventivos.

b. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en tiempos medios de reacción a señalamientos de tránsito restrictivos y preventivos? Use el método del valor p.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en tiempos medios de reacción a señalamientos de tránsito restrictivos y preventivos.

10.42 Dientes sanos II El ejercicio 10.24 describe un experimento dental realizado para investigar la efectividad de un enjuague oral empleado para inhibir el crecimiento de placa en los dientes. Unas personas se dividieron en dos grupos: un grupo usó un enjuague con un ingrediente antiplaca y el grupo de control usó un enjuague que contenía ingredientes inactivos. Suponga que el crecimiento de placa en los dientes de cada persona se midió luego de usar el enjuague después de 4 horas y además otra vez después de 8 horas. Si usted desea estimar la diferencia en crecimiento de placa de 4 a 8 horas, ¿debe usar un intervalo de confianza basado en un análisis pareado o no pareado? Explique.

10.43 ¿Tierra o aire? La temperatura de la tierra (que afecta la germinación de semillas, el crecimiento de cosechas en mal clima y muchos aspectos de producción agrícola) se puede medir usando ya sea sensores al nivel del suelo o aparatos sensibles a rayos infrarrojos instalados en aviones o satélites espaciales. Los sensores instalados en tierra son tediosos y requieren numerosas réplicas para obtener una estimación precisa de la temperatura del suelo. Por otro lado, los sensores de ondas infrarrojas instalados en aviones o satélites parecen introducir un sesgo en las lecturas de temperatura. Para determinar el sesgo, se obtuvieron lecturas en cinco lugares diferentes usando sensores tanto en tierra como en aviones. Las lecturas (en grados Celsius) son como sigue:

Lugar	Tierra	Aire
1	46.9	47.3
2	45.4	48.1
3	36.3	37.9
4	31.0	32.7
5	24.7	26.2

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar un sesgo en las lecturas de temperatura basadas en aviones? Explique.

b. Estime la diferencia en temperaturas medias entre sensores basados en tierra y aire usando un intervalo de confianza de 95%.

c. ¿Cuántas observaciones pareadas se requieren para estimar la diferencia entre temperaturas medias para sensores basados en tierra contra los basados en aire, correcta a no más de .2ºC, con probabilidad aproximadamente igual a .95?

MIS DATOS EX1044 **10.44 Tintura roja** Para probar el color comparativo de dos tinturas rojas, se tomaron nueve muestras de tela de una línea de producción y cada muestra se dividió en dos piezas. Una de las dos piezas de cada muestra se escogió al azar y se aplicó la tintura roja 1; la tintura roja 2 se aplicó a la pieza restante. Los datos siguientes representan una “calificación de color” para cada pieza. ¿Hay suficiente evidencia para indicar una diferencia en calificación media de color para las dos tinturas? Use $\alpha = .05$.

Muestra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tintura 1	10	12	9	8	15	12	9	10	15
Tintura 2	8	11	10	6	12	13	9	8	13

MIS DATOS EX1045 **10.45 Asesores de impuestos** En respuesta a una queja de que un asesor de impuestos en particular (A) estaba sesgado, se realizó un experimento para comparar al asesor citado en la queja con otro asesor de impuestos (B) de la misma oficina. Se seleccionaron ocho propiedades y cada una fue evaluada para ambos asesores. Las evaluaciones (en miles de dólares) se muestran en la tabla.

Propiedad	Asesor A	Asesor B
1	76.3	75.1
2	88.4	86.8
3	80.2	77.3
4	94.7	90.6
5	68.7	69.1
6	82.8	81.0
7	76.1	75.3
8	79.0	79.1

Use la salida impresa *MINITAB* para contestar las preguntas.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 10.45

Prueba T pareada y CI: asesor A, asesor B

```
Paired T for Assessor A - Assessor B
              N       Mean       StDev     SE Mean
Assessor A    8      80.77        7.99        2.83
Assessor B    8      79.29        6.85        2.42
Difference    8      1.488       1.491       0.527

95% lower bound for mean difference: 0.489
T-Test of mean difference = 0 (vs > 0):
T-Value = 2.82  P-value = 0.013
```

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el asesor A tiende a dar evaluaciones más altas que el asesor B?

b. Estime la diferencia en evaluaciones medias para los dos asesores.

c. ¿Qué suposiciones deben hacerse para que las inferencias en los incisos a) y b) sean válidas?

d. Suponga que el asesor A había sido comparado con un estándar más estable, es decir, el promedio $\bar{x}$ de las evaluaciones dadas por cuatro asesores seleccionados de la oficina de impuestos. Así, cada propiedad sería evaluada por A y también por cada uno de los otros cuatro asesores y $(x_A - \bar{x})$ se calcularía. Si la prueba del inciso a) es válida, ¿puede usted usar la prueba *t* de diferencia pareada para probar la hipótesis de que el sesgo, la diferencia media entre las evaluaciones de A y la media de las evaluaciones de los otros cuatro asesores, es igual a 0? Explique.

MIS DATOS EX1046 **10.46 Experimentos de memoria** Un grupo de psicología realizó un experimento para comparar si una calificación de recordatorio, en la que se dieron instrucciones para formar imágenes de 25 palabras, es mejor que una calificación inicial de recordatorio para la cual no se dieron instrucciones para formar imágenes. Veinte estudiantes participaron en el experimento con los resultados siguientes:

Estudiante	Con imágenes	Sin imágenes	Estudiante	Con imágenes	Sin imágenes
1	20	5	11	17	8
2	24	9	12	20	16
3	20	5	13	20	10
4	18	9	14	16	12
5	22	6	15	24	7
6	19	11	16	22	9
7	20	8	17	25	21
8	19	11	18	21	14
9	17	7	19	19	12
10	21	9	20	23	13

¿Le parece que el promedio de calificaciones de recordatorio es más alto cuando se usan imágenes?

MIS DATOS EX1047 **10.47 Música en el trabajo** Antes de contratar la instalación de música estéreo transmitida a cada una de sus habitaciones de oficinas, un ejecutivo hizo que su gerente de oficinas seleccionara al azar siete oficinas para instalarles el sistema. El tiempo promedio (en minutos) empleado fuera de estas oficinas, por salidas de los empleados involucrados, se registró antes y después de instalar el sistema de música con los siguientes resultados:

Número de oficina	1	2	3	4	5	6	7
No música	8	9	5	6	5	10	7
Con música	5	6	7	5	6	7	8

¿Sugeriría usted que el ejecutivo proceda con la instalación? Realice una prueba apropiada de hipótesis. Encuentre el valor *p* aproximado e interprete sus resultados.

10.6 INFERENCIAS RESPECTO A LA VARIANZA POBLACIONAL

Ya hemos visto en las secciones precedentes que una estimación de la varianza poblacional σ^2 suele ser necesaria antes de hacer inferencias acerca de medias poblacionales, pero a veces la varianza poblacional σ^2 es el objetivo principal en una investigación experimental. Puede ser *más* importante para el experimentador que la media poblacional. Considere estos ejemplos:

- Los instrumentos de mediciones científicas deben dar lecturas no sesgadas con un muy pequeño error de medición. Un altímetro de un avión que mida la altitud correcta en *promedio* es bastante inútil si las mediciones están en error de hasta 1000 pies arriba o debajo de la altitud correcta.

- Las piezas maquinadas en un proceso de manufactura deben ser producidas con mínima variabilidad para reducir piezas fuera de dimensiones y, por tanto, defectuosas.
- Las pruebas de aptitud deben estar diseñadas de manera que las calificaciones *exhibirán* una cantidad razonable de variabilidad. Por ejemplo, un examen de 800 puntos no es muy discriminatorio si todos los estudiantes obtienen calificaciones entre 601 y 605.

En capítulos previos, hemos usado

$$s^2 = \frac{\Sigma (x_1 - \bar{x})^2}{n - 1}$$

como estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2. Esto significa que, en muestreo repetido, el promedio de todas las estimaciones muestrales será igual al parámetro objetivo, σ^2. Pero, ¿qué tan cercano o lejano del objetivo es probable que esté su estimador s^2? Para contestar esta pregunta, usamos la distribución de muestreo de s^2, que describe su comportamiento en muestreo repetido.

Considere la distribución de s^2 basada en muestreo *aleatorio* repetido de una distribución *normal* con una media y varianza especificadas. Podemos demostrar teóricamente que la distribución empieza en $s^2 = 0$ (porque la varianza no puede ser negativa) con una media igual a σ^2. Su forma es *no simétrica* y cambia con cada tamaño muestral diferente y cada valor diferente de σ^2. Hallar valores críticos para la distribución de muestreo de s^2 sería muy difícil y requeriría tablas separadas para cada varianza poblacional. Por fortuna, podemos simplificar el problema por *estandarización*, como hicimos con la distribución z.

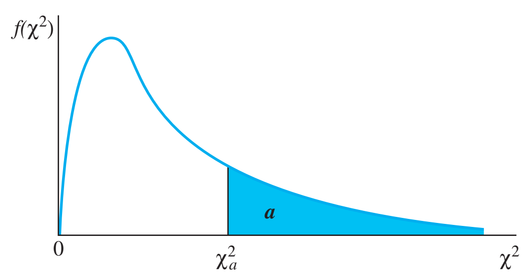
Definición La estadística estandarizada

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$

recibe el nombre de **variable ji cuadrada** y tiene una distribución de muestreo llamada **distribución de probabilidad ji cuadrada**, con $n - 1$ grados de libertad.

La ecuación de la función de densidad para esta estadística es por demás complicada al verla, pero traza la curva que se ve en la figura 10.16.

FIGURA 10.16
Distribución ji cuadrada



Ciertos valores críticos de la estadística ji cuadrada, que se usan para hacer inferencias acerca de la varianza poblacional, han sido tabulados por estadísticos y aparecen en la tabla 5 del apéndice I. Como la forma de la distribución varía con el tamaño muestral n, más precisamente, los grados de libertad, $n - 1$, asociados con s^2, tabla 5, parcialmente reproducidos en la tabla 10.5, se construye exactamente en la misma forma que la tabla t, con los grados de libertad en la primera y última columnas. El símbolo χ^2_a indica que el valor χ^2 tabulado tiene un área a a su derecha (véase la figura 10.16).

TABLA 10.5 **Formato de la tabla ji cuadrada de la tabla 5 del apéndice I**

df	$\chi^2_{.995}$	. . .	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	. . .	$\chi^2_{.005}$	df
1	.0000393		.0039321	.0157908	2.70554	3.84146		7.87944	1
2	.0100251		.102587	.210720	4.60517	5.99147		10.5966	2
3	.0717212		.351846	.584375	6.25139	7.81473		12.8381	3
4	.206990		.710721	1.063623	7.77944	9.48773		14.8602	4
5	.411740		1.145476	1.610310	9.23635	11.0705		16.7496	5
6	.0675727		1.63539	2.204130	10.6446	12.5916		18.5476	6
.	.		.	.	.	.		.	.
.	.		.	.	.	.		.	.
.	.		.	.	.	.		.	.
15	4.60094		7.26094	8.54675	22.3072	24.9958		32.8013	15
16	5.14224		7.96164	9.31223	23.5418	26.2962		34.2672	16
17	5.69724		8.67176	10.0852	24.7690	27.5871		35.7185	17
18	6.26481		9.39046	10.8649	25.9894	28.8693		37.1564	18
19	6.84398		10.1170	11.6509	27.2036	30.1435		38.5822	19
.	.		.	.	.	.		.	.
.	.		.	.	.	.		.	.
.	.		.	.	.	.		.	.

MI CONSEJO

Probando una varianza: $df = n - 1$.

Se puede ver en la tabla 10.5 que, debido a que la distribución no es simétrica y empieza en 0, las áreas de cola superior e inferior deben ser tabuladas para la estadística ji cuadrada. Por ejemplo, el valor $\chi^2_{.95}$ es el valor que tiene 95% del área bajo la curva a su derecha y 5% del área a su izquierda. Este valor corta un área igual a .05 en la cola inferior de la distribución ji cuadrada.

EJEMPLO 10.10

Pruebe su capacidad para usar la tabla 5 del apéndice I al verificar las siguientes frases:

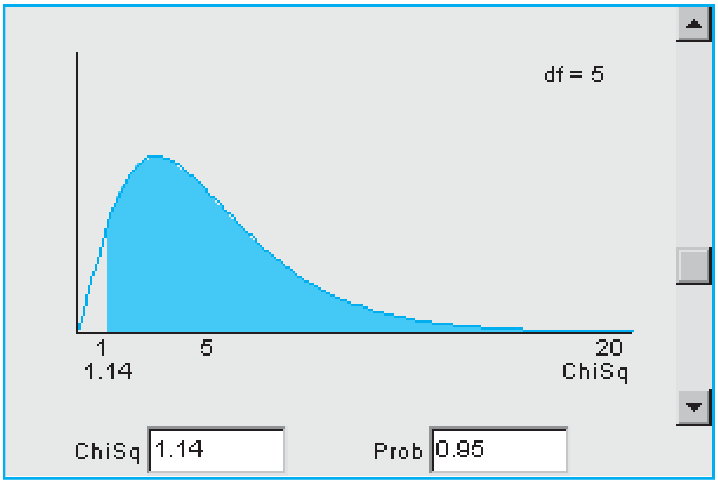
1. La probabilidad de que χ^2, basada en $n = 16$ mediciones ($df = 15$), exceda de 24.9958 es .05.
2. Para una muestra de $n = 6$ mediciones, 95% del área bajo la distribución χ^2 está a la derecha de 1.145476.

Estos valores están sombreados en la tabla 10.5.

MI APPLET

Se puede usar el applet **Chi-Square Probabilities (Probabilidades Ji-cuadrada)** para hallar el valor χ^2 descrito en el ejemplo 10.10. Como el applet da valores χ^2 y sus probabilidades de una cola para los grados de libertad que el usuario seleccione usando el cursor de la derecha del applet, se debe escoger $df = 5$ y teclear .95 en la caja marcada "prob:" parte en la parte inferior del applet. Éste dará el valor de χ^2 que pone .95 en la cola derecha de la distribución χ^2 y por tanto .05 en la cola izquierda. El applet de la figura 10.17 muestra $\chi^2 = 1.14$, que difiere sólo ligeramente respecto del valor del ejemplo 10.10. Usaremos este applet para los ejercicios Mi Applet del final de este capítulo.

FIGURA 10.17
Applet **Chi-Square Probabilities**



La prueba estadística de una hipótesis nula respecto a una varianza poblacional

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

usa el estadístico de prueba

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Observe que cuando H_0 es verdadera, s^2/σ_0^2 debe ser cercana a 1, de modo que χ^2 debe ser cercana a $(n - 1)$, los grados de libertad. Si σ^2 es realmente mayor que el valor hipotético σ_0^2, el estadístico de prueba tenderá a ser mayor a $(n - 1)$ y es probable que caiga hacia la cola superior de la distribución. Si $\sigma^2 < \sigma_0^2$, el estadístico de prueba tenderá a ser menor a $(n - 1)$ y es probable que caiga hacia la cola inferior de la distribución ji cuadrada. Al igual que en otras situaciones de prueba, se puede usar una prueba estadística ya sea de una o de dos colas, dependiendo de la hipótesis alternativa. Esta prueba de hipótesis y el intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para σ^2 están basados ambos en la distribución ji cuadrada y se describen a continuación.

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO A UNA VARIANZA POBLACIONAL

1. Hipótesis nula: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ (o $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$)	$H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

3. Estadístico de prueba: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola

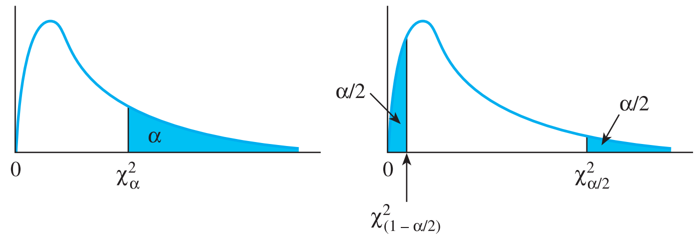
$\chi^2 > \chi^2_\alpha$
(o $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha)}$ cuando la hipótesis alternativa sea $H_a : \sigma^2 < \sigma^2_0$), donde χ^2_α y $\chi^2_{(1-\alpha)}$ son, respectivamente, los valores de cola superior e inferior de χ^2 que pone α en las áreas de cola.

Prueba de dos colas

$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$ o $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha/2)}$, donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ son, respectivamente, los valores de cola superior e inferior de χ^2 que pone $\alpha/2$ en las áreas de cola

o cuando valor $p < \alpha$

Los valores críticos de χ^2 están basados en $(n - 1)$ *df*. Estos valores tabulados se pueden hallar usando la tabla 5 del apéndice I o el applet **Chi-Square Probabilities**.



INTERVALO DE CONFIANZA DE $(1 - \alpha)100\%$ PARA σ^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2}}$$

donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ son los valores χ^2, que localizan la mitad de α en cada cola de la distribución ji cuadrada.
Suposición: La muestra se selecciona al azar de una población normal.

EJEMPLO 10.11

Un fabricante de cemento dice que el concreto preparado con el producto de él tiene resistencia relativamente estable a la compresión y que la resistencia medida en kilogramos por centímetro cuadrado (kg/cm^2) está dentro de un rango de 40 kg/cm^2. Una muestra de $n = 10$ mediciones produjo una media y varianza igual a, respectivamente,

$$\bar{x} = 312 \quad \text{y} \quad s^2 = 195$$

¿Estos datos presentan suficiente evidencia para rechazar lo dicho por el fabricante?

Solución En la sección 2.5, usted aprendió que el rango de un conjunto de mediciones debe ser aproximadamente cuatro desviaciones estándar. Lo dicho por el fabricante de que el rango de las mediciones de resistencia está dentro de 40 kg/cm^2 debe significar que la desviación estándar de las mediciones es casi 10 kg/cm^3 o menos. Para probar su dicho, las hipótesis apropiadas son

$$H_0 : \sigma^2 = 10^2 = 100 \quad \text{contra} \quad H_a : \sigma^2 > 100$$

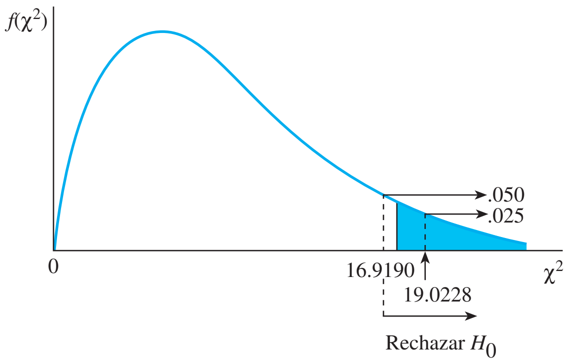
Si la varianza muestral es mucho mayor que el valor hipotético de 100, entonces el estadístico de prueba

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0} = \frac{1755}{100} = 17.55$$

será inusualmente grande, favoreciendo el rechazo de H_0 y aceptación de H_a. Hay dos formas de usar la estadística de prueba para tomar una decisión para esta prueba.

- **El método del valor crítico:** La prueba apropiada requiere una región de rechazo de una cola en la cola derecha de la distribución χ^2. El valor crítico para $\alpha = .05$ y $(n - 1) = 9$ *df* es $\chi^2_{.05} = 16.9190$ de la tabla 5 en el apéndice I. La figura 10.18 muestra la región de rechazo; se puede rechazar H_0 si el estadístico de prueba excede de 16.9190. Como el valor observado del estadístico de prueba $\chi^2 = 17.55$, se puede concluir que la hipótesis nula es falta y que el rango de mediciones de resistencia del concreto excede de lo dicho por el fabricante.

FIGURA 10.18
Región de rechazo y valor *p* (sombreado) para el ejemplo 10.11



- **El método del valor *p*:** El valor *p* para una prueba estadística es el mínimo valor de α para el cual H_0 puede ser rechazado. Se calcula, al igual que en otras pruebas de una cola, como el área en la cola de la distribución χ^2 a la derecha del valor observado, $\chi^2 = 17.55$. Aun cuando algunos paquetes de computadora permiten calcular esta área con toda exactitud, la tabla 5 del apéndice I permite sólo acotar el valor *p*. Como el valor 17.55 está entre $\chi^2_{.050} = 16.9190$ y $\chi^2_{.025} = 19.0228$, el valor *p* está entre .025 y .05. La mayoría de investigadores rechazarían H_0 y presentan estos resultados como significativos al nivel de 5%, o $P < .05$. De nueva cuenta, el investigador puede rechazar H_0 y concluir que el rango de mediciones excede de lo dicho por el fabricante.

EJEMPLO 10.12

Una experimentadora está convencida de que su instrumento de medición tenía una variabilidad medida por la desviación estándar $\sigma = 2$. Durante un experimento, ella registró las mediciones 4.1, 5.2 y 10.2. ¿Estos datos confirman o desaprueban lo dicho por ella? Pruebe la hipótesis apropiada y construya un intervalo de confianza de 90% para estimar el verdadero valor de la varianza de población.

Solución Como no hay nivel de significancia establecido de antemano, se debe escoger usar el método del valor *p* para probar estas hipótesis:

$$H_0 : \sigma^2 = 4 \quad \text{contra} \quad H_a : \sigma^2 \neq 4$$

Use su calculadora científica para verificar que la varianza muestral es $s^2 = 10.57$ y el estadístico de prueba es

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{2(10.57)}{4} = 5.285$$

Como ésta es una prueba de dos colas, la región de rechazo se divide en dos partes, la mitad en cada cola de la distribución χ^2. Si se aproxima el área a la derecha de la estadística de prueba observada, $\chi^2 = 5.285$, se tendrá sólo *la mitad* del valor *p* para la prueba. Como un valor igualmente improbable de χ^2 podría presentarse en la cola inferior de la distribución, con igual probabilidad, se debe *duplicar* el área superior para obtener el valor *p*. Con 2 *df*, el valor observador, 5.29, cae entre $\chi^2_{.10}$ y $\chi^2_{.05}$ de modo que

$$.05 < \frac{1}{2}(\text{ valor } p) < .10 \quad \text{o} \quad .10 < \text{valor } p < .20$$

Como el valor *p* es mayor a .10, los resultados no son estadísticamente significativos. Hay insuficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 4$.

El correspondiente intervalo de confianza de 90% es

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2}}$$

Los valores de $\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ y $\chi^2_{\alpha/2}$ son

$$\chi^2_{(1-\alpha/2)} = \chi^2_{.95} = .102587$$

$$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{.05} = 5.99147$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula para la estimación de intervalo, se obtiene

$$\frac{2(10.57)}{5.99147} < \sigma^2 < \frac{2(10.57)}{.102587} \quad \text{o} \quad 3.53 < \sigma^2 < 206.07$$

Así, se puede estimar la varianza poblacional para que caiga en el intervalo 3.53 a 206.07. Este intervalo de confianza muy ancho indica la poca información sobre la varianza poblacional que se obtiene de una muestra de sólo tres mediciones. En consecuencia, no es de sorprenderse que haya insuficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula $\sigma^2 = 4$. Para obtener más información sobre σ^2, el experimentador necesita aumentar el tamaño muestral.

El comando *MINITAB* **Stat → Basic Statistics → 1 Variance** permite introducir datos sin elaborar o un resumen de estadísticos para efectuar la prueba *F* para una sola varianza, y calcular un intervalo de confianza. La salida impresa *MINITAB* correspondiente al ejemplo 10.12 se muestra en la figura 10.19.

FIGURA 10.19
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 10.12

```
Chi-Square Method (Normal Distribution)
Variable       N    Variance         90% CI    Chi-Square       P
Measurements   3        10.6   (3.5, 206.1)          5.28   0.142
```

10.6 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

10.48 Una muestra aleatoria de $n = 25$ observaciones de una población normal produjo una varianza muestral igual a 21.4. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar que $\sigma^2 > 15$? Pruebe usando $\alpha = .05$.

10.49 Una muestra aleatoria de $n = 15$ observaciones fue seleccionada de una población normal. La media muestral y varianza fueron $\bar{x} = 3.91$ y $s^2 = .3214$. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la varianza poblacional σ^2.

10.50 Una muestra aleatoria de tamaño $n = 7$ de una población normal produjo estas mediciones: 1.4, 3.6, 1.7, 2.0, 3.3, 2.8, 2.9.

a. Calcule la varianza muestral, s^2.

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la varianza poblacional, σ^2.

c. Pruebe $H_0 : \sigma^2 = .8$ contra $H_a : \sigma^2 \neq .8$ usando $\alpha = .05$. Exprese sus conclusiones.

d. ¿Cuál es el valor *p* aproximado para la prueba del inciso c)?

APLICACIONES

10.51 **Precisión de instrumentos** Un instrumento de precisión está garantizado para leer con precisión con variación de no más de 2 unidades. Una muestra de cuatro lecturas de instrumentos en el mismo objeto dio las mediciones 353, 351, 351 y 355. Pruebe la hipótesis nula de que $\sigma = .7$ contra la alternativa de $\sigma < .7$. Use $\alpha = .05$.

10.52 **Precisión de instrumentos, continúa** Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la varianza poblacional del ejercicio 10.51.

10.53 **Potencia de medicamentos** Para pacientes tratados debidamente, los medicamentos prescritos por médicos deben tener una potencia que sea definida con precisión. En consecuencia, los valores de distribución de potencia para envíos de un medicamento no sólo deben tener un valor medio como se especifica en el envase del medicamento, sino que también la variación en potencia debe ser pequeña. De otro modo, los farmacéuticos distribuirían recetas que serían peligrosamente potentes o tendrían una baja potencia y serían ineficaces. Un fabricante de medicinas dice que su medicina está marcada con una potencia de $5 \pm .1$ miligramos por centímetro cúbico (mg/cc). Una muestra aleatoria de cuatro envases dio lecturas de potencia iguales a 4.94, 5.09, 5.03 y 4.90 mg/cc.

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la potencia media difiere de 5 mg/cc?

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la variación en potencia difiere de los límites de error especificados por el fabricante? [SUGERENCIA: A veces es difícil determinar con exactitud lo que se entiende por límites de potencia especificados por un fabricante. Como éste implica que los valores de potencia caerán en los intervalos $5 \pm .1$ mg/cc con muy alta probabilidad, es decir que la implicación es *siempre,* supongamos que el rango .2; o (4.9 a 5.1), representa 6σ, como lo sugiere la Regla Empírica. Observe que hacer que el rango sea igual a 6σ en lugar de 4σ pone una interpretación rigurosa en lo dicho por el fabricante. Deseamos que la potencia caiga en el intervalo $5 \pm .1$ con muy alta probabilidad.]

10.54 **Potencia de medicamentos, continúa** Consulte el ejercicio 10.53. La prueba de 60 envases de medicamento adicionales seleccionados al azar dio una media muestral y varianza igual a 5.04 y .0063 (para el total de $n = 64$ envases). Usando un intervalo de confianza de 95%, estime la varianza de las mediciones de potencia hechas por el fabricante.

10.55 **Cascos de seguridad** Un fabricante de cascos de seguridad para trabajadores de la construcción, está preocupado por la media y la variación de las fuerzas que transmiten los cascos a los usuarios cuando son sometidos a una fuerza externa estándar. El fabricante desea que la fuerza media transmitida por cascos sea de 800 libras (o menos), muy por debajo del límite legal de 1000 libras y que σ sea menor a 40. Se probó una muestra aleatoria de $n = 40$ cascos y se encontró que la media y varianza muestrales eran iguales a 825 libras y 2350 libras^2, respectivamente.

a. Si $\mu = 800$ y $\sigma = 40$, ¿es probable que cualquier casco, sometido a la fuerza externa estándar, transmita una fuerza de más de 1000 libras al usuario? Explique.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que, cuando los casos son sometidos a la fuerza externa estándar, la fuerza media transmitida por los cascos excede de 800 libras?

10.56 **Cascos de seguridad, continúa** Consulte el ejercicio 10.55. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que σ excede de 40?

MIS DATOS EX1057 **10.57** **Focos eléctricos** A un fabricante de focos eléctricos industriales le gusta que éstos tengan una vida media que sea aceptable para sus clientes, además de tener una variación en vida que sea relativamente pequeña. Si algunos focos se funden demasiado pronto en su vida útil, los clientes se molestan y cambian a productos de la competencia. Grandes variaciones arriba de la media reducen las ventas de repuestos y una variación en general interrumpe los programas de reposición de los clientes. Una muestra de 20 focos probados produjo las siguientes duraciones de vida útil (en horas):

2100	2302	1951	2067	2415	1883	2101	2146	2278	2019
1924	2183	2077	2392	2286	2501	1946	2161	2253	1827

El fabricante desea controlar la variabilidad en duración de vida útil para que σ se menor a 150 horas. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el fabricante está alcanzado su objetivo? Pruebe usando $\alpha = .01$.

10.7 COMPARACIÓN DE DOS VARIANZAS POBLACIONALES

Así como una sola varianza poblacional a veces es importante para un experimentador, usted también necesita comparar dos varianzas poblacionales. Puede tener que comparar la precisión de un aparato de medición con la de otro, la estabilidad del proceso de manufactura con la de otro, o incluso la variabilidad en el procedimiento de calificaciones de un profesor universitario con el de otro.

Una forma de comparar dos varianzas poblacionales, σ_1^2 y σ_2^2, es usar la razón entre las varianzas muestrales, s_1^2/s_2^2. Si s_1^2/s_2^2 es casi igual a 1, se encuentra poca evidencia para indicar que σ_1^2 y σ_2^2 son iguales. Por otra parte, un valor muy grande o muy pequeño para s_1^2/s_2^2 da evidencia de una diferencia en las varianzas poblacionales.

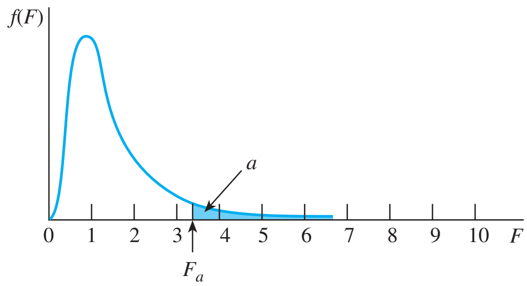
¿Qué tan grande debe ser s_1^2/s_2^2 para que haya evidencia suficiente para rechazar la siguiente hipótesis nula?

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

La respuesta a esta pregunta puede hallarse al estudiar la distribución de s_1^2/s_2^2 en un muestreo repetido.

Cuando muestras aleatorias se sacan de entre dos poblaciones *normales* con *varianzas iguales*, es decir, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; entonces s_1^2/s_2^2 tiene una distribución de probabilidad en un muestreo repetido que los estadísticos conocen como **distribución *F***, que se ilustra en la figura 10.20.

FIGURA 10.20
Una distribución F con $df_1 = 10$ y $df_2 = 10$



SUPOSICIONES PARA QUE s_1^2/s_2^2 TENGA UNA DISTRIBUCIÓN *F*

- Muestras aleatorias e independientes se sacan de cada una de dos poblaciones normales.
- La variabilidad de las mediciones en las dos poblaciones es igual y puede ser medida por una varianza común, σ^2; esto es, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

No es importante que usted conozca la ecuación compleja de la función de densidad para F. Para nuestros fines, sólo se necesita usar los valores críticos bien tabulados de F dados en la tabla 6 en el apéndice I.

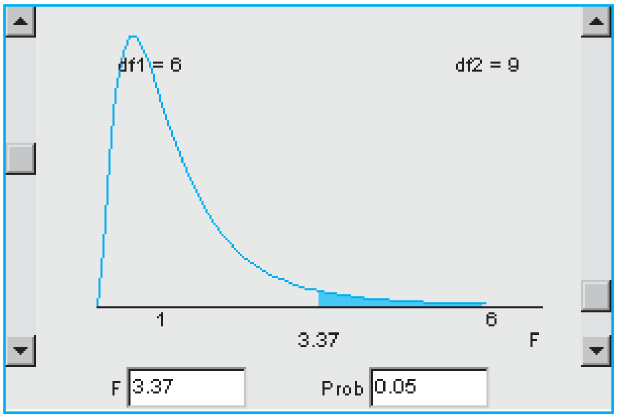
Los valores críticos de F y valores p para pruebas de significancia también se pueden hallar usando el applet ***F* Probabilities (Probabilidades *F*)** que se ve en la figura 10.21.

MI CONSEJO
Prueba de dos varianzas:
$df_1 = n_1 - 1$ y
$df_2 = n_2 - 1$

Al igual que la distribución χ^2, la forma de la distribución F es no simétrica y depende del número de grados de libertad asociados con s_1^2 y s_2^2, representados como $df_1 = (n_1 - 1)$ y $df_2 = (n_2 - 1)$, respectivamente. Esto complica la tabulación de valores críticos de la distribución F porque se requiere de una tabla para cada combinación diferente de df_1, df_2 y a.

En la tabla 6 del apéndice I, los valores críticos de F para áreas de cola derecha correspondientes a a = .100, .050, .025, .010 y .005 están tabulados para varias combinaciones de df_1 grados de libertad del numerador y df_2 grados de libertad del denominador. Una parte de la tabla 6 se reproduce en la tabla 10.6. El número de grados de libertad df_1 del numerador aparece en el margen superior y el número de grados de libertad del denominador df_2 aparece a lo largo del margen lateral. Los valores de a se encuentran en la segunda columna. Para una combinación fija de df_1 y df_2, los valores críticos apropiados de F se encuentran en la línea indizada por el valor de a requerido.

FIGURA 10.21
Applet *F* Probabilities



EJEMPLO 10.13

Compruebe su capacidad para usar la tabla 6 del apéndice I al verificar los siguientes enunciados:

1. El valor de F con área .05 a su derecha para $df_1 = 6$ y $df_2 = 9$ es 3.37.
2. El valor de F con área .05 a su derecha para $df_1 = 5$ y $df_2 = 10$ es 3.33.
3. El valor de F con área .01 a su derecha para $df_1 = 6$ y $df_2 = 9$ es 5.80.

Estos valores están sombreados en la tabla 10.6.

TABLA 10.6 **Formato para la tabla *F* de la tabla 6 del apéndice I**

		df_1					
df_2	a	1	2	3	4	5	6
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20
	.050	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0
	.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1
	.010	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859
	.005	16211	20000	21615	22500	23056	23437
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33
	.005	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91
	.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84
.	.			.			.
.	.			.			.
.	.			.			.
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54

La prueba estadística de la hipótesis nula

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

utiliza el estadístico de prueba

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Cuando la hipótesis alternativa implica una prueba de una cola, esto es,

$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

se puede hallar el valor crítico de cola derecha para rechazar H_0 directamente de la tabla 6 del apéndice I, pero, cuando la hipótesis alternativa requiera una prueba de dos colas, es decir,

$H_0 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

la región de rechazo se divide entre las colas superior e inferior de la distribución F. Estos valores críticos de cola izquierda *no se dan* en la tabla 6 por la siguiente razón: el experimentador está libre de decidir a cuál de las dos poblaciones llamar "Población 1". Si siempre escoge llamar "Población 1" a la población con la varianza muestral *más grande*, entonces el valor observado de su estadística de prueba siempre estará en la cola derecha de la distribución F. Aun cuando la mitad de la región de rechazo, el área $\alpha/2$ a su izquierda, estará en la cola inferior de la distribución, nunca será necesario usarla. Pero recuerde estos puntos, para una prueba de dos colas:

- El área de la cola derecha de la región de rechazo es sólo $\alpha/2$.
- El área a la derecha de la estadística de prueba observada es sólo (valor p)/2.

Los procedimientos formales para una prueba de hipótesis y un intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para dos varianzas poblacionales se muestran a continuación.

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO A LA IGUALDAD DE DOS VARIANZAS POBLACIONALES

1. Hipótesis nula: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (o $H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$)	$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

3. Estadístico de prueba:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ donde s_1^2 es la varianza muestral más grande	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$F > F_\alpha$	$F > F_{\alpha/2}$

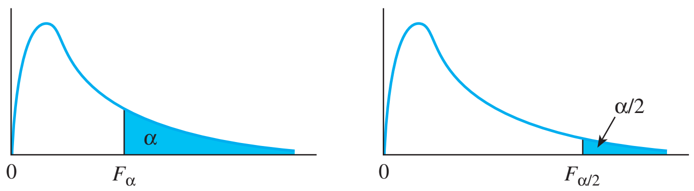
o cuando valor $p < \alpha$

(continúa)

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO A LA IGUALDAD DE DOS VARIANZAS POBLACIONALES

(continúa)

Los valores críticos de F_α y $F_{\alpha/2}$ están basados en $df_1 = (n_1 - 1)$ y $df_2 = (n_2 - 1)$. Estos valores tabulados, para $a = .100, .050, .025, .010$ y $.005$, se pueden hallar usando la tabla 6 del apéndice I, o el applet ***F* Probabilities**.



Suposiciones: Las muestras se seleccionan al azar y en forma independiente de las poblaciones normalmente distribuidas.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA σ_1^2/σ_2^2

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)\frac{1}{F_{df_1,df_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)F_{df_2,df_1}$$

donde $df_1 = (n_1 - 1)$ y $df_2 = (n_2 - 1)$. F_{df_1,df_2} es el valor crítico tabulado de F correspondiente a df_1 y df_2 grados de libertad en el numerador y denominador de F, respectivamente, con área $\alpha/2$ a su derecha.
Suposiciones: Las muestras se seleccionan al azar y en forma independiente de las poblaciones normalmente distribuidas.

EJEMPLO 10.14

Un experimentador está preocupado porque la variabilidad de respuestas que usan dos procedimientos experimentales diferentes puede no ser igual. Antes de realizar su investigación, realiza un estudio previo con muestras aleatorias de 10 y 8 respuestas y obtiene $s_1^2 = 7.14$ y $s_2^2 = 3.21$, respectivamente. ¿Las varianzas muestrales presentan suficiente evidencia para indicar que las varianzas poblacionales son desiguales?

Solución Suponga que las poblaciones tienen distribuciones de probabilidad que poseen una razonable forma de montículo y que por tanto satisface, para todos los fines prácticos, la suposición de que las poblaciones son normales. Se desea probar estas hipótesis:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{contra} \quad H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Usando la tabla 6 del apéndice I para $\alpha/2 = .025$, se puede rechazar H_0 cuando $F > 4.82$ con $\alpha = .05$. El valor calculado de la estadística de prueba es

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{7.14}{3.21} = 2.22$$

Debido a que el estadístico de prueba no cae en la región de rechazo, no se puede rechazar $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Por tanto, hay insuficiente evidencia para indicar una diferencia en las varianzas poblacionales.

EJEMPLO 10.15

Consulte el ejemplo 10.14 y encuentre un intervalo de confianza de 90% para σ_1^2/σ_2^2.

Solución El intervalo de confianza de 90% para σ_1^2/σ_2^2 es

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)\frac{1}{F_{df_1,df_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)F_{df_2,df_1}$$

donde

$$s_1^2 = 7.14 \qquad s_2^2 = 3.21$$
$$df_1 = (n_1 - 1) = 9 \qquad df_2 = (n_2 - 1) = 7$$
$$F_{9,7} = 3.68 \qquad F_{7,9} = 3.29$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula para el intervalo de confianza, se obtiene

$$\left(\frac{7.14}{3.21}\right)\frac{1}{3.68} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \left(\frac{7.14}{3.21}\right)3.29 \quad \text{o} \quad .60 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 7.32$$

La estimación calculada del intervalo de .60 a 7.32 incluye 1.0, el valor hipotético en H_0. Esto indica que es muy posible que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y por tanto concuerda con las conclusiones de prueba. No rechace $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

El comando **Stat → Basic Statistics → 2 Variances** del *MINITAB* permite introducir ya sea información sin procesar o estadísticas resumidas para efectuar la prueba F para la igualdad de varianzas y calcula intervalos de confianza para las dos desviaciones estándar individuales (que no hemos analizado). La salida impresa relevante, que contiene el estadístico F y su valor p, está sombreada en la figura 10.22.

FIGURA 10.22
Salida impresa del *MINITAB* para el ejemplo 10.14

Prueba para varianzas iguales

```
95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations
Sample    N     Lower     StDev     Upper
     1   10   1.74787   2.67208   5.38064
     2    8   1.12088   1.79165   4.10374

F-Test (Normal Distribution)
Test statistic = 2.22, p-value = 0.304
```

EJEMPLO 10.16

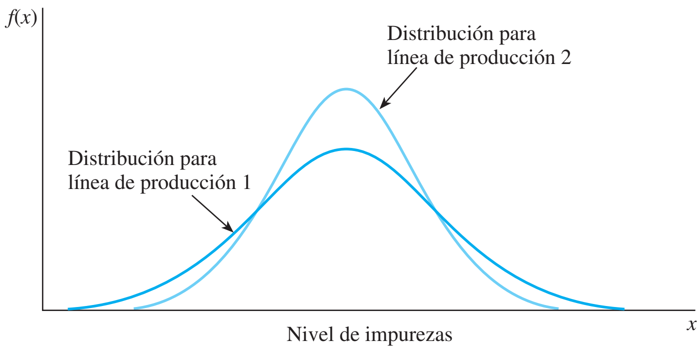
La variabilidad en la cantidad de impurezas, presente en un lote de un producto químico empleado para un proceso particular, depende de la duración en que el proceso está en operación. Un fabricante que utiliza dos líneas de producción, 1 y 2, ha hecho un ligero ajuste a la línea 2, esperando con ello reducir la variabilidad así como la cantidad promedio de impurezas en el producto químico. Muestras de $n_1 = 25$ y $n_2 = 25$ mediciones de los dos lotes dan estas medias y varianzas:

$$\bar{x}_1 = 3.2 \qquad s_1^2 = 1.04$$
$$\bar{x}_2 = 3.0 \qquad s_2^2 = .51$$

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la variabilidad del proceso es menor para la línea 2?

Solución El experimentador piensa que los niveles promedio de impurezas son los mismos para las dos líneas de producción pero que su ajuste puede haber disminuido la variabilidad de los niveles para la línea 2, como se ilustra en la figura 10.23. Este ajuste sería bueno para la compañía porque disminuiría la probabilidad de producir envíos del producto químico con niveles de impureza inaceptablemente altos.

FIGURA 10.23
Distribuciones de mediciones de impureza para dos líneas de producción



Para determinar la disminución en variabilidad, la prueba de hipótesis es

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{contra} \quad H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

y el valor observado para esta prueba estadística es

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1.04}{.51} = 2.04$$

Usando el método del valor p, se pueden limitar el valor p de una cola usando la tabla 6 del apéndice I con $df_1 = df_2 = (25 - 1) = 24$. El valor observado de F cae entre $F_{.050} = 1.98$ y $F_{.025} = 2.27$, de modo que $.025 < \text{valor } p < .05$. Los resultados son juzgados como significativos al nivel del 5% y H_0 es rechazada. Se puede concluir que la variabilidad de la línea 2 es menor que la de la línea 1.

La prueba F de la diferencia en dos varianzas poblacionales completa la batería de pruebas que usted ha aprendido en este capítulo para hacer inferencias acerca de parámetros poblacionales bajo estas condiciones:

- Los tamaños muestrales son pequeños.
- La muestra o muestras son sacados de poblaciones normales.

Usted encontrará que las distribuciones F y χ^2, así como la distribución t de Student, son muy importantes en otras aplicaciones en los capítulos que siguen. Se usarán para diferentes estimadores diseñados para contestar tipos diferentes de preguntas inferenciales, pero las técnicas básicas para hacer inferencias siguen siendo iguales.

En la siguiente sección, repasamos las suposiciones requeridas para todas estas herramientas de inferencia y analizamos las opciones que existen cuando las suposiciones no parecen ser razonablemente correctas.

10.7 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

10.58 Muestras aleatorias independientes de dos poblaciones normales produjeron las varianzas siguientes:

Tamaño muestral	Varianza muestral
16	55.7
20	31.4

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que σ_1^2 difiere de σ_2^2. Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprete su valor.

10.59 Consulte el ejercicio 10.58 y encuentre un intervalo de confianza de 95% para σ_1^2/σ_2^2.

10.60 Muestras aleatorias independientes de dos poblaciones normales produjeron las varianzas dadas:

Tamaño muestral	Varianza muestral
13	18.3
13	7.9

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprete su valor.

APLICACIONES

10.61 Calificaciones del SAT Exámenes del SAT en química y física[11] para dos grupos de 15 estudiantes, habiendo cada uno de éstos seleccionado estos exámenes, se dan a continuación:

Química	Física
$\bar{x} = 629$	$\bar{x} = 643$
$s = 110$	$s = 107$
$n = 15$	$n = 15$

Para usar la prueba t de dos muestras con una estimación agrupada de σ^2, se debe suponer que las dos varianzas poblacionales son iguales. Pruebe esta suposición usando la prueba F de igualdad de varianzas. ¿Cuál es el valor p aproximado para la prueba?

10.62 Calidad de un producto La estabilidad de mediciones en un producto manufacturado es importante para mantener la calidad del producto. De hecho, a veces es mejor tener una pequeña variación en el valor medido de alguna característica importante de un producto, así como tener la media del proceso ligeramente fuera del objetivo, que sufrir una amplia variación con valor medio que perfectamente se ajuste a los requisitos. Esta última situación puede producir un porcentaje más alto de productos defectuosos que la primera. Un fabricante de focos eléctricos sospechaba que una de sus líneas de producción estaba produciendo focos con una amplia variación en duración de vida útil. Para probar su teoría, comparó las duraciones de vida útil de $n = 50$ focos muestreados al azar de la línea sospechosa y $n = 50$ de una línea que parecía estar "en control". Las medias muestrales y varianzas para las dos muestras fueron como sigue:

"Líneas sospechosa"	Línea "en control"
$\bar{x}_1 = 1520$	$\bar{x}_2 = 1476$
$s_1^2 = 92000$	$s_2^2 = 37000$

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que los focos producidos por la "línea sospechosa" tienen una varianza más grande en duración que los producidos por la línea que se supone está en control? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprete su valor.

10.63 Construya un intervalo de confianza de 90% para la razón de varianza en el ejercicio 10.62.

10.64 Atún III En el ejercicio 10.25 y el conjunto de datos EX1025, se realizó una prueba para detectar una diferencia en el promedio de precios de atún claro en agua contra atún claro en aceite.

a. ¿Qué suposición tuvo que hacerse respecto a las varianzas poblacionales para que la prueba fuera válida?

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que las varianzas violan la suposición en el inciso a)? Pruebe usando $\alpha = .05$.

10.65 Corredores y ciclistas III Consulte el ejercicio 10.26. Susan Beckham y colegas realizaron un experimento que comprendía 10 corredores sanos y 10 ciclistas sanos, para determinar si hay diferencias significativas en mediciones de presión dentro del compartimiento del músculo anterior para corredores y ciclistas.[7] Los datos, es decir, presión del compartimiento, en milímetros de mercurio (Hg), son como sigue:

	Corredores		Ciclistas	
Afección	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar
En reposo	14.5	3.92	11.1	3.98
80% máximo consumo de O_2	12.2	3.49	11.5	4.95
Máximo consumo de O_2	19.1	16.9	12.2	4.47

Para cada una de las tres variables medidas en este experimento, pruebe para ver si hay una diferencia significativa en las varianzas para corredores contra ciclistas. Encuentre los valores p aproximados para cada una de estas pruebas. ¿Será apropiada una prueba t de dos muestras con una estimación agrupada de σ^2 para estas tres variables? Explique.

10.66 Impurezas Un fabricante farmacéutico compra un material particular a dos proveedores diferentes. El nivel medio de impurezas en la materia prima es aproximadamente igual para ambos proveedores, pero el fabricante está preocupado por la variabilidad de las impurezas de un embarque a otro. Si el nivel de impurezas tiende a variar en forma excesiva de una fuente de abastecimiento, podría afectar la calidad del producto farmacéutico. Para comparar la variación en el porcentaje de impurezas de cada uno de los dos proveedores, el fabricante selecciona 10 envíos de cada uno de ellos y mide el porcentaje de impurezas en la materia prima para cada embarque. Las medias muestrales y varianzas se muestran en la tabla.

Proveedor A	Proveedor B
$\bar{x}_1 = 1.89$	$\bar{x}_2 = 1.85$
$s_1^2 = .273$	$s_2^2 = .094$
$n_1 = 10$	$n_2 = 10$

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en la variabilidad de los niveles de impureza de envíos para los dos proveedores? Pruebe usando $\alpha = .01$. Con base en los resultados de su prueba, ¿qué recomendación se haría al fabricante de productos farmacéuticos?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para σ_2^2 e interprete sus resultados.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo decido cuál prueba usar?

¿Está usted interesado en probar medias? Si el diseño comprende:

a. Una muestra aleatoria, use la estadística t de una muestra.
b. Dos muestras aleatorias independientes, ¿son iguales las varianzas poblacionales?
   i. Si son iguales, use la estadística t de dos muestras con s^2 agrupada.
   ii. Si son desiguales, use la t sin agrupar con *df* estimado.
c. Dos muestras pareadas con pares aleatorios, use una t de una muestra para analizar diferencias.

¿Está usted interesado en probar varianzas? Si el diseño comprende:

a. Una muestra aleatoria, use la prueba χ^2 para una sola varianza.
b. Dos muestras aleatorias independientes, use la prueba F para comparar dos varianzas.

10.8 REPASO DE SUPOSICIONES DE MUESTRA PEQUEÑA

Todas los procedimientos de prueba y estimación estudiados en este capítulo, requieren que los datos satisfagan ciertas condiciones para que las probabilidades de error (para las pruebas) y los coeficientes de confianza (para los intervalos de confianza), sean iguales a los valores que se hayan especificado. Por ejemplo, si el experimentador puede construir lo que piensa que es un intervalo de confianza de 95%, puede estar seguro que, en muestreo repetido, 95% (y no 85% o 75% o menos) de todos estos intervalos contendrán el parámetro de interés. Estas condiciones se resumen en estas suposiciones.

SUPOSICIONES

1. Para todas las pruebas e intervalos de confianza descritos en este capítulo, se supone que las **muestras se seleccionan al azar de poblaciones normalmente distribuidas**.
2. Cuando se seleccionan dos muestras, se supone que se **seleccionan en forma independiente** excepto en el caso del experimento de diferencia pareada.
3. Para pruebas o intervalos de confianza respecto a la diferencia entre dos medias poblacionales μ_1 y μ_2 con base en muestras aleatorias independientes, se supone que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

En realidad, usted nunca sabrá todo acerca de la población muestreada. Si lo sabía, no habría necesidad de muestreo o de estadísticas. También es muy improbable que una población satisfaga *exactamente* las suposiciones dadas en la caja. Por fortuna, los procedimientos presentados en este capítulo dan buenas inferencias cuando los datos exhiben desviaciones moderadas desde las condiciones necesarias.

Un procedimiento estadístico que no es sensible a desviaciones desde las condiciones en las que está basado se dice que es **robusto**. Las pruebas t de Student son muy robustas para desviaciones moderadas desde normalidad. También, mientras los tamaños muestrales sean casi iguales, no hay mucha diferencia entre las estadísticas t agrupadas y no agrupadas para la diferencia en dos medias poblacionales. Sin embargo, si los tamaños muestrales no son claramente iguales y si las varianzas poblacionales son desiguales, la estadística t agrupada da conclusiones imprecisas.

Si usted está preocupado de que sus datos no satisfagan las suposiciones, hay otras opciones:

- Si puede seleccionar muestras relativamente grandes, puede usar uno de los procedimientos de muestra grande de los capítulos 8 y 9, que no se apoyan en la normalidad o en suposiciones de varianza iguales.
- Puede usar una *prueba no paramétrica* para contestar sus preguntas inferenciales. Estas pruebas han sido desarrolladas específicamente para que pocas o ninguna suposición distribucional se requieran para su uso. Las pruebas que se puedan usar para comparar las ubicaciones o variabilidad de dos poblaciones se presentan en el capítulo 15.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Diseños experimentales para muestras pequeñas

1. **Una muestra aleatoria:** La población muestreada debe ser normal
2. **Dos muestras aleatorias independientes:** Ambas poblaciones muestreadas deben ser normales
   a. Las poblaciones tienen una varianza común σ^2
   b. Las poblaciones tienen varianzas diferentes: σ_1^2 y σ_2^2
3. **Diseño de una diferencia pareada** o **pares acoplados:** Las muestras no son independientes

II. Pruebas estadísticas de significancia

1. Con base en las distribuciones t, F y χ^2
2. Use el mismo procedimiento que en el capítulo 9
3. **Región de rechazo —valores críticos** y **niveles de significancia:** con base en las distribuciones t, F o χ^2 con grados de libertad apropiados
4. **Pruebas de parámetros poblacionales:** una sola media, la diferencia entre dos medias, una sola varianza y la razón entre dos varianzas

III. Estadística de prueba de muestra pequeña

Para probar uno de los parámetros poblacionales cuando los tamaños muestrales sean pequeños, use la siguiente estadística de prueba:

Parámetro	Estadístico de prueba	Grados de libertad
μ	$t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$n-1$
$\mu_1-\mu_2$ (varianzas iguales)	$t=\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$	n_1+n_2-2
$\mu_1-\mu_2$ (varianzas desiguales)	$t\approx\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	Aproximación Satterthwaite
$\mu_1-\mu_2$ (muestras pareadas)	$t=\dfrac{\bar{d}-\mu_d}{s_d/\sqrt{n}}$	$n-1$
σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$n-1$
σ_1^2/σ_2^2	$F=s_1^2/s_2^2$	n_1-1 y n_2-1

MI MINITAB

Prueba y estimación de muestra pequeña

Las pruebas e intervalos de confianza para medias poblacionales basadas en la distribución t de Student se encuentran en un submenú de *MINITAB* si se selecciona **Stat** → **Basic Statistics**. El usuario verá opciones para **1-Sample t**, **2-Sample t** y **Paired t**, que generarán cuadros de diálogo para los procedimientos en la secciones 10.3, 10.4 y 10.5, respectivamente. El usuario debe escoger las columnas en las que los datos se guarden y las hipótesis nula y alternativa a probarse (o el coeficiente de confianza para un intervalo de confianza). En el caso de la prueba t de dos muestras, se debe indicar si las varianzas poblacionales se suponen iguales o desiguales, de modo que el *MINITAB* pueda efectuar la prueba correcta. Exhibiremos algunos de los cuadros de diálogo y salidas de ventana Session para los ejemplos de este capítulo, empezando con la prueba t de una muestra del ejemplo 10.3.

Primero, se introducen los seis pesos registrados, es decir, .46, 61, .52, .48, .57, .54 en la columna C1 y se les nombra "Pesos". Use **Stat** → **Basic Statistics** → **1-Sample t** para generar el cuadro de diálogo de la figura 10.24. Para probar $H_0 : \mu = .5$ contra $H_a : \mu > .5$, use la lista de la izquierda para seleccionar "Pesos" para la caja marcada "Samples in Columns". Verifique la caja marcada "Perform hypothesis test". A continuación, ponga su cursor en la caja marcada "Hypothesized mean:" e introduzca **.5** como el valor de prueba. Finalmente, use **Options** y el menú descendente marcado "Alternative" para seleccionar "greater than". Dé un clic en **OK** dos veces para obtener la salida de la figura 10.25. Observe que *MINITAB* produce un intervalo de confianza de uno o de dos lados para la media poblacional única, consistente con la hipótesis alternativa que ha escogido. Puede cambiar el coeficiente de confianza desde el predeterminado de **.95** en la caja **Options**. También, la opción **Graphs** producirá un histograma, una gráfica de caja o una gráfica de valor individual de los datos en la columna C1.

Los datos para una prueba t de dos muestras con muestras independientes se pueden introducir en la hoja de trabajo en una de dos formas:

FIGURA 10.24

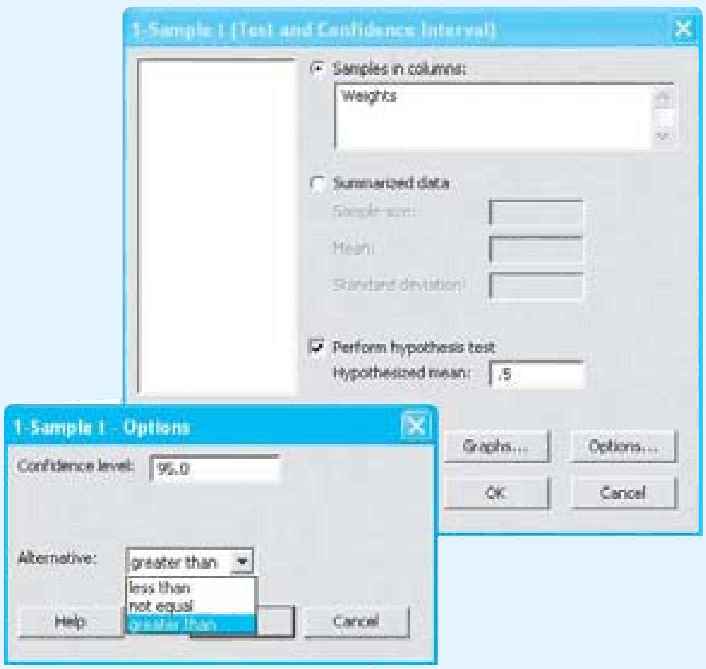
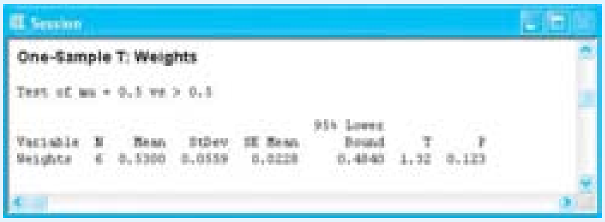


FIGURA 10.25



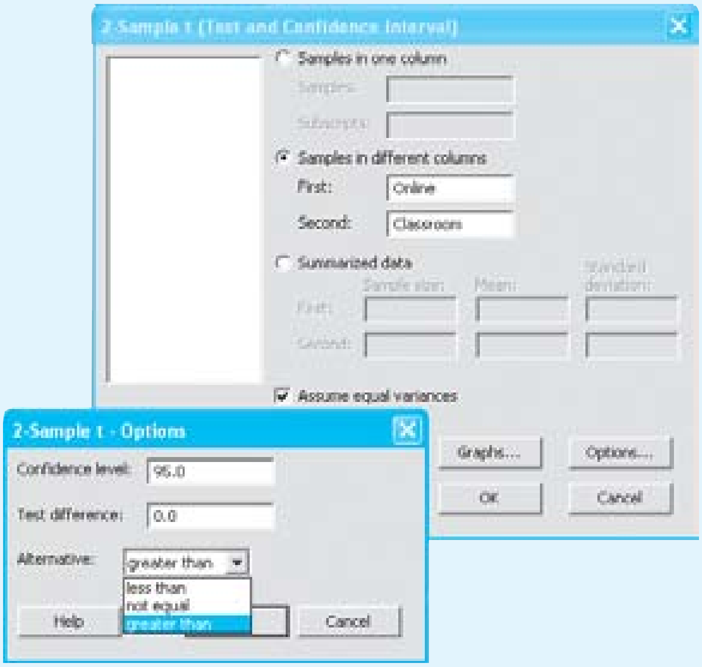
- Introduzca mediciones desde ambas muestras en una sola columna e introduzca números (1 o 2) en una segunda columna para identificar la muestra de la cual proviene la medición.
- Introduzca las muestras en dos columnas separadas.

Si el usuario no tiene los datos sin elaborar, pero sí tiene estadísticas en resumen como la media muestral, desviación estándar y tamaño muestral, *MINITAB* 15 le permitirá usar estos valores al seleccionar el botón de radio marcado “Summarized data” e introducir los valores apropiados en las cajas.

Use el segundo método e introduzca los datos del ejemplo 10.5 en las columnas C2 y C3. A continuación use **Stat** → **Basic Statistics** → **2-Sample t** para generar el cuadro de diálogo en la figura 10.26. Verifique “Samples in different columns”, seleccionando C2 y C3 de la caja de la izquierda. Verifique la caja “Assume equal variances” y seleccione la hipótesis alternativa apropiada de la caja Opciones. (De otro modo, *MINITAB* efectuará la aproximación de Satterthwaite para varianzas desiguales.) La salida de dos muestras cuando el usuario dé un clic en **OK** dos veces automáticamente contiene un intervalo de confianza de 95% de una o de dos colas, así como el estadístico de prueba y valor *p* (se puede cambiar el coeficiente de confianza si se desea). La salida para el ejemplo 10.5 se muestra en la figura 10.13.

Para una prueba de diferencia pareada, las dos muestras se introducen en columnas separadas, lo cual hicimos con los datos de desgaste en llantas en la tabla 10.3. Use **Stat** → **Basic Statistics** → **Paired t** para generar el cuadro de diálogo de la figura 10.27.

FIGURA 10.26



Si el usuario tiene sólo resumenes de estadísticos, es decir la media muestral y desviación estándar de las diferencias y tamaño muestral, *MINITAB* le permitirá usar estos valores al seleccionar el botón de radio marcado "Summarized data" e introducir los valores apropiados en las cajas. Seleccione C4 y C5 del cuadro de la izquierda y use **Options** para escoger la hipótesis alternativa apropiada. Puede cambiar el coeficiente de confianza o el valor de prueba (el valor predeterminado es cero). Cuando dé un clic en **OK** dos veces, obtendrá la salida que se ve en la figura 10.15.

El comando **Stat** → **Basic Statistics** → **2 Variances** permite introducir ya sea datos sin elaborar o estadísticas en resumen para efectuar la prueba F para la igualdad de varianzas, como se ve en la figura 10.28. El comando **Stat** → **Basic Statistics** → **1 Variance** permitirá efectuar la prueba χ^2 y construir un intervalo de confianza para una sola varianza poblacional, σ^2.

FIGURA 10.27

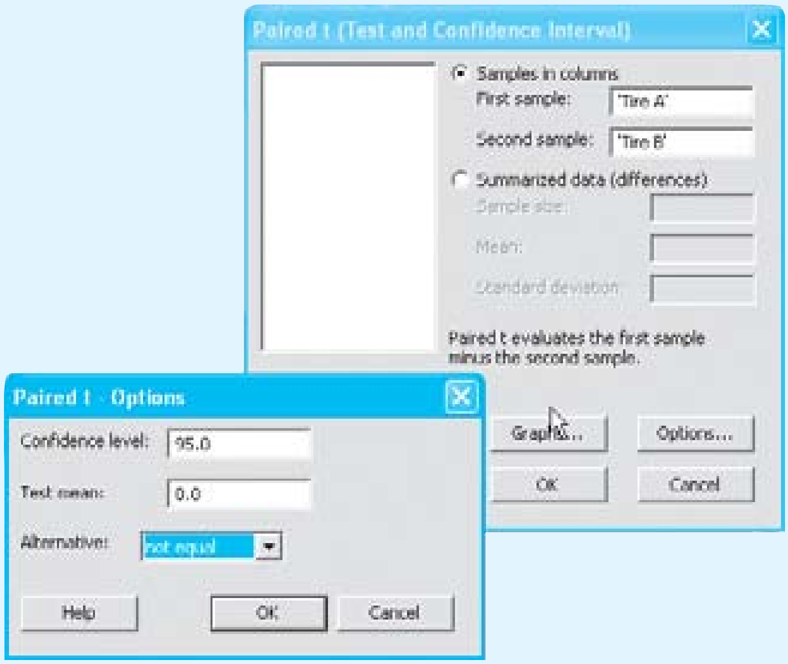
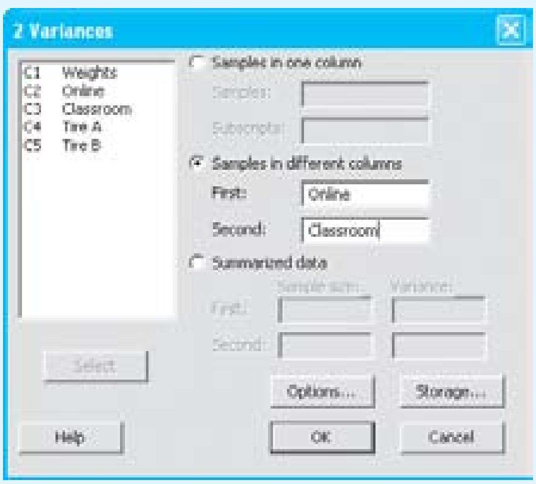


FIGURA 10.28



Ejercicios suplementarios

10.67 ¿Qué suposiciones se hacen cuando se usa la prueba t de Student para probar una hipótesis respecto a una media poblacional?

10.68 ¿Qué suposiciones se hacen alrededor de las poblaciones de las que se obtienen muestras aleatorias, cuando se usa la distribución t para hacer inferencias de muestra pequeña respecto a la diferencia en medias poblacionales?

10.69 ¿Por qué usar observaciones pareadas para estimar la diferencia entre dos medias poblacionales, en lugar de la estimación basada en muestras aleatorias independientes seleccionadas de las dos poblaciones? ¿Un experimento pareado es siempre preferible? Explique.

10.70 Impurezas II Un fabricante puede tolerar una pequeña cantidad (.05 miligramos por litro (mg/l)) de impurezas en una materia prima necesaria para manufacturar su producto. Debido a que la prueba de laboratorio para las impurezas está sujeta a error experimental, el fabricante prueba 10 veces cada lote. Suponga que el valor medio del error experimental es 0 y, por tanto, que el valor medio de las 10 lecturas de prueba es una estimación insesgada de la verdadera cantidad de las impurezas en el lote. Para un lote particular de materia prima, la media de las 10 lecturas de prueba es .058 mg/l, con una desviación estándar de .012 mg/l. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la cantidad de impurezas en el lote excede de .05 mg/l? Encuentre el valor p para la prueba e interprete su valor.

10.71 Pino rojo El crecimiento del tallo principal, medido para una muestra de 17 árboles de pino rojo de cuatro años de edad, produjo una media y desviación estándar igual a 11.3 y 3.4 pulgadas, respectivamente. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para el crecimiento medio de una población de árboles de pino rojo de cuatro años de edad sujetos a condiciones ambientales similares.

10.72 Hidróxido de sodio El objeto de un experimento de química general es determinar la cantidad (en mililitros) de solución de hidróxido de sodio (NaOH) para neutralizar 1 gramo de un ácido especificado. Ésta será una cantidad exacta, pero cuando el experimento se realice en el laboratorio, ocurrirá variación como resultado de error experimental. Se hacen tres titulaciones usando fenolftaleína como indicador de la neutralidad de la solución (pH es 7 para una solución neutra). Los tres volúmenes de NaOH requeridos para obtener un pH de 7 en cada una de las tres titulaciones son como sigue: 82.10, 75.75 y 75.44 mililitros. Use un intervalo de confianza de 99% para estimar el número medio de mililitros necesarios para neutralizar 1 gramo del ácido.

10.73 Cloruro de sodio Mediciones de ingesta de agua, obtenidas de una muestra de 17 ratas que habían sido inyectadas con una solución de cloruro de sodio, produjeron una media y desviación estándar de 31.0 y 6.2 centímetros cúbicos (cm^3), respectivamente. Dado que el promedio de ingesta de agua para ratas no inyectadas observado en un periodo comparable es 22.0 cm^3, ¿los datos indican que las ratas inyectadas bebieron más agua que las no inyectadas? Pruebe al nivel de significancia de 5%. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la ingesta media de agua para ratas inyectadas.

10.74 Erizos de mar Un experimentador estaba interesado en determinar el grosor medio de la corteza de huevecillos del erizo de mar. El grosor se midió para $n = 10$ huevos de erizo de mar y se obtuvieron estas mediciones.

4.5	6.1	3.2	3.9	4.7
5.2	2.6	3.7	4.6	4.1

Estime el grosor medio de la corteza usando un intervalo de confianza de 95%.

10.75 Sistemas de fabricación Una planta de producción tiene dos sistemas de fabricación extremadamente complejos; uno de ellos tiene el doble de antigüedad que el otro. Ambos son inspeccionados, lubricados y conservados una vez cada dos semanas. El número de productos terminados fabricados al día por cada uno de los sistemas se registra para 30 días de trabajo. Los resultados se dan en la tabla. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para concluir que la variabilidad en producción diaria justifica más trabajo de mantenimiento del sistema de fabricación antiguo? Use el método del valor p.

Sistema nuevo	Sistema antiguo
$\bar{x}_1 = 246$	$\bar{x}_2 = 240$
$s_1 = 15.6$	$s_2 = 28.2$

MIS DATOS EX1076

10.76 Fósiles Los datos de la tabla siguiente son los diámetros y alturas de 10 especímenes fósiles de una especie de molusco pequeño, *Rotularia (Annelida) fallax*, que fueron desenterrados en una expedición de trazado de mapas cerca de la Península Antártica.[12] La tabla da un símbolo de identificación para el espécimen de fósil, el diámetro y altura del fósil en milímetros, así como la razón entre diámetro y altura.

Espécimen	Diámetro	Altura	D/H
OSU 36651	185	78	2.37
OSU 36652	194	65	2.98
OSU 36653	173	77	2.25
OSU 36654	200	76	2.63
OSU 36655	179	72	2.49
OSU 36656	213	76	2.80
OSU 36657	134	75	1.79
OSU 36658	191	77	2.48
OSU 36659	177	69	2.57
OSU 36660	199	65	3.06
$\bar{x}$:	184.5	73	2.54
s:	21.5	5	.37

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para el diámetro medio de la especie.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la altura media de la especie.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la razón media entre diámetro y altura.

d. Compare los tres intervalos construidos en los incisos a), b) y c). ¿El promedio de las razones es igual a la razón entre el promedio del diámetro y el promedio de altura?

10.77 Fósiles, continúa Consulte el ejercicio 10.76 y el conjunto de datos EX1076. Suponga que se desea estimar el diámetro medio de los especímenes fósiles, correcto a no más de 5 milímetros, con probabilidad igual a .95. ¿Cuántos fósiles se tienen que incluir en su muestra?

MIS DATOS EX1078 **10.78 Alcohol y tiempos de reacción** Para probar el efecto del alcohol al aumentar el tiempo de reacción para responder a un estímulo dado, se midieron los tiempos de reacción de siete personas. Después de consumir 3 onzas de alcohol al 40%, el tiempo de reacción para cada una de las siete personas se midió otra vez. ¿Los datos siguientes indican que el tiempo medio de reacción después de consumir alcohol fue mayor que el tiempo medio de reacción antes de consumir alcohol? Use $\alpha = .05$.

Persona	1	2	3	4	5	6	7
Antes	4	5	5	4	3	6	2
Después	7	8	3	5	4	5	5

MIS DATOS EX1079 **10.79 Queso, por favor** A continuación aparecen los precios por onza de $n = 13$ marcas diferentes de rebanadas de queso envueltas individualmente:

29.0	24.1	23.7	19.6	27.5
28.7	28.0	23.8	18.9	23.9
21.6	25.9	27.4		

Construya una estimación de intervalo de confianza de 95% del precio promedio base por onza de rebanadas de queso envueltas individualmente.

10.80 Absorción de medicamento Se realizó un experimento para comparar los tiempos medios requeridos para la absorción corporal de dos medicamentos, A y B. Se seleccionaron al azar 10 personas y se asignaron para recibir uno de los medicamentos. Se registraron los tiempos (en minutos) para que el medicamento llegara a un nivel especificado en el torrente sanguíneo y el resumen de datos se da en la tabla:

Medicamento A	Medicamento B
$\bar{x}_1 = 27.2$	$\bar{x}_2 = 33.5$
$s_1^2 = 16.36$	$s_2^2 = 18.92$

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en tiempos medios para la absorción de los dos medicamentos? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba. ¿Este valor confirma sus conclusiones?

c. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en tiempos medios de absorción. ¿El intervalo confirma sus conclusiones?

10.81 Absorción de medicamento, continúa Consulte el ejercicio 10.80. Supongamos que desea estimar la diferencia en tiempos medios para la correcta absorción, a no más de 1 minuto de diferencia, con probabilidad aproximadamente igual a .95.

a. ¿Aproximadamente qué tan grande se requiere una muestra para cada medicamento (suponga que los tamaños muestrales son iguales)?

b. Si realizar el experimento usando los tamaños muestrales del inciso a) requerirán mucho tiempo y dinero, ¿puede hacerse algo para reducir los tamaños muestrales y todavía obtener un margen de error de 1 minuto para la estimación?

MIS DATOS EX1082 **10.82 Faisanes de cuello anillado** A continuación se dan los pesos en gramos de 10 machos y 10 hembras jóvenes de faisanes de cuello anillado.

Machos		Hembras	
1384	1672	1073	1058
1286	1370	1053	1123
1503	1659	1038	1089
1627	1725	1018	1034
1450	1394	1146	1281

a. Use una prueba estadística para determinar si la varianza poblacional de los pesos de los machos difiere de la de las hembras.

b. Pruebe si el peso promedio de machos jóvenes de faisanes de cuello anillado excede del de las hembras en más de 300 gramos. (SUGERENCIA: El procedimiento que use debe tomar en cuenta los resultados del análisis del inciso a).)

MIS DATOS EX1083 **10.83 Abejas** Los insectos que revolotean en vuelo gastan enormes cantidades de energía para su tamaño y peso. Los datos mostrados aquí fueron tomados de un conjunto mucho mayor de datos recolectados por T.M. Casey y colegas.[13] Muestran las frecuencias de aleteo (en hertz) para dos especies diferentes de abejas, $n_1 = 4$ *Euglossa mandibularis* Friese y $n_2 = 6$ *Euglossa imperialis* Cockerell.

E. mandibularis Friese	*E. imperialis* Cockerell
235	180
225	169
190	180
188	185
	178
	182

a. Con base en los rangos observados, ¿piensa usted que hay diferencia entre las dos varianzas poblacionales?

b. Use una prueba apropiada para determinar si hay diferencia.

c. Explique por qué una prueba t de Student con un estimador s^2 agrupado es inapropiado para comparar las frecuencias medias de aleteo para las dos especies de abejas.

MIS DATOS EX1084 **10.84 Calcio** El contenido de calcio (Ca) de una sustancia mineral en polvo fue analizada 10 veces, registrándose las siguientes composiciones porcentuales:

.0271	.0282	.0279	.0281	.0268
.0271	.0281	.0269	.0275	.0276

a. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para el verdadero contenido de calcio de esta sustancia.

b. ¿Qué significa la frase "99% de confianza"?

c. ¿Qué suposiciones se deben hacer del procedimiento de muestreo para que este intervalo de confianza sea válido? ¿Qué significa esto para el químico que realiza el análisis?

10.85 ¿Sol o sombra? Karl Niklas y T.G. Owens examinaron las diferencias en una planta particular, *Plantago Major L.*, cuando crecen a plena luz del sol contra condiciones de sombra.[14] En este estudio, las plantas en sombra recibieron luz solar directa durante menos de 2 horas al día, en tanto que las plantas a pleno sol nunca tuvieron sombra. Un resumen parcial de los datos basados en $n_1 = 16$ plantas a pleno sol y $n_2 = 15$ plantas de sombra se muestra a continuación:

	Pleno sol		Sombra	
	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
Área de hojas (cm^2)	128.00	43.00	78.70	41.70
Área traslape (cm^2)	46.80	2.21	8.10	1.26
Número de hojas	9.75	2.27	6.93	1.49
Grosor (mm)	.90	.03	.50	.02
Longitud (cm)	8.70	1.64	8.91	1.23
Ancho (cm)	5.24	.98	3.41	.61

a. ¿Qué suposiciones se requieren para usar los procedimientos de muestra pequeña dados en este capítulo, para comparar plantas a pleno sol contra las de sombra?

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en área media de hojas para plantas de pleno sol contra las de sombra?

c. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en área media de traslape para plantas de pleno sol contra las de sombra?

10.86 Jugo de naranja Se ha de hacer una comparación de las precisiones de dos máquinas desarrolladas para extraer jugo de naranjas, usando los datos siguientes:

Máquina A	Máquina B
$s^2 = 3.1$ onzas^2	$s^2 = 1.4$ onzas^2
$n = 25$	$n = 25$

a. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia en la precisión de las dos máquinas al nivel de significancia de 5%?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la razón entre las dos varianzas poblacionales. ¿Este intervalo confirma las conclusiones de usted respecto del inciso a)? Explique.

10.87 ¿En casa o en la escuela? Cuatro pares de gemelos idénticos (pares A, B, C y D) se seleccionaron al azar de una base de datos de gemelos idénticos. Un niño se seleccionó al azar de cada par para formar un "grupo experimental". Estos cuatro niños fueron enviados a la escuela. Los otros cuatro niños se mantuvieron en casa como grupo de control. Al final del año escolar, se obtuvieron las siguientes calificaciones de CI (cociente de inteligencia):

Par	Grupo experimental	Grupo de control
A	110	111
B	125	120
C	139	128
D	142	135

¿Esta evidencia justifica la conclusión de que la falta de experiencia escolar tiene un efecto desalentador en calificaciones del CI? Use el método del valor p.

MIS DATOS EX1088

10.88 Dietas Ocho personas obesas fueron puestas a dieta durante un mes, registrándose sus pesos al principio y a final del mes:

	Pesos	
Persona	Inicial	Final
1	310	263
2	295	251
3	287	249
4	305	259
5	270	233
6	323	267
7	277	242
8	299	265

Estime la pérdida media de peso para personas obesas cuando se ponen a dieta durante un periodo de un mes. Use un intervalo de confianza de 95% e interprete sus resultados. ¿Qué suposiciones deben hacerse para que la inferencia sea válida?

MIS DATOS EX1089

10.89 Costos de reparación Los fabricantes de autos tratan de diseñar los parachoques de sus autos para evitar pérdidas económicas en accidentes como los que ocurren en un estacionamiento. Para comparar costos de reparación de parachoques delanteros contra los traseros para varias marcas de autos, éstos fueron sometidos a impactos de frente y por atrás a 5 mph y se registraron los costos de reparación.[15]

Vehículo	Frente	Atrás
VW Jetta	$396	$602
Daewoo Nubira	451	404
Acura 3.4 RL	1123	968
Dodge Neon	687	748
Nissan Sentra	583	571

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia significativa en el promedio de costos de reparación para reparaciones de parachoques delanteros y traseros? Pruebe usando $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1090

10.90 Formas de respiración Psicólogos investigadores midieron las formas de respiración como punto de inicio, es decir, la ventilación total (en litros de aire por minuto) ajustados para el tamaño del cuerpo, para cada uno de $n = 30$ pacientes, de modo que pudieran estimar el promedio de ventilación total para pacientes antes de realizar cualquier experimento. Los datos, junto con alguna salida impresa *MINITAB*, se presentan a continuación:

5.23	5.72	5.77	4.99	5.12	4.82
5.54	4.79	5.16	5.84	4.51	5.14
5.92	6.04	5.83	5.32	6.19	5.70
4.72	5.38	5.48	5.37	4.96	5.58
4.67	5.17	6.34	6.58	4.35	5.63

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 10.90

Pantalla de tallo y hoja: lts/min

```
Stem-and-leaf of Ltrs/min  N = 30
Leaf Unit = 0.10

 1    4  3
 2    4  5
 5    4  677
 8    4  899
12    5  1111
(4)   5  2333
14    5  455
11    5  6777
 7    5  889
 4    6  01
 2    6  3
 1    6  5
```

Estadística descriptiva: lts/min

```
Variable    N   N*     Mean   SE Mean    StDev
Ltrs/min   30    0   5.3953    0.0997   0.5462

Minimum       Q1    Median        Q3   Maximum
 4.3500   4.9825    5.3750    5.7850    6.5800
```

a. ¿Qué información da la gráfica de tallo y hoja acerca de los datos? ¿Por qué es importante esto?

b. Use la salida impresa *MINITAB* para construir un intervalo de confianza de 99% para el promedio de ventilación total para pacientes.

10.91 Tiempos de reacción Una comparación de tiempos de reacción (en segundos) para dos estímulos diferentes, en un experimento de asociación psicológica de palabras, produjo los siguientes resultados cuando se aplican a una muestra aleatoria de 16 personas:

Estímulo 1	1	3	2	1	2	1	3	2
Estímulo 2	4	2	3	3	1	2	3	3

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en tiempos medios de reacción para los dos estímulos? Pruebe usando $\alpha = .05$.

10.92 Tiempos de reacción II Consulte el ejercicio 10.91. Suponga que el experimento de asociación de palabras se realiza usando ocho personas como bloques y haciendo una comparación de tiempos de reacción dentro de cada persona; esto es, cada persona es sometida a ambos estímulos en orden aleatorio. Los tiempos de reacción (en segundos) para el experimento son como sigue:

Persona	Estímulo 1	Estímulo 2
1	3	4
2	1	2
3	1	3
4	2	1
5	1	2
6	2	3
7	3	3
8	2	3

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en tiempos medios de reacción para los dos estímulos? Pruebe usando $\alpha = .05$.

10.93 Consulte los ejercicios 10.91 y 10.92. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en las dos medias poblacionales para cada uno de estos diseños experimentales. ¿Parece que el bloqueo aumentó la cantidad de información disponible en el experimento?

MIS DATOS EX1094 **10.94 Resistencia al impacto** Los datos siguientes son lecturas (en pies-libras) de las resistencias al impacto de dos clases de material de empaque:

A	B
1.25	.89
1.16	1.01
1.33	.97
1.15	.95
1.23	.94
1.20	1.02
1.32	.98
1.28	1.06
1.21	.98

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 10.94

Prueba T de dos muestras y CI: A y B

```
Two-sample T for A vs B
   N    Mean    StDev   SE Mean
A  9  1.2367   0.0644     0.021
B  9  0.9778   0.0494     0.016

Difference = mu (A) - mu (B)
Estimate for difference: 0.2589
95% CI for difference: (0.2015, 0.3163)
T-Test of difference = 0 (vs not =):
T-Value = 9.56  P-Value = 0.000  DF = 16
Both use Pooled StDev = 0.0574
```

a. Use la salida impresa *MINITAB* para determinar si hay evidencia de una diferencia en las resistencias medias para las dos clases de material.

b. ¿Hay implicaciones prácticas a sus resultados?

10.95 Mezclas de pastel Se realizó un experimento para comparar las densidades (en onzas por pulgada cúbica) de pasteles elaborados con dos mezclas diferentes de pastel. Seis charolas para pastel se llenaron con la pasta A y seis se llenaron con la pasta B. Esperando una variación en temperatura del horno, el experimentador puso una charola llena de pasta A y otra con pasta B *una al lado de la otra* en seis lugares diferentes del horno. Las seis observaciones pareadas de densidades son como sigue:

Pasta A	.135	.102	.098	.141	.131	.144
Pasta B	.129	.120	.112	.152	.135	.163

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre las densidades promedio de pasteles elaborados usando los dos tipos de pasta?

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las densidades promedio para las dos mezclas.

10.96 ¿Bajo qué suposiciones puede usarse la distribución F al hacer inferencias acerca de la razón entre varianzas poblacionales?

10.97 ¿Compró leche? Hay en el mercado una nueva máquina llenadora de recipientes para una empresa de productos lácteos, la que está considerando dos nuevos modelos, manufacturados por la compañía A y la compañía B. Robustez, costo y comodidad son comparables en los dos modelos, de modo que el factor decisivo es la variabilidad en el llenado. Se prefiere el modelo que produce llenados con menor varianza. Si se obtienen muestras de llenados para cada uno de los dos modelos, se puede usar una prueba F para probar la igualdad de varianzas poblacionales. ¿Qué tipo de región de rechazo sería más favorecida por cada una de estas personas?

a. El gerente de la empresa de lácteos, ¿por qué?

b. Un representante de ventas de la compañía A, ¿por qué?

c. Un representante de ventas de la compañía B, ¿por qué?

10.98 ¿Compró leche? II Consulte el ejercicio 10.97. Deseando demostrar que la variabilidad de llenados es menor para su modelo que para el de su competidora, una representante de ventas de la compañía A adquirió una muestra de 30 llenados del modelo de su compañía y una muestra de 10 llenados del modelo de su competidora. Las varianzas muestrales fueron $s_A^2 = .027$ y s_B^2, respectivamente. ¿Este resultado da apoyo estadístico al nivel de significancia de .05 para lo dicho por la representante de ventas?

10.99 Pureza química Un fabricante de productos químicos dice que la pureza de su producto nunca varía en más de 2%. Cinco lotes se probaron y dieron lecturas de pureza de 98.2, 97.1, 98.9, 97.7 y 97.9%.

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para contradecir lo dicho por el fabricante? (SUGERENCIA: Para ser generosos, sea un rango de 2% igual a 4σ.)

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para σ^2.

10.100 ¿Latas de 16 onzas? Una empacadora de productos enlatados indica "peso de 16 onzas" en su etiqueta. La supervisora de control de calidad selecciona nueve latas al azar y las pesa. Encuentra $\bar{x} = 15.7$ y $s = .5$. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el peso medio es menor que lo dicho en la etiqueta?

10.101 Tiempos de reacción III Un psicólogo desea verificar que cierto medicamento aumenta el tiempo de reacción a un estímulo dado. Los siguientes tiempos de reacción (en décimos de segundo) se registraron antes y después de la inyección del medicamento para cada una de las cuatro personas:

	Tiempo de reacción	
Persona	Antes	Después
1	7	13
2	2	3
3	12	18
4	12	13

Pruebe al nivel de significancia de 5% para determinar si el medicamento aumentó significativamente el tiempo de reacción.

MIS DATOS EX10102

10.102 Producción de alimentos En un tiempo en que la conservación de energía es tan importante, algunos científicos piensan que debe darse un escrutinio más estrecho al costo (en energía) de producir varias formas de alimentos. Supongamos que se desea comparar la cantidad media de petróleo necesario para producir 1 acre de maíz contra 1 acre de coliflor. Las lecturas (en barriles de petróleo por acre), con base en lotes de 20 acres, siete por cada cosecha, se muestran en la tabla siguiente. Use estos datos para hallar un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre las cantidades medias de petróleo requeridas para producir estas dos cosechas.

Maíz	Coliflor
5.6	15.9
7.1	13.4
4.5	17.6
6.0	16.8
7.9	15.8
4.8	16.3
5.7	17.1

10.103 Alcohol y altitud El efecto del consumo de alcohol en el cuerpo parece ser mucho mayor a grandes alturas que al nivel del mar. Para probar esta teoría, un científico selecciona al azar 12 personas y las divide de igual modo en dos grupos de seis cada uno. Un grupo se pone en una cámara que simula condiciones a una altitud de 12 000 pies y cada persona ingiere una bebida que contiene 100 centímetros cúbicos (cc) de alcohol. El segundo grupo recibe la misma bebida en una cámara que simula condiciones al nivel del mar. Después de 2 horas, se mide la cantidad de alcohol en la sangre (gramos por 100 cc) de cada persona. Los datos se muestran en la tabla. ¿Los datos dan suficiente evidencia para apoyar la teoría de que la retención de alcohol en la sangre es mayor a grandes alturas?

Nivel del mar	12 000 pies
.07	.13
.10	.17
.09	.15
.12	.14
.09	.10
.13	.14

10.104 Riesgos accionarios Los precios al cierre de dos acciones comunes se registraron durante un periodo de 15 días. Las medias y varianzas son

$\bar{x}_1 = 40.33 \quad \bar{x}_2 = 42.54$
$s_1^2 = 1.54 \quad s_2^2 = 2.96$

a. ¿Estos datos presentan suficiente evidencia, para indicar una diferencia entre las variabilidades de los precios al cierre de las dos acciones, para las poblaciones asociadas con las dos muestras? Dé el valor de p para la prueba e interprete este valor.

b. Construya un intervalo de confianza de 99% para la razón entre las dos varianzas poblacionales.

10.105 Diseño de autos Se realiza un experimento para comparar dos nuevos diseños de automóviles. Se seleccionan 20 personas al azar y a cada una se le pide calificar cada diseño en una escala de 1 (mala) a 10 (excelente). Las calificaciones resultantes se usarán para probar la hipótesis nula de que el nivel medio de aprobación es igual para ambos diseños contra la hipótesis alternativa de que se prefiere uno de los diseños de autos. ¿Estos datos satisfacen las suposiciones requeridas para la prueba t de Student de la sección 10.4? Explique.

10.106 Programas de seguridad Los datos mostrados a continuación se recolectaron del tiempo perdido en accidentes (las cifras dadas son horas medias de trabajo perdido por mes, en un periodo de un año) antes y después de poner en vigor un programa de seguridad industrial. Se registraron datos para seis plantas industriales. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar si el programa de seguridad fue eficaz para reducir el tiempo perdido en accidentes? Pruebe usando $\alpha = .05$.

	Planta Número					
	1	2	3	4	5	6
Antes del programa	38	64	42	70	58	30
Después del programa	31	58	43	65	52	29

MIS DATOS EX10107

10.107 Dos ingresos diferentes Para comparar la demanda de dos ingresos diferentes, el gerente de una cafetería registró el número de compras de cada ingreso en siete días consecutivos. Los datos se muestran en la tabla. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una mayor demanda media para uno de los ingresos?

Día	A	B
lunes	420	391
martes	374	343
miércoles	434	469
jueves	395	412
viernes	637	538
sábado	594	521
domingo	679	625

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 10.107

Prueba T pareada y CE: A y B

```
Paired T for A - B
              N      Mean    StDev   SE Mean
A             7     504.7    127.2      48.1
B             7     471.3     97.4      36.8
Difference    7      33.4     47.5      18.0

95% CI for mean difference: (-10.5, 77.4)
T-Test of mean difference = 0 (vs not = 0):
T-Value = 1.86  P-Value = 0.112
```

10.108 Control de contaminación El límite de la EPA de descarga permisible de sólidos suspendidos en ríos y arroyos es de 60 miligramos por litro (mg/l) por día. Un estudio de muestras de agua seleccionadas de la descarga en una mina de fosfato muestra que en un tiempo prolongado, la descarga media diaria de sólidos suspendidos es 48 mg/l, pero las lecturas de descargas de un día para otro son variables. Unos inspectores del estado midieron los porcentajes de descarga de sólidos suspendidos para $n = 20$ día y hallaron $s^2 = 39$ (mg/l)^2. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para σ^2. Interprete sus resultados.

10.109 Enzimas Se emplearon dos métodos para medir la actividad específica (en unidades de actividad enzimática por miligramo de proteína) de una enzima. Una unidad de actividad enzimática es la cantidad que cataliza la formación de 1 micromol de producto por minuto bajo condiciones especificadas. Use una prueba apropiada o procedimiento de estimación para comparar los dos métodos de medición. Comente sobre la validez de cualesquiera suposiciones que haya necesidad de hacer.

Método 1	125	137	130	151	142
Método 2	137	143	151	156	149

10.110 Barras conectoras Un productor de piezas maquinadas dice que los diámetros de las barras conectoras producidas por su planta tenían una varianza de a lo sumo .03 pulgada^2. Una muestra aleatoria de 15 barras conectoras de su planta produjo una media y varianza muestrales de .55 pulgadas y .053 pulgadas^2, respectivamente.

a. ¿Hay suficiente evidencia para rechazar lo dicho por el productor al nivel de significancia de $\alpha = .05$?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la varianza de los diámetros de barras conectoras.

10.111 Sueño y el estudiante universitario ¿Cuánto duerme usted en una noche escolar típica? A un grupo de 10 estudiantes universitarios se le pidió informar el número de horas que dormían en la noche previa, con los siguientes resultados:

7, 6, 7.25, 7, 8.5, 5, 8, 7, 6.75, 6

a. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para el número promedio de horas que duermen estudiantes universitarios.

b. ¿Qué suposiciones se requieren para que este intervalo de confianza sea válido?

MIS DATOS EX10112

10.112 Reacomodo de objetos Los siguientes datos son tiempos de respuesta, en segundos, para $n = 25$ estudiantes de primer año para acomodar tres objetos por tamaño.

5.2	3.8	5.7	3.9	3.7
4.2	4.1	4.3	4.7	4.3
3.1	2.5	3.0	4.4	4.8
3.6	3.9	4.8	5.3	4.2
4.7	3.3	4.2	3.8	5.4

Encuentre un intervalo de confianza de 95% para el promedio de tiempo de respuesta para estudiantes de primer año para acomodar tres objetos por tamaño. Interprete este intervalo.

10.113 ¡Chuparse el dedo es bueno! Quizá demasiado bueno, según pruebas efectuadas por la división de pruebas del consumidor de *Good Housekeeping*. La información nutrimental proporcionada por Kentucky Fried Chicken dice que cada pequeña bolsa de cuñas de papas contiene 4.8 onzas de alimento, para un total de 280 calorías. Una muestra de 10 órdenes de restaurantes KFC en Nueva York y Nueva Jersey promediaron 358 calorías.[16] Si la desviación estándar de esta muestra fue $s = 54$, ¿hay suficiente evidencia para indicar que el número promedio de calorías en pequeñas bolsas de cuñas de papas de KFC es mayor al anunciado? Pruebe al nivel de significancia de 1%.

10.114 Ratas de centro comercial Un artículo de *American Demographics* investigó hábitos de consumo en el centro comercial. Tendemos a gastar más dinero de compras en fines de semana y, en particular, los domingos de 4 a 6 p.m. Los miércoles por la mañana los compradores gastan menos.[17] Supongamos que se seleccionó una muestra aleatoria de 20 compradores de fin de semana y una muestra aleatoria de 20 compradores de día laborable, registrándose la cantidad gastada por viaje al centro comercial.

	Fines de semana	Tamaño muestral
Día hábil	20	20
Media muestral	\$78	\$67
Desviación muestral estándar	\$22	\$20

a. ¿Es razonable suponer que las dos varianzas poblacionales son iguales? Use la prueba F para probar esta hipótesis con $\alpha = .05$.

b. Con base en los resultados del inciso a), use la prueba apropiada para determinar si hay diferencia en la cantidad promedio gastada por viaje en fines de semana contra días laborables. Pruebe usando $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX10115

10.115 Guerras de fronteras A medida que aumentan los costos de medicamentos recetados, más y más ciudadanos mayores están ordenando recetas de Canadá, o en verdad cruzan la frontera para comprar medicamentos recetados. El precio de una receta típica para nueve medicamentos más vendidos se registró al azar, en tiendas seleccionadas al azar, tanto en Estados Unidos como en Canadá.[18]

Medicamento	E.U.	Canadá
Lipitor®	\$290	\$179
Zocor®	412	211
Prilosec®	117	72
Norvasc®	139	125
Zyprexa®	571	396
Paxil®	276	171
Prevacid®	484	196
Celebrex®	161	67
Zoloft®	235	156

a. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que el costo promedio de medicamentos recetados en Estados Unidos es diferente del costo promedio en Canadá? Pruebe usando $\alpha = .01$.

b. ¿Cuál es el valor p aproximado para esta prueba? ¿Esto confirma las conclusiones de usted en el inciso a)?

MI APPLET Ejercicios

10.116 Use el applet **Student's *t* Probabilities** para hallar las siguientes probabilidades:

a. $P(t > 1.2)$ con 5 df

b. $P(t > 2) + P(t < -2)$ con 10 df

c. $P(t < -3.3)$ con 8 df

d. $P(t > .6)$ con 12 df

10.117 Use el applet **Student's *t* Probabilities** para hallar los siguientes valores críticos:

a. una región superior de rechazo de una cola con $\alpha = .05$ y 11 df.

b. una región de rechazo de dos colas con $\alpha = .05$ y 7 df.

c. una región inferior de rechazo de una cola con $\alpha = .01$ y 15 df.

10.118 Consulte el applet **Interpreting Confidence Intervals**.

a. Supongamos que usted tiene una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ de una población con media μ desconocida. ¿Qué fórmula usaría para construir un intervalo de confianza de 95% para la media poblacional desconocida?

b. Use el botón One Sample del primer applet para crear un solo intervalo de confianza de 95% para μ. Use la fórmula del inciso a) y la información dada en el applet para verificar los límites de confianza dados. (El applet redondea al entero más cercano.) ¿Este intervalo de confianza encerró al verdadero valor, $\mu = 100$?

10.119 Consulte el applet **Interpreting Confidence Intervals**.

a. Use el botón 10 Samples del primer applet para crear 10 intervalos de confianza de 95% para μ.

b. ¿Todos los anchos de estos intervalos son iguales? Explique por qué sí o por qué no.

c. ¿Cuántos de los intervalos funcionan correctamente y encierran el verdadero valor de μ?

d. Intente de nuevo esta simulación al dar un clic en el botón 10 Samples una cuantas veces más y contar el número de intervalos que funcionan correctamente. ¿Es cercano a nuestro nivel de confianza de 95%?

e. Use el botón 10 Samples del segundo applet para crear 10 intervalos de confianza de 99% para μ. ¿Cuántos de estos intervalos funcionan correctamente?

10.120 Consulte el applet **Interpreting Confidence Intervals**.

a. Use el botón 100 Samples para crear 100 intervalos de confianza de 95% para μ. ¿Cuántos de los intervalos funcionan correctamente y encierran el verdadero valor de μ?

b. Repita las instrucciones del inciso a) para construir intervalos de confianza de 99%. ¿Cuántos de los intervalos funcionan correctamente y encierran el verdadero valor de μ?

c. Intente de nuevo esta simulación al dar un clic en el botón 100 Samples unas cuantas veces más y contar el número de intervalos que funcionan correctamente. Use intervalos de confianza de 95% y 99%. ¿El porcentaje de intervalos que funcionan se acercan a nuestros niveles de confianza de 95% y 99%?

10.121 Una muestra aleatoria de $n = 12$ observaciones de una población normal produjo $\bar{x} = 47.1$ y $s^2 = 4.7$. Pruebe la hipótesis $H_0 : \mu = 48$ contra $H_a : \mu \neq 48$. Use el applet **Small-Sample Test of a Population Mean** y un nivel de significancia de 5%.

10.122 Calificaciones del SAT En el ejercicio 9.73, informamos que el promedio nacional de calificaciones del SAT para la generación de 2005 fue 508 en lectura y 520 en matemáticas. Suponga que tenemos una pequeña muestra aleatoria de 15 estudiantes de California de la generación de 2005; sus calificaciones del SAT se registraron en la tabla siguiente:

	Lectura	Matemáticas
Promedio muestral	499	516
Desviación muestral estándar	98	96

a. Use el applet **Small-Sample Test of a Population Mean**. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el promedio de calificación de lectura, para todos los estudiantes de California de la generación 2005, es diferente del promedio nacional? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Use el applet **Small-Sample Test of a Population Mean**. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el promedio de calificación de matemáticas, para todos los estudiantes de California de la generación 2005, es diferente del promedio nacional? Pruebe usando $\alpha = .05$.

10.123 Tiempos de recuperación de una cirugía El tiempo de recuperación se registró para pacientes asignados al azar y sometidos a dos procedimientos quirúrgicos diferentes. Los datos (registrados en días) son como sigue:

	Procedimiento I	Procedimiento II
Promedio muestra	7.3	8.9
Varianza muestral	1.23	1.49
Tamaño muestral	11	13

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre los tiempos medios de recuperación para los dos procedimientos quirúrgicos? Efectúe la prueba de hipótesis, calculando manualmente el estadístico de prueba y el valor p aproximado. A continuación verifique sus resultados usando el applet **Two-Sample *T*-Test: Independent Samples**.

10.124 Precios de acciones Consulte el ejercicio 10.104 en el que informamos los precios al cierre de dos acciones comunes, registrados en un período de 15 días.

$\bar{x}_1 = 40.33 \quad \bar{x}_2 = 42.54$

$s_1^2 = 1.54 \quad s_2^2 = 2.96$

Use el applet **Two-Sample *T*-Test: Independent Samples**. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que los precios promedio de las dos acciones comunes son diferentes? Use el valor p para tener acceso a la significancia de la prueba.

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Horario flexible

¿Le gustaría una semana de cuatro días de trabajo?

¿Un horario flexible en una semana de trabajo resulta en beneficios positivos para empleadores y empleados? ¿Es probable que un empleado más descansado, que pasa menos tiempo en transporte de su casa a su trabajo, sea más eficiente y tome menos días con permiso por enfermedad y asuntos personales? Un informe sobre los beneficios de horarios flexibles de trabajo, que apareció en *Environmental Health*, vio los registros de $n = 11$ empleados que trabajaban en una oficina sucursal del departamento de salud pública en Illinois bajo un horario de semana de cuatro días de trabajo.[19] Los empleados trabajaron una semana convencional de trabajo en el año 1, así como una semana de cuatro días de trabajo en el año 2. Algunas estadísticas para estos empleados se muestran en la tabla siguiente:

	Permiso asuntos personales		Permiso por enfermedad	
Empleado	Año 2	Año 1	Año 2	Año 1
1	26	33	30	37
2	18	37	61	45
3	24	20	59	56
4	19	26	2	9
5	17	1	79	92
6	34	2	63	65
7	19	13	71	21
8	18	22	83	62
9	9	22	35	26
10	36	13	81	73
11	26	18	79	21

1. Una semana de trabajo de cuatro días asegura que el empleado tendrá un día más que no es necesario pasar en el trabajo. Un posible resultado es una reducción en el número promedio de días de permiso por asuntos personales tomados por empleados en un horario de trabajo de cuatro días. ¿Los datos indican que éste es el caso? Use el método del valor p con el fin de probar para llegar a su conclusión.
2. Un horario de semana de trabajo de cuatro días podría también tener un efecto sobre el número promedio de días de permiso por enfermedad que tome un empleado. ¿Debe usarse una alternativa direccional en este caso? ¿Por qué sí o por qué no?
3. Construya un intervalo de confianza de 95% para estimar el promedio de diferencia en días tomados por enfermedad entre estos dos años. ¿Qué concluye usted acerca de la diferencia entre el número promedio de días de permiso por enfermedad para estos dos horarios de trabajo?
4. Con base en el análisis de estas dos variables, ¿qué se puede concluir acerca de las ventajas de un horario de semana de trabajo de cuatro días?

11

El análisis de varianza

© Leaf/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

La cantidad de información contenida en una muestra es afectada por diversos factores que el experimentador puede o no puede ser capaz de controlar. Este capítulo introduce tres *diseños experimentales* diferentes, dos de los cuales son extensiones directas de los diseños no apareados y apareados del capítulo 10. Una nueva técnica llamada *análisis de varianza* se utiliza para determinar el modo en que diferentes factores experimentales afectan el promedio de respuesta.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo sé si mis cálculos son precisos?

"Un buen desorden"

¿Se arriesga usted a ser multado por estacionar su auto en zonas rojas o junto a hidrantes? ¿No pone suficiente dinero en el parquímetro? Si es así, está entre los miles de conductores que reciben infracciones a diario en casi todas las ciudades en Estados Unidos. Dependiendo de la ciudad en la que reciba una infracción, su multa puede ser de sólo \$8 por exceso de tiempo de estacionamiento en San Luis Obispo, California, hasta \$340 por estacionarse ilegalmente en espacio para discapacitados en San Diego, California. El estudio práctico del final de este capítulo analiza estadísticamente la variación en multas de estacionamiento en ciudades del sur de California.

11.1 EL DISEÑO DE UN EXPERIMENTO

La forma en que una muestra sea seleccionada se denomina *plan de muestreo* o *diseño experimental* y determina la cantidad de información en la muestra. Algunas investigaciones comprenden un **estudio observacional**, en las que el investigador no produce en realidad los datos sino que sólo *observa* las características de datos que ya existen. Casi todos los estudios muestrales, en donde se reúne información con un cuestionario, caen en esta categoría, el investigador forma un plan para recolectar los datos, llamado *plan de muestreo* y a continuación utiliza los procedimientos estadísticos apropiados para sacar conclusiones acerca de la población o poblaciones de donde proviene la muestra.

Otra investigación comprende la **experimentación**. El investigador puede deliberadamente imponer una o más condiciones experimentales, en las unidades experimentales, para determinar su efecto en la respuesta. Veamos ahora algunos términos nuevos que usaremos para discutir el diseño de un experimento estadístico.

Definición Una **unidad experimental** es el objeto en el que se toma una medición (o mediciones).

Un **factor** es una variable independiente cuyos valores son controlados y variados por el experimentador.

Un **nivel** es el escenario de intensidad de un factor.

Un **tratamiento** es una combinación específica de niveles de factor.

La **respuesta** es la variable que es medida por el experimentador.

EJEMPLO 11.1

Un grupo de personas se divide al azar en un grupo experimental y uno de control. Al grupo de control se le da un examen de aptitud después de haber tomado un desayuno completo; al grupo experimental se le da el mismo examen sin haber tomado ningún desayuno. ¿Cuáles son los factores, niveles y tratamientos en este experimento?

Solución Las *unidades experimentales* son las personas en las que la *respuesta* (calificación de examen) se mide. El *factor* de interés podría describirse como "comida" y tiene dos *niveles*: "desayuno" y "no desayuno". Como éste es el único factor controlado por el experimentador, los dos niveles de "desayuno" y "no desayuno" también representan los *tratamientos* de interés en el experimento.

EJEMPLO 11.2

Suponga que el experimentador del ejemplo 11.1 empezó por seleccionar al azar 20 hombres y 20 mujeres para el experimento. Estos dos grupos se dividieron entonces al azar en 10 cada uno para los grupos experimental y de control. ¿Cuáles son los factores, niveles y tratamientos en este experimento?

Solución Ahora hay dos *factores* de interés para el experimentador y cada factor tiene dos *niveles*:

- "Género" a dos niveles: hombres y mujeres
- "Comida" a dos niveles: desayuno y no desayuno

En este experimento más complejo, hay cuatro *tratamientos*, uno para cada combinación específica de niveles de factor: hombres sin desayuno, hombres con desayuno, mujeres sin desayuno y mujeres con desayuno.

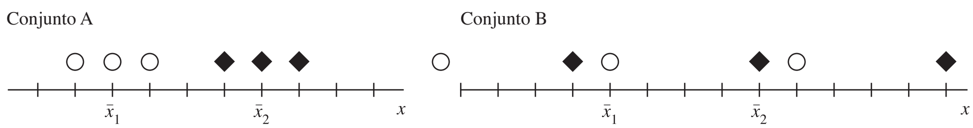
En este capítulo, nos concentraremos en experimentos que han sido diseñados en tres formas diferentes y usaremos una técnica llamada *análisis de varianza* para juzgar los efectos de varios factores en la respuesta experimental. Dos de estos *diseños experimentales* son extensiones de los diseños no apareados y apareados del capítulo 10.

11.2 ¿QUÉ ES UN ANÁLISIS DE VARIANZA?

Las respuestas que se generan en una situación experimental siempre exhiben cierta cantidad de *variabilidad*. En un **análisis de varianza**, se divide la variación total de las mediciones de respuesta en partes que pueden ser atribuidas a varios *factores* de interés para el experimentador. Si el experimento ha sido debidamente diseñado, estas partes pueden usarse entonces para contestar preguntas acerca de los efectos de los diversos factores en la respuesta de interés.

Se puede entender mejor la lógica que sirve de base a un análisis de varianza al ver un experimento sencillo. Considere dos conjuntos de muestras seleccionadas al azar de las poblaciones 1 (◆) y 2 (○), cada uno con pares idénticos de medias; $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$. Los dos conjuntos se muestran en la figura 11.1. ¿Es más fácil detectar la diferencia en las dos medias cuando se vea el conjunto A o el conjunto B? Es probable que esté de acuerdo en que el conjunto A muestra la diferencia mucho más claramente. En el conjunto A, la variabilidad de las mediciones *dentro* de los grupos (los ◆ y ○) es mucho menor que la variabilidad *entre* los dos grupos. En el conjunto B, hay más variabilidad *dentro* de los grupos (los ◆ y ○), causando que los dos grupos se "mezclen" y hagan más difícil ver la diferencia *idéntica* en las medias.

FIGURA 11.1
Dos conjuntos de muestras con las mismas medias



La comparación que ha hecho intuitivamente es formalizada por el análisis de varianza. Es más, el análisis de varianza se puede hacer no sólo para comparar dos medias sino también para hacer comparaciones de *más de dos* medias poblacionales y para determinar los efectos de varios factores en diseños experimentales más complejos. El análisis de varianza se apoya en estadísticas con distribuciones muestrales que son modeladas por la distribución F de la sección 10.7.

11.3 LAS SUPOSICIONES PARA UN ANÁLISIS DE VARIANZA

Las suposiciones necesarias para un análisis de varianza son semejantes a las requeridas para las estadísticas t de Student y F del capítulo 10. Cualquiera que sea el diseño experimental empleado para generar los datos, se debe suponer que las observaciones dentro de cada grupo de tratamiento están **normalmente distribuidas** con una **varianza común** σ^2. Al igual que en el capítulo 10, el análisis de procedimientos de varianza es más bien **robusto** cuando los tamaños muestrales son iguales y cuando los datos son de forma de montículo. Violar la suposición de una varianza común es más serio, en especial cuando los tamaños muestrales no son cercanamente iguales.

SUPOSICIONES PARA ANÁLISIS DE EXAMEN DE VARIANZA Y PROCEDIMIENTOS DE ESTIMACIÓN

- Las observaciones dentro de cada población están distribuidas normalmente con una varianza común σ^2.
- Las suposiciones respecto al procedimiento de muestreo son especificadas para cada diseño en las secciones que siguen.

Este capítulo describe el análisis de varianza para tres diseños experimentales diferentes. El primer diseño está basado en muestreo aleatorio independiente de varias poblaciones y es una extensión de la *prueba t no pareada* del capítulo 10. El segundo es una extensión del diseño de *diferencia pareada* o *pares acoplados* y comprende una asignación aleatoria de tratamientos dentro de conjuntos apareados de observaciones. El tercero es un diseño que permite juzgar el efecto de dos factores experimentales en la respuesta. Los procedimientos de muestreo necesarios para cada diseño se vuelven a expresar en sus secciones respectivas.

11.4 EL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO: UNA CLASIFICACIÓN EN UNA DIRECCIÓN

Uno de los diseños experimentales más sencillos es el **diseño completamente aleatorizado**, en el que muestras aleatorias se seleccionan de manera independiente de cada una de k poblaciones. Este diseño comprende sólo un *factor*, la población de donde proviene la medición, de aquí la designación como una **clasificación en una dirección**. Hay k *niveles* diferentes correspondientes a las k poblaciones, que también son los *tratamientos* para esta clasificación de una dirección. ¿Las k medias poblacionales son todas iguales, o al menos una media es diferente de las otras?

¿Por qué se necesita un nuevo procedimiento, el *análisis de varianza*, para comparar las medias poblacionales cuando ya se tiene disponible la prueba t de Student? Al comparar $k = 3$ medias, se podría probar cada uno de los tres pares de hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_0 : \mu_1 = \mu_3 \qquad H_0 : \mu_2 = \mu_3$$

para averiguar dónde están las diferencias. No obstante, se debe recordar que cada prueba que se realice está sujeta a la posibilidad de error. Para comparar $k = 4$ medias, se necesitarían seis pruebas y se necesitarían 10 pruebas para comparar $k = 5$ medias. Cuantas más pruebas se realicen en un conjunto de mediciones, más probable será que al menos una de las conclusiones sea incorrecta. El análisis de procedimiento de varianza provee una prueba general para juzgar la igualdad de las k medias poblacionales. Una vez que haya determinado si hay *en realidad* una diferencia en las medias, se puede usar otro procedimiento para averiguar dónde están las diferencias.

¿Cómo se pueden seleccionar estas k muestras aleatorias? A veces las poblaciones existen en realidad y se puede usar un generador computarizado de números aleatorios o una tabla de números aleatorios para seleccionar al azar las muestras. Por ejemplo, en un estudio para comparar los tamaños promedio de reclamaciones de seguro médico en cuatro estados diferentes, se podría usar una base de datos computarizada proporcionada por las compañías de seguros médicos para seleccionar muestras aleatorias de los cuatro estados. En otras situaciones, las poblaciones pueden ser *hipotéticas* y se pueden generar respuestas sólo después de haberse aplicado los tratamientos experimentales.

EJEMPLO 11.3

Un investigador está interesado en los efectos de cinco tipos de insecticidas a usar para controlar el gorgojo del algodón en campos algodoneros. Explique cómo poner en práctica un diseño completamente aleatorizado para investigar los efectos de los cinco insecticidas en producción de cosechas.

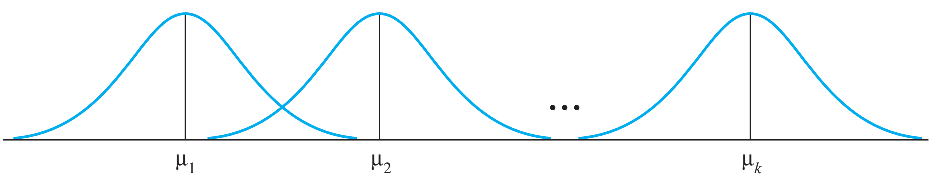
Solución La única forma de generar el equivalente de cinco muestras aleatorias de las poblaciones hipotéticas, correspondientes a los cinco insecticidas, es usar un método llamado **asignación aleatorizada**. Se escoge un número fijo de plantas de algodón para tratamiento y a cada una se le asigna un número aleatorio. Suponga que cada muestra debe tener un número igual de tratamientos. Con el uso de un medio de aleatorización, se pueden asignar las primeras n plantas escogidas para recibir el insecticida 1, las segundas n plantas para recibir el insecticida 2 y así sucesivamente, hasta que se hayan asignado los cinco tratamientos.

Ya sea por *selección aleatoria* o *asignación aleatoria*, estos dos ejemplos resultan en un diseño completamente aleatorizado o clasificación en una dirección, para el cual se usa el análisis de varianza.

11.5 EL ANÁLISIS DE VARIANZA PARA UN DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

Supongamos que se desea comparar k medias poblacionales, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, con base en muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de poblaciones normales con una varianza común σ^2. Esto es, cada una de las poblaciones normales tiene la misma forma, pero sus ubicaciones podrían ser diferentes, como se ve en la figura 11.2.

FIGURA 11.2
Poblaciones normales con una varianza común pero medias diferentes



División de la variación total en un experimento

Sea x_{ij} la j-ésima medición ($j = 1, 2, \ldots, n_i$) en la i-ésima muestra. El análisis de procedimiento de varianza empieza por considerar la variación total en el experimento, que es medida por una cantidad llamada **suma total de cuadrados (TSS)**:

$$\text{Total SS} = \Sigma(x_{ij} - \bar{x})^2 = \Sigma x_{ij}^2 - \frac{(\Sigma x_{ij})^2}{n}$$

Éste es el conocido numerador de la fórmula para la varianza muestral para todo el conjunto de $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ mediciones. La segunda parte de la fórmula de cálculo se denomina a veces **corrección para la media (CM)**. Si con G representamos el *gran total* de todas las n observaciones, entonces

$$\text{CM} = \frac{(\Sigma x_{ij})^2}{n} = \frac{G^2}{n}$$

Esta suma total de cuadrados (Total SS) se divide en dos componentes. El primer componente, llamado **suma de cuadrados para tratamientos (SST)**, mide la variación entre las k medias muestrales:

$$\text{SST} = \Sigma n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - \text{CM}$$

donde T_i es el total de observaciones para tratamiento i. El segundo componente, llamado **suma de cuadrados para el error (SSE)**, se usa para medir la variación agrupada dentro de las k muestras:

$$\text{SSE} = (n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \cdots + (n_k - 1)s_k^2$$

Esta fórmula es una extensión directa del numerador en la fórmula para la estimación agrupada de σ^2 del capítulo 10. Podemos demostrar algebraicamente que, en el análisis de varianza,

$$\text{Total SS} = \text{SST} + \text{SSE}$$

Por tanto, es necesario calcular sólo dos de las tres sumas de cuadrados: Total SS, SST y SSE, y la tercera se puede hallar por sustracción.

Cada una de las fuentes de variación, cuando es dividida por sus apropiados **grados de libertad**, da una estimación de la variación en el experimento. Como Total SS involucra n observaciones cuadradas, sus grados de libertad son $df = (n - 1)$. Del mismo modo, la suma de cuadrados para tratamientos comprende k observaciones cuadradas y sus grados de libertad son $df = (k - 1)$. Por último, la suma de cuadrados de error, una extensión directa de la estimación agrupada del capítulo 10, tiene

$$df = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k$$

Observe que los grados de libertad para tratamientos y error son aditivos, es decir,

$$df\,(\text{total}) = df\,(\text{tratamientos}) + df\,(\text{error})$$

Estas dos fuentes de variación y sus respectivos grados de libertad se combinan para formar los **cuadráticos medios** como MS = SS/df. La variación total en el experimento se exhibe entonces en una **tabla de análisis de varianza** (o **ANOVA**).

MI CONSEJO

La columna marcada "SS" satisface: Total SS = SST + SSE.

MI CONSEJO

La columna marcada "df" siempre asciende a $n - 1$.

TABLA ANOVA PARA k MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES: DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

Fuente	df	SS	MS	F
Tratamientos	$k - 1$	SST	MST = SST/$(k - 1)$	MST/MSE
Error	$n - k$	SSE	MSE = SSE/$(n - k)$	
Total	$n - 1$	Total SS		

donde

$$\text{Total SS} = \Sigma x_{ij}^2 - \text{CM}$$
$$= (\text{Suma de cuadrados de todos los valores } x) - \text{CM}$$

con

$$\text{CM} = \frac{(\Sigma x_{ij})^2}{n} = \frac{G^2}{n}$$

$$\text{SST} = \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - \text{CM} \qquad \text{MST} = \frac{\text{SST}}{k - 1}$$

$$\text{SSE} = \text{Total SS} - \text{SST} \qquad \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n - k}$$

y

G = Gran total de las n observaciones
T_i = Total de todas las observaciones en la muestra i
n_i = Número de observaciones en la muestra i
$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

EJEMPLO 11.4

En un experimento para determinar el efecto de la nutrición en intervalos de atención de estudiantes de escuelas elementales, un grupo de 15 estudiantes se asignaron al azar a cada uno de tres planes de comidas: no desayuno, desayuno ligero y desayuno completo. Sus intervalos de atención (en minutos) se registraron durante un periodo de lectura por la mañana y se muestran en la tabla 11.1. Construya el análisis de tabla de varianza para este experimento.

TABLA 11.1 **Intervalos de atención de estudiantes después de tres planes de comidas**

No desayuno	Desayuno ligero	Desayuno completo
8	14	10
7	16	12
9	12	16
13	17	15
10	11	12
$T_1 = 47$	$T_2 = 70$	$T_3 = 65$

Solución Para usar las fórmulas de cálculo, se necesitan los $k = 3$ tratamientos totales con $n_1 = n_2 = n_3 = 5$, $n = 15$ y $\Sigma x_{ij} = 182$. Entonces

$$\text{CM} = \frac{(182)^2}{15} = 2208.2667$$

$$\text{Total SS} = (8^2 + 7^2 + \cdots + 12^2) - \text{CM} = 2338 - 2208.2667 = 129.7333$$

con $(n - 1) = (15 - 1) = 14$ grados de libertad,

$$\text{SST} = \frac{47^2 + 70^2 + 65^2}{5} - \text{CM} = 2266.8 - 2208.2667 = 58.5333$$

con $(k - 1) = (3 - 1) = 2$ grados de libertad, y por sustracción,

$$\text{SSE} = \text{Total SS} - \text{SST} = 129.7333 - 58.5333 = 71.2$$

con $(n - k) = (15 - 3) = 12$ grados de libertad. Estas tres fuentes de variación, sus grados de libertad, sumas de cuadrados y cuadráticos medios se muestran en el área sombreada de la tabla ANOVA generada por *MINITAB* y se dan en la figura 11.3. Se encontrarán instrucciones para generar esta salida impresa en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo.

FIGURA 11.3
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 11.4

ANOVA de una dirección: intervalo contra comida

```
                                       F      P
Source   DF       SS      MS        4.93  0.027
Meal      2    58.53   29.27
Error    12    71.20    5.93
Total    14   129.73

S = 2.436   R-Sq = 45.12%   R-Sq(adj) = 35.97%
                             Individual 95% CIs For Mean
                             Based on Pooled StDev
Level   N     Mean   StDev   --+---------+---------+---------+-------
1       5    9.400   2.302   (---------*--------)
2       5   14.000   2.550                     (--------*--------)
3       5   13.000   2.449                 (--------*--------)
                             --+---------+---------+---------+-------
                             7.5      10.0      12.5      15.0

Pooled StDev = 2.436
```

La salida impresa *MINITAB* da alguna información adicional sobre la variación en el experimento. La segunda sección muestra las medias y desviaciones estándar para los tres planes de comidas. Más importante aún es que se puede ver en la primera sección de la salida impresa dos columnas marcadas "F" y "P". Podemos usar estos valores para probar una hipótesis respecto a la igualdad de las tres medias de tratamiento.

Prueba de la igualdad de las medias de tratamiento

Los *cuadráticos medios* en el análisis de tabla de varianza se pueden usar para probar la hipótesis nula

MI CONSEJO
MS = SS/*df*

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

contra la hipótesis alternativa

H_a : Al menos una de las medias es diferente de las otras

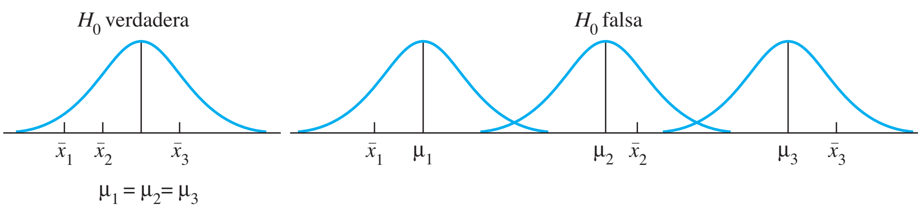
usando el siguiente argumento teórico:

- Recuerde que σ^2 es la varianza común para todas las poblaciones k. La cantidad

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-k}$$

  es una estimación agrupada de σ^2, un promedio ponderado de todas las varianzas muestrales k, sea o no sea H_0, verdadera.
- Si H_0 es verdadera, entonces la variación en las medias muestrales, medida por MST = [SST/$(k-1)$] también da una estimación insesgada de σ^2. No obstante, si H_0 es falsa y las medias poblacionales son diferentes, entonces MST, que mide la variación en las medias muestrales, será inusualmente *grande*, como se ve en la figura 11.4.

FIGURA 11.4
Medias muestrales sacadas de poblaciones idénticas contra diferentes



- La prueba estadística

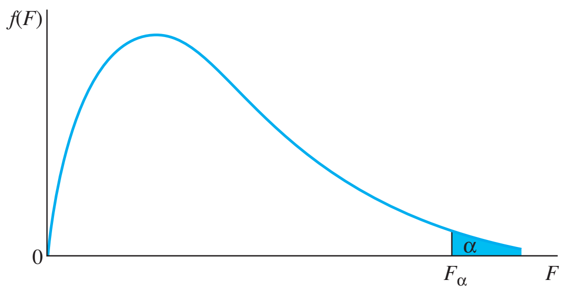
$$F = \frac{\text{MST}}{\text{MSE}}$$

  tiende a ser más grande que lo normal si H_0 es falsa. En consecuencia, se puede rechazar H_0 para valores grandes de F, usando una prueba estadística de *cola derecha*. Cuando H_0 es verdadera, esta prueba estadística tiene una distribución F con $df_1 = (k-1)$ y $df_2 = (n-k)$ grados de libertad y se pueden usar valores críticos de *cola derecha* de la distribución F (de la tabla 6 del apéndice I) o valores p generados por computadora, para sacar conclusiones estadísticas acerca de la igualdad de las medias poblacionales.

MI CONSEJO
Las pruebas F para tablas ANOVA son **siempre** de cola superior (derecha).

PRUEBA F PARA COMPARAR K MEDIAS POBLACIONALES

1. Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$
2. Hipótesis alternativa: H_a : Uno o más pares de medias poblacionales difieren
3. Prueba estadística: $F = \text{MST/MSE}$, donde F está basada en $df_1 = (k - 1)$ y $df_2 = (n - k)$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 si $F > F_\alpha$, donde F_α se encuentra en la cola superior de la distribución F (con $df_1 = k - 1$ y $df_2 = n - k$) o si el valor $p < \alpha$.



Suposiciones

- Las muestras son seleccionadas al azar y en forma independiente de sus respectivas poblaciones.
- Las poblaciones están normalmente distribuidas con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ y varianzas iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$.

EJEMPLO 11.5

¿Los datos del ejemplo 11.4 dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el promedio de intervalos de atención, dependiendo del tipo de desayuno tomado por el estudiante?

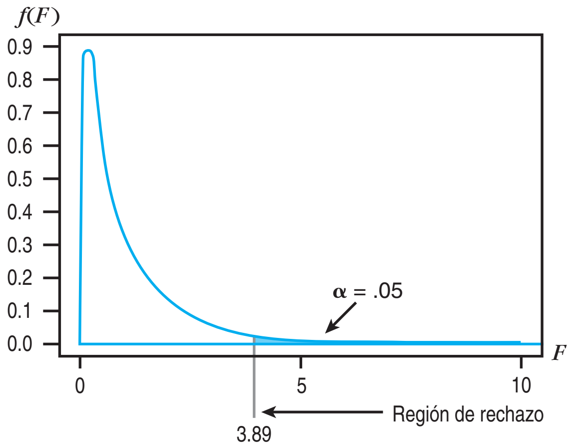
Solución Para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra la hipótesis alternativa de que el promedio de intervalo de atención es diferente para al menos uno de los tres tratamientos, se usa el análisis de varianza estadística de F, calculada como

$$F = \frac{\text{MST}}{\text{MSE}} = \frac{29.2667}{5.9333} = 4.93$$

y se muestra en la columna marcada "F" de la figura 11.3. No es de sorprender saber que el valor en la columna marcada "P" en la figura 11.3 sea el valor p exacto para esta prueba estadística.

La prueba estadística MST/MSE calculada líneas antes, tiene una distribución F con $df_1 = 2$ y $df_2 = 12$ grados de libertad. Con el uso del método del valor crítico con $\alpha = .05$, se puede rechazar H_0 si $F > F_{.05} = 3.89$ de la tabla 6 del apéndice I (véase la figura 11.5). Como el valor observado, $F = 4.93$, excede del valor crítico, se rechaza H_0. Hay suficiente evidencia para indicar que al menos uno de los tres intervalos de atención promedio es diferente de al menos uno de los otros.

FIGURA 11.5
Región de rechazo para el ejemplo 11.5



MI CONSEJO

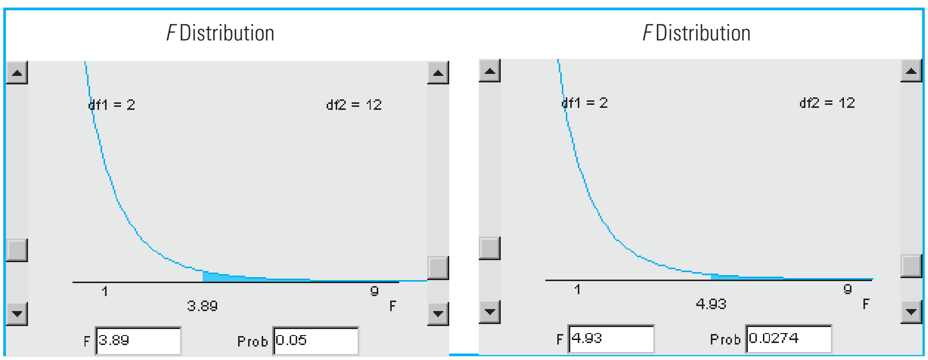
Las salidas impresas de computadora dan el valor *p* exacto; use el valor *p* para tomar su decisión.

Se podría haber llegado a esta misma conclusión usando el valor *p* exacto, $P = .027$, dado en la figura 11.3. Como el valor *p* es menor a $\alpha = .05$, los resultados son estadísticamente significativos al nivel de 5%. Todavía se concluye que al menos uno de los tres intervalos de atención es diferente de al menos uno de los otros.

MI APPLET

Todavía se puede usar el applet ***F* Probabilities** para hallar valores críticos de *F* o valores *p* para el análisis de pruebas *F* de varianza. Vea los dos applets de la figura 11.6. Use el cursor a la izquierda y derecha de los applets para seleccionar los grados de libertad apropiados (df_1 y df_2). Para hallar el valor crítico para el rechazo de H_0, introduzca el nivel de significancia α en la caja marcada "Prob" y pulse Enter. Para hallar el valor *p*, introduzca el valor observado de la prueba estadística en la caja marcada "F" y pulse Enter. ¿Puede identificar el valor crítico para rechazo y el valor *p* para el ejemplo 11.5?

FIGURA 11.6
Applet *F* Probabilities



Estimación de diferencias en las medias de tratamiento

La siguiente pregunta obvia que se podría hacer se refiere a la naturaleza de las diferencias de las medias poblacionales. ¿Cuáles medias son diferentes de las otras? ¿Cómo se puede estimar la diferencia o posiblemente las medias individuales para cada uno de los tres tratamientos? En la sección 11.6, presentaremos un procedimiento que se puede usar para comparar todos los posibles pares de medias de tratamiento simultáneamente. No obstante, si hay un interés especial en una media particular o par de medias, se pueden construir intervalos de confianza usando los procedimientos de muestra pequeña del capítulo 10, con base en la distribución t de Student. Para una sola media poblacional, μ_i, el intervalo de confianza es

$$\bar{x}_i \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n_i}}\right)$$

donde $\bar{x}_i$ es la media muestral para el i-ésimo tratamiento. Del mismo modo, para una comparación de dos medias poblacionales, por ejemplo μ_i y μ_j, el intervalo de confianza es

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Antes de que se puedan usar estos intervalos de confianza, sin embargo, persisten dos preguntas:

- ¿Cómo se calcula s o s^2, la mejor estimación de la varianza común σ^2?
- ¿Cuántos grados de libertad se usan para el valor crítico de t?

Para contestar estas preguntas, recuerde que en un análisis de varianza, el cuadrático medio de error, MSE, siempre da un estimador insesgado de σ^2 y usa información de todo el conjunto de mediciones. En consecuencia, es el mejor estimador de σ^2, cualquiera que sea el procedimiento de estimación que se use. *Siempre* se debe usar

$$s^2 = \text{MSE} \qquad \text{con } df = (n - k)$$

para estimar σ^2. Se puede hallar la raíz cuadrada positiva de este estimador, $s = \sqrt{\text{MSE}}$, en el último renglón de la figura 11.3 marcado "Pooled StDev".

MI CONSEJO

Los grados de libertad para intervalos de confianza son los *df* de **error**.

DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO: INTERVALOS DE CONFIANZA $(1 - \alpha)100\%$ PARA UNA SOLA MEDIA DE TRATAMIENTO Y LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS DE TRATAMIENTO

Una sola media de tratamiento:

$$\bar{x}_i \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n_i}}\right)$$

Diferencia entre dos medias de tratamiento:

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

con

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n - k}}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ y $t_{\alpha/2}$ está basada en $(n - k)$ *df*.

EJEMPLO 11.6

El investigador del ejemplo 11.4 cree que los estudiantes que no toman desayuno tendrán intervalos de atención significativamente más cortos, pero que puede no haber diferencia entre aquellos que toman un desayuno ligero o un desayuno completo. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para el promedio de intervalo de atención para estudiantes que no toman desayuno, así como un intervalo de confianza para la diferencia en los intervalos de atención promedio para quienes toman desayuno ligero contra los de desayuno completo.

Solución Para $s^2 = \text{MSE} = 5.9333$ para que $s = \sqrt{5.9333} = 2.436$ con $df = (n - k) = 12$, se pueden calcular los dos intervalos de confianza:

- Para los de no desayuno:

$$\bar{x}_1 \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n_1}}\right)$$

$$9.4 \pm 2.179\left(\frac{2.436}{\sqrt{5}}\right)$$

$$9.4 \pm 2.37$$

o sea, entre 7.03 y 11.77 minutos.

- Para los de desayuno ligero contra desayuno completo:

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}$$

$$(14 - 13) \pm 2.179\sqrt{5.9333\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}$$

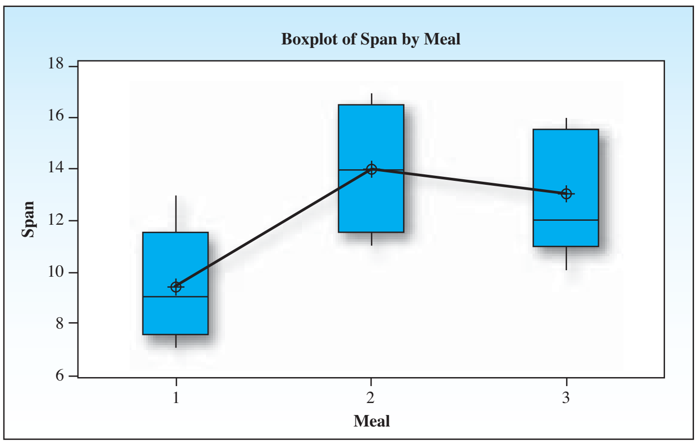
$$1 \pm 3.36$$

una diferencia de entre -2.36 y 4.36 minutos.

Se puede ver que el segundo intervalo de confianza no indica una diferencia en el promedio de intervalos de atención, para estudiantes que tomaron desayuno ligero contra los de desayuno completo, como sospechaba el investigador. Si el investigador, antes de creencias previas, desea probar los otros posibles pares de medias, es decir no desayuno contra desayuno ligero y no desayuno contra desayuno completo, los métodos dados en la sección 11.6 deben usarse para probar los tres pares.

Algunos programas de computadora tienen opciones de gráficas que dan una excelente descripción visual de datos y las k medias de tratamiento. Una de estas opciones en el programa *MINITAB* se ve en la figura 11.7. Las medias de tratamiento están indicadas por el símbolo $\oplus$ y están conectadas con rectas. Observe que la media "no desayuno" parece ser un poco diferente de las otras dos medias, como sospechaba el investigador, aun cuando hay un pequeño traslape en las gráficas de caja. En la siguiente sección, presentamos un procedimiento formal para probar la significancia de las diferencias entre todos los pares de medias de tratamiento.

FIGURA 11.7
Gráficas de caja para el ejemplo 11.6



MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo sé si mis cálculos son precisos?

Las siguientes sugerencias aplican a todos los análisis de varianza de este capítulo:

1. Cuando calcule sumas de cuadrados, asegúrese de llevar al menos seis cifras significativas antes de hacer restas.
2. Recuerde, las sumas de cuadrados nunca pueden ser negativas. Si obtiene una suma de cuadrados negativa, ha cometido un error aritmético.
3. Siempre verifique su análisis de tabla de varianza para comprobar que los grados de libertad ascienden al total de grados de libertad $(n - 1)$ y que las sumas de cuadrados ascienden al Total SS.

11.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

11.1 Suponga que se desea comparar las medias de seis poblaciones basadas en muestras aleatorias independientes, cada una de las cuales contiene 10 observaciones. Inserte, en una tabla ANOVA, las fuentes de variación y sus respectivos grados de libertad.

11.2 Los valores de SS Total y SSE para el experimento del ejercicio 11.1 son SS Total = 21.4 y SSE = 16.2.

a. Complete la tabla ANOVA para el ejercicio 11.1.

b. ¿Cuántos grados de libertad están asociados con la estadística F para probar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_6$?

c. Dé la región de rechazo para la prueba del inciso b) para $\alpha = .05$.

d. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias poblacionales?

e. Estime el valor p para la prueba. ¿Este valor confirma sus conclusiones del inciso d)?

11.3 Las medias muestrales correspondientes a las poblaciones 1 y 2 del ejercicio 11.1 son $\bar{x}_1 = 3.07$ y $\bar{x}_2 = 2.52$.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para μ_1.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia $(\mu_1 - \mu_2)$.

11.4 Supongamos que se desea comparar las medias de cuatro poblaciones basadas en muestras aleatorias independientes, cada una de las cuales contiene seis observaciones. Inserte, en una tabla ANOVA, las fuentes de variación y sus respectivos grados de libertad.

11.5 Los valores de SS Total y SST para el experimento del ejercicio 11.4 son SS Total = 473.2 y SST = 339.8.

a. Complete la tabla ANOVA para el ejercicio 11.4.

b. ¿Cuántos grados de libertad están asociados con la estadística F para probar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$?

c. Dé la región de rechazo para la prueba del inciso b) para $\alpha = .05$.

d. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias poblacionales?

e. Aproxime el valor p para la prueba. ¿Esto confirma sus conclusiones del inciso d)?

11.6 Las medias muestrales correspondientes a las poblaciones 1 y 2 del ejercicio 11.4 son $\bar{x}_1 = 88.0$ y $\bar{x}_2 = 83.9$.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para μ_1.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia $(\mu_1 - \mu_2)$.

MIS DATOS EX1107

11.7 Estos datos son observaciones recolectadas usando un diseño completamente aleatorizado:

Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3
3	4	2
2	3	0
4	5	2
3	2	1
2	5	

a. Calcule CM y SS Total.

b. Calcule SST y MST.

c. Calcule SSE y MSE.

d. Construya una tabla ANOVA para los datos.

e. Exprese la hipótesis nula y alternativa para un análisis de prueba F de varianza.

f. Use el método del valor p para determinar si hay una diferencia en las tres medias poblacionales.

11.8 Consulte el ejercicio 11.7 y el conjunto de datos EX1107. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia entre μ_2 y μ_3? Pruebe usando la prueba *t* de la sección 10.4 con $\alpha = .05$.

11.9 Consulte el ejercicio 11.7 y el conjunto de datos EX1107.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para μ_1.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la diferencia $(\mu_1 - \mu_3)$.

APLICACIONES

11.10 Reducir hostilidad Un psicólogo clínico deseaba comparar tres métodos para reducir niveles de hostilidad en estudiantes universitarios, con el uso de cierto examen psicológico (HLT). Se tomaron las calificaciones altas de este examen como indicio de gran hostilidad. Once estudiantes que obtuvieron calificaciones altas y casi iguales se emplearon en el experimento. Cinco fueron seleccionados al azar de entre los 11 casos problema y tratados con el método A, tres fueron tomados al azar de los seis estudiantes restantes y tratados con el método B y los otros tres estudiantes fueron tratados con el método C. Todos los tratamientos continuaron durante todo un semestre, cuando el examen HLT se aplicó de nuevo. Los resultados se muestran en la tabla.

Método	Calificaciones en el examen HLT				
A	73	83	76	68	80
B	54	74	71		
C	79	95	87		

a. Realice un análisis de varianza para este experimento.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en respuesta media de estudiantes a los tres métodos después del tratamiento?

11.11 Hostilidad, continúa Consulte el ejercicio 11.10. Con μ_A y μ_B, respectivamente, denote las calificaciones medias al final del semestre para las poblaciones de estudiantes extremadamente hostiles que fueron tratados en todo ese semestre por el método A y el método B.

a. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para μ_A.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para μ_B.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para $(\mu_A - \mu_B)$.

d. ¿Es correcto decir que los intervalos de confianza hallados en los incisos a), b) y c) son conjuntamente válidos?

MIS DATOS
EX1112

11.12 Ensamble de equipo electrónico Se realizó un experimento para comparar la efectividad de tres programas de capacitación, A, B y C, para capacitar ensambladores de una pieza de equipo electrónico. Quince empleados se asignaron al azar, cinco en cada uno, a los tres programas. Después de terminar los cursos, a cada persona se le pidió ensamblar cuatro piezas de equipo y se registró el promedio de tiempo necesario para completar el ensamble. Varios de los empleados renunciaron durante el curso del programa; el resto fueron evaluados, produciendo los datos que se ven en la tabla siguiente. Use la salida impresa *MINITAB* para contestar las preguntas.

Programa de capacitación	Tiempo promedio de ensamble (min)				
A	59	64	57	62	
B	52	58	54		
C	58	65	71	63	64

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en tiempos medios de ensamble para personal capacitado por los tres programas? Dé el valor *p* para el examen e interprete su valor.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia en tiempos medios de ensamble para personas capacitadas en los programas A y B.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para los tiempos medios de ensamble para personas capacitadas en el programa A.

d. ¿Piensa usted que los datos satisfacen (aproximadamente) la suposición de que han sido seleccionados de poblaciones normales? ¿Por qué?

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.12

ANOVA en una dirección: tiempo contra programa

```
Source      DF       SS       MS       F       P
Program      2    170.5     85.2    5.70   0.025
Error        9    134.5     14.9
Total       11    304.9
S = 3.865   R-Sq = 55.90%   R-Sq(adj) = 46.10%
                                  Individual 95% CIs For Mean
                             Based on Pooled StDev
Level        N     Mean    StDev  -+---------+---------+---------+-----
1            4   60.500    3.109              (--------*--------)
2            3   54.667    3.055  (---------*---------)
3            5   64.200    4.658                       (------*-------)
                                  -+---------+---------+---------+-----
Pooled StDev =    3.865          50.0      55.0      60.0      65.0
```

MIS DATOS
EX1113

11.13 Sitios pantanosos Se realizó un estudio ecológico para comparar los porcentajes de crecimiento de vegetación en cuatro lugares pantanosos sin urbanizar, así como para determinar la causa de cualesquiera diferencias que pudieran observarse. Parte del estudio comprendía medir la longitud de las hojas de una especie particular de plantas en una fecha preseleccionada en mayo. Seis plantas se seleccionaron al azar en cada uno de los cuatro lugares para usarlas en la comparación. Los datos de la tabla son la longitud media de hoja por planta (en centímetros) para una muestra aleatoria de 10 hojas por planta. También se proporciona el análisis *MINITAB* de varianza de salida impresa de computadora para estos datos.

Lugar	Longitud media de hoja					
1	5.7	6.3	6.1	6.0	5.8	6.2
2	6.2	5.3	5.7	6.0	5.2	5.5
3	5.4	5.0	6.0	5.6	4.9	5.2
4	3.7	3.2	3.9	4.0	3.5	3.6

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.13

ANOVA en una dirección: longitud contra lugar

```
Source     DF       SS      MS      F      P
Location    3   19.740   6.580  57.38  0.000
Error      20    2.293   0.115
Total      23   22.033
S = 0.3386   R-Sq = 89.59%   R-Sq(adj) = 88.03%
                                  Individual 95% CIs For Mean
                             Based on Pooled StDev
Level      N     Mean    StDev  --------+---------+---------+---------+-
1          6   6.0167   0.2317                              (--*---)
2          6   5.6500   0.3937                         (---*--)
3          6   5.3500   0.4087                     (---*--)
4          6   3.6500   0.2881  (---*--)
                                --------+---------+---------+---------+-
Pooled StDev =   0.3386              4.00      4.80      5.60      6.40
```

a. Usted recordará que los procedimientos de prueba y estimación, para un análisis de varianza, requieren que las observaciones sean seleccionadas de poblaciones normalmente distribuidas (al menos aproximadas). ¿Por qué podría sentir confianza razonable de que sus datos satisfacen esta suposición?

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en longitud media de hojas entre los cuatro lugares? ¿Cuál es el valor *p* para la prueba?

c. Suponga, antes de ver los datos, que usted decidió comparar las longitudes medias de hojas de los lugares 1 y 4. Pruebe la hipótesis nula $\mu_1 = \mu_4$ contra la alternativa $\mu_1 \neq \mu_4$.

d. Consulte el inciso c). Construya un intervalo de confianza de 99% para $(\mu_1 - \mu_4)$.

e. En lugar de usar un análisis de varianza de la prueba *F*, parecería más sencillo examinar los datos de uno, seleccionar los dos lugares que tengan las longitudes medias muestrales más cortas y más largas, y a continuación comparar estas dos medias usando la prueba *t* de Student. Si hay evidencia para indicar una diferencia en estas medias, hay claramente evidencia de una diferencia entre las cuatro. (Si se usara esta lógica, no habría necesidad del análisis de varianza de la prueba *F*.) Explique por qué este procedimiento es inválido.

MIS DATOS EX1114

11.14 Contenido de O_2 disuelto Se tomaron muestras de agua de un río en cuatro lugares diferentes para determinar si la cantidad de oxígeno disuelto, una medida de la contaminación del agua, variaba de un lugar a otro. Los lugares 1 y 2 se seleccionaron arriba de una planta industrial, una cerca de la orilla y la otra a mitad del río; el lugar 3 estaba adyacente a la descarga del agua industrial para la planta; y el lugar 4 estaba ligeramente aguas abajo a mitad del río. Cinco especímenes de agua se seleccionaron al azar en cada lugar, pero un espécimen, correspondiente al lugar 4, se perdió en el laboratorio. Los datos y un análisis de varianza con *MINITAB* de computadora de salida impresa se dan a continuación (a mayor contaminación, lecturas más bajas de oxígeno disuelto).

Lugar	Contenido medio de oxígeno disuelto				
1	5.9	6.1	6.3	6.1	6.0
2	6.3	6.6	6.4	6.4	6.5
3	4.8	4.3	5.0	4.7	5.1
4	6.0	6.2	6.1	5.8	

Salida impresa de *MINITAB* para el ejercicio 11.14

Anova en una vía: oxígeno contra lugar

```
Source     DF      SS      MS      F      P
Location    3  7.8361  2.6120  63.66  0.000
Error      15  0.6155  0.0410
Total      18  8.4516
S = 0.2026   R-Sq = 92.72%   R-Sq(adj) = 91.26%
                                Individual 95% CIs For Mean
                                Based on Pooled StDev
Level      N    Mean    StDev  ----+---------+---------+---------+--
1          5  6.0800   0.1483                      (--*---)
2          5  6.4400   0.1140                            (--*---)
3          5  4.7800   0.3114  (---*--)
4          4  6.0250   0.1708                     (--*---)
                               ----+---------+---------+---------+--
Pooled StDev =  0.2026            4.80      5.40      6.00      6.60
```

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el contenido medio de oxígeno disuelto para los cuatro lugares?

b. Compare el contenido medio de oxígeno disuelto a mitad del río arriba de la planta, con el contenido medio adyacente a la planta (lugar 2 contra lugar 3). Use un intervalo de confianza de 95%.

MIS DATOS EX1115

11.15 Calcio El contenido de calcio de una sustancia mineral pulverizada fue analizada cinco veces por cada uno de tres métodos, con desviaciones estándar similares:

Método	Porcentaje de calcio				
1	.0279	.0276	.0270	.0275	.0281
2	.0268	.0274	.0267	.0263	.0267
3	.0280	.0279	.0282	.0278	.0283

Use una prueba adecuada para comparar los tres métodos de medición. Comente sobre la validez de cualesquiera suposiciones que sea necesario hacer.

MIS DATOS EX1116

11.16 Atún En el ejercicio 10.6, informamos de los precios promedio estimados para una lata de 6 onzas o una bolsa de 7.06 onzas de atún, con base en precios pagados a nivel nacional por una variedad de marcas diferentes de atún.[1]

Atún claro en agua		Atún blanco en aceite	Atún blanco en agua	Atún claro en aceite	
.99	.53	1.27	1.49	2.56	.62
1.92	1.41	1.22	1.29	1.92	.66
1.23	1.12	1.19	1.27	1.30	.62
.85	.63	1.22	1.35	1.79	.65
.65	.67		1.29	1.23	.60
.69	.60		1.00		.67
.60	.66		1.27		
			1.28		

Fuente: De "Pricing of Tuna" Copyright 2001 por Consumers Union of U.S., Inc., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de junio de 2001 de Consumer Reports® sólo para fines educativos. No se permite uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

a. Use un análisis de varianza para un diseño completamente aleatorizado, para determinar si hay diferencias significativas en los precios de atún empacados en estas cuatro formas. ¿Se puede rechazar la hipótesis de que no hay diferencia en el precio promedio para estos empaques al nivel de significancia de $\alpha = .05$? ¿Y al nivel de significancia de $\alpha = .01$?

b. Encuentre una estimación de intervalo de confianza de 95% de la diferencia en precio entre atún claro en agua y atún claro en aceite. ¿Parece haber una diferencia significativa en el precio de estas dos clases de atún empacado?

c. Encuentre una estimación de intervalo de confianza de 95% de la diferencia en precio entre atún blanco en agua y atún blanco en aceite. ¿Parece haber una diferencia significativa en el precio de estas dos clases de atún empacado?

d. ¿Qué otros intervalos de confianza podrían ser de interés para el investigador que realizara el experimento?

MIS DATOS EX1117

11.17 El costo de la madera Un constructor de viviendas a nivel nacional desea comparar los precios por 1000 pies de madera de armazones de abeto Douglas de calidad estándar o mejor. Al azar selecciona cinco proveedores en cada uno de los cuatro estados donde el constructor está planeando iniciar la construcción. Los precios se dan en la tabla siguiente.

Estado			
1	2	3	4
\$241	\$216	\$230	\$245
235	220	225	250
238	205	235	238
247	213	228	255
250	220	240	255

a. ¿Qué tipo de diseño experimental se ha empleado?

b. Construya la tabla del análisis de varianza para estos datos.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el precio promedio por 1000 pies de madera de abeto Douglas difiere entre los cuatro estados? Pruebe usando $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1118

11.18 ¿Bueno para las matemáticas? Veinte alumnos de tercer grado se separaron al azar en cuatro grupos iguales y a cada grupo se le impartieron conceptos matemáticos usando un método diferente de enseñanza, midiéndose el progreso mediante un examen unitario al final del periodo de enseñanza. Las calificaciones se muestran a continuación (un niño del grupo 3 estuvo ausente el día en que se aplicó el examen).

Grupo			
1	2	3	4
112	111	140	101
92	129	121	116
124	102	130	105
89	136	106	126
97	99		119

a. ¿Qué tipo de diseño se ha empleado en este experimento?

b. Construya una tabla ANOVA para el experimento.

c. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el promedio de calificaciones para los cuatro métodos de enseñanza? Pruebe usando $\alpha = .05$.

11.6 CLASIFICACIÓN DE MEDIAS POBLACIONALES

Numerosos experimentos son exploratorios por naturaleza. No hay nociones preconcebidas de los resultados y no se ha decidido (antes de realizar el experimento) de hacer comparaciones específicas de tratamiento. En lugar de esto, se desea clasificar las medias de tratamiento, determinar cuáles medias difieren e identificar conjuntos de medias para las cuales no hay evidencia de diferencia.

Una opción podría ser ordenar las medias muestrales de menor a mayor y a continuación efectuar pruebas t para medias adyacentes en el ordenamiento. Si dos medias difieren en más de

$$t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

se concluye que el par de medias poblacionales difiere. El problema con este procedimiento es que la probabilidad de hacer un error tipo I, es decir, concluir que dos medias difieren cuando en realidad son iguales, es α para cada prueba. Si se compara un gran número de pares de medias, la probabilidad de detectar al menos una diferencia en medias, cuando en realidad ninguna existe, es bastante grande.

Una forma sencilla de evitar el alto riesgo de declarar diferencias cuando no existen es usar el **rango de Student**, que es la diferencia entre la más pequeña y la más grande en un conjunto de k medias muestrales, como la medida para determinar si hay una diferencia en un par de medias poblacionales. Este método, a veces **método de Tukey para comparaciones apareadas**, hace que sea igual a α la probabilidad de declarar que existe una diferencia entre al menos un par en un conjunto de k medias de tratamiento, cuando no existe diferencia.

El método de Tukey para hacer comparaciones apareadas está basado en el análisis usual de suposiciones de varianza. **Además, supone que las medias muestrales son independientes y están basadas en muestras de igual tamaño.** La medida que determina si existe una diferencia entre un par de medias de tratamiento es la cantidad ω (omega minúscula), que se presenta a continuación.

MEDIDA PARA HACER COMPARACIONES APAREADAS

$$\omega = q_\alpha(k, df)\left(\frac{s}{\sqrt{n_t}}\right)$$

donde

k = Número de tratamientos

s^2 = MSE = Estimador de la varianza común σ^2 y $s = \sqrt{s^2}$

df = Número de grados de libertad para s^2

n_t = Tamaño muestral común, es decir, el número de observaciones en cada una de las k medias de tratamiento

$q_\alpha(k,df)$ = Valor tabulado de las tablas 11a) y 11b) del apéndice I, para $\alpha = .05$ y .01, respectivamente y para varias combinaciones de k y df

Regla: Dos medias poblacionales se juzga que difieren si las medias muestrales correspondientes difieren en ω o más.

Las tablas 11a) y 11b) del apéndice I contienen los valores de $q_\alpha(k, df)$ para $\alpha = .05$ y .01, respectivamente. Para ilustrar el uso de las tablas, consulte la parte de la tabla 11a) reproducida en la tabla 11.2. Suponga que se desea hacer comparaciones por pares de $k = 5$ medias con $\alpha = .05$ para un análisis de varianza, donde s^2 posee 9 df. El valor tabulado para $k = 5$, $df = 9$ y $\alpha = .05$, sombreados en la tabla 11.2, es $q_{.05}(5, 9) = 4.76$.

TABLA 11.2 **Reproducción parcial de la tabla 11a) del apéndice I; puntos de 5% superiores**

df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59	51.96
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61

EJEMPLO 11.7

Consulte el ejemplo 11.4, en el que se comparó el promedio de intervalos de atención para estudiantes a los que se dieron diferentes tratamientos de "comida" en la mañana: no desayuno, un desayuno ligero o un desayuno completo. La prueba F de ANOVA del ejemplo 11.5 indicó una diferencia significativa en las medias poblacionales. Use el método de Tukey para comparaciones apareadas, para determinar cuál de las tres medias poblacionales difiere de las otras.

Solución Para este ejemplo, hay $k =$ medias de tratamiento, con $s = \sqrt{\text{MSE}} = 2.436$. El método de Tukey se puede usar, con cada una de las tres muestras conteniendo $n_t = 5$ mediciones y $(n - k) = 12$ grados de libertad. Consulte la tabla 11 en el apéndice I para hallar $q_{.05}(k, df) = q_{.05}(3, 12) = 3.77$ y calcule la "regla" como

$$\omega = q_{.05}(3, 12)\left(\frac{s}{\sqrt{n_t}}\right) = 3.77\left(\frac{2.436}{\sqrt{5}}\right) = 4.11$$

Las tres medias de tratamiento están dispuestas en orden de la más pequeña, 9.4, a la máxima, 14.0, en la figura 11.8. El siguiente paso es comprobar la diferencia entre cada par de medias. La única diferencia que excede de $\omega = 4.11$ es la diferencia entre no desayuno y un desayuno ligero. Estos dos tratamientos se declaran así significativamente diferentes. No se puede declarar una diferencia entre los otros dos pares de tratamientos. Para indicar este hecho visualmente, la figura 11.8 muestra una línea bajo los pares de medias que no son significativamente diferentes.

FIGURA 11.8
Medias clasificadas para el ejemplo 11.7

Ninguno	Completo	Ligero
9.4	13.0	14.0

Estos resultados pueden parecer confusos, pero por lo general ayuda considerar la clasificación de las medias e interpretar diferencias no significativas como nuestra incapacidad de clasificar de manera distintiva las medias subrayadas por la misma línea. Para este ejemplo, el desayuno ligero definitivamente clasificó más alto que no desayuno, pero el desayuno completo no pudo ser clasificado más alto que el no desayuno, o más abajo que el desayuno ligero. La probabilidad de que cometimos al menos un error entre las tres comparaciones es al menos $\alpha = .05$.

MI CONSEJO

Si cero no está en el intervalo, hay evidencia de una diferencia entre los dos métodos.

Casi todos los programas de computadora dan una opción para realizar **comparaciones apareadas**, incluyendo el método de Tukey. La salida impresa del *MINITAB* de la figura 11.9 muestra su forma de la prueba de Tukey, que difiere ligeramente del método que hemos presentado. Los tres intervalos que se ven en la salida impresa marcada "Inferior" y "Superior" representan la diferencia en las dos medias muestrales más o menos la regla ω. Si el intervalo contiene el valor 0, las dos medias se juzgan como no significativamente diferentes. Se puede ver que las únicas medias 1 y 2 (no desayuno contra desayuno ligero) muestra una diferencia significativa.

FIGURA 11.9
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 11.7

```
Tukey's 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of Meal
Individual confidence level = 97.94%

Meal = 1 subtracted from:

Meal  Lower   Center  Upper  -----+---------+---------+---------+----
2      0.493   4.600  8.707                (-----------*-----------)
3     -0.507   3.600  7.707              (----------*-----------)
                              -----+---------+---------+---------+----
                                 -3.5       0.0       3.5       7.0
Meal = 2 subtracted from:

Meal  Lower   Center  Upper   -----+---------+---------+---------+----
3     -5.107  -1.000  3.107   (-----------*-----------)
                              -----+---------+---------+---------+----
                                 -3.5       0.0       3.5       7.0
```

Cuando usted estudie dos diseños experimentales más en las siguientes secciones de este capítulo, recuerde que, una vez que haya encontrado que un factor es significativo, debe usar el método de Tukey u otro método de comparaciones apareadas para averiguar exactamente dónde están las diferencias.

11.6 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

11.19 Supongamos que usted desea usar el método de Tukey de comparaciones apareadas para clasificar un conjunto de medias poblacionales. Además del análisis de suposiciones de varianza, ¿qué otra propiedad deben satisfacer las medias de tratamiento?

11.20 Consulte las tabla 11a) y 11b) del apéndice I y encuentre los valores de $q_\alpha(k, df)$ para estos casos:

a. $\alpha = .05, k = 5, df = 7$

b. $\alpha = .05, k = 3, df = 10$

c. $\alpha = .01, k = 4, df = 8$

d. $\alpha = .01, k = 7, df = 5$

11.21 Si el tamaño muestral para cada tratamiento es n_t y si s^2 está basada en 12 *df*, encuentre ω en estos casos:

a. $\alpha = .05, k = 4, n_t = 5$

b. $\alpha = .01, k = 6, n_t = 8$

11.22 Un diseño de muestreo aleatorio independiente se utilizó para comparar las medias de seis tratamientos basados en muestras de cuatro observaciones por tratamiento. El estimador agrupado de σ^2 es 9.12, y las medias muestrales siguen:

$\bar{x}_1 = 101.6$ $\quad \bar{x}_2 = 98.4$ $\quad \bar{x}_3 = 112.3$
$\bar{x}_4 = 92.9$ $\quad \bar{x}_5 = 104.2$ $\quad \bar{x}_6 = 113.8$

a. Dé el valor de ω que usaría para hacer comparaciones por pares de las medias de tratamiento para $\alpha = .05$.

b. Ordene las medias de tratamiento usando comparaciones por pares.

APLICACIONES

11.23 Sitios pantanosos, otra vez Consulte el ejercicio 11.13 y el conjunto de datos EX1113. Ordene el crecimiento medio de hojas para los cuatro lugares. Use $\alpha = .01$.

11.24 Calcio Consulte el ejercicio 11.15 y el conjunto de datos EX1115. La opción de comparaciones pareadas en *MINITAB* generó la salida impresa siguiente. ¿Qué indican estos resultados acerca de las diferencias en las medias poblacionales? ¿Esto confirma sus conclusiones del ejercicio 11.15?

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.24

```
Tukey's 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of Method
Individual confidence level = 97.94%

Method = 1 subtracted from:

Method        Lower       Center       Upper
2         -0.0014377  -0.0008400  -0.0002423
3         -0.0001777   0.0004200   0.0010177
Method    --------+---------+---------+---------+
2             (-----*-----)
3                         (-----*-----)
          --------+---------+---------+---------+
              -0.0010    0.0000    0.0010    0.0020

Method = 2 subtracted from:

Method        Lower       Center       Upper
3          0.0006623   0.0012600   0.0018577
Method    --------+---------+---------+---------+
3                                  (-----*-----)
          --------+---------+---------+---------+
              -0.0010    0.0000    0.0010    0.0020
```

MIS DATOS EX1125

11.25 Tolerancia a la glucosa Los médicos dependen de resultados de exámenes de laboratorio cuando manejan problemas médicos como diabetes o epilepsia. En un examen de uniformidad para tolerancia a la glucosa, a tres laboratorios diferentes se les enviaron $n_t = 5$ muestras de sangre idénticas de una persona que había bebido 50 miligramos (mg) de glucosa disuelta en agua. Los resultados de laboratorio (en mg/dl) son los siguientes:

Lab 1	Lab 2	Lab 3
120.1	98.3	103.0
110.7	112.1	108.5
108.9	107.7	101.1
104.2	107.9	110.0
100.4	99.2	105.4

a. ¿Los datos indican una diferencia en el promedio de lecturas para los tres laboratorios?

b. Use el método de Tukey para comparaciones apareadas para clasificar las tres medias de tratamiento. Use $\alpha = .05$.

11.26 El costo de la madera, continúa El análisis de varianza de la prueba F en el ejercicio 11.17 (y conjunto de datos EX1117) determinó que, efectivamente, había una diferencia en el costo promedio de madera para los cuatro estados. La siguiente información del ejercicio 11.17 se da en la tabla.

Medias muestrales			
	$\bar{x}_1 = 242.2$	MSE	41.25
	$\bar{x}_2 = 214.8$	Error *df*:	16
	$\bar{x}_3 = 231.6$	n_i:	5
	$\bar{x}_4 = 248.6$	k:	4

Use el método de Tukey para comparaciones apareadas para determinar cuáles medias difieren significativamente respecto de las otras al nivel $\alpha = .01$.

MIS DATOS EX1127

11.27 Calificaciones del GRE Las calificaciones de Examen de Registro de Graduados (GRE, por sus siglas en inglés), se registraron para estudiantes admitidos en tres programas diferentes para graduados en una universidad local.

Programa de graduados		
1	2	3
532	670	502
548	590	607
619	640	549
509	710	524
627	690	542

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las calificaciones medias del GRE, para solicitantes admitidos a los tres programas?

b. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en calificaciones medias del GRE para los programas 1 y 2.

c. Si encuentra una diferencia significativa en las calificaciones del GRE para los tres programas, use el método de Tukey para comparaciones apareadas para determinar cuáles medias difieren significativamente de las otras. Use $\alpha = .05$.

11.7 DISEÑO DE BLOQUE ALEATORIZADO: UNA CLASIFICACIÓN EN DOS DIRECCIONES

El *diseño completamente aleatorizado* introducido en la sección 11.4 es una generalización del diseño de las *dos muestras independientes* presentado en la sección 10.4. Está pensado para usarse cuando las unidades experimentales sean bastante similares u *homogéneas* en su conformación y cuando haya sólo un factor, el *tratamiento*, que pueda influir en la respuesta. Cualquier otra variación en la respuesta se debe a variación aleatoria o a *error experimental.* A veces es claro para el investigador que las unidades experimentales *no sean homogéneas*. Personas o animales con carácter experimental, campos agrícolas, días de la semana y otras unidades experimentales a veces agregan su propia variabilidad a la respuesta. Aun cuando el investigador no esté realmente interesado en esta fuente de variación, sino que más bien en algún *tratamiento* que escoja aplicar, puede aumentar la información al aislar esta fuente de variación usando el **diseño de bloque aleatorizado**, que es una extensión directa de los *pares acoplados* o *diseño de diferencia apareada* de la sección 10.5.

MI CONSEJO

b = bloques
k = tratamientos
$n = bk$

En un diseño de bloque aleatorizado, el experimentador está interesado en comparar k medias de tratamiento. El diseño utiliza *bloques* de k unidades experimentales que son claramente similares, u *homogéneos*, con una unidad dentro de cada bloque asignada *al azar* a cada tratamiento. Si el diseño de bloque aleatorizado contiene k tratamientos dentro de cada uno de los b bloques, entonces el número total de observaciones en el experimento es $n = bk$.

Un supervisor de producción desea comparar los tiempos medios para que operadores de línea de producción ensamblen un artículo usando uno de tres métodos: A, B o C. Esperando variación en tiempos de ensamble de un operador a otro, el supervisor emplea un diseño de bloque aleatorizado para comparar los tres métodos. Cinco operadores de línea de producción se seleccionan para servir como bloques y a cada uno se le asigna ensamblar el artículo tres veces, una vez por cada uno de los tres métodos. Como la secuencia en la que el operador usa los tres métodos puede ser importante (fatiga o mayor destreza pueden ser factores que afecten la respuesta), cada operador debe ser asignado a una secuencia aleatoria de los tres métodos. Por ejemplo, el operador 1 podría ser asignado a efectuar primero el método C, seguido por A y B. El operador 2 podría realizar primero el método A, seguido del C y B.

Para comparar cuatro métodos diferentes de enseñanza, un grupo de estudiantes podría ser dividido en bloques de tamaño 4, de modo que los grupos se encuentren casi *acoplados* según su rendimiento académico. Para comparar los costos promedio de tres compañías de telefonía celular diferentes, los costos podrían compararse en cada uno de tres niveles de uso: bajo, medio y alto. Para comparar el promedio de producción de tres especies de árboles frutales, cuando se espera una variación en producción debido al campo en el que se planten los árboles, una investigadora usa cinco campos. Ella divide cada campo en tres *lotes* en los que están plantadas las tres especies de árboles frutales.

El acoplamiento o *bloqueo* puede tener lugar en muchas formas diferentes. Las comparaciones de tratamientos se hacen a veces dentro de bloques de tiempo, dentro de bloques de personas o dentro de ambientes externos similares. El propósito de bloquear es remover o aislar la variabilidad *de un bloque a otro* que pudiera de otro modo ocultar el efecto de los tratamientos. Usted encontrará más ejemplos del uso del diseño de bloque aleatorizado en los ejercicios al final de la sección siguiente.

11.8 EL ANÁLISIS DE VARIANZA PARA UN DISEÑO DE BLOQUE ALEATORIZADO

El diseño de bloque aleatorizado identifica dos factores: **tratamientos** y **bloques**, los cuales afectan la respuesta.

División de la variación total en el experimento

Sea x_{ij} la respuesta cuando el i-ésimo tratamiento ($i = 1, 2, \ldots, k$) se aplica en el j-ésimo bloque ($j = 1, 2, \ldots, b$). La variación total en las $n = bk$ observaciones es

$$\text{SS Total} = \Sigma(x_{ij} - \bar{x})^2 = \Sigma x_{ij}^2 - \frac{(\Sigma x_{ij})^2}{n}$$

Esto se divide en *tres* (en lugar de dos) partes de modo que

$$\text{SS Total} = \text{SSB} + \text{SST} + \text{SSE}$$

donde

- SSB (suma de cuadrados para bloques) mide la variación entre las medias de bloque.
- SST (suma de cuadrados para tratamientos) mide la variación entre las medias de tratamiento.
- SSE (suma de cuadrados para error) mide la variación de las diferencias entre las observaciones de tratamiento *dentro* de bloques, que mide el error experimental.

Las fórmulas de cálculo para las cuatro sumas de cuadrados son semejantes en forma a las empleadas para el diseño completamente aleatorizado de la sección 11.5. Aun cuando se puede simplificar el trabajo con el uso de un programa computarizado para calcular estas sumas de cuadrados, las fórmulas se dan a continuación.

CÁLCULO DE LAS SUMAS DE CUADRADOS PARA UN DISEÑO DE BLOQUE ALEATORIZADO, *k* TRATAMIENTOS EN *b* BLOQUES

$$\text{CM} = \frac{G^2}{n}$$

donde

$$G = \Sigma x_{ij} = \text{Total de todas las } n = bk \text{ observaciones}$$

$$\text{SS Total} = \Sigma x_{ij}^2 - \text{CM}$$

$$= (\text{Suma de cuadrados de todos los valores } x) - \text{CM}$$

$$\text{SST} = \Sigma\frac{T_i^2}{b} - \text{CM}$$

$$\text{SSB} = \Sigma\frac{B_j^2}{k} - \text{CM}$$

$$\text{SSE} = \text{SS Total} - \text{SST} - \text{SSB}$$

con

T_i = Total de todas las observaciones que reciben tratamiento i, $i = 1, 2, \ldots, k$
B_j = Total de todas las observaciones en bloque j, $j = 1, 2, \ldots, b$

MI CONSEJO

SS Total = SST + SSB + SSE

Cada una de las tres **fuentes de variación**, cuando están divididas por los **grados de libertad** apropiados, da una estimación de la variación en el experimento. Como SS Total contiene $n = bk$ observaciones al cuadrado, sus grados de libertad son $df = (n - 1)$. Del mismo modo, SST contiene k totales al cuadrado y sus grados de libertad son $df = (k - 1)$, en tanto que SSB contiene b totales al cuadrado y $(b - 1)$ grados de libertad. Finalmente, como los grados de libertad son aditivos, los restantes grados de libertad asociados con SSE se puede demostrar algebraicamente que son $df = (b - 1)(k - 1)$.

Estas tres fuentes de variación y sus respectivos grados de libertad se combinan para formar los **medios cuadráticos** como MS = SS/*df*, y la variación total en el experimento se exhibe entonces en una **tabla de análisis de varianza** (o **ANOVA**) como se muestra a continuación:

MI CONSEJO

Los grados de libertad son aditivos.

TABLA ANOVA PARA UN DISEÑO DE BLOQUE ALEATORIZADO, *k* TRATAMIENTOS Y *b* BLOQUES

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
Tratamientos	$k - 1$	SST	$MST = SST/(k-1)$	MST/MSE
Bloques	$b - 1$	SSB	$MSB = SSB/(b-1)$	MSB/MSE
Error	$(b-1)(k-1)$	SSE	$MSE = SSE/(b-1)(k-1)$	
Total	$n - 1 = bk - 1$			

EJEMPLO 11.8

La industria de la telefonía celular está involucrada en una feroz batalla por clientes, con cada compañía ideando su propio y complejo plan de precios para atraer clientes. Como el costo de un minuto por teléfono celular varía en forma drástica dependiendo del número de minutos por mes usados por el cliente, un grupo de vigilancia integrado por consumidores decidió comparar el promedio de costos de cuatro compañías de telefonía celular usando tres diferentes niveles de uso como bloques. Los costos mensuales (en dólares), calculados por las compañías de telefonía celular para usuarios de tiempo pico en bajos (20 minutos por mes), medios (150 minutos por mes) y altos (1000 minutos por mes) niveles de uso, se dan en la tabla 11.3. Construya la tabla de análisis de varianza para este experimento.

TABLA 11.3 **Costos mensuales de teléfono para cuatro compañías a tres niveles de uso**

	Compañía				
Nivel de uso	A	B	C	D	Totales
Bajo	27	24	31	23	$B_1 = 105$
Medio	68	76	65	67	$B_2 = 276$
Alto	308	326	312	300	$B_3 = 1246$
Totales	$T_1 = 403$	$T_2 = 426$	$T_3 = 408$	$T_4 = 390$	$G = 1627$

MI CONSEJO

Los bloques contienen unidades experimentales que son *relativamente las mismas*.

Solución El experimento está diseñado como *diseño de bloque aleatorizado* con $b = 3$ niveles de uso (bloques) y $k = 4$ compañías (tratamientos), de modo que hay $n = bk = 12$ observaciones y $G = 1627$. Entonces

$$CM = \frac{G^2}{n} = \frac{1627^2}{12} = 220\,594.0833$$

$$\text{SS Total} = (27^2 + 24^2 + \cdots + 300^2) - CM = 189\,798.9167$$

$$SST = \frac{403^2 + \cdots + 390^2}{3} - CM = 222.25$$

$$SSB = \frac{105^2 + 276^2 + 1246^2}{4} - CM = 189\,335.1667$$

y por sustracción,

$$SSE = \text{SS Total} - SST - SSB = 241.5$$

Estas cuatro fuentes de variación, sus grados de libertad, sumas de cuadrados y medios cuadráticos se muestran en el área sombreada de la tabla de análisis de varianza, generado por *MINITAB* y se dan en la figura 11.10. Encontrará instrucciones para generar esta salida impresa en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo.

FIGURA 11.10
Salida impresa *MINITAB* para el Ejemplo 11.8

ANOVA de dos vías: dólares contra uso, compañía

Source	DF	SS	MS	F	P
Usage	2	189335	94667.6	2351.99	0.000
Company	3	222	74.1	1.84	0.240
Error	6	242	40.3		
Total	11	189799			

```
S = 6.344   R-Sq = 99.87%   R-Sq(adj) = 99.77%
```

Observe que la tabla ANOVA *MINITAB* muestra dos diferentes estadísticas F y valores de p. No debe sorprender el saber que estas estadísticas se usan para probar hipótesis respecto a la igualdad de medias *de tratamiento* y *de bloque*.

Prueba de la igualdad de las medias de tratamiento y de bloque

Los *medios cuadráticos* de la tabla de análisis de varianza se pueden usar para probar las hipótesis nulas

H_0 : No hay diferencia entre las k medias de tratamiento

o bien

H_0 : No hay diferencia entre las b medias de bloque

contra la hipótesis alternativa

H_a : Al menos una de las medias es diferente de al menos otra

con el uso de un argumento teórico similar al empleado para el diseño completamente aleatorizado.

- Recuerde que σ^2 es la varianza común para las observaciones en todas las bk combinaciones de bloque-tratamiento. La cantidad

  $$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(b-1)(k-1)}$$

  es una estimación insesgada de σ^2, sea o no sea verdadera H_0.

- Las dos cuadráticas medias, MST y MSB, estiman σ^2 sólo si H_0 es verdadera y tienden a ser inusualmente *grandes* si H_0 es falsa y ya sea que las medias de tratamiento o de bloque sean diferentes.

- Las estadísticas de prueba

  $$F = \frac{\text{MST}}{\text{MSE}} \quad \text{y} \quad F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$$

  se usan para probar la igualdad de medias de tratamiento y de bloque, respectivamente. Ambas estadísticas tienden a ser más grandes de lo normal si H_0 es falsa. En consecuencia, se puede rechazar H_0 para valores grandes de F, usando valores críticos *de cola derecha* de la distribución F con los grados de libertad apropiados (véase la tabla 6 del apéndice I) o valores p generados por computadora para sacar conclusiones estadísticas acerca de la igualdad de las medias poblacionales. Como alternativa, se puede usar el applet ***F* Probabilities** para hallar ya sea valores críticos de F o valores p.

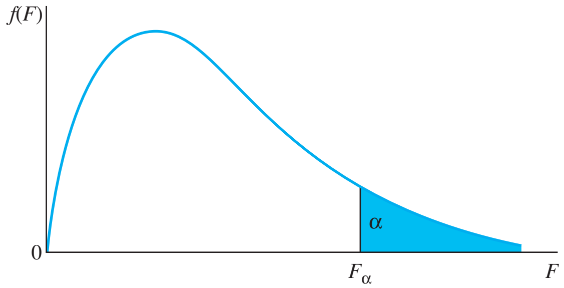
PRUEBAS PARA UN DISEÑO DE BLOQUE ALEATORIZADO

Para comparar medias de tratamiento:

1. Hipótesis nula: H_0 : Las medias de tratamiento son iguales
2. Hipótesis alternativa: H_a : Al menos dos de las medias de tratamiento difieren
3. Prueba estadística: $F = \text{MST/MSE}$, donde F está basada en $df_1 = (k - 1)$ y $df_2 = (b - 1)(k - 1)$
4. Región de rechazo: rechazar si $F > F_\alpha$, donde F_α se encuentra en la cola superior de la distribución F (véase la figura), o cuando el valor $p < \alpha$

Para comparar medias de bloque:

1. Hipótesis nula: H_0 : Las medias de bloque son iguales
2. Hipótesis alternativa: H_a : Al menos dos de las medias de bloque difieren
3. Prueba estadística: $F = \text{MSB/MSE}$, donde F está basada en $df_1 = (b - 1)$ y $df_2(b - 1)(k - 1)$
4. Región de rechazo: rechazar si $F > F_\alpha$, donde F_α se encuentra en la cola superior de la distribución F (véase la figura), o cuando el valor $p < \alpha$



EJEMPLO 11.9

¿Los datos del ejemplo 11.8 dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el promedio de costo mensual de teléfono celular, dependiendo de la compañía que use el cliente?

Solución Las compañías de telefonía celular representan los *tratamientos* en este diseño de bloque aleatorizado y las diferencias en el promedio de sus costos mensuales son de primordial importancia para el investigador. Para probar

H_0 : No hay diferencia en el promedio de costo entre compañías

contra la alternativa de que el promedio de costo es diferente para al menos una de las cuatro compañías, se usa el análisis de varianza de la estadística F, calculado como

$$F = \frac{\text{MST}}{\text{MSE}} = \frac{74.1}{40.3} = 1.84$$

y se muestra en la columna marcada "F" y el renglón marcado "Compañía" en la figura 11.10. El valor p exacto para esta prueba estadística también se da en la figura 11.10 como .240, que es demasiado grande para permitir el rechazo de H_0. Los resultados no muestran una diferencia significativa en las medias de tratamiento. Esto es, hay insuficiente evidencia para indicar una diferencia en el promedio de costos mensuales para las cuatro compañías.

El investigador del ejemplo 11.9 estaba bastante seguro de que al usar un *diseño de bloque aleatorizado* habría una diferencia significativa en las medias de bloque, es decir, una diferencia significativa en el promedio de costos mensuales dependiendo del nivel de uso. Esta sospecha está justificada al ver la prueba de igualdad de medias de bloque. Observe que la prueba estadística observada es $F = 2351.99$ con $P = .000$, mostrando una diferencia altamente significativa, como se esperaba, en las medias de bloque.

Identificación de diferencias en las medias de tratamiento y de bloque

Una vez efectuada la prueba F general para igualdad de las medias de tratamiento o de bloque, ¿qué más se puede hacer para identificar la naturaleza de cualesquiera diferencias que se hayan encontrado? Al igual que en la sección 11.5, se puede usar el método de Tukey de comparaciones apareadas para determinar qué pares de medias de tratamiento o de bloque son significativamente diferentes uno de otro. No obstante, si la prueba F no indica una diferencia significativa en las medias, no hay razón para usar el procedimiento de Tukey. Si el investigador tiene especial interés en un *par* particular de medias de tratamiento o de bloque, puede estimar la diferencia usando un intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$.[†] Las fórmulas para estos procedimientos, que se muestran a continuación, siguen un patrón similar a las fórmulas para el diseño completamente aleatorizado. Recuerde que MSE siempre da un estimador insesgado de σ^2 y utiliza información proveniente de todo el conjunto de mediciones. En consecuencia, es el mejor estimador existente de σ^2, cualquiera que sea el procedimiento de prueba o estimación que se use. Utilice de nuevo

MI CONSEJO

Los grados de libertad para la prueba de Tukey y para intervalos de confianza son los ***df* de error.**

$$s^2 = \text{MSE} \qquad \text{con } df = (b - 1)(k - 1)$$

para estimar σ^2 al comparar las medias de tratamiento y de bloque.

COMPARACIÓN DE MEDIAS DE TRATAMIENTO Y DE BLOQUE

Medidor de Tukey para comparar medias de bloque:

$$\omega = q_\alpha(b, df)\left(\frac{s}{\sqrt{k}}\right)$$

Medidor de Tukey para comparar medias de tratamiento:

$$\omega = q_\alpha(k, df)\left(\frac{s}{\sqrt{b}}\right)$$

Intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ para la diferencia en dos medias de bloque:

$$(\bar{B}_i - \bar{B}_j) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right)}$$

donde $\bar{B}_i$ es el promedio de todas las observaciones en el bloque i

Intervalo de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ para la diferencia en dos medias de tratamiento:

$$(\bar{T}_i - \bar{T}_j) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right)}$$

donde $\bar{T}_i$ es el promedio de todas las observaciones en el tratamiento i.

[†] No se puede construir un intervalo de confianza para una media individual, a menos que los bloques hayan sido seleccionados al azar de entre la población de todos los bloques. El procedimiento para construir intervalos para medias individuales está fuera del propósito de este libro.

Nota: Los valores $q_\alpha(*, df)$ de la tabla 11 en el apéndice I, $t_{\alpha/2}$ de la tabla 4 en el apéndice I y $s^2 = \text{MSE}$ dependen todos ellos de $df = (b - 1)(k - 1)$ grados de libertad.

EJEMPLO 11.10

Identifique la naturaleza de cualesquiera diferencias encontradas en el promedio de costos mensuales de teléfono celular del ejemplo 11.8.

Solución Como la prueba F no presentó diferencias significativas en los costos promedio para las cuatro compañías, no hay razón para usar el método de Tukey de comparaciones apareadas. Supongamos, sin embargo, que usted es un ejecutivo de la compañía B y su principal competidor es la compañía C. ¿Puede decir que hay una diferencia significativa en los dos costos promedio? Usando un intervalo de confianza de 95%, puede calcular

$$(\overline{T}_2 - \overline{T}_3) \pm t_{.025}\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{2}{b}\right)}$$

$$\left(\frac{426}{3} - \frac{408}{3}\right) \pm 2.447\sqrt{40.3\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$6 \pm 12.68$$

de modo que la diferencia entre los dos costos promedio se estiman entre $-\$6.68$ y $\$18.68$. Como 0 está contenido en el intervalo, no tiene evidencia para indicar una diferencia significativa en sus costos promedio. ¡Qué pena!

MI CONSEJO

No se puede formar un intervalo de confianza o probar una hipótesis acerca de una media de tratamiento individual en un diseño de bloque aleatorizado.

Algunos comentarios de precaución en bloqueo

A continuación veamos algunos puntos importantes a recordar:

- Un diseño de bloque aleatorizado no debe usarse cuando tanto tratamientos como bloques corresponden a factores **experimentales** de interés para el investigador. Al diseñar un factor como *bloque*, puede suponer que el efecto del tratamiento será el mismo, cualquiera que sea el bloque que utilice. Si éste *no es* el caso, los dos factores, bloques y tratamientos, se dice que **interactúan** y el análisis podría llevar a conclusiones incorrectas respecto a la relación entre los tratamientos y la respuesta. Cuando se sospeche que hay una *interacción* entre dos factores, deben analizarse los datos como **experimento factorial**, que se introduce en la siguiente sección.
- Recuerde que el bloqueo puede no ser siempre benéfico. Cuando el SSB se elimine del SSE, el número de grados de libertad asociado con el SSE se reduce. Para que el bloqueo sea benéfico, la información ganada al aislar la variación de bloque debe importar más que la pérdida de grados de libertad por error, pero, por lo general, si se sospecha que las unidades experimentales no son homogéneas y se pueden agrupar las unidades en bloques, es bueno usar el *diseño de bloque aleatorizado*.
- Por último, recuerde que no se pueden construir intervalos de confianza para medias de tratamiento individuales a menos que sea razonable suponer que los b bloques se han seleccionado al azar de entre una población de bloques. Si el experimentador construye ese intervalo, la media de tratamiento muestral estará sesgada por los efectos positivos y negativos que los bloques tienen en la respuesta.

11.8 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

11.28 Se utilizó un diseño de bloque aleatorizado para comparar las medias de tres tratamientos dentro de seis bloques. Construya una tabla ANOVA que muestre las fuentes de variación y sus respectivos grados de libertad.

11.29 Suponga que los cálculos del análisis de varianza para el ejercicio 11.28 son SST $= 11.4$, SSB $= 17.1$ y SS Total $= 42.7$. Complete la tabla ANOVA, mostrando todas las sumas de cuadrados, medios cuadráticos y valores F pertinentes.

11.30 ¿Los datos del ejercicio 11.28 dan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias de tratamiento? Pruebe usando $\alpha = .05$.

11.31 Consulte el ejercicio 11.28. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre un par de medias de tratamiento A y B si $\bar{x}_A = 21.9$ y $\bar{x}_B = 24.2$.

11.32 ¿Los datos del ejercicio 11.28 dan suficiente evidencia para indicar que el bloque aumentó la cantidad de información en el experimento acerca de las medias de tratamiento? Justifique su respuesta.

MIS DATOS EX1133

11.33 Los datos que siguen son observaciones recolectadas de un experimento que comparó cuatro tratamientos, A, B, C y D, dentro de cada uno de tres bloques, usando un diseño de bloque aleatorizado.

	Tratamiento				
Bloque	A	B	C	D	Total
1	6	10	8	9	33
2	4	9	5	7	25
3	12	15	14	14	55
Total	22	34	27	30	113

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias de tratamiento? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias de bloque? Pruebe usando $\alpha = .05$.

c. Clasifique las cuatro medias de tratamiento usando el método de Tukey de comparaciones pareadas con $\alpha = .01$.

d. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en medias para tratamientos A y B.

e. ¿Le parece que el uso de un diseño de bloque aleatorizado para este experimento estaba justificado? Explique.

MIS DATOS EX1134

11.34 Los datos mostrados a continuación son observaciones recolectadas de un experimento que comparó tres tratamientos, A, B y C, dentro de cada uno de cinco bloques, usando un diseño de bloque aleatorizado:

	Bloque					
Tratamiento	1	2	3	4	5	Total
A	2.1	2.6	1.9	3.2	2.7	12.5
B	3.4	3.8	3.6	4.1	3.9	18.8
C	3.0	3.6	3.2	3.9	3.9	17.6
Total	8.5	10.0	8.7	11.2	10.5	48.9

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.34

ANOVA en dos vías: respuesta contra tratamientos, bloques

```
Source     DF      SS      MS      F      P
Trts        2   4.476   2.238  79.93  0.000
Blocks      4   1.796   0.449  16.04  0.001
Error       8   0.224   0.028
Total      14   6.496

S = 0.1673   R-Sq = 96.55%   R-Sq(adj) = 93.97%
```

Use la salida impresa *MINITAB* para analizar el experimento. Investigue posibles diferencias en las medias de bloque y/o tratamiento y, si existen algunas diferencias, use un método apropiado para identificar específicamente dónde están las diferencias. ¿El bloqueo ha sido efectivo en este experimento? Presente sus resultados en la forma de un reporte.

11.35 La tabla ANOVA parcialmente completada para un diseño de bloque aleatorizado se presenta a continuación:

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
Tratamientos	4	14.2		
Bloques		18.9		
Error	24			
Total	34	41.9		

a. ¿Cuántos bloques intervienen en el diseño?

b. ¿Cuántas observaciones hay en cada total de tratamiento?

c. ¿Cuántas observaciones hay en cada total de bloque?

d. Llene los espacios en blanco de la tabla ANOVA.

e. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias de tratamiento? Pruebe usando $\alpha = .05$.

f. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias entre las medias de bloque? Pruebe usando $\alpha = .05$.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1136 **11.36 Rendimiento de gasolina** Se realizó un estudio para comparar el rendimiento de gasolina en automóviles para tres fórmulas de gasolina. A era una fórmula sin plomo y 87 octanos, B era una fórmula sin plomo y 91 octanos y C era una fórmula sin plomo de 87 octanos con 15% de etanol. Se utilizaron cuatro automóviles, todos ellos de la misma marca y modelo, y cada fórmula se probó en cada uno de los autos. El uso de cada fórmula en el mismo auto tiene el efecto de eliminar (bloqueo) variabilidad de un auto a otro. Los datos (en millas por galón) se dan a continuación.

	Automóvil			
Fórmula	1	2	3	4
A	25.7	27.0	27.3	26.1
B	27.2	28.1	27.9	27.7
C	26.1	27.5	26.8	27.8

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias en distancia media en millas por galón para las tres fórmulas de gasolina?

b. ¿Hay suficiente evidencia de una diferencia en distancia media en millas para los cuatro automóviles?

c. Suponga que *antes de ver los datos*, se ha decidido comparar la distancia media en millas por galón para las fórmulas A y B. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para esta diferencia.

d. Use un método apropiado para identificar las diferencias por pares, si las hay, en el promedio de las distancias medias para las tres fórmulas.

MIS DATOS EX1137 **11.37 Resistencia al agua en textiles** Se realizó un experimento para comparar los efectos de cuatro productos químicos diferentes, A, B, C y D, para producir resistencia al agua en textiles. Una tira de material, seleccionada de un rollo de tela, se cortó en cuatro partes y todas éstas se asignaron al azar para recibir uno de los cuatro productos químicos, A, B, C y D. Este proceso se repitió tres veces, produciendo así un diseño de bloque aleatorizado. Este diseño, con mediciones de resistencia a la humedad, se muestra en la figura siguiente (bajas lecturas indican baja penetración de humedad). Analice el experimento usando un método apropiado para este diseño de bloque aleatorizado. Identifique los bloques y tratamientos e investigue cualesquiera diferencias en medias de tratamiento. Si existen diferencias, use un método apropiado para identificar específicamente dónde se encuentran las diferencias. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas para los productores de las sustancias químicas? ¿El bloqueo ha sido eficaz en este experimento? Presente sus resultados en forma de un reporte.

Ilustración para el ejercicio 11.37

Bloques (muestras de rollo)

1	2	3
C 9.9	D 13.4	B 12.7
A 10.1	B 12.9	D 12.9
B 11.4	A 12.2	C 11.4
D 12.1	C 12.3	A 11.9

11.38 Deslumbramiento en espejos retrovisores Se realizó un experimento para comparar las características de deslumbramiento de cuatro tipos de espejos retrovisores en automóviles. Cuarenta conductores se seleccionaron al azar para participar en el experimento; cada uno fue expuesto a deslumbramiento producido por una luz delantera situada a 30 pies detrás de la ventanilla trasera del auto experimental. El conductor clasificó entonces el deslumbramiento producido por el espejo retrovisor en una escala de 1 (bajo) a 10 (alto). Cada uno de los cuatro espejos fue probado por cada conductor; los espejos se asignaron a un conductor en orden aleatorio. Un análisis de varianza de los datos produjo esta tabla ANOVA:

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
Espejos		46.98		
Conductores			8.42	
Error				
Total		638.61		

a. Llene los espacios en blanco de la tabla ANOVA.

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias en las clasificaciones medias de deslumbramiento de los cuatro espejos retrovisores? Calcule el valor *p* aproximado y úselo para tomar su decisión.

c. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el nivel de deslumbramiento percibido por los conductores varió de un conductor a otro? Use el método del valor *p*.

d. Con base en los resultados del inciso b), ¿cuáles son las implicaciones prácticas de este experimento para los fabricantes de los espejos retrovisores?

MIS DATOS EX1139 **11.39 Plantar pinos ayacahuites** Se realizó un experimento para determinar los efectos de tres métodos de preparación del terreno en el primer año de crecimiento de semillas de ayacahuite. Se seleccionaron cuatro lugares (terrenos de bosques estatales) y cada lugar se dividió en tres lotes. Como se tenía la impresión de que la fertilidad del suelo dentro de un lugar era más homogénea que entre lugares, se utilizó un diseño de bloques aleatorizado usando lugares como bloques. Los métodos de preparación del terreno fueron A (sin preparación), B (ligera fertilización) y C (quema). Cada preparación del terreno se aplicó al azar a un lote dentro de cada lugar. En cada lote, el mismo número de semillas se plantó y el promedio de crecimiento de primer año de las semillas se registró en cada lote. Use la salida impresa del *MINITAB* para contestar las preguntas.

Terreno Preparación	Lugar 1	2	3	4
A	11	13	16	10
B	15	17	20	12
C	10	15	13	10

a. Efectúe un análisis de varianza. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en los crecimientos medios para las tres preparaciones del terreno?

b. ¿Hay evidencia para indicar una diferencia en porcentajes medios de crecimiento para los cuatro lugares?

c. Use el método de Tukey de comparaciones apareadas para clasificar los crecimientos medios para las tres preparaciones del terreno. Use $\alpha = .01$.

d. Use un intervalo de confianza de 95% para estimar la diferencia en crecimientos medios para los métodos A y B.

Salida impresa del *MINITAB* para el ejercicio 11.39

ANOVA en dos vías: crecimiento contra prep. de terreno, lugar

```
Source      DF       SS       MS       F      P
Soil Prep    2   38.000  19.0000   10.06  0.012
Location     3   61.667  20.5556   10.88  0.008
Error        6   11.333   1.8889
Total       11  111.000

S = 1.374   R-Sq = 89.79%   R-Sq(adj) = 81.28%

                        Individual 95% CIs For Mean Based on
                        Pooled StDev
Soil Prep     Mean      ---------+---------+---------+---------+--
1             12.5         (-------*-------)
2             16.0                           (-------*-------)
3             12.0       (-------*-------)
                        ---------+---------+---------+---------+-
                             12.0      14.0      16.0      18.0

                        Individual 95% CIs For Mean Based on
                        Pooled StDev
Location      Mean      ------+---------+---------+---------+-----
1          12.0000            (-------*-------)
2          15.0000                        (-------*-------)
3          16.3333                              (------*-------)
4          10.6667      (-------*------)
                        -----+---------+---------+---------+-----
                           10.0      12.5      15.0      17.5
```

MIS DATOS EX1140 **11.40 Dedalera e ingesta de calcio** Se realizó un estudio para comparar los efectos de tres niveles de dedalera en los niveles de calcio en los músculos cardiacos de perros. Debido a que el nivel general de ingesta de calcio varía de un animal a otro, el tejido para un músculo cardiaco se consideró como un bloque y se hicieron comparaciones de los tres niveles de dedalera (tratamientos) dentro de un animal determinado. Las ingestas de calcio para los tres niveles de dedalera, A, B y C, fueron comparados con base en los músculos cardiacos de cuatro perros y los resultados se dan en la tabla siguiente.

Perros 1	2	3	4
A	C	B	A
1342	1698	1296	1150
B	B	A	C
1608	1387	1029	1579
C	A	C	B
1881	1140	1549	1319

a. ¿Cuántos grados de libertad están asociados con el SSE?

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las ingestas medias de calcio para los tres niveles de dedalera?

c. Use el método de Tukey de comparaciones con $\alpha = .01$ para clasificar las ingestas medias de calcio para los tres niveles de dedalera.

d. ¿Los datos indican una diferencia en las ingestas medias de calcio para los cuatro músculos cardiacos?

e. Use el método de Tukey de comparaciones apareadas con $\alpha = .01$ para clasificar las ingestas medias de calcio para los músculos cardiacos de los cuatro perros empleados en el experimento. ¿Estos resultados son de algún valor práctico para el investigador?

f. Dé el error estándar de la diferencia entre las ingestas medias de calcio para dos niveles de dedalera.

g. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en respuestas medias entre los tratamientos A y B.

Salida impresa del *MINITAB* para el ejercicio 11.40

ANOVA en dos vías: ingesta contra dedalera, perros

```
Source      DF      SS      MS       F      P
Digitalis    2  542177  262089  258.24  0.000
Dog          3  173415   57805   56.96  0.000
Error        6    6090    1015
Total       11  703682

S = 31.86   R-Sq = 99.13%   R-Sq(adj) = 98.41%

                       Individual 95% CIs For Mean Based on
                       Pooled StDev
Digitalis      Mean    -----+---------+---------+---------+----
1           1165.25    (--*-)
2           1402.50                   (--*-)
3           1676.75                                     (--*-)
                       -----+---------+---------+---------+----
                          1200      1350      1500      1650

                       Individual 95% CIs For Mean Based on
                       Pooled StDev
Dog           Mean    ------+---------+---------+---------+---
1          1610.33                               (---*---)
2          1408.33                (--*---)
3          1291.33    (---*--)
4          1349.33          (--*---)
                      ------+---------+---------+---------+---
                          1320      1440      1560      1680
```

MIS DATOS EX1141 **11.41 Cotizaciones en trabajos de construcción** Un contratista constructor emplea tres ingenieros de construcción, A, B y C, para estimar y cotizar trabajos. Para determinar si uno tiende a ser estimador más conservador (o liberal) que los otros, el contratista selecciona cuatro trabajos de construcción proyectados y hace que cada estimador, en forma independiente, estime el costo (en dólares por pie cuadrado) de cada trabajo. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

	Trabajo de construcción				
Estimador	1	2	3	4	Total
A	35.10	34.50	29.25	31.60	130.45
B	37.45	34.60	33.10	34.40	139.55
C	36.30	35.10	32.45	32.90	136.75
Total	108.85	104.20	94.80	98.90	406.75

Analice el experimento usando los métodos apropiados. Identifique los bloques y tratamientos e investigue cualesquiera diferencias en medias de tratamiento. Si existe alguna, use un método apropiado para identificar de manera específica en dónde se encuentran las diferencias. ¿El bloqueo ha sido efectivo en este experimento? ¿Cuáles son las implicaciones prácticas del experimento? Presente sus resultados en forma de reporte.

MIS DATOS EX1142

11.42 "En buenas manos" El costo de asegurar automóviles varía según el lugar, edades de los conductores y tipo de cobertura. Las siguientes son estimaciones para la prima anual 2006-2007 para un hombre soltero, con licencia de 6-8 años, que maneja un Honda Accord de 12 600 a 15 000 millas por año y no tiene infracciones ni accidentes. Estas estimaciones son dadas por el Departamento de Seguros de California para el año 2006-2007 en su sitio web (http://insurance.ca.gov).[2]

	Compañía de seguros				
Lugar	21st Century	Allstate	AAA	Fireman's Fund	State Farm
Riverside	$1870	$2250	$2154	$2324	$3053
San Bernardino	2064	2286	2316	2005	3151
Hollywood	3542	3773	3235	3360	3883
Long Beach	2228	2617	2681	3279	3396

Fuente: www.insurance.ca.gov

a. ¿Qué tipo de diseño se utilizó para recolectar estos datos?

b. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que las primas de seguro para el mismo tipo de cobertura difiere de una compañía a otra?

c. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que las primas de seguro varían de un lugar a otro?

d. Use el procedimiento de Tukey para determinar cuáles compañías de seguros citadas aquí difieren de otras en las primas que cobran para este cliente típico. Use $\alpha = .05$.

e. Haga un resumen de lo que encuentre.

MIS DATOS EX1143

11.43 Compras en tiendas grandes Tiendas grandes como Costco y Sam's Club son de las preferidas para compras de muchos estadounidenses, por el bajo costo asociado con compras a granel. Cuando una nueva tienda grande llamada WinCo Foods abrió en Moreno Valley, California, un anuncio por correo decía que eran el "líder en precios bajos en la zona"[3]. Compararon sus precios con los de otras cuatro tiendas grandes para diversos artículos comprados el mismo día. Una lista parcial de los artículos y sus precios se dan en la tabla siguiente.

	Tiendas				
Artículos	WinCo	Albert-sons	Ralphs	Stater Bros	Food-4-Less
Ensalada surtida, 1 lb bolsa	0.88	1.99	1.79	1.89	0.98
Hillshire Farm® Salchicha ahumada, 16 onza	2.48	4.29	2.50	3.00	3.68
Kellogg's Raisin Bran® 25.5 onza	2.48	4.99	4.69	3.49	3.38
Kraft® Philadelphia® Queso crema, 8 onza	1.18	1.50	1.99	1.89	1.97
Kraft® Ranch Aderezo, 16 onza	1.58	3.89	2.69	2.50	1.68
Langers® Apple Juice, 128 onza	1.98	4.99	4.59	3.79	2.98
Dial® Pastilla jabón, Gold, 8–4.5 onza	3.48	5.79	4.19	3.99	4.58
Jif® Mantequilla de cacahuate, Cremosa, 28 onza	2.58	4.89	3.99	3.89	2.68

a. ¿Cuáles son los bloques y tratamientos en este experimento?

b. ¿Los datos dan evidencia para indicar que hay diferencias significativas en precios de una tienda a otra? Apoye su respuesta estadísticamente usando la salida impresa ANOVA que sigue.

c. ¿Hay diferencias significativas de un bloque a otro? ¿Era efectivo el bloqueo?

d. El anuncio incluye la siguiente frase: "Aun cuando esta lista no pretende representa una orden típica de compras semanales o una lista aleatoria de artículos, WinCo continúa siendo el líder en precios bajos en la zona". ¿Cómo podría esta frase afectar la confiabilidad de sus conclusiones en el inciso b)?

ANOVA en dos vías: precio contra artículo, tienda

```
Source  DF       SS        MS       F      P
Item     7   38.2360   5.46228  19.39  0.000
Store    4   16.6644   4.16610  14.79  0.000
Error   28    7.8862   0.28165
Total   39   62.7866

S = 0.5307   R-Sq = 87.44%   R-Sq(adj) = 82.51%
```

11.44 Compras en tiendas grandes, continúa Consulte el ejercicio 11.43. La salida impresa que sigue da el promedio de costos de los artículos seleccionados para las $k = 5$ tiendas.

Store	Mean
Albertsons	4.04125
Food-4-Less	2.74125
Ralphs	3.30375
Stater Bros	3.05500
WinCo	2.08000

a. ¿Cuál es el valor apropiado de $q_{.05}(k, df)$ para probar diferencias entre tiendas?

b. ¿Cuál es el valor de $\omega = q_{.05}(k, df)\sqrt{\frac{MSE}{b}}$?

c. Use la prueba de comparación por pares de Tukey entre tiendas usada para determinar cuáles tiendas difieren significativamente en promedio de precios de los artículos seleccionados.

11.9 EL EXPERIMENTO FACTORIAL $a \times b$: UNA CLASIFICACIÓN EN DOS VÍAS

Suponga que el gerente de una planta manufacturera sospecha que la producción (en número de unidades producidas por turno) de una línea de producción depende de dos factores:

- Cuál de dos supervisores está a cargo en la línea
- Cuál de tres turnos, diurno, vespertino o nocturno, se está midiendo

Esto es, el gerente está interesado en dos *factores*: “supervisor” a dos niveles y “turno” a tres niveles. ¿Puede usted usar un diseño de bloque aleatorizado, diseñando uno de los dos factores como factor de bloque? Para hacer esto, necesitaría suponer que el efecto de los dos supervisores es el mismo, cualquiera que sea el turno que considere. Éste puede no ser el caso; quizá el primer supervisor es más eficiente en la mañana y el segundo lo es en el turno de la noche. No se puede generalizar y decir que un supervisor es mejor que el otro o que la producción de un turno particular es mejor. Es necesario investigar no sólo el promedio de producción para los dos supervisores y el promedio de producción para los tres turnos, sino también la **interacción** o relación entre los dos factores. Considere dos ejemplos diferentes que muestran el efecto de *interacción* en las respuestas en esta situación.

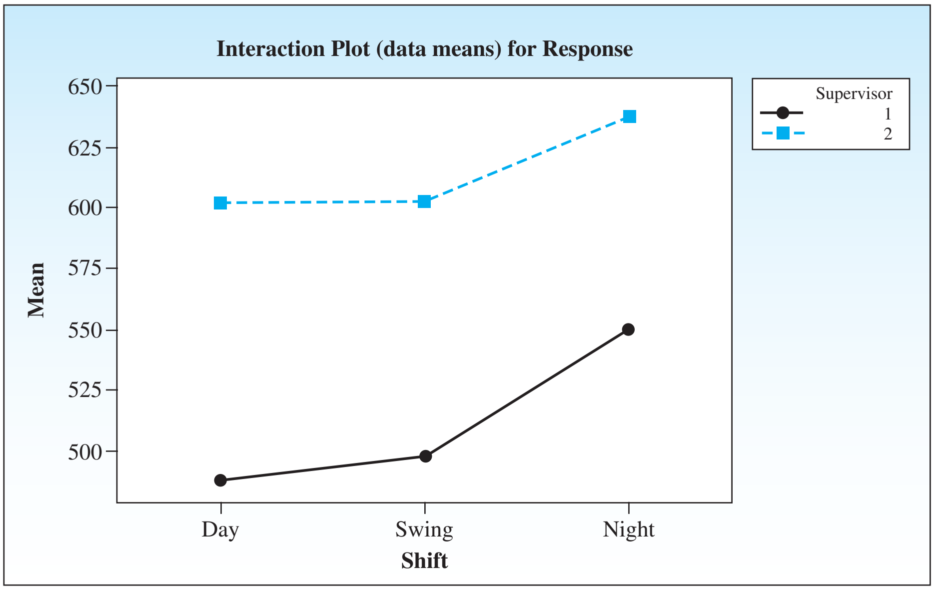
EJEMPLO 11.11

Suponga que los dos supervisores son observados en tres días seleccionados al azar para cada uno de los tres turnos diferentes. El promedio de producciones para los tres turnos se muestra en la tabla 11.4 para cada uno de los supervisores. Vea la relación entre los dos factores en la gráfica de líneas para estas medias, mostrada en la figura 11.11. Observe que el supervisor 2 siempre produce más, cualquiera que sea el turno. Los dos factores se comportan *independientemente*; esto es, la producción es siempre de unas 100 piezas más para el supervisor 2, no importa cuál turno se vea.

TABLA 11.4 **Promedio de producción para dos supervisores en tres turnos**

	Turno		
Nivel de uso	Día	Vespertino	Noche
1	487	498	550
2	602	602	637

FIGURA 11.11
Gráfica de interacción para medias en la tabla 11.4

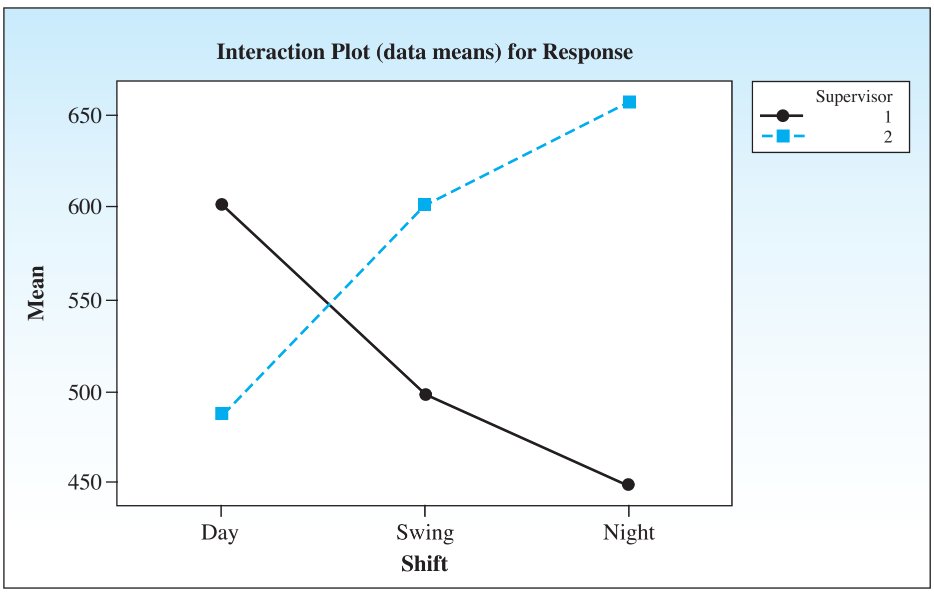


Ahora considere otro conjunto de datos para la misma situación, mostrado en la tabla 11.5. Hay una diferencia definida en los resultados, dependiendo de cuál turno se vea, y la *interacción* se puede ver en las líneas cruzadas de la gráfica de la figura 11.12.

TABLA 11.5 **Promedio de producción para dos supervisores en tres turnos**

	Turno		
Nivel de uso	Día	Vespertino	Noche
1	602	498	450
2	487	602	657

FIGURA 11.12
Gráfica de interacción para medias en la tabla 11.5



MI CONSEJO

Cuando cambia el efecto de un factor sobre la respuesta, dependiendo del nivel al cual se mide el otro factor, se dice que los dos factores **interactúan**.

Esta situación es un ejemplo de un **experimento factorial** en el que hay un total de 2×3 posibles combinaciones de los niveles para los dos factores. Estas $2 \times 3 = 6$ combinaciones forman los *tratamientos* y el experimento se denomina **experimento factorial de 2 × 3**. Este tipo de experimento en realidad se puede usar para investigar los efectos de tres o más factores en una respuesta y explorar las interacciones entre los factores. No obstante, confinamos nuestra discusión a dos factores y su interacción.

Cuando se comparen medias de tratamiento para un experimento factorial (o para cualquier otro experimento), será necesaria más de una observación por tratamiento. Por ejemplo, si el experimentador obtiene dos observaciones para cada una de las combinaciones de factor de un experimento factorial completo, tiene dos **réplicas** del experimento. En la siguiente sección sobre el análisis de varianza para un experimento factorial, se puede suponer que cada tratamiento o combinación de niveles de factor se replica el mismo número de veces r.

11.10 EL ANÁLISIS DE VARIANZA PARA UN EXPERIMENTO FACTORIAL $a \times b$

Un análisis de varianza para un experimento factorial de dos factores replicado r veces sigue el mismo patrón que los diseños previos. Si las letras A y B se usan para identificar los dos factores, la variación total en el experimento

$$\text{SS Total} = \Sigma(x - \bar{x})^2 = \Sigma x^2 - \text{CM}$$

se divide en *cuatro* partes de modo que

$$\text{SS Total} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SS(AB)} + \text{SSE}$$

donde

- SSA (suma de cuadrados para el factor A) mide la variación entre medias del factor A.
- SSB (suma de cuadrados para el factor B) mide la variación entre medias del factor B.
- SS(AB) (suma de cuadrados para interacción) mide la variación *entre* las diferentes combinaciones de niveles de factor.
- SSE (suma de cuadrados de error) mide la variación de las diferencias entre las observaciones *dentro* de cada combinación de niveles de factor, es decir, el error experimental.

Es frecuente que las sumas de cuadrados SSA y SSB reciban el nombre de sumas de cuadrados de **efecto principal**, para distinguirlos de la suma de cuadrados de **interacción**. Aunque se puede simplificar el trabajo si se usa un programa de computadora para calcular estas sumas de cuadrados, las fórmulas de cálculo se dan a continuación. Se puede suponer que son:

- a niveles del factor A
- b niveles del factor B
- r réplicas de cada una de las ab combinaciones de factor
- Un total de $n = abr$ observaciones

CÁLCULO DE LAS SUMAS DE CUADRADOS PARA UN EXPERIMENTO FACTORIAL DE DOS FACTORES

$$\text{CM} = \frac{G^2}{n} \qquad \text{SS Total} = \Sigma x^2 - \text{CM}$$

$$\text{SSA} = \Sigma \frac{A_i^2}{br} - \text{CM} \qquad \text{SSB} = \Sigma \frac{B_j^2}{ar} - \text{CM}$$

$$\text{SS(AB)} = \Sigma \frac{(AB)_{ij}^2}{r} - \text{CM} - \text{SSA} - \text{SSB}$$

donde

G = Suma de todas las $n = abr$ observaciones

A_i = Total de todas las observaciones al i-ésimo nivel del factor A, $i = 1, 2, \ldots, a$

B_j = Total de todas las observaciones al j-ésimo nivel del factor B, $j = 1, 2, \ldots, b$

$(\text{AB})_{ij}$ = Total de las r observaciones al i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B

Cada una de las cinco **fuentes de variación**, cuando se dividen entre los **grados de libertad** apropiados, da una estimación de la variación en el experimento. Estas estimaciones se denominan **cuadráticos medios**, MS = SS/*df*, y se muestran junto con sus respectivas sumas de cuadrados y *df* en la **tabla de análisis de varianza** (o **ANOVA**).

TABLA ANOVA PARA *r* RÉPLICAS DE UN EXPERIMENTO FACTORIAL DE DOS FACTORES: FACTOR A A NIVELES *a* Y FACTOR B A NIVELES *b*

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
A	$a - 1$	SSA	$\text{MSA} = \frac{\text{SSA}}{a-1}$	$\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$
B	$b - 1$	SSB	$\text{MSB} = \frac{\text{SSB}}{b-1}$	$\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$
AB	$(a-1)(b-1)$	SS(AB)	$\text{MS(AB)} = \frac{\text{SS(AB)}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{\text{MS(AB)}}{\text{MSE}}$
Error	$ab(r-1)$	SSE	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{ab(r-1)}$	
Total	$abr - 1$	SS Total		

Finalmente, la igualdad de medias para varios niveles de las combinaciones de factor (el efecto de interacción) y para los niveles de ambos efectos principales, A y B, se puede probar usando las pruebas *F* de ANOVA, como se ve a continuación.

PRUEBAS PARA UN EXPERIMENTO FACTORIAL

- **Para interacción:**

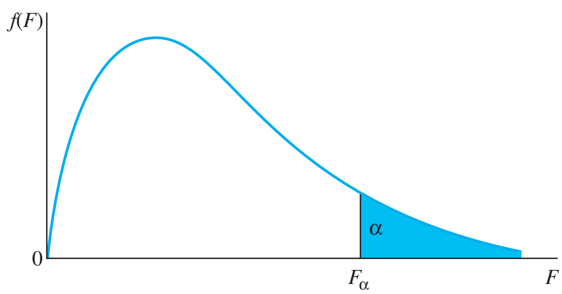
1. Hipótesis nula: H_0 : Los factores A y B no interactúan
2. Hipótesis alternativa: H_a : Los factores A y B interactúan
3. Prueba estadística: $F = \text{MS((AB)/MSE}$, donde F está basada en $df_1 = (a - 1)(b - 1)$ y $df_2 = ab(r - 1)$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando $F > F_\alpha$, donde F_α está en la cola superior de la distribución F (véase la figura), o cuando el valor $p < \alpha$

- **Para efectos principales, factor A:**

1. Hipótesis nula: H_0 : No hay diferencias entre las medias del factor A
2. Hipótesis alternativa: H_a : Al menos dos de las medias del factor A difieren
3. Prueba estadística: $F = \text{MSA/MSE}$, donde F está basada en $df_1 = (a - 1)$ y $df_2 = ab(r - 1)$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando $F > F_\alpha$ (véase la figura), o cuando el valor $p < \alpha$

- **Para efectos principales, factor B:**

1. Hipótesis nula: H_0 : No hay diferencias entre las medias del factor B
2. Hipótesis alternativa: H_a : Al menos dos de las medias del factor B difieren
3. Prueba estadística: $F = \text{MSB/MSE}$, donde F está basada en $df_1 = (b - 1)$ y $df_2 = ab(r - 1)$
4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando $F > F_\alpha$ (véase la figura), o cuando el valor $p < \alpha$



EJEMPLO 11.12

La tabla 11.6 muestra los datos originales empleados para generar la tabla 11.5 del ejemplo 11.11. Esto es, los dos supervisores fueron observados en tres días seleccionados al azar para cada uno de los tres turnos diferentes, registrándose las salidas de producción. Analice estos datos usando el procedimiento apropiado de análisis de varianza.

TABLA 11.6 **Producciones para dos supervisores en tres turnos**

Supervisor	Turno: Diurno	Vespertino	Nocturno
1	571	480	470
	610	474	430
	625	540	450
2	480	625	630
	516	600	680
	465	581	661

Solución La salida impresa de computadora de la figura 11.13 fue generada usando el procedimiento de dos vías de análisis de varianza del paquete de software *MINITAB*. Se pueden verificar las cantidades de la tabla ANOVA usando las fórmulas de cálculo presentadas antes o se puede escoger sólo usar los resultados e interpretar su significado.

FIGURA 11.13
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 11.12

ANOVA de dos vías: producción contra supervisor, turno

```
Source        DF       SS        MS       F       P
Supervisor     1    19208   19208.0   26.68   0.000
Shift          2      247     123.5    0.17   0.844
Interaction    2    81127   40563.5   56.34   0.000
Error         12     8640     720.0
Total         17   109222

S = 26.83   R-Sq = 92.09%   R-Sq(adj) = 88.79%

                       Individual 95% CIs For Mean Based on
                       Pooled StDev
Supervisor      Mean   ----+---------+---------+---------+-----
1            516.667   (-------*------)
2            582.000                         (-------*-------)
                       ----+---------+---------+---------+-----
                       510        540       570       600

                       Individual 95% CIs For Mean Based on
                       Pooled StDev
Shift           Mean   ---+---------+---------+---------+--------
Day            544.5   (---------------*---------------)
Swing          550.0       (---------------*---------------)
Night          553.5         (---------------*---------------)
                       ---+---------+---------+---------+--------
                        525       540       555       570
```

En este punto, es indudable que usted haya descubierto el patrón conocido para probar la significancia de los diversos factores experimentales con la estadística F y su valor p. El valor p pequeño ($P = .000$) en el renglón marcada "Supervisor" significa que hay suficiente evidencia para declarar una diferencia en los niveles medios para el factor A, es decir, una diferencia en producciones medias por supervisor. Este hecho es visualmente aparente en los intervalos de confianza que no se traslapan para las medias del supervisor que se ven en la salida impresa. Pero esto es dominado por el hecho de que hay una fuerte evidencia ($P = .000$) de una *interacción* entre los factores A y B. Esto significa que el promedio de producción para un turno determinado depende del supervisor en servicio. Se vio claramente este efecto en la figura 11.11. Las tres producciones medias más grandes ocurren cuando el supervisor 1 está en el turno de día y cuando el supervisor 2 está ya sea en el turno vespertino o nocturno. Como resultado práctico, el gerente debe programar al supervisor 1 para el turno de día y al supervisor 2 para el turno de noche.

MI CONSEJO
Si la interacción **no es significativa**, pruebe cada uno de los factores individualmente.

Si el efecto de interacción *es* significativo, las diferencias en las medias de tratamiento se pueden estudiar más, *no* comparando las medias para los factores A o B individualmente sino más bien viendo las comparaciones para las combinaciones de factor de nivel de 2×3 (AB). Si el efecto de interacción *no es significativo*, entonces la significancia de las medias de efecto principal debe investigarse, primero con la prueba F general y luego con el método de Tukey para comparaciones apareadas y/o intervalos de confianza específicos. Recuerde que estos análisis de procedimientos de varianza siempre usan $s^2 = \text{MSE}$ como el mejor estimador de σ^2 con grados de libertad iguales a $df = ab(r - 1)$.

Por ejemplo, usando el medidor de Tukey para comparar el promedio de producciones para los dos supervisores en cada uno de los tres turnos, se podría calcular

$$\omega = q_{.05}(6, 12)\left(\frac{s}{\sqrt{r}}\right) = 4.75\left(\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{3}}\right) = 73.59$$

Como los tres pares de medias (602 y 487 en el turno diurno, 498 y 602 en el turno vespertino y 450 y 657 en el turno nocturno) difieren en más de ω, nuestras conclusiones prácticas han sido confirmadas estadísticamente.

11.10 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

11.45 Suponga que se ha de realizar un experimento factorial de dos factores, el factor A a cuatro niveles y el factor B a cinco niveles, con tres réplicas por tratamiento.

a. ¿Cuántos tratamientos intervienen en el experimento?

b. ¿Cuántas observaciones están involucradas?

c. Haga una lista de las fuentes de variación y sus respectivos grados de libertad.

11.46 El análisis de la tabla de varianza para un experimento factorial de 3×4, con el factor A en tres niveles y el factor B en cuatro niveles y con dos observaciones por tratamiento, se muestra a continuación:

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
	2	5.3		
	3	9.1		
	6			
	12	24.5		
Total	23	43.7		

a. Llene los renglones faltantes de la tabla.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que los factores A y B interactúan? Pruebe usando $\alpha = .05$. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de su respuesta?

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que los factores A y B afectan la variable x de la respuesta? Explique.

11.47 Consulte el ejercicio 11.46. Las medias de dos de las combinaciones a nivel de factor, es decir A_1B_1 y A_2B_2, son $\bar{x}_1 = 8.3$ y $\bar{x}_2 = 6.3$, respectivamente. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las dos medias poblacionales correspondientes.

MIS DATOS EX1148

11.48 La tabla siguiente contiene datos para un experimento factorial de 3×3, con dos réplicas por tratamiento:

	Niveles del factor A		
Niveles del factor B	1	2	3
1	5, 7	9, 7	4, 6
2	8, 7	12, 13	7, 10
3	14, 11	8, 9	12, 15

a. Efectúe un análisis de varianza para los datos y presente los resultados en una tabla de análisis de varianza.

b. ¿A qué nos referimos cuando decimos que los factores A y B interactúan?

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar interacción entre los factores A y B? Pruebe usando $\alpha = .05$.

d. Encuentre el valor p aproximado para la prueba del inciso c).

e. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de sus resultados en el inciso c)? Explique sus resultados usando una gráfica de línea similar a la de la figura 11.11.

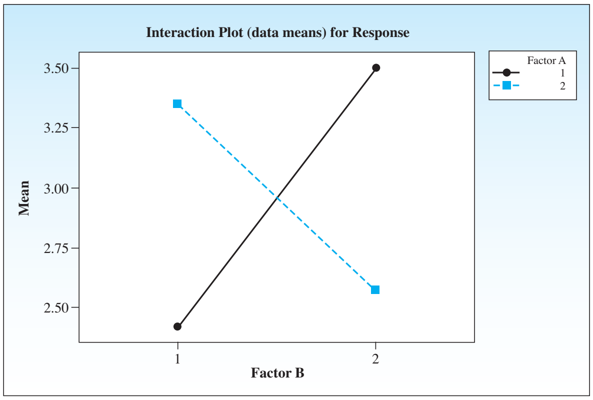
MIS DATOS EX1149

11.49 Factorial de 2×2 La tabla contiene datos para un experimento factorial de 2×2, con cuatro réplicas por tratamiento.

	Niveles del factor A	
Niveles del factor B	1	2
1	2.1, 2.7, 2.4, 2.5	3.7, 3.2, 3.0, 3.5
2	3.1, 3.6, 3.4, 3.9	2.9, 2.7, 2.2, 2.5

a. La gráfica siguiente fue generada por el *MINITAB*. Verifique que los cuatro puntos que enlazan las dos rectas sean las medias de cuatro observaciones dentro de cada combinación del nivel de factor. ¿Qué dice la gráfica acerca de la interacción entre los factores A y B?

Gráfica de interacción *MINITAB* para el ejercicio 11.49



b. Use la salida impresa *MINITAB* para probar una interacción significativa entre A y B. ¿Esto confirma sus conclusiones del inciso a)?

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.49

ANOVA en dos vías: respuesta contra factor A, factor B

```
Source        DF      SS        MS        F      P
Factor A       1   0.0000   0.00000    0.00  1.000
Factor B       1   0.0900   0.09000    1.00  0.338
Interaction    1   3.4225   3.42250   37.85  0.000
Error         12   1.0850   0.09042
Total         15   4.5975

S = 0.3007   R-Sq = 76.40%   R-Sq(adj) = 70.50%
```

c. Considerando sus resultados en el inciso b), ¿cómo puede explicar el hecho de que ninguno de los efectos principales sea significativo?

d. Si se encuentra una interacción significativa, ¿es necesario probar por diferencias significativas del efecto principal? Explique.

e. Escriba un párrafo breve que resuma los resultados de este experimento.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1150

11.50 Demanda de diamantes Una cadena de joyerías realizó un experimento para investigar el efecto de precio y lugar sobre la demanda de sus diamantes. Seis joyerías de ciudades pequeñas se seleccionaron para el estudio, así como otras seis ubicadas en grandes centros comerciales suburbanos. Dos joyerías de cada uno de estos lugares se asignaron a cada uno de tres porcentajes de incremento de precio. El porcentaje de ganancia (o pérdida) en ventas para cada tienda se registró al término de un mes. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

	Incremento		
Lugar	1	2	3
Ciudad pequeña	10 4	−3 7	−10 −24
Centro comercial suburbano	14 18	8 3	−4 3

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una interacción entre incremento y lugar? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de su prueba en el inciso a)?

c. ¿Trace una gráfica de rectas semejante a la de la figura 11.11 para ayudar a visualizar los resultados de este experimento. Resuma los resultados.

d. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en cambio medio en ventas, para tiendas en ciudades pequeñas contra las de centros comerciales suburbanos, si las tiendas están usando el incremento de precios 3.

11.51 Visualización del terreno Se realizó un estudio para determinar el efecto de dos factores sobre el entrenamiento de visualización del terreno para soldados.[4] Durante los programas de entrenamiento, los participantes vieron mapas de contorno de varios terrenos y luego se les permitió ver una reconstrucción computarizada del terreno como se vería desde un ángulo especificado. Los dos factores investigados en el experimento fueron los conocimientos de espacio de los participantes (para visualizar en tres dimensiones) y los procedimientos de visualización (activos o pasivos). La participación activa permitió a participantes ver las reconstrucciones del terreno, generadas por computadora, desde cualquiera y de todos los ángulos. La participación pasiva dio a los participantes un conjunto de reconstrucciones del terreno previamente seleccionadas. Los participantes fueron examinados de acuerdo con sus conocimientos del espacio y de las calificaciones del examen 20 fueron clasificados como poseedores de altos conocimientos del espacio, 20 regulares y 20 bajos. A continuación, 10 participantes dentro de cada uno de estos grupos fueron asignados a cada uno de los dos modos de entrenamiento, activo o pasivo. Las tablas siguientes son la tabla ANOVA calculada por los investigadores y la tabla de las medias de tratamiento.

Fuente	*df*	MS	Error *df*	*F*	*p*
Efectos principales:					
Condición de entrenamiento	1	103.7009	54	3.66	.0610
Capacidad	2	760.5889	54	26.87	.0005
Interacción:					
Condición de entrenamiento × Capacidad	2	124.9905	54	4.42	.0167
Dentro de celdas	54	28.3015			

	Condición de entrenamiento	
Conocimientos de espacio	Activa	Pasiva
Altos	17.895	9.508
Medios	5.031	5.648
Bajos	1.728	1.610

Nota: Calificación máx = 36.

a. Explique cómo llegaron los autores a los grados de libertad indicados en la tabla ANOVA.

b. ¿Son correctos los valores F?

c. Interprete los resultados de la prueba. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas?

d. Use la tabla 6 del apéndice I para aproximar los valores p para las estadísticas F indicadas en la tabla ANOVA.

Fuente: H.F. Barsam y Z.M. Simutis, "Computer-Based Graphics for Terrain Visualization Training", Human Factors, no. 26, 1984. Copyright 1984 por the Human Factors Society, Inc. Reproducido con permiso.

MIS DATOS EX1152

11.52 El costo de volar En un intento por determinar qué factores afectan a las tarifas aéreas, un investigador registró un promedio ponderado de los costos por milla, para dos aeropuertos en cada una de tres ciudades importantes de Estados Unidos, para cada una de cuatro distancias de viaje diferentes.[5] Los resultados se indican en la tabla.

	Ciudad		
Distancia	New York	Houston	Chicago
$<$ 300 millas	40, 48	20, 26	19, 40
301–750 millas	19, 26	15, 17	14, 24
751–1500 millas	10, 14	10, 13	9, 15
$>$ 1500 millas	9, 10	8, 11	7, 12

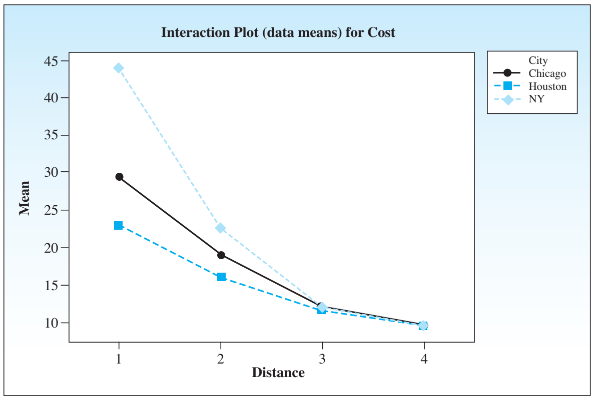
Use la salida impresa *MINITAB* para analizar el experimento con el método apropiado. Identifique los dos factores e investigue cualquier posible efecto debido a la interacción de esos factores o los efectos principales. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de este experimento? Explique sus conclusiones en forma de reporte.

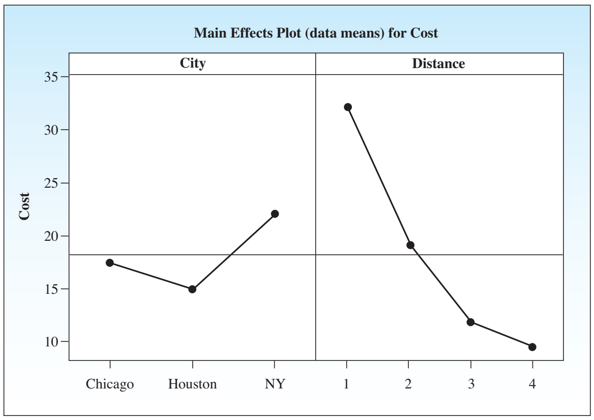
Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.52

ANOVA de dos vías: costo contra ciudad, distancia

```
Source       DF       SS        MS       F       P
City          2    201.33   100.667    3.06   0.084
Distance      3   1873.33   624.444   18.97   0.000
Interaction   6    303.67    50.611    1.54   0.247
Error        12    395.00    32.917
Total        23   2773.33

S = 5.737   R-Sq = 85.76%   R-Sq(adj) = 72.70%

                   Individual 95% CIs For Mean Based on
                   Pooled StDev
Distance      Mean ------+---------+---------+---------+---
1          32.1667                           (-----+------)
2          19.1667               (-----+-----)
3          11.8333     (------+-----)
4           9.5000   (-----+-----)
                   ------+---------+---------+---------+---
                        10        20        30        40
```

Gráficas *MINITAB* para el ejercicio 11.52





MIS DATOS EX1153

11.53 Calificaciones de examen de cuarto grado Una junta directiva local estaba interesada en comparar calificaciones de examen en un examen estándar de lectura para estudiantes de cuarto grado en su distrito. Seleccionaron una muestra aleatoria de cinco hombres y cinco mujeres, estudiantes de cuarto grado en cada una de cuatro escuelas elementales diferentes del distrito y registraron las calificaciones del examen. Los resultados se presentan en la tabla siguiente.

Género	Escuela 1	Escuela 2	Escuela 3	Escuela 4
Hombre	631	642	651	350
	566	710	611	565
	620	649	755	543
	542	596	693	509
	560	660	620	494
Mujer	669	722	709	505
	644	769	545	498
	600	723	657	474
	610	649	722	470
	559	766	711	463

a. ¿Qué tipo de diseño experimental es éste? ¿Cuáles son las unidades experimentales? ¿Cuáles son los factores y niveles de interés para la junta directiva?

b. Efectúe el análisis de varianza apropiado para este experimento.

c. ¿Los datos indican que el efecto del género en el promedio de calificaciones del examen es diferente, dependiendo de la escuela del estudiante? Pruebe usando la hipótesis apropiada de $\alpha = .05$.

d. Grafique el promedio de calificaciones usando una gráfica de interacción. ¿Cómo describiría usted el efecto del género y escuela en el promedio de las calificaciones del examen?

e. ¿Los datos indican que cualquiera de los efectos principales es significativo? Si el efecto principal es significativo, use el método de Tukey de comparaciones apareadas para examinar las diferencias en detalle. Use $\alpha = .01$.

11.54 Capacitación gerencial Se realizó un experimento para investigar el efecto de la capacitación gerencial sobre la habilidad de los supervisores para tomar decisiones en una gran compañía. Se seleccionaron 16 supervisores y ocho fueron escogidos al azar para recibir capacitación administrativa. Cuatro supervisores capacitados y cuatro no capacitados se seleccionaron al azar para funcionar en una situación en la que surgió un problema común. A los otros ocho supervisores se les presentó una situación de emergencia en la que los procedimientos estándar no podían usarse. La respuesta fue una clasificación de conducta administrativa para cada supervisor, evaluada al calificar un esquema diseñado por el experimentador.

a. ¿Cuáles son las unidades experimentales de este experimento?

b. ¿Cuáles son los dos factores considerados en el experimento?

c. ¿Cuáles son los niveles de cada factor?

d. ¿Cuántos tratamientos hay en el experimento?

e. ¿Qué tipo de diseño experimental se ha empleado?

MIS DATOS EX1155 **11.55 Capacitación gerencial, continúa** Consulte el ejercicio 11.54. Los datos para este experimento se muestran en la tabla.

	Capacitación (A)		
Situación (B)	Capacitado	No capacitado	Totales
Standard	85	53	519
	91	49	
	80	38	
	78	45	
Emergencia	76	40	473
	67	52	
	82	46	
	71	39	
Totales	630	362	992

a. Construya la tabla ANOVA para este experimento.

b. ¿Hay una interacción significativa entre la presencia o ausencia de capacitación y el tipo de situación de toma de decisiones? Pruebe al nivel de 5% de significancia.

c. ¿Los datos indican una diferencia significativa en calificaciones de conducta para los dos tipos de situaciones al nivel de significancia de 5%?

d. ¿Las calificaciones de conducta difieren significativamente para los dos tipos de categorías de capacitación al nivel de significancia de 5%?

e. Grafique el promedio de calificaciones con el uso de una gráfica de interacción. ¿Cómo describiría usted el efecto de la capacitación y situación de emergencia en las habilidades de toma de decisiones de los supervisores?

11.11 REPASO DE LAS SUPOSICIONES DEL ANÁLISIS DE VARIANZA

En la sección 11.3, usted aprendió que las suposiciones y procedimientos de prueba para el análisis de varianza son semejantes a los requeridos para las pruebas t y F del capítulo 10, es decir, que las observaciones dentro de un grupo de tratamiento deben estar distribuidas normalmente con varianza común σ^2. También aprendió que los procedimientos del análisis de varianza son más bien robustos cuando los tamaños muestrales son iguales y los datos son de forma de montículo. Si éste es el caso, un modo de protegerse de conclusiones imprecisas es que dentro de lo posible se trate de seleccionar muestras de tamaños iguales.

Hay algunas formas rápidas y sencillas de comprobar los datos en cuanto a violación de suposiciones. Primero veamos el tipo de variable de respuesta que se mida. El experimentador podría de inmediato ver un problema con la normalidad o con la suposición de varianza común. Puede ser que no sea posible medir *cuantitativamente* los datos que haya recolectado. Muchas respuestas, por ejemplo preferencias de productos, se pueden clasificar sólo como "A es mejor que B" o "C es la menos preferible". Los datos que sean *cualitativos* no pueden tener una distribución normal. Si la variable de respuesta es *discreta* y puede tomar sólo tres valores, es decir 0, 1 o 2, entonces no es razonable suponer que la variable de respuesta esté normalmente distribuida.

Suponga que la variable de respuesta es binomial, es decir, la proporción p de personas a favor de un tipo particular de inversión. Aun cuando los datos binomiales pueden tener aproximadamente la forma de montículo bajo ciertas condiciones, violan la suposición de igual varianza. La varianza de una proporción muestral es

$$\sigma^2 = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

de modo que la varianza cambia dependiendo del valor de p. Cuando cambian las medias de tratamiento, el valor de p cambia y también cambia la varianza σ^2. Una situación similar ocurre cuando la variable de respuesta es una variable aleatoria de Poisson, por ejemplo el número de accidentes industriales por mes en una planta manufacturera. Como la varianza de una variable aleatoria de Poisson es $\sigma^2 = \mu$, la varianza cambia exactamente como cambia la media de tratamiento.

Si el experimentador no puede ver algunas violaciones flagrantes en el tipo de datos que se miden, vea el rango de los datos dentro de cada grupo de tratamiento. Si estos rangos son casi iguales, entonces es probable que la suposición de varianza común sea razonable. Para ver si hay normalidad, se puede hacer una rápida gráfica de puntos o de tallo y hoja para un grupo particular de tratamiento. Sin embargo, es frecuente que no se tengan suficientes mediciones para obtener una gráfica razonable.

Si el experimentador utiliza un programa de cómputo para analizar su experimento, hay algunas valiosas **herramientas de diagnóstico** que puede usar. Estos procedimientos son demasiado complicados para hacer cálculos manualmente, pero son fáciles de usar cuando la computadora hace el trabajo.

Gráficas residuales

En el análisis de varianza, la variación total en los datos se divide en varias partes, dependiendo de los factores identificados como importantes para el investigador. Una vez que los efectos de estas fuentes de variación hayan sido removidos, la variabilidad "sobrante" en cada observación se denomina **residual** para ese punto de datos. Estos residuales representan **error experimental**, la variabilidad básica en el experimento y deben tener una *distribución aproximadamente normal* con una media de 0 y la *misma variación* para cada grupo de tratamiento. Casi todos los paquetes de computadora dan opciones para graficar estos residuales:

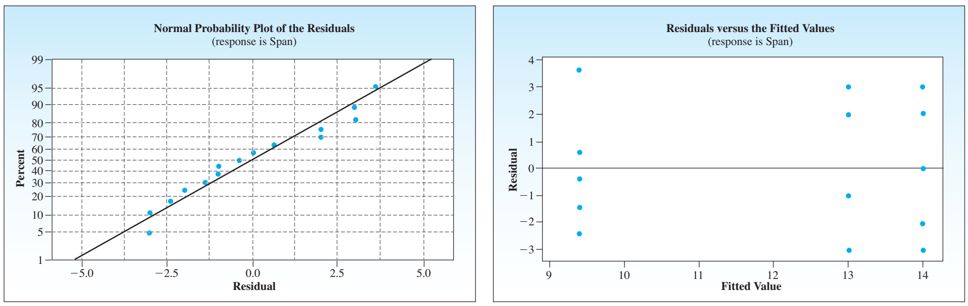
- La **gráfica de probabilidad normal de residuales** es aquella que grafica los residuales para cada observación contra el valor esperado de ese residual *si hubiera venido de una distribución normal.* Si los residuales son aproximadamente normales, la gráfica será muy semejante a una *línea recta*, con pendiente hacia arriba a la derecha.

- La **gráfica de residuales contra ajuste** o **residuales contra variables** es aquella que grafica los residuales contra el valor esperado de esa observación *usando el diseño experimental que hemos empleado.* Si no se han violado suposiciones y no hay fuentes "sobrantes" de variación que no sean el error experimental, esta gráfica debería mostrar una *dispersión aleatoria* de puntos alrededor de la "recta de error cero" horizontal para cada grupo de tratamiento, con aproximadamente la misma dispersión vertical.

EJEMPLO 11.13

Los datos del ejemplo 11.4, que se refieren a los intervalos de atención de tres grupos de estudiantes de escuela elemental, fueron analizados usando el *MINITAB*. Las gráficas de la figura 11.14, generadas por *MINITAB*, son la gráfica de probabilidad normal y los residuales contra la gráfica de ajuste para este experimento. Observe la forma de línea recta de la gráfica de probabilidad normal, que indica una distribución normal en los residuales. En la otra gráfica, los residuales están graficados contra los valores esperados estimados, que son los promedios muestrales para cada uno de los tres tratamientos en el diseño completamente aleatorizado. La dispersión aleatoria alrededor de la "recta de cero error" horizontal y la dispersión constante indican que *no hay violaciones* en la suposición de varianza constante.

FIGURA 11.14
Gráficas *MINITAB* de diagnóstico para el ejemplo 11.13



EJEMPLO 11.14

Una compañía planea promover un nuevo producto usando una de tres campañas publicitarias. Para investigar el grado de reconocimiento del producto a partir de estas tres campañas, se seleccionaron 15 zonas de mercado y cinco se asignaron al azar a cada plan de publicidad. Al terminar las campañas de publicidad, se seleccionaron muestras aleatorias de 400 adultos en cada zona y se registraron las proporciones que estaban familiarizadas con el nuevo producto, como en la tabla 11.7. ¿Han sido violadas algunas de las suposiciones del análisis de varianza en este experimento?

TABLA 11.7 **Proporciones de reconocimiento de un producto para tres campañas publicitarias**

Campaña 1	Campaña 2	Campaña 3
.33	.28	.21
.29	.41	.30
.21	.34	.26
.32	.39	.33
.25	.27	.31

Solución El experimento está bosquejado como un *diseño completamente aleatorizado*, pero la variable de respuesta es una proporción muestral binomial. Esto indica que la normalidad y las suposiciones de varianza común podrían ser inválidas. Vea la gráfica de probabilidad normal de los residuales y la gráfica de residuales contra ajuste generada como opción en el análisis *MINITAB* de procedimiento de varianza y que se ve en la figura 11.15. La forma curva de la gráfica de probabilidad normal indica que los residuales *no tienen una distribución normal*. En la gráfica de residual contra ajuste, se pueden ver tres rectas verticales de residuales, uno por cada una de las tres campañas publicitarias. Observe que dos de las rectas (campañas 1 y 3) son cercanas y tienen dispersión similar, pero la tercera recta (campaña 2) está más alejada hacia la derecha, lo cual indica una proporción muestral más grande y consecuentemente una *varianza más grande* en este grupo. Ambos análisis de suposiciones de varianza son sospechosos en este experimento.

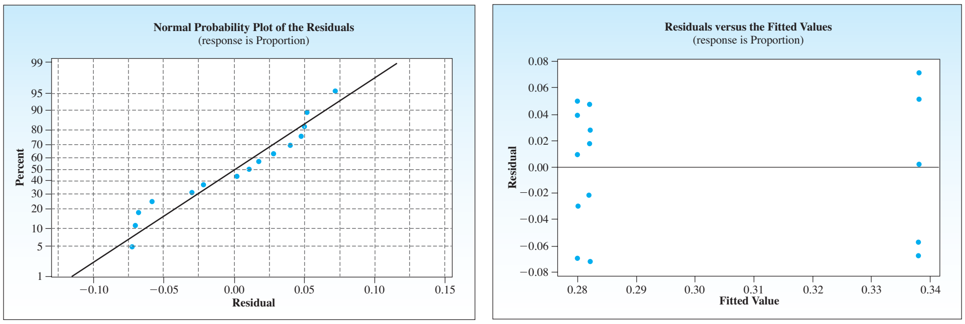


FIGURA 11.15
Gráficas *MINITAB* de diagnóstico para el ejemplo 11.14

¿Qué se puede hacer cuando las suposiciones ANOVA no se satisfacen? La suposición de *varianza constante* a veces puede corregirse al **transformar** las mediciones de respuesta. Esto es, en lugar de usar las mediciones originales, se pueden usar sus raíces cuadradas, logaritmos o alguna otra función de la respuesta. Las transformaciones que tienden a estabilizar la varianza de la respuesta también tienden a hacer sus distribuciones casi normales en mayor medida.

Cuando no se pueda hacer nada para *siquiera aproximadamente* satisfacer las suposiciones ANOVA o si los datos son clasificaciones, se den usar procedimientos **no paramétricos** de prueba y estimación, presentados en el capítulo 15. Hemos mencionado estos procedimientos antes; son casi tan potentes para detectar diferencias de tratamientos como las pruebas presentadas en este capítulo cuando los datos están normalmente distribuidos. Cuando las suposiciones paramétricas ANOVA se violan, las pruebas no paramétricas son por lo general más potentes.

11.12 UN BREVE REPASO

Presentamos tres diseños experimentales diferentes en este capítulo, cada uno de los cuales puede ser analizado usando el procedimiento de análisis de varianza. El objetivo del análisis de varianza es detectar diferencias en las respuestas medias para unidades experimentales que han recibido diferentes tratamientos, es decir, combinaciones diferentes de los niveles de factor experimental. Una vez realizada una prueba general de las diferencias, la naturaleza de estas diferencias (si existe alguna) se pueden explorar usando métodos de comparaciones pareadas y/o procedimientos de estimación de intervalo.

Los tres diseños presentados en este capítulo representan sólo una breve introducción al tema de analizar experimentos diseñados. Los diseños están disponibles para experimentos que contienen diversas variables de diseño, así como más de dos factores de tratamiento y otros diseños más complejos. Recuerde que las **variables de diseño** son factores cuyo efecto se desea controlar y por tanto eliminar del error experimental, en tanto que las **variables de tratamiento** son factores cuyo efecto se desea investigar. Si su experimento está diseñado en forma apropiada, usted podrá analizarlo usando el análisis de varianza. Los experimentos en los que los niveles de una variable son *medidos experimentalmente* en lugar de *controlados* o *preseleccionados* antes de tiempo, pueden ser analizados usando **análisis de regresión lineal** o **múltiple**, que es el tema de los capítulos 12 y 13.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Diseños experimentales

1. Unidades experimentales, factores, niveles, tratamientos, variables de respuesta.
2. Suposiciones: las observaciones dentro de cada grupo de tratamiento deben estar normalmente distribuidas con una varianza común σ^2.
3. Clasificación en una dirección, diseño completamente aleatorizado: las muestras aleatorias independientes se seleccionan de entre cada una de las k poblaciones.
4. Clasificación en dos direcciones; diseño de bloque aleatorizado: k tratamientos se comparan dentro de b grupos relativamente homogéneos de unidades experimentales llamadas *bloques*.
5. Clasificación en dos direcciones, experimento factorial $a \times b$: dos factores, A y B, se comparan a varios niveles. Cada combinación factor-nivel se replica r veces para considerar la investigación de una interacción entre los dos factores.

II. Análisis de varianza

1. La variación total en el experimento está dividida en variación (sumas de cuadrados) explicada por los diversos factores experimentales y variación debida a error experimental (no explicado).
2. Si hay un efecto debido a un factor particular, su cuadrático medio (MS $=$ SS/df) por lo general es grande y $F =$ MS(factor)/MSE es grande.
3. Las estadísticas de prueba para los diversos factores experimentales están basadas en estadísticas F, con grados de libertad apropiados ($df_2 =$ grados de libertad de error).

III. Interpretación de un análisis de varianza

1. Para el diseño de bloque completamente aleatorizado y el aleatorizado, en cada factor se prueba su significancia.
2. Para el experimento factorial, primero pruebe para interacción significativa. Si la interacción es significativa, no es necesario probar efectos principales. La naturaleza de las diferencias en las combinaciones factor-nivel deben examinarse más.
3. Si se encuentra una diferencia significativa en las medias poblacionales, el método de Tukey de comparaciones por pares o un método semejante se pueden usar para identificar más la naturaleza de las diferencias.
4. Si el experimentador tiene especial interés en una media poblacional o en la diferencia entre dos medias poblacionales, puede usar una estimación de intervalo de confianza. (Para un diseño de bloque aleatorizado, los intervalos de confianza no dan estimaciones insesgadas para medias poblacionales individuales.)

IV. Verificación del análisis de suposiciones de varianza

1. Para verificar la normalidad, use la gráfica de probabilidad normal para los residuales. Los residuales deben exhibir una forma de línea recta, creciendo hacia arriba a la derecha.
2. Para verificar la igualdad de varianza, use los residuales contra una gráfica de ajuste. La gráfica debe exhibir una dispersión aleatoria, con la misma dispersión vertical alrededor de la "línea de error cero" horizontal.

MI MINITAB

Procedimientos de análisis de varianza

Los procedimientos estadísticos empleados para efectuar el análisis de varianza para los tres diseños experimentales diferentes en este capítulo se encuentran en un submenú *MINITAB* al seleccionar **Stat** → **ANOVA**. El usuario verá opciones para **One-way**, **One-way (Unstacked)** y **Two-way** que van a generar cuadros de diálogo empleados para diseños completamente aleatorizados, de bloque aleatorizado y factoriales, respectivamente. Se deben guardar correctamente los datos y luego escoger las columnas correspondientes a los factores necesarios en el experimento. Mostraremos algunos de los cuadros de diálogo y salidas impresas de ventana Session para los ejemplos de este capítulo, empezando con una clasificación en una dirección, el estudio completamente aleatorizado del desayuno del ejemplo 11.4.

Primero, introduzca los 15 intervalos de atención registrados en la columna C1 de una hoja de trabajo *MINITAB* y aplíqueles nombre "Span". A continuación, introduzca los enteros 1, 2 y 3 en una segunda columna C2 para identificar la asignación de alimento (*tratamiento*) para cada observación. El usuario puede hacer que el *MINITAB* fije esta forma usando **Calc** → **Make Patterned Data** → **Simple Set of Numbers** e introduciendo los números apropiados, como se ve en la figura 11.16. Entonces use **Stat** → **ANOVA** → **One-way** para generar el cuadro de diálogo de la figura 11.17.[†] El usuario debe seleccionar la columna de observaciones para la caja "Response" y la columna de indicadores de tratamiento para el cuadro "Factor". Entonces tendrá varias opciones. Bajo **Comparisons**, puede seleccionar "Tukey's family error rate" (que tiene un nivel predeterminado de 5%) para obtener una salida de comparaciones apareadas. Bajo **Graphs**, puede seleccionar gráficas de valor individual y/o gráficas de caja para comparar las tres asignaciones de alimentos y puede generar gráficas residuales (use "Normal plot of residuals" y/o "Residuals versus fits") para verificar la validez de las suposiciones ANOVA. Dé un clic en **OK** desde la caja de diálogo principal para obtener la salida impresa de la figura 11.3 del texto.

El comando **Stat** → **ANOVA** → **Two-way** se puede usar para los diseños de bloque aleatorizado y factorial. Primero hay que introducir todas las observaciones en una sola columna y luego enteros o nombres descriptivos para indicar cualquiera de estos casos:

- El *bloque* y *tratamiento* para cada una de las mediciones en un diseño de bloque aleatorizado.
- Los niveles de los *factores A y B* para el experimento factorial.

MINITAB reconocerá diversas réplicas dentro de cada combinación de factor-nivel en el experimento factorial y desglosará la suma de cuadrados para interacción (mientras el usuario no ponga marca en la caja "Fit additive model"). Como estos dos diseños contienen la misma secuencia de comandos, usaremos los datos del ejemplo 11.12 para generar el análisis de varianza para el experimento factorial. Los datos están introducidos en la hoja de trabajo de la figura 11.18. Vea si puede usar **Calc** → **Make Patterned Data** → **Simple Set of Numbers** para introducir los datos en las columnas C2-C3. Una vez introducidos los datos, use **Stat** → **ANOVA** → **Two-way** para generar el cuadro de diálogo de la figura 11.19. Escoja "Output" para la caja "Response" y "Supervisor" y "Shift" para el "Row factor" y "Column factor", respectivamente. Puede escoger exhibir las medias de efecto principal junto con intervalos de confianza de 95% si verifica "Display means" y puede seleccionar gráficas residuales si lo desea. Dé un clic en **OK** para obtener una salida impresa ANOVA en la figura 11.13.

[†] Si el usuario había introducido cada una de las tres muestras en columnas separadas, el comando apropiado hubiera sido **Stat** → **ANOVA** → **One-way (Unstacked)**.

FIGURA 11.16

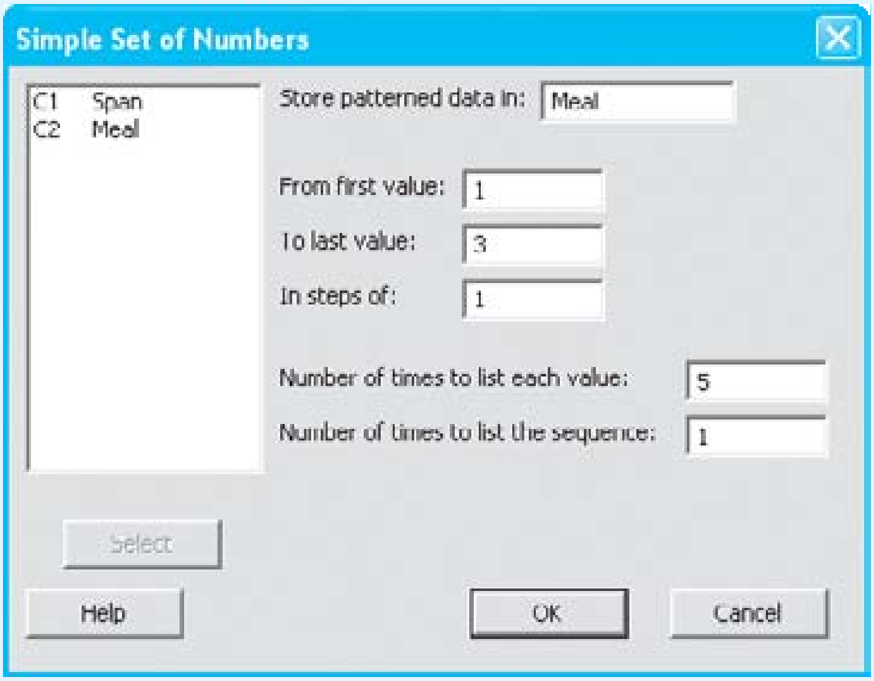


FIGURA 11.17

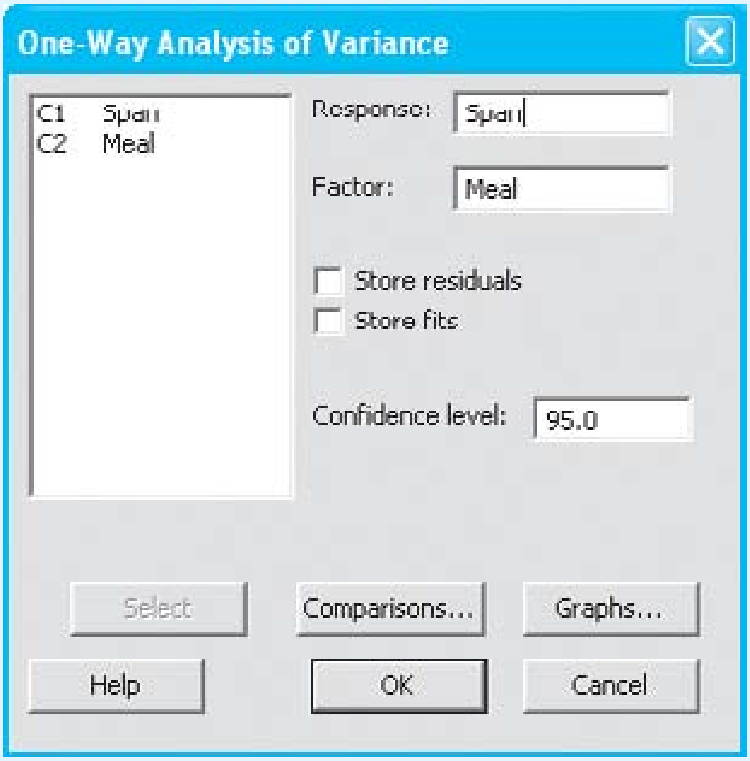
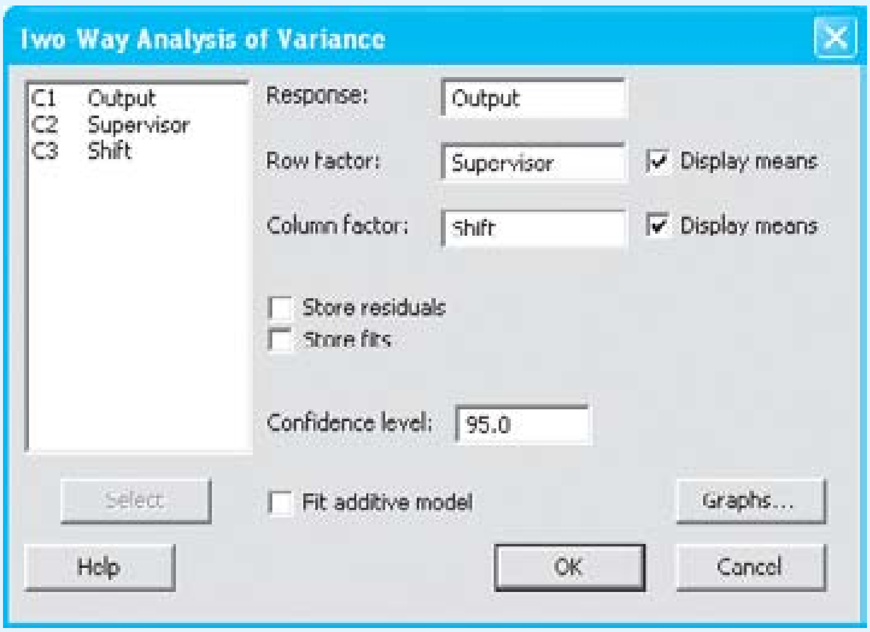


FIGURA 11.18

Data Display

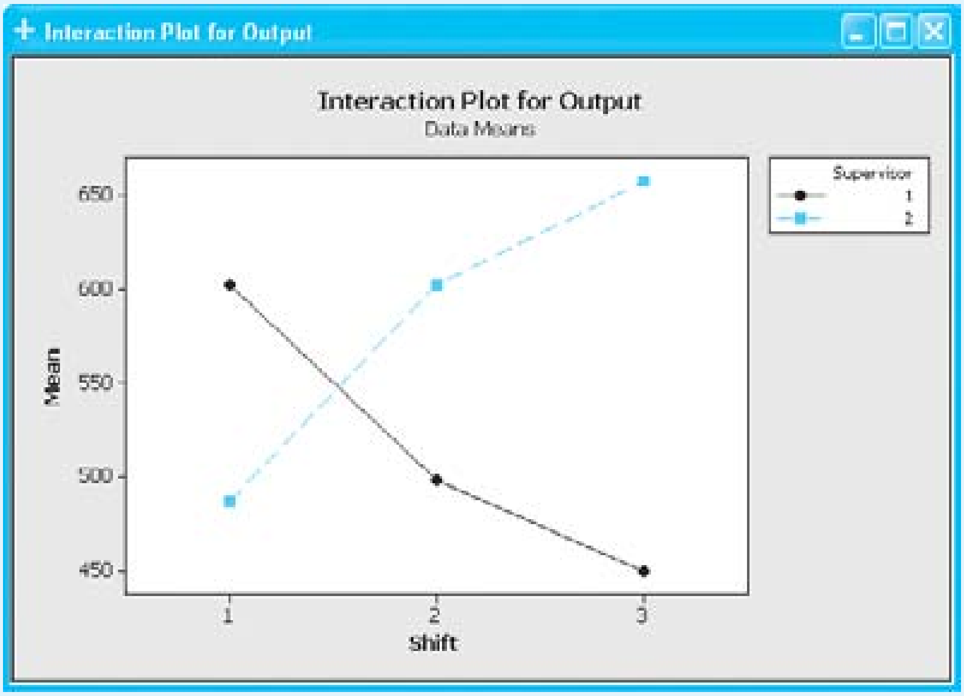
Row	Output	Supervisor	Shift
1	571	1	1
2	610	1	1
3	625	1	1
4	480	2	1
5	516	2	1
6	465	2	1
7	480	1	2
8	474	1	2
9	540	1	2
10	625	2	2
11	600	2	2
12	581	2	2
13	470	1	3
14	430	1	3
15	450	1	3
16	630	2	3
17	680	2	3
18	661	2	3

FIGURA 11.19



Como la interacción entre supervisores y turnos es altamente significativa, el investigador puede explorar la naturaleza de esta interacción al graficar el promedio de producción para cada supervisor en cada uno de los tres turnos. Use **Stat → ANOVA → Interactions Plot** y escoja las variables apropiadas de respuesta y factor. La gráfica es generada por el *MINITAB* y se exhibe en la figura 11.20. El usuario puede ver la fuerte diferencia en los comportamientos de las producciones medias para los dos supervisores, lo cual indica una fuerte interacción entre los dos factores.

FIGURA 11.20



Ejercicios suplementarios

MIS DATOS EX1156

11.56 Tiempos de reacción *vs.* estímulos Veintisiete personas participaron en un experimento para comparar los efectos de cinco diferentes estímulos sobre el tiempo de reacción. El experimento se corrió usando un diseño completamente aleatorizado y, cualquiera que fuera el resultado del análisis de varianza, los experimentadores deseaban comparar los estímulos A y D. Los resultados del experimento se dan aquí. Use la salida impresa *MINITAB* para completar el ejercicio.

Estímulo	Tiempo de reacción (s)							Total	Media
A	.8	.6	.6	.5				2.5	.625
B	.7	.8	.5	.5	.6	.9	.7	4.7	.671
C	1.2	1.0	.9	1.2	1.3	.8		6.4	1.067
D	1.0	.9	.9	1.1	.7			4.6	.920
E	.6	.4	.4	.7	.3			2.4	.480

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.56

Anova en una vía: tiempo contra estímulo

```
Source     DF        SS        MS        F       P
Stimulus    4    1.2118    0.3030    11.67   0.000
Error      22    0.5711    0.0260
Total      26    1.7830

S = 0.1611   R-Sq = 67.97%   R-Sq(adj) = 62.14%

                                    Individual 95% CIs For Mean Based on
                                    Pooled StDev
Level       N      Mean     StDev   -------+---------+---------+---------+--
A           4    0.6250    0.1258        (------*------)
B           7    0.6714    0.1496            (----*----)
C           6    1.0667    0.1966                              (-----*----)
D           5    0.9200    0.1483                        (-----*-----)
E           5    0.4800    0.1643   (-----*-----)
                                    -------+---------+---------+---------+--
Pooled StDev =   0.1611                  0.50      0.75      1.00      1.25
```

a. Realice un análisis de varianza y pruebe por si hay diferencia en los tiempos medios de reacción debido a los cinco estímulos.

b. Compare los estímulos A y D para ver si hay una diferencia en tiempos medios de reacción.

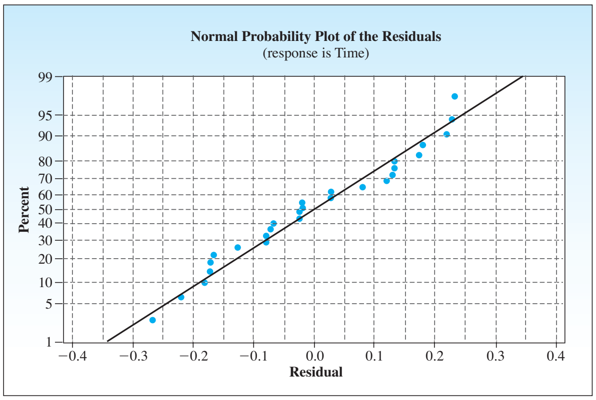
11.57 Consulte el ejercicio 11.56. Use esta salida impresa *MINITAB* para identificar las diferencias en las medias de tratamiento.

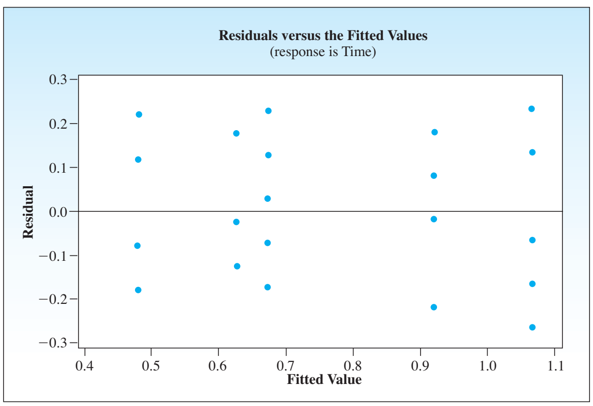
Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.57

```
Tukey 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of Stimulus

Individual confidence level = 99.29%

Stimulus = A subtracted from:

Stimulus    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
B         -0.2535   0.0464   0.3463              (-----*-----)
C          0.1328   0.4417   0.7505                      (-----*-----)
D         -0.0260   0.2950   0.6160                   (-----*-----)
E         -0.4660  -0.1450   0.1760          (-----*-----)
                                     --------+---------+---------+---------+-
                                         -0.50      0.00      0.50      1.00
Stimulus = B subtracted from:

Stimulus    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
C          0.1290   0.3952   0.6615                      (-----*-----)
D         -0.0316   0.2486   0.5288                   (-----*-----)
E         -0.4716  -0.1914   0.0888          (-----*-----)
                                     --------+---------+---------+---------+-
                                         -0.50      0.00      0.50      1.00
Stimulus = C subtracted from:

Stimulus    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
D         -0.4364  -0.1467   0.1431          (-----*-----)
E         -0.8764  -0.5867  -0.2969  (-----*-----)
                                     --------+---------+---------+---------+-
                                         -0.50      0.00      0.50      1.00
Stimulus = D subtracted from:

Stimulus    Lower   Center    Upper  --------+---------+---------+---------+-
E         -0.7426  -0.4400  -0.1374     (-----*-----)
                                     --------+---------+---------+---------+-
                                         -0.50      0.00      0.50      1.00
```

11.58 Consulte el ejercicio 11.56. ¿Qué dicen la gráfica de probabilidad normal y la gráfica de residuales contra ajuste acerca de sus resultados del análisis de varianza?

Gráficas de diagnóstico *MINITAB* para el ejercicio 11.58





MIS DATOS EX1159

11.59 Tiempos de reacción II El experimento del ejercicio 11.56 podría haberse realizado en forma más efectiva usando un diseño de bloque aleatorizado con personas como bloques, porque se esperaría que el tiempo medio de reacción variaría de una persona a otra. En consecuencia, cuatro personas se emplearon en un nuevo experimento y cada persona fue sometida a cada uno de los cinco estímulos en orden aleatorio. Los tiempos de reacción (en segundos) se indican a continuación:

	Estímulo				
Persona	A	B	C	D	E
1	.7	.8	1.0	1.0	.5
2	.6	.6	1.1	1.0	.6
3	.9	1.0	1.2	1.1	.6
4	.6	.8	.9	1.0	.4

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.59

ANOVA de dos vías: tiempo contra persona, estímulo

```
Source       DF     SS        MS       F      P
Subject       3  0.140  0.046667    6.59  0.007
Stimulus      4  0.787  0.196750   27.78  0.000
Error        12  0.085  0.007083
Total        19  1.012

S = 0.08416   R-Sq = 91.60%   R-Sq(adj) = 86.70%

                        Individual 95% CIs For Mean Based on
                        Pooled StDev
Stimulus      Mean      ---------+---------+---------+---------+-
A            0.700               (----*----)
B            0.800                    (----*----)
C            1.050                                 (---*----)
D            1.025                                (---*----)
E            0.525      (---*----)
                        ---------+---------+---------+---------+-
                               0.60      0.80      1.00      1.20
```

a. Use la salida impresa *MINITAB* para analizar los datos y probar si hay diferencias en medias de tratamiento.

b. Use el método de Tukey de comparaciones apareadas para identificar las diferencias significativas por pares en los estímulos.

c. ¿Le parece que el bloqueo fue eficaz en este experimento?

MIS DATOS EX1160

11.60 Frecuencia cardiaca y ejercicio Se realizó un experimento para examinar el efecto de la edad en la frecuencia cardiaca cuando una persona está sometida a una cantidad especificada de ejercicio. Diez hombres fueron seleccionados al azar de entre cuatro grupos de edad: 10-19, 20-39, 40-59 y 60-69. Cada uno de ellos caminó en una caminadora a un grado fijo durante 12 minutos, registrándose su aumento en frecuencia cardiaca (en pulsaciones por minuto), la diferencia antes y después del ejercicio:

	10-19	20-39	40-59	60-69
	29	24	37	28
	33	27	25	29
	26	33	22	34
	27	31	33	36
	39	21	28	21
	35	28	26	20
	33	24	30	25
	29	34	34	24
	36	21	27	33
	22	32	33	32
Total	309	275	295	282

Use un programa apropiado de computadora para contestar estas preguntas:

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el aumento medio en frecuencia cardiaca entre los cuatro grupos de edad? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para la diferencia en el aumento medio de frecuencia cardiaca entre los grupos de 10-19 y 60-69.

c. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para el aumento medio en frecuencia cardíaca para el grupo de edad de 20-39.

d. ¿Aproximadamente cuántas personas necesitaría en cada grupo, si deseara estimar una media de grupo correcta a no más de dos pulsaciones por minuto con probabilidad igual a .95?

MIS DATOS EX1161

11.61 Aprendiendo a vender Una compañía deseaba estudiar los efectos de cuatro programas de capacitación en habilidad para vender, en su personal de ventas. Treinta y dos personas fueron divididas al azar en cuatro grupos de igual tamaño y cada grupo fue sometido a uno de los diferentes programas de capacitación en ventas. Debido a que hubo algunas deserciones durante los programas de capacitación debido a enfermedad, vacaciones, etc., el número de estudiantes que completaron los programas varió de un grupo a otro. Al término de éstos, cada vendedor fue asignado al azar a un área de ventas de un grupo de áreas de ventas que fueron consideradas como que tenían potenciales equivalentes de ventas. Las ventas hechas por cada uno de los cuatro grupos de vendedores durante la primera semana, después de completar el programa de capacitación, aparecen en la tabla siguiente:

	Programa de capacitación			
	1	2	3	4
	78	99	74	81
	84	86	87	63
	86	90	80	71
	92	93	83	65
	69	94	78	86
	73	85		79
		97		73
		91		70
Total	482	735	402	588

Analice el experimento usando el método apropiado. Identifique los tratamientos o factores de interés para el experimentador e investigue cualesquier efectos significativos. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de este experimento? Escriba un párrafo que explique los resultados de su análisis.

11.62 Factorial de 4 × 2 Supongamos que usted ha de realizar un experimento factorial de dos factores, el factor A en cuatro niveles y el factor B en dos niveles, con *r* réplicas por tratamiento.

a. ¿Cuántos tratamientos intervienen en el experimento?

b. ¿Cuántas observaciones están involucradas?

c. Haga una lista de las fuentes de variación y sus grados de libertad respectivos.

11.63 Factorial de 2 × 3 El análisis de una tabla de varianza para un experimento factorial de 2×3, factor A en dos niveles y el factor B en tres niveles, con cinco observaciones por tratamiento, se muestra en la tabla.

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
A		1.14		
B		2.58		
AB		.49		
Error				
Total		8.41		

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una interacción entre los factores A y B? Pruebe usando $\alpha = .05$. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de su respuesta?

b. Dé el valor *p* aproximado para la prueba del inciso a).

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el factor A afecta la respuesta? Pruebe usando $\alpha = .05$.

d. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el factor B afecta la respuesta? Pruebe usando $\alpha = .05$.

11.64 Consulte el ejercicio 11.63. Las medias de todas las observaciones, a los niveles A_1 y A_2 del factor A son $\bar{x}_1 = 3.7$ y $\bar{x}_2 = 1.4$, respectivamente. Encuentre un intervalo de confianza para la diferencia en respuesta media para los niveles de factor A_1 y A_2.

MIS DATOS EX1165

11.65 La mosca blanca en California La mosca blanca, que produce la caída de hojas de arbustos y árboles y una reducción en producción de cosechas negociables, ha emergido como plaga en el sur de California. En un estudio para determinar factores que afectan el ciclo vital de la mosca blanca, se realizó un experimento en el que moscas blancas fueron puestas en dos tipos diferentes de plantas a tres temperaturas diferentes. La observación de interés fue el número total de huevecillos depositados por hembras enjauladas bajo una de las seis posibles combinaciones de tratamiento. Cada combinación de tratamiento se corrió usando cinco jaulas.

	Temperatura		
Planta	70°F	77°F	82°F
Algodón	37	34	46
	21	54	32
	36	40	41
	43	42	36
	31	16	38
Pepino	50	59	43
	53	53	62
	25	31	71
	37	69	49
	48	51	59

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.65

ANOVA en dos vías: huevecillos contra planta, temperatura

```
Source        DF       SS       MS       F       P
Plant          1  1512.30  1512.30   12.29   0.002
Temperature    2   487.47   243.73    1.98   0.160
Interaction    2   111.20    55.60    0.45   0.642
Error         24  2952.40   123.02
Total         29  5063.37

S = 11.09   R-Sq = 41.69%   R-Sq(adj) = 29.54%
```

a. ¿Qué tipo de diseño experimental se ha empleado?

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el efecto de la temperatura en el número de huevos depositados es diferente, dependiendo del tipo de planta? Use la salida impresa *MINITAB* para probar la hipótesis apropiada.

c. Grafique las medias de tratamiento para algodón como función de la temperatura. Grafique las medias de tratamiento para pepino como función de la temperatura. Comente sobre la similitud o diferencia en estas dos gráficas.

d. Encuentre el número medio de huevos depositados en algodón y pepino con base en 15 observaciones cada uno. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia en las medias poblacionales que sirven de base.

MIS DATOS EX1166

11.66 Contaminación proveniente de plantas químicas Cuatro plantas químicas, que producen el mismo producto y son propiedad de la misma compañía, descargan aguas negras en arroyos de la cercanía de sus lugares. Para comprobar el grado de contaminación creada por las aguas negras y para determinar si esto varía de una planta a otra, la compañía recolectó muestras aleatorias de desechos líquidos, cinco especímenes por cada una de las cuatro plantas. Los datos se muestran en la tabla:

Planta	Desechos contaminantes (lb/gal de desechos)				
A	1.65	1.72	1.50	1.37	1.60
B	1.70	1.85	1.46	2.05	1.80
C	1.40	1.75	1.38	1.65	1.55
D	2.10	1.95	1.65	1.88	2.00

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las cantidades medias de aguas negras descargadas por las cuatro plantas?

b. Si la descarga media máxima de aguas negras es 1.5 lb/gal, ¿los datos dan suficiente evidencia para indicar que el límite está excedido en la planta A?

c. Estime la diferencia en la descarga media de aguas negras entre las plantas A y D, usando un intervalo de confianza de 95%.

MIS DATOS EX1167

11.67 Artículos básicos en Estados Unidos El ejercicio 10.40 examinó un anuncio de Albertsons, una cadena de supermercados del oeste de Estados Unidos. El anunciante dice que Albertsons de manera consistente ha tenido precios más bajos que otros cuatro supermercados de surtido completo. Como parte de un estudio realizado por una "compañía independiente para verificar precios de artículos básicos", el promedio de total semanal basado en los precios de aproximadamente 95 artículos se da para cinco cadenas diferentes de supermercados, registrado durante 4 semanas consecutivas.[6]

	Albertsons	Ralphs	Vons	Alpha Beta	Lucky
Semana 1	$254.26	$256.03	$267.92	$260.71	$258.84
Semana 2	240.62	255.65	251.55	251.80	242.14
Semana 3	231.90	255.12	245.89	246.77	246.80
Semana 4	234.13	261.18	254.12	249.45	248.99

a. ¿Qué tipo de diseño se ha usado en este experimento?

b. Realice un análisis de varianza de los datos.

c. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que existe diferencia en el promedio total semanal para los cinco supermercados? Use $\alpha = .05$.

d. Use el método de Tukey para comparaciones apareadas para determinar cuáles de las medias son significativamente diferentes una de otra. Use $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1168

11.68 Producción de trigo Las producciones de trigo (en búshels por acre) se compararon para cinco variedades diferentes, A, B, C, D y E, en seis lugares diferentes. Cada variedad fue asignada al azar a un lote en cada lugar. Los resultados del experimento se muestran en la tabla siguiente, junto con una salida impresa *MINITAB* del análisis de varianza. Analice el experimento usando el método apropiado. Identifique los tratamientos de factores de interés para el experimentador e investigue cualquier efecto que exista. Use las gráficas de diagnóstico sobre la validez del análisis de varianza de las suposiciones. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de este experimento? Redacte un párrafo que explique los resultados de su análisis.

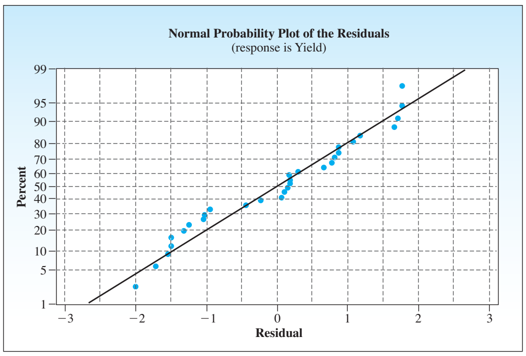
	Lugar					
Variedad	1	2	3	4	5	6
A	35.3	31.0	32.7	36.8	37.2	33.1
B	30.7	32.2	31.4	31.7	35.0	32.7
C	38.2	33.4	33.6	37.1	37.3	38.2
D	34.9	36.1	35.2	38.3	40.2	36.0
E	32.4	28.9	29.2	30.7	33.9	32.1

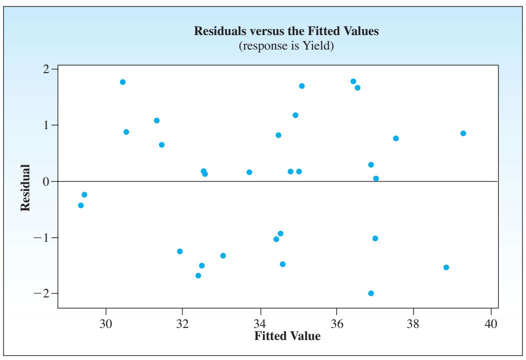
Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 11.68

ANOVA de dos vías: producción contra variedades, lugar

```
Source      DF       SS        MS       F      P
Varieties    4  142.670   35.6675   18.61  0.000
Locations    5   68.142   13.6283    7.11  0.001
Error       20   38.303    1.9165
Total       29  249.142

S = 1.384   R-Sq = 84.62%   R-Sq(adj) = 77.69%

                         Individual 95% CIs For Mean Based on
                         Pooled StDev
Varieties     Mean   +---------+---------+---------+---------
A          34.3500                      (-----*-----)
B          32.2833            (----*-----)
C          36.3000                                (-----*----)
D          36.7833                                  (-----*-----)
E          31.2000   (-----*-----)
                     +---------+---------+---------+---------
                  30.0      32.0      34.0      36.0
```

Gráficas de diagnóstico *MINITAB* para el ejercicio 11.68





MIS DATOS EX1169 **11.69 Acondicionamiento físico** Los investigadores Russell R. Pate y colegas analizaron los resultados del National Health and Nutrition Examination Survey para evaluar niveles de acondicionamiento cardio-respiratorio en jóvenes de 12 a 19 años de edad.[7] Alcanzar estándares de acondicionamiento es un requisito previo para ingresar a ocupaciones como aplicación de la ley, bomberos y fuerzas militares, así como otros trabajos que comprenden un trabajo físicamente demandante. La admisión máxima estimada de oxígeno ($VO_{2máx}$) se utilizó para medir el nivel cardio-respiratorio de una persona. El foco de nuestro estudio investiga la relación entre niveles de actividad física (más que otros, igual que otros o menos que otros) y género en $VO_{2máx}$. Los datos que siguen están basados en este estudio.

	Actividad física		
	Más	Igual	Menos
Hombres	50.1	45.7	40.9
	47.2	44.2	41.3
	49.7	46.8	39.2
	50.4	44.9	40.9
Mujeres	41.2	37.2	36.5
	39.8	39.4	35.0
	41.5	38.6	37.2
	38.2	37.8	35.4

a. ¿Es éste un experimento factorial o un diseño de bloque aleatorizado? Explique.

b. ¿Hay interacción significativa entre niveles de actividad física y género? ¿Hay diferencias significativas entre hombres y mujeres? ¿Y entre niveles de actividad física?

c. Si la interacción es significativa, use el procedimiento de Tukey por pares para investigar diferencias entre las seis medias de celda. Comente sobre los resultados hallados usando este procedimiento. Use $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1170 **11.70** En un estudio de salarios iniciales de profesores auxiliares,[8] cinco profesores auxiliares hombres y cinco profesoras auxiliares mujeres de cada uno de tres tipos de instituciones que otorgan títulos de doctorado, fueron encuestados y se registraron sus salarios iniciales bajo la condición de anonimato. Los resultados de la encuesta en unidades de 1000 dólares se dan en la tabla siguiente.

Género	Universidades públicas	Privadas/ Independientes	Relacionados con iglesias
	$57.3	$85.8	$78.9
	57.9	75.2	69.3
Hombres	56.5	66.9	69.7
	76.5	73.0	58.2
	62.0	73.0	61.2
	47.4	62.1	60.4
	56.7	69.1	62.1
Mujeres	69.0	66.5	59.8
	63.2	61.8	71.9
	65.3	76.7	61.6

Fuente: Basado en "Average Salary for Men and Women Faculty by Category, Affiliation, and Academic Rank, 2005-2006".

a. ¿Qué tipo de diseño se utiliza para recolectar estos datos?

b. Use un análisis de varianza para probar si hay diferencias significativas en género, en tipo de institución y para probar si hay interacción significativa de género $\times$ tipo de institución.

c. Encuentre una estimación de intervalo de confianza de 95% para la diferencia en salarios iniciales para profesores auxiliares hombres y profesoras auxiliares mujeres. Interprete este intervalo en términos de una diferencia de género en salarios iniciales.

d. Use el procedimiento de Tukey para investigar diferencias en salarios de profesores auxiliares para los tres tipos de instituciones. Use $\alpha = .01$.

e. Haga un resumen de los resultados de su análisis.

MIS DATOS EX1171

11.71 Cerámica en el Reino Unido Un artículo en *Archaeometry* contenía un análisis de 26 muestras de cerámica romano-británica, halladas en hornos de cuatro lugares diferentes en el Reino Unido.[9] Como un sitio dio sólo dos muestras, considere las muestras halladas en los otros tres sitios. Las muestras fueron analizadas para determinar su composición química y a continuación se indica el porcentaje de óxido de hierro.

Llanederyn		Island Thorns	Ashley Rails
7.00	5.78	1.28	1.12
7.08	5.49	2.39	1.14
7.09	6.92	1.50	.92
6.37	6.13	1.88	2.74
7.06	6.64	1.51	1.64
6.26	6.69		
4.26	6.44		

a. ¿Qué tipo de diseño experimental es éste?

b. Use un análisis de varianza para determinar si hay una diferencia en el promedio de porcentaje de óxido de hierro en los tres sitios. Use $\alpha = .01$.

c. Si usted tiene acceso a un programa de cómputo, genere las gráficas de diagnóstico para este experimento. ¿Le parece que alguno de los análisis de suposiciones de varianza han sido violados? Explique.

MIS DATOS EX1172

11.72 Teléfonos celulares ¿Qué tan satisfecho está usted con su actual proveedor de servicio de teléfono móvil? Encuestas efectuadas por *Consumer Reports* indican que hay un alto nivel de insatisfacción entre consumidores, lo cual resulta en altos porcentajes de rotación de clientes.[10] La tabla siguiente muestra las calificaciones totales de satisfacción, basadas en una calificación máxima de 100, para cuatro proveedores de servicios inalámbricos en cuatro ciudades diferentes.

	Chicago	Dallas	Philadelphia	San Francisco
AT&T Wireless	63	66	61	64
Cingular Wireless	67	67	64	60
Sprint	60	68	60	61
Verizon Wireless	71	75	73	73

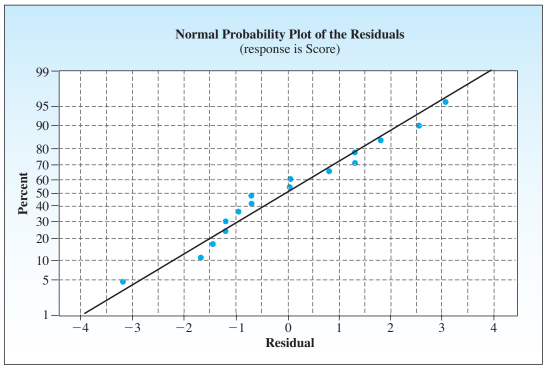
a. ¿Qué tipo de diseño experimental se utilizó en este artículo? Si el diseño empleado es un diseño de bloque aleatorizado, ¿cuáles son los bloques y cuáles son los tratamientos?

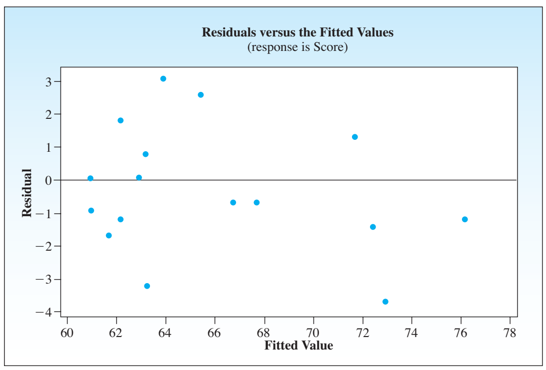
b. Efectúe un análisis de varianza para los datos.

c. ¿Hay diferencias significativas en el promedio de calificaciones de satisfacción para los cuatro proveedores de servicios inalámbricos considerados aquí?

d. ¿Hay diferencias significativas en el promedio de calificaciones de satisfacción para las cuatro ciudades?

11.73 Teléfonos celulares, continúa Consulte el ejercicio 11.72. Las gráficas de diagnóstico para este experimento se ilustran a continuación. ¿Le parece que alguno de los análisis de varianza de las suposiciones ha sido violado? Explique.





MIS DATOS EX1174

11.74 Salarios de profesores II Cada año, la *American Association of University Professors* informa sobre salarios de profesores académicos en universidades y colegios en Estados

Unidos.[8] Los datos que siguen (en miles de dólares), adaptados de este informe, están basados en muestras de $n = 10$ en cada uno de tres rangos de profesores, para profesores hombres y mujeres.

	Rango					
Género	Profesor auxiliar		Profesor adjunto		Profesor de tiempo completo	
Hombre	$63.9	$64.4	$70.0	$74.4	$109.4	$110.5
	63.9	62.2	77.7	77.2	111.3	104.4
	64.8	64.2	77.1	76.3	112.5	106.3
	68.3	64.9	76.0	78.8	111.6	106.9
	67.5	67.5	70.1	73.1	118.3	109.9
Mujer	56.6	59.0	65.4	66.3	110.3	100.9
	57.6	58.6	71.9	74.6	97.0	102.8
	53.5	54.9	65.9	73.0	91.5	102.0
	64.4	62.9	67.9	69.4	103.5	96.7
	62.6	59.8	73.6	71.0	95.6	97.8

Fuente: Con base en "Average Salary for Men and Women Faculty by Category, Affiliation, and Academic Rank, 2005-2006".

a. Identifique el diseño empleado en este estudio.

b. Use el análisis de varianza apropiado para estos datos.

c. ¿Los datos indican que el salario en los diferentes rangos varía por género?

d. Si no hay interacción, determine si hay diferencias en salarios por rango y si hay diferencias por género. Discuta sus resultados.

e. Grafique el promedio de salarios usando una gráfica de interacción. Si el principal efecto de rangos es significativo, use el método de Tukey de comparaciones por pares para determinar si hay diferencias significativas entre los rangos. Use $\alpha = .01$.

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Boletos

"Un buen desorden"

¿Se arriesga usted a una infracción por estacionarse donde no debe por olvidar cuánto tiempo le queda en el parquímetro? ¿Las multas relacionadas con varias infracciones varían dependiendo de la ciudad en la que recibe usted la infracción? Para ver este problema, las multas impuestas por rebasar tiempo, estacionarse en zona roja y estacionarse junto a un hidrante de bomberos se registraron para 13 ciudades del sur de California.[11]

Ciudad	Rebasar tiempo	Zona roja	Hidrante de bomberos
Long Beach	$17	$30	$30
Bakersfield	17	33	33
Orange	22	30	32
San Bernardino	20	30	78
Riverside	21	30	30
San Luis Obispo	8	20	75
Beverly Hills	23	38	30
Palm Springs	22	28	46
Laguna Beach	22	22	32
Del Mar	25	40	55
Los Angeles	20	55	30
San Diego	35	60	60
Newport Beach	32	42	30

Fuente: De "A Fine Mess", por R. McGarvey, *Avenues*, julio/agosto de 1994. Reimpreso con permiso del autor.

1. Identifique el diseño empleado para la recolección de datos en este estudio práctico.
2. Analice los datos usando el análisis apropiado. ¿Qué se puede decir de la variación entre las ciudades en este estudio? ¿Y de las multas para los tres tipos de violaciones? ¿El procedimiento de Tukey se puede usar para delinear más aún algunas diferencias significativas que puedan hallarse? ¿Las estimaciones de intervalo de confianza serían útiles en su análisis?
3. Haga un resumen de los resultados de su análisis de estos datos.

12

Regresión lineal y correlación

© Roza/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

En este capítulo, consideramos la situación en la que el valor medio de una variable aleatoria y está relacionada con otra variable x. Al medir tanto y como x para cada unidad experimental, con lo cual se generan datos bivariados, se puede usar la información dada por x para estimar el valor promedio de y y para predecir valores de y para valores de x asignados previamente.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo estar seguro de que mis cálculos son correctos?

¿Su auto está "Hecho en EE.UU."?

La frase "Hecho en EE.UU." se ha convertido en grito de batalla en los últimos años porque los trabajadores estadounidenses tratan de proteger sus trabajos contra la competencia extranjera. En el caso práctico del final de este capítulo exploramos las cambiantes actitudes de consumidores estadounidenses hacia autos hechos fuera de Estados Unidos, usando un sencillo análisis de regresión lineal.

12.1 INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de último año de preparatoria, los de primer año de universidad, sus padres, así como la administración de una universidad están preocupados por el rendimiento académico de un estudiante después de haberse inscrito en la universidad. ¿Se puede estimar o predecir el promedio de calificaciones de un estudiante (GPA) al terminar su primer año, antes de inscribirse en la universidad? A primera vista, éste podría ser un problema difícil aunque es de esperarse que los estudiantes altamente motivados, que se hayan graduado con calificaciones altas de una preparatoria, alcancen un alto promedio GPA cuando terminen el primer año. Por otra parte, los estudiantes que carezcan de motivación o que hayan obtenido un éxito sólo parcial en preparatoria no es probable que la hagan bien. Se esperaría que el rendimiento académico de un estudiante sea una función de diversas variables:

- Rango en su grupo de preparatoria
- Nivel general de preparatoria
- Alto promedio GPA
- Calificaciones del SAT

Este problema es de naturaleza más bien general. Usted estará interesado en una variable aleatoria y (promedio GPA) relacionada con diversas variables independientes. El objetivo es crear una *ecuación de predicción* que exprese y como función de estas variables independientes. A continuación, si se pueden medir las variables independientes, se pueden sustituir estos valores en la ecuación de predicción y obtener la predicción para y, es decir, el promedio GPA del estudiante en nuestro ejemplo. Pero, ¿cuáles variables deben usarse para hacer la predicción? ¿Qué tan fuerte es su relación con y? ¿Cómo se construye una buena ecuación de predicción para y como función de las variables seleccionadas para la predicción? Contestaremos estas preguntas en los siguientes dos capítulos.

En este capítulo, restringimos nuestra atención al sencillo problema de predecir y como función lineal de una sola variable x de pronóstico. Este problema originalmente se abordó en el capítulo 3 en la exposición de *datos bivariados*. Recuerde que utilizamos la ecuación de una recta para describir la relación entre x y y y describimos la fuerza de la relación usando el coeficiente de correlación r. Nos apoyaremos en algunos de estos resultados cuando repasemos el tema de regresión y correlación lineales.

12.2 MODELO PROBABILÍSTICO LINEAL SIMPLE

Considere el problema de tratar de predecir el valor de una respuesta y basada en el valor de una variable independiente x. La recta de mejor ajuste del capítulo 3,

$$y = a + bx$$

estuvo basada en una *muestra* de n observaciones bivariadas tomadas de una *población* más grande de medidas. La recta que describe la relación entre y y x en la *población* es semejante a la recta de mejor ajuste de la *muestra*, pero no es igual. ¿Cómo se puede construir un **modelo de población** para describir la relación entre una variable aleatoria y y una variable x independiente relacionada?

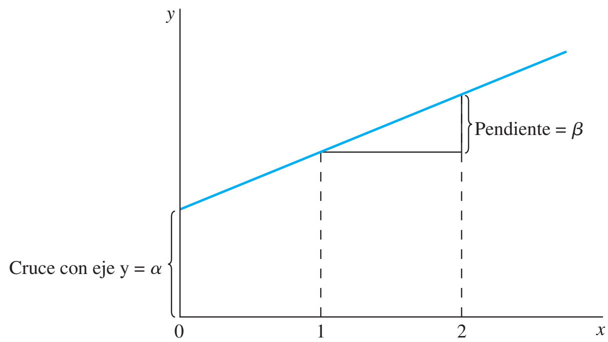
Se empieza por suponer que la variable de interés, y, está *linealmente* relacionada a una variable independiente x. Para describir la relación lineal, se puede usar el **modelo determinista**

$$y = \alpha + \beta x$$

donde α es la intersección con el eje y, es decir, el valor de y cuando $x = 0$, y β es la pendiente de la recta, definida como el cambio en y para un cambio unitario en x, como se muestra en la figura 12.1. Este modelo describe una relación determinista entre la variable de interés y, a veces llamada **variable de respuesta**, y la variable independiente x, denominada **variable de pronóstico**. Esto es, la ecuación lineal determina un valor exacto de y cuando se da el valor de x. ¿Este modelo es realista para una situación experimental? Considere el siguiente ejemplo.

FIGURA 12.1

Intersección con el eje y y pendiente de una recta



MI CONSEJO

pendiente = cambio en y para un cambio unitario en x.

cruce con eje y = valor de y cuando $x = 0$.

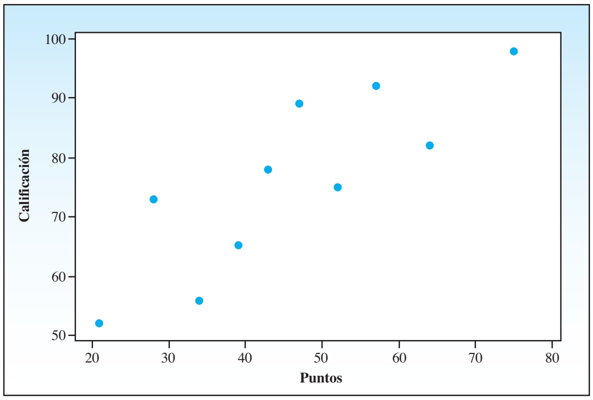
La tabla 12.1 muestra las calificaciones del examen de matemáticas de $n = 10$ estudiantes de primer año de universidad, junto con sus calificaciones finales en cálculo. Una gráfica bivariada de estos puntos y calificaciones se da en la figura 12.2. Se puede usar el applet **Building a Scatter-plot** (Construcción de una gráfica de dispersión) como recordatorio de cómo se traza esta gráfica. Observe que los puntos *no están exactamente sobre una recta* sino que más bien parecen ser desviaciones alrededor de una recta fundamental. Una forma sencilla de modificar el modelo determinista es agregar un **componente aleatorio de error** para explicar las desviaciones de los puntos alrededor de la recta. Una respuesta particular y se describe usando el **modelo probabilístico**

$$y = \alpha + \beta x + \epsilon$$

TABLA 12.1 **Calificaciones de examen de matemáticas y puntos finales en cálculo para estudiantes de primer año de universidad**

Estudiante	Calificación de examen de matemáticas	Puntos finales en cálculo
1	39	65
2	43	78
3	21	52
4	64	82
5	57	92
6	47	89
7	28	73
8	75	98
9	34	56
10	52	75

FIGURA 12.2
Gráfica de dispersión de datos de la tabla 12.1



La primera parte de la ecuación, $\alpha + \beta x$, llamada **recta de medias**, describe el valor promedio de y para un valor determinado de x. El componente de error ϵ permite que cada respuesta individual y se desvíe de la recta de medias en una pequeña cantidad.

Para usar este *modelo probabilístico* para hacer inferencias, es necesario ser más específico acerca de esta "pequeña cantidad", ϵ.

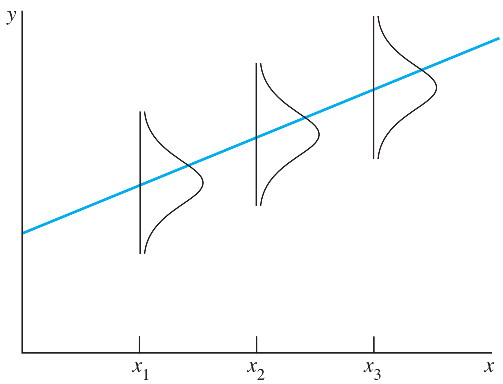
SUPOSICIONES ACERCA DEL ERROR ALEATORIO ϵ

Suponga que los valores de ϵ satisfacen estas condiciones:

- Son independientes en el sentido probabilístico
- Tienen una media de 0 y una varianza común igual a σ^2
- Tienen una distribución normal de probabilidad

Estas suposiciones acerca del error aleatorio ϵ se muestran en la figura 12.3 para tres valores fijos de x, por ejemplo x_1, x_2 y x_3. Observe la similitud entre estas suposiciones y las suposiciones necesarias para las pruebas en los capítulos 10 y 11. Repasaremos estas suposiciones más adelante en este capítulo y daremos algunas herramientas de diagnóstico para que usted las use al verificar la validez de ellas.

FIGURA 12.3
Modelo probabilístico lineal



Recuerde que este modelo está creado para una población de mediciones que por lo general es desconocida, pero puede usar información muestral para estimar los valores de α y β, que son los coeficientes de la recta de medias, $E(y) = \alpha + \beta x$. Estas estimaciones se usan para formar la recta de mejor ajuste para un conjunto de datos determinado, llamado **recta de mínimos cuadrados** o **recta de regresión**. En la siguiente sección repasamos la forma de calcular el punto de cruce y la pendiente de esta recta.

12.3 EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

El procedimiento estadístico para hallar la recta de mejor ajuste para un conjunto de datos bivariados hace, matemáticamente, lo que en forma visual se realiza cuando se mueve una regla hasta que se hayan reducido al mínimo las distancias verticales o desviaciones, de la regla a un conjunto de puntos. La fórmula de la recta de mejor ajuste es

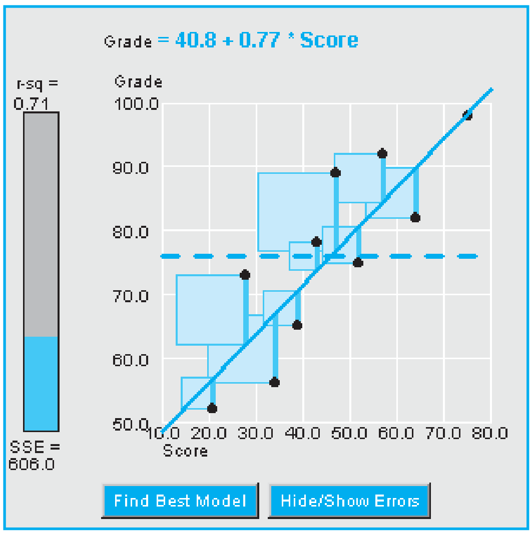
$$\hat{y} = a + bx$$

MI CONSEJO

pendiente = coeficiente de *x*.
cruce con eje *y* = término constante.

donde a y b son las estimaciones de los parámetros α y β de punto de cruce y pendiente, respectivamente. La recta ajustada para los datos de la tabla 12.1 se muestra en el applet **Method of Least Squares** (Método de mínimos cuadrados), figura 12.4. Las rectas verticales rojas (azul claro en la figura 12.4) trazadas de la recta de predicción a cada punto (x_i, y_i) representan las desviaciones de los puntos desde la recta.

FIGURA 12.4
Applet **Method of Least Squares**



Para reducir al mínimo las distancias desde los puntos a la recta ajustada, se puede usar el **principio de mínimos cuadrados**.

PRINCIPIO DE MÍNIMOS CUADRADOS

La recta que reduce al mínimo la suma de cuadrados de las desviaciones de los valores observados de y desde los pronosticados es la **recta de mejor ajuste**. La suma del cuadrado de las desviaciones por lo general se denomina **suma de cuadrados de error** (SSE) y se define como

$$\text{SSE} = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$$

Observe la recta de regresión y los puntos de la figura 12.4. SSE es la suma del cuadrado de las distancias representada por el área de los cuadros amarillos (azul claro en la figura 12.4).

Hallar los valores de a y b, las estimaciones de α y β, usa cálculo diferencial, que está fuera del propósito de este libro. En lugar de derivar sus valores, simplemente presentaremos fórmulas para calcular los valores de a y b, llamados **estimadores de mínimos cuadrados** de α y β. Usaremos una notación que está basada en las **sumas de cuadrados** para las variables del problema de regresión, que es semejante en forma a las sumas de cuadrados empleadas en el capítulo 11. Estas fórmulas se ven diferentes de las fórmulas presentadas en el capítulo 3, pero en realidad son idénticas desde el punto de vista del álgebra.

Usted debe usar el método de entrada de datos para su calculadora científica para introducir los datos muestrales.

- Si su calculadora tiene sólo una función estadística de una variable, todavía puede ahorrar tiempo al hallar las sumas necesarias y sumas de cuadrados.
- Si su calculadora tiene una función estadística de dos variables o si tiene una calculadora graficadora, la calculadora en forma automática guarda todas las sumas y sumas de cuadradas, así como los valores de a, b y el coeficiente de correlación r.
- Asegúrese de consultar el manual de su calculadora para hallar la forma más fácil de obtener los estimadores de mínimos cuadrados.

ESTIMADORES DE MÍNIMOS CUADRADOS DE α Y β

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad \text{y} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

donde las cantidades S_{xy} y S_{xx} están definidas como

$$S_{xy} = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \Sigma x_i y_i - \frac{(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n}$$

y

$$S_{xx} = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = \Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}$$

Observe que la suma de cuadrados de los valores x se encuentra usando la fórmula de cómputo dada en la sección 2.3 y la suma de los productos cruz es el numerador de la *covarianza* definida en la sección 3.4.

EJEMPLO 12.1

Encuentre la recta de predicción de mínimos cuadrados para los datos de la calificación en cálculo de la tabla 12.1.

Solución Use los datos de la tabla 12.2 y el método de introducción de datos en su calculadora científica para hallar las siguientes sumas de cuadrados:

$$S_{xx} = \Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n} = 23\,634 - \frac{(460)^2}{10} = 2474$$

$$S_{xy} = \Sigma x_i y_i - \frac{(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n} = 36\,854 - \frac{(460)(760)}{10} = 1894$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{760}{10} = 76 \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{460}{10} = 46$$

TABLA 12.1 **Cálculos para los datos de la tabla 12.1**

	y_i	x_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
	65	39	1521	2535	4225
	78	43	1849	3354	6084
	52	21	441	1092	2704
	82	64	4096	5248	6724
	92	57	3249	5244	8464
	89	47	2209	4183	7921
	73	28	784	2044	5329
	98	75	5625	7350	9604
	56	34	1156	1904	3136
	75	52	2704	3900	5625
Suma	760	460	23 634	36 854	59 816

Entonces

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1894}{2474} = .76556 \quad \text{y} \quad a = \bar{y} - b\bar{x} = 76 - (.76556)(46) = 40.78424$$

MI CONSEJO

Se puede predecir y para un valor determinado de x al sustituir x en la ecuación para hallar $\hat{y}$.

La recta de regresión de mínimos cuadrados es entonces

$$\hat{y} = a + bx = 40.78424 + .76556x$$

La gráfica de esta recta se ve en la figura 12.4. Ahora se puede usar para predecir y para un valor determinado de x, ya sea consultando la figura 12.4 o sustituyendo el valor apropiado de x en la ecuación. Por ejemplo, si un alumno de primer año obtuvo $x = 50$ en el examen, la calificación pronosticada de cálculo del estudiante es (usando precisión completa de decimales)

$$\hat{y} = a + b(50) = 40.78424 + (.76556)(50) = 79.06$$

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo estar seguro que mis cálculos son correctos?

- Tenga cuidado con los errores de redondeo. Lleve al menos seis cifras significativas y haga redondeo sólo al informar el resultado final.
- Use una calculadora científica o graficadora para hacer todo el trabajo. Casi todas las calculadoras calcularán los valores de a y b si se le introducen correctamente los datos.
- Use un programa de computadora si tiene acceso a ella.
- Siempre grafique los datos y la recta. Si la recta no se ajusta a los puntos, ¡es probable que el usuario tenga un error!

MI APPLET

Se puede usar el applet **Method of Least Squares** (Método de mínimos cuadrados) para hallar los valores de a y b que determinan la *recta de mejor ajuste*, $\hat{y} = a + bx$. La recta horizontal que se ve en la recta $y = \bar{y}$. Use el mouse de su PC para arrastrar la recta y vea que cambia el tamaño de los cuadros amarillos. El problema es hacer el SSE, el área total de los cuadros amarillos (azul claro en la figura 12.4) tan pequeña como sea posible. El valor de SSE es la parte roja de la barra a la izquierda del applet (azul oscuro en la figura 12.4) marcada SSE = ____. Cuando usted piense que ha reducido el SSE al mínimo, haga clic en el botón Find Best Model y ¡vea qué bien lo hizo!

12.4 UN ANÁLISIS DE VARIANZA PARA REGRESIÓN LINEAL

En el capítulo 11 utilizamos el análisis de procedimientos de varianza para dividir la variación total del experimento en partes atribuidas a diversos factores de interés para el experimentador. En un análisis de regresión, la respuesta y está relacionada con la variable independiente x. En consecuencia, la variación total de la variable de respuesta y, dada por

$$\text{SS Total} = S_{yy} = \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{n}$$

está dividida en dos partes:

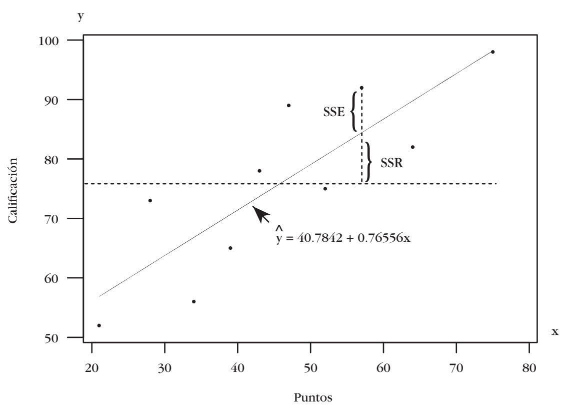
- La SSR (suma de cuadrados para regresión) mide la cantidad de variación explicada al usar la recta de regresión con una variable independiente x
- La SSE (suma de cuadrados de error) mide la variación "residual" en los datos que no está explicada por la variable independiente x

de modo que

$$\text{SS Total} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

Para un valor particular de la respuesta y_i, se puede visualizar este desglose en la variación usando las distancias verticales ilustradas en la figura 12.5. Se puede ver que la SSR es la suma del cuadrado de desviaciones de las diferencias entre la respuesta estimada usando x ($\bar{y}$) y la respuesta estimada usando x (la recta de regresión, $\hat{y}$); la SSE es la suma del cuadrado de diferencias entre la recta de regresión ($\hat{y}$) y el punto y.

FIGURA 12.5
Desviaciones desde la recta ajustada



No es demasiado difícil demostrar algebraicamente que

$$\text{SSR} = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 = \Sigma(a + bx_i - \bar{y})^2 = \Sigma(\bar{y} - b\bar{x} + bx_i - \bar{y})^2 = b^2\Sigma(x_i - \bar{x})^2$$
$$= \left(\frac{(S_{xy})}{S_{xx}}\right)^2 S_{xx} = \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$$

Como SS Total = SSR + SSE, se puede completar la partición al calcular

$$\text{SSE} = \text{SS Total} - \text{SSR} = S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$$

Recuerde del capítulo 11 que cada una de las diversas fuentes de variación, cuando se dividen entre los **grados de libertad** apropiados, da una estimación de la variación del experimento. Estas estimaciones se denominan **mínimos cuadrados**, MS = SS/*df*, y se ven en una tabla ANOVA.

Al examinar los grados de libertad asociados con cada una de estas sumas de cuadrados, observe que el total de grados de libertad para n mediciones es $(n - 1)$. Como la estimación de la recta de regresión, $\hat{y} = a + bx_i = \bar{y} - b\bar{x} + bx_i$, abarca la estimación de *un parámetro adicional* β, hay *un* grado de libertad asociado con la SSR, dejando $(n - 2)$ grados de libertad con la SSE.

Al igual que con todas las tablas ANOVA que hemos estudiado, el error medio cuadrático

$$\text{MSE} = s^2 = \frac{\text{SSE}}{n-2}$$

es un estimador insesgado de la varianza fundamental σ^2. El análisis de la tabla de varianza se ve en la tabla 12.3.

TABLA 12.3 **Análisis de varianza para regresión lineal**

Fuente	*df*	SS	MS
Regresión	1	$\frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$	MSR
Error	$n - 2$	$S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$	MSE
Total	$n - 1$	S_{yy}	

Para los datos de la tabla 12.1, se puede calcular

$$\text{SS Total} = S_{yy} = \Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{n} = 59\,816 - \frac{(760)^2}{10} = 2056$$

$$\text{SSR} = \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}} = \frac{(1894)^2}{2474} = 1449.9741$$

de modo que

$$\text{SSE} = \text{SS Total} - \text{SSR} = 2056 - 1449.9741 = 606.0259$$

y

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2} = \frac{606.0259}{8} = 75.7532$$

El análisis de la tabla de varianza, parte de la *salida de regresión lineal* generada por el *MINITAB*, es la sección inferior sombreada de la salida de computadora de la figura 12.6. Las primeras dos rectas dan la ecuación de la recta de mínimos cuadrados, $\hat{y} = 40.8 + .766x$. Las estimaciones de mínimos cuadrados a y b están dadas con mayor precisión en la columna marcada "Coef". Se pueden hallar instrucciones para generar esta salida impresa en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo.

FIGURA 12.6
Salida impresa *MINITAB* para los datos de la tabla 12.1

Regression Analysis: y versus x

```
The regression equation is
y = 40.8 + 0.766 x

Predictor        Coef     SE Coef        T        P
Constant       40.784       8.507     4.79    0.001
x              0.7656      0.1750     4.38    0.002

S = 8.70363       R-Sq = 70.5%     R-Sq(adj) = 66.8%

Analysis of Variance
Source            DF        SS        MS        F       P
Regression         1    1450.0    1450.0    19.14   0.002
Residual Error     8     606.0      75.8
Total              9    2056.0
```

MI CONSEJO

Busque *a* y *b* en la columna llamada "Coef".

La salida impresa *MINITAB* también da alguna información acerca de la variación en el experimento. Cada una de las estimaciones de mínimos cuadrados, a y b, tiene un error estándar asociado, marcado "SE Coef" en la figura 12.6. Hacia la mitad de la salida impresa se encuentra la mejor estimación insesgada de σ—$S = \sqrt{\text{MSE}} = \sqrt{75.7532} =$ 8.70363—, que mide el **error residual**, la variación no explicada o "sobrante" del experimento. No sorprenderá saber que las estadísticas t y F y sus valores p hallados en la salida impresa se usan para probar hipótesis estadísticas. En la siguiente sección explicamos estas entradas.

12.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

12.1 Grafique la recta correspondiente a la ecuación $y = 2x + 1$ al graficar los puntos correspondientes a $x = 0$, 1 y 2. Dé el punto de cruce con el eje y y la pendiente para la recta.

12.2 Grafique la recta correspondiente a la ecuación $y = -2x + 1$ al graficar los puntos correspondientes a $x = 0$, 1 y 2. Dé el punto de cruce con el eje y y la pendiente para la recta. ¿Cómo se relaciona esta recta con la recta $y = 2x + 1$ del ejercicio 12.1?

12.3 Dé la ecuación y la gráfica para una recta con intersección con el eje y igual a 3 y pendiente igual a -1.

12.4 Dé la ecuación y gráfica para una recta con intersección con el eje y igual a -3 y pendiente igual a 1.

12.5 ¿Cuál es la diferencia entre modelos matemáticos deterministas y probabilistas?

12.6 Se le dan cinco puntos con estas coordenadas:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	1	3	5	5

a. Use el método de entrada de datos en su calculadora científica o graficadora para introducir las $n = 5$ observaciones. Encuentre las sumas de cuadrados y productos cruz, S_{xx}, S_{xy} y S_{yy}.

b. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos.

c. Grafique los cinco puntos y grafique la recta del inciso b). ¿La recta parece ser un buen ajuste para los puntos?

d. Construya la tabla ANOVA para la regresión lineal.

e. Seis puntos tienen estas coordenadas:

12.7 Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos.

x	1	2	3	4	5	6
y	5.6	4.6	4.5	3.7	3.2	2.7

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos.

b. Grafique los seis puntos y grafique la recta. ¿La recta parece ser un buen ajuste para los puntos?

c. Use la recta de mínimos cuadrados para predecir el valor de y cuando $x = 3.5$.

d. Llene los espacios faltantes en el análisis *MINITAB* de la tabla de varianza.

Tabla ANOVA *MINITAB* para el ejercicio 12.7

```
Analysis of Variance

Source            DF          SS          MS
Regression         *         ***      5.4321
Residual Error     *      0.1429         ***
Total              *      5.5750
```

APLICACIONES

12.8 Profesor Asimov El profesor Isaac Asimov fue uno de los escritores más prolíficos de todos los tiempos. Antes de su muerte, escribió casi 500 libros durante una carrera de 40 años. De hecho, cuando su carrera avanzaba, fue incluso más productivo en términos del número de libros escritos en un periodo determinado.[1] Los datos siguientes dan el tiempo, en meses, necesario para escribir sus libros en incrementos de 100:

Número de libros, x	100	200	300	400	490
Tiempo en meses, y	237	350	419	465	507

a. Suponga que el número de libros x y el tiempo en meses y están relacionados linealmente. Encuentre la recta de mínimos cuadrados que relacione y con x.

b. Grafique el tiempo como función del número de libros escritos usando una gráfica de dispersión y grafique la recta de mínimos cuadrados en el mismo papel. ¿Le parece que la recta da un buen ajuste a los puntos?

c. Construya una tabla ANOVA para la regresión lineal.

MIS DATOS EX1209

12.9 Un experimento químico Con el uso de un procedimiento químico llamado *polarografía diferencial de pulsos*, un químico midió la máxima corriente generada (en microamperes) cuando una solución que contenía una cantidad determinada de níquel (en partes por mil millones, ppmm) se agregó a un regulador:[2]

x = Ni (ppmm)	y = Corriente máxima (mA)
19.1	.095
38.2	.174
57.3	.256
76.2	.348
95	.429
114	.500
131	.580
150	.651
170	.722

a. Use el método de entrada de datos en su calculadora para calcular las sumas de cuadrados preliminares y productos cruz, S_{xx}, S_{yy} y S_{xy}.

b. Calcule la recta de regresión de mínimos cuadrados.

c. Grafique los puntos y la recta ajustada. ¿Le parece razonable la suposición de una relación lineal?

d. Use la recta de regresión para predecir la máxima corriente generada cuando una solución, que contenga 100 ppmm de níquel, se agregue al regulador.

e. Construya la tabla ANOVA para la regresión lineal.

12.10 Privación de sueño Se realizó un estudio para determinar los efectos de la privación de sueño en la capacidad de personas para resolver problemas cuando no duermen. Un total de 10 personas participaron en el estudio, dos en cada uno de cinco niveles de privación de sueño: 8, 12, 16, 20 y 24 horas. Después del periodo de privación de sueño, a cada persona se le aplicó un conjunto de problemas adicionales sencillos, registrándose el número de errores. Se obtuvieron estos resultados:

MIS DATOS EX1210

Número de errores, y	8, 6	6, 10	8, 14
Número de errores sin sueño, x	8	12	16

Número de errores, y	14, 12	16, 12
Número de errores sin sueño, x	20	24

a. ¿Cuántos pares de observaciones hay en el experimento?

b. ¿Cuál es el número total de grados de libertad?

c. Complete la salida impresa *MINITAB*.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.10

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = 3.00 + 0.475 x

Predictor       Coef     SE Coef        T        P
Constant       3.000       2.127     1.41    0.196
x                ***      0.1253     3.79    0.005

S = 2.24165    R-Sq = 64.2%    R-Sq(adj) = 59.8%

Analysis of Variance
Source          DF       SS       MS       F        P
Regression      **   72.200   72.200   14.37    0.005
Residual Error  **      ***    5.025
Total           **      ***
```

d. ¿Cuál es la ecuación de predicción de mínimos cuadrados?

e. Use la ecuación de predicción para predecir el número de errores para una persona que no ha dormido durante 10 horas.

12.11 Exámenes de rendimiento El Índice de Rendimiento Académico (API) es una medida de rendimiento escolar que se basa en los resultados del examen Stanford 9. Las calificaciones

MIS DATOS EX1211

van de 200 a 1000, con 800 considerado como objetivo de largo alcance para escuelas. La tabla siguiente muestra el API para ocho escuelas elementales en el condado de Riverside, California, junto con el porcentaje de estudiantes de esa escuela que son considerados Estudiantes del Idioma Inglés (ELL).[3]

Escuela	1	2	3	4	5	6	7	8
API	588	659	710	657	669	641	557	743
ELL	58	22	14	30	11	26	39	6

a. ¿Cuál de las dos variables es la variable independiente y cuál es la dependiente? Explique su selección.

b. Use una gráfica de dispersión para graficar los datos. ¿La suposición de una relación lineal entre x y y es razonable?

c. Suponiendo que x y y estén relacionadas linealmente, calcule la recta de regresión de mínimos cuadrados.

d. Grafique la recta sobre la gráfica de dispersión del inciso b). ¿La recta ajusta por los puntos?

12.12 ¿Qué tan largo es? ¿Qué tan bueno es usted para hacer estimaciones? Para probar la capacidad de una persona para estimar tamaños, se le mostraron 10 diferentes objetos y se le pidió estimar su longitud o diámetro. A continuación se midió el objeto y los resultados se registraron en la tabla siguiente.

MIS DATOS EX1212

Objeto	Estimado (pulgadas)	Real (pulgadas)
Lápiz	7.00	6.00
Plato de comida	9.50	10.25
Libro 1	7.50	6.75
Teléfono celular	4.00	4.25
Fotografía	14.50	15.75
Juguete	3.75	5.00
Cinturón	42.00	41.50
Pinza para ropa	2.75	3.75
Libro 2	10.00	9.25
Calculadora	3.50	4.75

a. Encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados para predecir la medida real como función de la medición estimada.

b. Grafique los puntos y la recta ajustada. ¿Le parece razonable la suposición de una relación lineal?

12.13 Entrevistas de prueba De dos técnicas existentes para evaluación de personal, la primera requiere una entrevista de prueba de dos horas mientras que la segunda se puede completar en menos de una hora. Las puntuaciones para cada una de las 15 personas que tomaron ambas pruebas se dan en la tabla siguiente.

MIS DATOS EX1213

Solicitante	Prueba 1 (x)	Prueba 2(y)
1	75	38
2	89	56
3	60	35
4	71	45
5	92	59
6	105	70
7	55	31
8	87	52
9	73	48
10	77	41
11	84	51
12	91	58
13	75	45
14	82	49
15	76	47

a. Construya una gráfica de dispersión para los datos. ¿Le parece razonable la suposición de linealidad?

b. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos.

c. Use la recta de regresión para predecir la puntuación en la segunda prueba para un solicitante que obtuvo 85 puntos en la prueba 1.

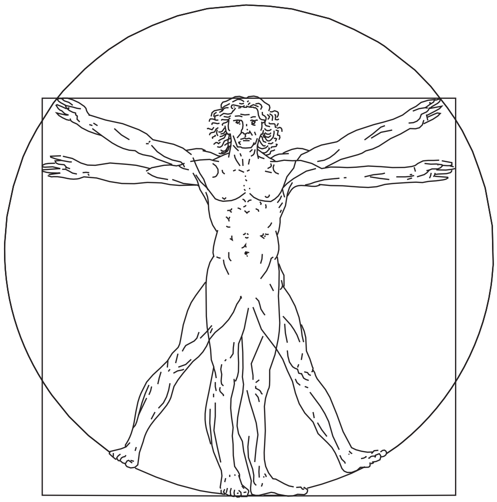
12.14 Entrevistas de prueba, continúa Consulte el ejercicio 12.13. Construya la tabla ANOVA para la regresión lineal que relacione y, la puntuación en la prueba 2, con x, la puntuación en la prueba 1.

12.15 Distancia entre brazos extendidos y estatura Leonardo da Vinci (1452-1519) dibujó la figura de un hombre, indicando que la distancia entre los brazos extendidos de una persona (midiendo por la espalda con los brazos extendidos para formar una "T") es casi igual a la estatura de una persona. Para probar lo dicho por él, medimos ocho personas con los siguientes resultados:

MIS DATOS EX1215

Persona	1	2	3	4
Distancia entre los brazos extendidos (pulgadas)	68	62.25	65	69.5
Estatura (pulgadas)	69	62	65	70

Persona	5	6	7	8
Distancia entre los brazos extendidos (pulgadas)	68	69	62	60.25
Estatura (pulgadas)	67	67	63	62



a. Trace una gráfica de dispersión para distancia entre los brazos extendidos y estatura. Use la misma escala en los ejes horizontal y vertical. Describa la relación entre las dos variables.

b. Si da Vinci estaba en lo correcto y la distancia entre los brazos extendidos de una persona es casi igual a la estatura de esa persona, ¿cuál debe ser la pendiente de la recta de regresión?

c. Calcule la recta de regresión para predecir la estatura con base en la distancia entre los brazos extendidos de una persona. ¿El valor de la pendiente b confirma las conclusiones de usted del inciso b)?

d. Si una persona tiene una distancia de 62 pulgadas entre los brazos extendidos, ¿cuál sería el pronóstico de usted respecto a la estatura de la persona?

MIS DATOS EX1216 **12.16 Fresas** Los datos siguientes se obtuvieron en un experimento que relacionaba la variable dependiente y (textura de fresas), con x (temperatura codificada de almacenamiento).

x	−2	−2	0	2	2
y	4.0	3.5	2.0	0.5	0.0

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos.

b Grafique los puntos y grafique la recta de mínimos cuadrados como prueba de sus cálculos.

c. Construya la tabla ANOVA.

12.5 PRUEBA DE LA UTILIDAD DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL

Al considerar la regresión lineal, uno se puede hacer dos preguntas:

- ¿La variable dependiente x es útil para predecir la variable de respuesta y?
- Si es así, ¿qué tan bien funciona?

Esta sección examina varias pruebas estadísticas y medidas que le ayudarán a tener algunas respuestas. Una vez que haya determinado que el modelo está funcionando, puede entonces usarlo para predecir la respuesta y para un valor determinado de x.

Inferencias respecto a β, la pendiente de la recta de medias

¿La recta de regresión de mínimos cuadrados es útil? Es decir, ¿la ecuación de regresión que utiliza información dada por x es sustancialmente mejor que la pronosticadora simple $\bar{y}$ que no se apoya en x? Si la variable independiente x *no es útil* en el modelo de población $y = \alpha + \beta x + \epsilon$, entonces el valor de y no cambia para valores diferentes de x. La única forma en que esto ocurre para todos los valores de x es cuando la pendiente β de la recta de medias es igual a 0. Esto indicaría que la relación entre y y x no es lineal, de modo que la pregunta inicial acerca de la utilidad de la variable independiente x se puede expresar también como: ¿Hay una relación entre x y y?

Se puede contestar esta pregunta usando ya sea una prueba de hipótesis o un intervalo de confianza para β. Estos procedimientos están basados en la distribución muestral de b, el estimador muestral de la pendiente β. Se puede demostrar que, si las suposiciones acerca del error aleatorio ϵ son válidas, entonces el estimador b tiene una distribución normal en muestreo repetido con media

$$E(b) = \beta$$

y error estándar dado por

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{S_{xx}}}$$

donde σ^2 es la varianza del error aleatorio ϵ. Como el valor de σ^2 se estima con $s^2 = \text{MSE}$, se pueden basar inferencias en la estadística dada por

$$t = \frac{b - \beta}{\sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}}$$

que tiene una distribución t con $df = (n - 2)$, los grados de libertad asociados con MSE.

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO A LA PENDIENTE DE UNA RECTA

1. Hipótesis nula: $H_0 : \beta = \beta_0$
2. Hipótesis alternativa:

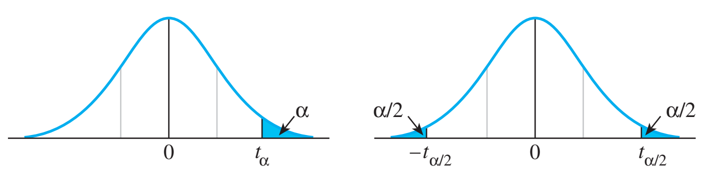
Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \beta > \beta_0$	$H_a : \beta \neq \beta_0$
(o $\beta < \beta_0$)	

3. Estadística de prueba: $t = \dfrac{b - \beta_o}{\sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}}$

   Cuando se satisfacen las suposiciones dadas en la sección 12.2, la estadística de prueba tendrá una distribución t de Student con $(n - 2)$ grados de libertad.

4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$t > t_\alpha$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$
(o $t < -t_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa sea $H_a : \beta < \beta_0$)	
o cuando valor $p < \alpha$	



Los valores de t_α y $t_{\alpha/2}$ se pueden hallar usando la tabla 4 del apéndice I o el applet ***t* Probabilities**. Use los valores de t correspondientes a $(n - 2)$ grados de libertad.

EJEMPLO 12.2

Determine si hay una relación lineal significativa entre las calificaciones en cálculo y las puntuaciones de examen de la tabla 12.1. Pruebe al nivel de significancia de 5%.

Solución Las hipótesis a probar son

$$H_0 : \beta = 0 \quad \text{contra} \quad H_a : \beta \neq 0$$

y el valor observado de la estadística de prueba se calcula como

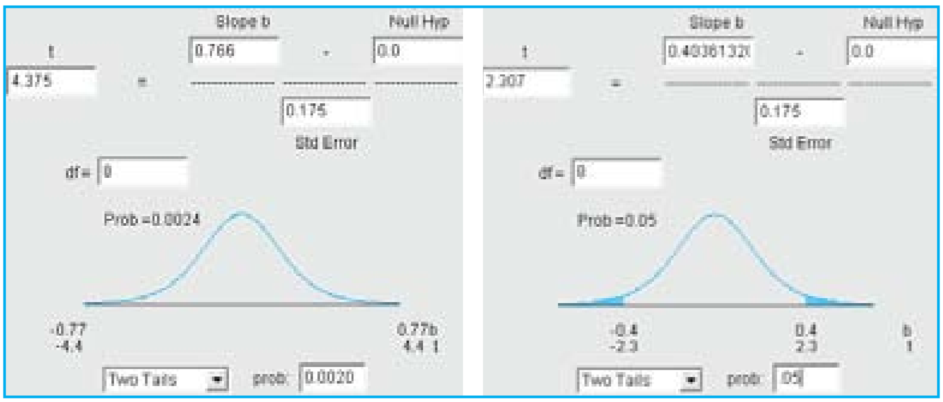
$$t = \frac{b - 0}{\sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}} = \frac{.7656 - 0}{\sqrt{75.7532/2474}} = 4.38$$

con $(n - 2) = 8$ grados de libertad. Con $\alpha = .05$, se puede rechazar H_0 cuando $t > 2.306$ o $t < -2.306$. Como el valor observado de la estadística de prueba cae en la región de rechazo, H_0 es rechazada y se puede concluir que hay una relación lineal significativa entre las calificaciones en cálculo y la puntuación de examen para la población de estudiantes de primer año de universidad.

MI APPLET

Se puede usar el applet ***t*-Test for the Slope** que se ve en la figura 12.7 para hallar valores p o regiones de rechazo para esta prueba. Primero se debe calcular el error estándar $\text{SE} = \sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}$, teclear su valor en la caja marcada "Std Error", y presionar "Enter".

FIGURA 12.7
Applet *t*-Test for the Slope



- Si se introduce el valor de b en la fórmula en la parte superior del applet y se presiona "Enter", el applet calculará la estadística de prueba y su valor p de una o de dos colas.
- Si se introduce el nivel de significancia α en la caja marcada "prob:" y se selecciona la opción "Area to the Right" o "Two Tails" de la lista descendente, el applet calculará el valor positivo de t necesario para rechazar H_0. (También se puede usar el applet **Student's *t* Probabilities** para hallar los valores críticos.)

¿Cuál es el valor p para la prueba efectuada en el ejemplo 12.2? ¿Este valor p confirma nuestras conclusiones?

Otra forma de hacer inferencias acerca del valor de β es construir un intervalo de confianza para β y examinar el rango de posibles valores para β.

UN INTERVALO DE CONFIANZA $(1 - \alpha)100\%$ PARA β

$$b \pm t_{\alpha/2}(\text{SE})$$

donde $t_{\alpha/2}$ está basada en $(n - 2)$ grados de libertad y

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}} = \sqrt{\frac{\text{MSE}}{S_{xx}}}$$

EJEMPLO 12.3

Encuentre una estimación de intervalo de confianza de 95% de la pendiente β para los datos de las calificaciones en cálculo de la tabla 12.1.

Solución Sustituyendo valores previamente calculados en

$$b \pm t_{.025}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{S_{xx}}}$$

tendremos

$$.766 \pm 2.306\sqrt{\frac{75.7532}{2474}}$$

$$.766 \pm .404$$

El intervalo de confianza de 95% resultante es .362 a 1.170. Como el intervalo no contiene 0, se puede concluir que el verdadero valor de β no es 0 y se puede rechazar la hipótesis nula $H_0 : \beta = 0$ a favor de $H_a : \beta \neq 0$, conclusión que está de acuerdo con los hallazgos del ejemplo 12.2. Además, la estimación del intervalo de confianza indica que hay un aumento desde sólo .4 hasta 1.2 puntos en una puntuación de examen de cálculo por cada aumento de 1 punto en la puntuación del examen de aprovechamiento.

Si usted utiliza un programa de cómputo para hacer un análisis de regresión, encontrará la estadística t y su valor p en la salida impresa. Observe la salida impresa *MINITAB* del análisis de regresión que se reproduce en la figura 12.8. En la segunda parte de la salida impresa, encontrará las estimaciones de mínimos cuadrados a ("Constante") y b ("x") en la columna marcada "Coef", sus errores estándar ("SE Coef"), el valor calculado de la estadística t ("T") empleada para probar la hipótesis de que el parámetro es igual a 0 y su valor p ("P"). La prueba t para regresión significativa, $H_0 : \beta = 0$, tiene un valor p de $P = .002$ y la hipótesis nula es rechazada, como en el ejemplo 12.2. ¿Esto concuerda con el valor p hallado usando el applet ***t*-Test for Slope** de la figura 12.7? En cualquier caso, hay una relación lineal significativa entre x y y.

FIGURA 12.8
Salida impresa *MINITAB* para los datos de calificaciones en cálculo

MI CONSEJO

Busque el error estándar de *b* en la columna marcada "SE Coef".

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = 40.8 + 0.766 x

Predictor        Coef     SE Coef          T        P
Constant       40.784       8.507       4.79    0.001
x              0.7656      0.1750       4.38    0.002

S = 8.70363     R-Sq = 70.5%     R-Sq(adj) = 66.8%

Analysis of Variance
Source            DF          SS          MS          F        P
Regression         1      1450.0      1450.0      19.14    0.002
Residual Error     8       606.0        75.8
Total              9      2056.0
```

El análisis de varianza de la prueba *F*

MI CONSEJO

Las pruebas F de ANOVA siempre son de una cola (cola superior).

La parte del análisis de varianza de la salida impresa de la figura 12.8 muestra una estadística F dada por

$$F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = 19.14$$

con grado de libertad 1 en el numerador y $(n - 2) = 8$ grados de libertad en el denominador. Esto es una *estadística equivalente de prueba* que también se puede usar para probar la hipótesis $H_0 : \beta = 0$. Observe que, dentro del error de redondeo, el valor de F es igual a t^2 con valor p idéntico. En este caso, si se usa una precisión de cinco lugares decimales antes de redondeo, se encuentra que $t^2 = (.76556/.17498)^2 = (4.37513)^2 = 19.14175 \approx 19.14 = F$ como se da en la salida impresa. Esto no es por casualidad y resulta del hecho de que el cuadrado de una estadística t con df grados de libertad tiene la misma distribución que una estadística F con grados de libertad 1 en el numerador y df en el denominador. La prueba F es una prueba más general de la utilidad del modelo y se puede usar cuando el modelo tenga más de una variable independiente.

Medir la fuerza de la relación: el coeficiente de determinación

¿Qué tan bien se ajusta el modelo de regresión? Para contestar esta pregunta, se puede usar una medida relacionada con el *coeficiente de correlación* r, introducido en el capítulo 3. Recuerde que

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \qquad \text{para } -1 \le r \le 1$$

donde s_{xy}, s_x y s_y se definieron en el capítulo 3 y las diversas sumas de cuadrados se definieron en la sección 12.4.

La suma de cuadrados para regresión, SSR, en el análisis de varianza, mide la parte de la variación total SS Total $= S_{yy}$, que puede ser explicada por la regresión de y en x. La parte restante, SSE, es la variación "no explicada" atribuida al error aleatorio. Una forma de medir la fuerza de la relación entre la variable de respuesta y y la variable de predicción x es calcular el **coeficiente de determinación**, la proporción de la variación total que es explicada por la regresión de y en x. Para los datos de calificaciones en cálculo, esta proporción es igual a

MI CONSEJO

En las salidas impresas de computadora, r^2 a menudo es dado como un **porcentaje** más que como una proporción.

$$\frac{\text{SSR}}{\text{SS Total}} = \frac{1450}{2056} = .705 \quad \text{o} \quad 70.5\%$$

Puesto que SS $= S_{yy}$ y SSR $= \dfrac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$, se puede escribir

$$\frac{\text{SSR}}{\text{SS Total}} = \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}S_{yy}} = \left(\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}\right)^2 = r^2$$

Por tanto, el coeficiente de determinación, que fue calculado como SSR/SS Total, es simplemente el cuadrado del coeficiente de correlación r. Es la entrada marcada "R-Sq" en la figura 12.8.

Recuerde que la tabla del análisis de varianza aísla la variación debida a regresión (SSR) de la variación total del experimento. Al hacer esto se reduce la cantidad de *variación aleatoria* del experimento, ahora medida por SSE en lugar de SS Total. En este contexto, el **coeficiente de determinación**, $\boldsymbol{r^2}$, se puede definir como sigue:

MI CONSEJO

r^2 se denomina "R-Sq" en la salida impresa *MINITAB.*

Definición El **coeficiente de determinación** r^2 se puede interpretar como el porcentaje de reducción en la variación total en el experimento obtenido al usar la recta de regresión $\hat{y} = a + bx$, en lugar de ignorar x y usar la media muestral $\bar{y}$ para predecir la variable de respuesta y.

Para los datos de calificaciones en cálculo, una reducción de $r^2 = .705$ o sea 70.5% es sustancial. El modelo de regresión está funcionando muy bien.

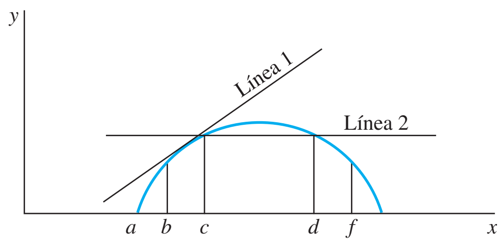
Interpretación de los resultados de una regresión significativa

Una vez que usted haya efectuado la prueba t o la prueba F para determinar la significancia de la regresión lineal, con todo cuidado debe interpretar sus resultados. La pendiente β de la recta de medias se estima con base en datos de sólo una región de observación en particular. Incluso si no rechaza la hipótesis nula de que la pendiente de la recta es igual a 0, no necesariamente significa que y y x no estén relacionadas. Puede ser que haya cometido un error tipo II, declarando falsamente que la pendiente es 0 y que x y y no están relacionadas.

Ajuste del modelo erróneo

Puede ocurrir que y y x estén perfectamente relacionadas en una forma no lineal, como se ve en la figura 12.9. A continuación veamos tres posibilidades:

FIGURA 12.9
Relación curvilínea



- Si se tomaron observaciones sólo dentro del intervalo $b < x < c$, la relación aparecería lineal con pendiente positiva.
- Si se tomaron observaciones sólo dentro del intervalo $d < x < f$, la relación aparecería lineal con pendiente negativa.
- Si se tomaron observaciones sobre el intervalo $c < x < d$, la recta estaría ajustada con una pendiente cercana a 0, lo cual indica que no hay relación lineal entre y y x.

Para el ejemplo que se ilustra en la figura 12.9, ninguna recta describe con precisión la verdadera relación entre x y y, que es en realidad una *relación no curvilínea.* En este caso, hemos escogido un *modelo erróneo* para describir la relación. A veces este tipo de error se puede detectar usando gráficas residuales, que es el tema de la sección 12.7.

MI CONSEJO

Es peligroso tratar de predecir valores de y fuera del rango de los datos ajustados.

Extrapolación

Un problema serio es aplicar los resultados de un análisis de regresión lineal a valores de x que *no estén incluidos* dentro del rango de los datos ajustados. Esto se llama **extrapolación** y puede llevar a errores graves en la predicción, como se ve para la línea 1 de la figura 12.9.

Los resultados de una predicción serían buenos en el intervalo $b < x < c$ pero sobreestimarían gravemente los valores de y para $x > c$.

Causalidad

Cuando haya una regresión significativa de y y x, es tentador concluir que *x causa a y*. No obstante, es posible que una o más variables desconocidas que ni siquiera se hayan medido y que no estén incluidas en el análisis puedan estar causando la relación observada. En general, el estadístico informa los resultados de un análisis pero deja las conclusiones respecto a la causalidad a científicos e investigadores que son expertos en estos campos de actividad. Estos expertos están mejor preparados para tomar esas decisiones.

12.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

12.17 Consulte el ejercicio 12.6. Los datos se reproducen a continuación.

x	−2	−1	0	1	2
y	1	1	3	5	5

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que y y x están relacionadas linealmente? Pruebe la hipótesis de que $\beta = 0$ al nivel de significancia de 5%.

b. Use la tabla ANOVA del ejercicio 12.6 para calcular $F = \text{MSR/MSE}$. Verifique que el cuadrado de la estadística t empleada en la parte a) es igual a F.

c. Compare el valor crítico de dos colas para la prueba t del inciso a) con el valor crítico para F con $\alpha = .05$. ¿Cuál es la relación entre los valores críticos?

12.18 Consulte el ejercicio 12.17. Encuentre un intervalo de confianza para la pendiente de la recta. ¿Qué significa la frase "95% de confianza"?

12.19 Consulte el ejercicio 12.7. Los datos, junto con el análisis *MINITAB* de la tabla de varianza se reproducen a continuación.

x	1	2	3	4	5	6
y	5.6	4.6	4.5	3.7	3.2	2.7

Tabla *MINITAB* ANOVA para el ejercicio 12.19

Análisis de regresión: y *versus* x

```
Analysis of Variance
Source            DF      SS       MS       F       P
Regression         1  5.4321   5.4321  152.10   0.000
Residual Error     4  0.1429   0.0357
Total              5  5.5750
```

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que y y x están relacionados linealmente? Use la información de la salida impresa *MINITAB* para contestar esta pregunta al nivel de significancia de 1%.

b. Calcule el coeficiente de determinación r^2. ¿Qué información da este valor acerca de la utilidad del modelo lineal?

APLICACIONES

MIS DATOS EX1220

12.20 Contaminación del aire Se diseñó un experimento para comparar varios tipos diferentes de monitores de la contaminación del aire.[4] Un monitor se inició y a continuación se expuso a diferentes concentraciones de ozono, que iban de 15 a 230 partes por millón (ppm) durante periodos de 8 a 72 horas. Los filtros del monitor se analizaron en seguida y se midió la cantidad (en microgramos) de nitrato de sodio (NO_3) registrada por el monitor. Los resultados para un tipo de monitor se dan en la tabla siguiente.

Ozono, x (ppm/h)	.8	1.3	1.7	2.2	2.7	2.9
NO_3, y (μg)	2.44	5.21	6.07	8.98	10.82	12.16

a. Encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados que relacione la respuesta del monitor a la concentración de ozono.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que hay una relación lineal entre la concentración de ozono y la cantidad de nitrato de sodio detectada?

c. Calcule r^2. ¿Qué nos dice este valor acerca de la efectividad del análisis de regresión lineal?

MIS DATOS EX1221

12.21 El costo de volar ¿Cómo está relacionado el costo de un viaje en avión con la duración del viaje? La tabla siguiente muestra el promedio de la tarifa en primera clase, pagada por clientes de American Airlines en cada una de las 18 rutas aéreas de mayor movimiento en Estados Unidos.[5]

Ruta	Distancia (millas)	Costo
Dallas–Austin	178	$125
Houston–Dallas	232	123
Chicago–Detroit	238	148
Chicago–San Luis	262	136
Chicago–Cleveland	301	129
Chicago–Atlanta	593	162
Nueva York–Miami	1092	224
Nueva York–San Juan	1608	264
Nueva York–Chicago	714	287
Chicago–Denver	901	256
Dallas–Salt Lake	1005	365
Nueva York–Dallas	1374	459
Chicago–Seattle	1736	424
Los Ángeles–Chicago	1757	361
Los Ángeles–Atlanta	1946	309
Nueva York–Los Ángeles	2463	444
Los Ángeles–Honolulu	2556	323
Nueva York–San Francisco	2574	513

a. Si usted desea estimar el costo de un vuelo, basado en la distancia recorrida, ¿cuál variable es la variable de respuesta y cuál es la variable independiente de predicción?

b. Suponga que hay una relación lineal entre costo y distancia. Calcule la recta de regresión de mínimos cuadrados que describa el costo como una función lineal de la distancia.

c. Grafique los puntos y la recta de regresión. ¿Le parece que la recta ajusta los datos?

d. Use las pruebas estadísticas y medidas apropiadas para explicar la utilidad del modelo de regresión para predecir el costo.

12.22 Profesor Asimov, continúa Consulte los datos del ejercicio 12.8, que relacionan x, el número de libros escritos por el profesor Isaac Asimov, con y, el número de meses que le tomó escribir sus libros (en incrementos de 100). Los datos se reproducen a continuación.

Número de libros, x	100	200	300	400	490
Tiempo en meses, y	237	350	419	465	507

a. ¿Los datos apoyan la hipótesis de que $\beta = 0$? Use el método del valor p, enlazando el valor p usando la tabla 4 del apéndice I o hallando el valor p exacto usando el applet ***t*-Test for the Slope**. Explique sus conclusiones en términos prácticos.

b. Use la tabla ANOVA del ejercicio 12.8, inciso c), para calcular el coeficiente de determinación r^2. ¿Qué reducción de porcentaje en la variación total se alcanza usando el modelo de regresión lineal?

c. Grafique los datos o consulte la gráfica del ejercicio 12.8, inciso b). ¿Los resultados de los incisos a) y b) indican que el modelo da un buen ajuste para los datos? ¿Hay algunas suposiciones que pueden haber sido violadas al ajustar el modelo lineal?

12.23 Consulte el experimento de privación de sueño descrito en el ejercicio 12.10 y el conjunto de datos EX1210. Los datos y la salida impresa *MINITAB* se reproducen a continuación.

Número de errores, y	8, 6	6, 10	8, 14
Número de horas sin sueño, x	8	12	16

Número de errores, y	14, 12	16, 12
Número de horas sin sueño, x	20	24

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.23

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = 3.00 + 0.475 x

Predictor      Coef   SE Coef      T       P
Constant      3.000     2.127   1.41   0.196
x            0.4750    0.1253   3.79   0.005

S = 2.24165   R-Sq = 64.2%   R-Sq(adj) = 59.8%

Analysis of Variance

Source          DF       SS       MS       F       P
Regression       1   72.200   72.200   14.37   0.005
Residual Error   8   40.200    5.025
Total            9  112.400
```

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el número de errores está linealmente relacionado con el número de horas sin sueño? Identifique las dos estadísticas de prueba en la salida impresa que puedan usarse para contestar esta pregunta.

b. ¿Esperaría usted que la relación entre y y x sea lineal si x varió en un rango más amplio (por ejemplo, $x = 4$ a $x = 48$)?

c. ¿Cómo describe la fuerza de la relación entre y y x?

d. ¿Cuál es la mejor estimación de la variación poblacional común σ^2?

e. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la pendiente de la recta.

12.24 Fresas II Los datos siguientes (ejercicio 12.16 y conjunto de datos EX1216) se obtuvieron en un experimento que relacionaba la variable dependiente, y (textura de fresas), con x (temperatura de almacenamiento codificada). Use la información del ejercicio 12.16 para contestar las preguntas siguientes:

x	−2	−2	0	2	2
y	4.0	3.5	2.0	0.5	0.0

a. ¿Cuál es la mejor estimación de σ^2, la varianza del error aleatorio ε?

b. ¿Los datos indican que la textura y la temperatura de almacenamiento están relacionadas linealmente? Use $\alpha = .05$.

c. Calcule el coeficiente de determinación, r^2.

d. ¿De qué valor es el modelo *lineal* para aumentar la precisión de predicción cuando se compara con la variable de predicción $\bar{y}$?

MIS DATOS EX1225

12.25 Laptops y aprendizaje En el ejercicio 1.61 describimos un experimento informal realizado en la Secundaria Académica McNair en Jersey City, Nueva Jersey. Se estudiaron dos grupos de primer año de álgebra, uno de los cuales utilizaba computadoras laptop en la escuela y en casa, en tanto que el otro grupo no las utilizaba. En cada grupo, a los estudiantes se les dio una encuesta al principio y al final del semestre, que medía su nivel tecnológico. Se registraron las calificaciones para la encuesta del final de semestre (x) y el examen final (y) para el grupo con laptop.[6] Los datos y la salida impresa *MINITAB* se muestran aquí.

Estudiante	Después de examen	Examen final	Estudiante	Después de examen	Examen final
1	100	98	11	88	84
2	96	97	12	92	93
3	88	88	13	68	57
4	100	100	14	84	84
5	100	100	15	84	81
6	96	78	16	88	83
7	80	68	17	72	84
8	68	47	18	88	93
9	92	90	19	72	57
10	96	94	20	88	83

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = -26.8 + 1.26 x

Predictor      Coef    SE Coef      T       P
Constant     -26.82      14.76  -1.82   0.086
x            1.2617     0.1685   7.49   0.000

S = 7.61912   R-Sq = 75.7%   R-Sq(adj) = 74.3%

Analysis of Variance
Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       1  3254.0  3254.0  56.05  0.000
Residual Error  18  1044.9    58.1
Total           19  4299.0
```

a. Construya una gráfica de dispersión para los datos. ¿Le parece razonable la suposición de linealidad?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta de regresión empleada para predecir la calificación del examen final como función de la calificación antes del examen?

c. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la calificación del examen final está linealmente relacionada con la calificación después del examen? Use $\alpha = .01$.

d. Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la pendiente de la recta de regresión.

12.26 Laptops y aprendizaje, continúa Consulte el ejercicio 12.25.

a. Use la salida impresa *MINITAB* para hallar el valor del coeficiente de determinación, r^2. Demuestre que $r^2 =$ SSR/SS Total.

b. ¿Qué reducción de porcentaje en la variación total se obtiene al usar el modelo de regresión lineal?

12.27 Distancia entre brazos extendidos y estatura II En el ejercicio 12.15 (conjunto de datos EX1215), medimos la distancia entre brazos extendidos y estatura de ocho personas con los siguientes resultados:

Persona	1	2	3	4
Distancia entre brazos extendidos (pulgadas)	68	62.25	65	69.5
Estatura (pulgadas)	69	62	65	70

Persona	5	6	7	8
Distancia entre brazos extendidos (pulgadas)	68	69	62	60.25
Estatura (pulgadas)	67	67	63	62

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que hay una relación lineal entre distancia y estatura? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

b. Construya un intervalo de confianza de 95% para la pendiente de la recta de medias, β.

c. Si Leonardo da Vinci tenía razón y la distancia entre los brazos extendidos de una persona es casi igual a la estatura de esa persona, la pendiente de la recta de regresión es aproximadamente igual a 1. ¿El intervalo de confianza construido en el inciso b) confirma esta suposición? Explique.

12.6 HERRAMIENTAS DE DIAGNÓSTICO PARA VERIFICAR SUPOSICIONES DE LA REGRESIÓN

Aun cuando ya hemos determinado, con el uso de la prueba t para la pendiente (o la prueba F ANOVA) y el valor de r^2, que x es útil para predecir el valor de y, los resultados de un análisis de regresión son válidos sólo cuando los datos satisfacen las suposiciones de regresión necesarias.

SUPOSICIONES DE REGRESIÓN

- La relación entre y y x debe ser lineal, dada por el modelo

$$y = \alpha + \beta x + \epsilon$$

- Los valores del término de error aleatorio ϵ: 1) son independientes, 2) tienen una media de 0 y una varianza común σ^2, independiente de x, y 3) están normalmente distribuidos.

Como estas suposiciones son bastante similares a las presentadas en el capítulo 11 para un análisis de varianza, no debe sorprender hallar que las **herramientas de diagnóstico** para verificar estas suposiciones son las mismas que las que empleamos en ese capítulo. Estas herramientas incluyen el análisis del **error residual**, la variación no explicada en cada observación una vez que la variación explicada por el modelo de regresión se haya eliminado.

Términos de error dependientes

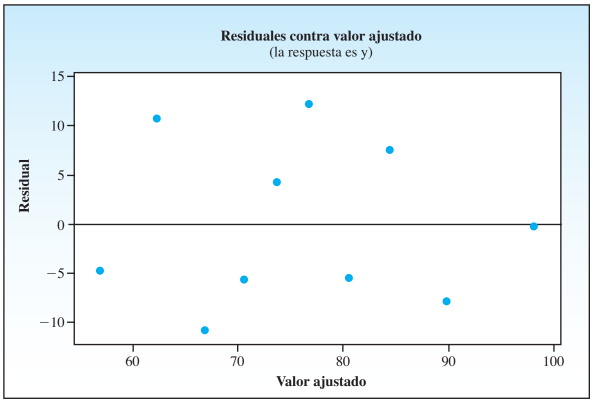
Es frecuente que los términos de error sean dependientes cuando las observaciones se recolectan a intervalos de tiempo regulares. Cuando éste es el caso, las observaciones forman una **serie de tiempo** cuyos términos de error están correlacionados. Esto, a su vez, causa un sesgo en las estimaciones de parámetros de modelo. Los datos de la serie de tiempo deben ser analizados usando métodos de serie de tiempo. Una explicación del análisis de una serie de tiempo se encuentra en el texto *Statistics for Management and Economics*, 7ª edición, de Mendenhall, Beaver y Beaver.

Gráficas residuales

Las otras suposiciones de regresión se pueden verificar con el uso de **gráficas residuales**, que son bastante complicadas de hacer manualmente pero fáciles si se grafican en computadora.

En regresión lineal simple, se puede usar la **gráfica de residuales contra ajuste** para verificar una varianza constante así como asegurarse que el modelo lineal en verdad sea adecuado. Esta gráfica debe estar libre de modelos y aparecer como dispersión aleatoria de puntos alrededor de 0 en el eje vertical, con aproximadamente la misma dispersión vertical para todos los valores de $\hat{y}$. Una propiedad de los residuales es que suman 0 y, por tanto, tienen una media muestral de 0. La gráfica de los residuales *versus* ajuste para el ejemplo de las calificaciones en cálculo se ve en la figura 12.10. No hay modelos aparentes en esta gráfica residual, lo cual indica que las suposiciones del modelo parecen estar satisfechas para estos datos.

FIGURA 12.10
Gráfica de los residuales contra $\hat{y}$ para el ejemplo 12.1



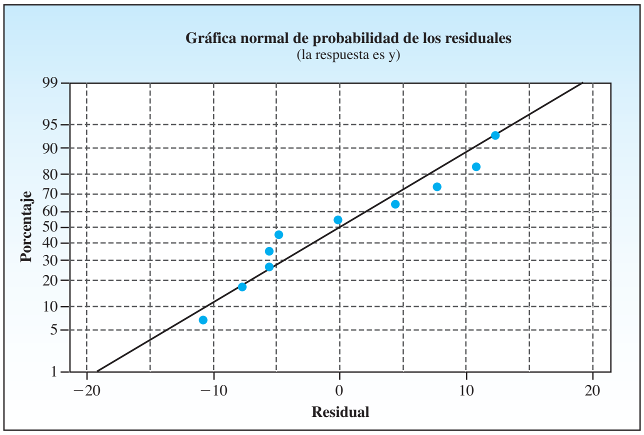
Recuerde del capítulo 11 que la **gráfica normal de probabilidad** es una gráfica que traza los residuales contra el valor esperado del residual si hubiera venido de una distribución normal. Cuando los residuales estén distribuidos normalmente o que en forma aproximada estén así distribuidos, la gráfica debe aparecer como una recta con pendiente hacia arriba. La gráfica normal de probabilidad para los residuales del ejemplo 12.1 está en la figura 12.11. Con la excepción de los puntos graficados cuarto y quinto, los puntos restantes parecen estar casi sobre la recta. Esta gráfica no es rara y no indica anormalidad fundamental. Las violaciones más serias de la suposición de normalidad por lo general aparecen en las colas de la distribución porque aquí es donde la distribución normal difiere de la mayor parte de otros tipos de distribuciones con media y medida de dispersión similares. En consecuencia, la curvatura en cualquiera de los extremos o en ambos de la gráfica normal de probabilidad indica no normalidad.

MI CONSEJO

Residuales *versus* ajustes ⇔ dispersión aleatoria.

Gráfica normal ⇔ línea recta, pendiente ascendente.

FIGURA 12.11
Gráfica normal de probabilidad de residuales para el ejemplo 12.1



12.6 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

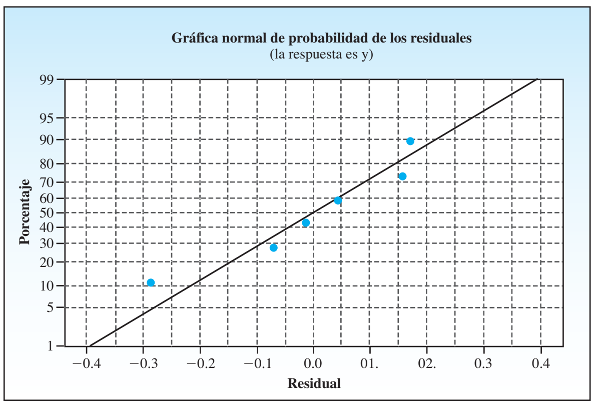
12.28 ¿Cuál gráfica de diagnóstico se puede usar para determinar si los datos satisfacen la suposición de normalidad? ¿Cómo se vería la gráfica para residuales normales?

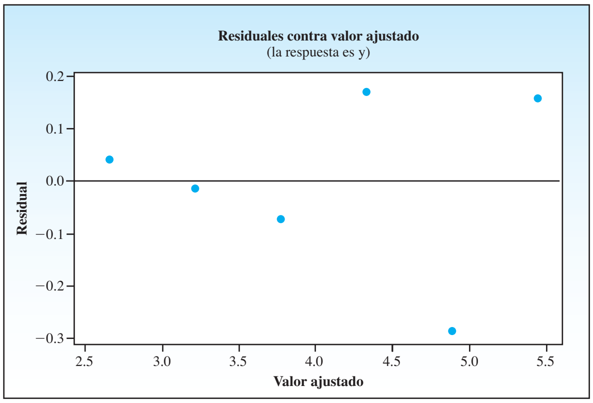
12.29 ¿Cuál gráfica de diagnóstico se puede usar para determinar si se ha usado el modelo incorrecto? ¿Cómo se vería la gráfica si se ha usado el modelo incorrecto?

12.30 ¿Cuál gráfica de diagnóstico se puede usar para determinar si se ha violado la suposición de igual varianza? ¿Cómo se vería la gráfica cuando las varianzas son iguales para todos los valores de x?

12.31 Consulte los datos del ejercicio 12.7. La gráfica normal de probabilidad y las gráficas de residuales contra valores ajustados generadas por *MINITAB* se muestran a continuación. ¿Le parece que alguna de las suposiciones de regresión ha sido violada? Explique.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.31

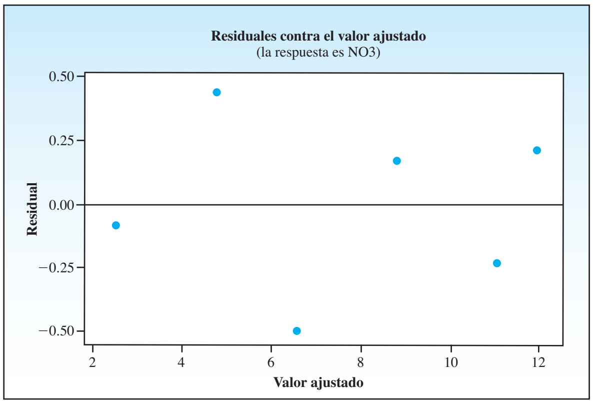


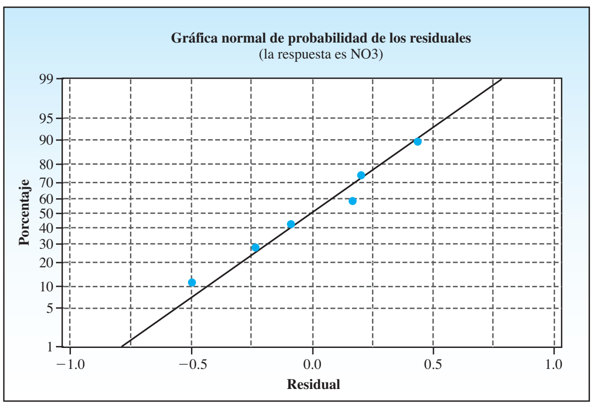


APLICACIONES

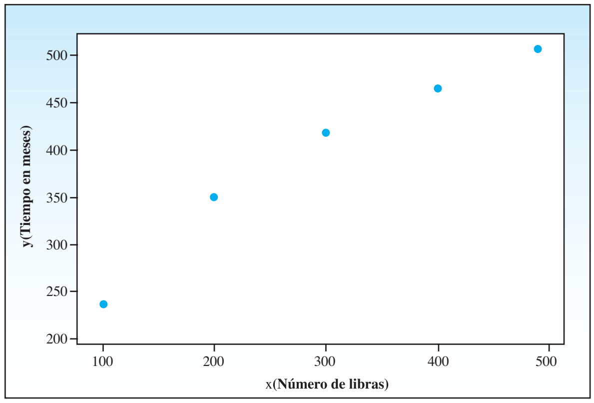
12.32 Contaminación del aire Consulte el ejercicio 12.20, en el que se registró la respuesta al ozono de un monitor de contaminación del aire, para varias concentraciones diferentes de ozono. Use gráficas residuales *MINITAB* para comentar sobre la validez de las suposiciones de regresión.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.32





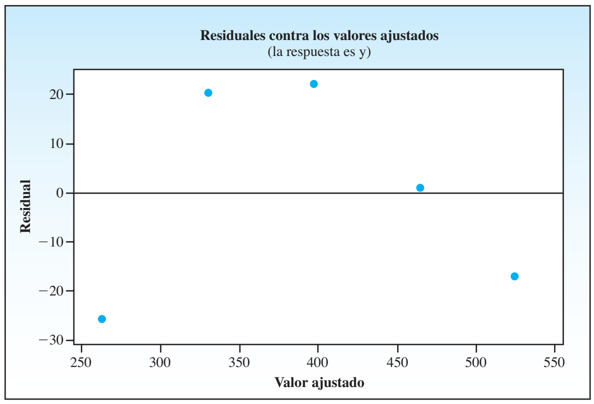
12.33 Profesor Asimov, otra vez Consulte el ejercicio 12.8, en el que el número x de libros escritos por Isaac Asimov está relacionado con el número de meses y que tardó en escribirlos. A continuación, una gráfica de los datos.

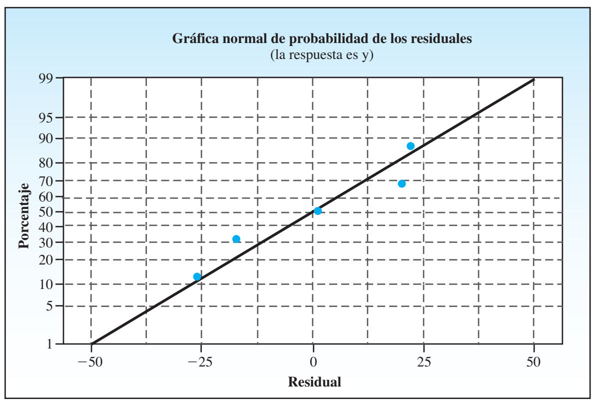


a. ¿Se puede ver un modelo que no sea una relación lineal en la gráfica original?

b. El valor de r^2 para estos datos es .959. ¿Qué dice esto acerca del ajuste de la recta de regresión?

c. Vea las siguientes gráficas de diagnóstico para estos datos. ¿Se ve algún patrón en los residuales? ¿Sugiere esto que la relación entre el número de meses y el número de libros escritos es algo que no sea lineal?





12.34 Laptops y aprendizaje, otra vez Consulte los datos dados en el ejercicio 12.25. La salida impresa *MINITAB* se reproduce aquí.

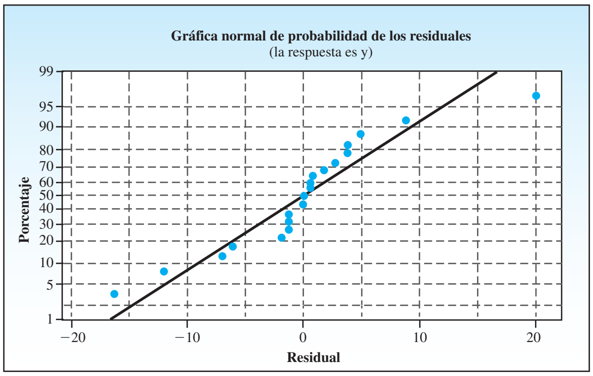
Análisis de regresión: y *versus* x

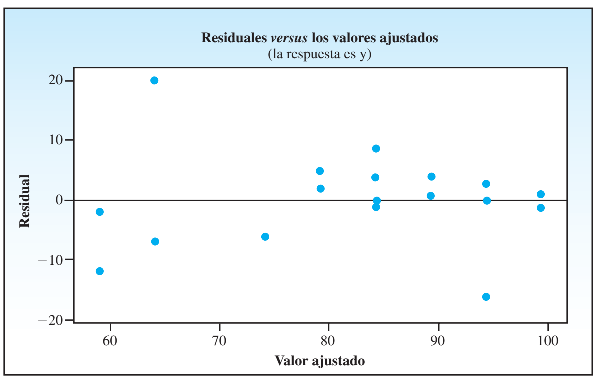
```
The regression equation is
y = -26.8 + 1.26 x

Predictor       Coef    SE Coef       T       P
Constant      -26.82      14.76   -1.82   0.086
x             1.2617     0.1685    7.49   0.000

S = 7.61912    R-Sq = 75.7%   R-Sq(adj) = 74.3%

Analysis of Variance
Source            DF        SS        MS       F       P
Regression         1    3254.0    3254.0   56.05   0.000
Residual Error    18    1044.9      58.1
Total             19    4299.0
```

a. ¿Qué suposiciones deben hacerse acerca de la distribución del error aleatorio, ε?

b. ¿Cuál es la mejor estimación de σ^2, la varianza del error aleatorio, ε?

c. Use las gráficas de diagnóstico para estos datos para comentar sobre la validez de las suposiciones de regresión.





12.35 Televisores de alta definición En el ejercicio 3.19, *Consumer Reports* dio los precios para los 10 mejores televisores de pantalla de cristal líquido y alta definición (HDTVs), en la categoría de 30 a 40 pulgadas: ¿el precio de uno de éstos depende del tamaño de la pantalla? La tabla siguiente muestra los 10 costos otra vez, junto con el tamaño de la pantalla en pulgadas.[7]

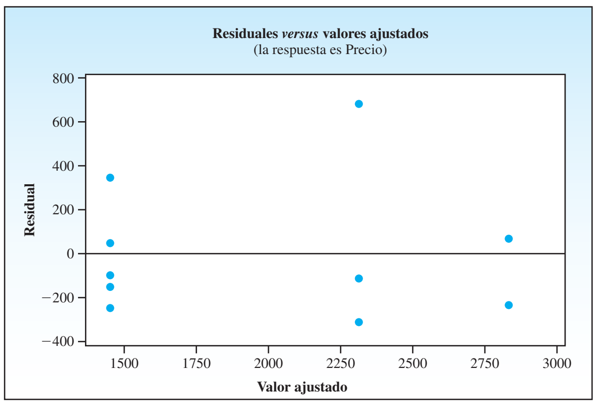
MIS DATOS EX1235

Marca	Precio	Tamaño
JVC LT-40FH96	$2900	40
Sony Bravia KDL-V32XBR1	1800	32
Sony Bravia KDL-V40XBR1	2600	40
Toshiba 37HLX95	3000	37
Sharp Aquos LC-32DA5U	1300	32
Sony Bravia KLV-S32A10	1500	32
Panasonic Viera TC-32LX50	1350	32
JVC LT-37X776	2000	37
LG 37LP1D	2200	37
Samsung LN-R328W	1200	32

¿El precio de un HDTV depende del tamaño de la pantalla? Imagine que suponemos que la relación entre x y y es lineal, y efectuamos una regresión lineal, que resulta en un valor de $r^2 = .787$.

a. ¿Qué dice el valor de r^2 acerca de la fuerza de la relación entre precio y tamaño de pantalla?

b. La gráfica residual para estos datos, generada por *MINITAB*, se muestra a continuación. ¿Esta gráfica revela algún resultado atípico en el conjunto de datos? Si es así, ¿cuál punto es el resultado atípico?



c. Grafique los valores de x y y usando una gráfica de dispersión. ¿Esta gráfica confirma las sospechas del inciso b)? ¿Cuál HDTV representa el resultado atípico? ¿Es ésta una medición defectuosa que debe eliminarse del conjunto de datos? Explique.

12.7 ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN USANDO LA RECTA AJUSTADA

Ahora que usted ha

- probado y ajustado la recta de regresión, $\hat{y} = a + bx$, para asegurarse que es útil para predicción y
- empleado las herramientas de diagnóstico para asegurarse que ninguna de las suposiciones de regresión han sido violadas

está listo para usar la recta para uno de sus dos propósitos:

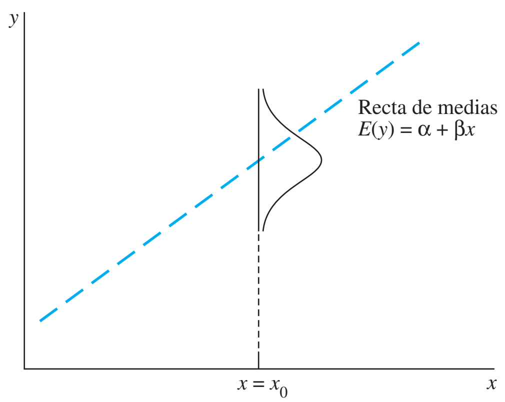
- Estimar el valor promedio de y para un valor determinado de x
- Predecir un valor particular de y para un valor determinado de x

La muestra de n pares de observaciones han sido seleccionados de una población en la que el valor *promedio* de y está relacionado con el valor de la variable de pronóstico x por la **recta de medias**,

$$E(y) = \alpha + \beta x$$

una recta desconocida, que se muestra como recta interrumpida en la figura 12.12. Recuerde que para un valor fijo de x, por ejemplo x_0, los valores *particulares* de y se desvían desde la recta de medias. Estos valores de y se supone que tienen una distribución normal con media igual a $\alpha + \beta x_0$ y varianza σ^2, como se ve en la figura 12.12.

FIGURA 12.12
Distribución de y para $x = x_0$



Como los valores calculados de a y b varían de una muestra a otra, cada nueva muestra produce una diferente recta de regresión $\hat{y} = a + bx$, que se puede usar ya sea para estimar la recta de medias o para predecir un valor particular de y. La figura 12.13 muestra una de las posibles configuraciones de la recta ajustada (azul), la recta de medias desconocida (gris), y un valor particular de y (el punto azul).

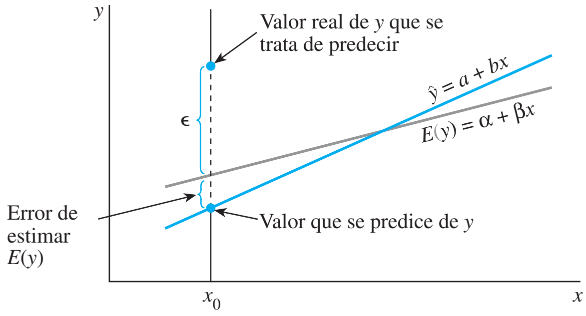


FIGURA 12.13
Error al estimar $E(y)$ y predecir y

¿A qué distancia estará nuestro estimador $\hat{y} = a + bx_0$ desde la cantidad a estimar o predecir? Esto depende, como siempre, de la variabilidad de nuestro estimador, medido por su **error estándar**. Se puede demostrar que

$$\hat{y} = a + bx_0$$

el valor estimado de y cuando $x = x_0$, es un estimador insesgado de la recta de medias, $\alpha + \beta x_0$ y que $\hat{y}$ está normalmente distribuida con el error estándar de $\hat{y}$ estimado por

$$\text{SE}(\hat{y}) = \sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}$$

La estimación y prueba están basadas en la estadística

$$t = \frac{\hat{y} - E(y)}{\text{SE}(\hat{y})}$$

que tiene una distribución t con $(n - 2)$ grados de libertad.

MI CONSEJO

Para un valor determinado de x, el intervalo de predicción es siempre más ancho que el intervalo de confianza.

Para formar un intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ para el valor promedio de y cuando $x = x_0$, medido por la recta de medios, $\alpha + \beta x_0$, se puede usar la forma usual para un intervalo de confianza basado en la distribución t:

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2}\text{SE}(\hat{y})$$

No obstante, si se escoge predecir un valor *particular* de y cuando $x = x_0$, hay algún error adicional en la predicción debido a la desviación de y desde la recta de medias. Si examinamos la figura 12.13, se puede ver que el error en predicción tiene dos componentes:

- El error al usar la recta ajustada para estimar la recta de medias
- El error causado por la desviación de y desde la recta de medias, medida por σ^2

La varianza de la diferencia entre y y $\hat{y}$ es la suma de estas dos varianzas y forma la base para el error estándar de $(y - \hat{y})$ empleado para predicción:

$$\text{SE}(y - \hat{y}) = \sqrt{\text{MSE}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

y el intervalo de predicción $(1 - \alpha)100\%$ se forma como

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2}\text{SE}(y - \hat{y})$$

INTERVALOS DE CONFIANZA Y PREDICCIÓN $(1 - \alpha)100\%$

- Para estimar el valor promedio de y cuando $x = x_0$:

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\text{MSE}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

- Para predecir un valor particular de y cuando $x = x_0$:

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\text{MSE}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

donde $t_{\alpha/2}$ es el valor de t con $(n - 2)$ grados de libertad y área $\alpha/2$ a su derecha.

EJEMPLO 12.4

Use la información del ejemplo 12.1 para estimar el promedio de calificaciones en cálculo para estudiantes cuya puntuación de aprovechamiento es 50, con un intervalo de confianza de 95%.

Solución La estimación puntual de $E(y|x_0 = 50)$, el promedio de calificación en cálculo para estudiantes cuya puntuación de aprovechamiento es 50, es

$$\hat{y} = 40.78424 + .76556(50) = 79.06$$

El error estándar de $\hat{y}$ es

$$\sqrt{\text{MSE}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]} = \sqrt{75.7532\left[\frac{1}{10} + \frac{(50 - 46)^2}{2474}\right]} = 2.840$$

y el intervalo de confianza de 95% es

$$79.06 \pm 2.306(2.840)$$
$$79.06 \pm 6.55$$

Nuestros resultados indican que el promedio de calificación en cálculo para estudiantes cuya puntuación de 50 en el examen de aprovechamiento estará entre 72.51 y 85.61.

EJEMPLO 12.5

Un estudiante tomó el examen de aprovechamiento y obtuvo 50 pero todavía no ha tomado el examen de cálculo. Usando la información del ejemplo 12.1, prediga la calificación en cálculo para este estudiante, con un intervalo de predicción de 95%.

Solución El valor predicho de y es $\hat{y} = 79.06$, como en el ejemplo 12.4. No obstante, el error en predicción se mide con $\text{SE}(y - \hat{y})$, y el intervalo de predicción de 95% es

$$79.06 \pm 2.306\sqrt{75.7532\left[\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(50 - 46)^2}{2474}\right]}$$

$$79.06 \pm 2.306(9.155)$$

$$79.06 \pm 21.11$$

o sea de 57.95 a 100.17. El intervalo de predicción es *más ancho* que el intervalo de confianza del ejemplo 12.4 por la variabilidad extra al predecir el valor real de la respuesta y.

Es frecuente que un punto particular sobre la recta de medias sea de interés para experimentadores, la intersección-y $\boldsymbol{\alpha}$, es decir, el valor promedio de y cuando $x_0 = 0$.

EJEMPLO 12.6

Antes de ajustar una recta a los datos de la calificación en cálculo y puntos de aprovechamiento, se puede pensar que una puntuación de 0 en el examen de aprovechamiento puede predecir una calificación de 0 en el examen de cálculo. Esto implica que debemos ajustar un modelo con α igual a 0. ¿Los datos apoyan la hipótesis de un punto de cruce en 0?

Solución Se puede contestar esta pregunta al construir un intervalo de confianza de 95% para el punto α de cruce con el eje y, que es el valor promedio de y cuando $x = 0$. La estimación de α es

$$\hat{y} = 40.784 + .76556(0) = 40.784 = a$$

y el intervalo de confianza de 95% es

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\text{MSE}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

$$79.06 \pm 2.306\sqrt{75.7532\left[\left(\frac{1}{10} + \frac{(0 - 46)^2}{2474}\right]}$$

$$40.784 \pm 19.617$$

o de 21.167 a 60.401, un intervalo que no contiene el valor $\alpha = 0$. En consecuencia, es improbable que el cruce con el eje y sea 0. Se debe incluir un punto de cruce diferente de cero en el modelo $y = \alpha + \beta x + \epsilon$.

Para esta situación especial en la que estamos interesados en probar o estimar el punto de cruce α con el eje y para la recta de medias, las inferencias comprenden la estimación muestral a. La prueba para un punto de cruce en 0 se da en la figura 12.14 en la recta sombreada marcada como "Constante". El coeficiente dado como 40.784 es a, con error estándar dado en la columna marcada "SE Coef" como 8.507, que concuerda con el valor calculado en el ejemplo 12.6. El valor de $t = 4.79$ se encuentra al dividir a entres su error estándar con valor $p = .001$.

FIGURA 12.14
Parte de la salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 12.6

```
Predictor          Coef     SE Coef        T        P
Constant         40.784       8.507     4.79    0.001
x                0.7656      0.1750     4.38    0.002
```

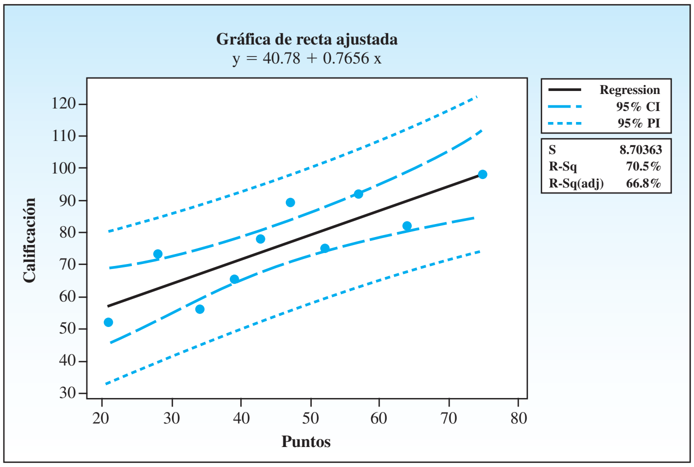
Se puede ver que es bastante lento calcular manualmente estos intervalos de predicción y estimación, además de que es difícil mantener precisión en los cálculos, pero por fortuna hay programas de cómputo que pueden hacer los cálculos. El comando de regresión *MINITAB* tiene una opción para estimación o predicción cuando se especifica el valor necesario de x. La salida impresa de la figura 12.15 da los valores de $\hat{y} = 79.06$ marcados "Fit", el error estándar de $\hat{y}$, SE($\hat{y}$), marcado "SE Fit", el *intervalo de confianza* para el valor promedio de y cuando $x = 50$, marcado "95.0% CI", y el intervalo de predicción para y cuando $x = 50$, marcado "95.0% PI".

FIGURA 12.15
Opción *MINITAB* para estimación y predicción

```
Predicted Values for New Observations
New Obs     Fit     SE Fit          95% CI              95% PI
1         79.06       2.84    (72.51,    85.61)    (57.95,   100.17)

Values of Predictors for New Observations
New Obs          x
1             50.0
```

Las bandas de confianza y bandas de predicción generadas por *MINITAB* para los datos de calificaciones en cálculo se muestran en la figura 12.16. Observe que en general las bandas de confianza son más angostas que las bandas de predicción para todo valor de puntos x de examen de aprovechamiento. Es seguro que usted esperaría predicciones de que un valor individual fuera mucho más variable que las estimaciones del valor promedio. También observe que las bandas parecen hacerse más anchas a medida que el valor de x_0 se aleja de la media $\bar{x}$. Esto es porque los errores estándar empleados en los intervalos de confianza y predicción contienen el término $(x_0 - \bar{x})^2$, que se hace más grande cuando los dos valores divergen. En la práctica, esto significa que estimación y predicción son más precisos cuando x_0 está cerca del centro del rango de los valores de x. Se pueden localizar los intervalos calculados de confianza y predicción cuando $x = 50$ en la figura 12.16.

FIGURA 12.16
Intervalos de confianza y predicción para los datos de la tabla 12.1



12.7 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

12.36 Consulte el ejercicio 12.6.

a. Estime el valor promedio de y cuando $x = 1$, usando un intervalo de confianza de 90%.

b. Encuentre un intervalo de confianza de 90% para algún valor de y a ser observado en el futuro cuando $x = 1$.

12.37 Consulte el ejercicio 12.7. Partes de la salida impresa *MINITAB* se muestran a continuación.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.37

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = 6.00 - 0.557 x

Predictor       Coef     SE Coef         T        P
Constant      6.0000      0.1759     34.10    0.000
x           -0.55714     0.04518    -12.33    0.000

Predicted Values for New Observations
New Obs     Fit    SE Fit       95.0% CI            95.0% PI
1        4.8857    0.1027   (4.6006,  5.1708)  (4.2886,  5.4829)
2        1.5429    0.2174   (0.9392,  2.1466)  (0.7430,  2.3427) X
X  denotes a point that is an outlier in the predictors.

Values of Predictors for New Observations
New Obs          x
1             2.00
2             8.00
```

a. Encuentre un intervalo de confianza para el valor promedio de y cuando $x = 2$.

b. Encuentre un intervalo de predicción de 95% para algún valor de y a ser observado en el futuro cuando $x = 2$.

c. El último renglón de la tercera sección de la salida impresa indica un problema con uno de los valores ajustados. ¿Qué valor de x corresponde al valor ajustado $\hat{y} = 1.5429$? ¿Qué problema ha detectado el programa *MINITAB*?

APLICACIONES

MIS DATOS EX1238 **12.38 ¿Qué comprar?** Se realizó un experimento de investigación de mercado, para estudiar la relación entre el tiempo necesario para que un comprador llegue a una decisión y el número de presentaciones alternativas de un producto. Se eliminaron nombres de marca en paquetes para reducir los efectos de preferencias de marcas. Los compradores hicieron su selección usando las descripciones del producto, hechas por los fabricantes en los paquetes, como únicas guías para comprar. El tiempo necesario para tomar una decisión se registró para 15 participantes en el estudio de investigación de mercado.

Tiempo para decisión, *y* (segundos)	5, 8, 8, 7, 9	7, 9, 8, 9, 10	10, 11, 10, 12, 9
Número de alternativas, *x*	2	3	4

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados apropiada para estos datos.

b. Grafique los puntos y grafique la recta como prueba en sus cálculos.

c. Calcule s^2.

d. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la duración está linealmente relacionada con el número de diseños alternativos de paquete? (Pruebe al nivel de significancia de $\alpha = .05$.)

e. Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprete su valor.

f. Si están disponibles, examine las gráficas de diagnóstico para verificar la validez de las suposiciones de regresión.

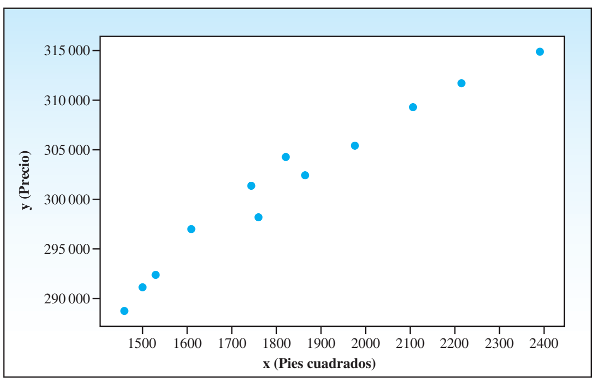
g. Estime el promedio de tiempo necesario para llegar a una decisión cuando se presenten tres alternativas, usando un intervalo de confianza de 95%.

MIS DATOS EX1239

12.39 Precios de vivienda Si una persona trata de rentar un departamento o comprar una casa, encuentra que los vendedores fijan rentas y precios de casas con base en la superficie en pies cuadrados de espacio con calefacción. Los datos de la tabla siguiente dan la superficie y precios de venta de $n = 12$ casas seleccionadas al azar de las vendidas en una ciudad pequeña. Use la salida impresa *MINITAB* para contestar las preguntas.

Pies cuadrados, *x*	Precio, *y*	*Pies cuadrados, x*	*Precio, y*
1460	$288 700	1977	$305 400
2108	309 300	1610	297 000
1743	301 400	1530	292 400
1499	291 100	1759	298 200
1864	302 400	1821	304 300
2391	314 900	2216	311 700

Gráfica de datos para el ejercicio 12.39



Salida impresa *MINITAB* para el Ejercicio 12.39

Análisis de regresión: y *versus* x

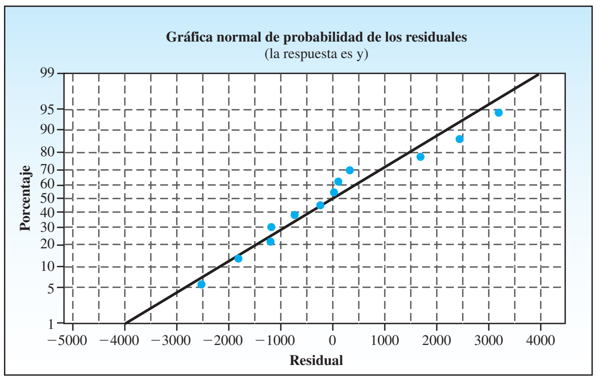
```
The regression equation is
y = 251206 + 27.4 x

Predictor        Coef     SE Coef         T        P
Constant       251206        3389     74.13    0.000
x              27.406       1.828     14.99    0.000

S = 1792.72     R-Sq = 95.7%     R-Sq(adj) = 95.3%

Predicted Values for New Observations
New Obs     Fit    SE Fit        95.0% CI             95.0% PI
1        299989       526   (298817,  301161)  (295826,  304151)
2        306018       602   (304676,  307360)  (301804,  310232)

Values of Predictors for New Observations
New Obs          x
1             1780
2             2000
```

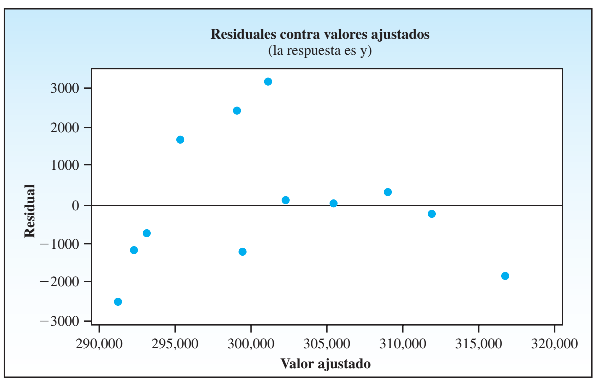
a. ¿Se puede ver algún patrón que no sea una relación lineal en la gráfica original?

b. El valor de r^2 para estos datos es .957. ¿Qué nos dice esto acerca del ajuste de la recta de regresión?

c. Vea las siguientes gráficas de diagnóstico para estos datos. ¿Se ve algún patrón en los residuales? ¿Esto sugiere que la relación entre precio y pies cuadrados es algo que no sea lineal?

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.39





12.40 Precios de vivienda II Consulte el ejercicio 12.39 y el conjunto de datos EX1239.

a. Estime el promedio de incremento en el precio para un aumento de 1 pie cuadrado para casas vendidas en la ciudad. Use un intervalo de confianza de 99%. Interprete su estimación.

b. Un vendedor de bienes raíces necesita estimar el promedio de precio de venta de casas con un total de 2000 pies cuadrados de espacio con calefacción. Use un intervalo de confianza de 95% e interprete su estimación.

c. Calcule el precio por pie cuadrado para cada casa y luego calcule la media muestral. ¿Por qué esta estimación del promedio de costo por pie cuadrado no es igual a la respuesta del inciso a)? ¿Debe ser igual? Explique.

d. Suponga que una casa con 1780 pies cuadrados de espacio con calefacción se ofrece a la venta. Construya un intervalo de predicción de 95% para el precio al cual se venderá la casa.

12.41 Fresas III Los datos siguientes (ejercicios 12.16 y 12.24) se obtuvieron en un experimento que relacionaba la variable dependiente, y (textura de fresas), con x (temperatura de almacenamiento codificada).

x	-2	-2	0	2	2
y	4.0	3.5	2.0	0.5	0.0

a. Estime la textura esperada de fresas para una temperatura de almacenamiento codificada de $x = -1$. Use un intervalo de confianza de 99%.

b. Prediga el valor particular de y cuando $x = 1$ con un intervalo de predicción de 99%.

c. ¿A qué valor de x permanecerá mínimo el ancho del intervalo de predicción para un valor particular de y, suponiendo que n permanece fija?

MIS DATOS EX1242

12.42 Tom Brady El número de pases completos y el número total de yardas pasadas para Tom Brady, mariscal de campo de los Patriotas de Nueva Inglaterra, se registraron en los 16 juegos regulares de la temporada de fútbol de 2006.[8] En la semana 6 no se jugó y no hay datos reportados.

Semana	Completos	Total yardas
1	11	163
2	15	220
3	31	320
4	15	188
5	16	140
6	*	*
7	18	195
8	29	372
9	20	201
10	24	253
11	20	244
12	22	267
13	27	305
14	12	78
15	16	109
16	28	249

a. ¿Cuál es la recta de mínimos cuadrados que relaciona el total de yardas pasadas con el número de pases completos para Tom Brady?

b. ¿Qué proporción de la variación total está explicada por la regresión de total de yardas pasadas (y) en el número de pases completos (x)?

c. Si las hay, examine las gráficas de dispersión para comprobar la validez de las suposiciones de regresión.

12.43 Tom Brady, continúa Consulte el ejercicio 12.42.

a. Estime el número promedio de yardas pasadas para juegos en los que Brady lanza 20 pases completos, usando un intervalo de confianza de 95%.

b. Prediga el número real de yardas pasadas para juegos en los que Brady lanza 20 pases completos usando un intervalo de confianza de 95%.

c. ¿Sería aconsejable usar la recta de mínimos cuadrados del ejercicio 12.42 para predecir el número total de yardas pasadas de Brady, para un juego en el que lanzó sólo 5 pases completos? Explique.

12.8 ANÁLISIS DE CORRELACIÓN

En el capítulo 3 introdujimos el *coeficiente de correlación* como medida de la fuerza de la relación lineal entre dos variables. El coeficiente de correlación, r, formalmente denominado **coeficiente de correlación muestral de momento de producto de Pearson**, se define a continuación.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE MOMENTO DE PRODUCTO DE PEARSON

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \qquad \text{para } -1 \leq r \leq 1$$

MI CONSEJO

r está siempre entre −1 y +1.

Las varianzas y covarianza se pueden hallar por cálculo directo, con el uso de una calculadora con capacidad de estadística de dos variables, o usando un paquete de estadística como el *MINITAB*. Las varianzas y covarianza se calculan como

$$s_{xy} = \frac{S_{xy}}{n-1} \qquad s_x^2 = \frac{S_{xx}}{n-1} \qquad s_y^2 = \frac{S_{yy}}{n-1}$$

y use S_{xy}, S_{xx} y S_{yy}, las mismas cantidades empleadas en análisis de regresión en este capítulo. En general, cuando una muestra de n individuos o unidades experimentales se selecciona y dos variables se miden en cada individuo o unidad, de modo que *ambas variables sean aleatorias,* el coeficiente de correlación r es la medida apropiada de linealidad para usar en esta situación.

EJEMPLO 12.7

Las estaturas y pesos de $n = 10$ jugadores atacantes de fútbol se seleccionan al azar de un equipo de estrellas de un condado. Calcule el coeficiente de correlación para las estaturas (en pulgadas) y pesos (en libras) dado en la tabla 12.4.

TABLA 12.4 **Estaturas y pesos de n = 10 estrellas profundos**

Jugador	Estatura, x	Peso, y
1	73	185
2	71	175
3	75	200
4	72	210
5	72	190
6	75	195
7	67	150
8	69	170
9	71	180
10	69	175

Solución Debe usarse el método apropiado de entrada de datos de su calculadora científica para verificar los cálculos para las sumas de cuadrados y productos cruz,

$$S_{xy} = 328 \qquad S_{xx} = 60.4 \qquad S_{yy} = 2610$$

usando las fórmulas de cálculo dadas antes en este capítulo. Entonces

$$r = \frac{328}{\sqrt{(60.4)(2610)}} = .8261$$

o sea $r = .83$. Este valor de r es más bien cercano a 1, el máximo valor posible de r, que indica una relación lineal positiva bastante fuerte entre estatura y peso.

Hay una relación directa entre las fórmulas de cálculo para el coeficiente de correlación r y la pendiente de la recta de regresión b. Como el numerador de ambas cantidades es S_{xy}, tanto r como b tienen el mismo signo. Por tanto, el coeficiente de correlación tiene estas propiedades generales:

MI CONSEJO

El signo de *r* es siempre **igual** que el signo de la pendiente *b*.

- Cuando $r = 0$, la pendiente es $b = 0$ y no hay relación lineal entre x y y.
- Cuando r es positiva, b también es positiva y hay una relación lineal positiva entre x y y.

- Cuando r es negativa, b también es negativa y hay una relación lineal negativa entre x y y.

En la sección 12.5 demostramos que

$$r^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SS Total}} = \frac{\text{SS Total} - \text{SSE}}{\text{SS Total}}$$

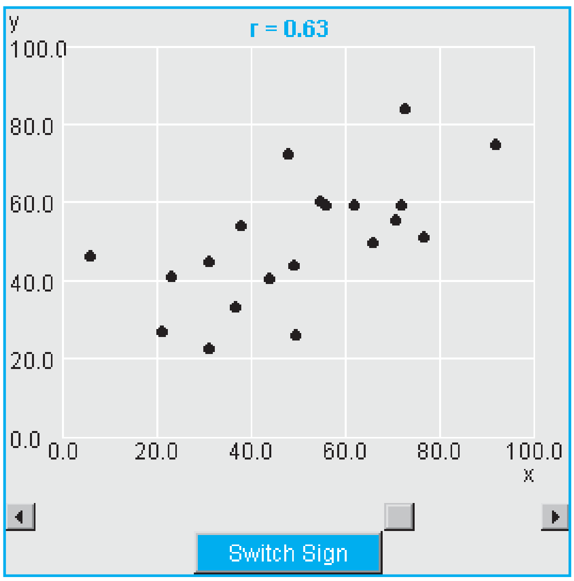
En esta forma, se puede ver que r^2 nunca puede ser mayor a 1, de modo que $-1 \leq r \leq 1$. Además, se puede ver la relación entre la variación aleatoria (medida por SSE) y r^2.

- Si no hay variación aleatoria y todos los puntos caen en la recta de regresión, entonces SSE $= 0$ y $r^2 = 1$.
- Si los puntos están dispersos en forma aleatoria y no hay variación explicada por regresión, entonces SSR $= 0$ y $r^2 = 0$.

MI APPLET

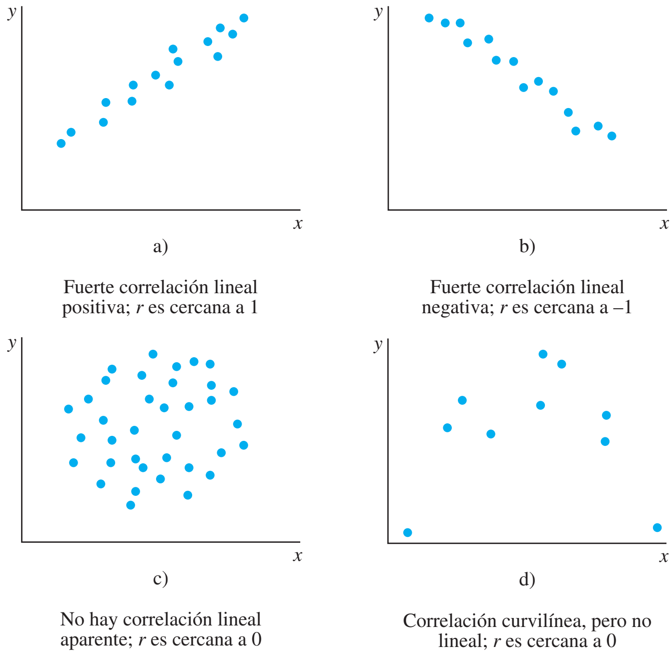
Se puede usar el applet **Exploring Correlation** que se ve en la figura 12.17 para visualizar la conexión entre el valor de r y el patrón de puntos mostrado en la gráfica de dispersión. Use su mouse para mover el cursor de la parte inferior de la gráfica de dispersión. Se verá que el valor de r cambia cuando el patrón de puntos cambia. Trate de reproducir los patrones descritos arriba para $r^2 = 1$ y $r^2 = 0$.

FIGURA 12.17
Applet Exploring Correlation



La figura 12.18 muestra cuatro gráficas de dispersión típicas y sus coeficientes de correlación asociados. Observe que en la gráfica de dispersión (d) parece haber una relación curvilínea entre x y y, pero r es aproximadamente 0, lo cual refuerza el hecho de que r es una medida de una relación *lineal* (no *curvilínea*) entre dos variables.

FIGURA 12.18
Algunas gráficas de dispersión típicas con valores aproximados de r



Considere una población generada al medir dos variables aleatorias en cada unidad experimental. En esta población *bivariada*, el **coeficiente de correlación poblacional** ρ se calcula e interpreta como está en la muestra. En esta situación, el experimentador puede probar la hipótesis de que no hay correlación entre las variables x y y usando una estadística de prueba que sea *exactamente equivalente* a la prueba de la pendiente β de la sección 12.5. El procedimiento de prueba se muestra a continuación.

MI CONSEJO

Se puede demostrar que

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$= \frac{b-0}{\sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}}.$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS RESPECTO AL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN ρ

1. Hipótesis nula: $H_0 : \rho = 0$
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$H_a : \rho > 0$ (o $\rho < 0$)	$H_a : \rho \neq 0$

3. Estadística de prueba: $t = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$

   Cuando se satisfacen las suposiciones dadas en la sección 12.2, la estadística de prueba tendrá una distribución t de Student con $(n-2)$ grados de libertad.

4. Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una cola	**Prueba de dos colas**
$t > t_{\alpha}$ (o $t < -t_{\alpha}$ cuando la hipótesis alternativa sea $H_a : \rho < 0$)	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

   o cuando valor $p < \alpha$

Los valores de t_α y $t_{\alpha/2}$ se pueden hallar usando la tabla 4 del apéndice I o el applet ***t*-Probabilities**. Use los valores de t correspondientes a $(n - 2)$ grados de libertad.

EJEMPLO 12.8

Consulte los datos de estatura y peso del ejemplo 12.7. La correlación entre estatura y peso se calculó como $r = .8261$. ¿Esta correlación es significativamente diferente de 0?

Solución Para probar las hipótesis

$$H_0 : \rho = 0 \qquad \textit{versus} \qquad H_a : \rho \neq 0$$

el valor del estadístico de prueba es

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = .8261\sqrt{\frac{10-2}{(1-(.8261)^2}} = 4.15$$

que para $n = 10$ tiene una distribución t con 8 grados de libertad. Como este valor es mayor que $t_{.005} = 3.355$, el valor p de dos colas es menor a $2(.005) = .01$ y la correlación se declara significativa al nivel de 1% ($P < .01$). El valor $r^2 = .8261^2 = .6824$ significa que alrededor de 68% de la variación en una de las variables es explicada por la otra. La salida impresa *MINITAB* de la figura 12.19 muestra la correlación r y el valor p exacto para probar su significancia.

MI CONSEJO

El valor t y valor p para probar $H_0 : \rho = 0$ será idéntico al valor t y valor p para probar $H_0 : \beta = 0$.

FIGURA 12.19
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 12.8

Correlaciones: x, y

```
Pearson correlation of x and y = 0.826
P-Value = 0.003
```

Si los coeficientes lineales de correlación entre y y cada una de las dos variables x_1 y x_2 se calcular como .4 y .5, respectivamente, no se concluye que un medio de predicción que use ambas variables sea $[(.4)^2 + (.5)^2] = .41$, o sea una reducción de 41% en la suma de cuadrados de desviaciones. En realidad, x_1 y x_2 podrían estar bastante correlacionados y por tanto contribuir prácticamente con la misma información para la predicción de y.

Por último, recuerde que r es una medida de **correlación lineal** y que x y y podrían estar perfectamente relacionadas por alguna función **curvilínea** cuando el valor observado de r sea igual a 0. El problema de estimar o predecir y usando información dada por varias variables independientes, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, es el tema del capítulo 13.

12.8 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

12.44 ¿En qué forma el coeficiente de correlación mide la fuerza de la relación lineal entre dos variables y y x?

12.45 Describa la significancia del signo algebraico y la magnitud de r.

12.46 ¿Qué valor toma r si todos los puntos caen en la misma recta en estos casos?

a. La recta tiene pendiente positiva.

b. La recta tiene pendiente negativa.

12.47 Nos dan estos datos:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	3	4	4

a. Grafique los puntos. Con base en su gráfica, ¿cuál será el signo del coeficiente de correlación muestral?

b. Calcule r y r^2 e interprete sus valores.

12.48 Nos dan estos datos:

x	1	2	3	4	5	6
y	7	5	5	3	2	0

a. Grafique los seis puntos en papel para graficar.

b. Calcule el coeficiente muestral de correlación r e interprete.

c. ¿En qué porcentaje se redujo la suma de cuadrados de desviaciones al usar el pronosticador de mínimos cuadrados $\hat{y} = a + bx$, en lugar de $\bar{y}$ como pronosticador de y?

12.49 Invierta la pendiente de la recta del ejercicio 12.48 al reordenar las observaciones y, como sigue:

x	1	2	3	4	5	6
y	0	2	3	5	5	7

Repita los pasos del ejercicio 12.48. Observe el cambio en el signo de r y la relación entre los valores de r^2 del ejercicio 12.48 y este ejercicio.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1250

12.50 Langostas La tabla siguiente da los números de lapas *Octolasmis tridens* y *O. lowei* en cada una de 10 langostas.[9] ¿Le parece que las lapas compiten por espacio en la superficie de una langosta?

Número de campo de langosta	*O. tridens*	*O. lowei*
A061	645	6
A062	320	23
A066	401	40
A070	364	9
A067	327	24
A069	73	5
A064	20	86
A068	221	0
A065	3	109
A063	5	350

a. Si compiten, ¿se espera que el número x de lapas *O. tridens* y el número y de *O. lowei* estén correlacionados positiva o negativamente? Explique.

b. Si desea probar la teoría de que dos tipos de lapas compiten por espacio al realizar una prueba de la hipótesis nula "el coeficiente de correlación poblacional ρ es igual a 0", ¿cuál es su hipótesis alternativa?

c. Realice la prueba del inciso b) y exprese sus conclusiones.

MIS DATOS EX1251

12.51 Capacitación de habilidades sociales Se puso en práctica un programa de capacitación de habilidades sociales con siete estudiantes, a un grado de dificultad mediano, en un estudio para determinar si el programa causó mejora en medidas antes y después del estudio y en calificaciones de conducta. Para uno de estos exámenes, los puntos de antes y después del examen para los siete estudiantes se dan en la tabla siguiente.[10]

Persona	Antes	Después
Earl	101	113
Ned	89	89
Jasper	112	121
Charlie	105	99
Tom	90	104
Susie	91	94
Lori	89	99

a. ¿Qué tipo de correlación, si la hay, espera usted ver entre puntos antes y después del examen? Grafique los datos. ¿La correlación parece ser positiva o negativa?

b. Calcule el coeficiente de correlación, r. ¿Hay una correlación positiva significativa?

12.52 Hockey G. W. Marino investigó las variables relacionadas con la capacidad de un jugador de hockey para hacer un rápido arranque desde una posición de reposo.[11] En el experimento, cada patinador arrancó desde una posición de reposo y trató de moverse tan rápidamente como le fuera posible en una distancia de 6 metros. El coeficiente de correlación r entre la rapidez de zancada de un patinador (número de zancadas por segundo) y el tiempo para recorrer la distancia de 6 metros para la muestra de 69 patinadores, fue $-.37$.

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una correlación entre rapidez de zancadas y tiempo para recorrer la distancia? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba.

c. ¿Cuáles son las implicaciones prácticas de la prueba en el inciso a)?

12.53 Hockey II Consulte el ejercicio 12.52. Marino calculó que el coeficiente de correlación muestral r, para la rapidez de zancadas y el promedio de rapidez de aceleración para los 69 patinadores, era de .36. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una correlación entre rapidez de zancadas y promedio de aceleración para los patinadores? Use el método del valor p.

MIS DATOS EX1254

12.54 Energía geotérmica La energía geotérmica es una importante fuente de energía. Como la cantidad de energía contenida en 1 libra de agua es función de su temperatura, uno podría preguntarse si el agua obtenida de pozos más profundos contiene más energía por libra. Los datos de la tabla siguiente se reproducen de un artículo sobre sistemas geotérmicos escrito por A. J. Ellis.[12]

Ubicación de pozo	Profundidad promedio (máx) de perforación	Temperatura promedio (máx)
El Tateo, Chile	650	230
Ahuachapan, El Salvador	1000	230
Namafjall, Islandia	1000	250
Larderello (region), Italia	600	200
Matsukawa, Japón	1000	220
Cerro Prieto, México	800	300
Wairakei, Nueva Zelanda	800	230
Kizildere, Turquía	700	190
The Geysers, Estados Unidos	1500	250

¿Hay una correlación positiva significativa entre la profundidad promedio (max) de perforación y la temperatura promedio (max)?

12.55 Queso, por favor La demanda de alimentos saludables, bajos en grasas y calorías, ha resultado en un gran número de productos "bajo en grasas" o "sin grasa". La tabla siguiente muestra el número de calorías y la cantidad de sodio (en miligramos) por rebanada para cinco marcas de queso americano sin grasa.

Marca	Sodio (mg)	Calorías
Kraft Fat Free Singles	300	30
Ralphs Fat Free Singles	300	30
Borden® Fat Free	320	30
Healthy Choice® Fat Free	290	30
Smart Beat® American	180	25

a. ¿Deben usarse métodos de análisis de regresión lineal o análisis de correlación para analizar los datos? Explique.

b. Analice los datos para determinar la naturaleza de la relación entre sodio y calorías en queso americano sin grasa. Use cualesquiera pruebas estadísticas que sean más apropiadas.

MIS DATOS EX1256 **12.56 Temperatura corporal y frecuencia cardiaca** ¿Hay alguna relación entre estas dos variables? Para averiguarlo, al azar seleccionamos 12 personas de un conjunto de datos construido por Allen Shoemaker (*Journal of Statistics Education*) y registramos sus temperaturas corporales y frecuencias cardiacas.[13]

Persona	1	2	3	4	5	6
Temperatura (grados)	96.3	97.4	98.9	99.0	99.0	96.8
Frecuencia cardiaca (pulsaciones por minuto)	70	68	80	75	79	75

Persona	7	8	9	10	11	12
Temperatura (grados)	98.4	98.4	98.8	98.8	99.2	99.3
Frecuencia cardiaca (pulsaciones por minuto)	74	84	73	84	66	68

a. Encuentre el coeficiente de correlación r, que relacione temperatura corporal y frecuencia cardiaca.

b. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que hay correlación entre estas dos variables? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

MIS DATOS EX1257 **12.57 Estadísticas en béisbol** ¿El promedio de bateo de un equipo depende en alguna forma del número de cuadrangulares conectados por el equipo? Los datos de la tabla siguiente muestran el número de cuadrangulares del equipo y el promedio general de bateo del equipo para ocho equipos de ligas mayores seleccionados para la temporada de 2006.[14]

Equipo	Total cuadrangulares	Promedio de bateo del equipo
Atlanta Braves	222	.270
Baltimore Orioles	164	.227
Boston Red Sox	192	.269
Chicago White Sox	236	.280
Houston Astros	174	.255
Philadelphia Phillies	216	.267
New York Giants	163	.259
Seattle Mariners	172	.272

Fuente: ESPN.com

a. Grafique los puntos usando una gráfica de dispersión. ¿Le parece que hay alguna relación entre el total de cuadrangulares y el promedio de bateo del equipo?

b. ¿Hay alguna correlación positiva significativa entre el total de cuadrangulares y el promedio de bateo del equipo? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

c. ¿Piensa usted que la relación entre estas dos variables sería diferente si hubiéramos visto todo el conjunto de franquicias de las ligas mayores?

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Un modelo probabilista lineal

1. Cuando los datos exhiben una relación lineal, el modelo apropiado es $y = \alpha + \beta x + \epsilon$.
2. El error aleatorio ϵ tiene una distribución normal con media de 0 y varianza σ^2.

II. Método de mínimos cuadrados

1. Las estimaciones a y b, para a y b, se escogen para reducir SSE al mínimo, la suma del cuadrado de desviaciones alrededor de la recta de regresión, $\hat{y} = a + bx$.
2. Las estimaciones de mínimos cuadrados son $b = S_{xy}/S_{xx}$ y $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

III. Análisis de varianza

1. SS Total = SSR + SSE, donde SS Total $= S_{yy}$ y SSR $= (S_{xy})^2/S_{xx}$.
2. La mejor estimación de σ^2 es MSE = SSE$/(n - 2)$.

IV. Prueba, estimación y predicción

1. Una prueba para la significancia de la regresión lineal, $H_0: \beta = 0$, se puede implementar usando una de dos estadísticas de prueba:

$$t = \frac{b}{\sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}} \quad \text{o} \quad F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$$

2. La fuerza de la relación entre x y y se puede medir usando

$$r^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SS Total}}$$

que se acerca a 1 cuando la relación se hace más fuerte.

3. Use gráficas de residuales para comprobar la no normalidad, desigualdad de varianzas, o un modelo incorrectamente ajustado.
4. Los intervalos de confianza se pueden construir para estimar el punto de intersección α y la pendiente β de la recta de regresión, así como estimar el valor promedio de y, $E(y)$, para un valor determinado de x.
5. Se pueden construir intervalos de predicción para predecir una observación particular, y, para un valor determinado de x. Para una x dada, los intervalos de predicción siempre son más anchos que los intervalos de confianza.

V. Análisis de correlación

1. Use el coeficiente de correlación para medir la relación entre x y y cuando ambas variables son aleatorias:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

2. El signo de r indica la dirección de la relación; r cerca de 0 indica que no hay relación lineal, y r cerca de 1 o -1 indica una fuerte relación lineal.
3. Una prueba de la significancia del coeficiente de correlación usa la estadística

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

y es idéntica a la prueba de la pendiente β.

MI MINITAB

Procedimientos de regresión lineal

En el capítulo 3 usamos algunos de los procedimientos de regresión lineal disponibles en *MINITAB*, para obtener una gráfica de la recta de regresión de mínimos cuadrados de mejor ajuste, así como para calcular el coeficiente de correlación r para un conjunto de datos bivariados. Ahora que ya hemos estudiado las técnicas de prueba y estimación para un análisis de regresión lineal sencillo, existen más opciones *MINITAB* para usted.

Considere la relación entre x = puntuación en examen de aprovechamiento en matemáticas y y = calificación final en cálculo, que se usó como ejemplo en todo este capítulo. Introduzca los datos en las primeras dos columnas de una hoja de trabajo *MINITAB*. Si usa **Graph** → **Scatterplot** → **Simple**, puede generar la gráfica de dispersión para los datos, como se ve en la figura 12.2. Pero, las principales herramientas inferenciales para análisis de regresión lineal se generan usando **Stat** → **Regression** → **Regression**. (Usted usará esta misma secuencia de comandos en el capítulo 13, cuando estudie *análisis de regresión múltiple*.) El cuadro de diálogo para el comando Regression se muestra en la figura 12.20.

Seleccione **y** para la variable "Response" y **x** para la variable "Predictor". Puede ahora escoger generar algunas gráficas de residuales para comprobar la validez de sus suposiciones de regresión antes que utilice el modelo para estimación o predicción. Escoja **Graphs** para exhibir la caja de diálogo de la figura 12.21.

FIGURA 12.20

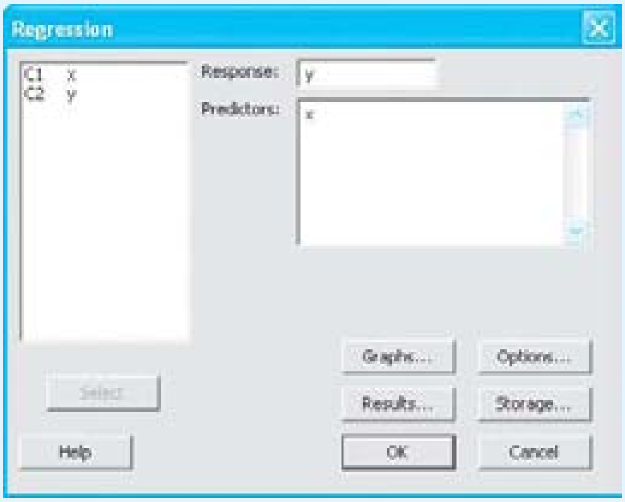
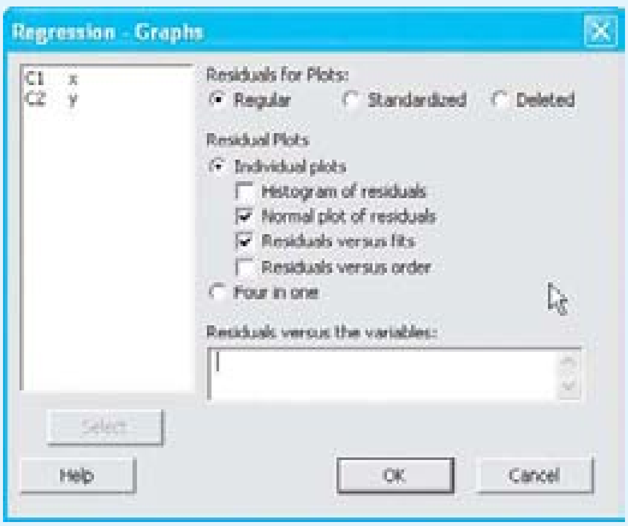


FIGURA 12.21



Hemos usado gráficas residuales **Regular**, poniendo marca en las cajas para "Normal plot of residuals" y "Residuals versus fits". Dé un clic en **OK** para regresar a la caja de diálogo principal. Si ahora escoge **Options**, puede obtener intervalos de confianza y predicción para cualquiera de estos casos:

- Un solo valor de x (tecleado en la caja marcada "Prediction intervals for new observations")
- Varios valores de x guardados en una columna (C3, por ejemplo) de la hoja de trabajo

Introduzca el valor $x = 50$ en la figura 12.22 para compararse a la salida dada en la figura 12.15. Cuando dé un clic en **OK** dos veces, la salida de regresión se genera como se ve en la figura 12.23. Las dos herramientas de diagnóstico aparecerán en ventanas de gráficas separadas.

FIGURA 12.22

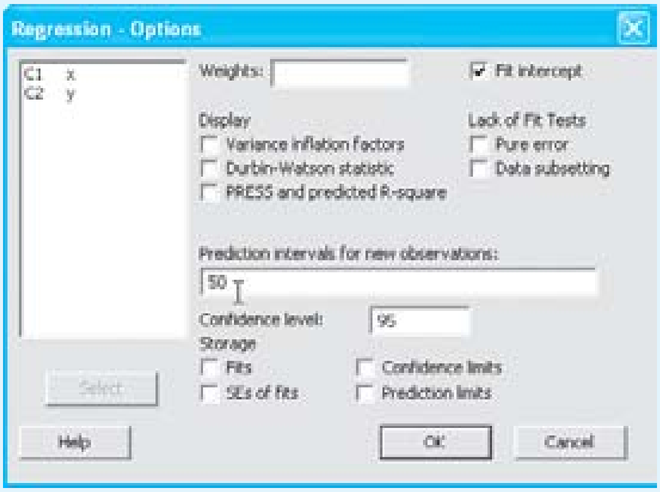
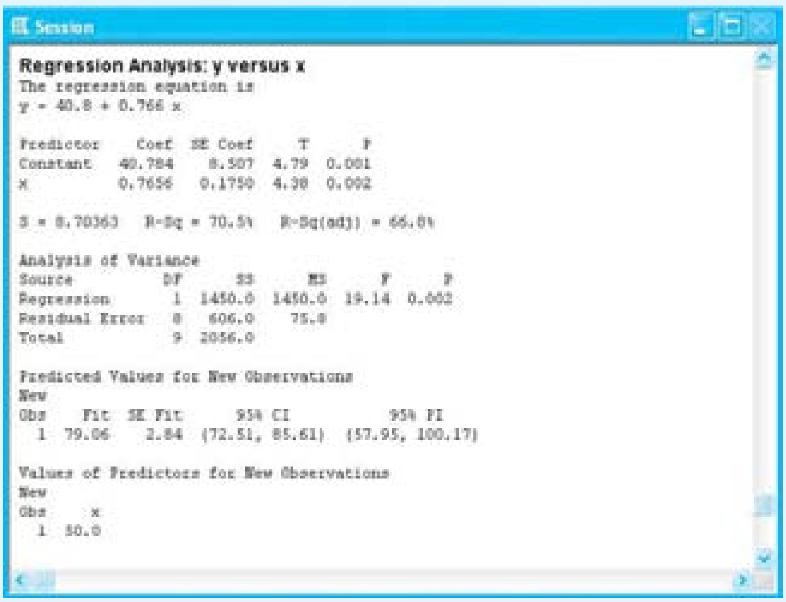


FIGURA 12.23



Session

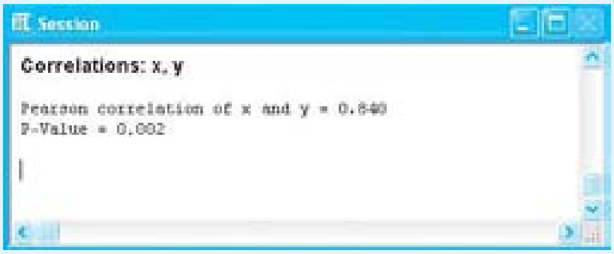
Regression Analysis: y versus x

```
The regression equation is
y = 40.8 + 0.766 x

Predictor     Coef  SE Coef     T      P
Constant    40.784    8.507  4.79  0.001
x           0.7656   0.1750  4.38  0.002

S = 8.70363   R-Sq = 70.5%   R-Sq(adj) = 66.8%

Analysis of Variance
Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       1  1450.0  1450.0  19.14  0.002
Residual Error   8   606.0    75.8
Total            9  2056.0

Predicted Values for New Observations
New
Obs    Fit  SE Fit       95% CI            95% PI
  1  79.06    2.84  (72.51, 85.61)  (57.95, 100.17)

Values of Predictors for New Observations
New
Obs     x
  1  50.0
```

Si desea, puede ahora graficar los puntos, la recta de regresión y los límites superiores e inferiores de confianza y predicción (véase la figura 12.16) usando **Stat** → **Regression** → **Fitted Line Plot**. Seleccione y y x para las variables de respuesta y predicción y dé un clic en “Display confidence interval” y “Display prediction interval” en el cuadro de diálogo **Options**. Asegúrese que **Linear** esté seleccionado como el “Type of Regression Model”, de modo que se obtenga un ajuste lineal a los datos.

Recuerde que en el capítulo 3 usamos el comando **Stat** → **Basic Statistics** → **Correlation** para obtener el valor del coeficiente de correlación r. Compruebe que la caja marcada “Display p-values” tenga una marca. La salida para este comando (usando los datos de prueba/calificación) se ilustra en la figura 12.24. Observe que el valor p para la prueba de $H_0 : \rho = 0$ sea idéntica al valor p para la prueba de $H_0 : \beta = 0$ porque las pruebas son exactamente equivalentes.

FIGURA 12.24



Ejercicios suplementarios

MIS DATOS EX1258

12.58 Potencia de un antibiótico Se realizó un experimento para observar el efecto de un aumento de temperatura en la potencia de un antibiótico. Tres porciones de una onza del antibiótico se almacenaron durante tiempos iguales a estas temperaturas: 30º, 50º, 70º y 90º. Las lecturas de potencia observada a cada una de estas temperaturas del periodo experimental se indican a continuación:

Lecturas de potencia, y	38, 43, 29	32, 26, 33	19, 27, 23	14, 19, 21
Temperatura, x	30°	50°	70°	90°

Use un programa de cómputo apropiado para contestar estas preguntas:

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados apropiada para estos datos.

b. Grafique los puntos y trace la recta como prueba en sus cálculos.

c. Construya una tabla ANOVA para regresión lineal.

d. Si dispone de ellas, examine las gráficas de diagnóstico para comprobar la validez de las suposiciones de regresión.

e. Estime el cambio en potencia para un cambio de 1 unidad en temperatura. Use un intervalo de confianza de 95%.

f. Estime el promedio de potencia correspondiente a una temperatura de 50º. Use un intervalo de confianza de 95%.

g. Suponga que un lote del antibiótico fue almacenado a 50º durante el mismo tiempo que el periodo experimental. Prediga la potencia del lote al término del periodo de almacenamiento. Use un intervalo de predicción de 95%.

MIS DATOS EX1259

12.59 Ciencia en plantas Se realizó un experimento para determinar el efecto en el suelo, de aplicaciones de varios niveles de fósforo, en los niveles de fósforo inorgánico en una planta particular. Los datos de la tabla representan los niveles de fósforo inorgánico en micromoles (μmol) por gramo de peso en seco de raíces de pasto de Sudán, producidas en invernadero durante 28 días, en ausencia de zinc. Use la salida impresa *MINITAB* para contestar las preguntas.

Fósforo aplicado, x	Fósforo en planta, y
.5 μmol	204
	195
	247
	245
.25 μmol	159
	127
	95
	144
.10 μmol	128
	192
	84
	71

a. Grafique los datos. ¿Le parece que los datos exhiben una relación lineal?

b. Encuentre la recta de mínimos cuadrados que relacione los niveles y de fósforo en planta con la cantidad x de fósforo aplicado al suelo. Grafique la recta de mínimos cuadrados como prueba de su respuesta.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la cantidad de fósforo presente en la planta está linealmente relacionada con la cantidad de fósforo aplicado al suelo?

d. Estime la cantidad media de fósforo en la planta si .20 μmol de fósforo se aplica al suelo, en ausencia de zinc. Use un intervalo de confianza de 90%.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.59

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = 80.9 + 271 x

Predictor        Coef     SE Coef         T        P
Constant        80.85       22.40      3.61    0.005
x              270.82       68.31      3.96    0.003

S = 39.0419     R-Sq = 61.1%     R-Sq(adj) = 57.2%

Predicted Values for New Observations
New Obs     Fit   SE Fit      90.0% CI          90.0% PI
1         135.0     12.6   (112.1,   157.9)  (60.6,   209.4)

Values of Predictors for New Observations
New Obs        x
1          0.200
```

MIS DATOS EX1260 **12.60 Estadísticas de pista** Se realizó un experimento para investigar el efecto de un programa de entrenamiento a lo largo del tiempo para que un estudiante universitario típico complete la carrera de 100 yardas. Nueve estudiantes se pusieron en el programa. La reducción y en el tiempo para completar la carrera de 100 yardas se midió para tres estudiantes y, al término de dos semanas, para tres al término de 4 semanas y para tres al término de 6 semanas de entrenamiento. Los datos se dan en la tabla siguiente:

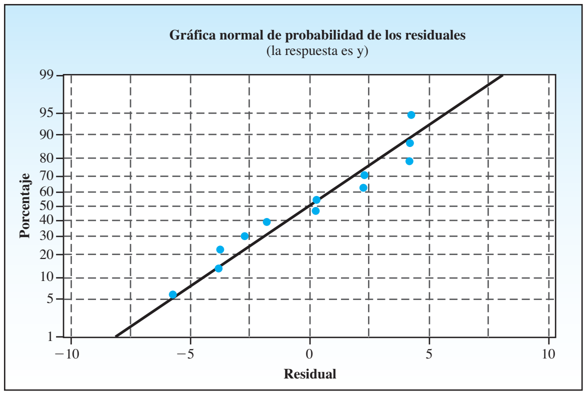
Reducción en tiempo, y (s)	1.6, .8, 1.0	2.1, 1.6, 2.5	3.8, 2.7, 3.1
Tiempo entrenamiento, x (semanas)	2	4	6

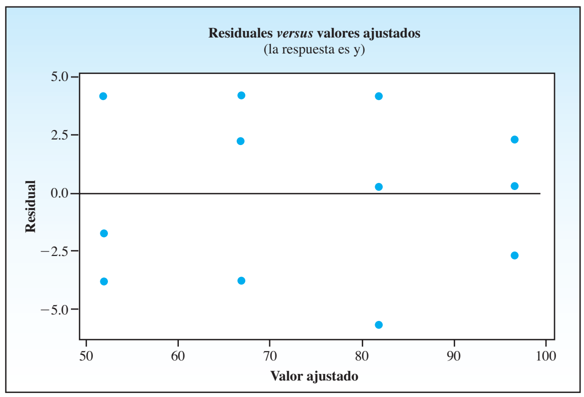
Use un paquete de software apropiado para analizar estos datos. Exprese cualesquiera conclusiones que pueda sacar.

MIS DATOS EX1261 **12.61 Nemátodos** Algunas variedades de nemátodos, gusanos que viven en el suelo y suelen ser tan pequeños que son invisibles a simple vista, se alimentan de raíces de hojas de pasto y de otras plantas. Esta plaga, que es particularmente molesta en climas cálidos, puede ser tratada por la aplicación de nematicidas. Los datos recolectados sobre el porcentaje de nemátodos muertos por varios rangos de aplicación (dosis dadas en libras por acre de ingrediente activo) son como sigue:

Rango de aplicación, x	2	3	4	5
Porcentaje muertos, y	50, 56, 48	63, 69, 71	86, 82, 76	94, 99, 97

Gráficas *MINITAB* de diagnóstico para el ejercicio 12.61





Use la salida impresa apropiada para contestar estas preguntas:

a. Calcule el coeficiente de correlación r entre porcentajes de aplicación x y porcentaje de muertes y.

b. Calcule el coeficiente de determinación r^2 e interprete.

c. Ajuste una recta de mínimos cuadrados a los datos.

d. Supongamos que usted desea estimar el porcentaje medio de muertes para una aplicación de 4 libras del nematicida por acre. ¿Qué nos dicen las gráficas de diagnóstico *MINITAB* acerca de la validez de las suposiciones de regresión? ¿Cuáles suposiciones pueden haber sido violadas? ¿Puede explicar por qué?

12.62 Lesiones en rodillas Es frecuente que algunos atletas y otras personas que sufren del mismo tipo de lesiones en las rodillas, requieran reconstrucción del ligamento anterior y posterior. Para determinar la longitud apropiada de injertos entre hueso, tendón rotuliano y otra vez hueso, se realizaron experimentos con el uso de tres técnicas de imágenes para determinar la longitud necesaria de los injertos y estos resultados se compararon con la longitud real requerida. Un resumen de los resultados de un análisis de regresión lineal simple, para cada uno de estos tres métodos, se da en la tabla siguiente.[15]

Técnica de imagen	Coeficiente de determinación, r^2	Punto de intersección	Pendiente	Valor p
Radiografías	0.80	−3.75	1.031	<0.0001
Resonancia magnética estándar	0.43	20.29	0.497	0.011
Resonancia magnética tridimensional	0.65	1.80	0.977	<0.0001

a. ¿Qué se puede decir acerca de la significancia de cada uno de los tres análisis de regresión?

b. ¿Cómo se clasificaría la efectividad de los tres análisis de regresión? ¿Cuál es la base de su decisión?

c. ¿Cómo se comparan los valores de r^2 y valores p para determinar el mejor pronosticador de longitudes reales de injerto de ligamento requerido?

MIS DATOS EX1263 **12.63 Exámenes de aprovechamiento II** Consulte el ejercicio 12.11 y el conjunto de datos EX1211 respecto a la relación entre el Índice de Aprovechamiento Académico (API), una medida del aprovechamiento escolar basada en los resultados del examen Stanford 9 Achievement y el porcentaje de estudiantes que son considerados Estudiantes del Idioma Inglés (ELL). La tabla siguiente muestra el API para ocho escuelas elementales en el condado de Riverside, California, junto con el porcentaje de estudiantes en esa escuela que son considerados Estudiantes del Idioma Inglés.[3]

Escuela	1	2	3	4	5	6	7	8
API	588	659	710	657	669	641	557	743
ELL	58	22	14	30	11	26	39	6

a. Use un programa apropiado para analizar la relación entre API y ELL.

b. Explique todos los detalles pertinentes en su análisis.

12.64 ¿Qué tan largo es? Consulte el ejercicio 12.12 y el conjunto de datos EX1212 respecto a la capacidad de una persona para estimar tamaños. La tabla siguiente da las longitudes estimadas y reales de los objetos especificados.

Objeto	Estimado (pulgadas)	Real (pulgadas)
Lápiz	7.00	6.00
Plato de comida	9.50	10.25
Libro 1	7.50	6.75
Teléfono celular	4.00	4.25
Fotografía	14.50	15.75
Juguete	3.75	5.00
Cinturón	42.00	41.50
Pinza para ropa	2.75	3.75
Libro 2	10.00	9.25
Calculadora	3.50	4.75

a. Use un programa apropiado para analizar la relación entre las longitudes real y estimada de los objetos citados.

b. Explique todos los detalles pertinentes de su análisis.

MIS DATOS EX1265 **12.65 Tenis, ¿quiere jugar?** Si usted juega tenis, sabe que las raquetas varían en sus características físicas. Los datos de la tabla siguiente dan medidas de rigidez al doblamiento y rigidez a la torcedura, medidas por pruebas de ingeniería para 12 raquetas de tenis:

Raqueta	Rigidez al doblamiento, x	Rigidez a la torcedura, y
1	419	227
2	407	231
3	363	200
4	360	211
5	257	182
6	622	304
7	424	384
8	359	194
9	346	158
10	556	225
11	474	305
12	441	235

a. Si una raqueta tiene rigidez al doblamiento, ¿también es probable que tenga rigidez a la torcedura? ¿Los datos dan evidencia de que x y y están correlacionados positivamente?

b. Calcule el coeficiente de determinación r^2 e interprete su valor.

MIS DATOS EX1266 **12.66 Investigación del aguacate** El movimiento de aguacates en Estados Unidos, desde ciertos lugares, está prohibido debido a la posibilidad de introducir moscas de la fruta al país con los embarques de aguacate. No obstante, ciertas variedades de aguacate supuestamente son resistentes a la infesta de moscas de la fruta antes de ablandarse como resultado de su madurez. Los datos de la tabla siguiente resultaron de un experimento en el que aguacates que iban de 1 a 9 días después de cosecharse fueron expuestos a la mosca de la fruta del Mediterráneo. La penetrabilidad de los aguacates se midió en el día de su exposición, evaluándose el porcentaje de aguacates infestados.

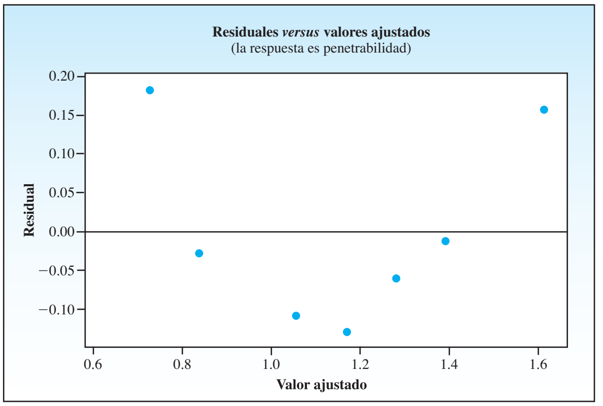
Días después de cosecha	Penetrabilidad	Porcentaje infestado
1	.91	30
2	.81	40
4	.95	45
5	1.04	57
6	1.22	60
7	1.38	75
9	1.77	100

Use la salida impresa *MINITAB* de la regresión del porcentaje infestado (y) en días después de cosecha (x), para analizar la relación entre estas dos variables. Explique todas las partes pertinentes de la salida impresa e interprete los resultados de cualesquiera pruebas.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.66

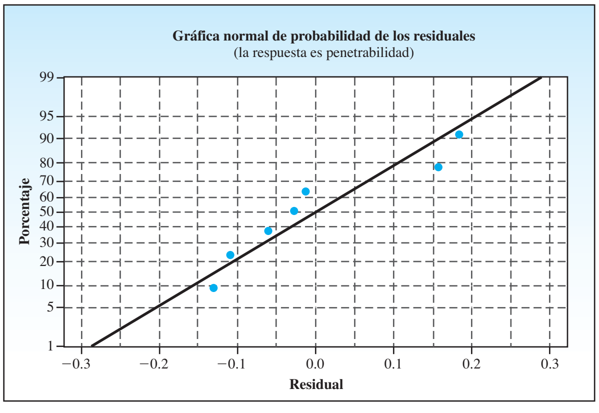
Análisis de regresión: Porcentaje *versus* x

```
The regression equation is
Percent = 18.4 + 8.18 x

Predictor      Coef    SE Coef      T      P
Constant     18.427      5.110   3.61  0.015
x            8.1768     0.9285   8.81  0.000

S = 6.35552    R-Sq = 93.9%    R-Sq(adj) = 92.7%

Analysis of Variance
Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       1  3132.9  3132.9  77.56  0.000
Residual Error   5   202.0    40.4
Total            6  3334.9
```



12.67 Aguacates II Consulte el ejercicio 12.66. Suponga que el experimentador desea examinar la relación entre la penetrabilidad y el número de días después de la cosecha. ¿El método de regresión lineal estudiado en este capítulo es un método apropiado de análisis? Si no es así, ¿qué suposiciones han sido violadas? Use las gráficas de diagnóstico *MINITAB* proporcionadas.

Gráficas de diagnóstico *MINITAB* para el ejercicio 12.67



MIS DATOS EX1268

12.68 Metabolismo y aumento de peso ¿Por qué razón una persona puede tender a aumentar de peso, incluso si no come más y se ejercita no menos que un amigo delgado? Estudios recientes sugieren que los factores que controlan el metabolismo pueden depender de su estructura genética. Un estudio comprendió 11 pares de gemelos idénticos alimentados con mil calorías al día más de lo necesario para mantener un peso inicial. Las actividades se mantuvieron constantes y el ejercicio fue mínimo. Al término de 100 días, los cambios en peso corporal (en kilogramos) se registraron para los 22 gemelos.[16] ¿Hay una correlación positiva significativa entre los cambios en peso corporal para los gemelos? ¿Se puede concluir que esta similitud es causada por semejanzas genéticas? Explique.

Par	Gemelo A	Gemelo B
1	4.2	7.3
2	5.5	6.5
3	7.1	5.7
4	7.0	7.2
5	7.8	7.9
6	8.2	6.4
7	8.2	6.5
8	9.1	8.2
9	11.5	6.0
10	11.2	13.7
11	13.0	11.0

MIS DATOS EX1269

12.69 Repaso de películas ¿Cuántas semanas puede exhibirse una película y todavía tener utilidades razonables? Los datos que siguen muestran el número de semanas en exhibición (x) y la suma total a la fecha (y) para las mejores 10 películas durante una semana reciente.[17]

Película	Suma total a la fecha (en millones)	Semanas en exhibición
1. *The Prestige*	\$14.8	1
2. *The Departed*	\$77.1	3
3. *Flags of Our Fathers*	\$10.2	1
4. *Open Season*	\$69.6	4
5. *Flicka*	\$ 7.7	1
6. *The Grudge 2*	\$31.4	2
7. *Man of the Year*	\$22.5	2
8. *Marie Antoinette*	\$ 5.3	1
9. *The Texas Chainsaw Massacre: The Beginning*	\$36.0	3
10. *The Marine*	\$12.5	2

Fuente: Entertainment Weekly

a. Grafique los puntos en una gráfica de dispersión. ¿Le parece que la relación entre x y y es lineal? ¿Cómo describiría usted la dirección y fuerza de la relación?

b. Calcule el valor de r^2. ¿Qué porcentaje de la población general se explica al usar el modelo lineal en lugar de $\bar{y}$ para predecir la variable de respuesta y?

c. ¿Cuál es la ecuación de regresión? ¿Los datos dan evidencia para indicar que x y y están relacionados linealmente? Pruebe usando un nivel de significancia de 5%.

d. Dados los resultados de los incisos b) y c), ¿es apropiado usar la recta de regresión para estimar y predecir? Explique su respuesta.

12.70 Además de límites cada vez más grandes en el error, ¿por qué un experimentador debe abstenerse de predecir y para valores de x fuera de la región experimental?

12.71 Si el experimentador continúa dentro de la región experimental, ¿cuándo será máximo el error al predecir un valor particular de y?

MIS DATOS EX1272 **12.72 Avena, ¿alguien quiere?** Un experimentador agrícola, investigando el efecto de la cantidad de nitrógeno x aplicada en 100 libras por acre en la producción de avena y, medida en búshels por acre, recolectó los siguientes datos:

x	1	2	3	4
y	22	38	57	68
	19	41	54	65

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos.

b. Construya la tabla ANOVA.

c. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que la producción de avena está linealmente relacionada con la cantidad de nitrógeno aplicada? Use $\alpha = .05$.

d. Prediga la producción esperada de avena con 95% de confianza si se aplican 250 libras de nitrógeno.

e. Estime el promedio de aumento en producción para un aumento de 100 libras de nitrógeno por acre con 99% de confianza.

f. Calcule r^2 y explique su significancia en términos de predecir y, la producción de avena.

MIS DATOS EX1273 **12.73 Rosas frescas** Un horticultor inventó una escala para medir la frescura de rosas que fueron empacadas y almacenadas durante periodos variables antes de trasplantarlas. La medición y de frescura y el tiempo x en días que la rosa está empacada y almacenada antes de trasplantarla, se dan a continuación.

x	5	10	15	20	25
y	15.3	13.6	9.8	5.5	1.8
	16.8	13.8	8.7	4.7	1.0

a. Ajuste una recta de mínimos cuadrados a los datos.

b. Construya la tabla ANOVA.

c. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que la frescura está linealmente relacionada con el tiempo de almacenaje? Use $\alpha = .05$.

d. Estime la rapidez media de cambio en frescura para un aumento de un día en tiempo de almacenaje, usando un intervalo de confianza de 98%.

e. Estime la medición esperada de frescura para un tiempo de almacenaje de 14 días con un intervalo de confianza de 95%.

f. ¿De qué valor es el modelo lineal con respecto a $\bar{y}$ para predecir la frescura?

MIS DATOS EX1274 **12.74 Lexus, Inc.** Los fabricantes del automóvil Lexus han aumentado continuamente sus ventas desde que lanzaron su auto en 1989 en Estados Unidos. No obstante, la rapidez de aumento cambió en 1996 cuando Lexus introdujo una línea de camiones. Las ventas de Lexus de 1996 a 2005 se indican en la tabla siguiente:[18]

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ventas (miles de vehículos)	80	100	155	180	210	224	234	260	288	303

Fuente: Adaptado de: *Automotive News,* 26 de enero 2004 y 22 de mayo 2006

a. Trace los puntos usando una gráfica de dispersión. ¿Cómo describiría usted la relación entre año y ventas del Lexus?

b. Encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados que relacione las ventas del Lexus y el año que se mida.

c. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que las ventas están linealmente relacionadas con el año? Use $\alpha = .05$.

d. Prediga las ventas del Lexus para el año 2006 usando un intervalo de confianza de 95%.

e. Si las hay, examine las gráficas de diagnóstico para verificar la validez de las suposiciones de regresión.

f. Si fuera usted a predecir las ventas del Lexus en el año 2015, ¿qué problemas podrían surgir con su predicción?

MIS DATOS EX1275

12.75 Starbucks Veamos a continuación algunos datos nutrimentales para un muestreo de productos Starbucks (16 onzas líquidas), tomadas del sitio web de la compañía, www.starbucks.com.[19] El conjunto completo de datos (starbucks.mtp) se puede hallar con los otros conjuntos de datos en el sitio web Student Companion.

Pantalla de datos

Row	Product	Calories	Fat Calories
1	CaffèMocha-nowhip	300	110
2	CaramelFrappuccino® BlendedCoffee-nowhip	280	30
3	ChocolateBrownie Frappuccino® BlendedCoffee-nowhip	370	80
4	ChocolateMalt Frappuccino® BlendedCrème-whip	610	200
5	EggnogLatte-nowhip	410	180
6	HotChocolate-nowhip	340	140
7	IcedCaffèMocha-whip	350	180
8	IcedWhiteChocolate Mocha-whip	490	210
9	MochaFrappuccino® BlendedCoffee-whip	420	150
10	PeppermintMocha-nowhip	370	110
11	Tazo®ChaiCrème Frappuccino® BlendedTea-nowhip	370	40
12	ToffeeNutCrème-whip	460	220
13	ToffeNutLatte-nowhip	330	120
14	VanillaFrappuccino® BlendedCrème-whip	480	150
15	WhiteHotChocolate-whip	580	250

Pantalla de datos *(continuación)*

Row	Total Fat (g)	Saturated Fat (g)	Cholesterol (mg)
1	12.0	7	40
2	3.5	2	15
3	9.0	6	15
4	22.0	11	65
5	20.0	12	115
6	15.0	8	50
7	20.0	12	75
8	24.0	16	75
9	16.0	10	65
10	12.0	6	40
11	4.5	1	<5
12	24.0	15	100
13	13.0	8	50
14	17.0	9	55
15	28.0	19	95

Row	Sodium (mg)	Total Carbs (g)	Fiber (g)	Sugar (g)	Protein (g)
1	150	41	2	31	13
2	250	57	0	48	5
3	310	69	2	56	7
4	430	90	2	72	15
5	240	41	0	38	17
6	190	42	2	35	15
7	105	37	2	27	9
8	220	58	0	54	11
9	260	61	0	51	6
10	150	59	2	49	13
11	370	69	0	64	15
12	380	45	0	44	14
13	340	41	0	38	13
14	380	66	0	62	15
15	310	65	0	64	17

Use los métodos estadísticos apropiados para analizar las relaciones entre algunas de las variables nutrimentales dadas en la tabla. Escriba un informe en resumen que explique algunas conclusiones que pueda sacar de su análisis.

MI APPLET Ejercicios

Usted puede hacer recordatorio sobre rectas de regresión y el coeficiente de correlación si hace los Ejercicios Mi-Applet del final del capítulo 3.

12.76 **a.** Grafique la recta correspondiente a la ecuación $y = 0.5x + 3$ al graficar los puntos correspondientes a $x = 0$, 1 y 2. Dé el punto de intersección con el eje y y la pendiente de la recta.

b. Verifique su gráfica usando el applet **How a Line Works**.

12.77 **a.** Grafique la recta correspondiente a la ecuación $y = -0.5x + 3$ al graficar los puntos correspondientes a $x = 0$, 1 y 2. Dé el punto de cruce con el eje y y la pendiente de la recta.

b. Verifique su gráfica usando el applet **How a Line Works**.

c. ¿Cómo está relacionada esta recta con la recta $y = 0.5x + 3$ del ejercicio 12.76?

12.78 La salida impresa *MINITAB* para los datos de la tabla 12.1 se muestra a continuación.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 12.78.

Análisis de regresión: y *versus* x

```
The regression equation is
y = 40.8 + 0.766 x

Predictor       Coef    SE Coef       T       P
Constant      40.784      8.507    4.79   0.001
x             0.7656     0.1750    4.38   0.002

S = 8.70363    R-Sq = 70.5%    R-Sq(adj) = 66.8%

Analysis of Variance
Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       1  1450.0  1450.0  19.14  0.002
Residual Error   8   606.0    75.8
Total            9  2056.0
```

a. Use el applet **Method of Least Squares** para hallar los valores de a y b que determinan la *recta de mejor ajuste*, $\hat{y} = a + bx$. Cuando piense que ha reducido SSE al mínimo, dé un clic en el botón Find Best Model y vea qué tan bien la hizo. ¿Cuál es la ecuación de la recta? ¿Se compara con la ecuación de regresión dada en la salida impresa *MINITAB*?

b. Encuentre los valores de SSE y r^2 en el applet **Method of Least Squares**. Encuentre estos valores en la salida impresa *MINITAB* y confirme que sean iguales.

c. Use los valores de b y su error estándar SE(b) de la salida impresa *MINITAB* junto con el applet ***t*-Test for the Slope** para verificar el valor de la estadística t y su valor p, dado en la salida impresa.

12.79 Use el primer applet en **Building a Scatterplot** para crear una gráfica de dispersión para los datos de la tabla 12.1. Verifique su gráfica usando la figura 12.2.

MIS DATOS EX1274

12.80 Zapatos tenis ¿Su satisfacción general con su nuevo par de zapatos tenis está correlacionada con el costo de los zapatos? Las puntuaciones de satisfacción y precios se registraron para nueve diferentes estilos y marcas de tenis para hombre, con los siguientes resultados:[20]

Marca y estilo	Precio	Puntos
New Balance MW 791	$75	89
Saucony Grid Omni Walker	90	84
Asics Gel-Walk Tech	60	83
New Balance MW 557	60	83
Etonic Lite Walker	60	79
Nike Air Max Healthwalker V	70	78
Rockport Astride	90	75
Rockport WT Classic	90	72
Reebok Move DMX Max	60	67

Fuente: "Ratings: Walking Shoes", *Consumer Reports*, octubre de 2006, p. 52.

a. Calcule el coeficiente de correlación r entre precio y puntos generales. ¿Cómo describiría usted la relación entre precio y puntos generales?

b. Use el applet llamado **Correlation and the Scatterplot** para graficar los nueve puntos. ¿Cuál es el coeficiente de correlación mostrado en el applet? Compare con el valor que calculó en el inciso a).

c. Describa la forma que vea en la gráfica de dispersión. ¿Hay algún resultado atípico? Si es así, ¿cómo lo explicaría?

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Autos extranjeros

¿Su auto está "Hecho en EE.UU."?

La frase "Hecho en EE.UU." se ha convertido en un conocido grito de batalla porque los trabajadores de Estados Unidos tratan de proteger sus trabajos de la competencia extranjera. En las últimas décadas, un importante desequilibrio en la balanza comercial en Estados Unidos ha estado causando una inundación de productos importados que entran al país y se venden a menor costo que artículos comparables hechos en él. Una preocupación principal es la industria automotriz, en la que el número de autos importados aumentó continuamente durante las décadas de 1970 y 1980. La industria automotriz de ese país ha estado siendo acosada con quejas por la calidad de sus productos, despidos de trabajadores y altos precios, y ha gastado miles de millones de dólares en publicidad e investigación para producir un auto hecho en Estados Unidos que satisfaga las demandas del consumidor. ¿Han tenido éxito para detener la inundación de autos importados comprados por consumidores estadounidenses? Los datos de la tabla siguiente representan los números de autos importados y vendidos en Estados Unidos (en millones) durante los años 1969-2005.[21] Para simplificar el análisis, hemos codificado el año usando la variable codificada x = Año – 1969.

Año	(Año − 1969), x	Número de autos importados, y	Año	(Año − 1969), x	Número de autos importados, y
1969	0	1.1	1987	18	3.1
1970	1	1.3	1988	19	3.1
1971	2	1.6	1989	20	2.8
1972	3	1.6	1990	21	2.5
1973	4	1.8	1991	22	2.1
1974	5	1.4	1992	23	2.0
1975	6	1.6	1993	24	1.8
1976	7	1.5	1994	25	1.8
1977	8	2.1	1995	26	1.6
1978	9	2.0	1996	27	1.4
1979	10	2.3	1997	28	1.4
1980	11	2.4	1998	29	1.4
1981	12	2.3	1999	30	1.8
1982	13	2.2	2000	31	2.1
1983	14	2.4	2001	32	2.2
1984	15	2.4	2002	33	2.3
1985	16	2.8	2003	34	2.2
1986	17	3.2	2004	35	2.2
			2005	36	2.3

1. Usando una gráfica de dispersión, grafique los datos para los años 1969-1988. ¿Le parece que hay una relación lineal entre el número de autos importados y el año?
2. Use un paquete de software para hallar la recta de mínimos cuadrados para predecir el número de autos importados como función del año para los años 1969-1988.
3. ¿Hay una relación lineal significativa entre el número de autos importados y el año?
4. Use el programa de cómputo para predecir el número de autos que serán importados usando intervalos de predicción de 95% para cada uno de los años 2003, 2004 y 2005.
5. Ahora vea los datos reales para los años 2003-2005. ¿Las predicciones obtenidas en el paso 4 dan estimaciones precisas de los valores *reales* observados en estos años? Explique.
6. Agregue los datos para 1989-2005 a su base de datos y recalcule la recta de regresión. ¿Qué efecto tienen los nuevos puntos sobre la pendiente? ¿Cuál es el efecto en el SSE?
7. Dada la forma de la gráfica de dispersión para los años 1969-2005, ¿le parece que una recta da un modelo preciso para los datos? ¿Qué otro tipo de modelo podría ser más apropiado? (Use gráficas residuales para ayudar a contestar esta pregunta.)

13

Análisis de regresión múltiple

OBJETIVO GENERAL

En este capítulo, extendemos los conceptos de regresión y correlación lineales a una situación donde el valor promedio de una variable aleatoria y está relacionada con varias variables independientes, que son x_1, x_2, . . ., x_k, en modelos que son más flexibles que el modelo de recta del capítulo 12. Con el *análisis de regresión múltiple*, podemos usar la información proporcionada por las variables independientes para ajustar varios tipos de modelos a los datos muestrales, para evaluar la utilidad de estos modelos y finalmente para estimar el valor promedio de y o predecir el valor real de y para valores dados de x_1, x_2, . . ., x_k.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

"Hecho en EE.UU."; otra mirada

En el capítulo 12, empleamos análisis de regresión lineal simple para tratar de predecir el número de autos importados en Estados Unidos en un periodo de años. Desafortunadamente, el número de autos importados no sigue en realidad un modelo de tendencia lineal y nuestras predicciones estuvieron lejos de ser precisas. Examinamos de nuevo los mismos datos al final de este capítulo, usando los métodos de análisis de regresión múltiple.

13.1 INTRODUCCIÓN

La **regresión lineal múltiple** es una extensión de regresión lineal simple para tomar en cuenta más de una variable independiente. Esto es, en lugar de usar sólo una variable independiente x para explicar la variación en y, se pueden usar simultáneamente varias variables independientes (o elementos de predicción). Con el uso de más de una variable independiente, se debe hacer un mejor trabajo de explicar la variación en y y en consecuencia hacer predicciones más precisas.

Por ejemplo, las ventas regionales y del producto de una compañía podrían estar relacionadas con tres factores:

- x_1: la cantidad gastada en publicidad en televisión
- x_2: la cantidad gastada en publicidad en periódicos
- x_3: el número de vendedores asignados a la región

Un investigador recolectaría datos para medir las variables y: x_1, x_2 y x_3, y luego usaría estos datos muestrales para construir una ecuación de predicción que relacionara y con las tres variables predictoras. Desde luego que aparecen varias preguntas, al igual que con regresión lineal simple:

- ¿Qué tan bien se ajusta el modelo?
- ¿Qué tan fuerte es la relación entre y y las variables predictoras?
- ¿Se han violado suposiciones importantes?
- ¿Qué tan buenas son las estimaciones y predicciones?

Para contestar estas preguntas se pueden usar métodos de **análisis de regresión múltiple**, que casi siempre se hacen con un programa de cómputo. Este capítulo contiene una breve introducción al análisis de regresión múltiple y a la difícil tarea de construcción de modelos, es decir, escoger el modelo correcto para una aplicación práctica.

13.2 EL MODELO DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

El **modelo de regresión múltiple** para un análisis de regresión múltiple describe una respuesta particular y usando el modelo que damos a continuación.

MODELO Y SUPOSICIONES LINEALES GENERALES

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon$$

donde

- y es la **variable de respuesta** que se desea predecir.
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ son constantes desconocidas.
- $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son **variables predictoras** independientes que se miden sin error.
- ϵ es el error de variable, que permite que cada respuesta se desvíe del valor promedio de y en una cantidad ϵ. Se debe suponer que los valores de ϵ:1) son independientes; 2) tienen una media de 0 y una varianza común σ^2 para cualquier conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y 3) están normalmente distribuidas.

Cuando se satisfagan estas suposiciones acerca de ϵ, el valor *promedio* de y para un conjunto dado de valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ es igual a la parte *determinista* del modelo:

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

Observe que el modelo y suposiciones de regresión simple son *muy semejantes* al modelo y suposiciones empleados para regresión lineal. Es probable que no lo sorprenda el que los procedimientos de prueba y estimación también sean extensiones de los empleados en el capítulo 12.

Los modelos de regresión simple son muy flexibles y pueden tomar muchas formas, dependiendo de la forma en que las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ se introduzcan en el modelo. Empezamos con un simple modelo de regresión múltiple, explicando los conceptos y procedimientos básicos con un ejemplo. A medida que nos familiaricemos con los procedimientos de regresión múltiple, aumentamos la complejidad de los ejemplos y veremos que los mismos procedimientos se pueden usar para modelos de formas diferentes, dependiendo de la aplicación particular.

EJEMPLO 13.1

Suponga que se desea relacionar una variable aleatoria y con dos variables independientes x_1 y x_2. El modelo de regresión múltiple es

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$$

con el valor medio de y dado como

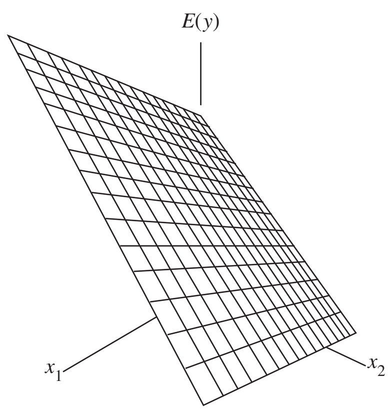
$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

Esta ecuación es una extensión en tres dimensiones de la **recta de medias** del capítulo 12 y traza un **plano** en el espacio tridimensional (véase la figura 13.1). La constante β_0 se denomina **punto de cruce**, que es el valor promedio de y cuando x_1 y x_2 son 0 ambas. Los coeficientes β_1 y β_2 se denominan **pendientes parciales** o **coeficientes de regresión parciales**. La pendiente parcial β_i (para $i = 1$ o 2) mide el cambio en y para un cambio unitario en x_i cuando *todas las otras variables independientes se mantengan constantes.* El valor del coeficiente de regresión parcial, por ejemplo β_1, con x_1 y x_2 en el modelo generalmente *no* es igual que la pendiente cuando se ajuste una recta sólo con x_1. Estos coeficientes son las constantes desconocidas, que deben ser estimadas usando datos muestrales para obtener la ecuación de predicción.

MI CONSEJO

En lugar de x y y graficadas en un espacio en dos dimensiones, y y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tienen que graficarse en $(k + 1)$ dimensiones.

FIGURA 13.1
Plano de medias para el ejemplo 13.1



13.3 UN ANÁLISIS DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

Un análisis de regresión múltiple comprende procedimientos de estimación, prueba y diagnóstico diseñados para ajustar el modelo de regresión múltiple

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

a un conjunto de datos. Debido a la complejidad de los cálculos involucrados, estos procedimientos casi siempre se ponen en práctica con un programa de regresión de uno de los varios paquetes de software. Todos dan resultados similares en formas ligeramente diferentes. Seguimos con patrones básicos puestos en regresión lineal simple, empezando con un resumen de los procedimientos generales e ilustrados con un ejemplo.

El método de mínimos cuadrados

La ecuación de predicción

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k$$

es la recta que reduce la SSE al mínimo, la suma de cuadrados de las desviaciones de los valores y observados en los valores pronosticados $\hat{y}$. Estos valores se calculan usando un programa de regresión.

EJEMPLO 13.2

¿En qué forma los vendedores de bienes raíces determinan el precio de venta para un condominio recién inscrito en lista? La base de datos de una computadora en una pequeña comunidad contiene el precio de venta de lista y (en miles de dólares), la cantidad de área de vivienda x_1 (en cientos de pies cuadrados), así como los números de pisos x_2, recámaras x_3 y baños x_4, para $n = 15$ condominios seleccionados al azar actualmente en el mercado. Los datos se muestran en la tabla 13.1.

TABLA 13.1 **Datos sobre 15 condominios**

Observación	Precio de lista, y	Área de vivienda, x_1	Pisos, x_2	Recámaras, x_3	Baños, x_4
1	169.0	6	1	2	1
2	218.5	10	1	2	2
3	216.5	10	1	3	2
4	225.0	11	1	3	2
5	229.9	13	1	3	1.7
6	235.0	13	2	3	2.5
7	239.9	13	1	3	2
8	247.9	17	2	3	2.5
9	260.0	19	2	3	2
10	269.9	18	1	3	2
11	234.9	13	1	4	2
12	255.0	18	1	4	2
13	269.9	17	2	4	3
14	294.5	20	2	4	3
15	309.9	21	2	4	3

El modelo de regresión múltiple es

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4$$

que se ajusta usando el paquete de software *MINITAB*. En la sección "Mi *MINITAB*", al final de este capítulo, se pueden hallar instrucciones para generar esta salida. La primera parte de la salida de regresión se ve en la figura 13.2. Se encontrará la ecuación de regresión ajustada en los primeros dos renglones de la salida impresa:

$$\hat{y} = 119 + 6.27x_1 - 16.2x_2 - 2.67x_3 + 30.3x_4$$

Los coeficientes de regresión parcial se muestran con ligeramente más precisión en la segunda sección. Las columnas son una lista del nombre dado a cada variable independiente de pronóstico, su coeficiente de regresión estimado, su error estándar y los valores t y p que se usan para probar su significancia *en presencia de todas las otras variables predictoras.* En una sección más adelante explicamos estas pruebas con más detalle.

FIGURA 13.2
Parte de la salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 13.2

Análisis de regresión: lista de precios contra pies cuadrados, número de pisos, recámaras, baños

```
The regression equation is
List Price = 119 + 6.27 Square Feet - 16.2 Number of Floors
           - 2.67 Bedrooms + 30.3 Baths

Predictor              Coef      SE Coef        T        P
Constant            118.763        9.207     12.90    0.000
Square Feet          6.2698       0.7252      8.65    0.000
Number of Floors    -16.203        6.212     -2.61    0.026
Bedrooms             -2.673        4.494     -0.59    0.565
Baths                30.271        6.849      4.42    0.001
```

El análisis de varianza para regresión múltiple

El análisis de varianza divide la variación total en la variable de respuesta y,

$$\text{SS Total} = \Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{n}$$

en dos partes:

- La SSR (suma de cuadrados para regresión) mide la cantidad de variación explicada usando la ecuación de regresión.
- La SSE (suma de cuadrados para error) mide la variación residual en los datos que no está explicada por las variables independientes.

de modo que

$$\text{SS Total} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

Los **grados de libertad** para estas sumas de cuadrados se encuentran usando el siguiente argumento. Hay $(n - 1)$ grados de libertad en total. Estimar la recta de regresión requiere estimar k coeficientes desconocidos; la constante b_0 es una función de $\bar{y}$ y de las otras estimaciones. En consecuencia, hay k grados de libertad de regresión, dejando $(n - 1) - k$ grados de libertad para error. Al igual que en capítulos previos, las medias cuadráticas se calculan como $\text{MS} = \text{SS}/df$.

La tabla ANOVA para los datos de bienes raíces de la tabla 13.1 se muestran en la segunda parte de la salida impresa *MINITAB* en la figura 13.3. Hay $n = 15$ observaciones y $k = 4$ variables predictoras independientes. Se puede verificar que el total de grados de libertad, $(n - 1) = 14$, se divide en $k = 4$ para regresión y $(n - k - 1) = 10$ para error.

FIGURA 13.3
Parte de la salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 13.2

```
S = 6.84930       R-Sq = 97.1%     R-Sq(adj) = 96.0%

Analysis of Variance
Source           DF         SS         MS        F        P
Regression        4    15913.0     3978.3    84.80    0.000
Residual Error   10      469.1       46.9
Total            14    16382.2

Source               DF     Seq SS
Square Feet           1    14829.3
Number of Floors      1        0.9
Bedrooms              1      166.4
Baths                 1      916.5
```

La mejor estimación de la variable aleatoria σ^2 en el experimento, es decir la variación que no es explicada por las variables predictoras, como de costumbre está dada por

$$s^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n - k - 1} = 46.9$$

de la tabla ANOVA. El primer renglón de la figura 13.3 también muestra $s = \sqrt{s^2} = 6.84930$ usando precisión de computadora. La computadora usa estos valores internamente para producir estadísticas de prueba, intervalos de confianza e intervalos de predicción, que estudiaremos en secciones subsiguientes.

La última sección de la figura 13.3 muestra una descomposición de SSR = 15 913.0 en que la contribución condicional de cada variable de predicción *dadas las variables ya introducidas en el modelo* se muestra para el orden de entrada que se especifique en el programa de regresión. Para el ejemplo de bienes raíces, el programa *MINITAB* introdujo las variables en este orden: pies cuadrados, seguido de números de pisos, recámaras y baños. Estas **sumas de cuadrados secuenciales** o condicionales constituyen uno de los $k = 4$ grados de libertad de regresión. Es interesante observar que la variable de predicción x_1 por sí sola es 14 829.3/15 913.0 = .932 o 93.2% de la variación total explicada por el modelo de regresión, pero, si cambia el orden de entrada, otra variable puede ser la parte principal de la suma de cuadrados de regresión.

Prueba de la utilidad del modelo de regresión

Recuerde que en el capítulo 12 probó ver si y y x estaban linealmente relacionadas al probar $H_0 : \beta = 0$ con una prueba t o una prueba F equivalente. En regresión múltiple, hay más de una *pendiente parcial*, que son los *coeficientes de regresión parcial*. Las pruebas t y F ya no son equivalentes.

El análisis de varianza de la prueba *F*

La ecuación de regresión que usa información dada por las variables predictoras $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ¿es sustancialmente mejor que la predictora simple $\bar{y}$ que no se apoya en ninguno de los valores de x? Esta pregunta se contesta usando una prueba F general con las hipótesis:

> **MI CONSEJO**
> La prueba *F* general (para la significancia del modelo) en regresión múltiple es de una cola.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$

contra

$$H_a : \text{Al menos una de } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \text{ no es } 0$$

La estadística de prueba se encuentra en la tabla ANOVA (figura 13.3) como

$$F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = \frac{3978.3}{46.9} = 84.80$$

que tiene una distribución F con $df_1 = k = 4$ y $df_2 = (n - k - 1) = 10$. Como el valor p, $P = .000$, está dado en la salida impresa, se puede declarar que la regresión es altamente significativa. Esto es, al menos una de las variables predictoras está aportando información significativa para la predicción de la variable de respuesta y.

El coeficiente de determinación, R^2

> **MI CONSEJO**
> Las salidas impresas *MINITAB* informan de R^2 como un porcentaje más que una proporción.

¿Qué tan bien se ajusta el modelo de regresión? La salida impresa da una medida estadística de la fuerza del modelo en el **coeficiente de determinación**, $\boldsymbol{R^2}$; es decir, la proporción de la variación total que es explicada por la regresión de y en $x_1, x_2, \ldots, x_k$, definida como

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SS Total}} = \frac{15\,913.0}{16\,382.2} = .971 \quad \text{o } 97.1\%$$

MI CONSEJO

R^2 es la multivariada equivalente de r^2, empleada en regresión lineal.

El coeficiente de determinación se denomina a veces **múltiplo R^2** y se encuentra en el primer renglón de la figura 13.3, marcado "R-Sq". En consecuencia, para el ejemplo de bienes raíces, 97.1% de la variación total ha sido explicado por el modelo de regresión. El modelo se ajusta muy bien.

Puede ser útil saber que el valor del estadístico F está relacionado con R^2 por la fórmula

$$F = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/(n - k - 1)}$$

de manera que R^2 es grande, F es grande y viceversa.

Interpretación de los resultados de una regresión significativa

Prueba de la significancia de los coeficientes de regresión parcial

MI CONSEJO

Se puede demostrar que $F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/(n - k - 1)}$

Una vez que hayamos determinado que el modelo es útil para predecir y, debemos explorar la naturaleza de la "utilidad" en más detalle. ¿Todas las variables predictoras agregan información importante para la predicción *en presencia de otras variables predictoras que ya están en el modelo?* Las pruebas t individuales de la primera sección de la salida impresa de regresión están diseñadas para probar las hipótesis

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad \text{contra} \quad H_a : \beta_i \neq 0$$

para cada uno de los coeficientes de regresión, *dado que las otras variables predictoras ya están en el modelo.* Estas pruebas están basadas en la estadística t de Student dada por

$$t = \frac{b_i - \beta_i}{\text{SE}(b_i)}$$

que tiene $df = (n - k - 1)$ grados de libertad. El procedimiento es idéntico al empleado para probar una hipótesis acerca de la pendiente β del modelo de regresión lineal simple.†

MI CONSEJO

Pruebe la significancia del coeficiente individual β_i, usando pruebas t.

La figura 13.4 muestra las pruebas t y los valores p de la parte superior de la salida impresa *MINITAB*. Al examinar los valores p de la última columna, se puede ver que todas las variables *excepto* x_3, el número de recámaras, agregan suficiente información para predecir y, **aún con todas las otras variables independientes del modelo**. ¿Podría ser mejor el modelo? Pudiera ser que x_3 sea una variable de predicción innecesaria. Una opción es eliminar esta variable y reajustar el modelo con un nuevo conjunto de datos.

FIGURA 13.4
Parte de la salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 13.2

```
Predictor              Coef      SE Coef        T       P
Constant            118.763        9.207    12.90   0.000
Square Feet          6.2698       0.7252     8.65   0.000
Number of Floors    -16.203        6.212    -2.61   0.026
Bedrooms             -2.673        4.494    -0.59   0.565
Baths                30.271        6.849     4.42   0.001
```

El valor de R^2 ajustado

Observe de la definición de R^2 = SSR/SS Total que su valor nunca puede disminuir con la adición de más variables en el modelo de regresión. En consecuencia, R^2 puede estar artificialmente inflada por la inclusión de más y más variables predictoras.

† Algunos paquetes usan el estadístico t que acabamos de describir, mientras que otros usan el estadístico F equivalente ($F = t^2$), puesto que el cuadrado de un estadístico t con v grados de libertad es igual a un estadístico F con 1 df en el numerador y v grados de libertad en el denominador.

Una medida alternativa de la fuerza del modelo de regresión se ajusta para grados de libertad con el uso de cuadráticas medias en lugar de sumas de cuadrados:

$$R^2(\text{adj}) = \left(1 - \frac{\text{MSE}}{\text{SS Total}/(n-1)}\right)100\%$$

MI CONSEJO

Use R^2(adj) para comparar uno o más modelos posibles.

Para los datos de bienes raíces de la figura 13.3,

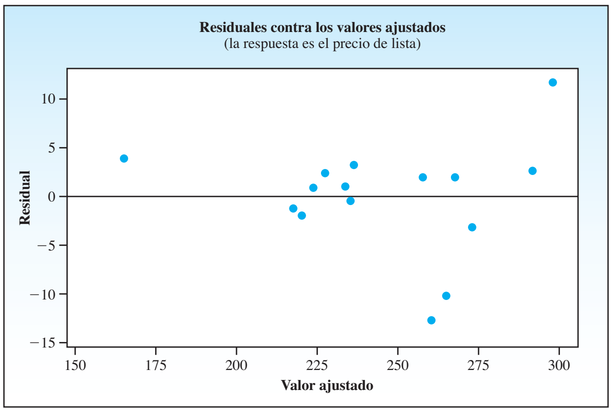
$$R^2(\text{adj}) = \left(1 - \frac{46.9}{16\,382.2/14}\right)100\% = 96.0\%$$

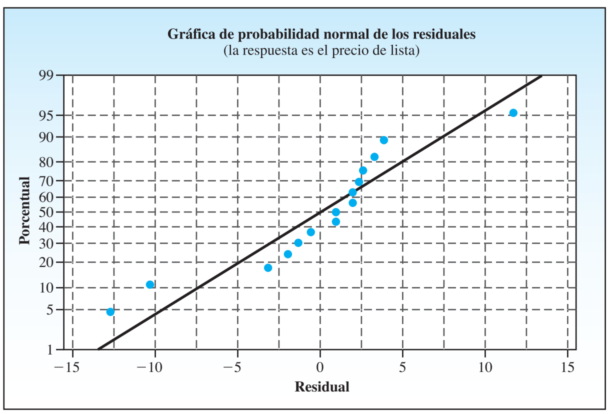
se encuentra en el primer renglón de la salida impresa. El valor "R-Sq(adj) = 96.0%" representa el porcentaje de variación en la respuesta y explicada por las variables independientes, corregida para grados de libertad. El valor ajustado de R^2 se usa principalmente para comparar dos o más modelos de regresión que usan números diferentes de variables predictoras independientes.

Comprobación de suposiciones de regresión

Antes de usar el modelo de regresión para su propósito principal, que es estimar y predecir y, deben verse **gráficas residuales** generadas por computadora para asegurarse que sean válidas todas las suposiciones de regresión. La *gráfica de normal de probabilidad* y la *gráfica de residuales contra ajuste* se presentan en la figura 13.5 para los datos de bienes raíces. Parece haber tres observaciones que no se ajustan al patrón general. Se pueden ver como resultados atípicos en ambas gráficas. Es probable que estas tres observaciones deban investigarse, pero no dan fuerte evidencia de que las suposiciones se han violado.

FIGURA 13.5
Gráficas de diagnóstico *MINITAB*





Uso del modelo de regresión para estimación y predicción

MI CONSEJO

Para valores dados de x_1, x_2, …, x_k, el intervalo de predicción **siempre** será más ancho que el intervalo de confianza.

Finalmente, una vez que se haya determinado que el modelo es efectivo para describir la relación entre y y las variables predictoras $x_1, x_2, \ldots, x_k$, el modelo se puede usar para estos fines:

- Estimar el valor promedio de y, $E(y)$, para valores dados de $x_1, x_2, \ldots, x_k$
- Predecir un valor particular de y para valores dados de $x_1, x_2, \ldots, x_k$

Los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ se introducen en la computadora y ésta genera el valor ajustado $\hat{y}$ junto con su error estándar estimado y los intervalos de confianza y predicción. Recuerde que el intervalo de predicción es *siempre más ancho* que el intervalo de confianza.

Veamos qué tan bien funciona nuestra predicción para los datos de bienes raíces, usando otra casa de la base de datos de la computadora, una casa con 1000 pies cuadrados de superficie de vivienda, un piso, tres recámaras y dos baños, con precio de lista de $221 500. La salida impresa de la figura 13.6 muestra los intervalos de confianza y predicción para estos valores. El valor real cae dentro de dos intervalos, lo que indica que el modelo está funcionando muy bien.

FIGURA 13.6

Intervalos de confianza y predicción para el ejemplo 13.2

```
Predicted Values for New Observations
New Obs      Fit      SE Fit          95% CI              95% PI
1         217.78        3.11    (210.86,  224.70)  (201.02,  234.54)

Values of Predictors for New Observations
New      Square    Number of
Obs        Feet       Floors      Bedrooms     Baths
1          10.0         1.00          3.00      2.00
```

13.4 UN MODELO DE REGRESIÓN POLINOMIAL

En la sección 13.3 explicamos en detalle las diversas partes de la salida impresa de regresión múltiple. Cuando se efectúa un análisis de regresión múltiple, se debe usar un método de paso a paso:

1. Obtener el modelo de predicción ajustada.
2. Usar el análisis de varianza de la prueba F y R^2 para determinar qué tan bien se ajusta el modelo a los datos.
3. Verificar las pruebas t para los coeficientes de regresión parcial para ver cuáles están aportando información significativa en presencia de los otros.
4. Si se escoge comparar varios modelos diferentes, use R^2(adj) para comparar su efectividad.
5. Usar gráficas residuales generadas por computadora para ver si hay violación de las suposiciones de regresión.

MI CONSEJO

Una ecuación cuadrática es $y = a + bx + cx^2$. La gráfica forma una **parábola.**

Una vez tomados todos estos pasos, estamos listos para usar el modelo para estimación y predicción.

Las variables predictoras $x_1, x_2, \ldots, x_k$ empleadas en el modelo lineal general no tienen que representar variables predictoras *diferentes*. Por ejemplo, si se sospecha que una variable independiente x afecta la respuesta y, pero que la relación es *curvilínea* más que *lineal*, entonces se podría escoger ajustar a un **modelo cuadrático**:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \epsilon$$

El modelo cuadrático es un ejemplo de un **modelo de segundo orden** porque contiene un término cuyos exponentes suman 2 (en este caso, x^2).† También es un ejemplo de un **modelo polinomial**, un modelo que toma la forma

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

Para ajustar este tipo de modelo usando el programa de regresión múltiple, los valores observados de y, x y x^2 se introducen en la computadora y la salida impresa se puede generar como en la sección 13.3.

EJEMPLO 13.3

En un estudio de variables que afecta la productividad en el comercio de comestibles al menudeo, W.S. Good usa valor agregado por hora de trabajo para medir la productividad de tiendas de comestibles al menudeo.[1] Él define "valor agregado" como "el excedente [dinero generado por el negocio] disponible para pagar empleados, mobiliario y enseres, y equipo". Los datos consistentes con la relación entre valor agregado por hora de trabajo y y el tamaño x de una tienda de comestibles descrita en el artículo de Good, se muestran en la tabla 13.2 para 10 tiendas de alimentos ficticias. Escoja un modelo para relacionar y con x.

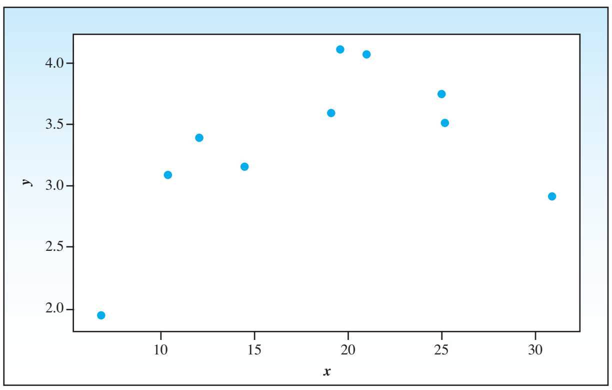
TABLA 13.2 **Datos sobre tamaño de tienda y valor agregado**

Tienda	Valor agregado por hora de trabajo, y	Tamaño de tienda (miles de pies cuadrados), x
1	\$4.08	21.0
2	3.40	12.0
3	3.51	25.2
4	3.09	10.4
5	2.92	30.9
6	1.94	6.8
7	4.11	19.6
8	3.16	14.5
9	3.75	25.0
10	3.60	19.1

Solución Se puede investigar la relación entre y y x al ver la gráfica de los puntos en la figura 13.7. La gráfica sugiere que la productividad, y, aumenta cuando el tamaño de la tienda de comestibles, x, aumenta hasta alcanzar un tamaño óptimo. Arriba de ese tamaño, la productividad tiende a disminuir. La relación parece ser *curvilínea* y un modelo cuadrático,

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

FIGURA 13.7 Gráfica del tamaño x y valor agregado y para el ejemplo 13.3



† El *orden* de un término está determinado por la suma de los exponentes de variables que conforman ese término. Los términos que contienen x_1 o x_2 son de primer orden; los que contienen x_1^2, x_2^2 o x_1x_2 son de segundo orden.

puede ser apropiado. Recuerde que, al escoger usar este modelo, no estamos diciendo que la verdadera relación sea cuadrática, sino sólo que puede dar estimaciones y predicciones más precisas que, por ejemplo, un modelo lineal.

EJEMPLO 13.4

Consulte los datos sobre productividad de una tienda minorista de alimentos del ejemplo 13.3. Se utilizó el *MINITAB* para ajustar un modelo cuadrático a los datos y para graficar la curva cuadrática de predicción, junto con los puntos de datos graficados. Analice lo adecuado del modelo ajustado.

Solución De la salida impresa de la figura 13.8, se puede ver que la ecuación de regresión es

$$\hat{y} = -.159 + .392x - .00949x^2$$

La gráfica de esta ecuación cuadrática junto con los puntos de datos se muestra en la figura 13.9.

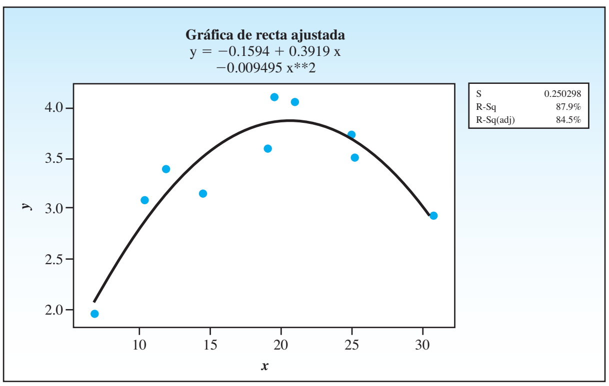
FIGURA 13.8
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 13.4

MI CONSEJO
Vea la salida impresa y encuentre las leyendas para "Predictor". Esto le dirá cuáles variables se han usado en el modelo.

Análisis de regresión: y contra x, x-sq

```
The regression equation is
y = - 0.159 + 0.392 x - 0.00949 x-sq

Predictor        Coef     St Coef        T       P
Constant      -0.1594      0.5006    -0.32   0.760
x             0.39193     0.05801     6.76   0.000
x-sq        -0.009495    0.001535    -6.19   0.000

S = 0.250298      R-Sq = 87.9%     R-Sq(adj) = 84.5%

Analysis of Variance
Source           DF        SS       MS       F       P
Regression        2    3.1989   1.5994   25.53   0.001
Residual Error    7    0.4385   0.0626
Total             9    3.6374

Source       DF      Seq SS
x             1      0.8003
x-sq          1      2.3986
```

FIGURA 13.9
Recta de regresión cuadrática ajustada para el ejemplo 13.4



Para evaluar lo adecuado del modelo cuadrático, la prueba de

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

contra

$$H_a: \text{Ni } \beta_1 \text{ ni } \beta_2 \text{ son } 0$$

se da en la salida impresa como

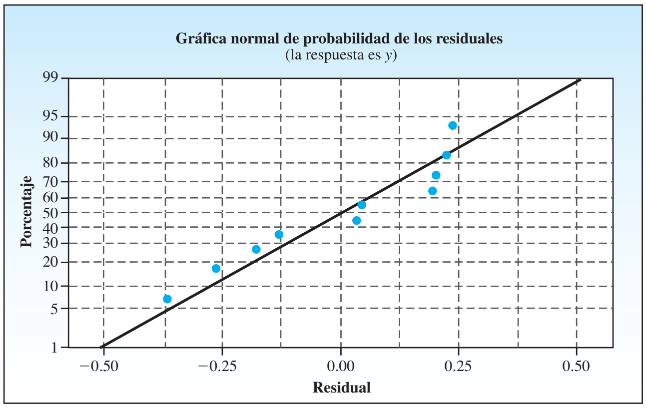
$$F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = 25.53$$

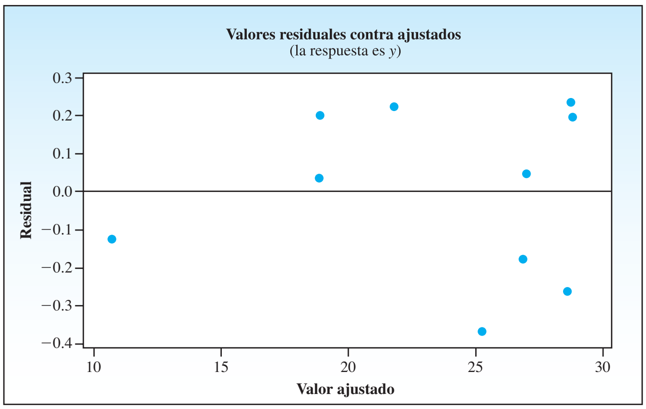
con valor $p = .001$. En consecuencia, el ajuste total del modelo es altamente significativo. La regresión cuadrática es $R^2 = 87.9\%$ de la variación en y [R^2(adj) $= 84.5\%$].

De las pruebas t para las variables individuales del modelo, se puede ver que b_1 y b_2 son altamente significativas, con valores p iguales a .000. Observe de la sección de suma secuencial de cuadrados que la suma de cuadrados para regresión lineal es .8003, con una suma de cuadrados adicional de 2.3986 cuando se agregue el término cuadrado. Es evidente que el modelo de regresión lineal simple es inadecuado para describir los datos.

Una última mirada a las gráficas residuales generadas por *MINITAB* en la figura 13.10 asegura que las suposiciones de regresión sean válidas. Observe el aspecto relativamente lineal de la gráfica normal y la relativa dispersión de los residuales contra los ajustes. El modelo cuadrático da predicciones precisas para valores de x que se encuentren *dentro del rango de los valores muestreados de x*.

FIGURA 13.10
Gráficas *MINITAB* de diagnóstico para el ejemplo 13.4





13.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

13.1 Suponga que $E(y)$ está relacionada a dos variables predictoras, x_1 y x_2, por la ecuación

$$E(y) = 3 + x_1 - 2x_2$$

a. Grafique la relación entre $E(y)$ y x_1 cuando $x_2 = 2$. Repita para $x_2 = 1$ y para $x_2 = 0$.

b. ¿Qué relación tienen entre sí las rectas del inciso a)?

13.2 Consulte el ejercicio 13.1.

a. Grafique la relación entre $E(y)$ y x_2 cuando $x_1 = 0$. Repita para $x_1 = 1$ para $x_1 = 2$.

b. ¿Qué relación tienen entre sí las líneas del inciso a)?

c. Suponga, en una situación práctica, que se desea modelar la relación entre $E(y)$ y dos variables predictoras x_1 y x_2. ¿Cuál es la implicación de usar el modelo de primer orden $E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$?

13.3 Suponga que se ajusta el modelo

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

a 15 puntos de datos y se encuentra que F es igual a 57.44.

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el modelo aporta información para la predicción de y? Pruebe usando un nivel de significancia de 5%.

b. Use el valor de F para calcular R^2. Interprete su valor.

13.4 La salida impresa de computadora para el análisis de regresión múltiple para el ejercicio 13.3 da esta información:

$b_0 = 1.04$	$b_1 = 1.29$
	$\text{SE}(b_1) = .42$
$b_2 = 2.72$	$b_3 = .41$
$\text{SE}(b_2) = .65$	$\text{SE}(b_3) = .17$

a. ¿Cuál, si hay alguna, de las variables independientes x_1, x_2 y x_3 aportan información para la predicción de y?

b. Dé la ecuación de predicción de mínimos cuadrados.

c. En la misma hoja de papel, grafique y contra x_1 cuando $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$ y cuando $x_2 = 1$ y $x_3 = .5$. ¿Qué relación tienen entre sí las dos rectas?

d. ¿Cuál es la interpretación práctica del parámetro β_1?

13.5 Suponga que se ajusta el modelo

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

a 20 puntos de datos y se obtiene la salida impresa *MINITAB* siguiente:

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.5

Análisis de regresión: y contra x, x-sq

```
The regression equation is
y = 10.6 + 4.44 x - 0.648 x-sq

Predictor        Coef    SE Coef        T       P
Constant      10.5638     0.6951    15.20   0.000
x              4.4366     0.5150     8.61   0.000
x-sq         -0.64754    0.07988    -8.11   0.000

S = 1.191    R-Sq = 81.5%    R-Sq(adj) = 79.3%

Analysis of Variance
Source           DF        SS        MS       F       P
Regression        2   106.072    53.036   37.37   0.000
Residual Error   17    24.128     1.419
Total            19   130.200
```

a. ¿Qué tipo de modelo se ha escogido para ajustar los datos?

b. ¿Qué tan bien ajusta los datos el modelo? Explique.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el modelo aporta información para la predicción de y? Use el método del valor p.

13.6 Consulte el ejercicio 13.5.

a. ¿Cuál es la ecuación de predicción?

b. Grafique la ecuación de predicción sobre el intervalo $0 \leq x \leq 6$.

13.7 Consulte el ejercicio 13.5.

a. ¿Cuál es su estimación del valor promedio de y cuando $x = 0$?

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el valor promedio de y difiere de 0 cuando $x = 0$?

13.8 Consulte el ejercicio 13.5.

a. Suponga que la relación entre $E(y)$ y x es una recta. ¿Qué se sabría acerca del valor de β_2?

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar curvatura en la relación entre y y x?

13.9 Consulte el ejercicio 13.5. Suponga que y es la utilidad para algún negocio y x es la cantidad de capital invertido, y se sabe que la tasa de aumento en utilidad para un aumento unitario en capital invertido sólo puede disminuir cuando x aumenta. Se desea saber si los datos dan suficiente evidencia para indicar una tasa decreciente de aumento en utilidad cuando la cantidad de capital invertido aumenta.

a. Las circunstancias descritas implican una prueba estadística de una cola? ¿Por qué?

b. Realice la prueba al nivel de significancia de 1%. Exprese sus conclusiones.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1310

13.10 Libros de texto universitarios Un editor de libros de texto universitarios realizó un estudio para relacionar la utilidad por texto y, con el costo de ventas x, en un periodo de 6 años cuando su fuerza de ventas (y costos de ventas) estaban creciendo rápidamente. Se recolectaron estos datos de inflación ajustada (en miles de dólares):

Utilidad por texto, y	16.5	22.4	24.9	28.8	31.5	35.8
Costo de ventas por texto, x	5.0	5.6	6.1	6.8	7.4	8.6

Esperando que la utilidad por libro subiera y luego se nivelara, el editor ajustó el modelo $E(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ a los datos.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.10

Análisis de regresión: y contra x, s-sq

```
The regression equation is
y = - 44.2 + 16.3 x - 0.820 x-sq

Predictor         Coef     SE Coef         T        P
Constant       -44.192       8.287     -5.33    0.013
x               16.334       2.490      6.56    0.007
x-sq           -0.8198      0.1824     -4.49    0.021

S = 0.594379     R-Sq = 99.6%     R-Sq(adj) = 99.3%

Analysis of Variance
Source            DF        SS       MS        F       P
Regression         2    234.96   117.48   332.53   0.000
Residual Error     3      1.06     0.35
Total              5    236.02

Source        DF      Seq SS
x              1      227.82
x-sq           1        7.14
```

a. Grafique los puntos de datos. ¿Le parece que el modelo cuadrático es necesario?

b. Encuentre s en la salida impresa. Confirme que

$$s = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n - k - 1}}$$

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el modelo contribuye con información para la predicción de y? ¿Cuál es el valor p para esta prueba y qué significa?

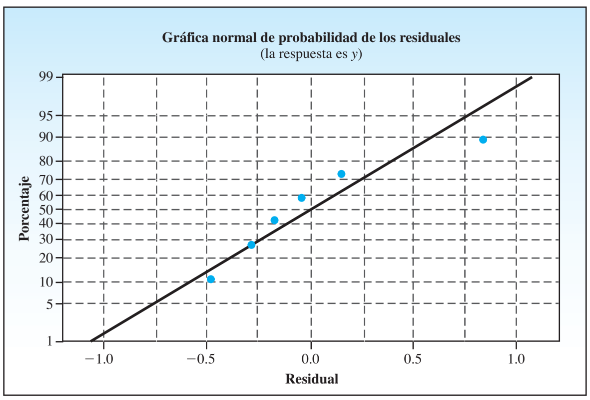
d. ¿Cuánto de la suma de cuadrados de regresión es tomado en cuenta por el término cuadrático? ¿El término lineal?

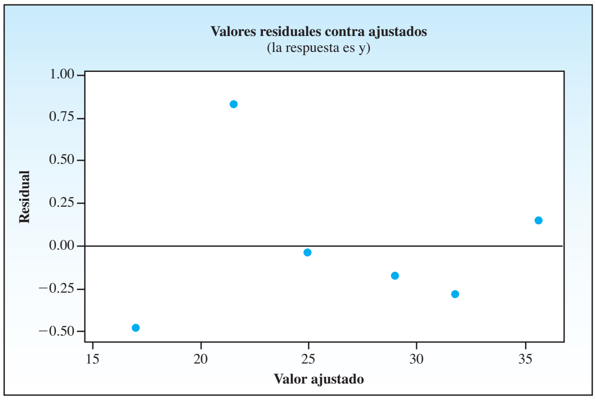
e. ¿Qué signo se esperaría que tenga el valor real de β_2? Encuentre el valor de β_2 en la salida impresa. ¿Este valor confirma las expectativas?

f. ¿Los datos indican una curvatura significativa en la relación entre y y x? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

g. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de las gráficas residuales siguientes?

Gráficas *MINITAB* para el ejercicio 13.10





13.11 Libros de texto universitarios II Consulte el ejercicio 13.10.

a. Use los valores de la SSR y SS Total para calcular R^2. Compare este valor con el valor dado en la salida impresa.

b. Calcule R^2(adj). ¿Cuándo sería apropiado usar este valor en lugar de R^2 para evaluar el ajuste del modelo?

c. El valor de R^2(adj) fue de 95.7% cuando un modelo lineal simple se ajustó a los datos. ¿El modelo lineal o el cuadrático ajustan mejor?

MIS DATOS EX1312

13.12 Hamburguesas de verduras Una persona tiene una parrilla caliente y un panecillo de hamburguesa vacío, pero ha jurado dejar las hamburguesas grasientas. ¿Es buena una hamburguesa sin carne? Los datos de la tabla siguiente dan puntuación de sabor y textura (entre 0 y 100) para 12 marcas de hamburguesas sin carne junto con el precio, número de calorías, cantidad de grasa y una cantidad de sodio por hamburguesa.[2] Algunas de estas marcas tratan de imitar el sabor de la carne, no así otras. La salida impresa *MINITAB* muestra la regresión de la puntuación de sabor y en las cuatro variables predictoras: precio, calorías, grasa y sodio.

Marca	Puntos, y	Precio, x_1	Calorías, x_2	Grasa, x_3	Sodio, x_4
1	70	91	110	4	310
2	45	68	90	0	420
3	43	92	80	1	280
4	41	75	120	5	370
5	39	88	90	0	410
6	30	67	140	4	440
7	68	73	120	4	430
8	56	92	170	6	520
9	40	71	130	4	180
10	34	67	110	2	180
11	30	92	100	1	330
12	26	95	130	2	340

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.12

Análisis de regresión: y contra x1, x2, x3, x4

```
The regression equation is
y = 59.8 + 0.129 x1 - 0.580 x2 + 8.50 x3 + 0.0488 x4

Predictor         Coef     SE Coef        T        P
Constant         59.85       35.68     1.68    0.137
x1              0.1287      0.3391     0.38    0.716
x2             -0.5805      0.2888    -2.01    0.084
x3               8.498       3.472     2.45    0.044
x4             0.04876     0.04062     1.20    0.269

S = 12.7199    R-Sq = 49.9%   R-Sq(adj) = 21.3%

Analysis of Variance
Source            DF        SS      MS       F       P
Regression         4    1128.4   282.1    1.74   0.244
Residual Error     7    1132.6   161.8
Total             11    2261.0

Source       DF      Seq SS
x1            1        11.2
x2            1        19.6
x3            1       864.5
x4            1       233.2
```

a. Comente sobre el ajuste del modelo usando el estadístico de la prueba para el ajuste general y el coeficiente de determinación, R^2.

b. Si desea reajustar el modelo al eliminar una de las variables independientes, ¿cuál eliminaría? ¿Por qué?

13.13 Hamburguesas de verduras II Consulte el ejercicio 13.12. Un comando en el menú *MINITAB* de regresión da la salida impresa en la que R^2 y R^2(adj) se calculan para todos los posibles subconjuntos de las cuatro variables independientes. La salida impresa es la siguiente.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.13

Mejor regresión de conjuntos: y contra x1, x2, x3, x4

```
Response is y

              R-Sq   Mallows                x x x x
Vars   R-Sq   (adj)      C-p          s     1 2 3 4

   1   17.0     8.7      3.6     13.697         X
   1    6.9     0.0      5.0     14.506           X
   2   37.2    23.3      2.8     12.556       X X
   2   20.3     2.5      5.1     14.153         X X
   3   48.9    29.7      3.1     12.020       X X X
   3   39.6    16.9      4.4     13.066     X X X
   4   49.9    21.3      5.0     12.720     X X X X
```

a. Si tuviera que comparar estos modelos y escoger el mejor, ¿cuál modelo escogería? Explique.

b. Comente sobre la utilidad del modelo que escogió en el inciso a). ¿Su modelo es valioso para predecir una calificación del gusto basada en las variables predictoras escogidas?

MIS DATOS EX1314 **13.14 Contaminación del aire III** Un experimento está diseñado para comparar varios tipos diferentes de monitores de contaminación del aire.[3] Cada monitor se instaló y luego se le expuso a diferentes concentraciones de ozono, de entre 15 y 230 partes por millón (ppm), durante periodos de 8 a 72 horas. A continuación se analizaron los filtros del monitor y se midió la respuesta del monitor. Los resultados para un tipo de monitor mostraron un patrón lineal (véase el ejercicio 12.14). Los resultados para otro tipo de monitor se dan en la tabla siguiente.

Ozono (ppm/h), x	.06	.12	.18	.31	.57	.65	.68	1.29
Densidad relativa de fluorescencia, y	8	18	27	33	42	47	52	61

a. Grafique los datos. ¿Qué modelo se esperaría que diera el mejor ajuste a los datos? Escriba la ecuación de ese modelo.

b. Use un paquete de software de computadora para ajustar el modelo del inciso a).

c. Encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados que relacione la respuesta del monitor a la concentración de ozono.

d. ¿El modelo aporta información significativa para la predicción de la respuesta del monitor basada en exposición al ozono? Use el valor p apropiado para tomar una decisión.

e. Encuentre R^2 en la salida impresa. ¿Qué dice este valor acerca de la efectividad del análisis de regresión múltiple?

MIS DATOS EX1315 **13.15 Utilidades corporativas** Para estudiar la relación de publicidad e inversión de capital con utilidades corporativas, los datos siguientes, registrados en unidades de $100 000, se recolectaron para 10 empresas de mediano tamaño en el mismo año. La variable y representa utilidad para el año, x_1 representa inversión de capital y x_2 representa gasto en publicidad.

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
15	25	4	1	20	0
16	1	5	16	12	4
2	6	3	18	15	5
3	30	1	13	6	4
12	29	2	2	16	2

a. Usando el modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x_2$$

y un paquete apropiado de software, encuentre la ecuación de predicción de mínimos cuadrados para estos datos.

b. Use la prueba F general para determinar si el modelo aporta información significativa para la predicción de y. Use $\alpha = .01$.

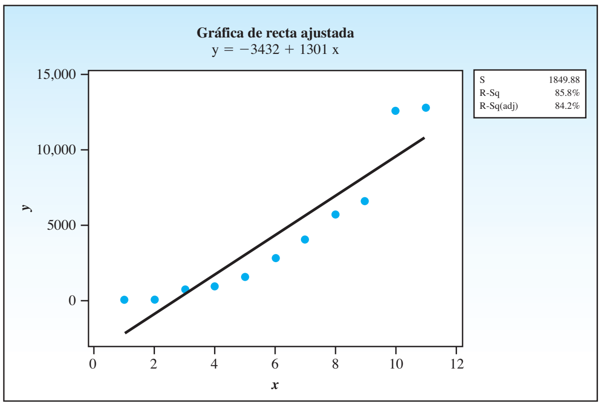
c. El gasto en publicidad x_2 aporta información significativa para la predicción de y, dado que x_1 ya está en el modelo? Use $\alpha = .01$.

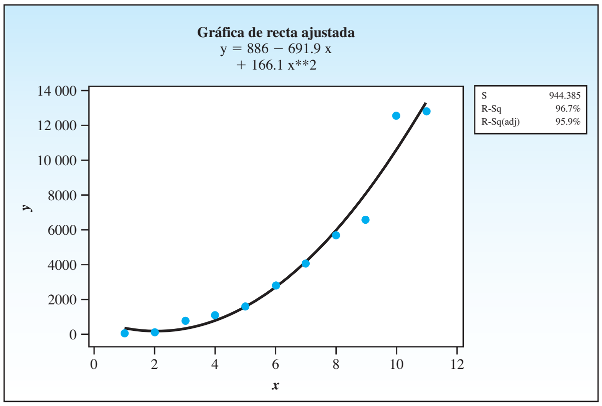
d. Calcule el coeficiente de determinación, R^2. ¿Qué porcentaje de la variación general está explicado por el modelo?

MIS DATOS EX1316 **13.16 YouTube** El sitio YouTube de videos compartidos atrajo 19.6 millones de visitantes en junio de 2006, un aumento de casi 300% desde enero de ese mismo año. A pesar del fenomenal crecimiento de YouTube, algunos analistas cuestionaron si el sitio puede hacer una transición de un servicio gratuito a uno que pueda hacer dinero. La tendencia de crecimiento para YouTube de agosto de 2005 a junio de 2006 se da en la tabla siguiente.[4]

Tiempo	Tiempo codificado	Total de visitantes únicos (000)
8/2005	1	72
9/2005	2	100
10/2005	3	750
11/2005	4	990
12/2005	5	1600
1/2006	6	2800
2/2006	7	4100
3/2006	8	5700
4/2006	9	6600
5/2006	10	12 600
6/2006	11	12 800

Las gráficas ajustadas lineal y cuadrática para estos datos son como sigue:





a. Con base en las estadísticas de resumen de las gráficas de líneas, ¿cuál de los dos modelos ajusta mejor los datos?

b. Escriba la ecuación para el modelo cuadrático.

c. Use la siguiente salida impresa para determinar si el término cuadrático aporta información significativa a la predicción de y, en presencia del término lineal.

Análisis de regresión: número contra tiempo, tiempo-sq

```
The regression equation is
Number = 886 - 692 Time + 166 Time-sq

Predictor    Coef    SE Coef        T        P
Constant      886       1037     0.85    0.418
Time       -691.9      397.2    -1.74    0.120
Time-sq    166.07      32.24     5.15    0.001

S = 944.381    R-Sq = 96.7%    R-Sq(adj) = 95.9%

Analysis of Variance
Source            DF          SS          MS        F      P
Regression         2   209848944   104924472   117.65  0.000
Residual Error     8     7134840      891855
Total             10   216983783
```

13.5 USO DE VARIABLES PREDICTORAS CUANTITATIVAS Y CUALITATIVAS EN UN MODELO DE REGRESIÓN

Una razón por la que los modelos de regresión múltiple son muy flexibles es que toman en cuenta el uso de variables predictoras *cualitativas* y *cuantitativas*. Para los métodos de regresión múltiple que se usan en este capítulo, la variable de respuesta *y debe ser cuantitativa,* midiendo una variable aleatoria numérica que tiene una distribución normal (de acuerdo con las suposiciones de la sección 13.2). No obstante, cada variable independiente predictora puede ser cuantitativa *o* cualitativa, cuyos niveles representan cualidades o características y sólo pueden ser categorizados.

Las variables cuantitativas y cualitativas introducen el modelo de regresión en formas diferentes. Para complicar las cosas, podemos permitir una combinación de tipos diferentes de variables en el modelo *y* podemos permitir que las variables *interactúen*, un concepto que puede serle familiar a usted en el *experimento factorial* del capítulo 11. Consideremos estas opciones una por una.

Una **variable cuantitativa** x puede introducirse como término lineal, x o elevado a alguna potencia de grado superior como x^2 o x^3, como en el modelo cuadrático del ejemplo 13.3. Cuando sea necesaria más de una variable cuantitativa, la interpretación de los posibles modelos se hace más complicada. Por ejemplo, con dos variables cuantitativas x_1 y x_2, se puede usar un **modelo de primer orden** como lo es

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

que traza un plano en espacio tridimensional (véase la figura 13.1). No obstante, puede ser que una de las variables, por ejemplo x_2, no esté relacionada con y en la misma forma cuando $x_1 = 1$ con lo está cuando $x_1 = 2$. Para permitir que x_2 se comporte de manera diferente dependiendo del valor de x_1, sumamos un **término de interacción**, x_1x_2, y permitimos que el plano bidimensional *se tuerza*. El modelo es ahora un **modelo de segundo orden**:

MI CONSEJO

Introduzca variables **cuantitativas** como

- una sola x
- una potencia de orden superior, x^2 o x^3
- una interacción con otra variable.

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$$

Los modelos se hacen complicados más rápidamente cuando se permite que relaciones curvilíneas *e* interacción para las dos variables. Una forma de determinar sobre el tipo de modelo que se necesita es graficar algunos de los datos, quizá y contra x_1, y contra x_2, y y contra x_2 para varios valores de x_1.

En contraste con variables predictoras cuantitativas, las **variables predictoras cualitativas** se introducen en un modelo de regresión a través de **variables ficticias** o **indicadoras**. Por ejemplo, en un modelo que relacione el salario medio de un grupo de empleados con varias variables predictoras, se puede incluir el antecedente étnico del empleado. Si cada empleado incluido en su estudio pertenece a uno de tres grupos étnicos, A, B o C, se puede introducir la variable cualitativa "etnia" en su modelo usando dos *variables ficticias*:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si grupo B} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si grupo C} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Vea el efecto que estas dos variables tienen en el modelo $E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$: para empleados del grupo A,

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1(0) + \beta_2(0) = \beta_0$$

para empleados del grupo B,

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1(1) + \beta_2(0) = \beta_0 + \beta_1$$

y para los del grupo C,

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1(0) + \beta_2(1) = \beta_0 + \beta_2$$

El modelo permite una respuesta promedio diferente para cada grupo. β_1 mide la diferencia en las respuestas promedio entre los grupos B y A, en tanto que β_2 mide la diferencia entre los grupos C y A.

Cuando una variable cualitativa contiene k categorías o niveles, $(k - 1)$ variables ficticias deben agregarse al modelo de regresión. Este modelo puede contener otras variables predictoras, cuantitativas o cualitativas, así como productos cruzados (**interacciones**) de las variables ficticias con otras variables que aparecen en el modelo. Como se puede ver, el proceso de construir un modelo, es decir, decidir sobre los términos apropiados a introducir en el modelo de regresión, puede ser bastante complicado. No obstante, usted

MI CONSEJO

Las variables **cualitativas** se introducen como variables ficticias, una menos que el número de categorías o niveles.

puede tener más habilidad para construir un modelo, adquiriendo experiencia con los ejercicios del capítulo. El ejemplo siguiente contiene una variable cuantitativa y una cualitativa que interactúan.

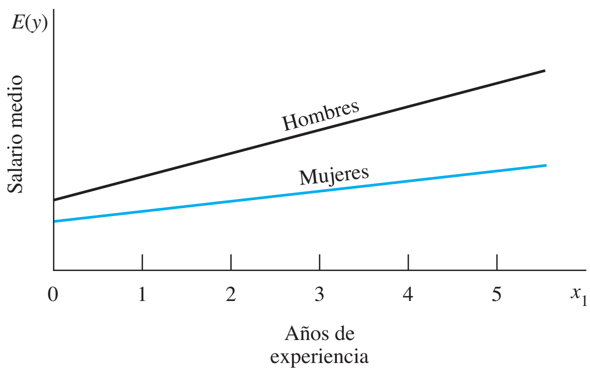
EJEMPLO 13.5

Se realizó un estudio para examinar la relación entre salario en una universidad, y, el número de años de experiencia del miembro del profesorado y el género del miembro del profesorado. Si se espera que haya una relación de línea recta entre salario medio y años de experiencia para caballeros y mujeres, escriba el modelo que relacione salario medio con las dos variables predictoras: años de experiencia (cuantitativa) y género del profesor (cualitativa).

Solución Dado que se puede sospechar que las rectas de salario medio para caballeros y mujeres son diferentes, su modelo para el salario medio $E(y)$ puede aparecer como se muestra en la figura 13.11. Una relación de línea recta entre $E(y)$ y años de experiencia x_1 implica el modelo

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 \qquad \text{(se grafica como línea recta)}$$

FIGURA 13.11
Relación hipotética para salario medio $E(y)$, años de experiencia (x_1), y género (x_2) para el ejemplo 13.5



La variable cualitativa "género" contiene $k = 2$ categorías, caballeros y mujeres. Por lo tanto, se necesita $(k - 1) = 1$ variable ficticia, x_2, definida como

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si es hombre} \\ 0 & \text{si es mujer} \end{cases}$$

y el modelo se expande para convertirse en

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \qquad \text{(se grafica como dos rectas paralelas)}$$

El hecho de que las pendientes de las dos rectas puedan diferir significa que las dos variables predictoras **interactúan**; esto es, el cambio en $E(y)$ correspondiente a un cambio en x_1 depende de si el profesor es hombre o mujer. Para tomar en cuenta esta interacción (diferencia en pendientes), el término de interacción x_1x_2 se introduce en el modelo. El modelo completo que caracteriza la gráfica de la figura 13.11 es

$$E(y) = \beta_0 + \underbrace{\beta_1 x_1}_{\text{años de experiencia}} + \overbrace{\beta_2 x_2}^{\text{variable ficticia para género}} + \underbrace{\beta_3 x_1 x_2}_{\text{interacción}}$$

donde

$$x_1 = \text{Años de experiencia}$$
$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si es hombre} \\ 0 & \text{si es mujer} \end{cases}$$

Se puede ver cómo funciona el modelo al asignar valores a la variable ficticia x_2. Cuando la profesora es mujer, el modelo es

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2(0) + \beta_3 x_1(0) = \beta_0 + \beta_1 x_1$$

que es una recta con pendiente β_1 y punto de cruce β_0. Cuando el profesor es hombre, el modelo es

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2(1) + \beta_3 x_1(1) = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3)x_1$$

que es una recta con pendiente $(\beta_1 + \beta_3)$ e intersección $(\beta_0 + \beta_2)$. Las dos rectas tienen *pendientes diferentes e intersecciones diferentes*, lo cual permite la relación entre salario y y años de experiencia x_1 a comportarse de manera diferente para caballeros y mujeres.

EJEMPLO 13.6

Se seleccionaron muestras aleatorias de seis mujeres y seis caballeros profesores auxiliares, de entre los profesores auxiliares de una universidad de artes y ciencias. Los datos sobre el salario y años de experiencia se muestran en la tabla 13.3. Observe que cada una de las dos muestras (hombre y mujer) contenía dos profesores con tres años de experiencia, pero ninguno tenía 2 años de experiencia. Interprete la salida impresa *MINITAB* de regresión y grafique las rectas de salario predeterminadas.

TABLA 13.3 **Salario contra género y años de experiencia**

Años de experiencia, x_1	Salario para caballeros, y	Salario para mujeres, y
1	\$60 710	\$59 510
2	—	60 440
3	63 160	61 340
3	63 210	61 760
4	64 140	62 750
5	65 760	63 200
5	65 590	—

Solución La salida impresa *MINITAB* de regresión para los datos de la tabla 13.3 se muestra en la figura 13.12. Se puede usar un método de paso a paso para interpretar este análisis de regresión, empezando con una ecuación de predicción ajustada, $\hat{y} = 58\,593 + 969x_1 + 867x_2 + 260x_1x_2$. Al ajustar $x_2 = 0$ o 1 en esta ecuación, se obtienen dos rectas, una para mujeres y una para caballeros, para predecir el valor de y para una x_1 determinada. Estas rectas son

Mujeres: $\hat{y} = 58\,593 + 969x_1$

Caballeros: $\hat{y} = 59\,460 + 1229x_1$

y se grafican en la figura 13.13.

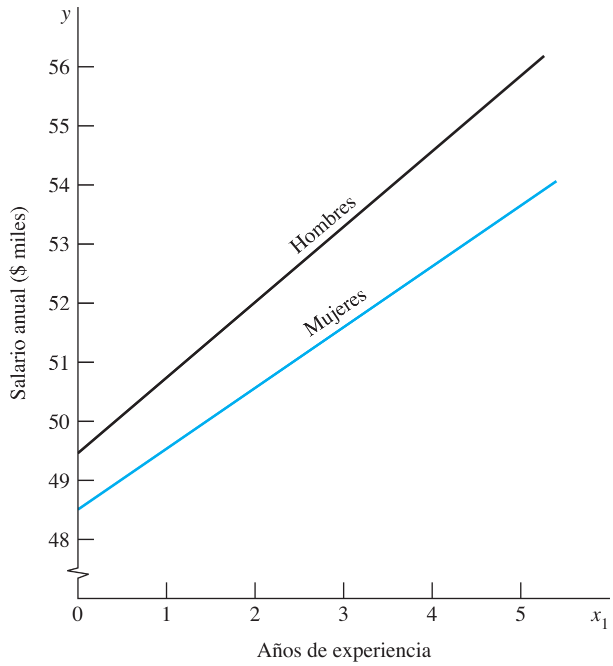
FIGURA 13.12
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 13.6

Análisis de regresión: y contra x1, x2,x1x2

```
The regression equation is
y = 58593 + 969 x1 + 867 x2 + 260 x1x2

Predictor         Coef      SE Coef          T        P
Constant       58593.0        207.9     281.77    0.000
x1              969.00        63.67      15.22    0.000
x2               866.7        305.3       2.84    0.022
x1x2            260.13        87.06       2.99    0.017

S = 201.344       R-Sq = 99.2%     R-Sq(adj) = 98.9%

Analysis of Variance
Source            DF          SS          MS          F        P
Regression         3    42108777    14036259     346.24    0.000
Residual Error     8      324315       40539
Total             11    42433092

Source       DF       Seq SS
x1            1     33294036
x2            1      8452797
x1x2          1       361944
```

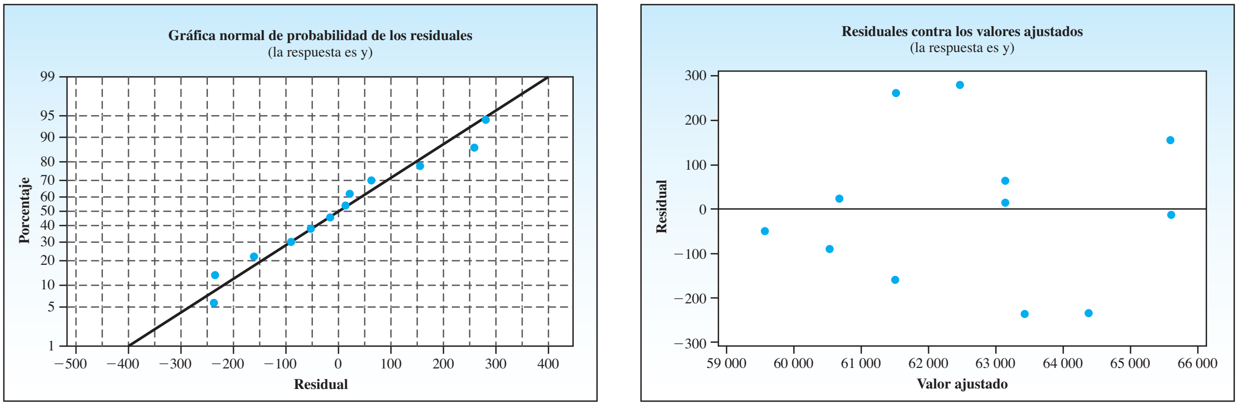
A continuación, considere el ajuste general del modelo usando el análisis de la prueba F de varianza. Como la estadística observada de prueba en la parte ANOVA de la salida impresa es $F = 346.24$ con $P = .000$, se puede concluir que al menos una de las variables de pronóstico está aportando información para la predicción de y. La fuerza de este modelo es medida aun más por el coeficiente de determinación, $R^2 = 99.2\%$. Se puede ver que el modelo parece ajustar muy bien.

FIGURA 13.13
Gráfica de las rectas de predicción de salario del profesorado, para el ejemplo 13.6



Para explorar con más detalle el efecto de las variables predictoras, vea las pruebas t individuales para las tres variables predictoras. Los valores p para estas pruebas, es decir, .000, .022 y .017, respectivamente, son todas significativas, lo cual quiere decir que todas las variables predictoras agregan información significativa a la predicción *con las otras dos variables ya en el modelo*. Por último, verifique las gráficas residuales para asegurarse que no haya grandes violaciones de las suposiciones de regresión. Estas gráficas, que se comportan como se esperaba para un modelo bien ajustado, se ven en la figura 13.14.

FIGURA 13.14
Gráficas residuales *MINITAB* para el ejemplo 13.6



EJEMPLO 13.7

Consulte el ejemplo 13.6. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la tasa anual de aumento, en salarios de profesores jóvenes, es mayor que la tasa anual de aumento en salarios de profesoras jóvenes? Es decir, ¿los datos dan suficiente evidencia para indicar que la pendiente de la recta de salarios de profesores es mayor que la pendiente de la recta de salarios de profesoras?

Solución Como β_3 mide la diferencia en pendientes, las pendientes de las dos rectas serán idénticas si $\beta_3 = 0$. Por tanto, se desea probar la hipótesis nula

$$H_0 : \beta_3 = 0$$

esto es, las pendientes de las dos rectas son idénticas, contra la hipótesis alternativa

$$H_a : \beta_3 > 0$$

esto es, la pendiente de la recta de salarios de profesores es mayor que la pendiente de la recta de salarios de profesoras.

El valor calculado de t correspondiente a β_3, que se ve en el renglón marcada "x1x2" en la figura 13.12, es 2.99. Como la salida *MINITAB* de regresión da valores p para dos pruebas de significancia de dos colas, el valor p en la salida impresa, .017, es *el doble* de lo que sería para una prueba de una cola. Para esta prueba de una cola, el valor p es $.017/2 = .0085$ y la hipótesis nula es rechazada. Hay suficiente evidencia para indicar que la tasa anual de aumento en salarios de profesores excede de la tasa para mujeres.[†]

[†] Si desea determinar que los datos dan suficiente evidencia para indicar que los profesores empiezan con salarios más altos, probaría H_0: $\beta_2 = 0$ contra la hipótesis alternativa H_a: $\beta_2 > 0$.

13.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

13.17 Rendimiento en producción Suponga que se desea predecir el rendimiento en producción y como función de varias variables independientes de predicción. Indique si cada una de las siguientes variables independientes es cualitativa o cuantitativa. Si es cualitativa, defina la(s) variable(s) ficticia(s) apropiada(s).

a. La tasa de interés prevaleciente en la región

b. El precio por libra de un artículo empleado en el proceso de producción

c. La planta (A, B o C) en la que se mide el rendimiento en producción

d. El tiempo que la máquina de producción haya estado en operación

e. El turno (de noche o de día) en el que se mide el rendimiento

13.18 Suponga que $E(y)$ está relacionada con dos variables predictoras x_1 y x_2 por la ecuación

$$E(y) = 3 + x_1 - 2x_2 + x_1x_2$$

a. Grafique la relación entre $E(y)$ y x_1 cuando $x_2 = 0$. Repita para $x_2 = 2$ y para $x_2 = -2$.

b. Repita las instrucciones del inciso a) para el modelo

$$E(y) = 3 + x_1 - 2x_2$$

c. Observe que la ecuación para el inciso a) es exactamente igual que la ecuación del inciso b), excepto que hemos agregado el término x_1x_2. ¿En qué forma la adición del término x_1x_2 afecta las gráficas de las tres rectas?

d. ¿Qué flexibilidad se agrega al modelo de primer orden $E(y) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2$ por la adición del término $\beta_3x_1x_2$, usando el modelo $E(y) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_1x_2$?

13.19 Un modelo de regresión lineal múltiple que contiene una variable independiente cualitativa y una cuantitativa produjo esta ecuación de predicción:

$$\hat{y} = 12.6 + .54x_1 - 1.2x_1x_2 + 3.9x_2^2$$

a. ¿Cuál de las dos variables es la cuantitativa? Explique.

b. Si x_1 puede tomar sólo los valores 0 o 1, encuentre las dos posibles ecuaciones de predicción para este experimento.

c. Grafique las dos ecuaciones halladas en el inciso b). Compare las formas de las dos curvas.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1320

13.20 Menos carne roja Los estadounidenses alardean de que intentan mejorar su bienestar personal "comiendo bien y ejercitándose más". Un cambio deseable en la dieta es reducir la ingesta de carne roja y sustituir el pollo por pescado. Unos investigadores dieron seguimiento al consumo de carne roja y de pollo, y (en libras anuales por persona) y encontraron que el consumo de carne roja disminuyó y el de pollo aumentó en un periodo de siete años. En la tabla siguiente se ve un resumen de sus datos.

Año	Carne roja	Pollo
1	85	37
2	89	36
3	76	47
4	76	47
5	68	62
6	67	74
7	60	79

Considere ajustar el siguiente modelo, que toma en cuenta ajustar simultáneamente dos rectas de regresión lineal simples:

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_1x_2$$

donde y es el consumo anual de carne (roja o de pollo) por persona,

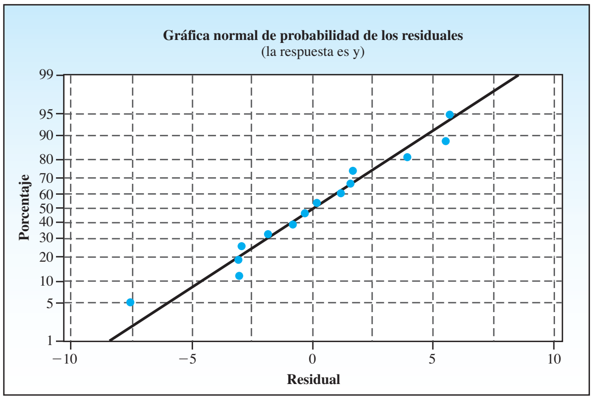
$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si carne roja} \\ 0 & \text{si pollo} \end{cases} \quad \text{y} \quad x_2 = \text{año}$$

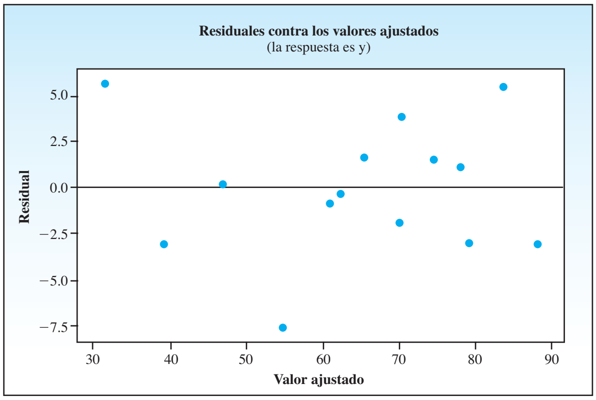
Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.20

Análisis de regresión: y contra x1, x2, x1x2

```
The regression equation is
y = 23.6 + 69.0 x1 + 7.75 x2 - 12.3 x1x2

Predictor        Coef     SE Coef        T       P
Constant       23.571      3.522      6.69   0.000
x1             69.000      4.981     13.85   0.000
x2             7.7500     0.7875      9.84   0.000
x1x2          -12.286      1.114    -11.03   0.000

S = 4.16705     R-Sq = 95.4%     R-Sq(adj) = 94.1%

Analysis of Variance
Source            DF       SS       MS       F       P
Regression         3   3637.9   1212.6   69.83   0.000
Residual Error    10    173.6     17.4
Total             13   3811.5

Source        DF      Seq SS
x1             1      1380.1
x2             1       144.6
x1x2           1      2113.1

Predicted Values for New Observations
New
Obs     Fit   SE Fit      95% CI           95% PI
1     56.29    3.52   (48.44,  64.13) (44.13,  68.44)

Values of Predictors for New Observations
New Obs         x1        x2      x1x2
1             1.00      8.00      8.00
```

Gráficas *MINITAB* de diagnóstico para el ejercicio 13.20





a. ¿Qué tan bien ajusta el modelo? Use cualesquiera estadísticas relevantes y herramientas de diagnóstico de la salida impresa para contestar esta pregunta.

b. Escriba las ecuaciones de las dos rectas que describen la tendencia en consumo durante el periodo de 7 años, para carne roja y para pollo.

c. Use la ecuación de predicción para hallar una estimación puntual del promedio de consumo de carne roja por persona en el año 8. Compare este valor con el valor marcado "ajuste" de la salida impresa.

d. Use la salida impresa para hallar un intervalo de confianza de 95% para el promedio de consumo de carne roja por persona en el año 8. ¿Cuál es el intervalo de predicción de 95% para el consumo de carne roja por persona en el año 8? ¿Hay algún problema con la validez del nivel de confianza de 95% para estos intervalos?

MIS DATOS EX1321 **13.21 Algodón contra pepinos** En el ejercicio 11.65 utilizamos el análisis del procedimiento de varianza, para analizar un experimento factorial de 2 × 3, en el que cada combinación de factor − nivel se repitió cinco veces. El experimento contenía el número de huevos puestos por moscas blancas enjauladas sobre dos plantas diferentes, a tres niveles diferentes de temperatura. Supongamos que varias de las moscas blancas murieron antes de completar el experimento, de modo que el número de repeticiones ya no fue el mismo para cada tratamiento. El análisis de fórmulas de varianza del capítulo 11 ya no se puede usar, pero el experimento *puede* ser analizado usando un análisis de regresión múltiple. Los resultados de este **experimento factorial de 2 × 3 con repeticiones iguales** se muestran en la tabla siguiente.

Algodón			Pepino		
70°	77°	82°	70°	77°	82°
37	34	46	50	59	43
21	54	32	53	53	62
36	40	41	25	31	71
43	42		37	69	49
31			48	51	

a. Escriba un modelo para analizar este experimento. Asegúrese de incluir un término para la interacción entre planta y temperatura.

b. Use un paquete de software para efectuar el análisis de regresión múltiple.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el efecto de temperatura en el número de huevos puestos es *diferente* dependiendo del tipo de planta?

d. Con base en los resultados del inciso c), ¿sugiere usted reajustar un modelo diferente? Si es así, vuelva a correr el análisis de regresión usando el nuevo modelo y analice la salida impresa.

e. Escriba un párrafo que resuma los resultados de sus análisis.

MIS DATOS EX1322 **13.22 Calificaciones de rendimiento III** El Índice de Rendimiento Académico (API), descrito en el ejercicio 12.11, es una medida del rendimiento escolar con base en los resultados del Examen de Rendimiento Stanford 9. Las calificaciones del API para ocho escuelas elementales en el condado de Riverside, California, se muestran a continuación junto con varias variables independientes más.[5]

Escuela	Calificación API y	Premios x_1	% de comidas x_2
1	588	Sí	58
2	659	No	62
3	710	Sí	66
4	657	No	36
5	669	No	40
6	641	No	51
7	557	No	73
8	743	Sí	22

Escuela	% ELL x_3	% de emergencia x_4	API del año previo x_5
1	34	16	533
2	22	5	655
3	14	19	695
4	30	14	680
5	11	13	670
6	26	2	636
7	39	14	532
8	6	4	705

Las variables están definidas como

x_1 = 1 si la escuela recibió un premio financiero por cumplir objetivos de crecimiento, 0 si no lo recibió

x_2 = % de estudiantes que calificaron para comidas gratis o a precios bajos

x_3 = % de estudiantes que estudian inglés

x_4 = % de profesores con credenciales de emergencia

x_5 = Calificación API en 2000

La salida impresa *MINITAB* para un modelo de regresión de primer orden se da a continuación.

Análisis de regresión: y contra x1, x2, x3, x4, x5

```
The regression equation is
y = 269 + 33.2 x1 - 0.003 x2 - 1.02 x3
    - 1.00 x4 + 0.636 x5

Predictor       Coef      STDev        T        P
Constant      269.03      41.55     6.48    0.023
x1            33.227      4.373     7.60    0.017
x2           -0.0027     0.1396    -0.02    0.987
x3           -1.0159     0.3237    -3.14    0.088
x4           -1.0032     0.3391    -2.96    0.098
x5           0.63560    0.05209    12.20    0.007

S = 4.73394    R-Sq = 99.8%    R-Sq(adj) = 99.4%

Analysis of Variance
Source           DF         SS        MS        F       P
Regression        5    25197.2    5039.4   224.87   0.004
Residual Error    2       44.8      22.4
Total             7    25242.0
```

a. ¿Cuál es el modelo que se ha ajustado a estos datos?

b. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo? Use cualesquier estadístico relevante de la salida impresa para contestar esta pregunta.

c. ¿Cuáles de las variables independientes, si las hay, son útiles para predecir el API, dadas las otras variables independientes ya en el modelo? Explique.

d. Use los valores de R^2 y R^2(adj) de la siguiente salida impresa para escoger el mejor modelo para predicción. ¿Confiaría usted en usar el modelo escogido, para predecir la calificación API para el siguiente año, con base en un modelo que contenga variables similares? Explique.

Regresión de mejores subconjuntos: y contra x1, x2, x3, x4, x5

```
Response is y
                R-Sq   Mallows             x x x x x
Vars    R-Sq    (adj)    C-p          S    1 2 3 4 5

   1    87.9    85.8    132.7    22.596            X
   1    84.5    81.9    170.7    25.544        X
   2    97.4    96.4     27.1    11.423    X       X
   2    94.6    92.4     58.8    16.512        X   X
   3    99.0    98.2     11.8    8.1361    X   X   X
   3    98.9    98.2     11.9    8.1654    X     X X
   4    99.8    99.6      4.0    3.8656    X   X X X
   4    99.0    97.8     12.8    8.9626    X X X   X
   5    99.8    99.4      6.0    4.7339    X X X X X
```

13.23 tabla de partículas Un ingeniero de control de calidad está interesado en predecir la resistencia de una tabla de partículas y, como función del tamaño de las partículas x_1 y dos tipos de compuestos aglutinantes. Si se espera que la respuesta básica sea una función cuadrática del tamaño de una partícula, escriba un modelo lineal que incorpore la variable cualitativa "compuesto aglutinante" en la ecuación de predicción.

MIS DATOS EX1324

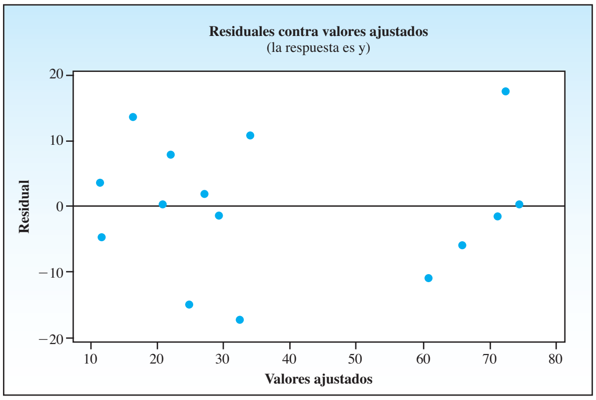
13.24 Proyectos de construcción En un estudio para examinar la relación entre el tiempo requerido para completar un proyecto de construcción y varias variables independientes pertinentes, un analista compiló una lista de cuatro variables que podrían ser útiles para predecir el tiempo de terminación. Estas cuatro variables eran el tamaño del contrato, x_1 (en unidades de \$1000), el número de días de trabajo adversamente afectados por el clima x_2, el número de subcontratistas involucrados en el proyecto x_4 y una variable x_3 que midió la presencia ($x_3 = 1$) o ausencia ($x_3 = 0$) de una huelga de trabajadores durante la construcción. Se escogieron al azar 15 proyectos de construcción y se midieron cada una de las cuatro variables, así como el tiempo para terminar el proyecto.

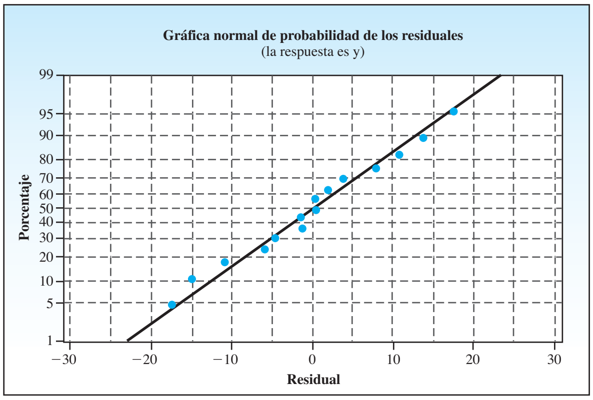
y	x_1	x_2	x_3	x_4
29	60	7	0	7
15	80	10	0	8
60	100	8	1	10
10	50	14	0	5
70	200	12	1	11
15	50	4	0	3
75	500	15	1	12
30	75	5	0	6
45	750	10	0	10
90	1200	20	1	12
7	70	5	0	3
21	80	3	0	6
28	300	8	0	8
50	2600	14	1	13
30	110	7	0	4

Un análisis de estos datos usando un modelo de primer orden en x_1, x_2, x_3 y x_4 produjo la siguiente salida impresa. Dé un análisis completo de la salida impresa e interprete sus resultados. ¿Qué se puede decir acerca de la aparente contribución de x_1 y x_2 en la predicción de y?

Análisis de regresión: y contra x1, x2, x3, x4

```
The regression equation is
y = -1.6 - 0.00784 x1 + 0.68 x2 + 28.0 x3 + 3.49 x4

Predictor        Coef     SE Coef       T       P
Constant        -1.59       11.66   -0.14   0.894
x1          -0.007843    0.006230   -1.26   0.237
x2            -0.6753      0.9998    0.68   0.515
x3              28.01       11.37    2.46   0.033
x4              3.489       1.935    1.80   0.102

S = 11.8450       R-Sq = 84.7%     R-Sq(adj) = 78.6%

Analysis of Variance
Source            DF        SS       MS       F       P
Regression         4    7770.3   1942.6   13.85   0.000
Residual Error    10    1403.0    140.3
Total             14    9173.3


Source     DF     Seq SS
X1         1      1860.9
x2         1      2615.3
x3         1      2838.0
x4         1       456.0
```





13.6 PRUEBA DE CONJUNTOS DE COEFICIENTES DE REGRESIÓN

En las secciones precedentes, hemos probado el conjunto completo de coeficientes de regresión parcial usando la prueba F para el ajuste general del modelo y hemos probado los coeficientes de regresión parcial individualmente usando la prueba t de Student. Además de estas dos importantes pruebas, se pueden probar hipótesis acerca de algunos subconjuntos de estos coeficientes de regresión.

Por ejemplo, suponga que una compañía sospecha que la demanda y de algún producto podría estar relacionada con hasta cinco variables independientes: x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5. El costo de obtener mediciones de las variables x_3, x_4 y x_5 es muy alto. Si, en un pequeño estudio piloto, la compañía pudiera demostrar que estas tres variables contribuyen con poca o ninguna información para la predicción de y, pueden ser eliminadas del estudio con grandes ahorros para la compañía.

Si las cinco variables, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5, se usan para predecir y, el modelo de regresión se escribiría como

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \epsilon$$

No obstante, si x_3, x_4 y x_5 no aportan información para la predicción de y, entonces no aparecerían en el modelo, es decir, $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ y el modelo reducido sería

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$$

En consecuencia, se desea probar la hipótesis nula

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

esto es, las variables independientes x_3, x_4 y x_5 no aportan información para la predicción de y, contra la hipótesis alternativa

$$H_a : \text{Al menos uno de los parámetros } \beta_3, \beta_4 \text{ o } \beta_5 \text{ es diferente de } 0$$

es decir, al menos una de las variables x_3, x_4 y x_5 aporta información para la predicción de y. Entonces, para decidir si el modelo completo es preferible al modelo reducido para predecir demanda, vamos a una prueba de hipótesis acerca de un conjunto de tres parámetros, β_3, β_4 y β_5.

Una prueba de hipótesis respecto a un conjunto de parámetros de modelo involucra dos modelos:

Modelo 1 (modelo reducido)

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r$$

Modelo 2 (modelo completo)

$$E(y) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r}_{\text{términos en modelo 1}} + \underbrace{\beta_{r+1} x_{r+1} + \beta_{r+2} x_{r+2} + \cdots \beta_k x_k}_{\text{términos adicionales en modelo 2}}$$

Suponga que se ajustaron ambos modelos al conjunto de datos y se calculó la suma de cuadrados para el error de los dos análisis de regresión. Si el modelo 2 aporta más información para la predicción de y que el modelo 1, entonces los errores de predicción para el modelo 2 deben ser más pequeños que los correspondientes errores para el modelo 1, y la SSE_2 debe ser menor que la SSE_1. De hecho, cuanto mayor sea la diferencia entre SSE_1 y SSE_2, mayor es la evidencia para indicar que el modelo 2 aporta más información para la predicción de y que el modelo 1.

La prueba de la hipótesis nula

$$H_0 : \beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \cdots = \beta_k = 0$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a : \text{Al menos uno de los parámetros } \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_k \text{ difiere de } 0$$

utiliza el estadístico de prueba

$$F = \frac{(SSE_1 - SSE_2)/(k - r)}{MSE_2}$$

donde F está basada en $df_1 = (k - r)$ y $df_2 = n - (k + 1)$. Observe que los parámetros $(k - r)$ contenidos en H_0 son los sumados al modelo 1 para obtener el modelo 2. Los grados de libertad df_1 del numerador siempre son iguales a $(k - r)$, que es el número de parámetros contenidos en H_0. Los grados de libertad df_2 del denominador es el número de grados de libertad asociado con la suma de cuadrados para error, SSE_2, para el modelo completo.

La región de rechazo para la prueba es idéntica a la región de rechazo para todos los análisis de pruebas F de varianza, es decir,

$$F > F_\alpha$$

EJEMPLO 13.8

Consulte los datos de bienes raíces del ejemplo 13.2 que relacionan el precio de venta de lista y con la superficie en pies cuadrados del área de vivienda x_1, el número de pisos x_2, el número de recámaras x_3 y el número de baños, x_4. El agente de bienes raíces sospecha que la superficie en pies cuadrados del área de vivienda es la variable predictora más importante, y que las otras variables podrían ser eliminadas del modelo sin perder mucha información de predicción. Pruebe esta afirmación con $\alpha = .05$.

Solución La hipótesis a probar es

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

contra la hipótesis alternativa que al menos una de β_2, β_3 o β_4 es diferente de 0. El **modelo completo 2**, dado como

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \epsilon$$

fue ajustado en el ejemplo 13.2. Una parte de la salida impresa *MINITAB* de la figura 13.3 se reproduce en la figura 13.15 junto con una parte de la salida impresa *MINITAB* para el análisis de regresión lineal simple del **modelo reducido 1**, dado como

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$$

FIGURA 13.15
Partes de las salidas impresas de regresión *MINITAB* para modelos a) completo y b) reducido para el ejemplo 13.8

Análisis de regresión: a) precio de lista contra pies cuadrados, número de pisos, recámaras y baños

```
S = 6.84930    R-Sq = 97.1%    R-Sq(adj) = 96.0%

Analysis of Variance
Source          DF       SS        MS       F       P
Regression       4    15913.0    3978.3   84.80   0.000
Residual Error  10      469.1      46.9
Total           14    16382.2
```

Análisis de regresión: b) precio de lista contra pies cuadrados

```
S = 10.9294    R-Sq = 90.5%    R-Sq(adj) = 89.8%

Analysis of Variance
Source          DF       SS        MS       F       P
Regression       1      14829     14829  124.14   0.000
Residual Error  13       1553       119
Total           14      16382
```

Entonces $\text{SSE}_1 = 1553$ de la figura 13.15b) y $\text{SSE}_2 = 469.1$ y $\text{MSE}_2 = 46.9$ de la figura 13.15a). El estadístico de prueba es

$$F = \frac{(\text{SSE}_1 - \text{SSE}_2)/(k - r)}{\text{MSE}_2}$$

$$= \frac{(1553 - 469.1)/(4 - 1)}{46.9} = 7.70$$

El valor crítico de F con $\alpha = .05$, $df_1 = 3$ y $df_2 = n - (k + 1) = 15 - (4 + 1) = 10$ es $F_{.05} = 3.71$. Por tanto, H_0 es rechazada. Hay evidencia para indicar que al menos una de las tres variables que son número de pisos, recámaras o baños, está contribuyendo con información significativa para predecir el precio de venta de lista.

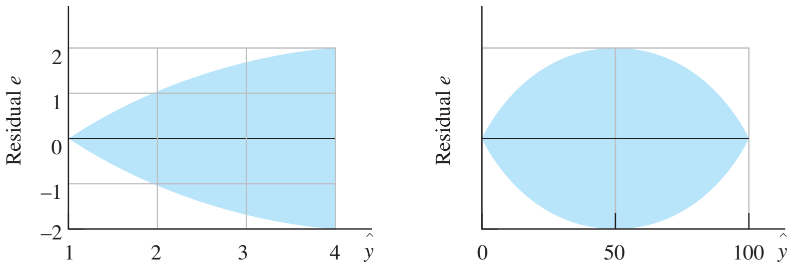
13.7 INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS RESIDUALES

Una vez más, se pueden usar gráficas residuales para descubrir posibles violaciones en las suposiciones requeridas para un análisis de regresión. Hay varios patrones comunes que se deben reconocer porque se presentan con frecuencia en aplicaciones prácticas.

- Los datos de Poisson exhiben variación que *aumenta* con la media.
- Los datos binomiales exhiben variación que *aumenta* para valores de p de .0 a .5 y luego *disminuye* para valores de p de .5 a 1.0.

Las gráficas residuales para estos tipos de datos tienen un patrón semejante al que se ve en la figura 13.16.

FIGURA 13.16
Gráficas de residuales contra $\hat{y}$



a) Datos de Poisson b) Porcentajes binomiales

Si el rango de los residuales aumenta cuando $\hat{y}$ aumenta y se sabe que los datos son mediciones sobre variables de Poisson, se puede estabilizar la varianza de la respuesta al correr el análisis de regresión en $y^* = \sqrt{y}$. O bien, si los porcentajes se calculan a partir de datos binomiales, se puede usar la transformación arcsen, $y^* = \text{sen}^{-1}\sqrt{y}$.†

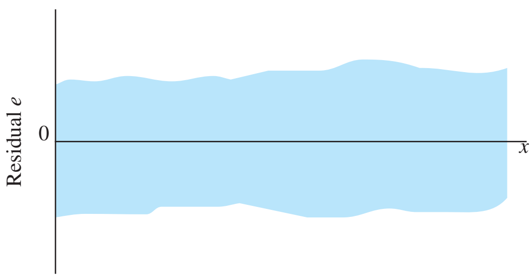
Incluso si no se está seguro de por qué el rango de los residuales aumenta cuando $\hat{y}$ aumenta, todavía se puede usar una transformación de y que afecta valores más grandes de y más que valores pequeños, por ejemplo $y^* = \sqrt{y}$ o $y^* = \ln y$. Estas transformaciones tienen una tendencia para estabilizar la varianza de y^* y para hacer que la distribución de y^* sea más casi normal cuando la distribución de y sea altamente sesgada.

Es frecuente que las gráficas de los residuales contra los ajustes $\hat{y}$ o contra las variables predictoras individuales muestren un patrón que indica que se ha escogido un modelo incorrecto. Por ejemplo, si $E(y)$ y una sola variable independiente x están linealmente relacionadas, es decir,

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x$$

y se ajusta una recta a los datos, entonces los valores y observados deben variar en una forma aleatoria alrededor de $\hat{y}$, y una gráfica de los residuales contra x aparecerá como se ve en la figura 13.17.

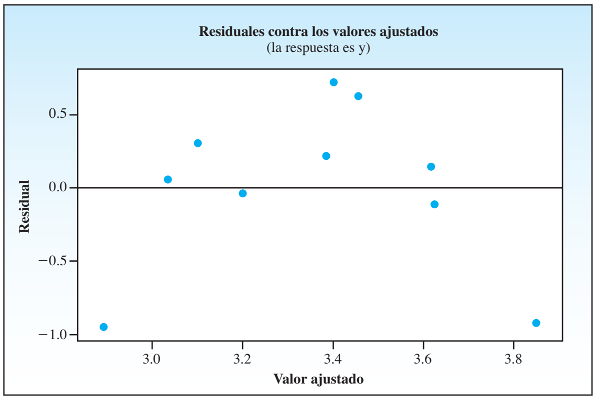
FIGURA 13.17
Gráfica residual cuando el modelo da una buena aproximación a la realidad



† En el capítulo 11 y anteriores, representamos la respuesta variable con el símbolo x. En los capítulos sobre análisis de regresión, capítulos 12 y 13, la variable de respuesta está representada por el símbolo y.

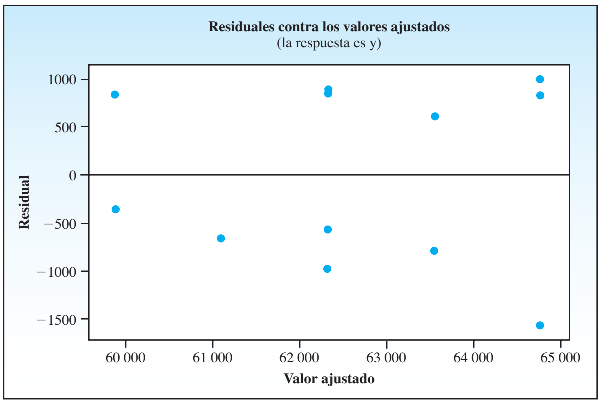
En el ejemplo 13.3, se ajustó un modelo cuadrático que relacionaba la productividad y con el tamaño de tienda x. Si incorrectamente se hubiera usado un modelo lineal para ajustar estos datos, la gráfica residual de la figura 13.18 mostraría que la variación no explicada exhibe un patrón curvado, que sugiere que hay un efecto cuadrático que no se ha incluido en el modelo.

FIGURA 13.18
Gráfica residual para ajuste lineal de tamaño de tienda y datos de productividad en el ejemplo 13.3



Para los datos del ejemplo 13.6, los residuales de una regresión lineal de salario con años de experiencia x_1 sin incluir género, x_2, mostraría un conjunto distinto de residuales positivos correspondientes a los caballeros y un conjunto de residuales negativos correspondientes a las mujeres (véase la figura 13.19). Este patrón señala que la variable "género" no estaba incluida en el modelo.

FIGURA 13.19
Gráfica residual para ajuste lineal de datos de salario en el ejemplo 13.6



Desafortunadamente, no todas las gráficas residuales dan una indicación tan clara del problema. Con todo cuidado deben examinarse las gráficas residuales, buscando que no haya aleatoriedad en el modelo de residuales. Si se puede hallar una explicación para el comportamiento de los residuales, se puede modificar el modelo para eliminar el problema.

13.8 ANÁLISIS DE REGRESIÓN POR PASOS

A veces hay un gran número de variables predictoras independientes que *podrían* tener un efecto en la variable de respuesta y. Por ejemplo, trate de hacer una lista de todas las variables que podrían afectar el promedio de calificaciones (GPA) de un estudiante de primer año de universidad:

- Calificaciones en cursos de preparatoria, promedio de calificaciones de preparatoria, calificación de examen de aptitud escolar, calificación de examen en universidades

- Especialidad, número de unidades llevadas, número de cursos tomados
- Programa de trabajo, estado civil, viaja o vive en el plantel

¿Cuál de este gran número de variables independientes deben incluirse en el modelo? Como el número de términos podría rápidamente hacerse muy difícil de manejar, podría escogerse usar un procedimiento llamado **análisis de regresión por pasos**, que se pone en práctica por computadora y lo hay en casi todos los paquetes de estadística.

Suponga que tenemos datos acerca de y y un buen número de posibles variables independientes, $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Un análisis de regresión por pasos ajusta una variedad de modelos a los datos, agregando y eliminando variables cuando la significancia de ellas en presencia de las otras variables es *significativa* o *no significativa*, respectivamente. Una vez que el programa haya hecho un número suficiente de iteraciones y no hay más variables significativas cuando se suman al modelo y ninguna de las variables del modelo son no significativas cuando son eliminadas, el procedimiento se detiene.

Un análisis de regresión por pasos es un modo fácil de localizar algunas variables que aportan información para predecir y, pero no es a prueba de errores. Como estos programas siempre ajustan modelos de primer orden de la forma

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

no son útiles para detectar *curvatura* o *interacción* en los datos. El análisis de regresión por pasos se usa mejor como herramienta preliminar para identificar cuál, de un gran número de variables, debe ser considerada en su modelo. Entonces es necesario decidir cómo introducir estas variables en el modelo real que usará para predicción.

13.9 INTERPRETACIÓN ERRÓNEA DE UN ANÁLISIS DE REGRESIÓN

Son comunes varias interpretaciones erróneas en la salida impresa de un análisis de regresión. Ya hemos mencionado la importancia de la selección de un modelo. Si un modelo no se ajusta a un conjunto de datos, no quiere decir que las variables incluidas en el modelo aporten poca o ninguna información para la predicción de y. Las variables pueden ser importantes contribuyentes de información, pero pueden haberse introducido las variables en el modelo en una forma equivocada. Por ejemplo, un modelo de segundo orden en las variables podría dar un muy buen ajuste a los datos cuando un modelo de primer orden parece ser por completo inútil para describir la variable de respuesta y.

Causalidad

Es necesario tener cuidado de no concluir que cambios en x *causan* cambios en y. Este tipo de **relación causal** puede ser detectada sólo con un *experimento cuidadosamente diseñado.* Por ejemplo, si al azar se asignan unidades experimentales a cada uno de dos niveles de una variable x, por ejemplo $x = 5$ y $x = 10$ y los datos muestran que el valor medio de y es mayor cuando $x = 10$, entonces se puede decir que el cambio en el nivel de x causó un cambio en el valor medio de y. Pero en casi todos los análisis de regresión, en los que los experimentos no están diseñados, no hay garantía de que una variable predictora importante, por ejemplo x_1, cause un cambio en y. Es muy posible que alguna variable que ni siquiera esté en el modelo cause que *tanto* y *como* x_1 cambien.

Multicolinealidad

Ni el tamaño de un coeficiente de regresión ni su valor t indican la importancia de la variable como contribuyente de información. Por ejemplo, supongamos que se desea predecir y, la calificación de cálculo de un estudiante universitario, con base en x_1 = promedio de calificaciones de preparatoria y x_2 = calificación en el examen de aptitud en matemáticas. Como estas dos variables contienen mucho de lo mismo o **información compartida**, no es de sorprender que una vez que una de las variables se introduzca en el modelo, la otra aporta muy poca información adicional. El valor t individual es pequeño, pero, si las variables se introdujeron en el orden inverso, se vería invertido el tamaño de los valores t.

La situación descrita líneas antes se denomina **multicolinealidad** y se presenta cuando dos o más de las variables predictoras están altamente correlacionadas entre sí. Cuando la multicolinealidad está presente en un problema de regresión, puede tener estos efectos en el análisis:

- Los coeficientes de regresión estimados tendrán errores estándar grandes, causando imprecisión en intervalos de confianza y predicción.
- Agregar o eliminar una variable de predicción puede causar cambios significativos en los valores de los otros coeficientes de regresión.

¿Cómo saber si un análisis de regresión exhibe multicolinealidad? Busque estos indicios:

- El valor de R^2 es grande, lo cual indica un buen ajuste, pero las pruebas t individuales no son significativas.
- Los signos de los coeficientes de regresión son contrarios a lo que intuitivamente se esperaría fueran las contribuciones de esas variables.
- Una matriz de correlaciones, generada por computadora, muestra cuáles variables predictoras están altamente correlacionadas entre sí y con la respuesta y.

La figura 13.20 muestra la matriz de correlaciones generada para los datos de bienes raíces del ejemplo 13.2. La primera columna de la matriz muestra las correlaciones de cada variable de predicción con la variable de respuesta y. Todas son significativamente diferentes de cero, pero la primera variable, x_1 = área de vivienda, es la más altamente correlacionada. Las últimas tres columnas de la matriz muestran correlaciones significativas entre todas las variables predictoras, excepto un par. Ésta es una fuerte indicación de multicolinealidad. Si se trata de eliminar una de las variables del modelo, pueden cambiar en forma drástica los efectos de las otras tres. Otro indicio puede hallarse al examinar los coeficientes de la recta de predicción,

```
ListPrice = 119 + 6.27  Square Feet − 16.2  Number of Floors
- 2.67 Bedrooms + 30.3 Baths
```

FIGURA 13.20
Matriz de correlación para los datos de bienes raíces del ejemplo 13.2

Correlaciones: Precio de lista, pies cuadrados, número de pisos, recámaras, baños

```
              ListPrice   SqFeet  Numflrs    Bdrms
Square Feet       0.951
                  0.000

Number of Fl      0.605    0.630
                  0.017    0.012

Bedrooms          0.746    0.711    0.375
                  0.001    0.003    0.168

Baths             0.834    0.720    0.760    0.675
                  0.000    0.002    0.001    0.006

Cell Contents: Pearson Correlation
               P-Value
```

Se podría esperar que más pisos y recámaras aumentaran el precio de lista, pero sus coeficientes son negativos.

Como existe multicolinealidad en alguna medida en todos los problemas de regresión, debemos considerar los términos individuales como *aportadores de información*, en lugar de tratar de medir la importancia práctica de cada término. La decisión primaria a tomarse es si un término aporta suficiente información para justificar su inclusión en el modelo.

13.10 PASOS A SEGUIR AL CONSTRUIR UN MODELO DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

El objetivo final de un análisis de regresión múltiple es desarrollar un modelo que en forma precisa prediga y como función de un conjunto de variables predictoras x_1, x_2, …, x_k. El procedimiento paso a paso para desarrollar este modelo se presentó en la sección 13.4 y volvemos a expresarlo a continuación con algún detalle adicional. Si se usa este método, lo que puede parecer un problema complicado se puede hacer más sencillo. Al igual que en cualquier procedimiento estadístico, la confianza crecerá a medida que ganemos experiencia con el análisis de regresión múltiple en varias situaciones prácticas.

1. Seleccione las variables predictoras a ser incluidas en el modelo. Como algunas de estas variables pueden contener información compartida, se puede reducir la lista al correr un análisis de regresión por pasos (véase la sección 13.8). Mantenga el número de variables predictoras lo suficientemente pequeño para que sea efectivo pero manejable. Es necesario estar conscientes que el número de observaciones del conjunto de datos debe exceder el número de términos del modelo; cuanto mayor el exceso, mejor.
2. Escriba un modelo usando las variables predictoras seleccionadas. Si las variables son cualitativas, es mejor empezar incluyendo términos de interacción; si las variables son cuantitativas, es mejor empezar con un modelo de segundo orden. Los términos no necesarios pueden eliminarse después. Obtenga el modelo de predicción ajustado.
3. Use el análisis de varianza de la prueba F y R^2 para determinar qué tan bien ajusta el modelo a los datos.
4. Verifique las pruebas t para los coeficientes de regresión parcial para ver cuáles están aportando información significativa en presencia de los otros. Si algunos términos parecen ser no significativos, considere eliminarlos. Si escoge comparar varios modelos diferentes, use R^2(adj) para comparar su efectividad.
5. Use gráficas residuales generadas por computadora para ver si hay violación de las suposiciones de regresión.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. El modelo lineal general

1. $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon$
2. El error aleatorio ϵ tiene una distribución normal con media 0 y varianza σ^2.

II. Método de mínimos cuadrados

1. Las estimaciones $b_0, b_1, \ldots, b_k$, para $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, se escogen para minimizar SSE, la suma del cuadrado de desviaciones alrededor de la recta de regresión, $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k$.
2. Las estimaciones de mínimos cuadrados son producidas por computadora.

III. Análisis de varianza

1. SS Total = SSR + SSE, donde SS Total = S_{yy}. La tabla ANOVA es producida por computadora.
2. La mejor estimación de σ^2 es

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n - k - 1}$$

IV. Prueba, estimación y predicción

1. Una prueba de la significancia de la regresión, $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$, se puede implementar usando el análisis de prueba F de varianza:

$$F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$$

2. La fuerza de la relación entre x y y se puede medir usando

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SS Total}}$$

lo cual se acerca a 1 cuando la relación se hace más fuerte.

3. Use gráficas residuales para verificar si hay no normalidad, desigualdad de varianzas y un modelo incorrectamente ajustado.

4. Las pruebas de significancia para los coeficientes de regresión parcial se pueden efectuar usando la prueba t de Student:

$$t = \frac{b_i - \beta_i}{\text{SE}(b_i)} \qquad \text{con error } df = n - k - 1$$

5. Los intervalos de confianza pueden ser generados por computadora para estimar el valor promedio de y, $E(y)$, para valores dados de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Los intervalos de predicción generados por computadora se pueden usar para predecir una observación particular y para valores determinados de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Para $x_1, x_2, \ldots, x_k$, los intervalos de predicción determinados son siempre más anchos que los intervalos de confianza.

V. Construcción de un modelo

1. El número de términos en un modelo de regresión no puede exceder al número de observaciones del conjunto de datos y debe ser considerablemente menor.
2. Para considerar un efecto curvilíneo en una variable *cuantitativa*, use un modelo polinomial de segundo orden. Para un efecto cúbico, use un modelo polinomial de tercer orden.
3. Para agregar una variable *cualitativa* con k categorías, use $(k - 1)$ variables ficticias o indicadoras.
4. Puede haber interacciones entre dos variables cuantitativas o entre una variable cuantitativa y una cualitativa. Los términos de interacción se introducen como $\beta x_i j_i$.
5. Compare modelos usando R^2(adj).

MI MINITAB

Procedimientos de regresión múltiple

En el capítulo 12 usamos los procedimientos de regresión lineal disponibles en *MINITAB* para efectuar estimación y probar un análisis de regresión lineal simple. Obtuvimos una gráfica de la recta de mejor ajuste de regresión de mínimos cuadrados y calculamos el coeficiente de correlación r y el coeficiente de determinación r^2. Las técnicas de prueba y estimación para un análisis de regresión múltiple también están disponibles con *MINITAB* y contienen casi el mismo conjunto de comandos. Se podría revisar la sección "*Mi MINITAB*" al final del capítulo 12 antes de continuar con esta sección.

Para una variable de respuesta y que está relacionada con diversas variables predictoras $x_1, x_2, \ldots, x_k$, los valores observados de y y cada una de las variables predictoras k deben introducirse en las primeras $(k + 1)$ columnas de la hoja de trabajo *MINITAB*. Una vez hecho esto, las principales herramientas inferenciales para análisis de regresión lineal se generan usando **Stat** → **Regression** → **Regression**. El cuadro de diálogo para el comando **Regression** se muestra en la figura 13.21.

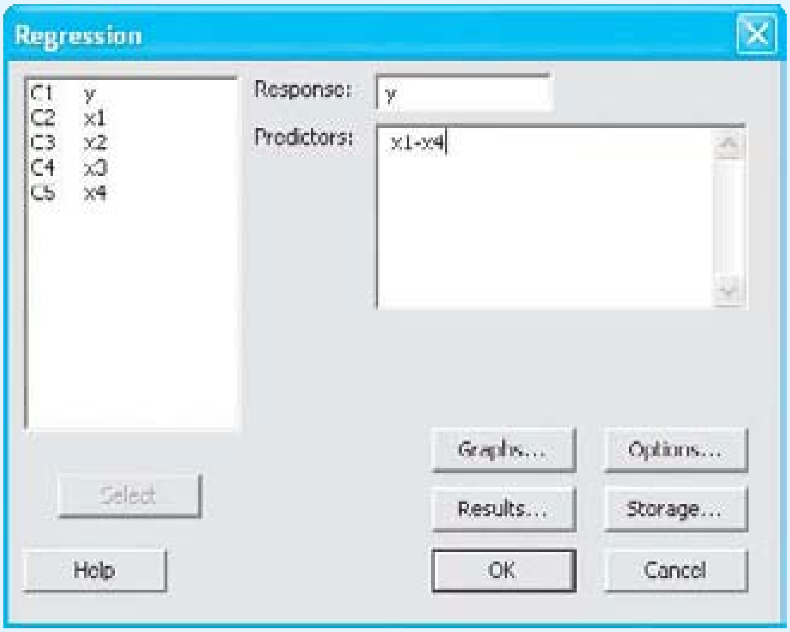
Seleccione **y** para la variable de respuesta y $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_k}$ para las variables predictoras. Ahora se puede escoger generar algunas gráficas residuales para comprobar la validez de las suposiciones de regresión antes de usar el modelo para estimación o predicción. Escoja **Graphs** para exhibir el cuadro de diálogo para gráficas residuales y escoja la gráfica apropiada de diagnóstico.

Una vez que haya verificado lo apropiado del modelo de regresión múltiple, puede escoger **Options** y obtener intervalos de confianza y predicción para cualquiera de estos casos:

- Un solo conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (tecleados en el cuadro marcado "Prediction Intervals for new observations")
- Varios conjuntos de valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ guardados en k columnas de la hoja de trabajo

Cuando haga clic en **OK** dos veces, se genera la salida de regresión.

FIGURA 13.21



La única dificultad para efectuar el análisis de regresión múltiple usando *MINITAB* podría ser introducir correctamente los datos para su modelo particular. Si el modelo contiene términos con polinomios o términos de interacción, el comando **Calc → Calculator** le ayudará. Por ejemplo, suponga que desea ajustar el modelo

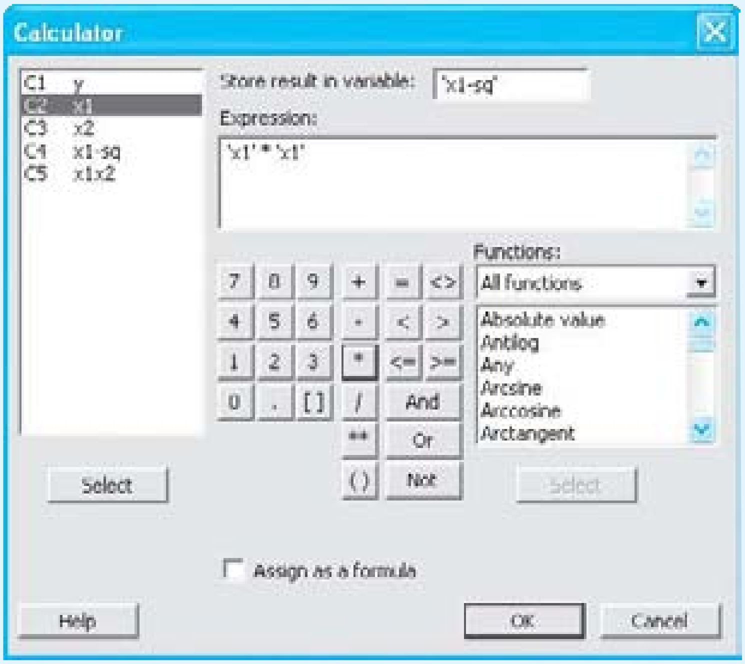
$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_1 x_2$$

Necesitará introducir los valores observados de y, x_1 y x_2 en las primeras tres columnas de la hoja de trabajo *MINITAB*. Aplique nombre a la columna C4 "x1-sq" y a C5 "x1x2". Ahora puede usar el cuadro de diálogo de calculadora que se ve en la figura 13.22 para generar estas dos columnas. En el cuadro **Expression**, seleccione **x1*x1** o **x1**2** y guarde los resultados en **C4** (x1-sq). Dé un clic en **OK**. Del mismo modo, para obtener los datos para C5, seleccione **x1*x2** y guarde los resultados en **C5** (x1x2). Dé un clic en **OK**. Ahora está listo para efectuar el análisis de regresión múltiple.

Si usted está ajustando ya sea un modelo cuadrático o uno cúbico en una variable x, puede ahora graficar los puntos de datos, la curva de regresión polinomial y los límites de confianza y predicción superiores e inferiores usando **Stat → Regression → Fitted line Plot**. Seleccione y y x para las variables Response y Predictor, y dé un clic en "Display confidence interval" y "Display prediction interval" en el cuadro de diálogo **Options**. Asegúrese que **Quadratic** o **Cubic** esté seleccionado como el "Type of Regression Model", de modo que obtenga el ajuste apropiado a los datos.

Recuerde que, en el capítulo 12, utilizó **Stat → Basic Statistics → Correlation** para obtener el valor del coeficiente de correlación r. En análisis de regresión múltiple, el mismo comando va a generar una matriz de correlaciones, una por cada par de variables del conjunto y, x_1, x_2, …, x_k. Asegúrese que el cuadro marcado "Display p-values" se haya seleccionado con una "paloma". Los valores p darán información sobre la correlación significativa entre un par particular, en presencia de todas las obras variables del modelo y sean idénticas para las pruebas t individuales de los coeficientes de regresión.

FIGURA 13.22



Ejercicios suplementarios

MIS DATOS EX1325

13.25 Ingesta de Biotina en pollos Grupos de pollos de 10 días de edad se asignaron al azar a siete grupos de tratamiento en los que una dieta basal se suplementó con 0, 50, 100, 150, 200, 250 o 300 microgramos/kilogramo (μg/kg) de biotina. La tabla siguiente da el promedio de ingesta de biotina (x) en microgramos por día y el promedio de aumento de peso (y) en gramos por día.[6]

Biotin agregado	Ingesta de biotina, x	Aumento de peso, y
0	.14	8.0
50	2.01	17.1
100	6.06	22.3
150	6.34	24.4
200	7.15	26.5
250	9.65	23.4
300	12.50	23.3

En la salida impresa *MINITAB*, el modelo polinomial de segundo orden

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

está ajustado a los datos. Use la salida impresa para contestar las preguntas.

a. ¿Cuál es la recta de mínimos cuadrados ajustada?

b. Encuentre R^2 e interprete su valor.

c. ¿Los datos dan suficiente evidencia para concluir que el modelo aporta información significativa para predecir y?

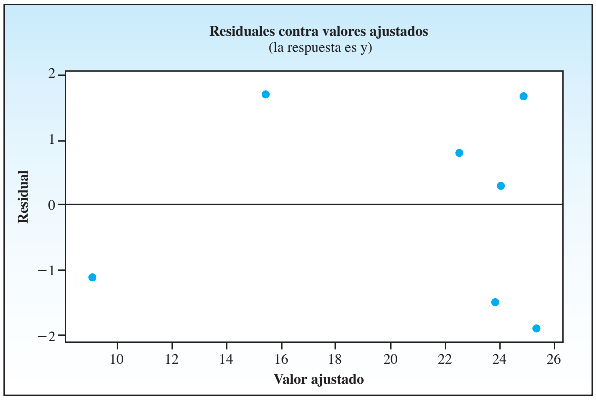
d. Encuentre los resultados de la prueba de $H_0 : \beta_2 = 0$. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que el modelo cuadrático da un mejor ajuste a los datos que un modelo lineal simple?

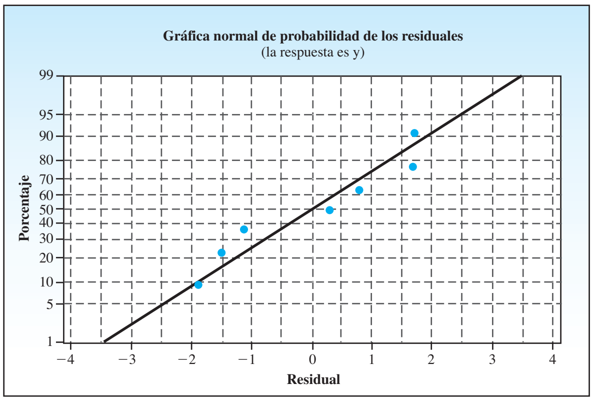
e. ¿Las gráficas residuales indican que cualquiera de las suposiciones de regresión han sido violadas? Explique.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.25

Análisis de regresión: y contra x. x-sq

```
The regression equation is
y = 8.59 + 3.82 x - 0.217 x-sq

Predictor        Coef     SE Coef        T        P
Constant        8.585       1.641     5.23    0.006
x              3.8208      0.5683     6.72    0.003
x-sq         -0.21663     0.04390    -4.93    0.008

S = 1.83318     R-Sq = 94.4%     R-Sq(adj) = 91.5%

Analysis of Variance
Source          DF        SS        MS      F       P
Regression       2    224.75    112.37  33.44   0.003
Residual Error   4     13.44      3.36
Total            6    238.19

Source        DF      Seq SS
x              1      142.92
x-sq           1       81.83
```





MIS DATOS EX1326 **13.26 Publicidad y ventas** Una tienda de departamentos realizó un experimento con el fin de investigar los efectos de gastos de publicidad en las ventas semanales de sus departamentos de ropa para caballeros, para niños y para damas. Cinco semanas de observación se seleccionaron al azar de cada departamento y un presupuesto de publicidad x_1 (en cientos de dólares) se asignó a cada uno. Las ventas semanales (en miles de dólares) se muestran en la tabla siguiente para cada uno de los 15 periodos de venta de una semana. Si esperamos que las ventas semanales $E(y)$ estén linealmente relacionadas con el gasto de publicidad x_1 y si esperamos que las pendientes de las rectas correspondientes a los tres departamentos difieran, entonces un modelo apropiado para $E(y)$ es

$$E(y) = \beta_0 + \underbrace{\beta_1 x_1}_{\substack{\text{variable}\\\text{cuantitativa}\\\text{“gasto en}\\\text{publicidad”}}} + \underbrace{\beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}_{\substack{\text{variables ficticias}\\\text{usadas para}\\\text{introducir la}\\\text{variable cualitativa}\\\text{“departamento”}\\\text{en el modelo}}} + \underbrace{\beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1 x_3}_{\substack{\text{términos de}\\\text{interacción que}\\\text{introducen diferencias}\\\text{en pendientes}}}$$

donde

$$x_1 = \text{gasto en publicidad}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si el departamento de ropa para niños es B} \\ 0 & \text{si no lo es} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{si el departamento de ropa para damas es C} \\ 0 & \text{si no lo es} \end{cases}$$

	Gasto en publicidad (cientos de dólares)				
Departamento	1	2	3	4	5
Ropa para caballeros A	\$5.2	\$5.9	\$7.7	\$7.9	\$9.4
Ropa para niños B	8.2	9.0	9.1	10.5	10.5
Ropa para damas C	10.0	10.3	12.1	12.7	13.6

a. Encuentre la ecuación de la recta que relacione $E(y)$ con el gasto en publicidad x_1 para el departamento A de ropa para caballeros. [SUGERENCIA: De acuerdo con el código usado para las variables ficticias, el modelo representa ventas medias $E(y)$ para el departamento A de ropa para caballeros cuando $x_2 = x_3 = 0$. Sustituya $x_2 = x_3 = 0$ en la ecuación para $E(y)$ para hallar la ecuación de esta recta.]

b. Encuentre la ecuación de la recta que relacione $E(y)$ con x_1 para el departamento B de ropa para niños. [SUGERENCIA: De acuerdo con el código, el modelo representa $E(y)$ para el departamento de ropa para niños cuando $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$.]

c. Encuentre la ecuación para la recta que relacione $E(y)$ con x_1 para el departamento C de ropa para mujeres.

d. Encuentre la diferencia entre los puntos de intersección de las rectas $E(y)$ correspondientes a los departamentos B de ropa para niños y A de ropa para caballeros.

e. Encuentre la diferencia de pendientes entre las rectas $E(y)$ correspondientes a los departamentos C de ropa para mujeres y A de ropa para caballeros.

f. Consulte el inciso e). Suponga que se desea probar la hipótesis nula de que las pendientes de las rectas correspondientes a los tres departamentos son iguales. Expresa esto como una prueba de hipótesis acerca de uno o más parámetros de modelo.

13.27 Publicidad y ventas, continúa Consulte el ejercicio 13.26. Use un paquete de software de computadora para efectuar el análisis de regresión múltiple y obtener gráficas de diagnóstico si es posible.

a. Comente sobre el ajuste del modelo, usando el análisis de varianza de prueba F, R^2 y las gráficas de diagnóstico para comprobar las suposiciones de regresión.

b. Encuentre la ecuación de predicción y grafique las rectas de ventas de los tres departamentos.

c. Examine las gráficas del inciso b). ¿Parecen diferir las pendientes de las rectas correspondientes a los departamentos B de ropa para niños y A de ropa para caballeros? Pruebe la hipótesis nula de que las pendientes no difieren ($H_0 : \beta_4 = 0$) contra la hipótesis alternativa de que las pendientes son diferentes.

d. ¿Los términos de interacción del modelo son significativos? Use los métodos descritos en la sección 13.5 para probar $H_0 : \beta_4 = \beta_5 = 0$. ¿Los resultados de esta prueba sugieren que el modelo ajustado debe ser modificado?

e. Escriba una explicación breve de las implicaciones prácticas de este análisis de regresión.

MIS DATOS EX1328

13.28 Demanda de servicio eléctrico Las compañías de servicio eléctrico, que deben planear la operación y expansión de generación de electricidad, están vitalmente interesadas en predecir la demanda de consumidores tanto a corto como a largo plazos. Un estudio a corto plazo se realizó para investigar el efecto de la temperatura diaria mensual x_1 y el costo por kilowatt-hora x_2 en el consumo diario medio (en kilowatt-horas, kWh) por familia. La compañía esperaba que la demanda de electricidad subiera en tiempo frío (debido a calefacción), bajara cuando el clima fuera moderado y subiera de nuevo cuando la temperatura subiera y hubiera necesidad de poner a funcionar el aire acondicionado. Esperaban que la demanda disminuyera a medida que aumentara el costo por kilowatt-hora, lo que refleja mayor atención a la conservación. Los datos estuvieron disponibles para 2 años, un periodo en el que el costo por kilowatt-hora x_2 aumentó debido al creciente costo del combustible. La compañía ajustó el modelo

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1^2 x_2$$

a los datos que se ven en la tabla siguiente. La salida impresa *MINITAB* para este problema de regresión múltiple también se ilustra.

Precio por kWh, x_2	Temperatura diaria y consumo	Consumo diario medio (kWh) por familia					
8¢	Temperatura diaria media (°F), x_1	31	34	39	42	47	56
		62	66	68	71	75	78
	Consumo diario medio, y	55	49	46	47	40	43
		41	46	44	51	62	73
10¢	Temperatura diaria media, x_1	32	36	39	42	48	56
		62	66	68	72	75	79
	Consumo diario medio, y	50	44	42	42	38	40
		39	44	40	44	50	55

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.28

Análisis de regresión: y contra x1, x1-sq, x2, x1x2, x1sqx2

```
The regression equation is
y = 326 - 11.4 x1 + 0.113 x1-sq - 21.7 x2
    + 0.873 x1x2 - 0.00887 x1sqx2

Predictor       Coef     SE Coef       T       P
Constant      325.61       83.06    3.92   0.001
x1           -11.383       3.239   -3.51   0.002
x1-sq        0.11350     0.02945    3.85   0.001
x2           -21.699       9.224   -2.35   0.030
x1x2          0.8730      0.3589    2.43   0.026
x1sqx2     -0.008869    0.003257   -2.72   0.014

S = 2.90763       R-Sq = 89.8%     R-Sq(adj) = 87.0%

Analysis of Variance
Source           DF        SS       MS       F       P
Regression        5   1346.45   269.29   31.85   0.000
Residual Error   18    152.18     8.45
Total            23   1498.63

Source       DF    Seq SS
x1            1    140.71
x1-sq         1    892.78
x2            1    192.44
x1x2          1     57.84
x1sqx2        1     62.68

Unusual Observations
Obs     x1        y      Fit   SE Fit  Residual  St Resid
  9   68.0   44.000   49.640    1.104    -5.640    -2.10R
 12   78.0   73.000   67.767    2.012     5.233     2.49R

R denotes an observation with a large standardized residual.
```

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que el modelo aporta información para la predicción del consumo diario medio en kilowatt-hora por familia? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

b. Grafique la curva que describe $\hat{y}$ como función de la temperatura x_1 cuando el costo por kilowatt-hora es $x_2 = 8¢$. Construya una gráfica similar para el caso cuando $x_2 = 10¢$ por kilowatt-hora. ¿Son diferentes las curvas de consumo?

c. Si el costo por kilowatt-hora no es importante para predecir el uso, entonces en el modelo no se necesitan los términos que contienen x_2. Por tanto, la hipótesis nula

$H_0: x_2$ no aporta información para la predicción de y

es equivalente a la hipótesis nula $H_0: \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ (si $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$, los términos que contienen x_2 desaparecen del modelo). La salida impresa *MINITAB*, obtenida al ajustar el modelo reducido

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2$$

a los datos, se muestra aquí. Use los métodos de la sección 13.5 para determinar si el precio por kilowatt-hora x_2 aporta información significativa para la predicción de y.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.28

Análisis de regresión: y contra x1, x1-sq

```
The regression equation is
y = 130 - 3.50 x1 + 0.0334 x1-sq

Predictor        Coef     SE Coef        T       P
Constant       130.01       14.88     8.74   0.000
x1            -3.5017      0.5789    -6.05   0.000
x1-sq        0.033371    0.005256     6.35   0.000

S = 4.70630    R-Sq = 69.0%    R-Sq(adj) = 66.0%

Analysis of Variance
Source          DF       SS        MS       F      P
Regression       2   1033.49   516.75   23.33  0.000
Residual Error  21    465.13    22.15
Total           23   1498.63

Source      DF    Seq SS
x1           1    140.71
x1-sq        1    892.78

Unusual Observations
Obs    x1      y     Fit   SE Fit   Residual   St Resid
 12  78.0  73.000  59.906   2.243     13.094      3.16R

R denotes an observation with a large standardized residual.
```

d. Compare los valores de R^2(adj) para el ajuste de los dos modelos. ¿Cuál de los dos modelos recomendaría usted?

MIS DATOS EX1329

13.29 Concentración de mercurio en delfines Debido a que los delfines (y otros grandes mamíferos marinos) son considerados como los principales depredadores en la cadena alimenticia marina, las concentraciones de metales pesados en delfines de franjas se midieron como parte de un estudio de contaminación marina. Se espera que la concentración de mercurio, el metal pesado reportado en este estudio, difiera en machos y hembras porque el mercurio en una hembra aparentemente es pasado a su descendencia durante la gestación y lactancia. Este estudio comprendió 28 machos entre las edades de .21 y 39.5 años y 17 hembras de edades entre .80 y 34.5 años. Para los datos de la tabla,

x_1 = Edad del delfín (en años)

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si hembra} \\ 1 & \text{si macho} \end{cases}$$

y = Concentración de mercurio (en microgramos/gramo) en el hígado

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
1.70	.21	1	481.00	22.50	1
1.72	.33	1	485.00	24.50	1
8.80	2.00	1	221.00	24.50	1
5.90	2.20	1	406.00	25.50	1
101.00	8.50	1	252.00	26.50	1
85.40	11.50	1	329.00	26.50	1
118.00	11.50	1	316.00	26.50	1
183.00	13.50	1	445.00	26.50	1
168.00	16.50	1	278.00	27.50	1
218.00	16.50	1	286.00	28.50	1
180.00	17.50	1	315.00	29.50	1
264.00	20.50	1			

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
241.00	31.50	1	142.00	17.50	0
397.00	31.50	1	180.00	17.50	0
209.00	36.50	1	174.00	18.50	0
314.00	37.50	1	247.00	19.50	0
318.00	39.50	1	223.00	21.50	0
2.50	.80	0	167.00	21.50	0
9.35	1.58	0	157.00	25.50	0
4.01	1.75	0	177.00	25.50	0
29.80	5.50	0	475.00	32.50	0
45.30	7.50	0	342.00	34.50	0
101.00	8.05	0			
135.00	11.50	0			

a. Escriba un modelo de segundo orden que relacione y con x_1 y x_2. Considere curvatura en la relación entre edad y concentración de mercurio, así como para una interacción entre género y edad.

Use un software de computadora para efectuar el análisis de regresión múltiple. Consulte la salida impresa para contestar estas preguntas.

b. Comente sobre el ajuste del modelo, usando estadísticas relevantes de la salida impresa.

c. ¿Cuál es la ecuación de predicción para predecir la concentración de mercurio en un delfín hembra como función de su edad?

d. ¿Cuál es la ecuación de predicción para predecir la concentración de mercurio en un delfín macho como función de su edad?

e. ¿El término cuadrático de la ecuación de predicción para hembras hace aportación significativa a la predicción de la concentración de mercurio en un delfín hembra?

f. ¿Hay otras conclusiones importantes que usted sienta que no se consideraron respecto a la ecuación de predicción ajustada?

MIS DATOS EX1330

13.30 El costo de volar ¿El costo de un vuelo en avión depende de la aerolínea y de la distancia recorrida? En el ejercicio 12.21, exploramos la primera parte de este problema. Los datos mostrados en esta tabla comparan el costo promedio y distancia recorrida para dos líneas aéreas diferentes, medidas para 11 rutas aéreas de gran movimiento en Estados Unidos.[7]

Ruta	Distancia	Costo	Aerolínea
Chicago-Detroit	238	148	American
		164	United
Chicago-Denver	901	256	American
		312	United
Chicago-St. Louis	262	136	American
		152	United
Chicago-Seattle	1736	424	American
		520	United
Chicago-Cleveland	301	129	American
		139	United
Los Angeles-Chicago	1757	361	American
		473	United
Chicago-Atlanta	593	162	American
		183	United
Nueva York-Los Angeles	2463	444	American
		525	United
Nueva York-Chicago	714	287	American
		334	United
Los Angeles-Honolulu	2556	323	American
		333	United
Nueva York-San Francisco	2574	513	American
		672	United

Use un paquete de computadora para analizar los datos con un análisis de regresión múltiple. Comente sobre el ajuste del modelo, las variables significativas, cualesquiera interacciones que existan y suposiciones de regresión que puedan haber sido violadas. Resuma sus resultados en un informe, incluyendo salidas impresas y gráficas si posible.

MIS DATOS EX1331

13.31 En camino otra vez Hasta fechas recientes, las llantas de alto rendimiento se ajustaban principalmente en vehículos deportivos o de lujo. Ahora se han convertido en estándar en muchos sedanes de uso diario. Los mayores niveles de manejo y agarre al pavimento han aparecido a expensas del desgaste en el dibujo o superficie de rodamiento. Los datos que siguen se han resumido de un informe, sobre llantas de alto rendimiento de clasificación H por *Consumer Reports*[8], en el que se evaluaron varios aspectos del rendimiento para $n = 22$ llantas diferentes y fueron:

y = puntuación general x_1 = frenado en seco
x_2 = frenado en húmedo x_3 = manejo
x_4 = resistencia al rodamiento x_5 = duración del dibujo

Llanta	Costo	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Dunlop® SP Sport 5000	81	85	5	5	4	4	4
Michelin® Pilot Exalto A/S	78	83	5	5	4	3	4
Falken® Ziex ZE 512	56	83	5	5	4	3	2
Continental® ContiProContact	77	81	4	5	4	4	2
Michelin Pilot XGT H4	98	81	5	5	4	1	2
Bridgestone® Potenza RE 950	80	80	5	5	4	2	2
BFGoodrich® Traction T/A	68	78	5	5	4	2	3
Yokohama® Avid H4s	62	77	5	5	4	3	4
Sumitomo® HTR H4	56	76	5	5	3	2	1
Bridgestone HP50	79	75	4	5	4	2	1
Michelin Energy MXV4 Plus	103	73	3	4	4	5	5
Goodyear® Assurance Triple Tred	85	72	3	4	3	3	5
Kumho Solus KH16	49	72	4	4	4	3	5
Pirelli® P6 Four Seasons	71	70	3	4	3	2	2
Bridgestone Potenza G009	62	70	4	4	4	2	2
Dayton® Daytona HR	46	69	4	4	3	2	2
Fuzion® HRi	49	69	4	4	4	1	2
Continental ContiPremierContact	91	68	3	4	4	5	5
Cooper® Lifeliner Touring SLE	61	65	3	3	3	2	2
Bridgestone Turanza EL400	91	63	3	3	4	2	2
Hankook® Optimo H418	51	62	3	2	3	3	4
General Exclaim	53	50	2	2	3	2	2

Las variables x_1 a la x_5 están codificadas usando la escala de 5 = excelente, 4 = muy buena, 3 = buena, 2 = regular y 1 = mala.

a. Use un programa de su elección para hallar la matriz de correlación para las variables bajo estudio, que incluya costo. ¿El costo está significativamente correlacionado con cualquiera de las variables de estudio? ¿Cuáles variables parecen estar altamente correlacionadas con y, la puntuación total?

b. Escriba un modelo para describir y, la puntuación total, como función de las variables x_1 = frenado en seco, x_2 = frenado en húmedo, x_3 = manejo, x_4 = resistencia al rodamiento y x_5 = duración del dibujo.

c. Use un programa de regresión de su elección para ajustar el modelo completo usando todas las variables predictoras. ¿Qué proporción de la variación en y está explicada por regresión? ¿Esto comunica la impresión de que el modelo explica en forma adecuada la variabilidad inherente en y?

d. ¿Cuál variable o variables parecen ser buenas variables predictoras de y? ¿Cómo podría refinarse el modelo en vista de estos resultados? Use estas variables para reajustar el modelo. ¿Qué proporción de la variación es explicada por este modelo reajustado? Comente sobre lo adecuado de este modelo reducido en comparación con el modelo completo.

MIS DATOS EX1332

13.32 Atunes Los datos sobre atunes del ejercicio 11.16 se analizaron como un diseño completamente aleatorizado con cuatro tratamientos. No obstante, también podríamos ver el diseño experimental como un experimento factorial de 2 × 2 con repeticiones desiguales. Los datos se muestran a continuación.[9]

	Aceite		Agua	
Atún claro	2.56	.62	.99	1.12
	1.92	.66	1.92	.63
	1.30	.62	1.23	.67
	1.79	.65	.85	.69
	1.23	.60	.65	.60
		.67	.53	.60
			1.41	.66
Atún blanco	1.27		1.49	1.29
	1.22		1.29	1.00
	1.19		1.27	1.27
	1.22		1.35	1.28

Fuente: Estudio práctico "Tuna Goes Upscale" Copyright 2001 por Consumers Union of U.S. Inc., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de junio de 2001 de Consumer Reports® sólo para fines educativos. No se permite uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org

Los datos se pueden analizar usando el modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$$

donde

$x_1 = 0$ si en aceite, 1 si en agua

$x_2 = 0$ si atún claro, 1 si atún blanco

a. Demuestre cómo introduciría los datos en una hoja de trabajo de computadora, introduciendo los datos en las columnas para y, x_1, x_2 y x_1x_2.

b. La salida impresa generada por *MINITAB* se muestra a continuación. ¿Cuál es la ecuación de predicción de mínimos cuadrados?

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.32

Análisis de regresión: y contra x1, x2, x1x2

```
The regression equation is
y = 1.15 - 0.251 x1 + 0.078 x2 + 0.306 x1x2

Predictor        Coef    SE Coef        T       P
Constant       1.1473     0.1370     8.38   0.000
x1            -0.2508     0.1830    -1.37   0.180
x2             0.0777     0.2652     0.29   0.771
x1x2           0.3058     0.3330     0.92   0.365

S = 0.454287     R-Sq = 11.9%     R-Sq(adj) = 3.9%

Analysis of Variance

Source          DF       SS       MS      F       P
Regression       3   0.9223   0.3074   1.49   0.235
Residual Error  33   6.8104   0.2064
Total           36   7.7328
```

c. ¿Hay interacción entre el tipo de atún y el tipo de líquido de empaque?

d. ¿Cuál, si lo hay, de los principales efectos (tipo de atún y tipo de líquido de empaque) aporta información significativa para la predicción de y?

e. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos? Explique.

13.33 Atún, continúa Consulte el ejercicio 13.32. La hipótesis probada en el capítulo 11, que el promedio de precios para los cuatro tipos de atún es igual, es equivalente a decir que $E(y)$ no cambiará cuando x_1 y x_2 cambien. Esto puede ocurrir sólo cuando $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Use la salida impresa *MINITAB* para la ANOVA de una vía que se muestra a continuación para efectuar la prueba de igualdad de medias de tratamiento. Verifique que esta prueba sea idéntica a la prueba para regresión significativa del ejercicio 13.32.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 13.33

ANOVA de una vía: claro en agua, blanco en aceite, blanco en agua, claro en aceite

```
Source    DF      SS      MS      F       P
Factor     3   0.922   0.307   1.49   0.235
Error     33   6.810   0.206
Total     36   7.733

S = 0.4543   R-Sq = 11.93%   R-Sq(adj) = 3.92%
```

MIS DATOS EX1334 **13.34 Control de calidad** Un fabricante registró el número de piezas defectuosas (y) producidas en un día determinado por cada uno de 10 operadores de máquinas y también registró la producción promedio por hora (x_1) por cada operador y el tiempo en semanas desde el último servicio a una máquina (x_2).

y	x_1	x_2
13	20	3.0
1	15	2.0
11	23	1.5
2	10	4.0
20	30	1.0
15	21	3.5
27	38	0
5	18	2.0
26	24	5.0
1	16	1.5

La salida impresas que sigue resultó cuando estos datos se analizaron usando el paquete *MINITAB* usando el modelo:

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

Análisis de regresión: y contra x1, x2

```
The regression equation is
y = -28.4 + 1.46 x1 + 3.84 x2

Predictor       Coef    SE Coef        T       P
Constant    -28.3906     0.8273   -34.32   0.000
x1           1.46306    0.02699   -54.20   0.000
x2            3.8446     0.1426    26.97   0.000

S = 0.548433    R-Sq = 99.8%    R-Sq(adj) = 99.7%

Analysis of Variance

Source          DF      SS      MS        F       P
Regression       2  884.79  442.40  1470.84   0.000
Residual Error   7    2.11    0.30
Total            9  886.90

Source   DF   Seq SS
x1        1   666.04
x2        1   218.76
```

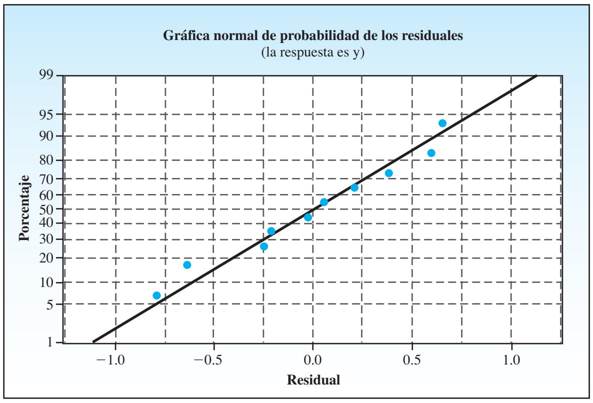
a. Interprete R^2 y comente sobre el ajuste del modelo.

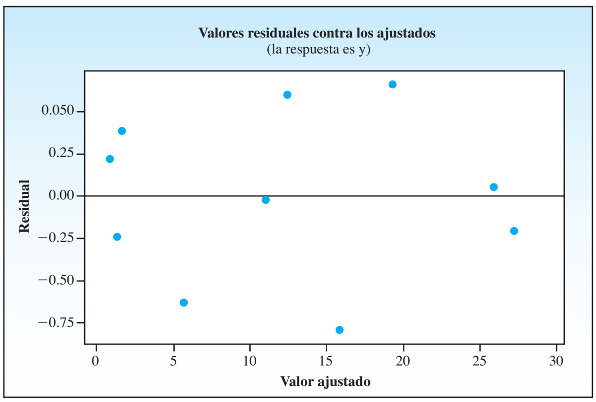
b. ¿Hay evidencia para indicar que el modelo contribuye de manera significativa a la predicción de y al nivel de significancia de $\alpha = .01$?

c. ¿Cuál es la ecuación de predicción que relacione $\hat{y}$ y x_1 cuando $x_2 = 4$?

d. Use la ecuación de predicción ajustada para predecir el número de piezas defectuosas producidas por un operador cuya producción promedio por hora es 25, cuya máquina ha recibido servicio hace tres semanas.

e. ¿Qué nos dicen las gráficas residuales acerca de la validez de las suposiciones de regresión?





13.35 Corrosión de metal y ácidos del suelo (MIS DATOS EX1335) En una investigación para determinar la relación entre el grado de corrosión de metal y el tiempo que el metal se exponga a la acción de ácidos del suelo, el porcentaje de corrosión y tiempo de exposición se midieron semanalmente.

y	0.1	0.3	0.5	0.8	1.2	1.8	2.5	3.4
x	1	2	3	4	5	6	7	8

Los datos se ajustaron usando el modelo cuadrático, $E(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, con los siguientes resultados.

Análisis de regresión: y contra x, x-sq

```
The regression equation is
y = 0.196 - 0.100 x + 0.0619 x-sq

Predictor        Coef    SE Coef       T      P
Constant      0.19643    0.07395    2.66  0.045
x            -0.10000    0.03770   -2.65  0.045
x-sq2        0.061905   0.004089   15.14  0.000

S = 0.0530049    R-Sq = 99.9%    R-Sq(adj) = 99.8%

Analysis of Variance
Source          DF       SS      MS        F      P
Regression       2   9.4210  4.7105  1676.61  0.000
Residual Error   5   0.0140  0.0028
Total            7   9.4350

Source   DF   Seq SS
x         1   8.7771
x-sq      1   0.6438
```

a. ¿Qué porcentaje de la variación total es explicada por la regresión cuadrática de y en x?

b. ¿La regresión en x y x^2 es significativa al nivel de significancia de $\alpha = .05$?

c. ¿El coeficiente de regresión lineal es significativo cuando x^2 está en el modelo?

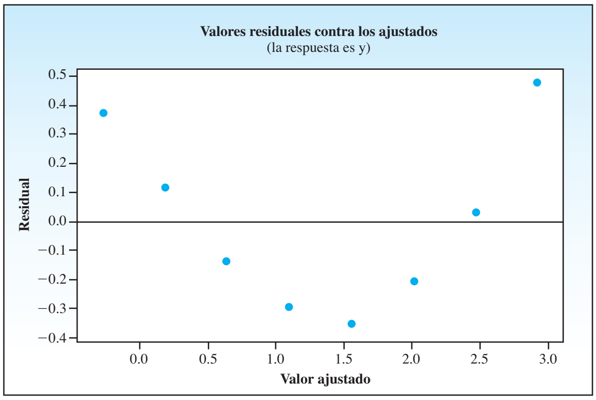
d. ¿El coeficiente de regresión cuadrática es significativo cuando x está en el modelo?

e. Los datos se ajustaron a un modelo lineal sin el término cuadrático con los resultados que siguen. ¿Qué se puede decir acerca de la contribución del término cuadrático cuando está incluido en el modelo?

Análisis de regresión: y contra x

```
The regression equation is
y = -0.732 + 0.457 x

Predictor       Coef   SE Coef      T      P
Constant     -0.7321    0.2580  -2.84  0.030
x            0.45714   0.05109   8.95  0.000

S = 0.331124    R-Sq = 93.0%    R-Sq(adj) = 91.9%

Analysis of Variance
Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       1  8.7771  8.7771  80.05  0.000
Residual Error   6  0.6579  0.1096
Total            7  9.4350
```

f. La gráfica de los residuales del modelo de regresión lineal en el inciso e) muestra un modelo específico. ¿Cuál es el término del modelo que parece estar faltando?



MIS DATOS EX1336 **13.36 Manejando su dinero** Una corporación particular de ahorros y préstamos está interesada en determinar qué tan bien se puede predecir la cantidad de dinero en ahorros familiares, usando las tres variables independientes de ingreso anual, número de personas en la familia y área en la que viva la familia. Suponga que hay dos áreas específicas de interés para la corporación. Se recolectaron los datos siguientes, donde

y = Cantidad en todas las cuentas de ahorros

x_1 = Ingreso anual

x_2 = Número de personas en la familia

x_3 = 0 si en Área 1; 1 si no

Tanto y como x_1 se registraron en unidades de $1000.

y	x_1	x_2	x_3
0.5	19.2	3	0
0.3	23.8	6	0
1.3	28.6	5	0
0.2	15.4	4	0
5.4	30.5	3	1
1.3	20.3	2	1
12.8	34.7	2	1
1.5	25.2	4	1
0.5	18.6	3	1

La siguiente salida impresa de computadora resultó cuando los datos fueron analizados usando *MINITAB*.

Análisis de regresión: y contra x1, x2, x3

```
The regression equation is
y = -3.11 + 0.503 x1 - 1.61 x2 - 1.15 x3

Predictor        Coef    SE Coef       T       P
Constant       -3.112      3.600   -0.86   0.421
x1            0.50314    0.07670    6.56   0.001
x2            -1.6126     0.6579   -2.45   0.050
x3             -1.155      1.791   -0.64   0.543

S = 1.89646    R-Sq = 92.2%    R-Sq(adj) = 88.4%

Analysis of Variance
Source           DF        SS       MS       F      P
Regression        3   256.621   85.540   23.78  0.001
Residual Error    6    21.579    3.597
Total             9   278.200

Source    DF    Seq SS
x1         1   229.113
x2         1    26.012
x3         1     1.496
```

a. Interprete R^2 y comente sobre el ajuste del modelo.

b. Pruebe para una regresión significativa de y en x_1, x_2 y x_3 al nivel de significancia de 5%.

c. Pruebe la hipótesis $H_0 : \beta_3 = 0$ contra $H_a : \beta_3 \neq 0$ usando $\alpha = .05$. Comente sobre los resultados de su prueba.

d. ¿Qué se puede decir de la utilidad de x_3 como variable de predicción en este problema?

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Autos extranjeros

"Hecho en EE.UU."; otra mirada

El caso práctico del capítulo 12 examinó el efecto de la competencia extranjera en la industria automotriz cuando el número de autos importados aumentó continuamente durante las décadas de 1970 y 1980.[10] La industria automotriz estadounidense ha sido asediada con quejas por la calidad del producto, despidos de trabajadores y altos precios, además que ha gastado miles de millones de dólares en publicidad e investigación para producir un auto hecho en Estados Unidos que satisfaga las demandas del consumidor. ¿Han tenido éxito para detener la inundación de autos importados comprados por consumidores estadounidenses? Los datos mostrados en la tabla siguiente dan el número de autos importados (y) vendidos en Estados Unidos (en millones) durante los años 1969-2005. Para simplificar el análisis, hemos codificado el año usando la variable codificada x = Año − 1969.

Año	Año − 1969, x	Número de autos importados, y	Año	Año − 1969, x	Número de autos importados, y
1969	0	1.1	1987	18	3.1
1970	1	1.3	1988	19	3.1
1971	2	1.6	1989	20	2.8
1972	3	1.6	1990	21	2.5
1973	4	1.8	1991	22	2.1
1974	5	1.4	1992	23	2.0
1975	6	1.6	1993	24	1.8
1976	7	1.5	1994	25	1.8
1977	8	2.1	1995	26	1.6
1978	9	2.0	1996	27	1.4
1979	10	2.3	1997	28	1.4
1980	11	2.4	1998	29	1.4
1981	12	2.3	1999	30	1.8
1982	13	2.2	2000	31	2.1
1983	14	2.4	2001	32	2.2
1984	15	2.4	2002	33	2.3
1985	16	2.8	2003	34	2.2
1986	17	3.2	2004	35	2.2
			2005	36	2.3

Al examinar una gráfica de dispersión de estos datos, se encuentra que el número de autos importados no parece seguir una relación lineal con el tiempo sino que exhibe una respuesta curvilínea. La cuestión, entonces, es decidir si un modelo de segundo orden, tercero o de orden superior describe en forma adecuada los datos.

1. Grafique los datos y trace lo que considere sean los modelos de mejor ajuste lineal, cuadrático y cúbico.
2. Encuentre los residuales usando el modelo de regresión lineal ajustado. ¿Parece haber algún modelo en los residuales cuando se grafica contra x? ¿Qué modelo indican los residuales que produciría un ajuste mejor?
3. ¿Cuál es el aumento en R^2 cuando usted ajusta un modelo cuadrático más que uno lineal? ¿El coeficiente del término cuadrático es significativo? ¿El modelo cuadrático ajustado es significativamente mejor que el modelo lineal ajustado? Grafique los residuales a partir del modelo cuadrático ajustado. ¿Le parece que hay algún modelo aparente en los residuales cuando se grafique contra x?
4. ¿Cuál es el aumento en R^2 cuando compara el modelo cúbico ajustado con el cuadrático ajustado? ¿El modelo cúbico ajustado es significativamente mejor que el cuadrático ajustado? ¿Hay algunos modelos en una gráfica de los residuales contra x? ¿Qué proporción de la variación en la respuesta y no es considerada al ajustar un modelo cúbico? ¿Debe considerarse algún modelo polinomial de orden superior? ¿Por qué sí o por qué no?

14

Análisis de datos categóricos

© Leemb/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

Numerosos tipos de estudios y experimentos resultan en variables de respuesta cualitativas y no cuantitativas, de modo que las respuestas pueden ser clasificadas pero no cuantificadas. Los datos de estos experimentos están formados por la cuenta o número de observaciones que caen en cada una de las categorías de respuesta incluidas en el experimento. En este capítulo, nos ocupamos de métodos para analizar datos categóricos.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo determino el número apropiado de grados de libertad?

¿Un método de marketing puede mejorar los servicios de una biblioteca?

¿Cómo se califica una biblioteca? ¿Su atmósfera es agradable, aburrida o demasiado silenciosa? ¿El personal de la biblioteca es útil? ¿Las indicaciones son claras y nada ambiguas? El método moderno dirigido a consumidores para comerciar, en general, contiene el estudio sistemático hecho por organizaciones respecto de los deseos y necesidades para mejorar sus servicios o productos. En el caso práctico del final de este capítulo, examinamos los resultados de un estudio para explorar las actitudes de adultos jóvenes hacia los servicios proporcionados por bibliotecas.

14.1 UNA DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

Numerosos experimentos resultan en mediciones que son *cualitativas* o *categóricas* en lugar de *cuantitativas*; esto es, una *cualidad* o *característica* (más que un valor numérico) se mide para cada unidad experimental. Se puede resumir este tipo de datos al crear una lista de las categorías o características e informar de una **cantidad** del número de mediciones que caen en cada categoría. A continuación veamos algunos ejemplos:

- Las personas se pueden clasificar en cinco categorías de ingreso.
- Un ratón puede responder en una de tres formas a un estímulo.
- Un dulce M&M'S puede tener uno de seis colores.
- Un proceso industrial manufactura artículos que pueden ser clasificados como "aceptables", "de segunda categoría" o "defectuosos".

Éstas son algunas de las muchas situaciones en las que el conjunto de datos tiene características apropiadas para el **experimento multinomial**.

EL EXPERIMENTO MULTINOMIAL

- El experimento consta de n intentos idénticos.
- El resultado de cada intento cae en una de k categorías.
- La probabilidad de que el resultado de un solo intento caiga en una categoría particular, por ejemplo i, es p_i y permanece constante de un intento a otro. Esta probabilidad debe ser entre 0 y 1, para cada una de las k categorías y la suma de todas las k probabilidades es $\Sigma p_i = 1$.
- Los intentos son independientes.
- El experimentador cuenta el número *observado* de resultados en cada categoría, escrito como $O_1, O_2, \ldots, O_k$, con $O_1 + O_2 + \cdots + O_k = n$.

Se puede visualizar el experimento multinomial si se considera un número k de cajas o **celdas** en las que n pelotas se lanzan. Los n tiros son independientes y en cada tiro la probabilidad de hacer blanco en la i caja es la misma. Pero, esta probabilidad puede variar de una caja a otra; podría ser más fácil hacer blanco en la caja 1 que en la caja 3 en cada tiro. Una vez que todas las n pelotas se hayan tirado, se cuenta el número de cada caja o **celda**, $O_1, O_2, \ldots, O_k$.

MI CONSEJO

El experimento multinomial es una extensión del *experimento binomial.* Para un experimento binomio, $k = 2$.

Es probable que haya notado la similitud entre el *experimento multinomial* y el *experimento binomial* introducido en el capítulo 5. De hecho, cuando hay $k = 2$ categorías, los dos experimentos son idénticos, excepto por la notación. En lugar de p y q, escribimos p_1 y p_2 para representar las probabilidades para las dos categorías, "éxito" y "fracaso". En lugar de x y $(n - x)$, escribimos O_1 y O_2 para representar el número observado de "éxitos" y "fracasos".

Cuando presentamos la variable aleatoria binomio, hicimos inferencias acerca del parámetro binomial p (y por default, $q = 1 - p$) usando métodos de muestra grande basados en la estadística z. En este capítulo, extendemos esta idea para hacer inferencias acerca de los *parámetros multinomiales,* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, usando un tipo diferente de estadística. Esta estadística, cuya distribución de muestreo aproximada fue derivada por un estadístico inglés llamado Karl Pearson en 1900, se llama **estadística ji cuadrada** (o a veces **ji cuadrada de Pearson**).

14.2 ESTADÍSTICA JI CUADRADA DE PEARSON

Suponga que $n = 100$ pelotas se lanzan a las celdas (cajas) y que sabemos que la probabilidad que una pelota caiga en la primera caja es $p_1 = .1$. ¿Cuántas pelotas *esperaríamos* que caigan en la primera caja? De manera intuitiva, se esperaría ver $100(.1) = 10$ pelotas en la primera caja. Esto debe recordarnos del promedio o número esperado de éxitos, $\mu = np$, en el experimento binomial. En general, el número esperado de pelotas que caigan en la celda i, escrito como E_i, se puede calcular usando la fórmula

$$E_i = np_i$$

para cualquiera de las celdas $i = 1, 2, \dots, k$.

Ahora suponga que *hacemos una hipótesis* de valores para cada una de las probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k$ y calculamos el número esperado para cada categoría o celda. Si nuestra hipótesis es correcta, las *cantidades observadas de celda* reales, O_i, no deben ser demasiado diferentes de las *cantidades esperadas de celda, $E_i = np_i$*. Cuanto más grandes sean las diferencias, más probable será que la hipótesis sea incorrecta. La *estadística ji cuadrada de Pearson* utiliza las diferencias $(O_i - E_i)$ al elevar al cuadrado primeramente estas diferencias para eliminar contribuciones negativas y luego forma un promedio *ponderado* de las diferencias cuadradas.

ESTADÍSTICA DE PRUEBA JI CUADRADA DE PEARSON

$$X^2 = \Sigma\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

sumadas en todas las k celdas, con $E_i = np_i$.

Aun cuando la prueba matemática está fuera del propósito de este libro, se puede demostrar que cuando n es grande, X^2 tiene una **distribución ji cuadrada de probabilidad** aproximada en muestreo repetido. Si las cuentas de celda esperadas hipotéticas son correctas, las diferencias $(O_i - E_i)$ son pequeñas y X^2 es cercana a 0. Pero, si las probabilidades hipotéticas son incorrectas, grandes diferencias $(O_i - E_i)$ resultan en un valor *grande* de X^2. Debe usarse una **prueba estadística de cola derecha** y buscar un valor inusualmente grande del estadístico de prueba.

MI CONSEJO

Las pruebas ji cuadrada de Pearson siempre son pruebas de cola superior.

La distribución ji cuadrada se utilizó en el capítulo 10 para hacer inferencias acerca de una varianza poblacional σ^2. Al igual que la distribución F, su forma no es simétrica y depende de un número específico de **grados de libertad**. Una vez especificados estos grados de libertad, se puede usar la tabla 5 del apéndice I para hallar valores críticos o para limitar el valor p para una estadística ji cuadrada particular. Como alternativa, se puede usar el applet **Chi-Square Probabilities** (Probabilidades ji cuadrada) para hallar valores críticos o valores p exactos para la prueba.

Los grados de libertad apropiados para la estadística ji cuadrada varían dependiendo de la aplicación particular que se utilice. Aun cuando especificaremos los grados de libertad apropiados para las aplicaciones presentadas en este capítulo, se debe usar la regla general dada a continuación para determinar grados de libertad para la estadística ji cuadrada.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo determino el número apropiado de grados de libertad?

1. Empiece con el número de *categorías* o celdas en el experimento.
2. Reste un grado de libertad por cada restricción lineal en las probabilidades de celda. Siempre se pierde un *df* (grado de libertad) porque $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

3. A veces las cantidades de celda esperadas no se pueden calcular directamente sino que deben estimarse usando los datos muestrales. Reste un grado de libertad por cada parámetro poblacional independiente que deba ser estimado, para obtener los valores estimados de E_i.

Empezamos con las aplicaciones más sencillas de la estadística de prueba ji cuadrada, la prueba de **bondad de ajuste**.

14.3 PRUEBA DE PROBABILIDADES DE CELDA ESPECIFICADA: LA PRUEBA DE BONDAD DEL AJUSTE

La hipótesis más sencilla respecto a las probabilidades de celda especifica un valor numérico para cada celda. Las cantidades de celda esperadas se calculan fácilmente usando las probabilidades hipotéticas, $E_i = np_i$ y se usan para calcular el valor observado de la estadística de prueba X^2. Para un experimento multinomial formado por k categorías o celdas, la estadística de prueba tiene una distribución χ^2 aproximada con $df = (k - 1)$.

EJEMPLO 14.1

Un investigador diseña un experimento en el que una rata es atraída al final de una rampa que se divide, llevando a puertas de tres colores diferentes. El investigador hace que la rata baje por la rampa $n = 90$ veces y observa las elecciones citadas en la tabla 14.1. ¿La rata tiene (o ha adquirido) preferencia por una de las tres puertas?

TABLA 14.1 **Elecciones de puerta de la rata**

	Puerta		
	Verde	Roja	Azul
Cantidad observada (O_i)	20	39	31

Solución Si la rata no tiene preferencia en la elección de una puerta, a la larga debe esperarse que la rata escogiera cada puerta en igual número de veces. Esto es, la hipótesis nula es

$$H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a : \text{Al menos una } p_i \text{ es diferente de } \frac{1}{3}$$

donde p_i es la probabilidad de que la rata escoja la puerta i, para $i = 1, 2$ y 3. Las cantidades de celda esperadas son las mismas para cada una de las tres categorías, es decir, $np_i = 90(1/3) = 30$. La estadística de prueba ji cuadrada puede ahora calcularse como

$$X^2 = \Sigma \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= \frac{(20 - 30)^2}{30} + \frac{(39 - 30)^2}{30} + \frac{(31 - 30)^2}{30} = 6.067$$

MI CONSEJO

La región de rechazo y valor p están en la cola superior de la distribución ji cuadrada.

Para este ejemplo, el estadístico de prueba tiene $(k - 1) = 2$ grados de libertad porque la única restricción lineal en las probabilidades de celda es que deben sumar 1. En consecuencia, se puede usar la tabla 5 del apéndice I para hallar límites para el valor p de cola derecha. Como el valor observado, $X^2 = 6.607$, se encuentra entre $\chi^2_{.050} = 5.99$ y $\chi^2_{.025} = 7.38$, el valor p está entre .025 y .050. El investigador debe informar los resultados como significativos al nivel de 5% ($P < .05$), lo cual significa que la hipótesis nula de no preferencia es rechazada. Hay suficiente evidencia para indicar que la rata tiene una preferencia por una de las tres puertas.

¿Qué más se puede decir acerca del experimento, una vez que se haya determinado estadísticamente que la rata tiene una preferencia? Veamos los datos para observar dónde están las diferencias. El applet **The Goodness-of-Fit Test** (Prueba de bondad del ajuste), que se muestra en la figura 14.1, ayudará.

FIGURA 14.1
Applet Goodness-of-Fit

Se puede ver el valor de X^2 y su valor p exacto (.0482) en la parte baja del applet. Un poco más arriba, la barra sombreada muestra la distribución de las frecuencias observadas. Las barras azules representan categorías que tienen un exceso de observaciones con respecto a lo esperado y las celdas rojas (grises en la figura 14.1) indican un déficit de observaciones con respecto a lo esperado. La intensidad del color refleja la magnitud de la discrepancia. Para este ejemplo, la rata escogió las puertas roja y azul con más frecuencia de lo esperado y la puerta verde con menos frecuencia. La puerta azul se escogió sólo un poco más de un tercio del tiempo:

$$\frac{31}{90} = .344$$

No obstante, las proporciones muestrales para las otras dos puertas son muy diferentes a un tercio. La rata escoge la puerta verde con menos frecuencia, sólo 22% del tiempo:

$$\frac{20}{90} = .222$$

La rata escoge la puerta roja con más frecuencia, 43% del tiempo:

$$\frac{39}{90} = .433$$

Se pueden resumir los resultados del experimento si se dice que la rata tiene preferencia por la puerta roja. ¿Se puede concluir que la preferencia es *causada* por el color de la puerta? La respuesta es negativa; la causa podría ser algún otro factor fisiológico o psicológico que todavía no se haya explorado. ¡Evite declarar una relación *causal* entre color y preferencia!

EJEMPLO 14.2

Las proporciones de tipos de sangre A, B, AB y O en la población de todos los caucasianos en Estados Unidos son .41, .10, .04 y .45, respectivamente. Para determinar si las proporciones poblacionales reales se ajustan o no se ajustan a este conjunto de probabilidades reportadas, se seleccionó una muestra de 200 estadounidenses y se registraron sus fenotipos sanguíneos. Las cantidades de celda observadas y esperadas se muestran en la tabla 14.2. Las cantidades de celda esperadas se calculan como $E_i = 200p_i$. Prueba la bondad de ajuste de estas proporciones de fenotipo sanguíneas.

TABLA 14.2 **Cantidades de fenotipos sanguíneos**

	A	B	AB	O
Observadas (O_i)	89	18	12	81
Esperadas (E_i)	82	20	8	90

Solución La hipótesis a probar está determinada por las probabilidades del modelo:

$$H_0 : p_1 = .41; p_2 = .10; p_3 = .04; p_4 = .45$$

contra

$$H_a : \text{Al menos una de las cuatro probabilidades es diferente del valor esperado}$$

MI CONSEJO

Grados de libertad para un ajuste simple de una prueba de bondad: $df = k - 1$.

Entonces

$$X^2 = \Sigma\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= \frac{(89 - 82)^2}{82} + \cdots + \frac{(81 - 90)^2}{90} = 3.70$$

De la tabla 5 del apéndice I, indizando $df = (k - 1) = 3$, se puede hallar que el valor observado del estadístico de prueba es menor a $\chi^2_{.100} = 6.25$, de modo que el valor p es mayor a .10. No es necesario tener evidencia para rechazar H_0; esto es, no se puede declarar que los fenotipos sanguíneos de caucasianos estadounidenses sean *diferentes* de los reportados ya antes. Los resultados son no significativos.

Se pueden hallar instrucciones en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo para efectuar la prueba de bondad del ajuste ji cuadrada y generar los resultados. Este procedimiento es nuevo en el *MINITAB 15*. Si se usa una versión previa del *MINITAB*, todavía se pueden generar resultados usando la función de calculadora.

Observe la diferencia en la hipótesis de bondad de ajuste comparada con otras hipótesis que se hayan probado. En la prueba de bondad de ajuste, el investigador usa la hipótesis nula para especificar el modelo que crea ser *verdadero*, más que un modelo que espera demostrar que sea falso. Cuando no pueda rechazar H_0 en el ejemplo del tipo de sangre, los resultados fueron como se esperaba. Es necesario tener cuidado, no obstante, cuando se reporten resultados para pruebas de bondad de ajuste. No se puede declarar con confianza que el modelo sea absolutamente correcto sin reportar el valor de β para algunas alternativas prácticas.

14.3 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

14.1 Haga una lista de las características de un experimento multinomial.

14.2 Use la tabla 5 del apéndice I para hallar el valor de χ^2 con la siguiente área α a su derecha:

a. $\alpha = .05$, $df = 3$ **b.** $\alpha = .01$, $df = 8$

14.3 Dé la región de rechazo para una prueba ji cuadrada de probabilidades si el experimento contiene k categorías en estos casos:

a. $k = 7, \alpha = .05$ **b.** $k = 10, \alpha = .01$

14.4 Use la tabla 5 del apéndice I para limitar el valor p para una prueba ji cuadrada:

a. $X^2 = 4.29, df = 5$ **b.** $X^2 = 20.62, df = 6$

14.5 Suponga que una respuesta puede caer en una de $k = 5$ categorías con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_5$ y que $n = 300$ respuestas produjeron estas cantidades de categoría:

Categoría	1	2	3	4	5
Cantidad observada	47	63	74	51	65

a. ¿Es igualmente probable que ocurran las cinco categorías? ¿Cómo se probaría esta hipótesis?

b. Si se fuera a probar esta hipótesis usando la estadística ji cuadrada, ¿cuántos grados de libertad tendría la prueba?

c. Encuentre el valor crítico de χ^2 que defina la región de rechazo con $\alpha = .05$.

d. Calcule el valor observado del estadístico de prueba.

e. Efectúe la prueba y exprese sus conclusiones.

14.6 Suponga que una respuesta puede caer en una de $k = 3$ categorías con probabilidades $p_1 = .4$, $p_2 = .3$ y $p_3 = .3$ y $n = 300$ respuestas produjo estas cantidades de categoría:

Categoría	1	2	3
Cantidad observada	130	98	72

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que las probabilidades de celda son diferentes respecto de las especificadas para las tres categorías? Encuentre el valor p aproximado y úselo para tomar su decisión.

APLICACIONES

14.7 Su carril preferido Una autopista de cuatro carriles en cada dirección fue estudiada para ver si los automovilistas prefieren ir en los carriles interiores. Se observaron un total de mil automóviles, durante un intenso tránsito matutino y se registró el número de autos en cada carril:

Carril	1	2	3	4
Cantidad observada	294	276	238	192

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que algunos carriles son preferidos sobre otros? Pruebe usando $\alpha = .05$. Si hay algunas diferencias, analice la naturaleza de los diferencias.

14.8 Peonias Una peonia con pétalos rojos fue cruzada con otra planta con pétalos de franjas. Un genetista dice que 75% de los descendientes de esta cruza tendrán flores rojas. Para probar esta afirmación, cien semillas de esta cruza se recolectaron y germinaron, y 58 plantas tenían pétalos rojos. Use la prueba de bondad del ajuste ji cuadrada para determinar si los datos muestrales confirman la predicción del genetista.

14.9 Ataques al corazón los lunes ¿Odia usted los lunes? Investigadores de Alemania han dado otra razón: concluyeron que el riesgo de un ataque al corazón para un trabajador puede ser hasta 50% mayor los lunes que en cualquier otro día.[1] Los investigadores dieron seguimiento a ataques al corazón y paros coronarios en un periodo de 5 años entre 330 mil personas que vivían cerca de Augsburg, Alemania. En un intento por verificar este dicho, se hizo un estudio de 200 trabajadores que habían tenido recientemente ataques al corazón y se registró el día en que ocurrieron estos ataques al corazón:

Día	Cantidad observada
Domingo	24
Lunes	36
Martes	27
Miércoles	26
Jueves	32
Viernes	26
Sábado	29

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que hay diferencia en la incidencia de ataques al corazón, dependiendo del día de la semana? Pruebe usando $\alpha = .05$.

14.10 Estadísticas de mortalidad Unas estadísticas médicas muestran que los fallecimientos debidos a cuatro enfermedades principales, llamadas A, B, C y D, constituyen 15%, 21%, 18% y 14%, respectivamente, de todos los fallecimientos no accidentales. Un estudio de las causas de 308 fallecimientos no accidentales en un hospital dieron las siguientes cantidades:

Enfermedad	A	B	C	D	Otro
Fallecimientos	43	76	85	21	83

¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar que las proporciones de personas, que fallecen de enfermedades A, B, C y D en este hospital, a la larga difieren de las proporciones acumuladas para la población?

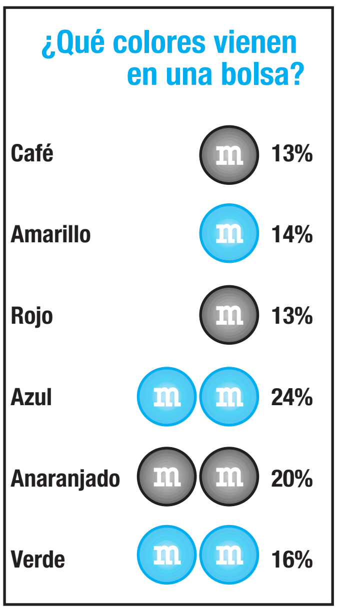
14.11 Esquizofrenia Investigaciones realizadas han sugerido que hay un vínculo entre la prevalencia de esquizofrenia y el nacimiento durante meses particulares del año en que prevalecen infecciones virales. Supongamos que estamos trabajando en un problema similar y sospechamos que hay un vínculo entre una enfermedad observada en la etapa final de la vida y el mes de nacimiento. Tenemos registros de 400 casos de la enfermedad, y las clasificamos de acuerdo al mes de nacimiento. Los datos aparecen en la tabla. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la proporción de casos de la enfermedad por mes varía de un mes a otro? Pruebe con $\alpha = .05$.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Nacimientos	38	31	42	46	28	31

Mes	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
Nacimientos	24	29	33	36	27	35

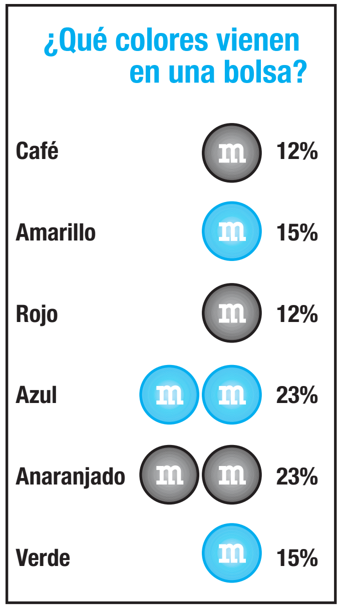
14.12 Chícharos Supongamos que usted está interesado en seguir dos características de chícharos: textura de la semilla (S = lisa, s = arrugada) y color de la semilla (Y = amarillo, y = verde) en una cruza de segunda generación de padres heterocigotos. La teoría de Mendel dice que el número de chícharos clasificados como lisos y amarillos, arrugados y amarillos, lisos y verdes, y arrugados y verdes debe estar en la relación 9:3:3:1. Suponga que cien chícharos seleccionados al azar tienen 56, 19, 17 y 8 en estas categorías respectivas. ¿Estos datos indican que el modelo 9:3:3:1 es correcto? Pruebe usando $\alpha = .01$.

14.12 M&M'S El sitio web Mars, Incorporated publica los siguientes porcentajes de los diversos colores en sus dulces M&M'S para la variedad "chocolate con leche":[2]



Una bolsa de 14 onzas (400 gramos) de dulces M&M'S de chocolate con leche se selecciona al azar y contiene 70 dulces cafés, 72 amarillos, 61 rojos, 118 azules, 108 anaranjados y 85 verdes. ¿Los datos justifican los porcentajes informados por Mars, Incorporated? Use la prueba apropiada y describa la naturaleza de las diferencias, si hay alguna.

14.14 M&M'S de cacahuate Los porcentajes de diversos colores son diferentes para la variedad de "cacahuate" de dulces M&M'S, como se publica en el sitio web Mars, Incorporated:[3]



Una bolsa de 14 onzas (400 gramos) de dulces M&M'S de chocolate con leche se selecciona al azar y contiene 70 dulces cafés, 87 amarillos, 64 rojos, 115 azules, 106 anaranjados y 85 verdes. ¿Los datos justifican los porcentajes informados por Mars, Incorporated? Use la prueba apropiada y describa la naturaleza de las diferencias, si hay alguna.

14.15 Estándares de inscripción Los registros previos de inscripción en una gran universidad indican que del número total de personas que solicitaron inscripción, 60% son inscritos incondicionalmente, 5% son inscritos a condición de pasar una prueba y el resto son rechazados. De 500 solicitudes a la fecha para el año entrante, 329 solicitantes han sido inscritos incondicionalmente, 43 han sido inscritos a condición de pasar una prueba y el resto han sido rechazados. ¿Estos datos indican una desviación respecto a los porcentajes de inscripción? Pruebe usando $\alpha = .05$.

14.4 TABLAS DE CONTINGENCIA: UNA CLASIFICACIÓN DE DOS VÍAS

En algunas situaciones, el investigador clasifica una unidad experimental de acuerdo con *dos variables cualitativas* para generar *datos bivariados*, que discutimos en el capítulo 3.

- Una pieza defectuosa de mueble se clasifica según el tipo de defecto y el turno de producción durante el que se hizo.
- Una profesora es clasificada por su rango profesional y el tipo de universidad (pública o privada) en la que trabaje.
- Un paciente es clasificado de acuerdo al tipo de tratamiento preventivo contra la gripe que ha recibido y si ha contraído o no la gripe durante el invierno.

Cuando se registran dos *variables categóricas*, se puede resumir la información al contar el número observado de unidades que caen en cada una de las diversas intersecciones de niveles de categoría. Las cantidades resultantes se exhiben en un conjunto ordenado llamado **tabla de contingencia**.

EJEMPLO 14.3

Un total de $n = 309$ defectos en muebles fueron registrados y los defectos fueron clasificados en cuatro tipos: A, B, C o D. Al mismo tiempo, cada pieza de mueble fue identificado por el turno de producción en el que se manufacturó. Estas cantidades están presentadas en una tabla de contingencia en la tabla 14.3.

TABLA 14.3 **Tabla de contingencia**

	Turno			
Tipo de defectos	1	2	3	Total
A	15	26	33	74
B	21	31	17	69
C	45	34	49	128
D	13	5	20	38
Total	94	96	119	309

Cuando se estudia información que contiene dos variables, una consideración importante es la *relación entre las dos variables*. ¿La proporción de mediciones en las diversas categorías para el factor 1 depende de cuál categoría del factor 2 se observe? Para el ejemplo de muebles, ¿las proporciones de los diversos defectos varía de turno a turno, o son iguales estas proporciones, independientemente de cuál turno se observe? Recordemos un fenómeno similar llamado *interacción* en el experimento factorial $a \times b$ del capítulo 11. En el análisis de una tabla de contingencia, el objetivo es determinar si un método de clasificación es o no es **contingente** o **dependiente** del otro método de clasificación. Si no lo es, se dice que los dos métodos de clasificación son **independientes**.

MI CONSEJO

Con clasificaciones de dos vías, no probamos hipótesis acerca de probabilidades específicas. Probamos si los dos métodos de clasificación son independientes.

La prueba de independencia ji cuadrada

La cuestión de independencia de los dos métodos de clasificación se puede investigar usando una prueba de hipótesis basada en la estadística ji cuadrada. Éstas son las hipótesis:

$$H_0 : \text{Los dos métodos de clasificación son independientes}$$
$$H_a : \text{Los dos métodos de clasificación son dependientes}$$

Suponga que denotamos la cantidad observada de celdas en la fila i de la tabla de contingencia como O_{ij}. Si se conocieran las cantidades observadas de celda ($E_{ij} = np_{ij}$) bajo la hipótesis nula de independencia, entonces se podría usar la estadística ji cuadrada para comparar las cantidades observadas y esperadas. No obstante, los valores esperados no están especificados en H_0, como estaban en los ejemplos previos.

Para explicar cómo estimar estas cantidades esperadas de celda, debemos repasar el concepto de *eventos independientes* del capítulo 4. Considere p_{ij}, la probabilidad de que una observación caída en la fila i y la columna j de la tabla de contingencia. Si los renglones y columnas son independientes, entonces

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(\text{observación cae en el renglón } i \text{ y columna } j) \\ &= P(\text{observación cae en el renglón } i) \times P(\text{observación cae en la columna } j) \\ &= p_i p_j \end{aligned}$$

donde p_i y p_j son las **probabilidades incondicional** o **marginal** de caer en la fila i o columna j, respectivamente. Si se pudiera obtener estimaciones apropiadas de estas probabilidades marginales, se podrían usar en lugar de p_{ij} en la fórmula para la cantidad esperada de celda.

Por fortuna, existen estas estimaciones. De hecho, son exactamente lo que en forma intuitiva se escogería:

MI CONSEJO

Grados de libertad para una tabla de contingencia $r \times c$: $df = (r - 1)(c - 1)$.

- Para estimar la probabilidad de un renglón, use

$$\hat{p}_i = \frac{\text{Total de observaciones en renglón } i}{\text{Número total de observaciones}} = \frac{r_i}{n}$$

- Para estimar la probabilidad de una columna, use

$$\hat{p}_j = \frac{\text{Total de observaciones en la columna } j}{\text{Número total de observaciones}} = \frac{ci}{n}$$

La estimación de la cantidad esperada de celda para el renglón i y la columna j se sigue de la suposición de independencia.

CANTIDAD ESTIMADA ESPERADA DE CELDA

$$\hat{E}_{ij} = n\left(\frac{r_i}{n}\right)\left(\frac{c_j}{n}\right) = \frac{r_j c_j}{n}$$

donde r_i es el total para el renglón i y c_j es el total para la columna j.

El estadístico de prueba ji cuadrada para una tabla de contingencia con r renglones y c columnas se calcula como

$$X^2 = \Sigma \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}}$$

y puede mostrarse que tiene una distribución ji cuadrada aproximada con

$$df = (r - 1)(c - 1)$$

Si el valor observado de X^2 es demasiado grande, entonces la hipótesis nula de independencia es rechazada.

EJEMPLO 14.4

Consulte el ejemplo 14.3. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el tipo de defecto de muebles varía con el turno durante el cual la pieza se produjo?

Solución Las cantidades estimadas esperadas de celda se muestran en paréntesis en la tabla 14.4. Por ejemplo, la cantidad estimada esperada para un defecto tipo C producido durante el segundo turno es

$$\hat{E}_{32} = \frac{r_3 c_2}{n} = \frac{(128)(96)}{309} = 39.77$$

TABLA 14.4 **Cantidades observadas y estimadas esperadas de celda**

	Turno			
Tipo de defectos	1	2	3	Total
A	15 (22.51)	26 (22.99)	33 (28.50)	74
B	21 (20.99)	31 (21.44)	17 (26.57)	69
C	45 (38.94)	34 (39.77)	49 (49.29)	128
D	13 (11.56)	5 (11.81)	20 (14.63)	38
Total	94	96	119	309

Ahora se pueden usar los valores mostrados en la tabla 14.4 para calcular el estadístico de prueba como

$$\begin{aligned} X^2 &= \Sigma \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} \\ &= \frac{(15 - 22.51)^2}{22.51} + \frac{(26 - 22.99)^2}{22.99} + \cdots + \frac{(20 - 14.63)^2}{14.63} \\ &= 19.18 \end{aligned}$$

Cuando se indiza la distribución ji cuadrada de la tabla 5 del apéndice I con

$$df = (r - 1)(c - 1) = (4 - 1)(3 - 1) = 6$$

el estadístico de prueba observada es mayor a $\chi^2_{.005} = 18.5476$, lo cual indica que el valor p es menor a .005. Se puede rechazar H_0 y declarar que los resultados son altamente significativos ($P < .005$). Hay suficiente evidencia para indicar que las proporciones de tipos de defecto varían de un turno a otro.

La siguiente pregunta obvia que se debe formular comprende la naturaleza de la relación entre las dos clasificaciones. ¿Cuál turno produce más de qué tipo de defecto? Al igual que con el experimento factorial del capítulo 11, una vez hallada la dependencia (o interacción) se debe buscar dentro de la tabla en las proporciones relativa o *condicional* para cada nivel de clasificación. Por ejemplo, considere el turno 1, que produjo un total de 94 defectos. Estos defectos se pueden dividir en tipos usando las *proporciones condicionales* para esta muestra que aparecen en la primera columna de la tabla 14.5. Si se sigue el mismo procedimiento para los otros dos turnos, se pueden entonces comparar las distribuciones de tipos de defecto para los tres turnos, como se ve en la tabla 14.5.

Ahora comparemos los tres conjuntos de proporciones (cada uno totaliza 1). Se ve que los turnos 1 y 2 producen defectos en el mismo orden general, tipos C, B, A y D de mayor a menor, aunque en proporciones que difieren. El turno 3 presenta un modelo diferente, casi todos los defectos de tipo C pero seguidos por los tipos A, D y B, en ese orden. Dependiendo de cuál tipo de defecto sea el más importante para el fabricante, cada turno debe ser advertido separadamente acerca de las razones para producir demasiados defectos.

TABLA 14.5 **Probabilidades condicionales para tipos de defecto dentro de tres turnos**

	Turno		
Tipos de defectos	1	2	3
A	$\frac{15}{94} = .16$	$\frac{26}{96} = .27$	$\frac{33}{119} = .28$
B	$\frac{21}{94} = .22$	$\frac{31}{96} = .32$	$\frac{17}{119} = .14$
C	$\frac{45}{94} = .48$	$\frac{34}{96} = .35$	$\frac{49}{119} = .41$
D	$\frac{13}{94} = .14$	$\frac{5}{96} = .05$	$\frac{20}{119} = .17$
Total	1.00	1.00	1.00

MI APPLET

El applet **Chi-Square Test of Independence** (Prueba de independencia ji cuadrada) puede ayudar a visualizar la distribución de las frecuencias observadas. En la figura 14.2a), las barras azules (azul en la figura 14.2a)) representan categorías que tienen un exceso de defectos con respecto a las celdas esperadas y las rojas (grises en la figura 14.2a)) indican un déficit de defectos con respecto a lo esperado. La intensidad del color refleja la magnitud de la discrepancia. En la figura 14.2b), usamos el botón Data/Null para ver la distribución esperada de piezas defectuosas si la hipótesis nula es verdadera. Las alturas relativas de los rectángulos en cada una de las tres columnas corresponden a la distribución condicional de piezas defectuosas por turno dadas en la tabla 14.5. Usaremos este applet para los Ejercicios Mi Applet al final del capítulo.

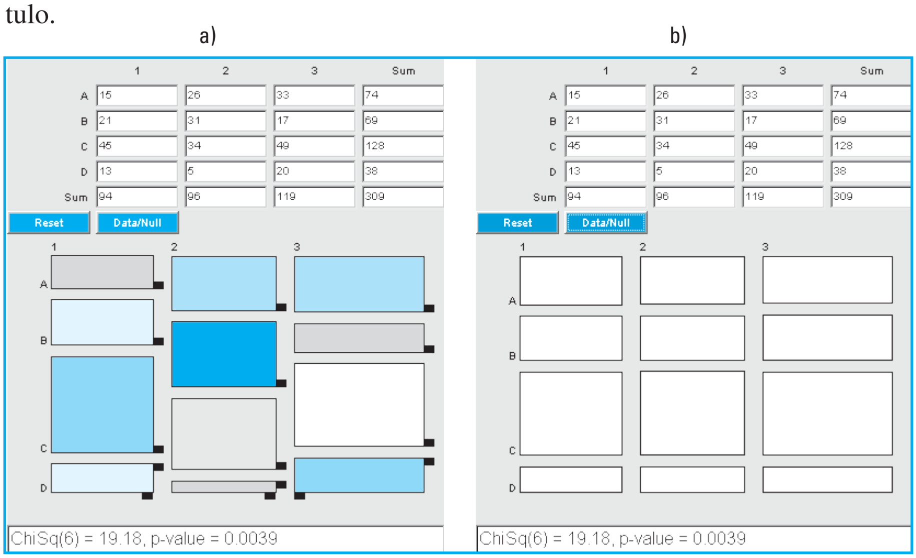


FIGURA 14.2
Applet **Chi-Square Test of Independence** (Prueba de independencia ji cuadrada)

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo determino el número apropiado de grados de libertad?

Recuerde el procedimiento general para determinar grados de libertad:

1. Empiece con $k = rc$ categorías o celdas en la tabla de contingencia.
2. Reste un grado de libertad porque todas las probabilidades de celda rc deben sumar 1.
3. Tuvo que estimar $(r - 1)$ probabilidades de renglón y $(c - 1)$ probabilidades de columna para calcular las cantidades estimadas esperadas de celda. (La última de las probabilidades de renglón y de columna está determinada porque las probabilidades *marginales* de renglón y columna también totalizan 1.) Reste $(r - c)$ y $(c - 1)$ grados de libertad (df).

El total de grados de libertad para la tabla $r \times c$ es

$$df = rc - 1 - (r - 1) - (c - 1) = rc - r - c + 1 = (r - 1)(c - 1)$$

EJEMPLO 14.5

Se realizó un estudio para evaluar la efectividad de una nueva vacuna contra la gripe que había sido administrada en una pequeña comunidad. La vacuna fue aplicada sin carga en una secuencia de dos vacunas en un periodo de 2 semanas. Algunas personas recibieron la secuencia de dos vacunas, algunas se presentaron sólo para una vacuna y las otras no recibieron ninguna. Un estudio de mil residentes locales a la primavera siguiente dio la información que se ve en la tabla 14.6. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la vacuna tuvo éxito para reducir el número de casos de gripe en la comunidad?

TABLA 14.6 **Tabla de contingencia de 2 × 3**

	Sin vacuna	Una vacuna	Dos vacunas	Total
Gripe	24	9	13	46
Sin gripe	289	100	565	954
Total	313	109	578	1000

Solución El éxito de la vacuna para reducir el número de casos de gripe se puede evaluar en dos partes:

- Si la vacuna tiene éxito, las proporciones de personas que contraen gripe debería variar, dependiendo de cuál de los tres tratamientos recibieron.
- Esta dependencia no sólo debe existir, sino que la proporción de personas que contraen gripe debería disminuir a medida que aumenta el tratamiento de prevención de la gripe, de cero a una o dos vacunas.

La primera parte se puede probar usando la prueba ji cuadrada con estas hipótesis:

H_0 : No hay relación entre tratamiento e incidencia de gripe

H_a : La incidencia de gripe depende de la cantidad de tratamiento contra la gripe

Como de costumbre, paquetes de software pueden eliminar todos los tediosos cálculos y, si los datos se introducen correctamente, dan la salida correcta que contiene el valor

MI CONSEJO

Use el valor de X^2 y el valor p de la salida impresa para probar la hipótesis de independencia.

observado del estadístico de prueba y su valor p. Esa salida impresa, generada por *MINITAB*, se ilustra en la figura 14.3. Se pueden hallar instrucciones para generar esta salida impresa en la sesión "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo. El valor observado del estadístico de prueba, $X^2 = 17.313$, tiene un valor p de .000 y los resultados son declarados altamente significativos. Esto es, la hipótesis nula es rechazada. Hay suficiente evidencia para indicar una relación entre tratamiento e incidencia de la gripe.

FIGURA 14.3
Salida *MINITAB* del ejemplo 14.5

Prueba ji cuadrada: sin vacuna, una vacuna, dos vacunas

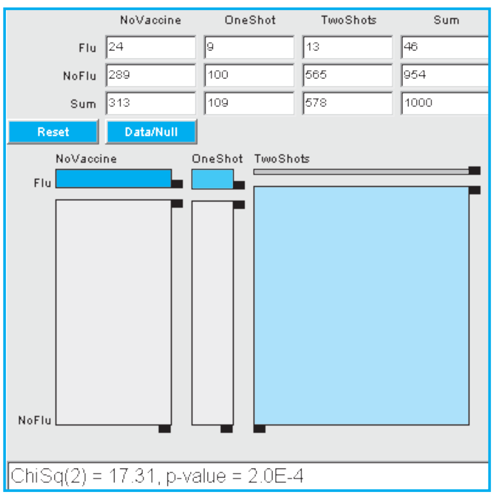
```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected counts

      No Vaccine  One Shot  Two Shots   Total
    1        24         9         13       46
          14.40      5.01      26.59
          6.404     3.169      6.944

    2       289       100        565      954
         298.60    103.99     551.41
          0.309     0.153      0.335

Total       313       109        578     1000

Chi-Sq =  17.313, DF = 2, P-Value = 0.000
```

¿Cuál es la naturaleza de esta relación? Para contestar esta pregunta, véase la tabla 14.7 y la figura 14.4, que da la *incidencia* de gripe en la muestra para cada uno de los tres grupos de tratamiento. La respuesta es obvia. El grupo que recibió dos vacunas fue menos susceptible a la gripe; sólo una vacuna no parece reducir la susceptibilidad.

TABLA 14.7 **Incidencia de gripe para tres tratamientos**

Sin vacuna	Una vacuna	Dos vacunas
$\frac{24}{313} = .08$	$\frac{9}{109} = .08$	$\frac{13}{578} = .02$

FIGURA 14.4
Applet **Chi-Square Test of Independence**



14.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

14.16 Calcule el valor y dé el número de grados de libertad de X^2 para estas tablas de contingencia:

a.

	Columnas			
Renglones	1	2	3	4
1	120	70	55	16
2	79	108	95	43
3	31	49	81	140

b.

	Columnas		
Renglones	1	2	3
1	35	16	84
2	120	92	206

14.17 Suponga que un estudio de consumidores compendia las respuestas de $n = 307$ personas en una tabla de contingencia de tres renglones y cinco columnas. ¿Cuántos grados de libertad están asociados con el estadístico de prueba ji cuadrada?

14.18 Un estudio de 400 entrevistados produjo estas cantidades de celda en una tabla de contingencia de 2×3:

	Columnas			
Renglones	1	2	3	Total
1	37	34	93	164
2	66	57	113	236
Total	103	91	206	400

a. Si se desea probar la hipótesis nula de "independencia", es decir, que la probabilidad de que una respuesta caiga en cualquier renglón, es independiente de la columna en la que caiga y se piensa usar una prueba ji cuadrada, ¿cuántos grados de libertad estarán asociados con el estadístico χ^2?

b. Encuentre el valor del estadístico de prueba.

c. Encuentre la región de rechazo para $\alpha = .01$.

d. Efectúe la prueba y exprese sus conclusiones.

e. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba e interprete su valor.

14.19 Diferencias de género Los hombres y mujeres entrevistados en un cuestionario de diferencias de género se clasificaron en tres grupos, según sus respuestas en la primer pregunta:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Hombres	37	49	72
Mujeres	7	50	31

Use la salida impresa *MINITAB* para determinar si hay una diferencia en las respuestas de acuerdo al género. Explique la naturaleza de las diferencias, si la hay.

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 14.19

Prueba ji cuadrada: grupo 1, grupo 2, grupo 3

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected
counts

        Group 1   Group 2   Group 3    Total
    1        37        49        72      158
          28.26     63.59     66.15
          2.703     3.346     0.517

    2         7        50        31       88
          15.74     35.41     36.85
          4.853     6.007     0.927

Total        44        99       103      246

Chi-Sq =  18.352, DF = 2, P-Value = 0.000
```

APLICACIONES

14.20 Asistencia médica obligatoria En 2006, una nueva ley aprobada en Massachusetts requeriría que todos los residentes tuvieran servicio médico. Los residentes de bajos ingresos obtendrían subsidios para ayudar a pagar sus primas, pero todos pagarían algo por servicios de salud. El plan sancionaría a personas sin ningún seguro y cobraría cuotas a empleadores que no dieran la cobertura. Una encuesta de ABC News/ *Washington Post*[4] que comprendía a $n = 1027$ adultos en todo el país hizo la pregunta, "¿Apoyaría usted o se opondría a este plan en su estado? Los datos siguientes están basados en los resultados de este estudio.

Afiliación	Apoya	Se opone	No está seguro
Demócratas	256	163	22
Independientes	60	40	5
Republicanos	235	222	24

a. ¿Hay diferencias significativas en las proporciones de los entrevistados que apoyan, se oponen y no están seguros acerca de este plan entre demócratas, independientes y republicanos? Use $\alpha = .05$.

b. Si existen diferencias significativas, describa la naturaleza de las diferencias al hallar las proporciones de quienes apoyan, se oponen y no están seguros por cada una de las afiliaciones dadas.

14.21 Infantes ansiosos Joseph Jacobson y Diane Wille realizaron un estudio para determinar el efecto atención temprana infantil en los patrones de unión entre madre e hijo.[5] En el estudio, 93 infantes fueron clasificados como "seguros" o "ansiosos" usando el paradigma de situación extraña de Ainsworth. Además, los infantes fueron clasificados de acuerdo al número promedio de horas por semana que pasaron recibiendo atención y cuidado. Los datos se presentan en la tabla.

	Baja (0-3 horas)	Moderada (4-19 horas)	Alta (20-54 horas)
Seguro	24	35	5
Ansioso	11	10	8

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia en el patrón de unión para los infantes, dependiendo del tiempo que pasen en atención y cuidado? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. ¿Cuál es el valor p aproximado para la prueba del inciso a)?

14.22 Patrones de gasto ¿Hay diferencia en los patrones de gasto de estudiantes de último año de preparatoria, dependiendo de su género? Un estudio para investigar esta pregunta se concentró en 196 estudiantes de último año de preparatoria ya empleados. A los estudiantes se les pidió clasificaran la cantidad de sus ganancias que gastaron en su auto durante un mes determinado:

	Nada o muy poco	Algo	La mitad	Casi todo	Todo o casi todo
Hombres	73	12	6	4	3
Mujeres	57	15	11	9	6

Una parte de la salida impresa *MINITAB* se da aquí. Use la salida impresa para analizar la relación entre patrones de gasto y género. Escriba un breve párrafo que explique sus conclusiones estadísticas y las implicaciones prácticas de éstas.

Salida impresa parcial *MINITAB* para el ejercicio 14.22

Prueba ji cuadrada: nada, algo, la mitad, casi todo, todo

```
Chi-Sq = 6.696, DF = 4, P-Value = 0.153
2 cells with expected counts less than 5.
```

14.23 En espera de una receta ¿Cuánto tiempo espera usted para recibir una receta? De acuerdo con *USA Today*, "entre tres y 10 estadounidenses esperan su receta más de 20 minutos".[6] Suponga que una comparación de tiempos de espera, en farmacias de Organizaciones de Servicio Médico (HMO) y farmacias de venta al público, produjo los siguientes resultados.

Tiempo de espera	HMO	Farmacias
$\leq$ 15 minutos	75	119
16-20 minutos	44	21
$>$ 20 minutos	21	37
No sabe	10	23

a. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia en tiempos de espera en las HMO y en farmacias de venta al público? Use $\alpha = .01$.

b. Si consideramos sólo si el tiempo de espera es más de 20 minutos, ¿hay diferencia significativa en tiempos de espera entre farmacias del HMO y las de venta al público, al nivel de significancia de 1%?

MIS DATOS EX1424 **14.24 El asesinato de JFK** Más de 40 años después del asesinato de John F. Kennedy, una encuesta de FOX News muestra que la mayoría de estadounidenses no están de acuerdo con las conclusiones del gobierno acerca del asesinato. La *Comisión Warren* encontró que Lee Harvey Oswald actuó solo cuando le disparó a Kennedy, pero la ciudadanía no está segura de esto. ¿Piensa usted que conocemos todos los datos acerca del asesinato del presidente Kennedy o piensa que hay encubrimiento? Veamos a continuación los resultados de una encuesta de 900 votantes registrados a nivel nacional:[7]

	Conocemos todos los datos	Hubo encubrimiento	No está seguro
Demócratas	42	309	31
Republicanos	64	246	46
Independientes	20	115	27

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para concluir que hay diferencia de opiniones de votantes acerca de un posible encubrimiento, dependiendo de la afiliación política del votante? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Si hay diferencia significativa en el inciso a), describa la naturaleza de estas diferencias.

MIS DATOS EX1425 **14.25 Trabajo a distancia** Como alternativa del tiempo flexible, numerosas compañías permiten que sus empleados hagan parte de su trabajo en casa. Las personas de una muestra aleatoria de 300 trabajadores se clasificaron de acuerdo al salario y número de días de trabajo por semana que pasan en casa.

	Días de trabajo en casa por semana		
Salario	Menos de uno	Al menos uno, pero no todos	Todos en casa
Menos de \$25 000	38	16	14
\$25 000 a \$49 999	54	26	12
\$50 000 a \$74 999	35	22	9
Más de \$75 000	33	29	12

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el salario depende del número de días de trabajo que pasan en casa? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Use la tabla 5 del apéndice I para aproximar el valor p para esta prueba de hipótesis. ¿El valor p confirma sus conclusiones del inciso a)?

MIS DATOS EX1426

14.26 Trabajo a distancia II Un artículo en *American Demographics* abordó el mismo problema de teletrabajo (ejercicio 14.25) en una forma un poco diferente. Concluyeron que "las personas que trabajan exclusivamente en casa tienden a ser de mayor edad y con más educación que quienes tienen que salir de casa a trabajar",[8] Use los datos siguientes basados en muestras aleatorias de 300 trabajadores, cada uno de los cuales apoyan o refutan sus conclusiones. Use la prueba de hipótesis apropiada y explique por qué está de acuerdo o en desacuerdo con las conclusiones del *American Demographics*. Observe que los trabajadores "mixtos" son aquellos que informan de trabajar en casa al menos todo un día en una semana típica.

	Trabajadores		
Edad	No en casa	Mixto	En casa
15-34	73	23	12
35-54	85	40	23
55 y más	22	12	10

	Trabajadores		
Educación	No en casa	Mixto	En casa
Menos de preparatoria	23	3	5
Graduado de preparatoria	54	12	11
Algún grado de colegio/universidad	53	24	14
Licenciatura o más	41	42	18

14.5 COMPARACIÓN DE VARIAS POBLACIONES MULTINOMIALES: UNA CLASIFICACIÓN DE DOS VÍAS CON TOTALES DE RENGLÓN O COLUMNA FIJOS

Una tabla de contingencia $r \times c$ resulta cuando cada una de las n unidades experimentales se cuenta como si cayera en una de las rc celdas de un experimento multinomial. Cada celda representa un par de niveles de categoría, nivel de renglón i y nivel de columna j. A veces, sin embargo, no es aconsejable usar este tipo de diseño experimental, es decir, hacer que n observaciones caigan donde puedan. Por ejemplo, supongamos que se desea estudiar las opiniones de familias estadounidenses acerca de sus niveles de ingreso, es decir, bajos, regulares y altos. Si al azar se seleccionan $n = 1200$ familias para ese estudio, puede que no se encuentre ninguna que se clasifique a sí misma como de bajos ingresos. Podría ser mejor decidir por anticipado hacer un estudio de 400 familias de cada nivel de ingreso. Los datos resultantes aparecerán todavía como clasificación de dos vías, pero los totales de columna son fijos por anticipado.

EJEMPLO 14.6

En otro experimento de prevención de gripe como el del ejemplo 14.5, el experimentador decide buscar en registros clínicos los 300 pacientes de cada una de las tres categorías de tratamiento: sin vacuna, una vacuna y dos vacunas. Los $n = 900$ pacientes se encuestarán entonces respecto a su historial de gripe en invierno. El experimento resulta en una tabla de 2×3 con los totales de columna fijos en 300, como se ve en la tabla 14.8. Al fijar los totales de columna, el experimentador ya no tiene un experimento multinomial con 2×3 celdas. En cambio, hay tres experimentos binomiales separados, llamémoslos 1, 2 y 3, cada uno con una probabilidad p_j determinada de contraer la gripe y q_j de no contraer la gripe. (Recuerde que para una población binomial, $p_j + q_j = 1$.)

TABLA 14.8 **Casos de gripe para tres tratamientos**

	Sin vacuna	Una vacuna	Dos vacunas	Total
Gripe				r_1
Sin gripe				r_2
Total	300	300	300	n

Supongamos que se utilizó la prueba ji cuadrada para la independencia de clasificaciones de renglón y columna. Si un tratamiento particular (nivel de columna) no afecta la incidencia de gripe, entonces cada una de las tres poblaciones binomiales debería tener la misma incidencia de gripe para que $p_1 = p_2 = p_3$ y $q_1 = q_2 = q_3$.

La clasificación de 2×3 del ejemplo 14.6 describe una situación en la que la prueba de ji cuadrada de independencia es equivalente a una prueba de la igualdad de $c = 3$ proporciones binomiales. Pruebas de este tipo se llaman **pruebas de homogeneidad** y se usan para comparar diversas poblaciones binomiales. Si hay *más de dos* categorías de renglón con totales fijos de columna, entonces la prueba de independencia es equivalente a una prueba de la igualdad de c conjuntos de proporciones multinomiales.

No es necesario preocuparse de la equivalencia teórica de las pruebas ji cuadrada para estos dos diseños experimentales. Si las columnas (o renglones) son fijos o no, la estadística de prueba se calcula como

$$X^2 = \Sigma \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} \qquad \text{donde } \hat{E}_{ij} = \frac{r_i c_j}{n}$$

que tiene una distribución ji cuadrada aproximada en muestreo repetido con $df = (r - 1)(c - 1)$.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo determino el número apropiado de grados de libertad?

Recuerde el procedimiento general para determinar grados de libertad:

1. Empiece con las rc celdas en la tabla de dos vías.
2. Reste un grado de libertad por cada una de las c poblaciones multinomiales, cuyas probabilidades de columna deben totalizar uno, un total de *c grados de libertad*.
3. Tuvo que estimar $(r - 1)$ probabilidades de renglón, pero las probabilidades de columna se fijan por anticipado y no necesitaban ser estimadas. Reste $(r - 1)$ *df*.

El total de grados de libertad para la tabla $r \times c$ (columna fija) es

$$rc - c - (r - 1) = rc - c - r + 1 = (r - 1)(c - 1)$$

EJEMPLO 14.7

Una encuesta de conceptos de votantes fue realizada en cuatro distritos políticos del centro de una ciudad, para comparar las fracciones de votantes que están a favor del candidato A. Muestras aleatorias de 200 votantes se encuestaron en cada uno de los cuatro distritos con los resultados que se ven en la tabla 14.9. Los valores en paréntesis de la tabla son las cantidades esperadas de celda. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que las fracciones de votantes que están a favor del candidato A difieren en los cuatro distritos?

TABLA 14.9 **Opiniones de votantes en cuatro distritos**

	Distrito				
	1	2	3	4	Total
A favor de A	76 (59)	53 (59)	59 (59)	48 (59)	236
No a favor de A	124 (141)	147 (141)	141 (141)	152 (141)	564
Total	200	200	200	200	800

Solución Como los totales de columna están fijos en 200, el diseño comprende cuatro experimentos binomiales, cada uno de los cuales contiene las respuestas de 200 votantes para cada uno de los cuatro distritos. Para probar la igualdad de las proporciones que están a favor del candidato A en los cuatro distritos, la hipótesis nula

$$H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

es equivalente a la hipótesis nula

H_0 : La proporción a favor del candidato A es independiente del distrito

y será rechazada si la estadística de prueba X^2 es demasiado grande. El valor observado del estadístico de prueba, $X^2 = 10.722$, y su valor p asociado, .013, se muestran en la figura 14.5. Los resultados son significativos ($P < .025$); esto es, H_0 es rechazada y se puede concluir que hay diferencia en las proporciones de votantes que están a favor del candidato A entre los cuatro distritos.

FIGURA 14.5
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 14.7

Prueba ji cuadrada: distrito 1, distrito 2, distrito 3, distrito 4

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected counts

        Ward 1   Ward 2   Ward 3   Ward 4    Total
    1       76       53       59       48      236
         59.00    59.00    59.00    59.00
         4.898    0.610    0.000    2.051

    2      124      147      141      152      564
        141.00   141.00   141.00   141.00
         2.050    0.255    0.000    0.858

Total      200      200      200      200      800

Chi-Sq = 10.722 DF = 3, P-Value = 0.013
```

¿Cuál es la naturaleza de las diferencias descubiertas por la prueba ji cuadrada? Para contestar esta pregunta, véase la tabla 14.10, que muestra las proporciones muestrales que están a favor del candidato A en cada uno de los cuatro distritos. Parece que el candidato A está haciéndolo mejor en el primer distrito y peor en el cuarto distrito. ¿Es esto de alguna *significancia práctica* para el candidato? Posiblemente una observación más importante es que el candidato no tiene una pluralidad de votantes en ninguno de los cuatro distritos. Si ésta es una carrera de dos candidatos, el candidato A necesita aumentar su campaña.

TABLA 14.10 **Proporciones a favor del candidato A en cuatro distritos**

Distrito 1	Distrito 2	Distrito 3	Distrito 4
76/200 = .38	53/200 = .27	59/200 = .30	48/200 = .24

14.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

14.27 Muestras aleatorias de 200 observaciones fueron seleccionadas de cada una de tres poblaciones y cada observación fue clasificada de acuerdo a si cayó en una de tres categorías mutuamente exclusiva:

	Categoría			
Población	1	2	3	Total
1	108	52	40	200
2	87	51	62	200
3	112	39	49	200

Se desea saber si los datos dan suficiente evidencia para indicar que las proporciones de observaciones en las tres categorías dependen de la población de la cual se sacaron.

a. Dé el valor de X^2 para la prueba.

b. Dé la región de rechazo para la prueba para $\alpha = .01$.

c. Exprese sus conclusiones.

d. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba e interprete su valor.

14.28 Suponga que se desea probar la hipótesis nula de que tres parámetros binomiales p_A, p_B y p_C son iguales contra la hipótesis alternativa de que al menos dos de los parámetros difieren. Muestras aleatorias independientes de cien observaciones se seleccionaron de entre cada una de las poblaciones. Los datos se muestran en la tabla.

	Población			
	A	B	C	Total
Éxitos	24	19	33	76
Fracasos	76	81	67	224
Total	100	100	100	300

a. Escriba las hipótesis nula y alternativa para probar la igualdad de las tres proporciones binomiales.

b. Calcule el estadístico de prueba y encuentre el valor *p* aproximado para la prueba en el inciso a).

c. Use el valor *p* aproximado para determinar la significancia estadística de sus resultados. Si los resultados son estadísticamente significativos, explore la naturaleza de las diferencias en las tres proporciones binomiales.

APLICACIONES

14.29 La generación del sándwich ¿En qué forma los estadounidenses de la "generación sándwich" equilibran las demandas de cuidar a familiares más viejos y más jóvenes? En una encuesta telefónica de estadounidenses entre 40 y 55 años de edad realizada por el *New York Times*,[9] el número que dan apoyo financiero a sus familiares aparece en la siguiente tabla.

Dan apoyo financiero	Sí	No
Estadounidenses blancos	40	160
Afroestadounidenses	56	144
Hispanoestadounidenses	68	132
Estadounidenses asiáticos	84	116

¿Hay una diferencia significativa en la proporción de individuos que dan apoyo financiero a sus familiares para estas subpoblaciones de estadounidenses? Use $\alpha = .01$.

14.30 Pollos enfermos Se piensa que una enfermedad particular en pollos no es comunicable. Para probar esta teoría, 30 mil pollos se dividieron al azar en tres grupos de 10 mil. Un grupo no tenía contacto con pollos enfermos, uno tenía contacto moderado y el tercero tenía contacto frecuente. Después de 6 meses, se recabaron datos sobre el número de pollos enfermos en cada grupo de 10 mil. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una dependencia entre la cantidad de contacto entre aves enfermas y no enfermas y la incidencia de la enfermedad? Use $\alpha = .05$.

	Sin contacto	Contacto moderado	Contacto frecuente
Enfermedad	87	89	124
No enfermedad	9913	9911	9876
Total	10000	10000	10000

MIS DATOS EX1431

14.31 Atención a largo plazo Un estudio realizado en el noroeste de Inglaterra hizo una evaluación de instalaciones de atención a largo plazo que tienen residentes con demencia.[10] Las casas incluían aquellas que daban servicio especializado a personas ancianas con enfermedad o problemas de salud, conocidas como "casas EMI", así como otras clasificadas como "casas no EMI". Se esperaba que las casas EMI tuvieran una clasificación más alta en varias medidas de calidad de servicio para personas con demencia. Una medida incluía la estructura de la casa y los servicios proporcionados, como se da en la tabla siguiente.

	Tipo de casa		
Tipo de atención	EMI	NoEMI	Total
Enfermería	54	22	76
Atención residencial	59	77	136
Doble registro	49	26	75
Total	162	125	287

a. Describa los experimentos binomiales cuyas proporciones se han comparado en este experimento.

b. ¿Estos datos indican que el tipo de atención proporcionado varía por los tres tipos de casa? Pruebe al nivel $\alpha = .01$.

c. Con base en los resultados del inciso b), explique la naturaleza práctica de la relación entre el tipo de casa y el tipo de atención.

14.32 Investigación de mares profundos W.W. Menard ha realizado investigaciones respecto a nódulos de manganeso, una mezcla rica en minerales hallada en abundancia en el lecho de mares profundos.[11] En una parte de su informe, Menard proporciona datos que relacionan la edad magnética de la corteza terrestre con la "probabilidad de hallar nódulos de manganeso". La tabla siguiente da el número de muestras del núcleo de la tierra y el porcentaje de las que contienen nódulos de manganeso para cada una de un conjunto de edades de la corteza magnética. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar que la probabilidad de hallar nódulos de manganeso en la corteza de mares profundos de la Tierra depende de la clasificación de edad magnética?

Edad	Número de muestras	Porcentaje con nódulos
Mioceno; reciente	389	5.9
Oligoceno	140	17.9
Eoceno	214	16.4
Paleoceno	84	21.4
Cretácico tardío	247	21.1
Cretácico temprano o medio	1120	14.2
Jurásico	99	11.0

MIS DATOS EX1433 **14.33 ¿Qué tan grande es la familia?** Una cámara de comercio local encuestó a 120 familias en su ciudad, 40 en cada uno de tres tipos de residencia (departamentos, dúplex o casas solas) y registró el número de miembros en cada una de las familias. Los datos se muestran en la tabla.

Miembros de familia	Tipo de residencia: Departamento	Dúplex	Casa sola
1	8	20	1
2	16	8	9
3	10	10	14
4 o más	6	2	16

¿Hay diferencia significativa en las distribuciones del tamaño de familia para los tres tipos de residencia? Pruebe usando $\alpha = .01$. Si hay diferencias significativas, describa su naturaleza.

MIS DATOS EX1434 **14.34 Ir a la iglesia y edad** Una foto en *USA Today* indica que hay una brecha en los feligreses de iglesias entre estadounidenses de 20 años y de más edad.[12] Suponga que al azar seleccionamos cien estadounidenses en cada uno de los cinco grupos de edad y registramos los números que dicen que van a la iglesia en una semana típica.

¿Asiste regularmente?	20s	30s	40s	50s	60+
Sí	31	42	47	48	53
No	69	58	53	52	47

Fuente: Barna Research Group

a. ¿Estos datos indican que la proporción de adultos que van a la iglesia difiere regularmente dependiendo de la edad? Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Si hay diferencias significativas en el inciso a), describa la naturaleza de estas diferencias al calcular la proporción de quienes van a la iglesia en cada categoría de edad. ¿Dónde parece que están las diferencias significativas?

14.6 LA EQUIVALENCIA DE PRUEBAS ESTADÍSTICAS

Recuerde que cuando hay sólo $k = 2$ categorías en un experimento multinomial, el experimento se reduce a un *experimento binomial* donde se registra el número de éxitos x (o O_1) en n (o $O_1 + O_2$) intentos. Del mismo modo, los datos que resultan de *dos experimentos binomiales* se pueden exhibir en una clasificación de dos vías con $r = 2$ y $c = 2$, de modo que la prueba ji cuadrada de *homogeneidad* se puede usar para comparar las dos proporciones binomiales, p_1 y p_2. Para estas dos situaciones, hemos presentado pruebas estadísticas para las proporciones binomiales basadas en el estadístico z del capítulo 9:

- ***Una muestra:*** $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$

$k = 2$

Éxitos	Fracasos

- ***Dos muestras:*** $z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

$r = c = 2$

Muestra 1	**Muestra 2**
Éxitos	Éxitos
Fracasos	Fracasos

MI CONSEJO

Las pruebas binomiales de una y de dos muestras del capítulo 9 son equivalentes a pruebas ji cuadrada, $z^2 = \chi^2$.

¿Por qué hay dos pruebas diferentes para la misma hipótesis estadística? ¿Cuál debería usarse? Para estas dos situaciones, se puede usar *ya sea* la prueba z *o bien* la prueba ji cuadrada, y se obtendrán resultados idénticos. Para la prueba de una o de dos muestras, podemos demostrar algebraicamente que

$$z^2 = \chi^2$$

de modo que el estadístico de prueba z será la raíz cuadrada (ya sea positiva o negativa, dependiendo de los datos) del estadístico ji cuadrada. Además, podemos demostrar teóricamente que la misma relación se cumple para los valores críticos de las tablas z y χ^2 del apéndice I, que produce *valores p idénticos* para las dos pruebas equivalentes. Para probar una hipótesis alternativa de una cola como $H_0 : p_1 > p_2$, primero se determina si $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0$, es decir, si la diferencia en proporciones muestrales tiene el signo apropiado. Si es así, el valor crítico apropiado de χ^2 de la tabla 5 tendrá un grado de libertad y un área de cola derecha de 2α. Por ejemplo, el valor crítico χ^2 con 1 *df* y $\alpha = .05$ será $\chi^2_{.10} = 2.70554 = 1.645^2$.

En resumen, usted es libre de escoger la prueba (z o X^2) que sea más cómoda. Como casi todos los paquetes de computadora incluyen la prueba ji cuadrada y la mayor parte de ellos no incluyen las pruebas z de muestra grande, la prueba ji cuadrada puede ser preferible.

14.7 OTRAS APLICACIONES DE LA PRUEBA JI CUADRADA

La aplicación de la prueba ji cuadrada para analizar datos de cantidades es sólo uno de muchos problemas de clasificación que resultan en datos multinomiales. Algunas de estas aplicaciones son bastante complejas, requiriendo procedimientos complicados o difíciles desde el punto de vista de cálculos para estimar las cantidades de celda esperadas. No obstante, varias aplicaciones se utilizan con suficiente frecuencia para hacerlas dignas de mención:

- **Pruebas de bondad del ajuste:** Se puede diseñar una prueba de bondad de ajuste para determinar si los datos son consistentes con datos tomados de una distribución particular de probabilidad, posiblemente normal, binomial, de Poisson u otras distribuciones. Las celdas de un histograma de frecuencia muestral corresponden a las k celdas de un experimento multinomial. Las cantidades esperadas de celda se calculan usando las probabilidades asociadas con la distribución hipotética de probabilidad.
- **Multinomiales dependientes del tiempo:** Se puede usar el estadístico ji cuadrada para investigar la rapidez de cambio de proporciones multinomiales (o binomiales) en el tiempo. Por ejemplo, suponga que la proporción de respuestas correctas en un examen de 100 preguntas se registra para un estudiante, que

entonces repite el examen en cada una de las siguientes 4 semanas. ¿La proporción de respuestas correctas aumenta con el tiempo? ¿Está teniendo lugar un aprendizaje? En un proceso monitoreado por un plan de control de calidad, ¿hay una tendencia positiva en la proporción de artículos defectuosos como función del tiempo?

- **Tablas de contingencia multidimensionales:** En lugar de sólo dos métodos de clasificación, se puede investigar una dependencia entre tres o más clasificaciones. La tabla de contingencia de dos vías se extiende a una tabla en más de dos dimensiones. La metodología es similar a la que se emplea para la tabla de contingencia de $r \times c$, pero el análisis es un poco más complejo.
- **Modelos log-lineales:** Modelos complejos se pueden crear en donde el logaritmo de la probabilidad de celda ($\ln p_{ij}$) es alguna función lineal de las probabilidades de renglón y columna.

Casi todas estas aplicaciones son más bien complejas y podrían requerir el consejo de un estadístico profesional antes de realizar un experimento.

En todas las aplicaciones estadísticas que usen *estadística ji cuadrada de Pearson*, las suposiciones deben estar satisfechas para que el estadístico de prueba tenga una distribución de probabilidad ji cuadrada aproximada.

SUPOSICIONES

- Las cantidades de celda $O_1, O_2, \ldots, O_k$ deben satisfacer las condiciones de un experimento multinomial, o un conjunto de experimentos multinomiales creados al fijar ya sea los totales de renglón o de columna.
- Las cantidades de celda esperadas $E_1, E_2, \ldots, E_k$ deben ser iguales o mayores a 5.

Por lo general se puede estar razonablemente seguro de haber satisfecho la primera suposición si con todo cuidado se prepara o diseña un experimento o encuesta muestral. Cuando calcule las cantidades de celda esperadas, si encuentra que una o más es menor a 5, existen estas opciones:

- Escoja un tamaño n muestral más grande. Cuanto más grande sea el tamaño muestral, más cerca se aproximará la distribución cuadrada a la distribución de su estadístico de prueba X^2.
- Puede ser posible combinar una o más de las celdas con pequeñas cantidades de celda esperadas, con lo cual se satisface la suposición.

Por último, asegúrese de estar calculando los *grados de libertad* correctamente y que con todo cuidado se evalúan las conclusiones estadísticas y prácticas que se pueden sacar de la prueba.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. El experimento multinomial

1. Hay n intentos idénticos y cada resultado cae en una de k categorías.
2. La probabilidad de caer en la categoría i es p_i y permanece constante de un intento a otro.
3. Los intentos son independientes, $\Sigma p_i = 1$, y medimos O_i, el número de observaciones que caen en cada una de k categorías.

II. Estadísticas ji cuadrada de Pearson

$$X^2 = \Sigma\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad \text{donde } E_i = np_i$$

que es una distribución ji cuadrada aproximada con *grados de libertad* determinados por la aplicación.

III. La prueba de bondad del ajuste

1. Ésta es una clasificación de una vía con probabilidades de celda especificadas en H_0.
2. Use el estadístico ji cuadrada con $E_i = np_i$ calculada con las probabilidades hipotéticas.
3. $df = k - 1 -$ (Número de parámetros estimados para hallar E_i)
4. Si H_0 es rechazada, investigue la naturaleza de las diferencias usando las proporciones muestrales.

IV. Tablas de contingencia

1. Una clasificación de dos vías con n observaciones en categorías de $r \times c$ celdas de una tabla de dos vías, que usa dos métodos diferentes de clasificación, se denomina *tabla de contingencia*.
2. La prueba de independencia de métodos de clasificación usa el estadístico ji cuadrada

$$X^2 = \Sigma\frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}}$$

$$\text{con } \hat{E}_{ij} = \frac{r_i c_j}{n} \quad \text{y} \quad df = (r-1)(c-1)$$

3. Si la hipótesis nula de independencia de clasificaciones se rechaza, investigue la naturaleza de la dependencia usando proporciones condicionales dentro de ya sea renglones o columnas de la tabla de contingencia.

V. Fijar totales de renglón o columna

1. Cuando sea que los totales de renglón o los de columna sean fijos, la prueba de independencia de clasificaciones se convierte en una prueba de la homogeneidad de probabilidades de celda para varios experimentos multinominales.
2. Use el mismo estadístico ji cuadrada que para tablas de contingencia.
3. Las pruebas Z de muestra grande para uno y dos proporciones binomiales son casos especiales de la estadística ji cuadrada.

VI. Suposiciones

1. Las cantidades de celda satisfacen las condiciones de un experimento multinomial o un conjunto de experimentos con tamaños muestrales fijos.
2. Todas las cantidades de celda esperadas deben ser iguales o mayores a cinco para que la aproximación ji cuadrada sea válida.

MI MINITAB

La prueba ji cuadrada

Existen varios procedimientos en el paquete *MINITAB* para analizar datos categóricos. El procedimiento apropiado depende de si los datos representan una clasificación de una vía (un solo experimento multinomial) o una clasificación de dos vías o tabla de contingencia. Si los *datos categóricos sin elaborar* se han guardado en la hoja de trabajo *MINITAB* más que las *cantidades de celda observadas*, puede ser necesario totalizar o clasificar en cruz los datos para obtener las cantidades de celda antes de continuar.

Por ejemplo, supongamos que se ha registrado el género (M o F) y el estatus universitario (1er año, 2o. año, no graduado, de último año, egresado) para 100 estudiantes de estadística. La hoja de trabajo *MINITAB* contendría dos columnas de 100 observaciones cada una. Cada renglón contendría el género de una persona en la columna 1 y el estatus universitario en la columna 2. Para obtener las cantidades de celda observadas (O_{ij}) para la tabla de contingencia 2×5, use **Stat → Tables → Cross Tabulation and Chi-Square** para generar el cuadro de diálogo que se ve en la figura 14.6.

Bajo “Categorical Variables”, seleccione “Gender” para la variable de renglón y “Status” para la variable de columna. Deje las cajas marcadas “For Layers” y “Frequencies are in:” en blanco. Asegúrese que el cuadro con leyenda “Display Counts” tenga marca de activado. Dé un clic en el botón **Chi-Square…** para exhibir el cuadro de diálogo de la figura 14.6. Seleccione las cajas para “Chi-Square Analysis” y “Expected Cell Counts”. Dé doble clic en **OK**. Esta secuencia de comandos no sólo tabula la tabla de contingencia, sino que también realiza la prueba ji cuadrada de independencia y exhibe los resultados en la ventana Session que se ve en la figura 14.7. Para los datos del estatus género/universidad, el valor *p* grande ($P = .153$) indica un resultado no significativo. Hay suficiente evidencia para indicar que el género de un estudiante depende del estatus de clase.

Si las cantidades de celda observadas en la tabla de contingencia ya han sido tabuladas, simplemente introduzca las cantidades en las columnas *c* de la hoja de trabajo *MINITAB*, use **Stat → Tables → Chi-Square Test (Two-Way Table in Worksheet)** y seleccione las columnas apropiadas antes de dar clic en **OK**. Para los datos del estatus género/universidad, se pueden introducir las cantidades en las columnas C3-C7 como se ve en la figura 14.8. La salida impresa resultante tendrá una leyenda diferente pero se verá exactamente como la salida impresa de la figura 14.7.

Una prueba sencilla de un solo experimento multinomial se puede iniciar al considerar si las proporciones de estudiantes de estadística hombres y mujeres son iguales, es decir, $p_1 = .5$ y $p_2 = .5$.

En *MINITAB* 15, use **Stat → Tables → Chi-Square Goodness-of-Fit Test (One Variable)** para exhibir el cuadro de diálogo de la figura 14.9. Si usted tiene datos categóricos sin elaborar en una columna, dé un clic en el botón “Categorical data:” e introduzca la columna “Gender” en la celda. Si tiene valores de resumen de cantidades observadas para cada categoría, escoja “Observed counts”. A continuación introduzca las cantidades observadas o teclee las cantidades observadas para cada categoría.

Para esta prueba, podemos seleccionar “Equal proportions” para probar $H_0 : p_1 = p_2 = .5$. Cuando tenga proporciones diferentes para cada categoría, use “Specific propor-

FIGURA 14.6

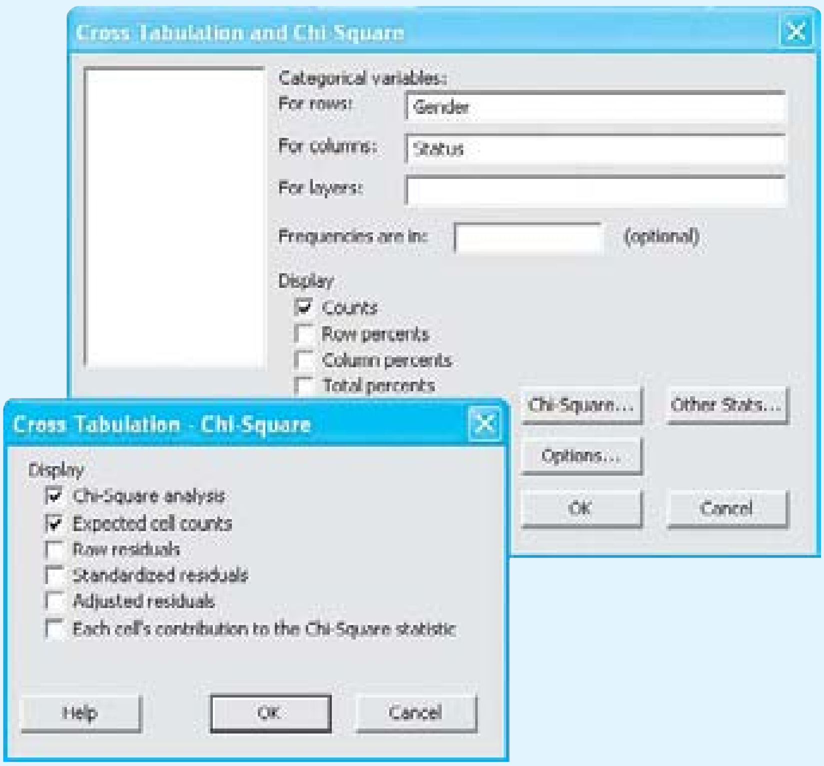


FIGURA 14.7

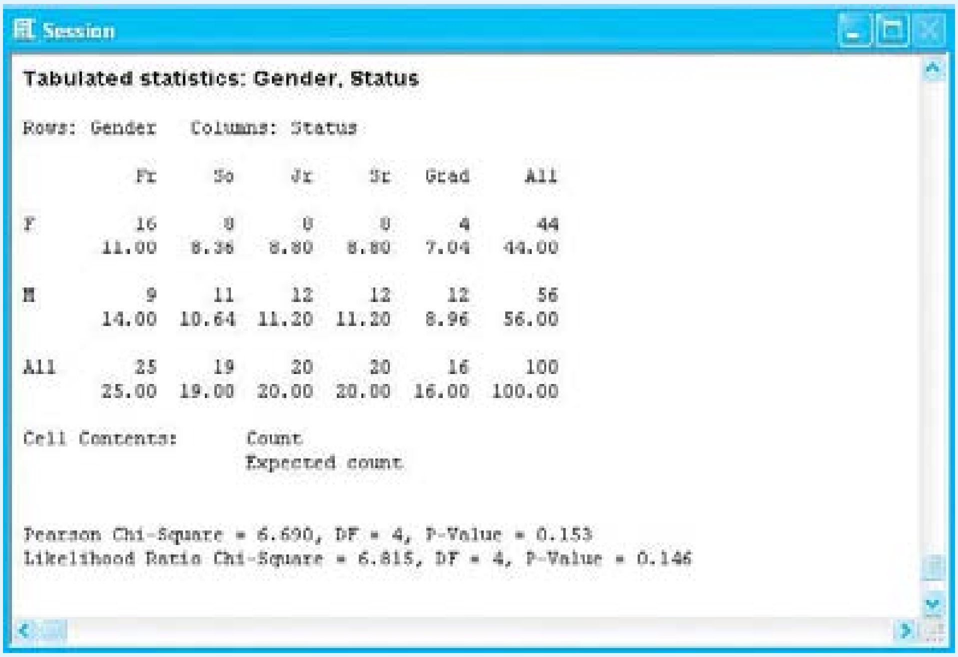
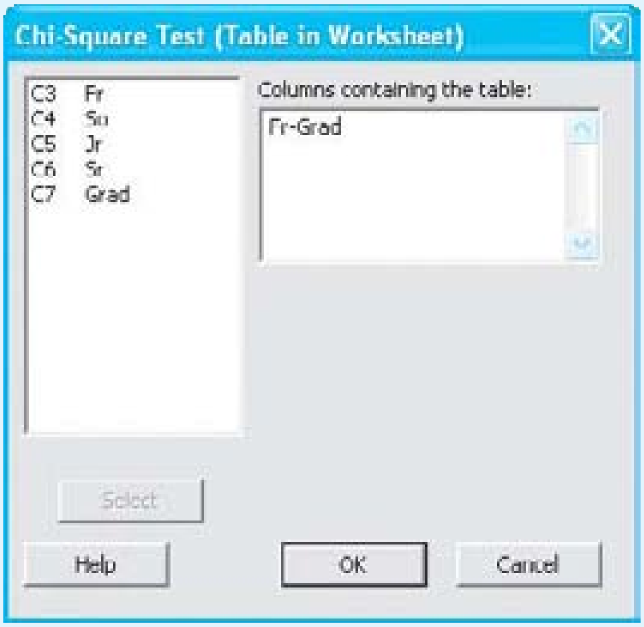


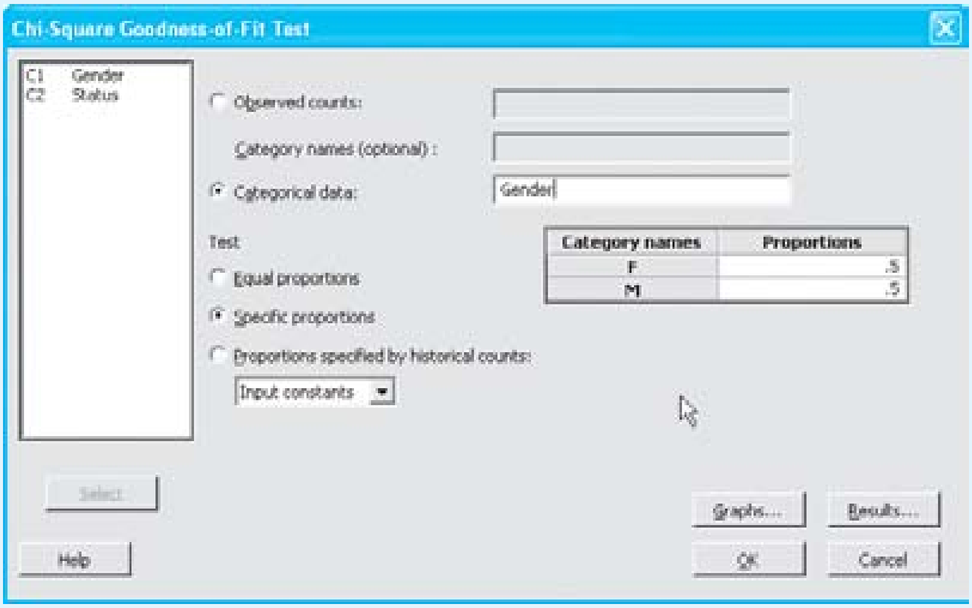
FIGURA 14.8



tions". Puede guardar las proporciones para cada categoría en una columna, escoger "Input column" e introducir la columna. Si desea teclear la proporción para cada categoría, escoja "Input constantes" y teclee las proporciones para las categorías correspondientes. Dé un clic en **OK**. La salida resultante incluirá varias gráficas junto con los valores para O_i y E_i para cada categoría, el valor observado de la estadística de prueba, $X^2 = 1.44$, y su valor $p = 0.230$, que no es significativo. Hay suficiente evidencia para indicar una diferencia en la proporción de estudiantes de estadística hombres y mujeres.

Si usted emplea una versión previa del *MINITAB*, tendrá que determinar las cantidades de celda observadas y esperadas, e introducirlas en columnas separadas en la hoja de trabajo. A continuación use **Calc** → **Calculator** y la expresión **SUM((‘O’ − ‘E’)**2/‘E’)** para calcular el valor observado de la estadística de prueba.

FIGURA 14.9



Ejercicios suplementarios

Los ejercicios con asterisco (*) son opcionales.

14.35 Cera para pisos Un fabricante de cera para pisos realizó un experimento de preferencia del consumidor para ver si una nueva cera para pisos A era mejor que las producidas por cuatro competidores, B, C, D y E. Una muestra de cien amas de casa vieron cinco parches de piso que había recibido las cinco ceras y cada una indicó el parche que consideraba mejor en apariencia. La iluminación, el fondo y otros factores eran aproximadamente iguales para los cinco parches. Los resultados del estudio se ven a continuación:

Cera	A	B	C	D	E
Frecuencia	27	17	15	22	19

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una preferencia por uno o más de los parches pulidos de piso sobre los otros? Si uno fuera a rechazar la hipótesis de no preferencia para este experimento, ¿implicaría esto que la cera A es mejor que las otras? ¿Se puede sugerir una mejor forma de realizar el experimento?

14.36 Buena condición física en Estados Unidos Se realizó un estudio para investigar el interés de adultos de edad mediana en programas de acondicionamiento físico en Rhode Island, Colorado, California y Florida. El objetivo de la investigación era determinar si la participación de adultos en programas de acondicionamiento físico varía de una región de Estados

Unidos a otra. Una muestra aleatoria de personas fueron entrevistadas en cada estado y se registraron estos datos:

	Rhode Island	Colorado	California	Florida
Participan	46	63	108	121
No participan	149	178	192	179

¿Los datos indican una diferencia en participación de adultos en programas de acondicionamiento físico de un estado a otro? Si es así, describa la naturaleza de las diferencias.

14.37 Accidentes fatales Se analizaron datos de accidentes para determinar los números de accidentes fatales para automóviles de tres tamaños. Los datos de 346 accidentes son como sigue:

	Pequeño	Mediano	Grande
Fatal	67	26	16
No fatal	128	63	46

¿Los datos indican que la frecuencia de accidentes fatales depende del tamaño de automóviles? Escriba un breve párrafo que describa sus resultados estadísticos y las implicaciones prácticas de éstos.

14.38 Médicos y pacientes de asistencia médica gratuita Se realizó un experimento para investigar el efecto de la experiencia general en hospital, en las actitudes de médicos hacia pacientes de asistencia médica gratuita. Una muestra aleatoria de 50 médicos que acababan de terminar 4 semanas de servicio en un hospital general y 50 médicos que no las habían terminado, fueron clasificados de acuerdo a su interés por pacientes de asistencia médica gratuita. Los datos se ven en la tabla. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar un cambio en "interés" después de la experiencia general en hospital? Si es así, describa la naturaleza del cambio.

	Servicio en hospital		
Sin servicio en hospital	Alto	Bajo	Total
Bajo	27	5	32
Alto	9	9	18

Salida impresa parcial *MINITAB* para el ejercicio 14.38

Prueba ji cuadrada: alto, bajo

```
Chi-Sq = 6.752, DF = 1, P-Value = 0.009
```

MIS DATOS EX1439 **14.39 Enseñanza basada en descubrimientos** Dos profesores de biología se propusieron evaluar los efectos de la enseñanza basada en descubrimientos, en comparación con el método de enseñanza estándar basada en lectura en el laboratorio.[13] El método estándar basado en lectura dio una lista de instrucciones a seguir en cada paso del ejercicio de laboratorio, mientras que el método basado en descubrimientos hizo preguntas en lugar de dar instrucciones y utilizó los informes de un pequeño grupo para decidir la mejor forma de continuar para llegar al objetivo de laboratorio. Una evaluación de las técnicas comprendía evaluaciones de ambos procedimientos por estudiantes al final del curso. La comparación del número de respuestas positivas y negativas para ambas técnicas se da en la tabla siguiente.

Grupo	Evaluaciones positivas	Evaluaciones negativas	Total
Descubrimiento	37	11	48
Control	31	17	48

a. ¿Hay una diferencia significativa en la proporción de respuestas positivas para cada uno de los métodos de enseñanza? Use $\alpha = .05$. Si es así, ¿cómo describiría esta diferencia?

b. ¿Cuál es el valor p aproximado para la prueba del inciso a)?

14.40 Posición de un bebé dormido ¿La posición de un bebé dormido afecta el desarrollo de habilidades motoras? En un estudio, 343 niños de desarrollo normal fueron examinados en su revisión de 4o. mes en busca de varios aspectos importantes de desarrollo, por ejemplo rodarse, tomar una sonaja o alcanzar un objeto.[14] La posición predominante del bebé al dormir, ya sea boca abajo, de espaldas o de costado, fue determinada por una entrevista telefónica con los padres. Los resultados de la muestra de 320 de los 343 bebés de quienes se recibió información se ven en la tabla siguiente. El investigador informó que los bebés que dormían de costado o boca arriba eran menos susceptibles de rodarse en su revisión de 4o. mes que los que dormían predominantemente boca abajo ($P < .001$).

	Boca abajo	Boca arriba o de costado
Número de bebés	121	199
Número que se rodaban	93	119

a. Use una prueba z de muestra grande para confirmar o refutar la conclusión del investigador.

b. Reescriba los datos de la muestra como una tabla de contingencia de 2×2. Use la prueba ji cuadrada para homogeneidad para confirmar o refutar la conclusión del investigador.

c. Compare los resultados de los incisos a) y b). Confirme que los dos estadísticos de prueba están relacionadas como $z^2 = X^2$ y que los valores críticos para rechazar H_0 tienen la misma relación.

14.41 Consulte el ejercicio 14.40. Encuentre el valor k para la prueba z de muestra grande del inciso a). Compare este valor p con el valor p para la prueba ji cuadrada, mostrada en la salida impresa parcial *MINITAB*.

Salida impresa parcial *MINITAB* para el ejercicio 14.41

Prueba ji cuadrada: boca abajo, de costado

```
Chi-Sq = 9.795, DF = 1, P-Value = 0.002
```

14.42 Posición de un bebé dormido II Los investigadores en el ejercicio 14.40 también midieron otros varios aspectos del desarrollo y sus relaciones con la posición predominante del bebé al dormir.[14] Los resultados de su investigación se presentan en la tabla para los 320 bebés y su revisión de 4o. mes.

Aspecto	Registro	Boca abajo	Boca arriba	*P*
Se jala para sentarse sin doblar la cabeza	Aprueba	79	144	
	No aprueba	6	20	<.21
Toma una sonaja	Aprueba	102	167	
	No aprueba	3	1	<.13
Alcanza un objeto	Aprueba	107	183	
	No aprueba	3	5	<.97

Use su conocimiento del análisis de datos categóricos para explicar el diseño experimental empleado por los investigadores. ¿Qué hipótesis fueron de interés para los investigadores y qué prueba estadística hubieran usado los investigadores? Explique las conclusiones que se puedan sacar de los tres valores p en la última columna de la tabla, así como las implicaciones prácticas que puedan sacarse de los resultados estadísticos. ¿Se han violado algunas suposiciones estadísticas?

14.43 Color y forma de una flor Un botánico realiza un cruce secundario de petunias con factores independientes que controlan la forma de hoja y color de flor, donde el factor A representa el color rojo, a representa color blanco, B representa hojas redondas y b representa hojas largas. De acuerdo con el modelo de Mendel, las plantas deben exhibir las características AB, Ab, aB y ab en la proporción 9:3:3:1. De 160 plantas experimentales, se observaron los números siguientes:

AB	*Ab*	*aB*	*ab*
95	30	28	7

¿Hay suficiente evidencia para refutar el modelo de Mendel al nivel $\alpha = .01$?

14.44 Salmonella ¿El pavo de su fiesta está bien? Un "nuevo estudio federal encontró que 13% de los pavos están contaminados con la bacteria salmonella responsable de 1.3 millones de enfermedades y cerca de 500 fallecimientos en un año en Estados Unidos".[15] Use la tabla que sigue para determinar si hay diferencia significativa en la rapidez de contaminación en tres plantas de procesamiento. Cien pavos se seleccionaron al azar de cada una de las líneas de procesamiento en estas tres plantas.

Planta	Salmonella presente	Tamaño muestral
1	42	100
2	23	100
3	22	100

¿Hay diferencia significativa en la rapidez de contaminación por salmonella entre estas tres plantas de procesamiento? Si hay una diferencia significativa, describa la naturaleza de estas diferencias. Use $\alpha = .01$.

14.45 Medicina para la artritis Un estudio para determinar la efectividad de un medicamento (suero) para la artritis resultó en la comparación de dos grupos, cada uno formado por 200 pacientes de artritis. Un grupo fue inoculado con el suero; el otro recibió un placebo (inoculación que parece contener suero pero en realidad no es activo). Después de un tiempo, a cada persona del estudio se le pidió que dijera si su afección de artritis había mejorado. Éstos son los resultados:

	Tratado	No tratado
Mejoró	117	74
No mejoró	83	126

Se desea saber si estos datos presentan suficiente evidencia para indicar que el suero fue efectivo para mejorar la condición de pacientes de artritis.

a. Use la prueba ji cuadrada de homogeneidad para comparar las proporciones mejoradas de las poblaciones de personas tratadas y no tratadas. Pruebe al nivel de significancia de 5%.

b. Pruebe la igualdad de las dos proporciones binomiales usando la prueba z de dos muestras de la sección 9.6. Verifique que el valor elevado al cuadrado del estadístico de prueba $z^2 = X^2$ del inciso a). ¿Sus conclusiones son iguales a las del inciso a)?

14.46 Estacionamiento en la universidad Se realizó un estudio para determinar las actitudes de estudiantes, profesores y personal administrativo acerca de la nueva política de estacionamiento en la universidad. La distribución de quienes están a favor o en contra de esa política se muestra en la tabla siguiente. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que las actitudes acerca de la política de estacionamiento son independientes del estatus de estudiantes, profesores o personal administrativo?

	Estudiantes	Profesores	Administración
A favor	252	107	43
Se oponen	139	81	40

14.47* La prueba ji cuadrada empleada en el ejercicio 14.45 es equivalente a la prueba z de dos colas de la sección 9.6 siempre que α sea igual para las dos pruebas. Demuestre algebraicamente que el estadístico X^2 de la prueba ji cuadrada es el cuadrado de la prueba estadística z para la prueba equivalente.

14.48 Ajuste de una distribución binomial Se puede usar una prueba de bondad de ajuste para determinar si en realidad todos los criterios para un experimento binomial se han satisfecho en una aplicación determinada. Suponga que un experimento consistente en cuatro intentos se repitió cien veces. El número de repeticiones en las que se obtuvo un número dado de éxitos y se registró en la tabla:

Resultados posibles (número de éxitos)	Número de veces obtenido
0	11
1	17
2	42
3	21
4	9

Estime p (suponiendo que el experimento fue binomial), obtenga estimaciones de las frecuencias de celda esperadas y pruebe la bondad del ajuste. Para determinar el número apropiado de grados de libertad para X^2, observe que p fue estimado por una combinación lineal de las frecuencias observadas.

14.49 Antibióticos e infección A veces ocurren infecciones cuando se aplican transfusiones de sangre durante operaciones quirúrgicas. Se realizó un experimento para determinar si la inyección de anticuerpos redujo la probabilidad de infección. Un examen de los registros de 138 pacientes produjo los datos que se ven en la tabla siguiente. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que inyecciones de anticuerpos afectan la probabilidad de infecciones en transfusiones? Pruebe usando $\alpha = .05$.

	Infección	No infección
Anticuerpos	4	78
Sin anticuerpos	11	45

14.50 Manufactura alemana Los sindicatos de Estados Unidos han estado tradicionalmente contentos con dejar la administración de compañías a gerentes y ejecutivos corporativos. Pero, en Europa, la participación de los trabajadores en la toma de decisiones administrativas es una idea aceptada que se está extendiendo en forma continua. Para estudiar el efecto de la participación de trabajadores en la toma de decisiones administrativas, cien trabajadores fueron entrevistados en cada una de dos plantas manufactureras alemanas. Una de ellas tenía participación activa de trabajadores en la toma de decisiones administrativas; la otra, no. A cada trabajador seleccionado se le preguntó si en general aprobaba las decisiones administrativas tomadas dentro de la firma. Los resultados de las entrevistas se muestran en la tabla siguiente:

	Participación	No participación
Generalmente aprueban	73	51
No aprueban	27	49

a. ¿Los datos dan evidencia suficiente para indicar que la aprobación o desaprobación de decisiones administrativas depende de si los trabajadores participan en la toma de decisiones? Pruebe usando la estadística de prueba X^2. Use $\alpha = .05$.

b. ¿Estos datos apoyan la hipótesis de que trabajadores de una firma, con toma de decisiones participativa, aprueban más generalmente las decisiones administrativas de la firma que los empleados sin toma de decisiones participativas? Pruebe usando la prueba z presentada en la sección 9.6. Este problema requiere una prueba de una cola. ¿Por qué?

14.51 Tres entradas Un estudio de tránsito de ocupantes se realizó para ayudar en la remodelación de un edificio de oficinas que contiene tres entradas. La selección de entrada se registró para una muestra de 200 personas que entraron al edificio. ¿Los datos de la tabla indican que hay una diferencia en preferencia para las tres entradas? Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la proporción de personas que están a favor de la entrada 1.

Entrada	1	2	3
Número que entran	83	61	56

14.52 Maestros de escuela en casa Los padres, preocupados por el ambiente en escuelas públicas y por antecedentes, están mirando hacia la escuela en casa para controlar el contenido y atmósfera de los ambientes de aprendizaje de sus hijos. Aun cuando el empleo como profesor de escuela pública requiere de un título de licenciatura en educación o una materia del área, el antecedente educacional de profesores en casa es muy variado. El antecedente educativo de una muestra de $n = 500$ padres que participan en educar a sus hijos en 2003 aparece en la tabla que sigue, junto con los correspondientes porcentajes de pares que enseñaron a sus hijos en 1999. Los niveles de educación para ciudadanos estadounidenses en general se dan en la segunda tabla.

Educación de padres	2003	Porcentajes 1999
Preparatoria o menos	121	18.9
Universidad/técnica no concluida	153	33.7
Título de licenciatura	127	25.1
Graduado/profesional	99	22.3

Nivel educativo	% de población de Estados Unidos 2009
Secundaria o menos	47.5
Algún nivel de bachillerato	25.3
Grado universitario o más	27.2

a. ¿Hay un cambio significativo en los antecedentes educativos de padres que enseñaron a sus hijos en 2003, en comparación con 2009? Use $\alpha = .01$.

b. Si hay un cambio significativo en antecedentes educativos de estos padres, ¿cómo se describiría ese cambio?

c. Usando la segunda tabla, ¿podemos determinar si profesores de escuela en casa tienen los mismos antecedentes educativos que la población de Estados Unidos en general? Si no es así, ¿cuáles grupos están representados de menos y cuáles de más?

14.53 ¿Es usted un buen automovilista? ¿Cómo se calificaría usted mismo como conductor? De acuerdo a un estudio realizado por el Field Institute, la mayoría de californianos piensan que son buenos conductores pero tienen poco respeto por la pericia de otros conductores. Los datos muestran la distribución de opiniones de acuerdo al género para dos cuestiones diferentes, la primera calificándose a sí mismos como conductores y la segunda calificando a otros como conductores.[17] Aun cuando no se indica en la fuente, suponemos que hubo cien hombres y cien mujeres en el grupo encuestado.

	Se califica como conductor		
Género	Excelente	Bueno	Regular
Hombre	43	48	9
Mujer	44	53	3

	Califica a otros como conductores			
Género	Excelente	Bueno	Regular	Malo/Muy Malo
Hombre	4	42	41	13
Mujer	3	48	35	14

a. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que hay diferencia en las calificaciones propias entre hombres y mujeres automovilistas? Encuentre el valor p aproximado para la prueba.

b. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia en las calificaciones de otros automovilistas entre hombres y mujeres? Encuentre el valor p aproximado para la prueba.

c. ¿Ha sido violada alguna suposición necesaria para el análisis usado en los incisos a) y b)? ¿Qué efecto podría tener esto en la validez de sus conclusiones?

14.54 Colores de vehículos Cada modelo parece introducir nuevos colores y tonos diferentes para una amplia variedad de vehículos, desde autos de lujo, autos grandes o modelos intermedios, hasta compactos y autos deportivos, así como para camiones ligeros. No obstante, el color blanco y plateado/gris siguen siendo los cinco o seis colores principales en todas estas categorías de automóviles. Los cinco colores principales y el porcentaje de su participación en el mercado para autos compactos/deportivos se muestra en la tabla siguiente.[18]

Color	Plateado	Gris	Azul	Negro	Blanco/perla
Porcentaje	20	17	16	14	10

Para verificar las cifras, se tomó una muestra aleatoria formada por 250 autos compactos/deportivos y se registró el color de los vehículos. La muestra dio las siguientes cantidades para las categorías dadas líneas antes: 60, 51, 43, 35 y 30, respectivamente.

a. ¿Falta alguna categoría en la clasificación? ¿Cuántos vehículos pertenecen a esa categoría?

b. ¿Hay suficiente evidencia para indicar que nuestros porcentajes de autos compactos/deportivos difieren de los dados? Encuentre el valor p aproximado para la prueba.

14.55 Tarjetas divertidas Cuando se escoge una tarjeta de visita, ¿siempre se busca una tarjeta humorística o esto depende de la ocasión? Una comparación, patrocinada por dos de los principales fabricantes de tarjetas de visita, indicaba una ligera diferencia en las proporciones de diseños humorísticos hechos para tres ocasiones diferentes: día del padre, día de la madre y día de san Valentín.[19] Para probar la precisión de la comparación, muestras aleatorias de 500 tarjetas de visita compradas en una tienda local, en la semana antes de cada día feriado, se introdujeron en la base de datos de una computadora y se obtuvieron los resultados de la tabla siguiente. ¿Los datos indican que las proporciones de tarjetas de visita humorísticas varían para esos tres días feriados? (SUGERENCIA: Recuerde incluir una tabulación para las 1500 tarjetas de visita.)

Día feriado	Día del padre	Día de la madre	Día de san Valentín
Porcentaje humor	20	25	24

MIS DATOS EX1456 **14.56 Medicina que sabe bien** Pfizer Canada Inc. es una empresa farmacéutica que hace acitromicina, antibiótico en suspensión con sabor a cereza, que se usa para tratar infecciones bacterianas en niños. Para comparar el sabor de su producto con tres medicamentos de la competencia, Pfizer probó 50 niños sanos y 20 adultos sanos. Entre otras medidas para probar el sabor, registraron el número de probadores que calificaron cada una de las cuatro suspensiones de antibiótico como el de mejor sabor.[20] Los resultados se muestran en la tabla siguiente. ¿Hay diferencia en la percepción del mejor sabor entre adultos y niños? Si es así, ¿cuál es la naturaleza de la diferencia y por qué es de importancia práctica para la compañía farmacéutica?

	Sabor de antibiótico			
	Banana	Cereza*	Fruta silvestre	Strawberry-Banana
Niños	14	20	7	9
Adultos	4	14	0	2

* Acitromicina producida por Pfizer Canada Inc.

MIS DATOS EX1457

14.57 Lesiones en rugby Las lesiones en rodillas son un problema importante para atletas en muchos deportes de contacto. No obstante, los atletas que juegan ciertas posiciones son más propensos a sufrir lesiones en rodillas que otros jugadores y sus lesiones tienden a ser más severas. La prevalencia y patrones de lesiones en rodillas entre jugadoras de rugby universitarias se investigaron usando un cuestionario de muestra, al que respondieron 42 clubs de rugby.[21] Un total de 76 lesiones de rodilla fueron clasificadas por tipo y posición del jugador (delantero o defensa).

	Tipo de lesión de rodilla				
Posición	Desgarre de menisco	Desgarre MCL	Desgarre ACL	Desgarre de rótula	Desgarre PCL
Delantero	13	14	7	3	1
Defensa	12	9	14	2	1

Salida impresa *MINITAB* para el ejercicio 14.57

Prueba ji cuadrada: desgarre en hombres, desgarre MCL, desgarre ACL, rótula, desgarre PCL

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected
counts

    Men Tear MCL Tear ACL Tear  Patella PCL Tear  Total
 1        13       14        7        3        1     38
       12.50    11.50    10.50     2.50     1.00
       0.020    0.543    1.167    0.100    0.000

 2        12        9       14        2        1     38
       12.50    11.50    10.50     2.50     1.00
       0.020    0.543    1.167    0.100    0.000

Total     25       23       21        5        2     76

Chi-Sq = 3.660, DF = 4, P-Value = 0.454
4 cells with expected counts less than 5.0
```

a. Use la salida impresa *MINITAB* para determinar si hay diferencia en la distribución de tipos de lesiones para delanteros y defensas de rugby. ¿Ha sido violada alguna suposición necesaria para la prueba ji cuadrada? ¿Qué efecto tendrá esto en la magnitud de la estadística de prueba?

b. Los investigadores informan de una diferencia significativa en la proporción de los desgarres del MCL para las dos posiciones ($P < .05$) y una diferencia significativa en la proporción de desgarres del ACL ($P < .05$), pero indican que todas las otras lesiones ocurren con igual frecuencia para las dos posiciones. ¿Está de acuerdo con esas conclusiones? Explique.

MIS DATOS EX1458

14.58 Comida rápida favorita El número de estadounidenses que con regularidad van a restaurantes de comida rápida ha crecido en forma constante en la última década. Por esta razón, expertos en marketing están interesados en la *demografía* de clientes de comida rápida. ¿La preferencia de un consumidor por una cadena de comida rápida es afectada por la edad del consumidor? Si es así, puede que sea necesario que la publicidad se dirija a un grupo particular de edad. Suponga que se selecciona una muestra aleatoria de 500 consumidores de comida rápida, de 16 años o más, registrándose sus restaurantes favoritos de comida rápida junto con sus grupos de edad, como se ve en la tabla:

Grupo de edad	McDonald's	Burger King	Wendy's	Otros
16-21	75	34	10	6
21-30	89	42	19	10
30-49	54	52	28	18
50+	21	25	7	10

Use un método apropiado para determinar si la preferencia de un consumidor de comida rápida depende o no de la edad. Escriba un breve párrafo presentando sus conclusiones estadísticas y sus implicaciones prácticas para los expertos en mercadotecnia.

14.59 Pescar un resfriado ¿La probabilidad de contraer un resfriado está influida por el número de contactos sociales que tenga? Un estudio reciente de Sheldon Cohen, profesor de psicología de la Universidad Carnegie Mellon, parece mostrar que cuantas más relaciones sociales tenga alguien, *menos susceptible* es a los resfriados.[22] Un grupo de 276 hombres y mujeres sanos se agruparon de acuerdo a su número de relaciones (padres, amigos, miembros de la iglesia, vecinos). Se les expone entonces a un virus que causa los resfriados. Una adaptación de los resultados se muestra en la tabla.

	Número de relaciones		
	Tres o menos	Cuatro o cinco	Seis o más
Resfriado	49	43	34
No resfriado	31	57	62
Total	80	100	96

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la susceptibilidad a resfriados es afectada por el número de relaciones que se tenga? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

b. Con base en los resultados del inciso a), describa la naturaleza de la relación entre las dos variables categóricas: incidencia de resfriado y número de relaciones sociales. ¿Sus observaciones concuerdan con las conclusiones del autor?

MIS DATOS EX1490

14.60 Delincuencia y aprovechamiento educativo Un criminalista que estudia delincuentes con un récord de uno o más arrestos, está interesado en saber si el nivel de aprovechamiento educativo del transgresor influye en la frecuencia de arrestos. Ha clasificado estos datos usando cuatro clasificaciones de nivel educativo:

A: completó 6o. grado o menos

B: completó 7o., 8o. o 9o. grados

C: completó 10o., 11o. o 12o. grados

D: educación más del 12o. grado

La tabla de contingencia muestra el número de transgresores en cada categoría de educación, junto con el número de veces que han sido arrestados.

	Aprovechamiento educativo			
Número de arrestos	A	B	C	D
1	55	40	43	30
2	15	25	18	22
3 o más	7	8	12	10

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que el número de arrestos depende del aprovechamiento educativo de un delincuente? Pruebe usando $\alpha = .05$.

14.61 Más negocio los fines de semana La gerente de una tienda de departamentos dice que su tienda tiene el doble de clientes los viernes y sábados que cualquier otro día de la semana (que cierra los domingos). Esto es, la probabilidad de que un cliente visite la tienda en viernes es 2/8, la probabilidad que un cliente visite la tienda un sábado es 2/8, en tanto que la probabilidad de que un cliente visite la tienda en cada uno de los días de la semana restantes es 1/8. Durante una semana promedio, los números siguientes de clientes visitaron la tienda:

Día	Número de clientes
Lunes	95
Martes	110
Miércoles	125
Jueves	75
Viernes	181
Sábado	214

¿Puede ser refutada la gerente al nivel de significancia de $\alpha = .05$?

MI APPLET Ejercicios

14.62 Use el applet **Chi-Square Probabilities** para hallar el valor de χ^2 con la siguiente área α a su derecha:
a. $\alpha = .05$, $df = 15$ **b.** $\alpha = .01$, $df = 11$

14.63 Use el applet **Chi-Square Probabilities** para hallar la región de rechazo para una prueba ji cuadrada de probabilidades, especificada para una prueba de bondad de ajuste que contenga k categorías para los siguientes casos:
a. $k = 14$, $\alpha = .005$ **b.** $k = 3$, $\alpha = .05$

14.64 Use el applet **Chi-Square Probabilities** para calcular el valor p para las siguientes pruebas ji cuadrada:
a. $X^2 = .81$, $df = 3$ **b.** $X^2 = 25.40$, $df = 13$

14.65 Trescientas personas fueron encuestadas y se les pidió seleccionaran su marca preferida de computadora laptop, dado que los precios eran equivalentes. Los resultados se muestran en la tabla.

Marca I	Marca II	Marca III
115	120	65

Use el primer applet **Goodness-of-Fit** para determinar si los consumidores tienen preferencia por una de tres marcas. Si existe una diferencia significativa, describa la diferencia en términos prácticos. Use $\alpha = .01$.

14.66 En el ejercicio 14.13, se dio la distribución de colores de dulces M&M'S de chocolate con leche. Use el tercer applet **Goodness-of-Fit** para verificar los resultados del ejercicio 14.13. ¿Los datos comprueban los porcentajes publicados por Mars, Incorporate? Describa la naturaleza de las diferencias, si las hay.

14.67 Consulte la distribución de colores dada en el ejercicio 14.13. Usando una bolsa de tamaño individual de dulces de chocolate con leche M&M'S, cuente el número de dulces de cada uno de los seis colores. Use el tercer applet **Goodness-of-Fit** para determinar si los porcentajes publicados por Mars, Incorporated pueden comprobarse. Describa la naturaleza de las diferencias, si las hay.

14.68 Repita las instrucciones del ejercicio 14.67 con otra bolsa individual de dulces M&M'S. ¿Sus conclusiones son iguales?

14.69 Opinión y afiliación política Un grupo de 306 personas fue entrevistado para determinar sus opiniones respecto a un problema particular actual de política extranjera de Estados Unidos. Al mismo tiempo, se registró su afiliación política. ¿Los datos de la tabla presentan suficiente evidencia para indicar dependencia entre afiliación política y la opinión expresada para la población muestreada? Use el tercer applet **Chi-Square Test of Independence**.

	Aprueba	No aprueba	No opina
Republicanos	114	53	17
Demócratas	87	27	8

14.70 Un estudio de las decisiones de compra de tres gerentes de cartera de valores, A, B y C, fue realizado para comparar los números de acciones compradas que resultaron en utilidades en un periodo menor o igual a 1 año. Cien compras seleccionadas al azar fueron examinadas por cada uno de los gerentes. ¿Los datos dan suficiente evidencia de diferencias entre las tasas de compras exitosas para los tres gerentes? Use el tercer applet **Chi-Square Test of Independence**.

	A	B	C
Utilidad	63	71	55
No utilidad	37	29	45

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Biblioteca

¿Un método de marketing puede mejorar los servicios de una biblioteca?

Carole Day y Del Lowenthal estudiaron las respuestas de adultos jóvenes en su evaluación de servicios bibliotecarios.[23] De los $n = 200$ adultos jóvenes que intervinieron en el estudio, $n_1 = 152$ eran estudiantes y $n_2 = 48$ no eran estudiantes. La tabla siguiente presenta los porcentajes y números de respuestas favorables para cada grupo a siete preguntas en las que se examinaron la atmósfera, el personal y el diseño de la biblioteca.

Pregunta		Estudiante, Favorable	$n_1 = 152$	No estudiante, Favorable	$n_2 = 48$	$P(\chi^2)$
3	Las bibliotecas son amistosas	79.6%	121	56.2%	27	$<.01$
4	Las bibliotecas son aburridas	77	117	58.3	28	$<.05$
5	Personal de biblioteca no ayuda	91.4	139	87.5	42	NS
6	Personal de biblioteca ayudan menos a adolescentes	60.5	92	45.8	22	$<.01$
7	Las bibliotecas son tan silenciosas que son incómodas uncomfortable	75.6	115	52.05	25	$<.01$
11	Las bibliotecas deben estar decoradas con colores más vivos	29	44	18.8	9	NS
13	Las bibliotecas no tienen mal señalamiento	45.4	69	43.8	21	NS

Fuente: Datos de C. Day y D. Lowenthal, "The Use of Open Group Discussions in Marketing Library Services to Young Adults", por C. Day y D. Lowenthal, *British Journal of Educational Psychology,* 62(1992): 324-340.

La entrada de la última columna marcada $P(\chi^2)$ es el valor p para probar la hipótesis de que no hay diferencia en la proporción de estudiantes y no estudiantes que contestan cada pregunta favorablemente. En consecuencia, cada pregunta da lugar a una tabla de contingencia de 2×2.

1. Realice una prueba de homogeneidad para cada pregunta y verifique el valor p informado de la prueba.
2. Las preguntas 3, 4 y 7 son relativas a la atmósfera de la biblioteca; las preguntas 5 y 6 se ocupan del personal de biblioteca; y las preguntas 11 y 13 se relacionan al diseño de la biblioteca. ¿Cómo se resumirían los resultados de sus análisis con el diseño de la biblioteca? ¿Cómo resumiría los resultados de sus análisis respecto a estas siete preguntas relacionadas con la imagen de la biblioteca?
3. Con la información dada, ¿es posible hacer alguna prueba posterior respecto a la proporción de respuestas favorables contra no favorables para dos o más preguntas simultáneamente?

15

Estadísticas no paramétricas

OBJETIVO GENERAL

En los capítulos 8-10 presentamos técnicas estadísticas para comparar dos poblaciones contrastando sus respectivos parámetros poblacionales (por lo general sus medias poblacionales). Las técnicas de los capítulos 8 y 9 son aplicables a datos que son al menos cuantitativos y las del capítulo 10 son aplicables a datos que tienen distribuciones normales. El propósito de este capítulo es presentar varias pruebas estadísticas para comparar poblacionales para los numerosos tipos de datos que no satisfagan las suposiciones especificadas en los capítulos 8-10.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

¿Cómo está su nivel de colesterol?

¿Cuál es su nivel de colesterol? En los últimos años, muchos de nosotros nos hemos hecho más conscientes de nuestra salud cuando leemos las etiquetas de información nutrimental en productos que compramos y escogemos que sean bajos en grasas y colesterol y altos en fibras. El caso práctico del final de este capítulo contiene un experimento de prueba del sabor, para comparar tres tipos de sustitutos de huevo, usando técnicas no paramétricas.

15.1 INTRODUCCIÓN

Algunos experimentos generan respuestas que pueden ser ordenadas o clasificadas, pero el valor real de la respuesta no puede ser medido numéricamente excepto con una escala arbitraria que se puede crear. Puede ser que el experimentador diga sólo si una observación es mayor que otra. Quizá pueda clasificar todo un conjunto de observaciones sin saber en realidad los valores numéricos exactos de las mediciones. A continuación veamos unos cuantos ejemplos:

- La experiencia de ventas de cuatro vendedores son clasificadas de la mejor a la peor.
- Las características de comestible y sabor de cinco marcas de fibra de pasitas son clasificadas en una escala arbitraria de 1 a 5.
- Cinco diseños de automóvil son clasificados del más atractivo al menos atractivo.

MI CONSEJO

Cuando los tamaños muestrales sean pequeños y las poblaciones originales no sean normales, use técnicas no paramétricas.

¿Cómo pueden analizarse estos datos? Los métodos estadísticos de muestra pequeña presentados en los capítulos 10-13 son válidos sólo cuando la(s) población(es) muestreada(s) es(son) normal(es) o aproximadamente lo es(son). Los datos formados por rangos de escalas arbitrarias de 1 a 5 *no satisfacen la suposición de normalidad*, incluso a un grado razonable. En algunas aplicaciones, las técnicas son válidas si las muestras se toman al azar de entre poblaciones cuyas varianzas son iguales.

Cuando los datos no parecen satisfacer éstas y suposiciones similares, puede usarse un método alternativo, **métodos estadísticos no paramétricos**. Los métodos no paramétricos por lo general satisfacen las hipótesis en términos de distribuciones poblacionales más que parámetros por ejemplo medias y desviaciones estándar. Es frecuente que las suposiciones paramétricas sean sustituidas por suposiciones más generales acerca de las distribuciones poblacionales y las clasificaciones de las observaciones se usen a veces en lugar de las mediciones reales.

Investigaciones realizadas demuestran que las pruebas estadísticas no paramétricas son tan capaces de detectar diferencias entre poblaciones como los métodos paramétricos de capítulos anteriores, cuando se satisfacen la normalidad y otras suposiciones. Pueden ser y con frecuencia son, *más* potentes para detectar diferencias poblacionales cuando estas suposiciones no se satisfacen. Por esta razón, algunos estadísticos están a favor de usar procedimientos no paramétricos en preferencia a sus similares paramétricos.

Presentaremos métodos no paramétricos apropiados para comparar dos o más poblaciones usando ya sea muestras independientes o pareadas. También presentaremos una medida de asociación que es útil para determinar si una variable aumenta cuando la otra aumenta o si una variable disminuye cuando la otra aumenta.

15.2 LA PRUEBA DE SUMA DE RANGO DE WILCOXON: MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Al comparar las medias de dos poblaciones basadas en muestras independientes, el estadístico pivote era la diferencia en las medias muestrales. Si el experimentador no está seguro de que las suposiciones requeridas para una prueba t de dos muestras sea satisfecha, una alternativa es sustituir los valores de las observaciones por sus rangos y proceder como si éstos fueran las observaciones reales. Dos pruebas no paramétricas diferentes usan un estadístico de prueba basado en estos rangos de muestra:

- Prueba de suma de rango de Wilcoxon
- Prueba U de Mann-Whitney

Son *equivalentes* en que usan la misma información muestral. El procedimiento que presentaremos es la prueba de suma de rango de Wilcoxon, propuesto por Frank Wilcoxon, que está basado en la suma de los rangos de la muestra que tiene el tamaño muestral más pequeño.

Supongamos que tenemos n_1 observaciones de la población 1 y n_2 observaciones de la población 2. La hipótesis nula a probar es que las dos distribuciones poblacionales son idénticas, contra la hipótesis alternativa de que las distribuciones poblacionales son diferentes. Éstas son las posibilidades para las dos poblaciones:

- Si H_0 es verdadera y las observaciones han provenido de las mismas o idénticas poblaciones, entonces las observaciones de ambas muestras deben mezclarse al azar cuando conjuntamente sean de rango de pequeño a grande. La suma de los rangos de las observaciones de la muestra 1 debe ser similar a la suma de los rangos de la muestra 2.
- Si, por el contrario, las observaciones de la población 1 tienden a ser más pequeñas que las de la población 2, entonces estas observaciones tendrían los rangos más pequeños porque la mayor parte de éstas serían más pequeñas que las de la población 2. La suma de los rangos de ellas sería "pequeña".
- Si las observaciones de la población 1 tienden a ser más grandes que las de la población 2, se les asignarían rangos más grandes. La suma de sus rangos de estas últimas tenderían a ser "grandes".

Por ejemplo, supongamos que tenemos $n_1 = 3$ observaciones de la población 1, es decir, 2, 4 y 6, y $n_2 = 4$ observaciones de la población 2, o sea 3, 5, 8 y 9. La tabla 15.1 muestra siete observaciones ordenadas de pequeñas a grandes.

TABLA 15.1 **Siete observaciones en orden**

Observación	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	y_4
Datos	2	3	4	5	6	8	9
Rango	1	2	3	4	5	6	7

A la observación más pequeña, $x_1 = 2$, se le asigna el rango 1; a la siguiente observación más pequeña, $y_1 = 3$, se le asigna el rango 2; y así sucesivamente. La *suma de los rangos* de las observaciones de la muestra 1 es $1 + 3 + 5 = 9$ y la **suma de rangos** de la muestra 2 es $2 + 4 + 6 + 7 = 19$. ¿Cómo se determina si la suma de rangos de las observaciones de la muestra 1 es significativamente pequeña o significativamente grande? Esto depende de la distribución de probabilidad de la suma de rangos de una de las muestras. Como los rangos para $n_1 + n_2 = N$ observaciones son los primeros N enteros, se puede demostrar que la suma de estos rangos es $N(N + 1)/2$. En este sencillo ejemplo, la suma de $N = 7$ rangos es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 7(8)/2$ o sea 28. En consecuencia, si el experimentador conoce la suma de rangos para una de las muestras, puede hallar la otra por sustracción. En nuestro ejemplo, observe que la suma de rangos para la muestra 1 es 9, en tanto que la segunda suma de rangos es $(28 - 9) = 19$. Esto significa que sólo una de las dos sumas de rangos es necesaria para la prueba. Para simplificar la tabulación de valores críticos para esta prueba, debe usarse la suma de rangos de la muestra más pequeña como estadístico de prueba. ¿Qué ocurre si dos o más observaciones son iguales? A observaciones empatadas se les asigna el promedio de los rangos que tendrían las observaciones si hubieran sido ligeramente diferentes en valor.

Para poner en práctica la prueba de la suma de rangos de Wilcoxon, supongamos que las muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 se seleccionan de las poblaciones 1 y 2, respectivamente. Representemos con n_1 al *menor* de los tamaños muestrales y con T_1 representemos la suma de los rangos de las observaciones de la muestra 1. Si la población 1 está a la izquierda de la población 2, T_1 será "pequeña". T_1 será "grande" si la población 1 está a la derecha de la 2.

FÓRMULAS PARA EL ESTADÍSTICO DE LA SUMA DE RANGOS DE WILCOXON (PARA MUESTRAS INDEPENDIENTES)

Sean

T_1 = Suma de rangos para la primera muestra
$T_1^* = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T_1$

T_1^* es el valor de la suma de rangos para n_1 si las observaciones se hubieran ordenado de *grande a pequeña*. (*No* es la suma de rangos para la segunda muestra.) Dependiendo de la naturaleza de la hipótesis alternativa, uno de estos dos valores se escogerá como estadístico de prueba, T.

La tabla 7 del apéndice I se puede usar con el fin de localizar *valores críticos* para el estadístico de prueba para cuatro valores diferentes de pruebas de una cola con $\alpha = .05$, .025, .01 y .005. Para usar la tabla 7 para una prueba de dos colas, los valores de α se duplican, es decir, $\alpha = .10$, .05, .02 y .01. La entrada de la tabla da el valor de a tal que $P(T \leq a) \leq \alpha$. Con la intención de ver cómo localizar un valor crítico para la prueba de suma de rango de Wilcoxon, suponga que $n_1 = 8$ y $n_2 = 10$ para una prueba de una cola con $\alpha = .05$. Se puede usar la tabla 7*a*), una parte de la cual se reproduce en la tabla 15.2. Observe que la tabla está construida suponiendo que $n_1 \leq n_2$. Es por esta razón que designamos la población con el tamaño muestral más pequeño como población 1. Los valores de n_1 se muestran en sentido horizontal en la parte superior de la tabla y los de n_2 se muestran en sentido vertical al lado izquierdo. La entrada $a = 56$, sombreada, es el valor crítico para rechazar H_0. La hipótesis nula de igualdad de las dos distribuciones debe ser rechazada si el valor observado del estadístico de prueba T es menor o igual a 56.

TABLA 15.2 **Parte de los valores críticos de cola izquierda al 5%, tabla 7 del apéndice I**

	n_1						
n_2	2	3	4	5	6	7	8
3	—	6					
4	—	6	11				
5	3	7	12	19			
6	3	8	13	20	28		
7	3	8	14	21	29	39	
8	4	9	15	23	31	41	51
9	4	10	16	24	33	43	54
10	4	10	17	26	35	45	56

PRUEBA DE LA SUMA DE RANGO DE WILCOXON

Con n_1 denotemos la más pequeña de las dos muestras. Esta muestra proviene de la población 1. Las hipótesis a probar son

H_0 : Las distribuciones para las poblaciones 1 y 2 son idénticas

versus una de las tres hipótesis alternativas:

H_a : Las distribuciones para las poblaciones 1 y 2 son diferentes (una prueba de dos colas)

H_a : La distribución para la población 1 está a la izquierda de la de la población 2 (una prueba de cola izquierda)

H_a : La distribución para la población 1 está a la derecha de la de la población 2 (una prueba de cola derecha)

1. Ordene todas las $n_1 + n_2$ observaciones de pequeña a grande.
2. Encuentre T_1, la suma de rangos para las observaciones de la muestra 1. Éste es el estadístico de prueba para la prueba de cola izquierda.
3. Encuentre $T_1^* = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T_1$, la suma de los rangos de las observaciones de la población 1 si los rangos asignados se hubieran invertido de grandes a pequeños. (El valor de T_1^* no es la suma de los rangos de las observaciones de la muestra 2.) Éste es el estadístico de prueba para una prueba de cola derecha.
4. El estadístico de prueba para una prueba de dos colas es T, la *mínima* de T_1 y T_1^*.
5. H_0 es rechazada si el estadístico de prueba observado es menor o igual al valor crítico hallado usando la tabla 7 del apéndice I.

Ilustramos el uso de la tabla 7 con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 15.1

Las frecuencias de aleteo de dos especies de abejas Euglossine fueron registradas para una muestra de $n_1 = 4$ *Euglossa mandibularis* Friese (especie 1) y $n_2 = 6$ *Euglossa imperialis* Cockerell (especie 2).[1] Las frecuencias se detallan en la tabla 15.3. ¿Puede usted concluir que las distribuciones de aleteo difieren para estas dos especies? Pruebe usando $\alpha = .05$.

TABLA 15.3 **Frecuencias de aleteo para dos especies de abejas**

Especie 1	Especie 2
235	180
225	169
190	180
188	185
	178
	182

Solución Primero es necesario ordenar las frecuencias de pequeña a grande, como se observa en la tabla 15.4.

TABLA 15.4 **Frecuencias de aleteo ordenadas de pequeña a grande**

Datos	Especie	Orden
169	2	1
178	2	2
180	2	3
180	2	4
182	2	5
185	2	6
188	1	7
190	1	8
225	1	9
235	1	10

Las hipótesis a probar son

H_0 : Las distribuciones de las frecuencias de aleteo son las mismas para las dos especies

contra

H_a : Las distribuciones de las frecuencias de aleteo difieren para las dos especies

Como el tamaño muestral para individuos de la especie 1, $n_1 = 4$, es el más pequeño de los dos tamaños muestrales, tenemos

$$T_1 = 7 + 8 + 9 + 10 = 34$$

y

$$T_1^* = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T_1 = 4(4 + 6 + 1) - 34 = 10$$

Para una prueba de dos colas, el estadístico de prueba es $T = 10$, la menor de $T_1 = 34$ y $T_1^* = 10$.

Para esta prueba de dos colas con $\alpha = .05$, el experimentador puede usar la tabla 7*b*) del apéndice I con $n_1 = 4$ y $n_2 = 6$. El valor crítico de T tal que $P(T \le a) \le \alpha/2 = .025$ es 12, y se debe rechazar la hipótesis nula si el valor observado de T es 12 o menos. Como el valor observado del estadístico de prueba, $T = 10$, es menor a 12, se puede rechazar la hipótesis de iguales distribuciones de frecuencias de aleteo al nivel de significancia de 5%.

Una salida impresa *MINITAB* de la prueba de suma de rango de Wilcoxon (llamada Mann-Whitney por *MINITAB*) para estos datos se da en la figura 15.1. Al final de este capítulo se encuentran instrucciones para generar esta salida impresa en la sección "Mi *MINITAB*" al final de este capítulo. Observe que la suma de rango de la primera muestra se da como W = 34.0, que concuerda con nuestros cálculos. Con un valor p reportado de .0142 calculado por *MINITAB*, se puede rechazar la hipótesis nula al nivel de 5%.

FIGURA 15.1

Salida impresa para el ejemplo 15.1

Prueba Mann-Whitney y CI: especie 1, especie 2

```
             N     Median
Species 1    4     207.50
Species 2    6     180.00

Point estimate for ETA1-ETA2 is 30.50
95.7 Percent CI for ETA1-ETA2 is (5.99,56.01)
W = 34.0
Test of ETA1 = ETA2 vs ETA1 not = ETA2 is significant at 0.0142
The test is significant at 0.0139 (adjusted for ties)
```

Aproximación normal a la prueba de suma de rango de Wilcoxon

La tabla 7 del apéndice I contiene valores críticos para tamaños muestrales de $n_1 \le n_2 = 3, 4, \ldots, 15$. Siempre que n_1 no sea demasiado pequeña,† las aproximaciones a las probabilidades para el estadístico T de la suma de rango de Wilcoxon se pueden hallar usando una aproximación normal a la distribución de T. Se puede demostrar que la media y varianza de T son

$$\mu_T = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} \quad \text{y} \quad \sigma_T^2 = \frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

† Algunos investigadores indican que la aproximación normal es adecuada para muestras de hasta sólo $n_1 = n_2 = 4$.

La distribución de

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$

es aproximadamente normal con media 0 y desviación estándar 1 para valores de n_1 y n_2 de sólo 10.

Si se intenta esta aproximación para el ejemplo 15.1, se obtiene

$$\mu_T = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{4(4 + 6 + 1)}{2} = 22$$

y

$$\sigma_T^2 = \frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{4(6)(4 + 6 + 1)}{12} = 22$$

El valor p para esta prueba es $2P(T \geq 34)$. Si se usa una corrección de .5 para continuidad al calcular el valor de z porque n_1 y n_2 son pequeñas,† tenemos

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{(34 - .5) - 22}{\sqrt{22}} = 2.45$$

El valor p para esta prueba es

$$2P(T \geq 34) \approx 2P(z \geq 2.45) = 2(.0071) = .0142$$

el valor informado de la salida impresa *MINITAB* de la figura 15.1.

PRUEBA DE LA SUMA DE RANGO DE WILCOXON PARA MUESTRAS GRANDES: $n_1 \geq 10$ Y $n_2 \geq 10$

1. Hipótesis nula: H_0 : Las distribuciones de población son idénticas
2. Hipótesis alternativa: H_a : Las dos distribuciones poblacionales no son idénticas (una prueba de dos colas); o H_a : La distribución de la población 1 se corre a la derecha (o a la izquierda) de la distribución de la población 2 (una prueba de una cola).
3. Estadístico de prueba: $z = \dfrac{T - n_1(n_1 + n_2 + 1)/2}{\sqrt{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)/12}}$
4. Región de rechazo:
   a. Para una prueba de dos colas, rechace H_0 si $z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$.
   b. Para una prueba de una cola en la cola derecha, rechace H_0 si $z > z_\alpha$.
   c. Para una prueba de una cola en la cola izquierda, rechace H_0 si $z < -z_\alpha$.

O rechace H_0 si el valor p es $< \alpha$.

Los valores tabulados de z se encuentran en la tabla 3 del apéndice I.

EJEMPLO 15.2

Se realizó un experimento para comparar las resistencias de dos tipos de papel de estraza: un papel de estraza estándar de un peso especificado y otro es el mismo papel tratado con una sustancia química. Diez piezas de cada tipo de papel, seleccionadas al azar de entre la producción, produjeron las mediciones de resistencia que se muestran en la tabla 15.5. Pruebe la hipótesis nula de no diferencia en las distribuciones de resistencias para los

† Como el valor de $T = 34$ está a la derecha de la media 22, la resta de .5 al usar la aproximación normal toma en cuenta el límite inferior de la barra arriba del valor 34 en la distribución de probabilidad de T.

dos tipos de papel contra la hipótesis alternativa de que el papel tratado tiende a ser más fuerte (es decir, su distribución de mediciones de resistencia se corre a la derecha de la distribución correspondiente para el papel no tratado).

TABLA 15.5 **Mediciones de resistencia (y sus rangos) para dos tipos de papel**

Estándar 1	Tratado 2
1.21 (2)	1.49 (15)
1.43 (12)	1.37 (7.5)
1.35 (6)	1.67 (20)
1.51 (17)	1.50 (16)
1.39 (9)	1.31 (5)
1.17 (1)	1.29 (3.5)
1.48 (14)	1.52 (18)
1.42 (11)	1.37 (7.5)
1.29 (3.5)	1.44 (13)
1.40 (10)	1.53 (19)
Suma de rango	$T_1 = 85.5$
	$T_1^* = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T_1 = 210 - 85.5 = 124.5$

Solución Como los tamaños muestrales son iguales, estamos en libertad de decidir cuál de las dos muestras debe ser la muestra 1. Si se escoge el tratamiento estándar como la primera muestra, se pueden clasificar 20 mediciones de resistencia y los valores de T_1 y T_1^* se ven en la parte inferior de la tabla. Como se desea detectar un corrimiento en las mediciones estándar (1) a la izquierda de las mediciones tratadas (2), se realiza una prueba de cola izquierda:

H_0 : No hay diferencia en las distribuciones de resistencia

H_a : La distribución estándar se encuentra a la izquierda de la distribución tratada

y se usa $T = T_1$ como el estadístico de prueba, buscando un valor inusualmente pequeño de T.

Para hallar el valor crítico para una prueba de una cola con $\alpha = .05$, indicemos de la tabla 7*a*) del apéndice I con $n_1 = n_2 = 10$. Usando la entrada de la tabla, se puede rechazar H_0 cuando $T \leq 82$. Como el valor observado del estadístico de prueba es $T = 85.5$, no se puede rechazar H_0. Hay suficiente evidencia para concluir que el papel de estraza tratado es más fuerte que el papel estándar.

Para usar la aproximación normal a la distribución de T, se puede calcular

$$\mu_T = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{10(21)}{2} = 105$$

y

$$\sigma_T^2 = \frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{10(10)(21)}{12} = 175$$

con $\sigma_T = \sqrt{175} = 13.23$. Entonces

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{85.5 - 105}{13.23} = -1.47$$

El valor p de una cola correspondiente a $z = -1.47$ es

$$\text{valor } p = P(z \leq -1.47) = .5 - .4292 = .0708$$

que es mayor que $\alpha = .05$. La conclusión es la misma. No se puede concluir que el papel de estraza tratado sea más fuerte que el papel estándar.

¿Cuándo se puede usar la prueba de la suma de rango de Wilcoxon en preferencia a la prueba t no pareada de dos muestras? La prueba t de dos muestras funciona bien si los datos están normalmente distribuidos con varianzas iguales. Si hay duda respecto a estas suposiciones, puede usarse una gráfica de probabilidad normal para evaluar el grado de no normalidad y se puede usar una prueba F de dos muestras de varianzas muestrales para verificar la igualdad de varianzas. Si estos procedimientos indican ya sea no normalidad o desigualdad de varianza, entonces es apropiada la prueba de la suma de rango de Wilcoxon.

15.2 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

15.1 Supongamos que se desea usar la prueba de la suma de rangos de Wilcoxon, para detectar un corrimiento en la distribución 1 a la derecha de la distribución 2, con base en muestras de tamaño $n_1 = 6$ y $n_2 = 8$.

a. ¿Se debe usar T_1 o T^*_1 como el estadístico de prueba?

b. ¿Cuál es la región de rechazo para la prueba si $\alpha = .05$?

c. ¿Cuál es la región de rechazo para la prueba si $\alpha = .01$?

15.2 Consulte el ejercicio 15.1. Suponga que la hipótesis alternativa es que la distribución 1 se corre ya sea a la izquierda o a la derecha de la distribución 2.

a. ¿Se debe usar T_1 o T^*_1 como el estadístico de prueba?

b. ¿Cuál es la región de rechazo para la prueba si $\alpha = .05$?

c. ¿Cuál es la región de rechazo para la prueba si $\alpha = .01$?

15.3 Observaciones de dos muestras aleatorias e independientes, tomadas de las poblaciones 1 y 2, se dan aquí. Use la prueba de la suma de rango de Wilcoxon para determinar si la población 1 está corrida a la izquierda de la población 2.

Muestra 1	1	3	2	3	5
Muestra 2	4	7	6	8	6

a. Exprese la hipótesis nula y alternativa a probar.

b. Ordene la muestra combinada de menor a mayor. Calcule T_1 y T^*_1.

c. ¿Cuál es la región de rechazo para $\alpha = .05$?

d. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que la población 1 está corrida a la izquierda de la población 2?

15.4 Muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 = 20$ y $n_2 = 25$ se toman de las poblaciones 1 y 2 no normales. La muestra combinada está ordenada y $T_1 = 252$. Use la aproximación de muestra grande a la prueba de la suma de rango de Wilcoxon para determinar si hay una diferencia en las dos distribuciones de población. Calcule el valor p para la prueba.

15.5 Supongamos que se desea detectar un corrimiento en la distribución 1 a la derecha de la distribución 2, con base en tamaños muestrales $n_1 = 12$ y $n_2 = 14$. Si $T_1 = 193$, ¿qué se concluye? Use $\alpha = .05$.

APLICACIONES

15.6 Enfermedad de Alzheimer En algunas pruebas de salud en ancianos, un nuevo medicamento ha restaurado su memoria casi como la de jóvenes. Pronto se probará en pacientes con enfermedad de Alzheimer, esa fatal enfermedad del cerebro que destruye la mente. Según el Dr. Gary Lynch, de la Universidad de California en Irvine, el medicamento, llamado ampakina CX-516, acelera señales entre células cerebrales que parecen agudizar significativamente la memoria.[2] En una prueba preliminar en estudiantes de poco más de 20 años y en hombres de entre 65 y 70 años de edad, los resultados fueron particularmente sorprendentes. Después de recibir dosis moderadas de este medicamento, las personas de entre 65 y 70 años de edad calificaron casi tan alto como los jóvenes. Los datos siguientes son los números de sílabas sin sentido recordadas después de 5 minutos, para 10 hombres de poco más de 20 años de edad y 10 señores de entre 65 y 70 años. Use la prueba de la suma de rango de Wilcoxon para determinar si las distribuciones para el número de sílabas sin sentido recordadas son iguales para estos dos grupos.

20s	3	6	4	8	7	1	1	2	7	8
65-70s	1	0	4	1	2	5	0	2	2	3

15.7 Alzheimer, continúa Consulte el ejercicio 15.6. Suponga que dos grupos más de 10 hombres cada uno son probados sobre el número de sílabas sin sentido que podían recordar después de 5 minutos. No obstante, a los señores de entre 65 y 70 se les da una dosis moderada de ampakina CX-516. ¿Los datos dan suficiente evidencia para concluir que este medicamento mejora la memoria en pacientes de entre 65 y 70 años en comparación con los de poco más de 20 años? Use un nivel apropiado de α.

20s	11	7	6	8	6	9	2	10	3	6
65-70s	1	9	6	8	7	8	5	7	10	3

15.8 Contenido de oxígeno disuelto Las observaciones de la tabla son el contenido de oxígeno disuelto en agua. Cuanto más alto el contenido de oxígeno disuelto, mayor es la capacidad de un río, lago o arroyo para sostener fauna acuática. En este experimento, un inspector de control de contaminación sospechaba que una comunidad ribereña estaba descargando aguas negras tratadas sólo en parte hacia un río. Para comprobar esta teoría, cinco especímenes de agua de río, tomados al azar, se seleccionaron en un lugar aguas arriba del pueblo y, otras cinco, aguas abajo. Éstas son las lecturas de oxígeno disuelto (en partes por millón):

Aguas arriba	4.8	5.2	5.0	4.9	5.1
Aguas abajo	5.0	4.7	4.9	4.8	4.9

a. Use una prueba de suma de rango de Wilcoxon de una cola con $\alpha = .05$ para confirmar o refutar la teoría.

b. Use una prueba t de Student (con $\alpha = .05$) para analizar los datos. Compare la conclusión alcanzada en el inciso a).

MIS DATOS EX1509

15.9 Movimiento de ojos En una investigación del comportamiento de exploración visual de niños sordos, se tomaron medidas del movimiento de ojos en nueve niños sordos y nueve que sí escuchaban. La tabla siguiente da la rapidez de movimiento de ojos y sus rangos (en paréntesis). ¿Le parece que difieren las distribuciones de la rapidez de movimiento de ojos de niños sordos y de niños que sí escuchan?

	Niños sordos	Niños que sí escuchan
	2.75 (15)	.89 (1)
	2.14 (11)	1.43 (7)
	3.23 (18)	1.06 (4)
	2.07 (10)	1.01 (3)
	2.49 (14)	.94 (2)
	2.18 (12)	1.79 (8)
	3.16 (17)	1.12 (5.5)
	2.93 (16)	2.01 (9)
	2.20 (13)	1.12 (5.5)
Suma de rango	126	45

15.10 Televisores a color La tabla siguiente es una lista de la vida útil (en meses) de servicio antes de fallar, en una tarjeta de circuitos de televisión a color, para ocho aparatos de la firma A y 10 de la firma B. Use la prueba de suma de rango de Wilcoxon para analizar los datos y pruebe para ver si la vida de servicio antes de falla de las tarjetas de circuitos difiere para las tarjetas de circuitos producidas por los dos fabricantes.

Firma	Duración de tarjeta de circuitos (meses)									
A	32	25	40	31	35	29	37	39		
B	41	39	36	47	45	34	48	44	43	33

MIS DATOS EX1511

15.11 Pesos de tortugas Los pesos de tortugas capturadas en dos lagos diferentes se midieron para comparar los efectos de los ambientes de los dos lagos en el crecimiento de las tortugas. Todas las tortugas eran de la misma edad y fueron marcadas antes de soltarlas en los lagos. A continuación veamos los pesos para $n_1 = 10$ tortugas marcadas y capturadas en el lago 1 y $n_2 = 8$ capturadas en el lago 2:

Lago	Pesos (onzas)									
1	14.1	15.2	13.9	14.5	14.7	13.8	14.0	16.1	12.7	15.3
2	12.2	13.0	14.1	13.6	12.4	11.9	12.5	13.8		

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las distribuciones de peso para las tortugas marcadas, expuestas a los ambientes de los dos lagos? Use la prueba de la suma de rango de Wilcoxon con $\alpha = .05$ para contestar la pregunta.

MIS DATOS EX1512

15.12 Quimioterapia El tratamiento de cáncer por medios químicos, llamado quimioterapia, mata células cancerosas y células normales. En algunos casos, la toxicidad del medicamento para el cáncer, es decir, su efecto sobre células normales, puede reducirse con la inyección simultánea de un segundo medicamento. Se realizó un estudio para determinar si la inyección de un medicamento en particular reducía los efectos dañinos de un tratamiento de quimioterapia en el tiempo de sobrevivencia de ratas. Dos grupos de 12 ratas seleccionados al azar se emplearon en un experimento en el que ambos grupos, llamémoslos A y B, recibieron la droga tóxica en una dosis lo suficientemente grande para causarles la muerte, pero, además, el grupo B recibió la antitoxina que iba a reducir el efecto tóxico de la quimioterapia en células normales. La prueba finalizó al término de 20 días, o sea, 480 horas. Los tiempos de sobrevivencia para los dos grupos de ratas, a las 4 horas más cercanas, se muestran en la tabla siguiente. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que las ratas que recibieron la antitoxina tienden a sobrevivir más después de la quimioterapia que las que no recibieron la antitoxina? Use la prueba de la suma de rango de Wilcoxon con $\alpha = .05$.

Sólo quimioterapia A	Quimioterapia más droga B
84	140
128	184
168	368
92	96
184	480
92	188
76	480
104	244
72	440
180	380
144	480
120	196

15.3 LA PRUEBA DEL SIGNO PARA UN EXPERIMENTO PAREADO

La prueba del signo es un procedimiento relativamente sencillo que se puede usar para comparar dos poblaciones cuando las muestras consisten en observaciones pareadas. Este tipo de diseño experimental se denomina diseño de **diferencia pareada** o **pares comparados**, que en la sección 10.5 se usaron para comparar el promedio de desgaste para dos tipos de llantas. En general, para cada par, se mide si la primera respuesta, por ejemplo A, excede a la segunda respuesta, por ejemplo a B. El estadístico de prueba es x, el número de veces que A excede a B en los n pares de observaciones.

Cuando las dos distribuciones poblacionales son idénticas, la probabilidad de que A exceda a B es igual a $p = .5$, y x, el número de veces que A excede a B, tiene una distribución *binomial*. Sólo pares sin empates se incluyen en la prueba. En consecuencia, se puede probar la hipótesis de distribuciones poblacionales idénticas al probar $H_0 : p = .5$ contra una alternativa ya sea de una o dos colas. Los valores críticos para la región de rechazo o valores p exactos se pueden hallar usando las tablas binomiales acumulativas del apéndice I.

LA PRUEBA DEL SIGNO PARA COMPARAR DOS POBLACIONES

1. Hipótesis nula: H_0 : Las dos distribuciones poblacionales son idénticas y $P(\text{A excede a B}) = p = .5$
2. Hipótesis alternativa:
   a. H_a : Las distribuciones poblacionales no son idénticas y $p \neq .5$
   b. H_a : La población de A mediciones se corre a la derecha de la población de B mediciones y $p > .5$
   c. H_a : La población de A mediciones se corre a la izquierda de la población de B mediciones y $p < .5$
3. Estadístico de prueba: Para n, el número de pares sin empates, use x, el número de veces que $(\text{A} - \text{B})$ es positivo.
4. Región de rechazo:
   a. Para la prueba de dos colas $H_a : p \neq .5$, rechazar H_0 si $x \leq x_L$ o $x \geq x_U$, donde $P(x \leq x_L) \leq \alpha/2$ y $P(x \geq x_U) \leq \alpha/2$ para x que tenga una distribución binomial con $p = .5$.
   b. Para $H_a : p > .5$, rechazar H_0 si $x \geq x_U$ con $P(x \geq x_U) \leq \alpha$.
   c. Para $H_a : p < .5$, rechazar H_0 si $x \leq x_L$ con $P(x \leq x_L) < \alpha$.

O calcule el valor p y rechace H_0 si el valor $p < \alpha$.

Un problema que puede ocurrir cuando se está realizando una prueba del signo es que las mediciones asociadas con uno o más pares pueden ser iguales y, por tanto, resultan en **observaciones empatadas**. Cuando esto ocurra, elimine los pares empatados y reduzca n, el número total de pares. El ejemplo siguiente le ayudará a entender cómo se construye y utiliza la prueba del signo.

EJEMPLO 15.3

Los números de fusibles eléctricos defectuosos producidos por dos líneas de producción, A y B, se registraron a diario durante un periodo de 10 días, con los resultados mostrados en la tabla 15.6. La variable de respuesta, el número de fusibles defectuosos, tiene una distribución binomial exacta con un gran número de fusibles producidos por día. Aun cuando esta variable tendrá aproximadamente una distribución normal, el supervisor de planta preferiría una prueba estadística rápida y fácil para determinar si una línea de producción tiende a producir más fusibles defectuosos que la otra. Use la prueba del signo para probar la hipótesis apropiada.

TABLA 15.6 **Fusibles defectuosos de dos líneas de producción**

Día	Línea A	Línea B	Signo de diferencia
1	170	201	−
2	164	179	−
3	140	159	−
4	184	195	−
5	174	177	−
6	142	170	−
7	191	183	+
8	169	179	−
9	161	170	−
10	200	212	−

Solución Para este experimento de *diferencia pareada*, x es el número de veces que la observación de la línea A excede la de la línea B en un día determinado. Si no hay diferencia en las distribuciones de fusibles defectuosos para las dos líneas, entonces p, la proporción de días en la que A excede a B, es .5, que es el valor hipotético en una prueba del parámetro binomial p. Valores muy pequeños o muy grandes de x, el número de veces que A excede de B, son contrarios a la hipótesis nula.

Como $n = 10$ y el valor hipotético de p es .5, la tabla 1 del apéndice I se puede usar para hallar el valor p exacto para la prueba de

$$H_0 : p = .5 \text{ contra } H_a : p \neq .5$$

El valor observado del estadístico de prueba, que es el número de signos "más" en la tabla, es $x = 1$, y el valor p se calcula como

$$\text{valor } p = 2P(x \leq 1) = 2(.011) = .022$$

El valor p más bien pequeño $= .022$ permite rechazar H_0 al nivel de 5%. Hay evidencia significativa para indicar que el número de fusibles defectuosos no es el mismo para las dos líneas de producción; de hecho, la línea B produce más fusibles defectuosos que la A. En este ejemplo, la prueba del signo es una herramienta aproximada, fácil de calcular, para detectar líneas de producción con falla y funciona perfectamente bien para detectar una diferencia significativa usando sólo una cantidad mínima de información.

Aproximación normal para la prueba del signo

Cuando el número de pares n es grande, los valores críticos para el rechazo de H_0 y los valores p aproximados se pueden hallar usando una aproximación normal a la distribución de x, que se estudió en la sección 6.4. Debido a que la distribución binomial es perfectamente simétrica cuando $p = .5$, esta aproximación funciona muy bien, incluso para n de sólo 10.

Para $n \geq 25$, se puede efectuar la prueba del signo usando el estadístico z,

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{x - .5n}{.5\sqrt{n}}$$

como el estadístico de prueba. Al usar z, se prueba la hipótesis nula $p = .5$ contra la alternativa $p \neq .5$ para una prueba de dos colas o contra la alternativa $p > .5$ (o $p < .5$) para una prueba de una cola. Las pruebas usan las conocidas regiones de rechazo del capítulo 9.

PRUEBA DEL SIGNO PARA MUESTRAS GRANDES: $n \geq 25$

1. La hipótesis nula: $H_0 : p = .5$ (un tratamiento no se prefiere a un segundo tratamiento).
2. Hipótesis alternativa: $H_a : p \neq .5$, para una prueba de dos colas (NOTA: Usamos la prueba de dos colas como ejemplo. Muchos análisis podrían requerir una prueba de una cola.)
3. Estadístico de prueba: $z = \dfrac{x - .5n}{.5\sqrt{n}}$
4. Región de rechazo: Rechace H_0 si $z \geq z_{\alpha/2}$ o $z \leq -z_{\alpha/2}$, donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z de la tabla 3 del apéndice I correspondiente a un área de $\alpha/2$ en la cola superior de la distribución normal.

EJEMPLO 15.4

Un superintendente de producción dice que no hay diferencia entre los porcentajes de accidentes de empleados en turnos de día o de noche en una gran planta manufacturera. El número diario de accidentes se registran para los turnos de día y de noche durante $n = 100$ días. Se encuentra que el número diario de accidentes en el turno de noche x_E excedió al número correspondiente de accidentes en el turno de día x_D en 63 de los 100 días. ¿Estos resultados dan suficiente evidencia para indicar que más accidentes tienden a ocurrir en un turno que en el otro, o bien, lo que es equivalente, que $P(x_E > x_D) \neq 1/2$?

Solución Este estudio es un experimento de diferencia pareada, con $n = 100$ pares de observaciones correspondientes a los 100 días. Para probar la hipótesis nula de que las dos distribuciones de accidentes son idénticas, se puede usar el estadístico de prueba

$$z = \frac{x - .5n}{.5\sqrt{n}}$$

donde x es la cantidad de días en el que el número de accidentes en el turno de noche excedió al de accidentes en el turno de día. Entonces, para $\alpha = .05$, se puede rechazar la hipótesis nula si $z \geq 1.96$ o $z \leq -1.96$. Sustituyendo en la fórmula para z, se obtiene

$$z = \frac{x - .5n}{.5\sqrt{n}} = \frac{63 - (.5)(100)}{.5\sqrt{100}} = \frac{13}{5} = 2.60$$

Como el valor calculado de z excede de $z_{\alpha/2} = 1.96$, se puede rechazar la hipótesis nula. Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las distribuciones del porcentaje de accidentes para el turno de día contra el de noche.

¿Cuándo debe usarse la prueba del signo en preferencia a la prueba t? Cuando se da sólo la *dirección* de la diferencia en la medición, *sólo* se puede usar la prueba del signo. Por el contrario, cuando los datos son cuantitativos y satisfacen las suposiciones de normalidad y varianza constante, debe usarse la prueba t pareada. Se puede usar una gráfica de probabilidad normal para evaluar normalidad, en tanto que una gráfica de los residuales $(d_i - \bar{d})$ puede revelar grandes desviaciones que podrían indicar una varianza que varía de un par a otro. Cuando haya dudas acerca de la validez de las suposiciones, los estadísticos recomiendan con frecuencia que se realicen ambas pruebas. Si las dos llegan a las mismas conclusiones, entonces los resultados de la prueba paramétrica pueden considerarse válidos.

15.3 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

15.13 Supongamos que se desea usar la prueba del signo para probar $H_a : p > .5$ para un experimento de diferencia pareada con $n = 25$ pares.

a. Exprese la situación práctica que dicta la hipótesis alternativa dada.

b. Use la tabla 1 del apéndice I para hallar valores de α ($\alpha < .15$) disponible para la prueba.

15.14 Repita las instrucciones del ejercicio 15.13 para $H_a : p \neq .5$.

15.15 Repita las instrucciones de los ejercicios 15.13 y 15.14 para $n = 10$, 15 y 20.

MIS DATOS EX1516 **15.16** Se realizó un experimento de diferencia pareada para comparar dos poblaciones. Los datos se muestran en la tabla siguiente. Use la prueba del signo para determinar si las distribuciones poblacionales son diferentes.

	Pares						
Población	1	2	3	4	5	6	7
1	8.9	8.1	9.3	7.7	10.4	8.3	7.4
2	8.8	7.4	9.0	7.8	9.9	8.1	6.9

a. Exprese la hipótesis nula y alternativa para la prueba.

b. Determine una región de rechazo apropiada con $\alpha \approx .01$.

c. Calcule el valor observado del estadístico de prueba.

d. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que las poblaciones 1 y 2 son diferentes?

APLICACIONES

MIS DATOS EX1517 **15.17 Valores de propiedades** En el ejercicio 10.45 comparamos las evaluaciones de propiedades de dos asesores de impuestos, A y B. Sus evaluaciones para ocho propiedades se muestran en la tabla:

Propiedad	Asesor A	Asesor B
1	76.3	75.1
2	88.4	86.8
3	80.2	77.3
4	94.7	90.6
5	68.7	69.1
6	82.8	81.0
7	76.1	75.3
8	79.0	79.1

a. Use la prueba del signo para determinar si los datos presentan evidencia suficiente para indicar que uno de los asesores tiende a ser consistentemente más conservador que el otro; es decir, $P(x_A > x_B) \neq 1/2$. Pruebe usando un valor de α cercano a .05. Encuentre el valor p para la prueba e interprete su valor.

b. El ejercicio 10.45 usa el estadístico t para probar la hipótesis nula de que no hay diferencia en las evaluaciones medias de propiedades entre los asesores A y B. Compruebe la respuesta (en la sección de respuestas) para el ejercicio 10.45 y compárela con su respuesta al inciso a). ¿Concuerdan los resultados de la prueba? Explique por qué las respuestas son (o no son) consistentes.

MIS DATOS EX1518 **15.18 Cocina de gourmet** Dos gourmets, A y B, calificaron 22 comidas en una escala del 1 al 10. Los datos se muestran en la tabla. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que uno de los gourmets tiende a dar calificaciones más altas que el otro? Pruebe usando la prueba del signo con un valor de α cercano a .05.

Comida	A	B	Comida	A	B
1	6	8	12	8	5
2	4	5	13	4	2
3	7	4	14	3	3
4	8	7	15	6	8
5	2	3	16	9	10
6	7	4	17	9	8
7	9	9	18	4	6
8	7	8	19	4	3
9	2	5	20	5	4
10	4	3	21	3	2
11	6	9	22	5	3

a. Use las tablas binomiales del apéndice I para hallar la región de rechazo exacta para la prueba.

b. Use el estadístico z de muestra grande. (NOTA: Aun cuando la aproximación de muestra grande se sugiere para $n \geq 25$, funciona bastante bien para valores de n hasta de sólo 15.)

c. Compare los resultados de los incisos a) y b).

15.19 Niveles de plomo en la sangre Un estudio publicado en la *American Journal of Public Health (Science News)*, primera publicación en seguir los niveles de plomo en la sangre de aficionados al tiro al blanco con pistola, en polígonos de tiro bajo techo y que cumplen con la ley, documenta un riesgo significativo de envenenamiento por plomo.[3] Se tomaron mediciones de exposición al plomo a 17 miembros del grupo de entrenamiento de aplicación de la ley antes, durante y después de un periodo de 3 meses de instrucción de disparo en un polígono de tiro bajo techo y propiedad del estado. Ningún recluta tenía niveles elevados de plomo en la sangre antes del entrenamiento, pero 15 de los 17 terminaron su entrenamiento con niveles de plomo en la sangre considerados "elevados" por la Agencia Europea para la seguridad y la salud en el trabajo (OSHA). Si el uso de un polígono de tiro no causa aumento en niveles de plomo en la sangre, entonces p, la probabilidad de que aumente el nivel de plomo en la sangre de una persona, es menor o igual a .5. Pero, si el uso del polígono de tiro bajo techo causa un aumento en los niveles de plomo en la sangre de una persona, entonces $p > .5$. Use la prueba del signo para determinar si el uso de un polígono de tiro bajo techo tiene el efecto de aumentar el nivel de plomo en la sangre de una persona con $\alpha = .05$. (SUGERENCIA: La aproximación normal a probabilidades binomiales es bastante precisa para $n = 17$.)

MIS DATOS EX1520

15.20 Porcentajes de recuperación De 10 hospitales se recolectaron datos clínicos respecto a la efectividad de dos medicamentos para tratar una enfermedad particular. Se desea saber si los datos presentan evidencia suficiente con el fin de indicar un porcentaje más alto de recuperación para uno de los dos medicamentos.

a. Pruebe usando la prueba del signo. Escoja su región de rechazo de modo que α sea cercana a .05.

b. ¿Por qué podría ser inapropiado usar la prueba t de Student al analizar los datos?

	Medicamento A		
Hospital	Número en grupo	Número recuperado	Porcentaje recuperado
1	84	63	75.0
2	63	44	69.8
3	56	48	85.7
4	77	57	74.0
5	29	20	69.0
6	48	40	83.3
7	61	42	68.9
8	45	35	77.8
9	79	57	72.2
10	62	48	77.4

	Medicamento B		
Hospital	Número en grupo	Número recuperado	Porcentaje recuperado
1	96	82	85.4
2	83	69	83.1
3	91	73	80.2
4	47	35	74.5
5	60	42	70.0
6	27	22	81.5
7	69	52	75.4
8	72	57	79.2
9	89	76	85.4
10	46	37	80.4

15.4 UNA COMPARACIÓN DE PRUEBAS ESTADÍSTICAS

El experimento del ejemplo 15.3 está diseñado como experimento de diferencia pareada. Si se satisfacen las suposiciones de normalidad y varianza constante, σ_d^2, para las diferencias, ¿la prueba del signo detectaría un cambio en la ubicación para las dos poblaciones tan eficientemente como la prueba t pareada? Es probable que no, porque la prueba t usa mucha más información que la prueba del signo. Usa no sólo el signo de la diferencia, sino también los valores reales de las diferencias. En este caso, diríamos que la prueba del signo no es tan *eficiente* como la prueba t pareada. No obstante, la prueba del signo podría ser más eficiente si no se satisfacen las suposiciones acostumbradas.

Cuando dos pruebas estadísticas diferentes se pueden usar *ambas* para probar una hipótesis basada en los mismos datos, es natural preguntar ¿cuál es mejor? Una forma de contestar esta pregunta sería mantener constante el tamaño muestral n y α también constante para ambos procedimientos y comparar β, la probabilidad de un error tipo II. Los expertos en estadística, sin embargo, prefieren examinar la **potencia** de una prueba.

Definición Potencia $= 1 - \beta = P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } H_a \text{ es verdadera})$

Como β es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, la **potencia** de la prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa y alguna alternativa especificada es verdadera. Es la probabilidad de que la prueba haga aquello para lo que está diseñada, es decir, detectar una desviación de la hipótesis nula cuando exista una desviación.

Probablemente el método más común de comparar dos procedimientos de prueba es en términos de la eficiencia relativa de un par de pruebas. La **eficiencia relativa** es la razón entre los tamaños muestrales, para los dos procedimientos de prueba requeridos para alcanzar la misma α y β para una alternativa determinada, y la hipótesis nula.

En algunas situaciones, es posible que el experimentador pueda no estar demasiado preocupado si usa la prueba más potente. Por ejemplo, podría escoger usar la prueba del signo sobre una competidora más potente por su facilidad de aplicación. Entonces, se podrían ver pruebas como microscopios que se usan para detectar desviaciones desde una teoría hipotética. Uno no tiene que saber la potencia exacta de un microscopio para usarlo en una investigación biológica, y lo mismo aplica a pruebas estadísticas. Si el procedimiento de prueba detecta una desviación desde la hipótesis nula, estamos encantados; si no es así, se puede volver a analizar los datos usando un microscopio más potente (prueba), o se puede aumentar la potencia del microscopio (prueba) al aumentar el tamaño muestral.

15.5 LA PRUEBA DE RANGO CON SIGNO DE WILCOXON PARA UN EXPERIMENTO PAREADO

Se puede usar una prueba de rango con signo, propuesta por Frank Wilcoxon, para analizar el experimento de diferencia pareada de la sección 10.5 al considerar las diferencias pareadas de dos tratamientos, 1 y 2. Bajo la hipótesis nula de que no hay diferencias en las distribuciones para 1 y 2, se esperaría que (en promedio) la mitad de las diferencias en pares sean negativas y la mitad positivas; esto es, el número esperado de diferencias negativas entre pares sería $n/2$ (donde n es el número de pares). Además, se deduce que las diferencias positivas y negativas de igual magnitud absoluto deben presentarse con igual probabilidad. Si fuéramos a ordenar las diferencias de acuerdo a sus valores absolutos y de menor a mayor, las sumas de rango esperadas para las diferencias negativas y positivas sería igual. Las diferencias grandes en las sumas de los rangos, asignadas a las diferencias positivas y negativas, darían evidencia para indicar un cambio en lugar entre las distribuciones de respuestas para los dos tratamientos, 1 y 2.

Si la distribución 1 se corre a la derecha de la distribución 2, entonces se espera que más de las diferencias sean positivas y esto resulta en un número pequeño de diferencias negativas. Por tanto, para detectar esta alternativa de una cola, use la suma de rango T (la suma de los rangos de las diferencias negativas) y rechace la hipótesis nula para valores significativamente pequeños de T^-. Junto con estas mismas líneas, si la distribución 1 se corre a la izquierda de la distribución 2, entonces se espera que más de las diferencias sean negativas y que el número de diferencias positivas sea pequeño. En consecuencia, para detectar esta alternativa de una cola, use T^+ (la suma de los rangos de las diferencias positivas) y rechace la hipótesis nula si T^+ es significativamente pequeña.

CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE PRUEBA PARA LA PRUEBA DE RANGO CON SIGNO DE WILCOXON

1. Calcule las diferencias $(x_1 - x_2)$ para cada uno de los n pares. Las diferencias iguales a 0 se eliminan y el número de pares, n, se reduce de conformidad.
2. Ordene los **valores absolutos** de las diferencias asignando 1 a la más pequeña, 2 a la segunda más pequeña, y así sucesivamente. A las observaciones empatadas se les asigna el promedio de los rangos que se hubieran asignado sin empates.
3. Calcule la **suma de rango** para las diferencias **negativas** y marque este valor T^-. Del mismo modo, calcule T^+, la **suma de rango** para las diferencias **positivas**.

Para una **prueba de dos colas**, use la **menor de estas dos cantidades T como un estadístico de prueba** para probar la hipótesis nula de que los dos histogramas de frecuencia relativa poblacional son idénticos. Cuanto menor sea el valor de T, mayor es el peso de evidencia a favor de rechazarla hipótesis nula. **Por tanto, se rechazará la hipótesis nula si T es menor o igual a algún valor, por ejemplo T_0.**

Para detectar la **alternativa de una cola**, esa **distribución 1 se corre a la derecha de la distribución 2, use la suma de rango T^-** de las diferencias negativas y rechace la hipótesis nula para valores pequeños de T^-, por ejemplo $T^- \leq T_0$. Si desea detectar un **corrimiento a la distribución 2 a la derecha de la distribución 1, use la suma de rango T^+** de las diferencias positivas como estadístico de prueba y rechace la hipótesis nula para valores pequeños de T^+, por ejemplo, $T^+ \leq T_0$.

La probabilidad de que T sea menor o igual a algún valor T_0 se ha calculado para una combinación de tamaños muestrales y valores de T_0. Estas probabilidades, dadas en la tabla 8 del apéndice I, se pueden usar para hallar la región de rechazo para la prueba T.

Una versión abreviada de la tabla 8 se muestra en la tabla 15.7. En sentido horizontal en la parte superior de la tabla se ve el número de diferencias (el número de pares) n. Los valores de α para una prueba de una cola aparecen en la primera columna de la tabla. La segunda columna da valores de α para una prueba de dos colas. Las entradas de la tabla son los valores críticos de T. Usted recordará que el valor crítico de un estadístico de prueba es el valor que localiza la frontera de la región de rechazo.

Por ejemplo, supongamos que tenemos $n = 7$ pares y se realiza una prueba de dos colas de la hipótesis nula de que las dos distribuciones de frecuencia relativa poblacional son idénticas. Al comprobar la columna $n = 7$ de la tabla 15.7 y usar el segundo renglón (correspondiente a $\alpha = .05$ para una prueba de dos colas), se ve la entrada 2 (sombreada). Este valor es T_0, el valor crítico de T. Como ya se vio antes, cuanto menor sea el valor de T, mayor es la evidencia para rechazar la hipótesis nula. Por tanto, se rechazará la hipótesis nula para todos los valores de T menores o iguales a 2. La región de rechazo para la prueba de rango con signo de Wilcoxon para un experimento pareada es siempre de la forma: rechazar H_0 si $T \leq T_0$, donde T_0 es el valor crítico de T. La región de rechazo se muestra simbólicamente en la figura 15.2.

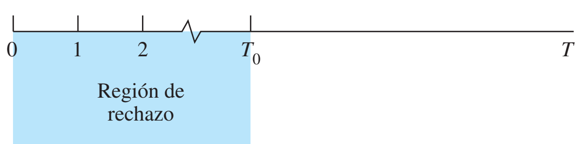
TABLA 15.7 **Versión abreviada de la tabla 8 del apéndice I; valores críticos de T**

Una cola	Dos colas	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	1	2	4	6	8	11	14
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$		1	2	4	6	8	11
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$			0	2	3	5	7
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$				0	2	3	5

Una cola	Dos colas	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	17	21	26	30	36	41
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	14	17	21	25	30	35
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	10	13	16	20	24	28
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	7	10	13	16	19	23

FIGURA 15.2

Región de rechazo para la prueba de rango con signo de Wilcoxon para un experimento pareado (rechazar H_0 si $T \leq T_0$)



PRUEBA DE RANGO CON SIGNO DE WILCOXON PARA UN EXPERIMENTO PAREADO

1. Hipótesis nula: H_0 : Las dos distribuciones de frecuencia relativa poblacional son idénticas
2. Hipótesis alternativa: H_a : Las dos distribuciones de frecuencia relativa poblacional difieren en ubicación (una prueba de dos colas); o H_a : La distribución de frecuencia relativa de la población 1 se corre a la derecha de la distribución de frecuencia relativa para la población 2 (una prueba de una cola).
3. Estadístico de prueba
   a. Para una prueba de dos colas, use T, la menor de la suma de rango para diferencias positivas y la suma de rango para diferencias negativas.
   b. Para una prueba de una cola (detectar la hipótesis alternativa descrita líneas antes), use la suma de rango T^- de las diferencias negativas.
4. Región de rechazo
   a. Para una prueba de dos colas, rechace H_0 si $T \leq T_0$, donde T_0 es el valor crítico dado en la tabla 8 del apéndice I.
   b. Para una prueba de una cola (detectar la hipótesis alternativa descrita líneas antes), use la suma de rango T^- de las diferencias negativas. Rechace H_0 si $T^- \leq T_0$.[†]

   $\left[\text{NOTA: Se puede demostrar que } T^+ + T^- = \frac{n(n+1)}{2}.\right]$

EJEMPLO 15.5

Se realizó un experimento para comparar las densidades de pasteles elaborados de dos clases diferentes de mezclas de pastel, A y B. Seis charolas de pastel recibieron la masa A y seis recibieron la masa B. Esperando una variación en la temperatura del horno, el experimentador colocó un pastel A y uno B juntos en seis lugares diferentes del horno. Prueba la hipótesis de que no hay diferencia en las distribuciones poblacionales de densidades de pastel para dos masas para pastel diferentes.

Solución Los datos (densidad en onzas por pulgada cúbica) y diferencias en densidad para seis pares de pasteles se dan en la tabla 15.8. La gráfica de caja de las diferencias de la figura 15.3 muestra un sesgo bastante fuerte y una diferencia muy grande en la cola derecha, lo cual indica que los datos pueden no satisfacer la suposición de normalidad. La muestra de dos diferencias es demasiado pequeña para tomar decisiones válidas acerca de normalidad y varianza constante. En esta situación, la prueba de rango con signo de Wilcoxon puede ser la prueba más prudente a usar.

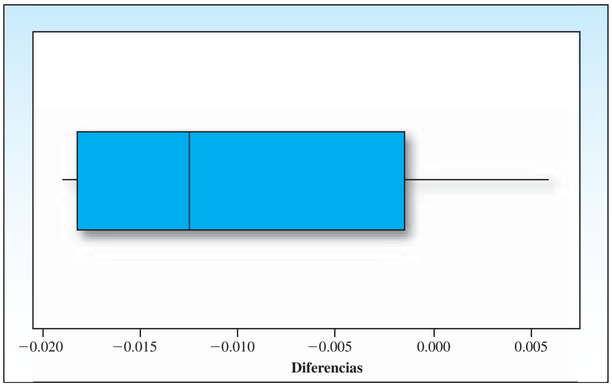
Al igual que con otras pruebas no paramétricas, la hipótesis nula a probar es que las dos distribuciones de frecuencia poblacionales de densidades de pastel son idénticas. La hipótesis alternativa, que implica una prueba de dos colas, es que las distribuciones son diferentes. Como la cantidad de datos es pequeña, se puede efectuar la prueba usando $\alpha = .10$. De la tabla 8 del apéndice I, el valor crítico de T para una prueba de dos colas, $\alpha = .10$, es $T_0 = 2$. Por tanto, se puede rechazar H_0 si $T \leq 2$.

[†] Para detectar un cambio de distribución 2 a la derecha de la distribución 1, use la suma de rango T^+ de las diferencias positivas como estadístico de prueba y rechace H_0 si $T^+ \leq T_0$.

TABLA 15.8 Densidades de seis pares de pasteles

x_A	x_B	Diferencia $(x_A - x_B)$	Rango
.135	.129	.006	2
.102	.120	−.018	5
.098	.112	−.014	4
.141	.152	−.011	3
.131	.135	−.004	1
.144	.163	−.019	6

FIGURA 15.3 Gráfica de caja de diferencias para el ejemplo 15.5



Las diferencias $(x_1 - x_2)$ están calculadas y ordenadas de acuerdo a sus valores absolutos en la tabla 15.8. La suma de rangos positivos es $T^+ = 2$ y la suma de rangos negativos es $T^- = 19$. El estadístico de prueba es la más pequeña de estas dos sumas de rango, o $T = 2$. Como $T = 2$ cae en la región de rechazo, se puede rechazar H_0 y concluir que las dos distribuciones de frecuencia poblacional de densidades de pastel difieren.

Una salida impresa *MINITAB* de la prueba de rango con signo de Wilcoxon se da en la figura 15.4. En la sección "Mi *MINITAB*", al final de este capítulo, se encuentran instrucciones para generar esta salida impresa. Se puede ver que el valor del estadístico de prueba concuerda con los otros cálculos y el valor p indica que se puede rechazar H_0 al nivel de significancia de 10%.

FIGURA 15.4 Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 15.5

Prueba de rango con signo de Wilcoxon: diferencia

```
Test of median = 0.000000 versus median not = 0.000000

                   N for   Wilcoxon           Estimated
               N    Test  Statistic       P      Median
Difference     6       6        2.0   0.093    -0.01100
```

Aproximación normal para la prueba de rango con signo de Wilcoxon

Aun cuando la tabla 8 del apéndice I tiene valores críticos para n de hasta 50, T^+, al igual que la prueba de rango con signo de Wilcoxon, estará distribuida normalmente en forma aproximada cuando la hipótesis nula sea verdadera y n sea grande, por ejemplo 25 o más. Esto hace posible construir una prueba z de muestra grande, donde

$$E(T) = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

Entonces el estadístico z

$$z = \frac{T^+ - E(T^+)}{\sigma_{T^+}} = \frac{T^+ - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

se puede usar como estadístico de prueba. Entonces, para una prueba de dos colas y $\alpha = .05$, se puede rechazar la hipótesis de distribuciones poblacionales idénticas cuando $|z| \geq 1.96$.

PRUEBA DE MUESTRA GRANDE DE RANGO CON SIGNO DE WILCOXON PARA UN EXPERIMENTO PAREADO: $n \geq 25$

1. Hipótesis nula: H_0 : Las distribuciones 1 y 2 de frecuencia relativa poblacional son idénticas.
2. Hipótesis alternativa: H_a : Las dos distribuciones de frecuencia relativa poblacional difieren en ubicación (una prueba de dos colas); o bien, H_a : La distribución de frecuencia relativa poblacional 1 está corrida a la derecha (o izquierda) de la distribución de frecuencia relativa para la población 2 (una prueba de una cola).
3. Estadístico de prueba: $z = \dfrac{T^+ - [n(n+1)/4]}{\sqrt{[n(n+1)(2n+1)/24]}}$
4. Región de rechazo: Rechazar H_0 si $z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$ para una prueba de dos colas. Para una prueba de una cola, pónganse todas las α en una cola de la distribución z. Para detectar un cambio en la distribución 1 a la derecha de la distribución 2, rechazar H_0 cuando $z > z_\alpha$. Para detectar un cambio en la dirección opuesta, rechace H_0 si $z < -z_\alpha$.

Los valores tabulados de z se dan en la tabla 3, apéndice I.

15.5 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

15.21 Suponga que se desea detectar una diferencia en las ubicaciones de dos distribuciones poblacionales, basadas en un experimento de diferencia pareada de $n = 30$ pares.

a. Dé la hipótesis nula y alternativa para la prueba de rango con signo de Wilcoxon.

b. Dé el estadístico de prueba.

c. Dé la región de rechazo para la prueba para $\alpha = .05$.

d. Si $T^+ = 249$, ¿cuáles son sus conclusiones? [NOTA: $T^+ + T^- = n(n+1)/2$.]

15.22 Consulte el ejercicio 15.21. Supongamos que se desea detectar sólo un cambio en la distribución 1 a la derecha de la distribución 2.

a. Dé la hipótesis nula y alternativa para la prueba de rango con signo de Wilcoxon.

b. Dé el estadístico de prueba.

c. Dé la región de rechazo para la prueba para $\alpha = .05$.

d. Si $T^+ = 249$, ¿cuáles son sus conclusiones? [NOTA: $T^+ + T^- = n(n+1)/2$.]

15.23 Consulte el ejercicio 15.21. Realice la prueba usando la prueba z de muestra grande. Compare sus resultados con los resultados de prueba no paramétrica del ejercicio 15.22, inciso d).

15.24 Consulte el ejercicio 15.22. Realice la prueba usando la prueba z de muestra grande. Compare sus resultados con los resultados de la prueba no paramétrica del ejercicio 15.21, inciso d).

15.25 Consulte el ejercicio 15.16 y el conjunto de datos EX1516. Los datos de esta tabla son de un experimento de diferencia pareada con $n = 7$ pares de observaciones.

	Pares						
Población	1	2	3	4	5	6	7
1	8.9	8.1	9.3	7.7	10.4	8.3	7.4
2	8.8	7.4	9.0	7.8	9.9	8.1	6.9

a. Use la prueba de rango con signo de Wilcoxon para determinar si hay diferencia suficiente entre las dos poblaciones.

b. Compare los resultados de la parte a con el resultado que obtuvo en el ejercicio 15.16. ¿Son iguales? Explique.

APLICACIONES

15.26 Valores de propiedades II En el ejercicio 15.17 se utilizó la prueba del signo para determinar si los datos daban evidencia suficiente con el fin de indicar una diferencia, en las distribuciones de evaluaciones de propiedad, para los asesores A y B.

a. Use la prueba del rango con signo de Wilcoxon para un experimento pareado, con el fin de probar la hipótesis nula de que no hay diferencia en las distribuciones de evaluaciones de propiedades entre los asesores A y B. Pruebe usando un valor de α cercano a .05.

b. Compare las conclusiones de la prueba del inciso a con las conclusiones derivadas de la prueba t del ejercicio 10.43, y la prueba del signo del ejercicio 15.17. Explique por qué estas conclusiones de prueba son (o no son) consistentes.

MIS DATOS EX1527 **15.27 Descomposturas de máquinas** El número de descomposturas mensuales en máquinas se registró durante 9 meses en dos máquinas idénticas, A y B, empleadas para hacer cables:

Mes	A	B
1	3	7
2	14	12
3	7	9
4	10	15
5	9	12
6	6	6
7	13	12
8	6	5
9	7	13

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en los porcentajes de descomposturas mensuales para las dos máquinas? Pruebe usando un valor de α cercano a .05.

b. ¿Se puede considerar una razón por la que los porcentajes de descomposturas para las dos máquinas pudieran variar de 1 mes a otro?

15.28 Cocina de gourmet II Consulte la comparación de calificaciones de comidas de gourmet del ejercicio 15.18 y use la prueba de rango con signo de Wilcoxon, para determinar si los datos dan evidencia suficiente con el fin de indicar una diferencia en las calificaciones de los dos gourmets. Pruebe usando un valor de α cercano a .05. Compare los resultados de esta prueba con los resultados de la prueba con signo del ejercicio 15.18. ¿Las conclusiones de la prueba son consistentes?

MIS DATOS EX1529 **15.29 Control de tránsito** Dos métodos para controlar el tránsito, A y B, se usaron en cada una de $n = 12$ cruceros durante una semana y los números de accidentes que ocurrieron durante ese tiempo se registraron. El orden de uso (cuál se emplearía para la primera semana) se seleccionó de una manera aleatoria. Se desea saber si los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las distribuciones de porcentajes de accidentes para los métodos A y B de control de tránsito.

	Método			Método	
Crucero	A	B	Crucero	A	B
1	5	4	7	2	3
2	6	4	8	4	1
3	8	9	9	7	9
4	3	2	10	5	2
5	6	3	11	6	5
6	1	0	12	1	1

a. Analice usando una prueba del signo.

b. Analice usando la prueba de rango con signo de Wilcoxon para un experimento pareado.

MIS DATOS EX1530 **15.30 Rompecabezas** Ocho personas fueron seleccionadas para realizar una tarea sencilla de armar un rompecabezas bajo condiciones normales y bajo condiciones de estrés. Durante el tiempo de estrés, se aplicó una pequeña descarga eléctrica a las personas 3 minutos después del inicio del experimento y cada 30 segundos de ahí en adelante, hasta que terminaran la tarea. Se tomaron lecturas de la presión sanguínea bajo ambas condiciones. Los datos de la tabla son las lecturas más altas durante el experimento. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar lecturas de presión sanguínea más altas bajo condiciones de estrés? Analice los datos usando la prueba de rango con signo de Wilcoxon para un experimento pareado.

Persona	Normal	Con estrés
1	126	130
2	117	118
3	115	125
4	118	120
5	118	121
6	128	125
7	125	130
8	120	120

MIS DATOS EX1531

15.31 Imágenes y recordar palabras Un grupo de psicología realizó un experimento para determinar si recordar la puntuación, en la que se dieron instrucciones para formar imágenes de 25 palabras, difiere de recordar la puntuación inicial para la que no se dieron instrucciones de imágenes. Veinte estudiantes participaron en el experimento, con los resultados que se indican en la tabla siguiente.

Estudiante	Con imágenes	Sin imágenes	Estudiante	Con imágenes	Sin imágenes
1	20	5	11	17	8
2	24	9	12	20	16
3	20	5	13	20	10
4	18	9	14	16	12
5	22	6	15	24	7
6	19	11	16	22	9
7	20	8	17	25	21
8	19	11	18	21	14
9	17	7	19	19	12
10	21	9	20	23	13

a. ¿Cuáles tres procedimientos de prueba se pueden usar para probar si hay diferencias en la distribución de recordar la puntuación con y sin imágenes? ¿Qué suposiciones se requieren para el procedimiento paramétrico? ¿Estos datos satisfacen esas suposiciones?

b. Use tanto la prueba del signo y la prueba de rango con signo de Wilcoxon para probar si hay diferencias en las distribuciones de recordar la puntuación bajo estas dos condiciones.

c. Compare los resultados de las pruebas del inciso b). ¿Son iguales las conclusiones? Si no es así, ¿por qué no?

15.6 LA PRUEBA *H* DE KRUSKAL-WALLIS PARA DISEÑOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS

Así como la prueba de la suma de rango de Wilcoxon es la alternativa no paramétrica a la prueba *t* de Student para una comparación de medias poblacionales, la prueba *H* de Kruskal-Wallis es la alternativa no paramétrica al análisis de la prueba *F* de varianza para un diseño completamente aleatorizado. Se usa para detectar diferencias en ubicaciones entre más de dos distribuciones poblacionales basadas en muestreo aleatorio independiente.

El procedimiento para realizar la prueba *H* de Kruskal-Wallis es semejante al empleado para la prueba de suma de rango de Wilcoxon. Supongamos que se comparan k poblaciones basadas en muestras aleatorias independientes n_1 de la población 1, n_2 de la población 2, …, n_k de la población k, donde

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

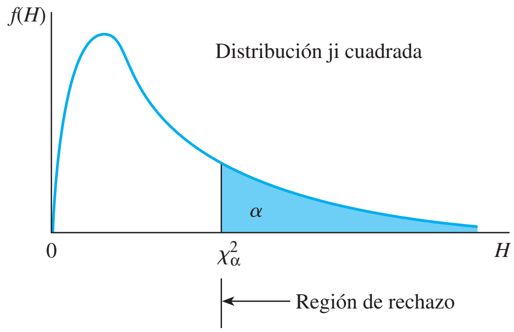
El primer paso es ordenar las n observaciones de la más pequeña (rango 1) a la mayor (rango n). A las observaciones con empate se les asigna un rango igual al promedio de los rangos que hubieran recibido de haber sido casi iguales pero no empatadas. A continuación se calculan las sumas de rangos $T_1, T_2, \ldots, T_k$ para las k muestras y se calcula el estadístico de prueba

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

que es proporcional a $\Sigma\, n_i(\overline{T}_i - \overline{T})^2$, la suma de desviaciones cuadradas de las medias de rango alrededor de la gran media $\overline{T} = n(n + 1)/2n = (n + 1)/2$. Entre más grandes sean las diferencias en ubicaciones entre las k distribuciones poblacionales, mayor es el valor del estadístico H. Entonces, se puede rechazar la hipótesis nula de que las k distribuciones poblacionales son idénticas para valores grandes de H.

¿Qué tan grande es grande? Se puede demostrar (se omite la demostración) que cuando los tamaños muestrales son de moderados a grandes, por ejemplo, cada tamaño muestral es igual a cinco o mayor, y cuando H_0 es verdadera, el estadístico H tendrá aproximadamente una distribución ji cuadrada con $(k - 1)$ grados de libertad. Por tanto, para un valor determinado de α, se puede rechazar H_0 cuando el estadístico H exceda de χ^2_α (véase la figura 15.5).

FIGURA 15.5
Distribución aproximada del estadístico H cuando H_0 es verdadero



EJEMPLO 15.6

Los datos de la tabla 15.9 se recolectaron usando un diseño completamente aleatorizado. Son las calificaciones del examen de aprovechamiento para cuatro diferentes grupos de estudiantes, donde cada grupo recibió enseñanza mediante una técnica diferente. El objetivo del experimento es probar la hipótesis de que no hay diferencia, en las distribuciones poblacionales de las calificaciones del examen de aprovechamiento, contra la alternativa de que difieren en ubicación; esto es, al menos una de las distribuciones se pasa arriba de las otras. Realice la prueba usando la prueba H de Kruskal-Wallis con $\alpha = .05$.

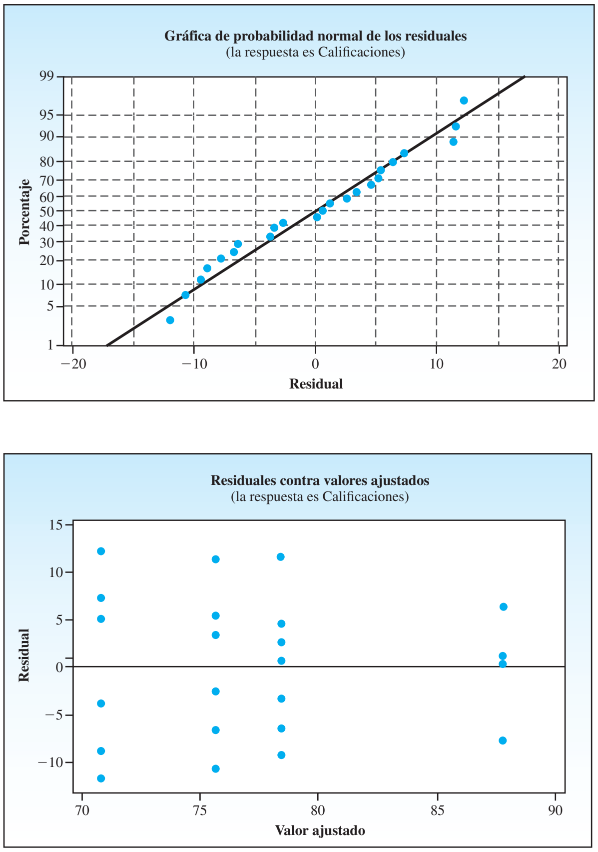
TABLA 15.9 **Calificaciones de examen (y rangos) para cuatro técnicas de enseñanza**

	1	2	3	4
	65 (3)	75 (9)	59 (1)	94 (23)
	87 (19)	69 (5.5)	78 (11)	89 (21)
	73 (8)	83 (17.5)	67 (4)	80 (14)
	79 (12.5)	81 (15.5)	62 (2)	88 (20)
	81 (15.5)	72 (7)	83 (17.5)	
	69 (5.5)	79 (12.5)	76 (10)	
		90 (22)		
Suma de rango	$T_1 = 63.5$	$T_2 = 89$	$T_3 = 45.5$	$T_4 = 78$

Solución Antes de realizar un análisis no paramétrico de estos datos, se puede usar un análisis de varianza de una vía para dar las dos gráficas de la figura 15.6. Parece que la técnica 4 tiene una varianza más pequeña que las otras tres y que hay una marcada desviación en la cola derecha de la gráfica de probabilidad normal. Estas desviaciones podrían ser consideradas menores y podría usarse un análisis ya sea paramétrico o no paramétrico.

FIGURA 15.6

Gráfica de probabilidad normal y una gráfica residual que siguen un análisis de varianza de una vía para el ejemplo 15.6



En el procedimiento de la prueba H de Kruskal-Wallis, el primer paso es ordenar las $n = 23$ observaciones de menor (rango 1) a mayor (rango 23). Estos rangos se muestran en paréntesis en la tabla 15.9. Observe cómo se manejan los empates. Por ejemplo, dos observaciones en 69 están empatadas para el rango 5. Por tanto, se les asigna el promedio 5.5 de los dos rangos (5 y 6) que hubieran ocupado si hubieran sido ligeramente diferentes. Las sumas de rango T_1, T_2, T_3 y T_4 para las cuatro muestras se ven en el renglón inferior de la tabla. Sustituyendo sumas de rango y tamaños muestrales en la fórmula para el estadístico H, obtenemos

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{23(24)} \left[\frac{(63.5)^2}{6} + \frac{(89)^2}{7} + \frac{(45.5)^2}{6} + \frac{(78)^2}{4} \right] - 3(24)$$

$$= 79.775102 - 72 = 7.775102$$

La región de rechazo para el estadístico H para $\alpha = .05$ incluye valores de $H \geq \chi^2_{.05}$, donde $\chi^2_{.05}$ está basada en $(k - 1) = (4 - 1) = 3$ grados de libertad. El valor de χ^2 dado en la tabla 5 en el apéndice I es $\chi^2_{.05} = 7.81473$. El valor observado del estadístico H, $H = 7.775102$, no cae en la región de rechazo para la prueba. Por tanto, hay evidencia insuficiente para indicar diferencias en las distribuciones de calificaciones de examen de aprovechamiento para las cuatro técnicas.

En la figura 15.7 se da una salida impresa *MINITAB* de la prueba H de Kruskal-Wallis. Observe que el valor p, .051, es sólo ligeramente mayor que el nivel de 5% necesario para declarar significancia estadística.

FIGURA 15.7
Salida impresa *MINITAB* para la prueba Kruskal-Wallis para el ejemplo 15.6

Prueba Kruskal-Wallis: calificaciones contra técnicas

```
Kruskal-Wallis Test on Scores

Techniques   N    Median    Ave Rank        Z
1            6     76.00        10.6    -0.60
2            7     79.00        12.7     0.33
3            6     71.50         7.6    -1.86
4            4     88.50        19.5     2.43
Overall     23                  12.0

H = 7.78  DF = 3  P = 0.051
H = 7.79  DF = 3  P = 0.051 (adjusted for ties)

* NOTE * One or more small samples
```

EJEMPLO 15.7

Compare los resultados del análisis de la prueba F de varianza, para probar si hay diferencias en las distribuciones de calificaciones del examen de aprovechamiento para las cuatro técnicas del ejemplo 15.6.

Solución La salida impresa *MINITAB* para un análisis de varianza de una vía para los datos de la tabla 15.9 se dan en la figura 15.8. El análisis de varianza muestra que la prueba F para probar si hay diferencias entre las medias para las cuatro técnicas es significativo al nivel de .028. La prueba H de Kruskal-Wallis no detectó un cambio en distribuciones poblacionales al nivel de significancia de .05. Aun cuando estas conclusiones parecen estar muy separadas, los resultados de la prueba no difieren en mucho. El valor $p = .028$ correspondiente a $F = 3.77$, con $df_1 = 3$ y $df_2 = 19$, es ligeramente menor a .05, en contraste con el valor $p = .051$ para $H = 7.78$, $df = 3$, que es ligeramente mayor a .05. Alguien que vea los valores p para las dos pruebas vería poca diferencia en los resultados de las pruebas F y H. No obstante, si nos apegamos a la elección de $\alpha = .05$, no se puede rechazar H_0 usando la prueba H.

FIGURA 15.8
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 15.7

ANOVA de una vía: calificaciones contra técnicas

```
Source      DF       SS      MS      F      P
Techniques   3    712.6   237.5   3.77  0.028
Error       19   1196.6    63.0
Total       22   1909.2
```

LA PRUEBA *H* DE KRUSKAL-WALLIS PARA COMPARAR MÁS DE DOS POBLACIONES: DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO (MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES)

1. Hipótesis nula: H_0 : Las k distribuciones poblacionales son idénticas.
2. Hipótesis alternativa: H_a : Al menos dos de las k distribuciones poblacionales difieren en ubicación.
3. Estadístico de prueba: $H = \dfrac{12}{n(n+1)} \Sigma \dfrac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$

(continúa)

LA PRUEBA *H* DE KRUSKAL-WALLIS PARA COMPARAR MÁS DE DOS POBLACIONES: DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO (MUESTRAS ALEATORIAS INDEPENDIENTES) *(continuación)*

donde

n_i = Tamaño muestral para la población i

T_i = Suma de rango para la población i

n = Número total de observaciones $= n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

4. Región de rechazo para una α determinada: $H > \chi^2_\alpha$ con $(k - 1)$ *df*

Suposiciones

- Todos los tamaños muestrales son mayores o iguales a 5.
- Los empates toman el promedio de los rangos que hubieran ocupado de no haber estado empatados.

La prueba *H* de Kruskal-Wallis es una valiosa alternativa para un análisis de varianza de una vía cuando son violadas las suposiciones de normalidad e igualdad de varianza. De nuevo, gráficas normales de probabilidad de residuales y gráficas de residuales por grupo de tratamiento son útiles para determinar si estas suposiciones han sido violadas. Recuerde que una gráfica de probabilidad normal debe aparecer como línea recta con pendiente positiva; las gráficas de residuales por grupos de tratamiento deben exhibir la misma dispersión arriba y abajo de la línea 0.

15.6 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

MIS DATOS EX1532

15.32 Se compararon tres tratamientos usando un diseño completamente aleatorizado. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

Tratamiento		
1	2	3
26	27	25
29	31	24
23	30	27
24	28	22
28	29	24
26	32	20
	30	21
	33	

¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en lugar para al menos dos de las distribuciones poblacionales? Pruebe usando el estadístico *H* de Kruskal-Wallis con $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1533

15.33 Se compararon cuatro tratamientos usando un diseño completamente aleatorizado. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

Tratamiento			
1	2	3	4
124	147	141	117
167	121	144	128
135	136	139	102
160	114	162	119
159	129	155	128
144	117	150	123
133	109		

¿Los datos aportan suficiente evidencia para indicar una diferencia en lugar para al menos dos de las distribuciones poblacionales? Pruebe usando el estadístico *H* de Kruskal-Wallis con $\alpha = .05$.

APLICACIONES

15.34 Sitios pantanosos II El ejercicio 11.13 presenta datos (véase el conjunto de datos EX1113) sobre la rapidez de crecimiento de vegetación en cuatro lugares pantanosos y no urbanizados. Se seleccionaron al azar seis plantas en cada uno de los cuatro sitios para usarlas en la comparación. Los datos son la longitud media de hojas por planta (en centímetros) para una muestra aleatoria de 10 hojas por planta.

Lugar	Longitud media de hoja (cm)					
1	5.7	6.3	6.1	6.0	5.8	6.2
2	6.2	5.3	5.7	6.0	5.2	5.5
3	5.4	5.0	6.0	5.6	4.9	5.2
4	3.7	3.2	3.9	4.0	3.5	3.6

a. ¿Los datos aportan suficiente evidencia para indicar una diferencia en lugar para al menos dos de las distribuciones de longitud media de hoja correspondientes a los cuatro lugares? Pruebe usando la prueba *H* de Kruskal-Wallis con $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba.

c. Analizamos este mismo conjunto de datos en el ejercicio 11.13 usando un análisis de varianza. Encuentre el valor *p* para la prueba *F* usado para comparar las cuatro medias de lugar en el ejercicio 11.13.

d. Compare los valores *p* en los incisos b) y c) y explique las implicaciones de la comparación.

15.35 Frecuencia cardiaca y ejercicio El ejercicio 11.60 presentó datos (conjunto de datos EX1160) sobre las frecuencias para muestras de 10 hombres seleccionados al azar de cada uno de los cuatro grupos de edades. Cada hombre se ejercitó en una caminadora a un ritmo fijo durante 12 minutos, registrándose el aumento de frecuencia (la diferencia antes y después del ejercicio, en pulsaciones por minuto). Los datos se presentan en la tabla siguiente:

	10-19	20-39	40-59	60-69
	29	24	37	28
	33	27	25	29
	26	33	22	34
	27	31	33	36
	39	21	28	21
	35	28	26	20
	33	24	30	25
	29	34	34	24
	36	21	27	33
	22	32	33	32
Total	309	275	295	282

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias de ubicación para al menos dos de los cuatro grupos de edad? Pruebe usando la prueba *H* de Kruskal-Wallis con $\alpha = .01$.

b. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba del inciso a).

c. Como la prueba *F* del ejercicio 11.60 y la prueba *H* del inciso a son pruebas para detectar diferencias en la ubicación de las cuatro poblaciones de frecuencia cardiaca, ¿cómo se comparan los resultados de la prueba? Compare los valores *p* para las dos pruebas y explique las implicaciones de la comparación.

MIS DATOS EX1536

15.36 Niveles de pH en el agua Un muestreo de acidez de agua de lluvia para 10 aguaceros seleccionados al azar se registró en tres lugares diferentes en Estados Unidos: el noreste, la región media del Atlántico y el sureste. Las lecturas de pH para estas 10 lluvias se muestran en la tabla. (NOTA: Las lecturas de pH van de 0 a 14; 0 es ácida, 14 es alcalina. El agua pura que cae en aire limpio tiene una lectura de pH de 5.7.)

Noreste	Atlántico medio	Sureste
4.45	4.60	4.55
4.02	4.27	4.31
4.13	4.31	4.84
3.51	3.88	4.67
4.42	4.49	4.28
3.89	4.22	4.95
4.18	4.54	4.72
3.95	4.76	4.63
4.07	4.36	4.36
4.29	4.21	4.47

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias en los niveles de acidez en lluvias en los tres diferentes lugares? Pruebe usando la prueba *H* de Kruskal-Wallis.

b. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba del inciso a e interprétela.

MIS DATOS EX1537

15.37 Campañas publicitarias Los resultados de un experimento para investigar el reconocimiento de productos, durante tres campañas publicitarias, se informaron en el ejemplo 11.14. Las respuestas fueron el porcentaje de 400 adultos que estaban familiarizados con el producto recién anunciado. La gráfica de probabilidad normal indicó que los datos no eran aproximadamente normales y debía usarse otro método de análisis. ¿Hay una diferencia significativa entre las tres distribuciones poblacionales de donde vinieron estas muestras? Use un método no paramétrico apropiado para contestar esta pregunta.

Campaña		
1	2	3
.33	.28	.21
.29	.41	.30
.21	.34	.26
.32	.39	.33
.25	.27	.31

15.7 LA PRUEBA F_r DE FRIEDMAN PARA DISEÑOS DE BLOQUE ALEATORIZADOS

La prueba F_r de Friedman, propuesta por Milton Friedman, economista ganador del Premio Nobel, es una prueba no paramétrica para comparar las distribuciones de mediciones para k tratamientos diseñados en n bloques usando un diseño aleatorizado de bloques. El procedimiento para realizar la prueba es muy semejante al empleado para la prueba H de Kruskal-Wallis. El primer paso en el procedimiento es ordenar las k observaciones de tratamiento dentro de cada bloque. Los empates se tratan en la forma usual; es decir, reciben un promedio de los rangos ocupados por las observaciones empatadas. Las sumas de rango $T_1, T_2, \ldots, T_k$ se obtienen entonces y el estadístico de prueba

$$F_r = \frac{12}{bk(k+1)} \Sigma T_i^2 - 3b(k+1)$$

se calcula. El valor del estadístico F_r está en un mínimo cuando las sumas de rango son iguales, esto es, $T_1 = T_2 = \cdots = T_k$ y aumenta en valor cuando aumentan las diferencias entre las sumas de rango. Cuando el número k de tratamientos o el número b de bloques sea mayor a cinco, la distribución muestral de F_r puede ser aproximada por una distribución ji cuadrada con $(k-1)$ df. Por tanto, al igual que para la prueba H de Kruskal-Wallis, la región de rechazo para la prueba F_r está formada por valores de F_r para los cuales

$$F_r > \chi^2_\alpha$$

EJEMPLO 15.8

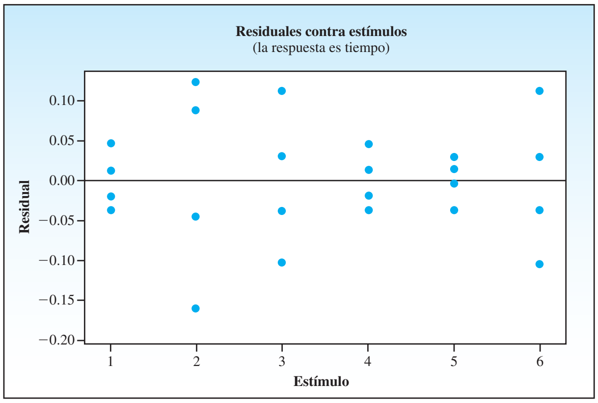
Supongamos que se desea comparar los tiempos de reacción de personas expuestas a seis estímulos diferentes. Una medición del tiempo de reacción se obtiene al someter a una persona a un estímulo y luego medir el tiempo hasta que la persona presente alguna reacción especificada. El objetivo del experimento es determinar si existen diferencias en los tiempos de reacción para los estímulos empleados en el experimento. Para eliminar la variación de una persona a otra en el tiempo de reacción, cuatro personas participaron en el experimento y el tiempo de reacción de cada persona se registró para cada uno de los seis estímulos. Los datos se dan en la tabla 15.10 (los rangos de las observaciones se muestran entre paréntesis). Use la prueba F_r de Friedman para determinar si los datos presentan suficiente evidencia para indicar diferencias en las distribuciones de tiempos de reacción para los seis estímulos. Pruebe usando $\alpha = .05$.

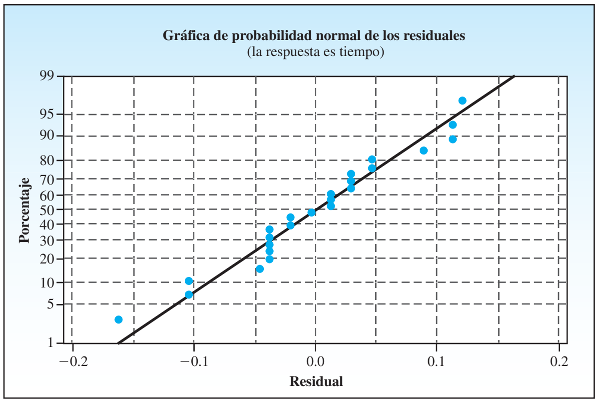
TABLA 15.10 **Tiempos de reacción a seis estímulos**

	Estímulos					
Persona	A	B	C	D	E	F
1	.6 (2.5)	.9 (6)	.8 (5)	.7 (4)	.5 (1)	.6 (2.5)
2	.7 (3.5)	1.1 (6)	.7 (3.5)	.8 (5)	.5 (1.5)	.5 (1.5)
3	.9 (3)	1.3 (6)	1.0 (4.5)	1.0 (4.5)	.7 (1)	.8 (2)
4	.5 (2)	.7 (5)	.8 (6)	.6 (3.5)	.4 (1)	.6 (3.5)
Suma de rango	$T_1 = 11$	$T_2 = 23$	$T_3 = 19$	$T_4 = 17$	$T_5 = 4.5$	$T_6 = 9.5$

Solución En la figura 15.9, la gráfica de los residuales para cada uno de los seis estímulos deja ver que los estímulos 1, 4 y 5 tienen varianzas un poco menores que los otros estímulos. Además, la gráfica de probabilidad normal de los residuales revela un cambio en la pendiente de la recta que sigue a los primeros tres residuales, así como la curvatura en la parte superior de la gráfica. Parece que un análisis no paramétrico es apropiado para estos datos.

FIGURA 15.9
Una gráfica de tratamientos contra residuales y una gráfica de probabilidad normal de residuales para el ejemplo 15.8





Se desea probar

H_0 : Las distribuciones de tiempos de reacción para los seis estímulos son idénticas

contra la hipótesis alternativa

H_a : Al menos dos de las distribuciones de tiempos de reacción para los seis estímulos difieren en ubicación

La tabla 15.10 muestra los rangos (en paréntesis) de las observaciones dentro de cada bloque y las sumas de rango para cada uno de los seis estímulos (los tratamientos). El valor del estadístico F_r para estos datos es

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{12}{bk(k+1)} \sum T_i^2 - 3b(k+1) \\ &= \frac{12}{(4)(6)(7)} [(11)^2 + (23)^2 + (19)^2 + \cdots + (9.5)^2] - 3(4)(7) \\ &= 100.75 - 84 = 16.75 \end{aligned}$$

Como el número $k = 6$ de tratamientos excede de cinco, la distribución de muestreo de F_r puede ser aproximada por una distribución ji cuadrada con $(k - 1) = (6 - 1) = 5$ *df*. Por tanto, para $\alpha = .05$, se puede rechazar H_0 si

$$F_r > \chi^2_{.05} \qquad \text{donde} \qquad \chi^2_{.05} = 11.0705$$

Esta región de rechazo se muestra en la figura 15.10. Como el valor observado $F_r = 16.75$ excede de $\chi^2_{.05} = 11.0705$, cae en la región de rechazo. Por tanto, se puede desechar H_0 y concluir que las distribuciones de tiempos de reacción difieren en ubicación para al menos dos estímulos. La salida impresa *MINITAB* de la prueba F_r de Friedman para los datos se da en la figura 15.11.

FIGURA 15.10
Región de rechazo para el ejemplo 15.8

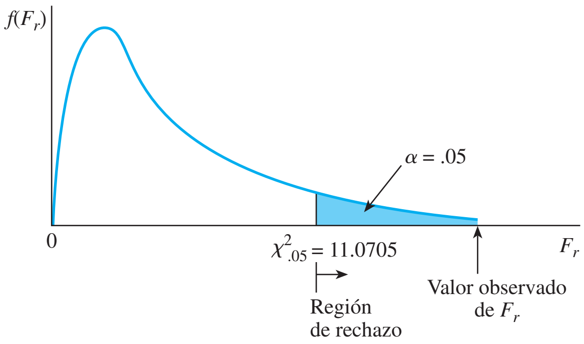


FIGURA 15.11
Salida impresa *MINITAB* para el ejemplo 15.8

Prueba de Friedman: tiempo contra estímulo bloqueado por una persona

```
S = 16.75  DF = 5  P = 0.005
S = 17.37  DF = 5  P = 0.004 (adjusted for ties)

                       Est    Sum of
Stimulus        N   Median     Ranks
1               4   0.6500      11.0
2               4   1.0000      23.0
3               4   0.8000      19.0
4               4   0.7500      17.0
5               4   0.5000       4.5
6               4   0.6000       9.5

Grand median    =   0.7167
```

EJEMPLO 15.9

Encuentre el valor p aproximado para la prueba del ejemplo 15.8.

Solución Si se consulta la tabla 5 del apéndice I con 5 *df*, se encuentra que el valor observado de $F_r = 16.75$ excede del valor de la tabla $\chi^2_{.005} = 16.7496$. Por tanto, el valor p es muy cercano a .005, pero ligeramente menor a éste.

PRUEBA F_r DE FRIEDMAN PARA UN DISEÑO ALEATORIZADO DE BLOQUES

1. Hipótesis nula: H_0 : Las k distribuciones poblacionales son idénticas
2. Hipótesis alternativa: H_a : Al menos dos de las k distribuciones poblacionales difieren en ubicación
3. Estadístico de prueba: $F_r = \frac{12}{bk(k+1)} \Sigma T_i^2 - 3b(k+1)$

donde

b = Número de bloques

k = Número de tratamientos

T_i = Suma de rango para el tratamiento i, $i = 1, 2, \ldots, k$

4. Región de rechazo: $F_r > \chi^2_\alpha$, donde χ^2_α está basada en $(k - 1)$ df

Suposición: O bien el número k de tratamientos o el número b de bloques es mayor a cinco.

15.7 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

MIS DATOS EX1538

15.38 Se usa un diseño aleatorizado de bloques para comparar tres tratamientos en seis bloques.

	Tratamiento		
Bloque	1	2	3
1	3.2	3.1	2.4
2	2.8	3.0	1.7
3	4.5	5.0	3.9
4	2.5	2.7	2.6
5	3.7	4.1	3.5
6	2.4	2.4	2.0

a. Use la prueba F_r de Friedman para detectar diferencias en ubicación entre las tres distribuciones de tratamiento. Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba del inciso a).

c. Efectúe un análisis de varianza y dé la tabla ANOVA para el análisis.

d. Dé el valor del estadístico F para probar la igualdad de las tres medias de tratamiento.

e. Dé el valor p aproximado para el estadístico F del inciso d).

f. Compare los valores p para las pruebas de los incisos a) y d), y explique las implicaciones prácticas de la comparación.

MIS DATOS EX1539

15.39 Un diseño aleatorizado de bloques se usa para comparar cuatro tratamientos en ocho bloques.

	Tratamiento			
Bloque	1	2	3	4
1	89	81	84	85
2	93	86	86	88
3	91	85	87	86
4	85	79	80	82
5	90	84	85	85
6	86	78	83	84
7	87	80	83	82
8	93	86	88	90

a. Use la prueba F_r de Friedman para detectar diferencias en ubicación entre las cuatro distribuciones de tratamiento. Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba del inciso a).

c. Efectúe un análisis de varianza y dé la tabla ANOVA para el análisis.

d. Use el valor del estadístico F para probar la igualdad de las cuatro medias de tratamiento.

e. Dé el valor p aproximado para el estadístico F del inciso d).

f. Compare los valores p para las pruebas de los incisos a) y d), y explique las implicaciones prácticas de la comparación.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1540

15.40 Precios de supermercado En una comparación de los precios de artículos en cinco supermercados, se seleccionaron al azar seis artículos y el precio de cada uno se registró para cada uno de los cinco supermercados. El objetivo del estudio era ver si los datos indicaban diferencias en los niveles de precios entre los cinco supermercados. Los precios se detallan en la tabla.

Artículo	Kash n' Karry	Publix	Winn-Dixie	Albertsons	Alimento por menos
Apio	.33	.34	.69	.59	.58
Pasta dental Colgate	1.28	1.49	1.44	1.37	1.28
Caldo de res Campbell	1.05	1.19	1.23	1.19	1.10
Piña picada	.83	.95	.95	.87	.84
Espagueti Mueller	.68	.79	.83	.69	.69
Salsa de tomate Heinz	1.41	1.69	1.79	1.65	1.49

a. ¿La distribución de los precios difiere de un supermercado a otro? Pruebe usando la prueba F_r de Friedman con $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprételo.

MIS DATOS EX1541 **15.41 Productos químicos tóxicos** Se realizó un experimento para comparar los efectos de tres productos químicos tóxicos, A, B y C, en la piel de ratas. Cuadros de una pulgada de piel fueron tratados con los productos y luego calificados del 0 al 10, dependiendo del grado de irritación. Tres cuadros adyacentes de 1 pulgada fueron marcados en los lomos de ocho ratas y cada uno de los tres productos se aplicó a cada rata. Así, el experimento fue bloqueado en ratas para eliminar la variación en sensibilidad de la piel de una rata a otra.

Ratas							
1	2	3	4	5	6	7	8
B 5	A 9	A 6	C 6	B 8	C 5	C 5	B 7
A 6	C 4	B 9	B 8	C 8	A 5	B 7	A 6
C 3	B 9	C 3	A 5	A 7	B 7	A 6	C 7

a. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una diferencia en los efectos tóxicos de los tres productos químicos? Pruebe usando la prueba F_r de Friedman con $\alpha = .05$.

b. Encuentre el valor p aproximado para la prueba e interprételo.

MIS DATOS EX1542 **15.42 Medicina que sabe bien** En un estudio del sabor de antibióticos en niños, la Dra. Doreen Matsui y colegas emplearon una muestra voluntaria de niños sanos para evaluar sus reacciones al sabor de cuatro antibióticos.[4] La respuestas de los niños se midieron en una escala analógica visual de 10 centímetros (cm) que incorporaba el uso de rostros, de tristes (baja calificación) a alegres (alta calificación). La calificación mínima era 0 y la máxima era 10. Para los datos siguientes (simulados de los resultados del informe de Matsui), a cada uno de cinco niños se le pidió probara cada uno de los cuatro antibióticos y los calificara usando la escala analógica visual (rostros) de 0 a 10 cm.

	Antibiótico			
Niño	1	2	3	4
1	4.8	2.2	6.8	6.2
2	8.1	9.2	6.6	9.6
3	5.0	2.6	3.6	6.5
4	7.9	9.4	5.3	8.5
5	3.9	7.4	2.1	2.0

a. ¿Qué diseño se usa para recolectar estos datos?

b. Usando el paquete estadístico apropiado para una clasificación de dos vías, elabore una gráfica de probabilidad normal de los residuales así como una gráfica de residuales contra antibióticos. ¿El análisis usual de suposiciones de varianza parece quedar satisfecho?

c. Use la prueba no paramétrica apropiada para probar si hay diferencias en las distribuciones de respuestas a los sabores de los cuatro antibióticos.

d. Comente sobre los resultados del análisis de varianza del inciso b) comparados con la prueba no paramétrica del inciso c).

15.8 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE RANGO

En las secciones precedentes, usamos rangos para indicar la magnitud relativa de observaciones en pruebas no paramétricas para la comparación de tratamientos. A continuación usaremos la misma técnica para probar una relación entre dos variables ordenadas. Dos coeficientes comunes de correlación de rango son el **Spearman r_s** y el **Kendall τ**. Presentaremos el r_s de Spearman porque su cálculo es idéntico al del coeficiente de correlación muestral r de los capítulos 3 y 12.

Supongamos que ocho profesores de ciencias de escuela elemental han sido clasificados por un juez de acuerdo con su capacidad de enseñanza y todos han tomado un “examen nacional para maestros”. Los datos se dan en la tabla 15.11. ¿Los datos sugieren un acuerdo entre la calificación del juez y la calificación del examen? Esto es, ¿hay una correlación entre rangos y calificaciones de examen?

TABLA 15.11 **Rangos y calificaciones de examen para ocho profesores**

Profesor	Calificación de juez	Calificación de examen
1	7	44
2	4	72
3	2	69
4	6	70
5	1	93
6	3	82
7	8	67
8	5	80

Las dos variables de interés son calificación de juez y calificación de examen. La primera ya está en forma de rango y las calificaciones de examen se pueden ordenar de manera similar, como se ve en la tabla 15.12. Las calificaciones para observaciones empatadas se obtienen al promediar las calificaciones que habrían tenido las observaciones empatadas si no se hubieran observado empates. El coeficiente de correlación de rango de Spearman, r_s, se calcula usando los rangos de las mediciones pareadas en las dos variables x y y en la fórmula para r (véase el capítulo 12).

TABLA 15.12 **Rangos de datos de la tabla 15.11**

Profesor	Calificación de juez, x_i	Calificación de examen, y_i
1	7	1
2	4	5
3	2	3
4	6	4
5	1	8
6	3	7
7	8	2
8	5	6

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE RANGO DE SPEARMAN

$$r_s = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

donde x_i y y_i representan los rangos del i-ésimo par de observaciones y

$$S_{xy} = \Sigma\,(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \Sigma\, x_i y_i - \frac{(\Sigma\, x_i)(\Sigma\, y_i)}{n}$$

$$S_{xx} = \Sigma\,(x_i - \bar{x})^2 = \Sigma\, x_i^2 - \frac{(\Sigma\, x_i)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \Sigma\,(y_i - \bar{y})^2 = \Sigma\, y_i^2 - \frac{(\Sigma\, y_i)^2}{n}$$

Cuando no haya empates en las x observaciones o las y observaciones, la expresión para r_s algebraicamente se reduce a la expresión más sencilla

$$r_s = 1 - \frac{6\,\Sigma\, d_i^2}{n(n^2 - 1)} \qquad \text{donde } d_i = (x_i - y_i)$$

Si el número de empates es pequeño en comparación con el número de pares de datos, resulta un pequeño error al usar esta fórmula breve.

EJEMPLO 15.10

Calcule r_s para los datos de la tabla 15.12.

Solución Las diferencias y cuadrados de diferencias entre las dos calificaciones se dan en la tabla 15.13. Sustituyendo valores en la fórmula para r_s, tenemos

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(144)}{8(64 - 1)} = -.714$$

TABLA 15.13 **Diferencias y cuadrados de diferencias para las calificaciones del profesor**

Profesor	x_i	y_i	d_i	d_i^2
1	7	1	6	36
2	4	5	−1	1
3	2	3	−1	1
4	6	4	2	4
5	1	8	−7	49
6	3	7	−4	16
7	8	2	6	36
8	5	6	−1	1
Total				144

El coeficiente de correlación de rango de Spearman se puede usar como estadístico de prueba para probar la hipótesis de que no haya asociación entre dos poblaciones. Se puede suponer que los n pares de observaciones (x_i, y_i) han sido seleccionadas al azar y, por tanto, ninguna asociación entre las poblaciones implica una asignación aleatoria de los n rangos dentro de cada muestra. Cada asignación aleatoria (para las dos muestras) representa un evento sencillo asociado con el experimento, y un valor de r_s se puede calcular para cada una. Entonces, es posible calcular la probabilidad de que r_s tome un valor absoluto grande debido sólo a una probabilidad y, por tanto, sugiere una asociación entre poblaciones cuando no existe ninguna.

La región de rechazo para una prueba de dos colas se muestra en la figura 15.12. Si la hipótesis alternativa es que la correlación entre x y y sea negativa, se rechazaría H_0 para valores negativos de r_s cercanos a -1 (en la cola inferior de la figura 15.12). Del mismo modo, si la hipótesis alternativa es que la correlación entre x y y es positiva, se rechazaría H_0 para valores positivos grandes de r_s (en la cola superior de la figura 15.12).

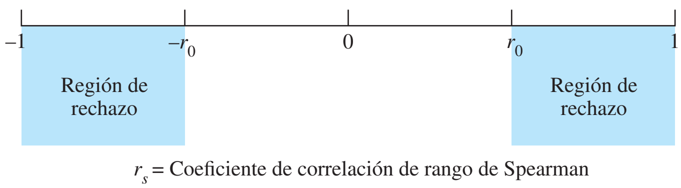


FIGURA 15.12 Región de rechazo para una prueba de dos colas de la hipótesis nula de no asociación, usando la prueba de correlación de rango de Spearman

Los valores críticos de r_s se dan en la tabla 9 del apéndice I. Una versión abreviada se muestra en la tabla 15.14. En sentido horizontal en la tabla 15.14 (y la tabla 9 del apéndice I) están los valores registrados de α que podrían usarse para una prueba de una cola de la hipótesis nula de no asociación entre x y y. El número de pares de rango n aparece en el lado izquierdo de la tabla. Las entradas de la tabla dan el valor crítico r_0 para una prueba de una cola. Entonces, $P(r_s \geq r_0) = \alpha$.

Por ejemplo, supongamos que tenemos $n = 8$ pares de rango y la hipótesis alternativa es que la correlación entre los rangos es positiva. Se desearía rechazar la hipótesis nula de no asociación sólo para valores positivos grandes de r_s y se usaría una prueba de una cola. Si se consulta la tabla 15.14 y se usa el renglón correspondiente a $n = 8$ y la columna para $\alpha = .05$, se lee $r_0 = .643$. Por tanto, se puede rechazar H_0 para todos los valores de r_s mayores o iguales a .643.

La prueba se realiza exactamente en la misma forma si se desea probar sólo la hipótesis alternativa de que los rangos tienen correlación negativa. La única diferencia es que se rechazaría la hipótesis nula si $r_s \leq -.643$. Esto es, se usa el negativo del valor tabulado de r_0 para obtener el valor crítico de cola inferior.

TABLA 15.14 **Versión abreviada de la tabla 9 del apéndice I; para la prueba de correlación de rango de Spearman**

n	$\alpha = .05$	$\alpha = .025$	$\alpha = .01$	$\alpha = .005$
5	.900	—	—	—
6	.829	.886	.943	—
7	.714	.786	.893	—
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545		
15	.441	.525		
16	.425			
17	.412			
18	.399			
19	.388			
20	.377			

Para efectuar una prueba de dos colas, se rechaza la hipótesis nula si $r_s \geq r_0$ o $r_s \leq -r_0$. El valor de α para la prueba es el doble del valor que se ve en la parte superior de la tabla. Por ejemplo, si $n = 8$ y se escoge la columna .025, se rechaza H_0 si $r_s \geq .738$ o $r_s \leq -.738$. El valor α para la prueba es 2(.025)= .05.

PRUEBA DE CORRELACIÓN DE RANGO DE SPEARMAN

1. Hipótesis nula: H_0 : No hay asociación entre los pares de rangos.
2. Hipótesis alternativa: H_a : Hay asociación entre los pares de rangos (una prueba de dos colas); o bien, H_a : La correlación entre los pares de rangos es positiva o negativa (una prueba de una cola).
3. Estadístico de prueba: $r_s = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$

   donde x_i y y_i representan las filas de la pareja ith de las observaciones.
4. Región de rechazo: Para una prueba de dos colas, rechace H_0 se $r_s \geq r_0$ o $r_s \leq -r_0$, donde r_0 se da en la tabla 9 del apéndice I. Duplique la probabilidad tabulada para obtener el valor de α para la prueba de dos colas. Para una prueba de una cola, rechace H_0 si $r_s \geq r_0$ (para una prueba de cola superior) o $r_s \leq -r_0$ (para una prueba de cola inferior). El valor α para una prueba de una cola es el valor que se muestra en la tabla 9 del apéndice I.

EJEMPLO 15.11

Pruebe la hipótesis de que no hay asociación entre las poblaciones para el ejemplo 15.10.

Solución El valor crítico de r_s para una prueba de una cola con $\alpha = .05$ y $n = 8$ es .643. Se puede suponer que una correlación entre la calificación del juez y las calificaciones de examen de profesores no podrían ser posiblemente positivas. (Una calificación baja significa buena enseñanza y debe estar asociada con una alta calificación de examen si el juez y la prueba miden la capacidad de enseñanza.) La hipótesis alternativa es que el **coeficiente de correlación de rango poblacional** ρ_s es menor a 0 y nos interesa una prueba estadística de una cola. Entonces, α para la prueba es el valor tabulado para .05 y se puede rechazar la hipótesis nula si $r_s \leq -.643$.

El valor calculado del estadístico de prueba, $r_s = -.714$, es menor que el valor crítico para $\alpha = .05$. En consecuencia, la hipótesis nula se rechaza al nivel de significancia $\alpha = .05$. Es evidente que existe algún acuerdo entre las calificaciones del juez y las calificaciones del examen. No obstante, debe observarse que este acuerdo podría existir cuando *ninguna* da una medida adecuada para medir la capacidad de enseñanza. Por ejemplo, la asociación podría existir si el juez y quienes formularon el examen de profesores tuvieran un concepto erróneo, pero semejante, de las características de la buena enseñanza.

¿Qué es exactamente lo que mide r_s? El coeficiente de correlación de Spearman detecta no sólo una relación lineal entre dos variables, sino que también mide cualquier otra relación monotónica (y aumenta cuando x aumenta o y disminuye cuando x aumenta). Por ejemplo, si se calculó r_s para los dos conjuntos de datos de la tabla 15.15, ambos producirían un valor de $r_s = 1$ porque los rangos asignados para x y y en ambos casos concuerdan para todos los pares (x, y). Es importante recordar que un valor significativo de r_s indica una relación entre x y y que es creciente o decreciente, pero no necesariamente lineal.

TABLA 15.15 **Conjuntos de datos gemelos con $r_s = 1$**

x	$y = x^2$	x	$y = \log10(x)$
1	1	10	1
2	4	100	2
3	9	1000	3
4	16	10 000	4
5	25	100 000	5
6	36	1 000 000	6

15.8 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

15.43 Dé la región de rechazo para una prueba para detectar correlación positiva de rango si el número de pares de rangos es 16 y se tienen estos valores α:

a. $\alpha = .05$ **b.** $\alpha = .01$

15.44 Dé la región de rechazo para una prueba para detectar correlación negativa de rango si el número de pares de rangos es 12 y se tienen estos valores α:

a. $\alpha = .05$ **b.** $\alpha = .01$

15.45 Dé la región de rechazo para una prueba para detectar correlación de rango si el número de pares de rangos es 25 y se tienen estos valores α:

a. $\alpha = .05$ **b.** $\alpha = .01$

15.46 Las siguientes observaciones pareadas se obtuvieron en dos variables x y y:

x	1.2	.8	2.1	3.5	2.7	1.5
y	1.0	1.3	.1	−.8	−.2	.6

a. Calcule el coeficiente de correlación de rango de Spearman r_s.

b. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una correlación entre x y y? Pruebe usando $\alpha = .05$.

APLICACIONES

MIS DATOS EX1547

15.47 Calificación de candidatos políticos Un politólogo deseaba examinar la relación entre la imagen que tiene un votante, respecto de un candidato político conservador y la distancia (en millas) entre las residencias del votante y el candidato. Cada uno de 12 votantes calificó al candidato en una escala de 1 a 20.

Votante	Calificación	Distancia
1	12	75
2	7	165
3	5	300
4	19	15
5	17	180
6	12	240
7	9	120
8	18	60
9	3	230
10	8	200
11	15	130
12	4	130

a. Calcule el coeficiente de correlación de rango de Spearman r_s.

b. ¿Estos datos dan suficiente evidencia para indicar una correlación negativa entre calificación y distancia?

MIS DATOS EX1548

15.48 Carreras de competencia ¿El número de años de experiencia en carreras de competencia está relacionado con el rendimiento en carreras de distancia de un corredor? Los datos de nueve corredores, obtenidos de un estudio hecho por Scott Powers y colegas, se dan en la tabla siguiente:[5]

Corredor	Años de correr en competencias	Tiempo de llegada en 10 kilómetros (min)
1	9	33.15
2	13	33.33
3	5	33.50
4	7	33.55
5	12	33.73
6	6	33.86
7	4	33.90
8	5	34.15
9	3	34.90

a. Calcule el coeficiente de correlación de rango entre años de carreras en competencias x y el tiempo y de llegada a la meta en una carrera de 10 kilómetros.

b. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una correlación de rango entre y y x? Pruebe usando $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1549

15.49 Raquetas de tenis Los datos mostrados en la tabla siguiente dan medidas de rigidez al doblamiento y de rigidez al torcimiento, determinadas por pruebas de ingeniería en 12 raquetas de tenis.

Raqueta	Rigidez al doblamiento	Rigidez al torcimiento
1	419	227
2	407	231
3	363	200
4	360	211
5	257	182
6	622	304
7	424	384
8	359	194
9	346	158
10	556	225
11	474	305
12	441	235

a. Calcule el coeficiente de correlación de rango r_s entre rigidez al doblamiento y rigidez al torcimiento.

b. Si una raqueta tiene rigidez al doblamiento, ¿también es probable que tenga rigidez al torcimiento? Use el coeficiente de correlación de rango para determinar si hay una relación positiva significativa entre rigidez al doblamiento y rigidez al torcimiento. Use $\alpha = .05$.

15.50 Calificaciones de estudiante El director de una escuela sospechaba que la actitud de un profesor, hacia un alumno de primer año, dependía de su juicio original de la capacidad del niño. El director también sospechaba que mucho de ese juicio estaba basado en la calificación del coeficiente de inteligencia (IQ) del alumno, que por lo general era conocida por el profesor. Después de tres semanas de enseñanza, a un profesor se le pidió ordenara los nueve niños de su grupo de 1 (la más alta) a 9 (la más baja) en cuanto a su opinión de su capacidad. Calcule r_s para estas calificaciones de IQ del profesor:

Profesor	1	2	3	4	5	6	7	8	9
IQ	3	1	2	4	5	7	9	6	8

15.51 Calificaciones de estudiante, continúa Consulte el ejercicio 15.50. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una correlación positiva entre las calificaciones del profesor y los rangos de los IQ? Use $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1552

15.52 Críticos de arte Dos críticos de arte calificaron 10 pinturas de artistas contemporáneos (pero anónimos), de acuerdo con su atractivo a los críticos respectivos. Las calificaciones se ilustran en la tabla siguiente. ¿Los críticos parecen estar de acuerdo en sus calificaciones de arte contemporáneo? Es decir, ¿los datos dan suficiente evidencia para indicar una correlación positiva entre los críticos A y B? Pruebe usando un valor α de .05 o cercano a éste.

Pintura	Crítico A	Crítico B
1	6	5
2	4	6
3	9	10
4	1	2
5	2	3
6	7	8
7	3	1
8	8	7
9	5	4
10	10	9

MIS DATOS EX1553

15.53 Calificación de hojas de tabaco Se realizó un experimento para estudiar la relación entre las calificaciones de un experto en clasificar hojas de tabaco y el contenido de humedad de las hojas. Doce de estas fueron calificadas por el experto en una escala de 1 a 10 y se tomaron las lecturas correspondientes del contenido de humedad.

Hoja	Calificación del experto	Contenido de humedad
1	9	.22
2	6	.16
3	7	.17
4	7	.14
5	5	.12
6	8	.19
7	2	.10
8	6	.12
9	1	.05
10	10	.20
11	9	.16
12	3	.09

Calcule r_s. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar una asociación entre las calificaciones del experto y el contenido de humedad de las hojas?

MIS DATOS EX1554

15.54 Educación en conductas sociales Se implementó un programa de educación en conductas sociales, con siete estudiantes a un mediano grado de dificultad, para determinar si el programa causaba mejoras en medidas de antes y después de examen, así como en calificaciones de conducta. Para uno de estos exámenes, las calificaciones de antes y después de examen para los siete estudiantes se dan en la tabla siguiente:

Estudiante	Antes	Después
Earl	101	113
Ned	89	89
Jasper	112	121
Charlie	105	99
Tom	90	104
Susie	91	94
Lori	89	99

a. Use una prueba no paramétrica para determinar si hay una relación positiva significativa entre las calificaciones de antes y después de examen.

b. ¿Estos resultados concuerdan con los resultados de la prueba paramétrica del ejercicio 12.51?

15.9 RESUMEN

Las pruebas no paramétricas presentadas en este capítulo son sólo algunas de las numerosas pruebas no paramétricas disponibles para los experimentadores. Las pruebas presentadas aquí son aquellas para las que hay tablas de valores críticos disponibles fácilmente.

Los métodos estadísticos no paramétricos son especialmente útiles cuando las observaciones se pueden ordenar pero no colocar exactamente en una escala de mediciones. También, los métodos no paramétricos son los únicos que se pueden usar cuando se hayan apegado correctamente a los diseños de muestreo, pero los datos no se supone que sigan o no se puede suponer que sigan una o más suposiciones de distribución prescritas.

Hemos presentado una amplia variedad de técnicas no paramétricas, que se pueden usar cuando los datos no están normalmente distribuidos, o las otras suposiciones requeridas no se satisfacen. En la literatura existen procedimientos de una muestra; sin embargo, nos hemos concentrado en analizar dos o más muestras que han sido correctamente seleccionadas usando muestreo aleatorio e independiente, como lo requiere el diseño de que se trate. Los análogos no paramétricos de los procedimientos paramétricos presentados en los capítulos 10-14 son sencillos y muy fáciles de poner en práctica:

- La prueba de suma de rango de Wilcoxon es el análogo no paramétrico de la prueba t de dos muestras.
- La prueba del signo y las pruebas de rango con signo de Wilcoxon son los análogos no paramétricos de la prueba t de muestra pareada.

- La prueba H de Kruskal-Wallis es el rango equivalente al análisis de varianza de una vía de la prueba F.
- La prueba F_r de Friedman es el rango equivalente del análisis de varianza de dos vías del diseño aleatorizado de bloques de la prueba F.
- El r_s de correlación de rango de Spearman es el rango equivalente al coeficiente de correlación de Pearson.

Estos y muchos más procedimientos no paramétricos están disponibles como alternativas a las pruebas paramétricas presentadas anteriormente. Es importante tener en cuenta que cuando los supuestos necesarios de las poblaciones muestreadas están relajadas, nuestra capacidad para detectar diferencias significativas en una o más características de la población disminuye.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. Métodos no paramétricos

1. Estos métodos se utilizan cuando los datos no se pueden medir en una escala cuantitativa, o cuando
2. La escala numérica de mediciones sea fijada arbitrariamente por el investigador, o bien, cuando
3. Las suposiciones paramétricas tales como normalidad o varianza constante sean violadas gravemente.

II. Prueba de la suma de rango de Wilcoxon: muestras aleatorias independientes

1. Conjuntamente ordene las dos muestras. Designe la muestra más pequeña como muestra 1. Entonces

$$T_1 = \text{Suma de rango de la muestra 1}$$
$$T_1^* = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T_1$$

2. Use T_1 para probar si la población 1 está a la izquierda de la población 2. Use T_1^* para probar si la población 1 está a la derecha de la población 2. Use la menor de T_1 y T_1^* para probar si hay diferencia en las ubicaciones de las dos poblaciones.
3. La tabla 7 del apéndice I tiene valores críticos para el rechazo de H_0.
4. Cuando los tamaños muestrales sean grandes, use la aproximación normal:

$$\mu_T = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$$
$$\sigma_T^2 = \frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}$$
$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$

III. Prueba del signo para un experimento pareado

1. Encuentre x, el número de veces que la observación A exceda de la observación B para un par determinado.
2. Para probar si hay diferencia en dos poblaciones, pruebe $H_0 : p = .5$ contra una alternativa de una o de dos colas.
3. Use la tabla 1 del apéndice I para calcular el valor p para la prueba.
4. Cuando los tamaños muestrales sean grandes, use la aproximación normal:

$$z = \frac{x - .5n}{.5\sqrt{n}}$$

IV. Prueba de rango con signo de Wilcoxon: experimento pareado

1. Calcule las diferencias en las observaciones pareadas. Ordene los *valores absolutos* de las diferencias. Calcule las sumas de rango T^+ y T^- para las diferencias positivas y negativas, respectivamente. La estadística de prueba T es la menor de las dos sumas de rango.
2. La tabla 8 del apéndice I tiene valores críticos para el rechazo de H_0 para pruebas de una y de dos colas.
3. Cuando los tamaños muestrales sean grandes, use la aproximación normal:

$$z = \frac{T^+ - [n(n + 1)/4]}{\sqrt{[n(n + 1)(2n + 1)]/24}}$$

V. Prueba *H* de Kruskal-Wallis: diseño completamente aleatorizado

1. Conjuntamente ordene las n observaciones de las k muestras. Calcule las sumas de rango, T_i = suma de rango de la muestra i y el estadístico de prueba

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

2. Si la hipótesis nula de igualdad de distribuciones es falsa, H será inusualmente grande, resultando en una prueba de una cola.
3. Para tamaños muestrales de cinco o mayores, la región de rechazo para H está basada en la distribución ji cuadrada con $(k - 1)$ grados de libertad.

VI. Prueba F_r de Friedman: diseño aleatorizado de bloques

1. Ordene las respuestas dentro de cada bloque de 1 a k. Calcule las sumas de rango, $T_1, T_2, \ldots, T_k$, y el estadístico de prueba

$$F_r = \frac{12}{bk(k+1)} \Sigma T_i^2 - 3b(k+1)$$

2. Si la hipótesis nula de igualdad de distribuciones de tratamiento es falsa, F_r será inusualmente grande, resultando en una prueba de una cola.
3. Para tamaños de bloques de cinco o mayores, la región de rechazo para F_r está basada en la distribución ji cuadrada con $(k - 1)$ grados de libertad.

VII. Coeficiente de correlación de rango de Spearman

1. Ordene las respuestas para las dos variables de menor a mayor.
2. Calcule el coeficiente de correlación para las observaciones ordenadas:

$$r_s = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad \text{o} \quad r_s = 1 - \frac{6\,\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

si no hay empates

3. La tabla 9 del apéndice I da valores críticos para correlaciones de rango significativamente diferentes de 0.
4. El coeficiente de correlación de rango detecta no sólo correlación lineal significativa sino también cualquier otra relación monotónica entre las dos variables.

MI MINITAB

Procedimientos no paramétricos

Numerosos procedimientos no paramétricos están disponibles en el paquete *MINITAB*, incluyendo la mayor parte de las pruebas estudiadas en este capítulo. Los cuadros de diálogo son conocidos para el usuario por ahora y veremos las pruebas en el orden presentado en el capítulo.

Para poner en práctica la prueba de la suma de rango de Wilcoxon para dos muestras aleatorias independientes, introduzca los dos conjuntos de datos muestrales en dos columnas (por ejemplo, C1 y C2) de la hoja de trabajo *MINITAB*. El cuadro de diálogo de la figura 15.13 se genera usando **Stat** → **Nonparametrics** → **Mann-Whitney**. Seleccione C1 y C2 para la **First** y **Second Samples** e indique el coeficiente de confianza apropiado (para un intervalo de confianza) e hipótesis alternativa. Al hacer clic en **OK** se genera la salida de la figura 15.1.

La prueba del signo *y* la prueba de rango con signo de Wilcoxon para muestras pareadas se efectúan exactamente en la misma forma, con un cambio sólo en el último comando de la secuencia. Incluso los cuadros de diálogo son idénticos. Introduzca los datos en dos columnas de la hoja de trabajo *MINITAB* (usamos los datos de mezcla de pastel en la sección 15.5). Antes que se pueda implementar cada prueba, se debe generar una columna de diferencias usando **Calc** → **Calculator**, como se ve en la figura 15.14. Use **Stat** → **Nonparametrics** → **1-Sample Sign** o **Stat** → **Nonparametrics** →

FIGURA 15.13

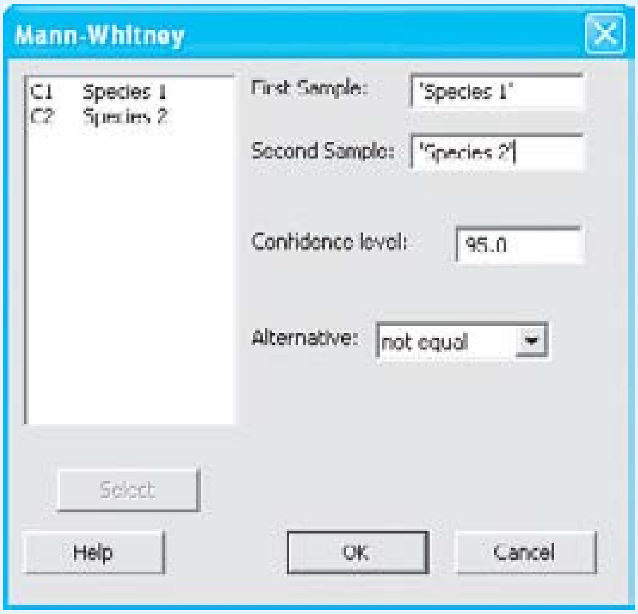
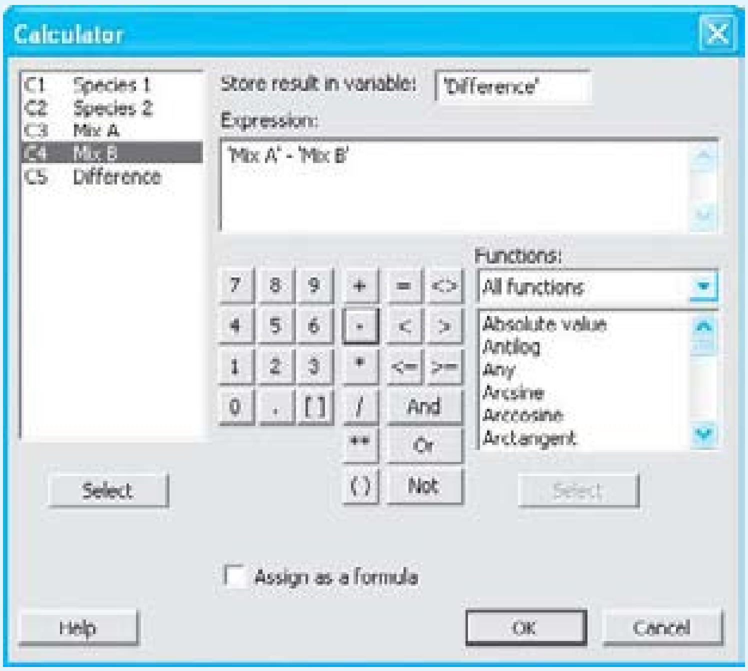


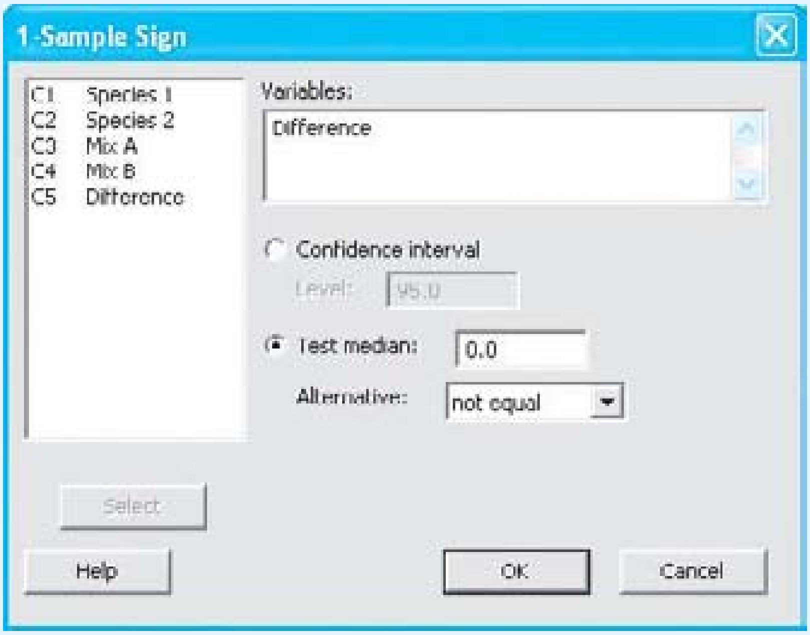
FIGURA 15.14



1-Sample Wilcoxon para generar el cuadro de diálogo apropiado que se ve en la figura 15.15. Recuerde que la mediana es el valor de una variable tal que 50% de los valores son más pequeños y 50% son más grandes. En consecuencia, si las dos distribuciones poblacionales son iguales, la mediana de las diferencias será 0. Esto es equivalente a la hipótesis nula

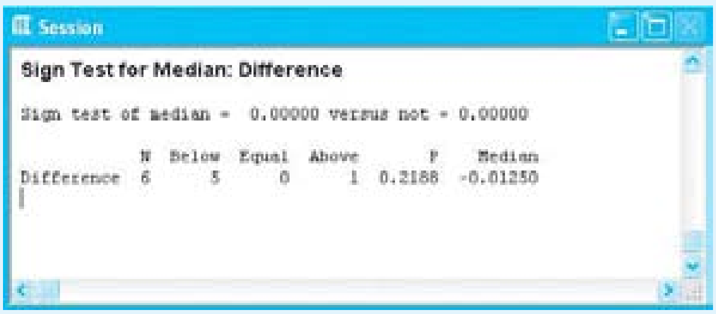
$$H_0 : P(\text{diferencia positiva}) = P(\text{diferencia negativa}) = .5$$

FIGURA 15.15



empleada para la prueba del signo. Seleccione la columna de diferencias para la caja Variables y seleccione la mediana de prueba igual a 0 con la alternativa apropiada. Dé un clic en **OK** para obtener la salida impresa de cualquiera de las dos pruebas. La salida impresa de ventana para la prueba del signo, ilustrada en la figura 15.16, indica una diferencia no significativa en las distribuciones de densidades para las dos mezclas de pastel. Observe que el valor *p* (.2188) no es igual que el valor *p* para la prueba de rango con signo de Wilcoxon (.093 de la figura 15.4). No obstante, si se prueba al nivel de 5%, ambas pruebas producen diferencias no significativas.

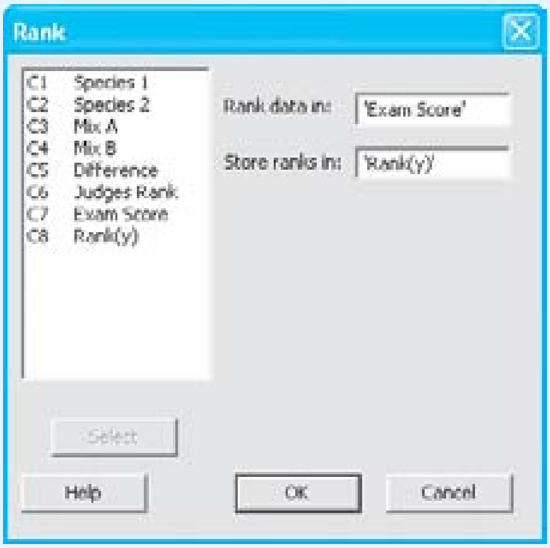
FIGURA 15.16



Los procedimientos para implementar la prueba H de Kruskal-Wallis para k muestras independientes y la prueba F_r de Friedman para un diseño aleatorizado de bloques, son idénticos a los procedimientos empleados para sus equivalentes paramétricos. Repase los métodos descritos en la sección “Mi *MINITAB*” del capítulo 11. Una vez que haya introducido los datos como se explica en esa sección, los comandos **Stat** → **Nonparametrics** → **Kruskal-Wallis** o **Stat** → **Nonparametrics** → **Friedman** van a generar un cuadro de diálogo en el que el usuario especifica la columna de respuesta y la columna del factor o la columna de respuesta, la columna del tratamiento y la columna de bloque, respectivamente. Dé un clic en **OK** para obtener las salidas impresas para estas pruebas no paramétricas.

Finalmente, se puede generar el coeficiente no paramétrico de correlación de rango r_s si se introducen los datos en dos columnas y se ordenan los datos usando **Data → Rank**. Por ejemplo, los datos sobre la calificación del juez y las calificaciones del examen se introdujeron en las columnas C6 y C7 de nuestra hoja de cálculo *MINITAB*. Como las calificaciones del juez ya están ordenadas, sólo necesitamos ordenar C7 al seleccionar "Exam Score" y guardar los rangos en C8 [llamada "Rank (y)" en la figura 15.17]. Los comandos **Stat → Basic Statistics → Correlation** producirán ahora el coeficiente de correlación de rango cuando C6 y C8 se seleccionen. No obstante, el valor *p* que se ve en la *salida no produce* exactamente la misma prueba que los valores críticos de la tabla 15.14. Debe compararse el valor de r_s obtenido por el usuario con el valor tabulado para comprobar si hay una asociación significativa entre las dos variables.

FIGURA 15.17



Ejercicios suplementarios

MIS DATOS EX1555 **15.55 Tiempos de respuesta** Se realizó un experimento para comparar los tiempos de respuesta para dos estímulos diferentes. Para eliminar la natural variabilidad de una persona a otra en las respuestas, ambos estímulos se presentaron a cada una de nueve personas, permitiendo así un análisis de las diferencias entre estímulos *dentro* de cada persona. La tabla es una lista de tiempos de respuesta (en segundos).

Persona	Estímulo 1	Estímulo 2
1	9.4	10.3
2	7.8	8.9
3	5.6	4.1
4	12.1	14.7
5	6.9	8.7
6	4.2	7.1
7	8.8	11.3
8	7.7	5.2
9	6.4	7.8

a. Use la prueba del signo para determinar si existe suficiente evidencia para indicar una diferencia en los tiempos medios de respuesta para los dos estímulos. Use una región de rechazo para la cual $\alpha \leq .05$.

b. Pruebe la hipótesis de que no hay diferencia en tiempos medios de respuesta usando la prueba *t* de Student.

15.56 Tiempos de respuesta, continúa Consulte el ejercicio 15.55. Pruebe la hipótesis de que no hay diferencia en las distribuciones de tiempos de respuesta para los dos estímulos, usando la prueba del rango con signo de Wilcoxon. Use una región de rechazo para la cual α sea tan cercana como sea posible a la α obtenida en el ejercicio 15.55, inciso a).

MIS DATOS EX1557 **15.57 Gemelos idénticos** Para comparar dos escuelas secundarias, A y B, en efectividad académica, se diseñó un experimento que requería el uso de 10 pares de gemelos idénticos, donde cada gemelo acababa de terminar el sexto grado. En cada caso, los gemelos del mismo par habían tenido su enseñanza en los mismos salones de clase en cada nivel de grado. Un niño fue seleccionado al azar de cada par de gemelos y asignado a la escuela A. Los demás niños fueron enviados a la escuela B. Cerca del final del noveno grado, se aplicó cierto examen de aprovechamiento a cada niño del experimento. Las calificaciones del examen se ven en la tabla siguiente.

Par de gemelos	Escuela A	Escuela B
1	67	39
2	80	75
3	65	69
4	70	55
5	86	74
6	50	52
7	63	56
8	81	72
9	86	89
10	60	47

a. Pruebe (usando la prueba del signo) la hipótesis de que las dos escuelas son iguales en efectividad académica, medida por calificaciones en el examen de aprovechamiento, contra la alternativa de que las escuelas no son igualmente efectivas.

b. Suponga que se sabe que la escuela secundaria A tenía un mejor profesorado y mejores instalaciones de enseñanza. Pruebe la hipótesis de igual efectividad académica contra la alternativa de que la escuela A es superior.

15.58 Gemelos idénticos II Consulte el ejercicio 15.57. ¿Qué respuestas se obtienen si se usa la prueba de rango con signo de Wilcoxon para analizar los datos? Compare con sus respuestas anteriores.

MIS DATOS EX1559 **15.59 Brillantez de papel** Los valores codificados para una medida de la brillantez del papel (reflectividad ligera), preparados por dos procesos diferentes, se dan en la tabla para muestras de nueve observaciones tomadas al azar de cada uno de los dos procesos. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las mediciones de la brillantez para los dos procesos? Use una prueba paramétrica y una no paramétrica y compare sus resultados.

Proceso	Brillantez								
A	6.1	9.2	8.7	8.9	7.6	7.1	9.5	8.3	9.0
B	9.1	8.2	8.6	6.9	7.5	7.9	8.3	7.8	8.9

15.60 Instrumentos de precisión Suponga (como en el caso de mediciones producidas por instrumentos de medición bien calibrados) que las medias de dos poblaciones son iguales. Use el estadístico de la suma de rango de Wilcoxon para probar hipótesis respecto a las varianzas poblacionales como sigue:

a. Ordene la muestra combinada.

b. Numere las observaciones ordenadas "de afuera hacia adentro"; esto es, numere la observación 1 más pequeña, la mayor 2, la siguiente a la más pequeña 3, la siguiente a la más grande 4, y así sucesivamente. Esta secuencia de números induce un ordenamiento en los símbolos A (objetos de la población A) y B (objetos de la población B). Si $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$, uno se esperaría hallar una preponderancia de las A cercana a la primera de las secuencia y así una "suma de rangos" relativamente pequeña para las observaciones A.

c. Dadas las mediciones de la tabla producidas por los instrumentos de precisión bien calibrados A y B, pruebe cerca del nivel $\alpha = .05$ para determinar si el instrumento B más costoso es más preciso que el A. (Observe que esto implica una prueba de una cola.) Use el estadístico de prueba de la suma de rango de Wilcoxon.

Instrumento A	Instrumento B
1060.21	1060.24
1060.34	1060.28
1060.27	1060.32
1060.36	1060.30
1060.40	

d. Pruebe usando la igualdad de varianza de la prueba F.

MIS DATOS EX1561 **15.61 Suavizadores de carne** Se realizó un experimento para comparar la suavidad de cortes de carne con dos suavizadores de carne diferentes, A y B. Para reducir el efecto de variables extrañas, los datos fueron pareados por el corte de carne específico al aplicar los suavizadores a dos cortes tomados de la misma res, al cocinar cortes pareados juntos y usar un solo juez para cada par. Después de la cocción, cada corte fue calificado por un juez en una escala de 1 a 10, con un 10 correspondiente a la carne más suave. Los datos se muestran para un solo juez. ¿Los datos dan suficiente evidencia para indicar que uno de los suavizadores tiende a recibir calificaciones más altas que el otro? La prueba t de Student sería más apropiada para analizar estos datos Explique.

	Suavizador	
Corte	A	B
Asado de paletilla	5	7
Asado de lomo	6	5
Filete de costilla	8	9
Pecho	4	5
Filete	9	9
Filete bola	3	5
Asado de pierna	7	6
Solomillo	8	8
Puntas de solomillo	8	9
Chuleta	9	10

MIS DATOS EX1562 **15.62 Entrevista a prospectos de trabajo** Una gran empresa selecciona graduados universitarios para un empleo usando tanto entrevistas como una prueba psicológica de aprovechamiento. Las entrevistas efectuadas en la casa matriz de la compañía son mucho más costosas que las que se puedan efectuar en el plantel. En consecuencia, la oficina de personal estaba interesada en determinar si las calificaciones de examen estaban correlacionadas con calificaciones de entrevistas y si las pruebas podrían ser sustituidas por entrevistas. La idea era no eliminar las entrevistas sino reducir su número. Para determinar si las medidas estaban correlacionadas, se calificaron 10 prospectos durante entrevistas y se examinaron. Las calificaciones pareadas se dan a continuación:

Persona	Calificación de entrevista	Calificación de examen
1	8	74
2	5	81
3	10	66
4	3	83
5	6	66
6	1	94
7	4	96
8	7	70
9	9	61
10	2	86

Calcule el coeficiente de correlación de rango de Spearman r_s. La calificación 1 se asigna al candidato juzgado como el mejor.

15.63 Entrevistas, continúa Consulte el ejercicio 15.62. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la correlación entre las calificaciones de entrevista y las calificaciones de examen es menor a cero? Si esta evidencia existe, ¿se puede decir que los exámenes se pueden usar para reducir el número de entrevistas?

15.64 Experimentos de asociación de palabras Una comparación de tiempos de reacción, para dos estímulos diferentes en un experimento psicológico de asociación de palabras, produjo los resultados siguientes cuando se aplicó a una muestra aleatoria de 16 personas:

Estímulo	Tiempo de reacción (segundos)							
1	1	3	2	1	2	1	3	2
2	4	2	3	3	1	2	3	3

¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en tiempos medios de reacción para los dos estímulos? Use una prueba apropiada, no paramétrica, y explique sus conclusiones.

MIS DATOS EX1565

15.65 Matemáticas y arte La tabla muestra las calificaciones de un grupo de 15 estudiantes en matemáticas y arte. Use la prueba de rango con signo de Wilcoxon para determinar si las calificaciones medianas para estos estudiantes difiere significativamente para las dos materias.

Estudiante	Matemáticas	Arte	Estudiante	Matemáticas	Arte
1	22	53	9	62	55
2	37	68	10	65	74
3	36	42	11	66	68
4	38	49	12	56	64
5	42	51	13	66	67
6	58	65	14	67	73
7	58	51	15	62	65
8	60	71			

15.66 Matemáticas y arte, continúa Consulte el ejercicio 15.65. Calcule el coeficiente de correlación de rango de Spearman para estos datos y pruebe H_0 : no hay asociación entre los pares ordenados al nivel de significancia de 10%.

15.67 Producción de trigo El ejercicio 11.68 presentó un análisis de varianza de las producciones de cinco variedades diferentes de trigo, observadas en un terreno cada una, en cada uno de seis lugares diferentes (véase el conjunto de datos EX1168). Los datos de este diseño aleatorizado de bloques se dan a continuación:

	Lugar					
Variedades	1	2	3	4	5	6
A	35.3	31.0	32.7	36.8	37.2	33.1
B	30.7	32.2	31.4	31.7	35.0	32.7
C	38.2	33.4	33.6	37.1	37.3	38.2
D	34.9	36.1	35.2	38.3	40.2	36.0
E	32.4	28.9	29.2	30.7	33.9	32.1

a. Use la prueba no paramétrica apropiada con el fin de determinar si los datos aportan suficiente evidencia para indicar una diferencia en las producciones, para las cinco diferentes variedades de trigo. Pruebe usando $\alpha = .05$.

b. El ejercicio 11.68 presentó una salida impresa de computadora del análisis de varianza para comparar las producciones medias para las cinco variedades de trigo. ¿Cómo se comparan los resultados del análisis de varianza de la prueba F con la prueba del inciso a)? Explique.

15.68 Aprendiendo a vender En el ejercicio 11.61 se compararon los números de ventas por estudiante, después de terminar uno de cuatro programas diferentes de capacitación en ventas (véase el conjunto de datos EX1161). Seis estudiantes completaron el programa de capacitación 1, ocho completaron el 2, y así sucesivamente. Los números de ventas por estudiante se muestran en la tabla siguiente.

	Programa de capacitación			
	1	2	3	4
	78	99	74	81
	84	86	87	63
	86	90	80	71
	92	93	83	65
	69	94	78	86
	73	85		79
		97		73
		91		70
Total	482	735	402	588

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar que la distribución de número de ventas por estudiante difiere de un programa de capacitación a otro? Determine usando la prueba no paramétrica apropiada.

b. ¿Cómo se comparan los resultados de la prueba del inciso a con los resultados del análisis de varianza de la prueba *F* del ejercicio 11.61?

15.69 Contaminación de plantas de productos químicos En el ejercicio 11.66 efectuamos un análisis de varianza para comparar los niveles medios de descargas residuales en agua, en cuatro plantas industriales diferentes (véase el conjunto de datos EX1166). Se tomaron cinco muestras del desecho líquido a la salida de cada una de las cuatro plantas industriales; los datos se muestran en la tabla siguiente.

Planta	Descargas contaminantes (lb/gal de desechos)				
A	1.65	1.72	1.50	1.37	1.60
B	1.70	1.85	1.46	2.05	1.80
C	1.40	1.75	1.38	1.65	1.55
D	2.10	1.95	1.65	1.88	2.00

a. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en los niveles de contaminantes para las cuatro plantas industriales diferentes? Pruebe usando la prueba no paramétrica apropiada.

b. Encuentre el valor *p* aproximado para la prueba e interprete.

c. Compare los resultados de la prueba del inciso a) con el análisis de varianza del ejercicio 11.66. ¿Los resultados concuerdan? Explique.

15.70 Investigación del sida Unos científicos han demostrado que una vacuna recién inventada puede proteger a monos Rhesus contra infecciones causadas por un virus estrechamente relacionado con el virus de inmunodeficiencia humana (VIH) causante del sida. En su trabajo, Ronald C. Resrosiers y sus colegas del Centro Regional de Investigación de Primates de Nueva Inglaterra, aplicaron a cada uno de $n = 6$ monos Rhesus cinco inoculaciones con la vacuna del virus de inmunodeficiencia de simios (VIS). Una semana después de la última vacuna, cada mono recibió una inyección de SIV vivo. Dos de los seis monos vacunados no mostraron evidencia de infección por el SIV hasta por año y medio después de la inyección con el SIV.[6] Los científicos pudieron aislar el virus del SIV de los otros cuatro monos vacunados, aun cuando estos animales no mostraron signos de la enfermedad. ¿Esta información contiene suficiente evidencia para indicar que la vacuna es eficaz para proteger al menos contra el SIV? Use $\alpha = .10$.

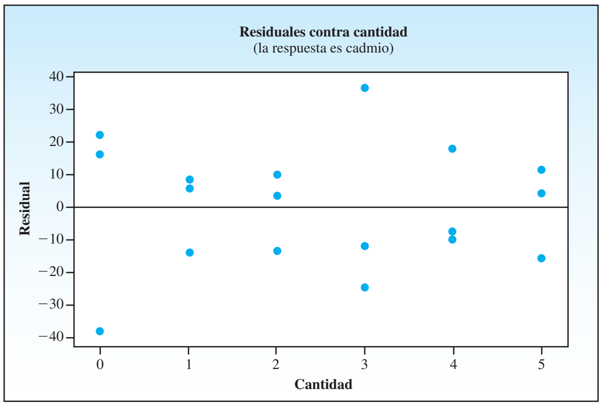
MIS DATOS EX1571

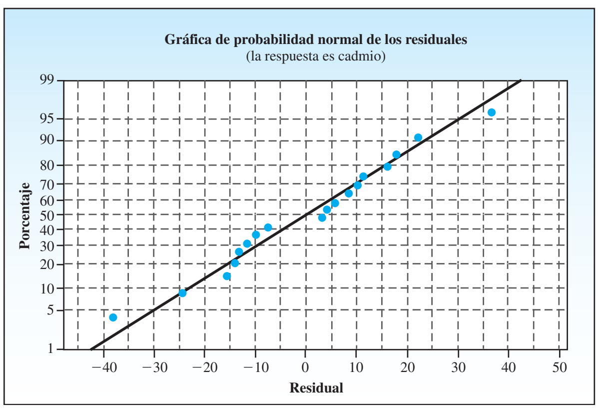
15.71 Metal pesado Se efectuó un experimento para determinar si hay acumulación de metales pesados en plantas crecidas en suelos mejorados con lodo y en insectos que se alimentan de esas plantas.[7] Los datos de la tabla siguiente son concentraciones de cadmio (en μg/kg), en plantas crecidas bajo seis cantidades diferentes de aplicación de lodo para tres cosechas distintas. Estas cantidades de aplicación son los tratamientos. Las tres cosechas representan bloques de tiempo en el diseño de dos vías.

	Cosecha		
Cantidad	1	2	3
Control	162.1	153.7	200.4
1	199.8	199.6	278.2
2	220.0	210.7	294.8
3	194.4	179.0	341.1
4	204.3	203.7	330.2
5	218.9	236.1	344.2

a. Con base en la gráfica de probabilidad normal *MINITAB* y la gráfica de residuales contra cantidades, ¿está usted dispuesto a suponer que las suposiciones de normalidad y varianza constante se satisfacen?

Gráficas *MINITAB* de residuales para el ejercicio 15.71





b. Usando un método apropiado de análisis, analice los datos para determinar si hay diferencias significativas entre las respuestas debidas a las cantidades de aplicación.

MIS DATOS EX1572

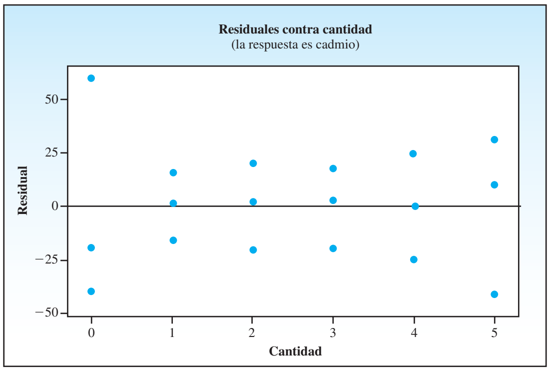
15.72 Consulte el ejercicio 15.71. Los datos de la tabla siguiente son concentraciones de cadmio encontradas en pulgones alimentados de las plantas crecidas en suelo mejorado con lodo.

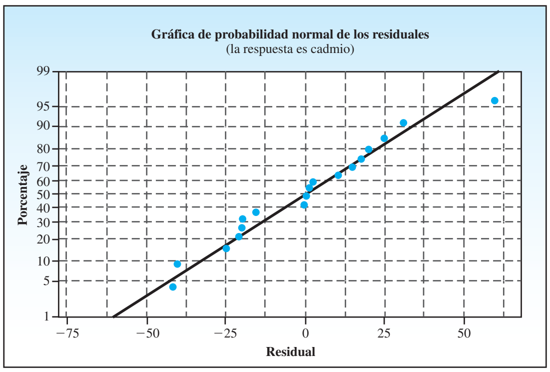
	Cosecha		
Cantidad	1	2	3
Control	16.2	55.8	65.8
1	16.9	119.4	181.1
2	12.7	171.9	184.6
3	31.3	128.4	196.4
4	38.5	182.0	163.7
5	20.6	191.3	242.8

a. Use la grafica *MINITAB* de probabilidad normal de los residuales y la gráfica de residuales contra cantidades de aplicación, para evaluar si las suposiciones de normalidad y varianza constante son razonables en este caso.

b. Con base en las conclusiones del inciso a), use un método estadístico apropiado para probar si hay diferencias significativas en concentraciones de cadmio para las seis cantidades de aplicación.

Gráficas *MINITAB* de residuales para el ejercicio 15.71





15.73 Calificación de solicitantes de profesor Antes de llenar varias nuevas posiciones de profesores en la secundaria, el director formó un consejo de revisión formado por cinco profesores a quienes se pidió entrevistaran a 12 solicitantes y los calificaran en orden de mérito. Siete de los 12 solicitantes tenían título universitario pero tenían poca experiencia en enseñanza. De los otros cinco solicitantes, todos tenían título universitario y considerable experiencia. Las calificaciones de revisión del consejo se dan en la tabla siguiente.

Experiencia limitada	Experiencia considerable
4	1
6	2
7	3
9	5
10	8
11	
12	

¿Estas calificaciones indican que el consejo de revisión considera que la experiencia es un factor primordial en la selección de los mejores candidatos? Pruebe usando $\alpha = .05$.

MIS DATOS EX1574

15.74 Contaminantes en productos químicos Un fabricante usa una gran cantidad de cierto producto químico. Como hay sólo dos proveedores de este producto químico, el fabricante desea probar si el porcentaje de contaminantes es el mismo para las dos fuentes, contra la alternativa de que hay una diferencia en los porcentajes de contaminantes para los dos proveedores. Los datos de muestras aleatorias independientes se dan a continuación:

Proveedor			
1		2	
.86	.65	.55	.58
.69	1.13	.40	.16
.72	.65	.22	.07
1.18	.50	.09	.36
.45	1.04	.16	.20
1.41	.41	.26	.15

a. Use la prueba de la suma de rango de Wilcoxon para determinar si hay una diferencia en los porcentajes de contaminantes para los dos proveedores. Use $\alpha = .05$.

b. Use la aproximación de muestra grande a la prueba de la suma de rango de Wilcoxon, para determinar si hay diferencia en los porcentajes de contaminantes para los dos proveedores. Use $\alpha = .05$. Compare sus conclusiones con las conclusiones del inciso a).

15.75 Iluminación en el salón de clase Se observó y midió la productividad de 35 estudiantes tanto antes como después de la instalación de nuevo alumbrado en su salón de clases. Se observó que había mejorado la productividad de 21 de los 35 estudiantes, en tanto que la productividad de los otros no pareció mostrar mejoría perceptible como resultado de la nueva iluminación. Use la aproximación a la prueba del signo para determinar, al nivel de significancia de 5%, si la nueva iluminación fue o no fue eficaz para mejorar la productividad de estudiantes.

MIS DATOS EX1576

15.76 Reducir el colesterol Se creó un medicamento para reducir niveles de colesterol en pacientes del sistema cardiovascular. Los niveles de colesterol antes y después del tratamiento se obtuvieron para una muestra aleatoria de 25 pacientes, con los siguientes resultados:

Paciente	Antes	Después	Paciente	Antes	Después
1	257	243	14	210	217
2	222	217	15	263	243
3	177	174	16	214	198
4	258	260	17	392	388
5	294	295	18	370	357
6	244	236	19	310	299
7	390	383	20	255	258
8	247	233	21	281	276
9	409	410	22	294	295
10	214	216	23	257	227
11	217	210	24	227	231
12	340	335	25	385	374
13	364	343			

a. Use la prueba del signo para determinar si este medicamento reduce o no reduce niveles de colesterol de pacientes del corazón. Use $\alpha = .01$.

b. Use la prueba de rango con signo de Wilcoxon para probar la hipótesis del inciso a al nivel de significancia de 1%. ¿Sus conclusiones son iguales que en el inciso a)?

MIS DATOS EX1577

15.77 Legos® El tiempo necesario para que niños de kínder ensamblen un juguete Lego se midió para niños que habían recibido enseñanza durante cuatro periodos diferentes. Cuatro niños se asignaron al azar a cada grupo de instructores, pero dos fueron eliminados durante el experimento debido a enfermedad. En el experimento, el tiempo (en minutos) para ensamblar el juguete Lego fue registrado para cada niño.

Tiempo de enseñanza (horas)			
.5	1.0	1.5	2.0
8	9	4	4
14	7	6	7
9	5	7	5
12		8	

Use la prueba H de Kruskal-Wallis para determinar si hay una diferencia en la distribución de tiempos para los cuatro tiempos de enseñanza diferentes. Use $\alpha = .01$.

MIS DATOS EX1578

15.78 Fatiga de trabajadores Para investigar métodos para reducir la fatiga entre empleados cuyos trabajos comprenden un monótono procedimiento de ensamble, a 12 empleados seleccionados al azar se les pidió realizaran su trabajo usual bajo cada una de tres condiciones de prueba. Como medida de fatiga, el experimentador usó el número de paradas de la línea de ensamble durante un periodo de 4 horas para cada condición de prueba.

	Condiciones		
Empleado	1	2	3
1	31	22	26
2	20	15	23
3	26	21	18
4	31	22	32
5	12	16	18
6	22	29	34
7	28	17	26
8	15	9	12
9	41	31	46
10	19	19	25
11	31	34	41
12	18	11	21

a. ¿Qué tipo de diseño experimental se ha empleado en este experimento?

b. Use la prueba no paramétrica apropiada para determinar si la distribución de paradas de la línea de ensamble (y, en consecuencia, fatiga del trabajador) difiere para estas tres condiciones. Pruebe al nivel de significancia de 5%.

15.79 Clasificación de mariscales de campo Se hizo una clasificación de mariscales de campo, de los ocho mejores equipos de la National Football League, al encuestar varios periodistas de deportes y coaches profesionales. Esta "clasificación verdadera" se muestra a continuación, junto con "mi clasificación".

	Mariscal de campo							
	A	B	C	D	E	F	G	H
Clasificación verdadera	1	2	3	4	5	6	7	8
Mi clasificación	3	1	4	5	2	8	6	7

a. Calcule r_s.

b. ¿Los datos indican una correlación positiva entre mi clasificación y la de los expertos? Pruebe al nivel de significancia de 5%.

CASO PRÁCTICO

MIS DATOS Huevos

¿Cómo está su nivel de colesterol?

A medida que los consumidores se han interesado cada vez más en tomar alimentos saludables, muchos productos "light", "sin grasa" y "sin colesterol" están apareciendo en el supermercado. Uno de esos productos es el sustituto de huevos congelados, producto sin colesterol que se puede usar al cocinar y hornear en muchas de las mismas formas que un huevo común y corriente, aunque no todas. Algunos consumidores hasta usan sustitutos de huevo, para elaborar un aderezo de ensalada César y otras recetas que piden huevos crudos porque estos productos están pasteurizados y así eliminan problemas por contaminación por bacterias.

Desafortunadamente, los productos actualmente en el mercado exhiben fuertes diferencias en sabor y textura cuando se prueban en su preparación como huevos revueltos. A cinco miembros de un grupo de discusión, todos ellos expertos en nutrición y preparación de alimentos, se les pidió que calificaran cada uno de tres sustitutos de huevo con base en sabor, apariencia, textura y si ellos comprarían el producto.[8] Los jueces probaron los tres sustitutos de huevo y los calificaron en una escala de 0 a 20. Los resultados, que se ven en la tabla siguiente, indican que la calificación más alta, por 23 puntos, fue para el producto llamado Healthy Choice Egg (Huevo Selecto Saludable) de ConAgra, que los probadores unánimemente acordaron como los que más se asemejan a los que produce una gallina. El producto que quedó en segundo lugar, Morningstar Farms' Scramblers, impresionó a varios de los probadores por su "sabor singularmente dulce . . . semejante a zanahoria". Por último, ninguno de los probadores indicó que estarían dispuestos a comprar el de Egg Beaters de Fleishmann, que fue descrito por los expertos como "aguado", "resbaloso" y "desagradable". Por extraño que parezca, estos resultados son contrarios a una prueba similar de sabor realizada 4 años antes, en donde Egg Beaters fue considerada mejor que los sustitutos de huevo de la competencia.

Probador	Healthy Choice	Scramblers	Egg Beaters
Dan Bowe	16	9	7
John Carroll	16	7	8
Donna Katzl	14	8	4
Rick O'Connell	15	16	9
Roland Passot	13	11	2
Totales	74	51	30

Fuente: Datos de "Egg Substitutes Range in Quality", por K. Sakekel, *The San Francisco Chronicle,* 10 de febrero, 1993, p. 8. Copyright © 1993 San Francisco Chronicle.

1. ¿Qué tipo de diseño se ha empleado en este experimento de prueba de sabor?
2. ¿Los datos satisfacen las suposiciones requeridas para un análisis paramétrico de varianza?
3. Use la técnica no paramétrica apropiada para determinar si hay una diferencia significativa entre el promedio de calificaciones para las tres marcas de sustitutos de huevo.

Apéndice I
Tablas

CONTENIDO

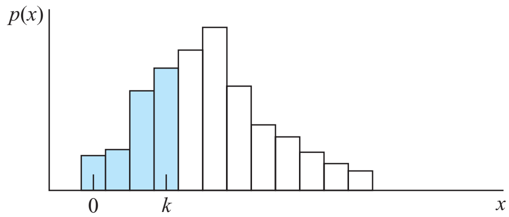


TABLA 1 Probabilidades binomiales acumulativas

Los valores tabulados son $P(x \leq k) = p(0) + p(1) + \cdots + p(k)$.
(Los cálculos están redondeados al tercer lugar decimal.)

$n = 2$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.980	.902	.810	.640	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010	.002	.000	0
1	1.000	.998	.990	.960	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190	.098	.020	1
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	2

$n = 3$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.970	.857	.729	.512	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001	.000	.000	0
1	1.000	.993	.972	.896	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028	.007	.000	1
2	1.000	1.000	.999	.992	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271	.143	.030	2
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	3

$n = 4$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.961	.815	.656	.410	.240	.130	.062	.026	.008	.002	.000	.000	.000	0
1	.999	.986	.948	.819	.652	.475	.312	.179	.084	.027	.004	.000	.000	1
2	1.000	1.000	.996	.973	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052	.014	.001	2
3	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344	.185	.039	3
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	4

TABLA 1 *(continuación)*

$n = 5$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000	0
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000	1
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000	2
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001	3
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049	4
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5

$n = 6$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.941	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000	.000	0
1	.999	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000	.000	1
2	1.000	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000	.000	2
3	1.000	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002	.000	3
4	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033	.001	4
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265	.059	5
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	6

$n = 7$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.932	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.998	.956	.850	.577	.329	.159	.062	.019	.004	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.996	.974	.852	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000	.000	.000	2
3	1.000	1.000	.997	.967	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003	.000	.000	3
4	1.000	1.000	1.000	.995	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026	.004	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.981	.938	.841	.671	.423	.150	.044	.002	5
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522	.302	.068	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	7

$n = 8$

k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.923	.663	.430	.168	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.997	.943	.813	.503	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.994	.962	.797	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000	.000	.000	2
3	1.000	1.000	.995	.944	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	1.000	.990	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005	.000	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038	.006	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187	.057	.003	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570	.337	.077	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	8

TABLA 1 *(continuación)*

$n = 9$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	*k*
0	.914	.630	.387	.134	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.997	.929	.775	.436	.196	.071	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.992	.947	.738	.463	.232	.090	.025	.004	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.999	.992	.914	.730	.483	.254	.099	.025	.003	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	.999	.980	.901	.733	.500	.267	.099	.020	.001	.000	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	.997	.975	.901	.746	.517	.270	.086	.008	.001	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.975	.910	.768	.537	.262	.053	.008	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.929	.804	.564	.225	.071	.003	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.960	.866	.613	.370	.086	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	9

$n = 10$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	*k*
0	.904	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.996	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	.994	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086	.004	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401	.096	9
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	10

$n = 11$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	*k*
0	.895	.569	.314	.086	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.995	.898	.697	.322	.113	.030	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.985	.910	.617	.313	.119	.033	.006	.001	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.998	.981	.839	.570	.296	.113	.029	.004	.000	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	.997	.950	.790	.533	.274	.099	.022	.002	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	.988	.922	.754	.500	.246	.078	.012	.000	.000	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	.998	.978	.901	.726	.467	.210	.050	.003	.000	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.971	.887	.704	.430	.161	.019	.002	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.967	.881	.687	.383	.090	.015	.000	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.970	.887	.678	.303	.102	.005	9
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.914	.686	.431	.105	10
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	11

TABLA 1 *(continuación)*

$n = 12$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.886	.540	.282	.069	.014	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.994	.882	.659	.275	.085	.020	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.980	.889	.558	.253	.083	.019	.003	.000	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.998	.974	.795	.493	.225	.073	.015	.002	.000	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	.996	.927	.724	.438	.194	.057	.009	.001	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	.999	.981	.882	.665	.387	.158	.039	.004	.000	.000	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	.996	.961	.842	.613	.335	.118	.019	.001	.000	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.943	.806	.562	.276	.073	.004	.000	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.985	.927	.775	.507	.205	.026	.002	.000	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.981	.917	.747	.442	.111	.020	.000	9
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.980	.915	.725	.341	.118	.006	10
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.986	.931	.718	.460	.114	11
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	12

$n = 15$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.860	.463	.206	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.990	.829	.549	.167	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.964	.816	.398	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.995	.944	.648	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	3
4	1.000	.999	.987	.836	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	.998	.939	.722	.403	.151	.034	.004	.000	.000	.000	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	.982	.869	.610	.304	.095	.015	.001	.000	.000	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	.996	.950	.787	.500	.213	.050	.004	.000	.000	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	.999	.985	.905	.696	.390	.131	.018	.000	.000	.000	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.966	.849	.597	.278	.061	.002	.000	.000	9
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.164	.013	.001	.000	10
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.352	.056	.005	.000	11
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.602	.184	.036	.000	12
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.833	.451	.171	.010	13
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.794	.537	.140	14
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	15

TABLA 1 *(continuación)*

$n = 20$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	.818	.358	.122	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.983	.736	.392	.069	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	.999	.925	.677	.206	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.984	.867	.411	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	3
4	1.000	.997	.957	.630	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	.989	.804	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	5
6	1.000	1.000	.998	.913	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	.968	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	.990	.887	.596	.252	.057	.005	.000	.000	.000	.000	8
9	1.000	1.000	1.000	.997	.952	.755	.412	.128	.017	.001	.000	.000	.000	9
10	1.000	1.000	1.000	.999	.983	.872	.588	.245	.048	.003	.000	.000	.000	10
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.943	.748	.404	.113	.010	.000	.000	.000	11
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.032	.000	.000	.000	12
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.087	.002	.000	.000	13
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.196	.011	.000	.000	14
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.370	.043	.003	.000	15
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.589	.133	.016	.000	16
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.794	.323	.075	.001	17
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.931	.608	.264	.017	18
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.878	.642	.182	19
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	20

TABLA 1 *(continuación)*

$n = 25$

	p													
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	*k*
0	.778	.277	.072	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.974	.642	.271	.027	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	.998	.873	.537	.098	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.966	.764	.234	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	3
4	1.000	.993	.902	.421	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	4
5	1.000	.999	.967	.617	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	5
6	1.000	1.000	.991	.780	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	6
7	1.000	1.000	.998	.891	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	.953	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	8
9	1.000	1.000	1.000	.983	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	9
10	1.000	1.000	1.000	.994	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	10
11	1.000	1.000	1.000	.998	.956	.732	.345	.078	.006	.000	.000	.000	.000	11
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.983	.846	.500	.154	.017	.000	.000	.000	.000	12
13	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.922	.655	.268	.044	.002	.000	.000	.000	13
14	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.006	.000	.000	.000	14
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.017	.000	.000	.000	15
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.047	.000	.000	.000	16
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.109	.002	.000	.000	17
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.220	.009	.000	.000	18
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.383	.033	.001	.000	19
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.579	.098	.007	.000	20
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.766	.236	.034	.000	21
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.902	.463	.127	.002	22
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.973	.729	.358	.026	23
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.928	.723	.222	24
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	25

TABLA 2 Probabilidades acumulativas de Poisson
Los valores tabulados son $P(x \leq k) = p(0) + p(1) + \cdots + p(k)$.
(Los cálculos están redondeados al tercer lugar decimal.)

	μ										
k	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0	1.5
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.223
1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736	.558
2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920	.809
3		1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981	.934
4				1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996	.981
5							1.000	1.000	1.000	.999	.996
6										1.000	.999
7											1.000

	μ										
k	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
0	.135	.082	.055	.033	.018	.011	.007	.004	.003	.002	.001
1	.406	.287	.199	.136	.092	.061	.040	.027	.017	.011	.007
2	.677	.544	.423	.321	.238	.174	.125	.088	.062	.043	.030
3	.857	.758	.647	.537	.433	.342	.265	.202	.151	.112	.082
4	.947	.891	.815	.725	.629	.532	.440	.358	.285	.224	.173
5	.983	.958	.916	.858	.785	.703	.616	.529	.446	.369	.301
6	.995	.986	.966	.935	.889	.831	.762	.686	.606	.563	.450
7	.999	.996	.988	.973	.949	.913	.867	.809	.744	.673	.599
8	1.000	.999	.996	.990	.979	.960	.932	.894	.847	.792	.729
9		1.000	.999	.997	.992	.983	.968	.946	.916	.877	.830
10			1.000	.999	.997	.993	.986	.975	.957	.933	.901
11				1.000	.999	.998	.995	.989	.980	.966	.947
12					1.000	.999	.998	.996	.991	.984	.973
13						1.000	.999	.998	.996	.993	.987
14							1.000	.999	.999	.997	.994
15								1.000	.999	.999	.998
16									1.000	1.000	.999
17											1.000

TABLA 2 *(continuación)*

	μ								
k	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	12.0	15.0	20.0
0	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.005	.003	.002	.001	.001	.000	.000	.000	.000
2	.020	.014	.009	.006	.004	.003	.001	.000	.000
3	.059	.042	.030	.021	.015	.010	.002	.000	.000
4	.132	.100	.074	.055	.040	.029	.008	.001	.000
5	.241	.191	.150	.116	.089	.067	.020	.003	.000
6	.378	.313	.256	.207	.165	.130	.046	.008	.000
7	.525	.453	.386	.324	.269	.220	.090	.018	.001
8	.662	.593	.523	.456	.392	.333	.155	.037	.002
9	.776	.717	.653	.587	.522	.458	.242	.070	.005
10	.862	.816	.763	.706	.645	.583	.347	.118	.011
11	.921	.888	.849	.803	.752	.697	.462	.185	.021
12	.957	.936	.909	.876	.836	.792	.576	.268	.039
13	.978	.966	.949	.926	.898	.864	.682	.363	.066
14	.990	.983	.973	.959	.940	.917	.772	.466	.105
15	.995	.992	.986	.978	.967	.951	.844	.568	.157
16	.998	.996	.993	.989	.982	.973	.899	.664	.221
17	.999	.998	.997	.995	.991	.986	.937	.749	.297
18	1.000	.999	.999	.998	.996	.993	.963	.819	.381
19		1.000	.999	.999	.998	.997	.979	.875	.470
20			1.000	1.000	.999	.998	.988	.917	.559
21					1.000	.999	.994	.947	.644
22						1.000	.997	.967	.721
23							.999	.981	.787
24							.999	.989	.843
25							1.000	.994	.888
26								.997	.922
27								.998	.948
28								.999	.966
29								1.000	.978
30									.987
31									.992
32									.995
33									.997
34									.999
35									.999
36									1.000

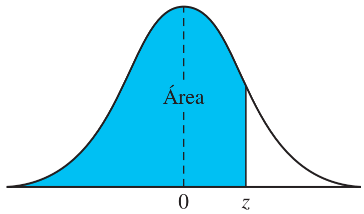


TABLA 3 Áreas bajo la curva normal

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABLA 3 *(continuación)*

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

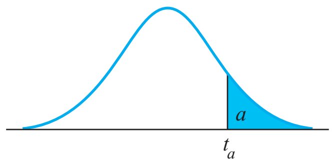


TABLA 4
Valores críticos de *t*

df	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	*df*
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	∞

Fuente: De "Table of Percentage Points of the *t*-Distribution", *Biometrika* 32 (1941):300. Reproducida con permiso de los fideicomisarios de *Biometrika*.

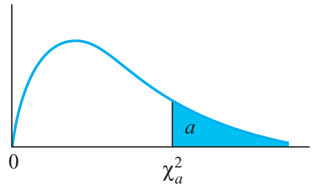


TABLA 5
Valores críticos de ji cuadrada

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$
1	.0000393	.0001571	.0009821	.0039321	.0157908
2	.0100251	.0201007	.0506356	.102587	.210720
3	.0717212	.114832	.215795	.351846	.584375
4	.206990	.297110	.484419	.710721	1.063623
5	.411740	.554300	.831211	1.145476	1.61031
6	.675727	.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

Fuente: De "Tables of the Percentage Points of the χ^2-Distribution", *Biometrika Tables for Statisticians,* vol. 2, 3a. ed. (1966). Reproducida con permiso de los fideicomisarios de *Biometrika.*

TABLA 5
(continuación)

$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$	*df*
2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	1
4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	2
6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	3
7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	4
9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	5
10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	6
12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	7
13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	8
14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	9
15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	10
17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	11
18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	12
19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	13
21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	14
22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	15
23.5418	26.2962	28.8485	31.9999	34.2672	16
24.7690	27.8571	30.1910	33.4087	35.7185	17
25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	18
27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	19
28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	20
29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	21
30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	22
32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	23
33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	24
34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	25
35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	26
36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	27
37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	28
39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	29
40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	30
51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	40
63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	50
74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	60
85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	70
96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	80
107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	90
118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	100

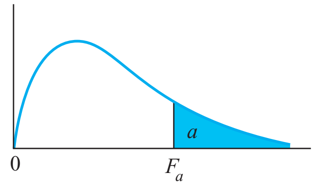


TABLA 6 Puntos porcentuales de la distribución *F*

		df_1								
df_2	*a*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
	.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
	.010	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
	.005	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.005	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.64	27.49	27.35
	.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.005	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.005	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.005	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.005	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54

Fuente: Parte de "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (*F*) Distribution", *Biometrika,* vol. 33 (1943) por M. Merrington y C.M. Thompson y de la tabla 18 de *Biometrika Tables for Statisticians,* vol. 1, Cambridge University Press, 1954, editado por E.S. Pearson y H.O. Hartley. Reproducida con permiso de los autores, editores y los fideicomisarios de *Biometrika.*

TABLA 6 *(continuación)*

df_1											
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	*a*	df_2
60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33	.100	1
241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.2	252.2	253.3	254.3	.050	
968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018	.025	
6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366	.010	
24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465	.005	
9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49	.100	2
19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50	.050	
39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50	.025	
99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50	.010	
199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	.005	
5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13	.100	3
8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53	.050	
14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90	.025	
27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13	.010	
43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83	.005	
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76	.100	4
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63	.050	
8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26	.025	
14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46	.010	
20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32	.005	
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10	.100	5
4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36	.050	
6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02	.025	
10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02	.010	
13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14	.005	
2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72	.100	6
4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67	.050	
5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85	.025	
7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88	.010	
10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88	.005	
2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47	.100	7
3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23	.050	
4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14	.025	
6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65	.010	
8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08	.005	
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29	.100	8
3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93	.050	
4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67	.025	
5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86	.010	
7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95	.005	
2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16	.100	9
3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71	.050	
3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33	.025	
5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31	.010	
6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19	.005	

TABLA 6 *(continuación)*

		df_1								
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.005	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.005	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	.005	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72
15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.005	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
	.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
	.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
	.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
	.005	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38
17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
	.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
	.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
	.010	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
	.005	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25
18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
	.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
	.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
	.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
	.005	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14
19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
	.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
	.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
	.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
	.005	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96

TABLA 6 *(continuación)*

df_1											
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	a	df_2
2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06	.100	10
2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	.050	
3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	.025	
4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91	.010	
5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64	.005	
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97	.100	11
2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40	.050	
3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	.025	
4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60	.010	
5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23	.005	
2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90	.100	12
2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30	.050	
3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72	.025	
4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36	.010	
5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90	.005	
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85	.100	13
2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	.050	
3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60	.025	
4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17	.010	
4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65	.005	
2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80	.100	14
2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13	.050	
3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49	.025	
3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00	.010	
4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44	.005	
2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76	.100	15
2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07	.050	
3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40	.025	
3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87	.010	
4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26	.005	
2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	.100	16
2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01	.050	
2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32	.025	
3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	.010	
4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11	.005	
2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	.100	17
2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	.050	
2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25	.025	
3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65	.010	
4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98	.005	
1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	.100	18
2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92	.050	
2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19	.025	
3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	.010	
4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87	.005	
1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63	.100	19
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	.050	
2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13	.025	
3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	.010	
3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78	.005	
1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61	.100	20
2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	.050	
2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09	.025	
3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42	.010	
3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69	.005	

TABLA 6 *(continuación)*

		df_1								
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
	.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
	.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
	.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
	.005	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
	.005	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81
23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
	.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
	.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
	.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
	.005	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.005	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
	.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
	.005	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60
27	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
	.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
	.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
	.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
	.005	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
	.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
	.005	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52
29	.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
	.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
	.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
	.005	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45

TABLA 6 *(continuación)*

df1: 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	a	df_2
1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	.100	21
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	.050	
2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04	.025	
3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	.010	
3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61	.005	
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	.100	22
2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	.050	
2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00	.025	
3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	.010	
3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55	.005	
1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55	.100	23
2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	.050	
2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97	.025	
3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	.010	
3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48	.005	
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53	.100	24
2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	.050	
2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94	.025	
3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	.010	
3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43	.005	
1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	.100	25
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	.050	
2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91	.025	
3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17	.010	
3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38	.005	
1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50	.100	26
2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	.050	
2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88	.025	
3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13	.010	
3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33	.005	
1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49	.100	27
2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	.050	
2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85	.025	
3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10	.010	
3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29	.005	
1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48	.100	28
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	.050	
2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83	.025	
3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06	.010	
3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25	.005	
1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47	.100	29
2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64	.050	
2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81	.025	
3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03	.010	
3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21	.005	
1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46	.100	30
2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	.050	
2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79	.025	
2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01	.010	
3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18	.005	

TABLA 6 *(continuación)*

		df_1								
df_2	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
	.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.005	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
120	.100	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.050	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
	.025	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.010	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.005	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
∞	.100	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.050	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.63
	.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.010	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.005	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62

TABLA 6 *(continuación)*

df_1											
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	a	df_2
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38	.100	40
2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	.050	
2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64	.025	
2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80	.010	
3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93	.005	
1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29	.100	60
1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	.050	
2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48	.025	
2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60	.010	
2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69	.005	
1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19	.100	120
1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	.050	
2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31	.025	
2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38	.010	
2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43	.005	
1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00	.100	∞
1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	.050	
2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00	.025	
2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00	.010	
2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00	.005	

TABLA 7 Valores críticos de T para la prueba de suma de rango de Wilcoxon, $n_1 \leq n_2$

TABLA 7a) Valores críticos de cola izquierda a 5%

	n_1													
n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	—	6												
4	—	6	11											
5	3	7	12	19										
6	3	8	13	20	28									
7	3	8	14	21	29	39								
8	4	9	15	23	31	41	51							
9	4	10	16	24	33	43	54	66						
10	4	10	17	26	35	45	56	69	82					
11	4	11	18	27	37	47	59	72	86	100				
12	5	11	19	28	38	49	62	75	89	104	120			
13	5	12	20	30	40	52	64	78	92	108	125	142		
14	6	13	21	31	42	54	67	81	96	112	129	147	166	
15	6	13	22	33	44	56	69	84	99	116	133	152	171	192

TABLA 7b) Valores críticos de cola izquierda a 2.5%

	n_1													
n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	—	—	10											
5	—	6	11	17										
6	—	7	12	18	26									
7	—	7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	14	22	31	40	51	62						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	3	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	84	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	136		
14	4	11	19	28	38	50	62	76	91	106	123	141	160	
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	184

Fuente: Datos de "An Extended Table of Critical Values for the Mann-Whitney (Wilcoxon) Two-Sample Statistic" por Roy C. Milton, pp. 925-934 en la *Journal of the American Statistical Association,* vol. 59, núm. 307, septiembre de 1964. Reimpresa con permiso de la *Journal of the American Statistical Association.*

TABLA 7c)
Valores críticos de cola izquierda a 1%

	n_1													
n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	—	—												
4	—	—	—											
5	—	—	10	16										
6	—	—	11	17	24									
7	—	6	11	18	25	34								
8	—	6	12	19	27	35	45							
9	—	7	13	20	28	37	47	59						
10	—	7	13	21	29	39	49	61	74					
11	—	7	14	22	30	40	51	63	77	91				
12	—	8	15	23	32	42	53	66	79	94	109			
13	3	8	15	24	33	44	56	68	82	97	113	130		
14	3	8	16	25	34	45	58	71	85	100	116	134	152	
15	3	9	17	26	36	47	60	73	88	103	120	138	156	176

TABLA 7d)
Valores críticos de cola izquierda a .5%

	n_1												
n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	—												
4	—	—											
5	—	—	15										
6	—	10	16	23									
7	—	10	16	24	32								
8	—	11	17	25	34	42							
9	6	11	18	26	35	45	56						
10	6	12	19	27	37	47	58	71					
11	6	12	20	28	38	49	61	73	87				
12	7	13	21	30	40	51	63	76	90	105			
13	7	13	22	31	41	53	65	79	93	109	125		
14	7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147	
15	8	15	23	33	44	56	69	84	99	115	133	151	171

TABLA 8
Valores críticos de *T* para la prueba de rango con signo de Wilcoxon, *n* = 5(1)50

Una cola	Dos colas	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	1	2	4	6	8	11
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$		1	2	4	6	8
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$			0	2	3	5
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$				0	2	3

Una cola	Dos colas	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	14	17	21	26	30	36
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	11	14	17	21	25	30
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	7	10	13	16	20	24
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	5	7	10	13	16	19

Una cola	Dos colas	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$	$n = 21$	$n = 22$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	41	47	54	60	68	75
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	35	40	46	52	59	66
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	28	33	38	43	49	56
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	23	28	32	37	43	49

Una cola	Dos colas	$n = 23$	$n = 24$	$n = 25$	$n = 26$	$n = 27$	$n = 28$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	83	92	101	110	120	130
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	73	81	90	98	107	117
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	62	69	77	85	93	102
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	55	68	68	76	84	92

Una cola	Dos colas	$n = 29$	$n = 30$	$n = 31$	$n = 32$	$n = 33$	$n = 34$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	141	152	163	175	188	201
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	127	137	148	159	171	183
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	111	120	130	141	151	162
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	100	109	118	128	138	149

Una cola	Dos colas	$n = 35$	$n = 36$	$n = 37$	$n = 38$	$n = 39$	
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	214	228	242	256	271	
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	195	208	222	235	250	
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	174	186	198	211	224	
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	160	171	183	195	208	

Una cola	Dos colas	$n = 40$	$n = 41$	$n = 42$	$n = 43$	$n = 44$	$n = 45$
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	287	303	319	336	353	371
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	264	279	295	311	327	344
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	238	252	267	281	297	313
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	221	234	248	262	277	292

Una cola	Dos colas	$n = 46$	$n = 47$	$n = 48$	$n = 49$	$n = 50$	
$\alpha = .050$	$\alpha = .10$	389	408	427	446	466	
$\alpha = .025$	$\alpha = .05$	361	379	397	415	434	
$\alpha = .010$	$\alpha = .02$	329	345	362	380	398	
$\alpha = .005$	$\alpha = .01$	307	323	339	356	373	

Fuente: De "Some Rapid Approximate Statistical Procedures" (1964) 28, por F. Wilcoxon y R.A. Wilcox. Reproducida con el bondadoso permiso de Lederle Laboratories, división de American Cyanamid Company.

TABLA 9
Valores críticos del coeficiente de correlación de rango de Spearman para una prueba de una cola

n	$\alpha = .05$	$\alpha = .025$	$\alpha = .01$	$\alpha = .005$
5	.900	—	—	—
6	.829	.886	.943	—
7	.714	.786	.893	—
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.392	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

Fuente: De "Distribution of Sums of Squares of Rank Differences for Small Samples" por E.G. Olds, *Annals of Mathematical Statistics* 9 (1938). Reproducida con el permiso del editor, *Annals of Mathematical Statistics.*

TABLA 10 Números aleatorios

Renglón	Columna 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207	20969	99570	91291	90700
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095	52666	19174	39615	99505
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081	30680	19655	63348	58629
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004	00849	74917	97758	16379
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672	14110	06927	01263	54613
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053	21916	81825	44394	42880
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840	63213	21069	10634	12952
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045	18425	84903	42508	32307
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566	58678	44947	05585	56941
10	84575	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983	16439	11458	18593	64952
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595	01547	85590	91610	78188
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847	12234	90511	33703	90322
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272	84115	27156	30613	74952
14	10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358	85104	20285	29975	89868
15	07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85977	29372	74461	28551	90707
16	51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900	70960	63990	75601	40719
17	02368	21382	52404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255	64835	44919	05944	55157
18	01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030	51132	01915	92747	64951
19	52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350	94738	17752	35156	35749
20	07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104	88916	19509	25625	58104
21	48663	91245	85828	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178	30421	61666	99904	32812
22	54164	58492	22421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646	21524	15227	96909	44592
23	32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912	17012	64161	18296	22851
24	29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135	10367	07684	36188	18510
25	02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658	32586	86679	50720	94953
26	81525	72295	04839	96423	24878	82651	66566	14778	76797	14780	13300	87074	79666	95725
27	29676	20591	68086	26432	46901	20849	89768	81536	86645	12659	92259	57102	80428	25280
28	00742	57392	39064	66432	84673	40027	32832	61362	98947	96067	64760	64585	96096	98253
29	05366	04213	25669	26422	44407	44048	37937	63904	45766	66134	75470	66520	34693	90449
30	91921	26418	64117	94305	26766	25940	39972	22209	71500	64568	91402	42416	07844	69618
31	00582	04711	87917	77341	42206	35126	74087	99547	81817	42607	43808	76655	62028	76630
32	00725	69884	62797	56170	86324	88072	76222	36086	84637	93161	76038	65855	77919	88006
33	69011	65795	95876	55293	18988	27354	26575	08625	40801	59920	29841	80150	12777	48501
34	25976	57948	29888	88604	67917	48708	18912	82271	65424	69774	33611	54262	85963	03547
35	09763	83473	73577	12908	30883	18317	28290	35797	05998	41688	34952	37888	38917	88050
36	91567	42595	27958	30134	04024	86385	29880	99730	55536	84855	29080	09250	79656	73211
37	17955	56349	90999	49127	20044	59931	06115	20542	18059	02008	73708	83517	36103	42791
38	46503	18584	18845	49618	02304	51038	20655	58727	28168	15475	56942	53389	20562	87338
39	92157	89634	94824	78171	84610	82834	09922	25417	44137	48413	25555	21246	35509	20468
40	14577	62765	35605	81263	39667	47358	56873	56307	61607	49518	89656	20103	77490	18062
41	98427	07523	33362	64270	01638	92477	66969	98420	04880	45585	46565	04102	46880	45709
42	34914	63976	88720	82765	34476	17032	87589	40836	32427	70002	70663	88863	77775	69348
43	70060	28277	39475	46473	23219	53416	94970	25832	69975	94884	19661	72828	00102	66794
44	53976	54914	06990	67245	68350	82948	11398	42878	80287	88267	47363	46634	06541	97809
45	76072	29515	40980	07391	58745	25774	22987	80059	39911	96189	41151	14222	60697	59583
46	90725	52210	83974	29992	65831	38857	50490	83765	55657	14361	31720	57375	56228	41546
47	64364	67412	33339	31926	14883	24413	59744	92351	97473	89286	35931	04110	23726	51900
48	08962	00358	31662	25388	61642	34072	81249	35648	56891	69352	48373	45578	78547	81788
49	95012	68379	93526	70765	10592	04542	76463	54328	02349	17247	28865	14777	62730	92277
50	15664	10493	20492	38391	91132	21999	59516	81652	27195	48223	46751	22923	32261	85653

FUENTE: De *Handbook of Tables for Probabiliy and Statistics,* 2a. ed., por William H. Beyer (CRC Press). Usada con permiso de William H. Beyer.

TABLA 10 *(continuación)*

	Columna													
Renglón	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
51	16408	81899	04153	53381	79401	21438	83035	92350	36693	31238	59649	91754	72772	02338
52	18629	81953	05520	91962	04739	13092	97662	24822	94730	06496	35090	04822	86774	98289
53	73115	35101	47498	87637	99016	71060	88824	71013	18735	20286	23153	72924	35165	43040
54	57491	16703	23167	49323	45021	33132	12544	41035	80780	45393	44812	12515	98931	91202
55	30405	83946	23792	14422	15059	45799	22716	19792	09983	74353	68668	30429	70735	25499
56	16631	35006	85900	98275	32388	52390	16815	69298	82732	38480	73817	32523	41961	44437
57	96773	20206	42559	78985	05300	22164	24369	54224	35033	19687	11052	91491	60383	19746
58	38935	64202	14349	82674	66523	44133	00697	35552	35970	19124	63318	29686	03387	59846
59	31624	76384	17403	53363	44167	64486	64758	75366	76554	31601	12614	33072	60332	92325
60	78919	19474	23632	27889	47914	02584	37680	20801	72152	39339	34806	08930	85001	87820
61	03931	33309	57047	74211	63445	17361	62825	39908	05607	91284	68833	25570	38818	46920
62	74426	33278	43972	10119	89917	15665	52872	73823	73144	88662	88970	74492	51805	99378
63	09066	00903	20795	95452	92648	45454	09552	88815	16553	51125	79375	97596	16296	66092
64	42238	12426	87025	14267	20979	04508	64535	31355	86064	29472	47689	05974	52468	16834
65	16153	08002	26504	41744	81959	65642	74240	56302	00033	67107	77510	70625	28725	34191
66	21457	40742	29820	96783	29400	21840	15035	34537	33310	06116	95240	15957	16572	06004
67	21581	57802	02050	89728	17937	37621	47075	42080	97403	48626	68995	43805	33386	21597
68	55612	78095	83197	33732	05810	24813	86902	60397	16489	03264	88525	42786	05269	92532
69	44657	66999	99324	51281	84463	60563	79312	93454	68876	25471	93911	25650	12682	73572
70	91340	84979	46949	81973	37949	61023	43997	15263	80644	43942	89203	71795	99533	50501
71	91227	21199	31935	27022	84067	05462	35216	14486	29891	68607	41867	14951	91696	85065
72	50001	38140	66321	19924	72163	09538	12151	06878	91903	18749	34405	56087	82790	70925
73	65390	05224	72958	28609	81406	39147	25549	48542	42627	45233	57202	94617	23772	07896
74	27504	96131	83944	41575	10573	08619	64482	73923	36152	05184	94142	25299	84387	34925
75	37169	94851	39117	89632	00959	16487	65536	49071	39782	17095	02330	74301	00275	48280
76	11508	70225	51111	38351	19444	66499	71945	05422	13442	78675	84081	66938	93654	59894
77	37449	30362	06694	54690	04052	53115	62757	95348	78662	11163	81651	50245	34971	52924
78	46515	70331	85922	38329	57015	15765	97161	17869	45349	61796	66345	81073	49106	79860
79	30986	81223	42416	58353	21532	30502	32305	86482	05174	07901	54339	58861	74818	46942
80	63798	64995	46583	09785	44160	78128	83991	42865	92520	83531	80377	35909	81250	54238
81	82486	84846	99254	67632	43218	50076	21361	64816	51202	88124	41870	52689	51275	83556
82	21885	32906	92431	09060	64297	51674	64126	62570	26123	05155	59194	52799	28225	85762
83	60336	98782	07408	53458	13564	59089	26445	29789	85205	41001	12535	12133	14645	23541
84	43937	46891	24010	25560	86355	33941	25786	54990	71899	15475	95434	98227	21824	19585
85	97656	63175	89303	16275	07100	92063	21942	18611	47348	20203	18534	03862	78095	50136
86	03299	01221	05418	38982	55758	92237	26759	86367	21216	98442	08303	56613	91511	75928
87	79626	06486	03574	17668	07785	76020	79924	25651	83325	88428	85076	72811	22717	50585
88	85636	68335	47539	03129	65651	11977	02510	26113	99447	68645	34327	15152	55230	93448
89	18039	14367	61337	06177	12143	46609	32989	74014	64708	00533	35398	58408	13261	47908
90	08362	15656	60627	36478	65648	16764	53412	09013	07832	41574	17639	82163	60859	75567
91	79556	29068	04142	16268	15387	12856	66227	38358	22478	73373	88732	09443	82558	05250
92	92608	82674	27072	32534	17075	27698	98204	63863	11951	34648	88022	56148	34925	57031
93	23982	25835	40055	67006	12293	02753	14827	23235	35071	99704	37543	11601	35503	85171
94	09915	96306	05908	97901	28395	14186	00821	80703	70426	75647	76310	88717	37890	40129
95	59037	33300	26695	62247	69927	76123	50842	43834	86654	70959	79725	93872	28117	19233
96	42488	78077	69882	61657	34136	79180	97526	43092	04098	73571	80799	76536	71255	64239
97	46764	86273	63003	93017	31204	36692	40202	35275	57306	55543	53203	18098	47625	88684
98	03237	45430	55417	63282	90816	17349	88298	90183	36600	78406	06216	95787	42579	90730
99	86591	81482	52667	61582	14972	90053	89534	76036	49199	43716	97548	04379	46370	28672
100	38534	01715	94964	87288	65680	43772	39560	12918	86737	62738	19636	51132	25739	56947

TABLA 11*a*) **Puntos porcentuales del rango de Student, $q_{.05}(k, df)$; puntos de 5% superior**

TABLA 11 **Puntos porcentuales del rango de Student, $q_{.05}(k, df)$**

	k									
df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.60	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55

TABLA 11a)
(continuación)

k									
12	13	14	15	16	17	18	19	20	*df*
51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56	1
14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77	2
9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24	3
8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23	4
7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	5
6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	6
6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17	7
6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	8
5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64	9
5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47	10
5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33	11
5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21	12
5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11	13
5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03	14
5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96	15
5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90	16
5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84	17
5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	18
5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	19
5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71	20
5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59	24
5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47	30
4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36	40
4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24	60
4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13	120
4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01	∞

Fuente: De *Biometrika Tables for Statisticians,* vol. 1, 3a. ed., por E.S. Pearson y H.O. Hartley (Cambridge University Press, 1966). Reproducida con permiso de los fideicomisarios de *Biometrika.*

TABLA 11*b*) **Puntos porcentuales del rango de Student, $q_{.01}(k, df)$; puntos de 1% superior**

	k									
df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23

TABLA 11*b*)
(continuación)

k									
12	13	14	15	16	17	18	19	20	*df*
260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.0	294.3	298.0	1
33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95	2
17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77	3
12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40	4
10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93	5
9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54	6
8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65	7
8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03	8
7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57	9
7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23	10
7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95	11
7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73	12
6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55	13
6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39	14
6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26	15
6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15	16
6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05	17
6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.97	18
6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89	19
6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82	20
6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61	24
5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41	30
5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21	40
5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01	60
5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83	120
5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65	∞

FUENTE: De *Biometrika Tables for Statisticians,* vol. 1, 3a. ed., por E.S. Pearson y H.O. Hartley (Cambridge University Press, 1966). Reproducida con permiso de los fideicomisarios de *Biometrika.*

Fuentes de datos

Introducción

1. Sheldon Gawiser, Tiffany Turner y Costas Panagopoulos, "Polls: GOP Looks Likely to Keep Senate Control", MSNBC News, http://www.msnbc.com/ID/15547023/page/2/5 Nov 2006/, 5 de noviembre de 2006.
2. Fox News, http://www.foxnews.com/story/0,2933,102511,00.html, 10 de febrero de 2004.
3. "Hot News: 98.6 Not Normal", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 23 de septiembre de 1992.

Capítulo 1

1. "White House 2008: General Election", FOX News/Opinion Dynamics Poll, http://www.pollingreport.com/2008.htm#misc, 16–18 de mayo de 2006.
2. "Run the Country? Most Teens Would Pass", http://abcnews.go.com/images/pdf/943a1TeensandthePresidency.pdf, 22 de enero de 2004.
3. "Who They Are", *Time,* 5 de enero de 2004, pp. 98–99.
4. "Getting Back to Work", http://www.usatoday.com/snapshot/news/2001-07-17-backtowork.htm, 2 de octubre de 2001.
5. William A. McGeveran, Jr., Ed., *The World Almanac and Book of Facts 2007* (New York: WRC Media, Inc.), 2007.
6. Adapted from Arlene Eisenberg, Heidi Murkoff y Sandee Hathaway. *What to Expect the First Year* (New York: Workman Publishing), 2003.
7. "Report to the Community", Riverside County Office of Education, 16 de febrero de 2004, p. 3.
8. Borgna Brunner, Ed., *Time Almanac 2007* (Boston, MA: Pearson Education), 2006.
9. "U.S. Box Office Actuals", http://www.radiofree.com/mov-tops.shtml, 13 de agosto de 2006.
10. Robert P. Wilder, D. Brennan y D.E. Schotte, "A Standard Measure for Exercise Prescription for Aqua Running", *American Journal of Sports Medicine* 21, núm. 1 (1993):45.
11. http://www.kentuckyderby.info/kentuckyderby-history2006.php.
12. Robyn Greenspan, "Home Is Where the Network Is", http://www.clickz.com/stats/big_picture/applications/article.php/1301_3073431, 5 de septiembre de 2003.
13. "War on Terrorism", http://www.pollingreport.com/terror.htm, 14 de agosto de 2006.
14. Enid Burns, "Mobile Internet Population Grows", http://www.clickz.com/showPage.html?page=3623146, 14 de agosto de 2006.
15. GEICO Insurance Advertisement, *Time,* 10 de noviembre de 2003.
16. A. Tubb, A.J. Parker y G. Nickless, "The Analysis of Romano-British Pottery by Atomic Absorption Spectrophotometry", *Archaeometry* 22 (1980):153.
17. Mike Schwartz and Mark Kendall, "The Great Calorie Debate", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 10 de febrero de 2004, p. E1.
18. Lawrence E. Levine and Victorina Wasmuth, "Laptops, Technology y Algebra 1: A Case Study of an Experiment", *Mathematics Teacher* 97, núm. 2 (febrero de 2004):I36.
19. A. Azzalini and A.W. Bowman, "A Look at Some Data on the Old Faithful Geyser", *Applied Statistics* (1990):57.

20. http://www/starbucks.com/retail/locator/default.aspx, 15 de marzo de 2006.
21. P.A. Mackowiak, S.S. Wasserman y M.M. Levine, “A Critical Appraisal of 98.6 Degrees F, the Upper Limit of the Normal Body Temperature y Other Legacies of Carl Reinhold de agosto de Wunderlich”, *Journal of the American Medical Association* (268):1578–1580.
22. Allen L. Shoemaker, “What’s Normal? Temperature, Gender y Heart Rate”, *Journal of Statistics Education* (1996).
23. D.G. Altman and J.M. Bland. “Time to Survival Data”, BMJ (*British Medical Journal*) 317:468–469 (15 de agosto de 1998), http://bmj.bmjjournals.com/cgi/content/full/317/7156/4687.

Capítulo 2

1. http://interactive.web.insurance.ca.gov/survey/survey?type=autoSurvey&event=autoResults, 5 de noviembre de 2006.
2. Borgna Brunner, Ed., *Time Almanac 2007* (Boston, MA: Pearson Education, Inc.), 2006.
3. “Birth Order and the Baby Boom”, *American Demographics* (Trend Cop), marzo de 1997, p. 10.
4. “Tuna Goes Upscale”, *Consumer Reports,* June 2001, p. 19.
5. http://www/starbucks.com/retail/locator/default.aspx, 15 de agosto de 2006.
6. “LCD TVs”, http://www.consumerreports.org/cro/electronics-computers/tvs/lcd-tvs/reports/product-selector/index.htm, 22 de agosto de 2006.
7. A. Tubb, A.J. Parker y G. Nickless, “The Analysis of Romano-British Pottery by Atomic Absorption Spectrophotometry”, *Archaeometry* 22 (1980):153.
8. A. Azzalini and A.W. Bowman, “A Look at Some Data on the Old Faithful Geyser”, *Applied Statistics* (1990):57.
9. http://sports.espn.go.com/nfl/players/, 2 de enero de 2007.
10. D.G. Altman y J.M. Bland. “Time to Survival Data”, BMJ (*British Medical Journal*) 317:468–469 (15 de agosto de 1998), http://bmj.bmjjournals.com/cgi/content/full/317/7156/4687.
11. Allen L. Shoemaker, “What’s Normal? Temperature, Gender y Heart Rate”, *Journal of Statistics Education* (1996).
12. “Four People Movers”, *Consumer Reports,* julio de 1997, p. 57.
13. “Favorite Camping Activity”, http://www.usatoday.com/snapshot/news/2001-05-22-camping.htm, 26 de septiembre de 2001 (*Source:* Wirthlin Worldwide for Coleman Company).
14. www.mlb.com, 16 de agosto de 2006.
15. “Working in Sales”, http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=S&label=2006-08-16-nlhits, 15 de agosto de 2006.
16. “Hours per Week Worked”, http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=S&label=2006-08-16-nlhits, 15 de agosto de 2006.
17. “Salary Wizard”, http://swz.salary.com/salarywizard/layout.htmls/swzl_compresult_national_ED03000133.html, 16 de agosto de 2006.
18. William A. McGeveran Jr., Ed., *The World Almanac and Book of Facts 2007* (New York: WRC Media, Inc.), 2007 y http://sports.espn.go.com/mlb/stats/batting?league=al.

Capítulo 3

1. Adapted from http://nces.ed.gov/programs/digest/d05/tables/dt05_240.asp.
2. Adapted from Michael J. Weiss, “The New Summer Break”, *American Demographics,* agosto de 2001, p. 55.
3. www.bls.gov/data/home.htm, 19 June 2007.
4. William A. McGeveran Jr., Ed., *The World Almanac and Book of Facts 2007* (New York: WRC Media, Inc.), 2007.
5. Gregory K. Torrey, S.F. Vasa, J.W. Maag y J.J. Kramer, “Social Skills Interventions Across School Settings: Case Study Reviews of Students with Mild Disabilities”, *Psychology in the Schools* 29 (julio de 1992):248.

6. Mark Rechtin, “Boss Puts ‘Buzz’ on U.S. Luxury Leader’s To-Do List”, *Automotive News,* 26 de enero de 2004, p. 4; and *Automotive News 2006 Market Data Book,* 22 de mayo de 2006, p. 25.
7. “LCD TVs”, http://www.consumerreports.org/cro/electronics-computers/tvs/lcd-tvs/reports/product-selector/index.htm, 22 de agosto de 2006.
8. Stellan Ohlsson, “The Learning Curve for Writing Books: Evidence from Professor Asimov”, *Psychological Science* 3, núm. 6 (1992):380–382.
9. “The Armed Forces: Who Are They”, *Time,* 29 de diciembre de 2003 to 5 de enero de 2004, p. 98.
10. http://www.ew.com/ew/chart/movie/0,6115,_1__,00.html, 22 de agosto de 2006.
11. http://sports.espn.go.com/nfl/players/profile?statsId=1025, 2 de enero de 2007.
12. A. Tubb, A.J. Parker y G. Nickless, “The Analysis of Romano-British Pottery by Atomic Absorption Spectrophotometry”, *Archaeometry* 22 (1980):153.
13. Robyn Greenspan, “Home Is Where the Network Is”, http://www.clickz.com/stats/big_ picture/applications/article.php/1301_3073431, 5 de septiembre de 2003.
14. Bettye Wells Miller, “Faith Shows Ballot Clout”, *The Press-Enterprise* (Riverside, CA) 1 de marzo de 2004, p. A7.
15. Borgna Brunner, Ed., *Time Almanac 2007* (Boston, MA: Pearson Education, Inc.), 2006.
16. “Ratings: Cordless Phones”, www.consumerreports.org/cro/electronics-computers/cordless-phones/reports, 26 de octubre de 2006.
17. “Dishwashers”, *Consumer Reports,* septiembre de 2007.

Capítulo 4

1. C. Salmon, J.P. Cartron y P. Rouger, *The Human Blood Groups* (New York: Masson Publishing, 1984).
2. Table adapted from http://www.pollingreport.com/science.htm#Stem, 30 de octubre de 2006.
3. Bruce E. Morgan and Michael A. Oberlander, “An Examination of Injuries in Major League Soccer”, *The American Journal of Sports Medicine,* 29(4), 2001, pp. 426–429.
4. http://sports.espn.go.com/nba/players, 5 de noviembre de 2006.
5. Data adapted from “Demo Memo”, *American Demographics,* mayo de 1997, p. 32; and *The World Almanac and Book of Facts, 2004,* p. 377.
6. “Coffee Breaks Daily”, www.usataoday.com/news/snapshot.htm?section=L&label=2006-10-26-cell, 26 de octubre de 2006.
7. Adapted from David L. Wheeler, “More Social Roles Means Fewer Colds”, *Chronicle of Higher Education* XLIII, núm. 44 (julio 11, 1997):A13.
8. Andrew S. Levy, M.J. Wetzler, M. Lewars y W. Laughlin, “Knee Injuries in Women Collegiate Rugby Players”, *The American Journal of Sports Medicine* 25, núm. 3 (1997):360.
9. P.D. Franklin, R.A. Lemon y H.S. Barden, “Accuracy of Imaging the Menisci on an In-Office, Dedicated, Magnetic Resonance Imaging Extremity System”, *The American Journal of Sports Medicine* 25, núm. 3 (1997):382.
10. Michael Crichton, *Congo* (New York: Knopf, 1980).

Capítulo 5

1. http://www.collegeboard.com/student/testing/sat/scores/understanding/average.html, Copyright ©collegeboard.com, Inc., 2006.
2. “Who’s reading Harry Potter”, http://usatoday.com/snapshot/life/2001-06-11-potter.htm. *Source:* Ipsos-NPD Book Trends, 9 de octubre de 2001.
3. “How back pain limits sports?” http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=L&label=2006-10-27-wash.
4. http://hsus.org/pets/issues_affecting_our_pets/pet_overpopulation_and_ownership_statistics/us_pet_ownership_statistics.html, 26 de octubre de 2006.
5. http://healthlink.mcw.edu/article/1031002172.html.
6. http://cnn.com/2006/HEALTH/10/26/tainted.spinach.ap/index.html.

7. "Will you be pushed out of your job?" http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=L&label=2006-10-27-wash.
8. *Advertising Age*, 7 de agosto de 2006, p. 4.
9. "Checking in on vacation", http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=L&label=2006-10-27-wash.
10. "Call It in the Air", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 19 de octubre de 1992.
11. Mark A. Atkinson, "Diet, Genetics y Diabetes", *Food Technology* 51, núm. 3 (marzo de 1997), p. 77.
12. "Most popular chocolate", http://usatoday.com/news/snapshot.htm?section=L&label=2006-10-27-wash.
13. "Why we play hooky", http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm, 2 de noviembre de 2006.
14. "How women eat on the run", http://www.usatoday.com, 1 de enero de 2004.
15. "Top destinations for vacationers", http://www.usatoday.com/news/snapshots, 2 de noviembre de 2006.
16. Matthew L. Wald, "Cancers Near a Reactor: A Mystery and a Debate", *New York Times,* 21 de mayo de 1987, p. A-22.

Capítulo 6

1. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_U.S._Presidents_by_height_order.
2. Adapted from A.M. Goodman and A.R. Ennos, "The Response of Field-Grown Sunflower and Maize to Mechanical Support", *Annals of Botany* 79 (1997):703.
3. John Fetto, "Shop Around the Clock", *American Demographics,* septiembre de 2003, p. 18.
4. "Medical Encyclopedia: Pulse", *Medline Plus: Trusted Health Information for You,* http://www.nlm.nih.gov/medlineplus/ency/article/003399.htm#Normal%20Values, 2 April 2004.
5. "How often we do at-home movies", http://usatoday.com/news/snapshot.htm, 2 de noviembre de 2006.
6. PepsiCo Annual Report, http://www.pepsico.com/PEP_Investors/AnnualReports/05/Pepsi2005Annual.pdf.
7. Sonja Steptoe, "Ready, Set, Relax!" *Time,* 27 de octubre de 2003, p. 38.
8. Philip A. Altman and D.S. Dittmer, *The Biology Data Book,* 2nd ed., Vol I. (Bethesda, MD: Federation of American Societies for Experimental Biology, 1964), p. 137.
9. Allen L. Shoemaker, "What's Normal? Temperature, Gender y Heart Rate", *Journal of Statistics Education* (1996).
10. "How polite are cellphone users?" http://usatoday/com/news/snapshot.htm?section=L&label=2006-10-27.
11. The National Center for Educational Statistics website, http://nces.ed.gov/ programs/digest/d05/tables/dt05_240.asp.
12. Daniel Seligman, "Keeping Up", *Fortune,* 27 de julio de 1981.

Capítulo 7

1. "Chlorinated Water Byproduct, Rat Cancer Linked", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 18 June 1997, p. A-6.
2. Chris Gilberg, J.L. Cos, H. Kashima y K. Eberle, "Survey Biases: When Does the Interviewer's Race Matter?", *Chance,* Fall 1996, p. 23.
3. Chery Smith and Stefanie Fila, "Comparison of the Kid's Block Food Frequency Questionnaire to the 24-Hour Recall in Urban Native American Youth", *American Journal of Human Biology,* 18:706–709 (2006).
4. "New Drug a Bit Better Than Aspirin", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 14 de noviembre de 1996, p. A-14.
5. "Space Exploration", CNN/*USA Today*/Gallup Poll, http://www.pollingreport.com/science.htm#Space, 5 April 2004.
6. "ASK AMERICA: 2003 Nationwide Policy Survey", Congressional District #44, 23 June 2003.

7. National Center for Educational Statistics website, http://www.nces.ed.gov/programs/digest/d05/tables/dt05_236.asp.
8. Allen L. Shoemaker, "What's Normal? Temperature, Gender y Heart Rate", *Journal of Statistics Education* (1996).
9. Nicola Maffulli, V. Testa, G. Capasso y A. Sullo, "Calcific Insertional Achilles Tendinopathy", *The American Journal of Sports Medicine* 32, núm. 1 (enero/febrero de 2004):174.
10. "Weight we want to lose (in pounds)", http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=N&label=2006-11-08-candy.
11. http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section= N&label=2006-11-08-candy.
12. http://www1.mms.com/us/about/products/milkchocolate/, 27 de noviembre de 2006.
13. Judy Holland, "'Cheeseburger Bill' on the Menu", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 9 de marzo de 2004, p. E1.
14. Adam Fernandez, "Nuts About You", *American Demographics* 26, núm. 1 (febrero de 2004):14.
15. P.C. Karalekas, Jr., C.R. Ryan y F.B. Taylor, "Control of Lead, Copper y Iron Pipe Corrosion in Boston", *American Water Works Journal,* febrero de 1983.
16. *Science News* 136 (19 de agosto de 1989):124.
17. http://www.pollingreport.com/abortion.htm, 8 de noviembre de 2006.
18. Catherine M. Santaniello and R.E. Koning, "Are Radishes Really Allelopathic to Lettuce?" *The American Biology Teacher* 58, núm. 2 (febrero de 1996):102.
19. http://www.gallup.com/poll/indicators/indairlines.asp#RelatedAnalyses. Gallup Poll News Service, 16 de octubre de 2001.
20. J. Hackl, *Journal of Quality Technology,* April 1991.
21. Daniel Seligman, "The Road to Monte Carlo", *Fortune,* 15 April 1985.

Capítulo 8

1. Adapted from "Polar Bear", http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_Bear#Size_and_weight, 9 de noviembre de 2006.
2. *Science News* 136 (19 de agosto de 1989):124.
3. FOX News/Opinion Dynamics Poll, http://www.pollingreport.com/immigration.htm, 11–12 de julio de 2006.
4. Adapted from "Suite Dreams", *Consumer Reports,* julio de 2001, p. 12–16.
5. "Space Exploration", Associated Press Poll, http://www.pollingreport.com/science.htm#Space, 5 April 2004.
6. "Bottom Line—Tuning In", *The Press Enterprise,* 28 de julio de 2006, p. E2.
7. Newsweek Poll conducted by Princeton Survey Research Associates International. Oct. 26–27, 2006, http://www.pollingreport.com/abortion.htm, 8 de noviembre de 2006.
8. Alison Stein Wellner, "A New Cure for Shoppus Interuptus", *The Marketing Tool Directory,* 2002.
9. Allen L. Shoemaker, "What's Normal? Temperature, Gender y Heart Rate", *Journal of Statistics Education* (1996).
10. Christopher Reynolds, "Rocking the Vote", *American Demographics* 26, núm. 1 (febrero de 2004):48.
11. William Leonard, Barbara Speziale y John Pernick, "Performance Assessment of a Standards-Based High School Biology Curriculum", *The American Biology Teacher* 63, núm. 5 (2001):310–316.
12. http://pewresearch.org/obdeckID=86, Pew Research Center, 9 de noviembre de 2006.
13. Mark Gillespie, "Baseball Fans Overwhelmingly Want Mandatory Steroid Testing", Gallup News Service, http://gallup.com/content/print.aspx?ci=11245, 14 de febrero de 2004.
14. David L. Wheeler, "More Social Roles Means Fewer Colds", *Chronicle of Higher Education* XLIII, núm. 44 (11 de julio de 1997):A13.
15. "Generation Next: A Snapshot", www.pewtrusts.org/ideas, 9 de noviembre de 2006 and "The American Freshman: National Norms for Fall 2005", http://www.gseis.ucla.edu/heri/PDFs/ResearchBrief05.pdf, 9 de noviembre de 2006.

16. Reed Abelson, “A Survey of Wall St. Finds Women Disheartened”, The *New York Times on the Web,* http://www.nytimes.com, 26 de julio de 2001.
17. Shannon Dortch, “American Weighs In”, *American Demographics,* June 1997, p. 39.
18. Adapted from A.M. Goodman and A.R. Ennos, “The Responses of Field-Grown Sunflower and Maize to Mechanical Support”, *Annals of Botany* 79 (1997):703.
19. “Is America Ready for a Woman President”, CBS News/*New York Times* Poll, http://www.cbsnews.com/stories/2006/02/03/opinion/polls/main1281319.shtml, 5 de febrero de 2006.
20. G. Wayne Marino, “Selected Mechanical Factors Associated with Acceleration in Ice Skating”, *Research Quarterly for Exercise and Sport* 54, núm. 3 (1983).
21. “Hourly wages for school workers”, http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=N&label=2006-11-10-gas.
22. http://cbsnews.com/stories/2005/11/20/opinion/polls/printaale1060315.shtml, 10 de noviembre de 2005.

Capítulo 9

1. Jan Pergl, Irena Perglova, Petr Pysek y Hansjörg Dietz, “Population Age Structure and Reproductive Behavior of the Monocarpic Perennial *Heraculaneum Mantegazzianum* (Apiaceae) in Its Native and Invaded Distribution Ranges”, *American Journal of Botany,* 93(7): 1018–1028, (2006).
2. “America by the Numbers”, *Time,* 30 de octubre de 2006, pp. 43–55.
3. Allen L. Shoemaker, “What’s Normal? Temperature, Gender y Heart Rate”, *Journal of Statistics Education* (1996).
4. “Hot News: 98.6 Not Normal”, *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 23 de septiembre de 1992.
5. Nicola Maffulli, V. Testa, G. Capasso y A. Sullo, “Calcific Insertional Achilles Tendinopathy”, *The American Journal of Sports Medicine* 32, núm. 1 (eneroe/febrero de 2004):174.
6. Adapted from “Suite Dreams”, *Consumer Reports,* julio de 2001, pp. 12–16.
7. Lance Wallace and Terrence Slonecker, “Ambient Air Concentrations of Fine (PM 2.5) Manganese in the U.S. National Parks and in California and Canadian Cities: The Possible Impact of Adding MMT to Unleaded Gasoline”, *Journal of the Air and Waste Management Association* 47 (June 1997):642–651.
8. Dianne Hales, “We’re Changing the Way We Eat”, *PARADE,* noviembre de 12, 2006, pp. 4–5.
9. “Seeing the World Through Tinted Lenses”, *Washington Post,* 16 de marzo de 1993, p. 5.
10. “America by the Numbers: How We Vote . . . ”, *Time,* 30 de octubre de 2006, p. 46.
11. http://hsus.org/pets/issues_affecting_our_pets/pet_overpopulation_and_ownership_. . .10/26/2006.
12. Adapted from Pamela Paul, “Coming Soon: More Ads Tailored to Your Tastes”, *American Demographics,* agosto de 2001, p. 28.
13. Denise Grady, “Study Finds Alzheimer’s Danger in Hormone Therapy”, *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 28 de mayo de 2003.
14. *Heart Healthy Women* website, http://www.hearthealthywomen.org/patients/medications/blood_thinners__aspirin_6.html.
15. Jonathan W. Jantz, C.D. Blosser y L.A. Fruechting, “A Motor Milestone Change Noted with a Change in Sleep Position”, *Archives of Pediatric Adolescent Medicine* 151 (June 1997):565.
16. “Generation Next: A Snapshot”, www.pewtrusts.org/ideas, 9 de noviembre de 2006; and “The American Freshman: National Norms for Fall 2005”, http://www.gseis.ucla.edu/heri/PDFs/ResearchBrief05.PDF, 9 de noviembre de 2006.
17. Loren Hill, *Bassmaster,* septiembre de/de octubre de 1980.
18. Joe Sylvester, “Area District Attorneys: Don’t Judge Us by Statistics”, *The Daily Item* (Sunbury, PA), 17 de agosto de 1997, p. A-1.
19. Charles Dickey, “A Strategy for Big Bucks”, *Field and Stream,* octubre de 1990.
20. *Science News* 136 (19 de agosto de 1989):124.

21. Jeeseung Choi, Janet Meininger y Robert E. Roberts, “Ethnic Differences in Adolescents’ Mental Distress, Social Stress y Resources”, *Adolescence,* Vol. 41, núm. 162, Summer 2006, pp. 263–278.
22. http://www.infoplease.com/ipa/A0883611.html.
23. Lev Grossman, “Why the 9/11 Conspiracies Won’t Go Away”, *Time,* 11 de septiembre de 2006, p. 46.
24. Cadonna Peyton, “Pupils Build English Skills”, *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 19 de marzo de 2004, p. B-1.
25. Kurt Grote, T.L. Lincoln y J.G. Gamble, “Hip Adductor Injury in Competitive Swimmers”, *The American Journal of Sports Medicine* 32, núm. 1 (enero/febrero de 2004):104.
26. “Hourly wages for school workers”, http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm?section=N&label=2006-11-10-gas.
27. Joel B. Greenhouse and Samuel W. Greenhouse, “An Aspirin a Day . . . ?”, *Chance: New Directions for Statistics and Computing* 1, núm. 4 (1988):24–31.

Capítulo 10

1. “Pricing of Tuna”, *Consumer Reports,* June 2001.
2. W.B. Jeffries, H.K. Voris y C.M. Yang, “Diversity ad Distribution of the Pedunculate Barnacles *Octolasmis* Gray, 1825 Epizoic on the Scyllarid Lobster *Thenus orientalis* (Lund, 1793)”, *Crustaceana* 46, núm. 3 (1984).
3. ESPN NFL Player Index. http://sports.espn.go.com/nfl/players, 2 de enero de 2007.
4. Wendy K. Baell and E.H. Wertheim, “Predictors of Outcome in the Treatment of Bulimia Nervosa”, *British Journal of Clinical Psychology* 31 (1992):330–332.
5. “L.A. Heart Data.” Adapted from data found at http://www-unix.oit.umass.edu/~statdata/statdata/data/laheart.dat.
6. Jan D. Lindhe, “Clinical Assessment of Antiplaque Agents”, *Compendium of Continuing Education in Dentistry,* Supplement 5 (1984).
7. Susan J. Beckham, W.A. Grana, P. Buckley, J.E. Breasile y P.L. Claypool, “A Comparison of Anterior Compartment Pressures in Competitive Runners and Cyclists”, *American Journal of Sports Medicine* 21, núm. 1 (1992):36.
8. Michael A. Brehm, J.S. Buguliskis, D.K. Hawkins, E.S. Lee, D. Sabapathi y R.A. Smith, “Determining Differences in Efficacy of Two Disinfectants Using *t*-tests”, *The American Biology Teacher* 58, núm. 2 (febrero de 1996):111.
9. A. Tubb, A.J. Parker y G. Nickless, “The Analysis of Romano-British Pottery by Atomic Absorption Spectrophotometry”, *Archaeometry* 22 (1980):153.
10. “2006–2007 Automobile Insurance”, *California Department of Insurance,* http://interactive.web.insurance.ca.gov/survey/survey?type=autoSurvey&event=autoSearch, 28 de noviembre de 2006.
11. Collegeboard SAT: *2006 College Bound Seniors, Total Group Profile Report,* http://www.collegeboard.com/prod_downloads/about/news_info/cbsenior/yr2006/national-report.pdf.
12. Carlos E. Macellari, “Revision of Serpulids of the Genus *Rotularia* (*Annelida*) at Seymour Island (Antarctic Peninsula) and Their Value in Stratigraphy”, *Journal of Paleontology* 58, núm. 4 (1984).
13. T.M. Casey, M.L. de mayo de y K.R. Morgan, “Flight Energetics of Euglossine Bees in Relation to Morphology and Wing Stroke Frequency”, *Journal of Experimental Biology* 116 (1985).
14. Karl J. Niklas and T.G. Owens, “Physiological and Morphological Modifications of *Plantago Major* (*Plantaginaceae*) in Response to Light Conditions”, *American Journal of Botany 76*, núm. 3 (1989):370–382.
15. *Consumer Reports* website, http://www.consumerreports.org/cro/cars/past-road-test/index.htm.
16. “KFC: Too Finger-Lickin’ Good?” *Good Housekeeping* Saavy Consumer Product Tests, http://magazines.ivillage.com/goodhousekeeping/print/0,446041,00.html, 11 de marzo de 2004.
17. John Fetto, “Shop Around the Clock”, *American Demographics* 25, núm. 7 (septiembre de 2003):18.

18. Adapted from Donald L. Barlett and James B. Steele, "Why We Pay So Much for Drugs", *Time,* 2 de febrero de 2004, p. 44.
19. Charles S. Catlin, "Four-Day Work Week Improves Environment", *Environmental Health,* marzo de 1997, p. 12.

Capítulo 11

1. "Pricing of Tuna", *Consumer Reports,* June 2001.
2. "2006–2007 Automobile Insurance", California Department of Insurance, http://interactive.web.insurance.ca.gov/survey/survey?type=autoSurvey&event=autoSearch, 28 de noviembre de 2006.
3. "WinCo Foods: Compare and Save", 12880 Day St., Moreno Valley, CA, delivered by bulk mailing de octubre de 4–6, 2006.
4. H.F. Barsam and Z.M. Simutis, "Computer-Based Graphics for Terrain Visualization Training", *Human Factors,* núm. 26, 1984. Copyright 1984 by the Human Factors Society, Inc. Reproduced by permission.
5. "How Fares Differ by Airport and Airline", *Consumer Reports,* julio de 1997, p. 24.
6. *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 11 de febrero de 1993.
7. Russell R. Pate, Chia-Yih Wang, Marsha Dowda, Stephen W. Farrell y Jennifer R. O'Neill, "Cardiorespiratory Fitness Levels Among U.S. Youth 12 to 19 Years of Age", *Archives of Pediatric Adolescent Medicine,* Vol. 160, octubre de 2006, pp. 1005–1011.
8. "Average Salary for Men and Women Faculty by Category, Affiliation y Academic Rank, 2005–2006", *Academe,* marzo de–April 2006, Vol. 92, núm. 2, p. 38. Copyright ©American Association of University Professors.
9. A. Tubb, A.J. Parker y G. Nickless, "The Analysis of Romano-British Pottery by Atomic Absorption Spectrophotometry", *Archaeometry* 22 (1980):153.
10. Harry R. Weber, "Is the Fix In?" *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 19 de febrero de 2004, p. G-1.
11. Robert McGarvey, "A Fine Mess", *Avenues,* julio/agosto 1994, pp. 19–25.

Capítulo 12

1. Stellan Ohlsson, "The Learning Curve for Writing Books: Evidence from Professor Asimov", *Psychological Science* 3, núm. 6 (1992):380–382.
2. Daniel C. Harris, *Quantitative Chemical Analysis,* 3rd ed. (New York: Freeman, 1991).
3. "2001 Academic Performance Index (API) Report", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 16 de octubre de 2001, p. A8.
4. Adapted from J. Zhou and S. Smith, "Measurement of Ozone Concentrations in Ambient Air Using a Badge-Type Passive Monitor", *Journal of the Air & Waste Management Association* 47 (June 1997):697.
5. "Round-Trip Fares on America's Most Popular Routes", *Consumer Reports,* julio de 1997, p. 25.
6. Lawrence E. Levine and Victorina Wasmuth, "Laptops, Technology y Algebra 1: A Case Study of an Experiment", *Mathematics Teacher* 97, núm. 2 (febrero de 2004):136.
7. "LCD TVs", http://www.consumerreports.org/cro/electronics-computers/tvs/lcd-tvs/reports/product-selector/index.htm, 22 de agosto de 2006.
8. "#12, Tom Brady", http://sports.espn.go.com/nfl/players/profile?statsId=5228, 3 de enero de 2007.
9. W.B. Jeffries, H.K. Voris y C.M. Yang, "Diversity and Distribution of the Pedunculat Barnacles *Octolasmis* Gray, 1825 Epizoic on the Scyllarid Lobster, *Thenus orientalis* (Lund, 1793)", *Crustaceana* 46, núm. 3 (1984).
10. Gregory K. Torrey, S.F. Vasa, J.W. Maag y J.J. Kramer, "Social Skills Interventions Across School Settings: Cast Study Reviews of Students with Mild Disabilities", *Psychology in the Schools* 29 (julio de 1992):248.
11. G. Wayne Marino, "Selected Mechanical Factors Associated with Acceleration in Ice Skating", *Research Quarterly for Exercise and Sport* 54, núm. 3 (1983).
12. A.J. Ellis, "Geothermal Systems", *American Scientist,* septiembre de/de octubre de 1975.

13. Allen L. Shoemaker, "What's Normal? Temperature, Gender y Heart Rate", *Journal of Statistics Education* (1996).
14. http://sports.espn.go.com/mlb/teams, 12 de diciembre de 2006.
15. David R. McAllister *et al.*, "A Comparison of Preoperative Imaging Techniques for Predicting Patellar Tendon Graft Length before Cruciate Ligament Reconstruction", *The American Journal of Sports Medicine,* 20(4):461–465.
16. Henry Gleitman, *Basic Psychology,* 4th ed. (New York: Norton, 1996).
17. http://www.ew.com/ew/chart/movie/0,6115,_1__,00.html, 22 de agosto de 2006.
18. Mark Rechtin, "Boss Puts 'Buzz' on U.S. Luxury Leader's To-Do List", *Automotive News,* 26 de enero de 2004, p. 4 y 22 de mayo de 2006.
19. "Starbucks Beverage and Food Details", http://www.starbucks.com/retail/nutrition_info.asp, 4 de mayo de 2004.
20. "Ratings: Walking Shoes", *Consumer Reports,* octubre de 2006, p. 52.
21. *Automotive News: 1997 Market Data Book,* 28 de mayo de 1997, *2001 Market Data Book* (online), www.automotivenews.com/datacenter.cms, 20 de septiembre de 2001; *2003 Market Data Book*, 26 de mayo de 2003, 2005 *Market Data Book,* 23 de mayo de 2005 y 2006 *Market Data Book*, 22 de mayo de 2006.

Capítulo 13

1. W.S. Good, "Productivity in the Retail Grocery Trade", *Journal of Retailing* 60, núm. 3 (1984).
2. "Burgers from the Garden", *Consumer Reports,* julio de 1997, p. 36.
3. Adapted from J. Zhou and S. Smith, "Measurement of Ozone Concentrations in Ambient Air Using a Badge-Type Passive Monitor", *Journal of the Air & Waste Management Association* (June 1997):697.
4. Adapted from http://blog.qumana.com/blog/_archives/2006/7/12/2108371.html, noviembre de 7, 2006.
5. "2001 Academic Performance Index (API) report", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 16 de octubre de 2001, p. A8.
6. R. Blair and R. Miser, "Biotin Bioavailability from Protein Supplements and Cereal Grains for Growing Broiler Chickens", *International Journal of Vitamin and Nutrition Research* 59 (1989):55–58.
7. "Round-Trip Fares on America's Most Popular Routes", *Consumer Reports,* julio de 1997, p. 25.
8. "Tires: Seasonal Performers", *Consumer Reports*, noviembre de 2006, pp. 52–54
9. "Tuna Goes Upscale", *Consumer Reports,* June 2001, p. 19.
10. *Automotive News: 1997 Market Data Book,* 28 de mayo de 1997, p. 50; *2001 Market Data Book* (online), www.automews.com/datacenter.cms, 20 de septiembre de 2001; and *2003 Market Data Book*, 26 de mayo de 2003, p. 40, 2006 Market Data Book, 22 de mayo de 2006, p. 25.

Capítulo 14

1. Daniel Q. Haney, "Mondays de mayo de Be Hazardous", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 17 de noviembre de 1992, p. A16.
2. "What Colors Come in Your Bag?", http://us.mms.com/us/about/products/milkchocolate/, 4 de enero de 2007.
3. "What Colors Come in Your Bag?", http://us.mms.com/us/about/products/peanut/, 4 de enero de 2007.
4. http://www.pollingreport.com/health3.htm, ABC News/*Washington Post* Poll, 6–9 April 2006.
5. Adapted from Linda Schmittroth, ed., *Statistical Record of Women Worldwide* (Detroit and London: Gale Research, 1991).
6. "Waiting for a prescription (average time in minutes)", Adapted from http://www.USATODAY.com/snapshot/life/2001-06-10-drugwait.htm, 26 de septiembre de 2001.
7. Adapted from Dana Blanton, "Poll: Most Believe 'Cover-Up' of JFK Assassination Facts", http://www.foxnews.com/story/0,2933,102511,00.html, 10 de febrero de 2004.

8. "No Shows", *American Demographics,* 25, núm. 9 (noviembre de 2003):11.
9. Adapted from Tamar Lewin, "Report Looks at a Generation y Caring for Young and Old", *The New York Times on the Web,* 11 de julio de 2001.
10. Siobhan Reilly, Michele Abendstern, Jane Hughes, David Challis, Dan Venables y Irene Pedersen, "Quality in Long-Term Care Home for People with Dementia: An Assessment of Specialist Provision", *Aging and Society,* 26(2006):649–668.
11. W.W. Menard, "Time, Chance and the Origin of Manganese Nodules", *American Scientist,* septiembre/octubre, 1976.
12. Elizabeth A. Crowley, "Churchgoing Rises with Age", http://www.usatoday.com/news/snapshot.htm, 30 de enero de 2004.
13. Thomas Lord and Terri Orkwiszewski, "Moving from Didactic to Inquiry-Based Instruction in a Science Laboratory", *American Journal of Primatolgy,* 68 (octubre de 2006).
14. Jonathan W. Jantz, C.D. Blosser y L.A. Fruechting, "A Motor Milestone Change Noted with a Change in Sleep Position", *Archives of Pediatric Adolescent Medicine* 151 (June 1997):565.
15. Adapted from "Salmonella de mayo de Taint Many Holiday Turkeys", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA) 20 de noviembre de 2001, p. A3.
16. William A. McGeveran, Jr., Ed., "Homeschooled Students", *The World Almanac and Book of Facts 2007* (New York: WRC Media, Inc.), 2007, p. 406 and http://www.census.gov/prod/2004pubs/p20-550.pdf.
17. Dan Smith, "Motorists Have Little Respect for Others' Skills", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 15 de marzo de 1991.
18. William A. McGeveran, Jr., Ed., "Most Popular Colors, by Type of Vehicle, 2005 Model Year", *The World Almanac and Book of Facts 2007* (New York: WRC Media, Inc.), 2007, p. 83.
19. "Every Dad Has His Day", *Time,* 16 June 1997, p. 16.
20. Doreen Matsui, R. Lim, T. Tschen y M.J. Rieder, "Assessment of the Palatability of b-Lactamase-Resistant Antibiotics in Children", *Archives of Pediatric Adolescent Medicine* 151 (June 1997):599.
21. Andrew S. Levy, M.J. Wetzler, M. Lewars y W. Laughlin, "Knee Injuries in Women Collegiate Rugby Players", *The American Journal of Sports Medicine* 25, núm. 3 (1997):360.
22. Adapted from David L. Wheeler, "More Social Roles Means Fewer Colds", *Chronicle of Higher Education* XLIII, núm. 44 (julio de 11, 1997):A13.
23. Carole Day and Del Lowenthal, "The Use of Open Group Discussions in Marketing Library Services to Young Adults", *British Journal of Educational Psychology* 62 (1992):324–340.

Capítulo 15

1. T.M. Casey, M.L. de mayo de y K.R. Morgan, "Flight Energetics of Euglossine Bees in Relation to Morphology and Wing Stroke Frequency", *Journal of Experimental Biology* 116 (1985).
2. "Alzheimer's Test Set for New Memory Drug", *The Press-Enterprise* (Riverside, CA), 18 de noviembre de 1997, p. A-4.
3. *Science News* 136 (agosto 1989):126.
4. D. Matsui *et al.*, "Assessment of the Palatability of b-Lactamase-Resistant Antibiotics in Children", *Archives of Pediatric Adolescent Medicine* 151 (1997):559–601.
5. Scott K. Powers and M.B. Walker, "Physiological and Anatomical Characteristics of Outstanding Female Junior Tennis Players", *Research Quarterly for Exercise and Sport* 53, núm. 2 (1983).
6. *Science News,* 1989, p. 116.
7. G. Merrington, L. Winder y I. Green, "The Uptake of Cadmium and Zinc by the Birdcherry Oat Aphid *Rhopalosiphum Padi* (*Homoptera:Aphididae*) Feeding on Wheat Grown on Sewage Sludge Amended Agricultural Soil", *Environmental Pollution* 96, núm. 1 (1997):111–114.
8. Karola Sakekel, "Egg Substitutes Range in Quality", *San Francisco Chronicle,* 10 de febrero de 1993, p. 8.

Respuestas a ejercicios seleccionados

Capítulo 1

1.1 **a.** el estudiante **b.** el examen **c.** el paciente **d.** la planta **e.** el auto

1.3 **a.** discreta **b.** continua **c.** continua **d.** discreta

1.5 **a.** vehículos **b.** tipo (cualitativa); marca (cualitativa); colectivo (cualitativa); distancia (cuantitativa continua); antigüedad (cuantitativa continua) **c.** multivariado

1.7 La población es el conjunto de preferencias del electorado para todos los electores del estado. Las preferencias del electorado pueden cambiar con el tiempo.

1.9 **a.** calificación del examen de lectura; cuantitativa **b.** el estudiante **c.** el conjunto de calificaciones para todos los estudiantes sordos que hipotéticamente podrían tomar el examen

1.11 **a.** un par de jeans **b.** el estado en que los jeans son producidos; cualitativa **e.** 8/25 **f.** California **g.** Los tres estados producen casi los mismos números de jeans.

1.13 **a.** no; agregue una categoría llamada "Otra"

1.15 **a.** no **b.** no del todo **c.** la gráfica de barras

1.17 Las respuestas pueden a variar.

1.19 **a.** ocho a diez intervalos de clase **c.** 43/50 **d.** 33/50 **e.** sí

1.21 **b.** .30 **c.** .70 **d.** .30 **e.** relativamente simétrica; no

1.25 **b.** centradas en 75; dos picos (bimodal) **c.** Las calificaciones se dividen en dos grupos de acuerdo a la capacidad del estudiante.

1.27 **a.** gráfica de pastel, gráfica de barras

1.29 **c.** la gráfica de Pareto

1.31 **a.** sesgados a la derecha; varios resultados atípicos

1.33 **b.**

```
Stem-and-leaf of Ages N = 37
Leaf Unit = 1.0
   2    4  69
   3    5  3
   7    5  6678
  13    6  003344
 (6)    6  567778
  18    7  0111234
  11    7  7889
   7    8  013
   4    8  58
   2    9  00
```

relativamente simétrica **c.** Kennedy, Garfield y Lincoln fueron asesinados.

1.35 **b.** 0.05

1.37 **a.** número de sitios de desechos peligrosos (discreta) **b.** sesgada a la derecha **c.** tamaño del estado; cantidad de actividad industrial

1.39 **a.** sesgadas **b.** simétricas **c.** simétricas **d.** simétricas **e.** sesgadas **f.** sesgadas

1.41 **a.** continuas **b.** continuas **c.** discretas **d.** discretas **e.** discretas

1.43

```
 7 | 8 9
 8 | 0 1 7
 9 | 0 1 2 4 4 5 6 6 6 8 8
10 | 1 7 9
11 | 2
```

1.45 **c.** sesgada a la derecha

1.49 **a.** no **b.** aprox. En forma de montículo

1.51 **a.** sesgada a la derecha **c.** sí; estados grandes

1.53 **a.** El voto popular está sesgado a la derecha; el porcentaje de votos es relativamente simétrico. **b.** sí **c.** Una vez eliminado el tamaño del estado, cada estado será medido del mismo modo.

1.55 **d.** Las respuestas variarán.

1.57 **a.** no

1.59 **b.** distribución bimodal, resultados atípicos; diferentes sitios de hornos **c.** sí

1.63 **a.** **Exhibición de tallo y hojas: porcentaje**

```
Stem-and-leaf of Percent N = 51
Leaf Unit = 1.0
 1    0   8
 3    1   00
 3    1
 5    1   44
 10   1   66777
 20   1   8888889999
(11)  2   00000000011
 20   2   233333
 14   2   444555
 8    2   67
 6    2   89
 4    3   01
 2    3   22
```

b. aprox. En forma de montículo
c. tres un poco bajos: Alaska, Georgia y Nueva Jersey

1.65 Use una gráfica de pastel o una gráfica de barras.

1.67 **a.** aprox. En forma de montículo
b. barra centrada en 100.8
c. ligeramente arriba del centro

1.69 **a.** un poco en forma de montículo **b.** .2

1.73 **a-b.** sesgada a la izquierda **c.** 8 y 11

Capítulo 2

2.1 **b.** $\bar{x} = 2$; $m = 1$; modo $= 1$ **c.** sesgadas

2.3 **a.** 5.8 **b.** 5.5 **c.** 5 y 6

2.5 **a.** ligeramente sesgada a la derecha
c. $\bar{x} = 1.08$; $m = 1$; modo $= 1$

2.7 2.5 es un número promedio calculado (o estimado) para todas las familias de una categoría particular.

2.9 La mediana, porque la distribución está altamente sesgada a la derecha.

2.11 **a.** $\bar{x} = 4.72$; $m = 3.50$; modo $= 1$
b. sesgada a la derecha **c.** sí

2.13 **a.** 2.4 **b.** 2.8 **c.** 1.673

2.15 **a.** 3 **b.** 2.125 **c.** $s^2 = 1.2679$; $s = 1.126$

2.17 **a.** 1.11 **b.** $s^2 = .19007$, $s = .436$
c. $R \approx 2.5s$

2.19 **a.** $s \approx 1.67$ **b.** $s = 1.75$ **c.** no
d. sí **e.** no

2.21 **a.** aproximadamente .68
b. aproximadamente .95
c. aproximadamente .815
d. aproximadamente .16

2.23 **a.** $s \approx .20$ **b.** $\bar{x} = .76$; $s = .165$

2.25 **a.** aproximadamente .68
b. aproximadamente .95
c. aproximadamente .003

2.27 **a.** ≈ 4.5 **b.** ≈ 2.25 **c.** $\bar{x} = 4.586$; $s = 2.892$

2.29 **a.** sesgada a la derecha **b.** 0 a 104 días

2.31 **b.** $\bar{x} = 7.729$ **c.** $s = 1.985$

k	$\bar{x} \pm ks$	Actual	Tchebysheff	Regla empírica
1	(5.744, 9.714)	.71	Al menos 0	Aprox. .68
2	(3.759, 11.699)	.96	Al menos 3/4	Aprox. .95
3	(1.774, 13.684)	1.00	Al menos 8/9	Aprox. .997

2.33 **a.** 42 **b.** $s \approx 10.5$ **c.** $s = 13.10$
d. 1.00; 1.00; sí

2.35 **a.** $s \approx .444$ **b.** $s = .436$

2.37 **a-b.** $\bar{x} = 1.4$; $s^2 = 1.4$

2.39 **a.** $\bar{x} = 2.04$; $s = 2.806$
b-c.

k	$\bar{x} \pm ks$	Actual	Tchebysheff	Regla empírica
1	(−.766, 4.846)	.84	Al menos 0	Aprox. .68
2	(−3.572, 7.652)	.92	Al menos 3/4	Aprox. .95
3	(−6.378, 10.458)	1.00	Al menos 8/9	Aprox. .997

2.41

Conjunto ordenado de datos	Posición de Q_1	Mediciones arriba y abajo	Q_1	Posición of Q_3	Mediciones arriba y abajo	Q_3
1, 1.5, 2, 2, 2.2	1.5	1 y 1.5	1.25	4.5	2 y 2.2	2.1
0, 1.7, 1.8, 3.1, 3.2, 7, 8, 8.8, 8.9, 9, 10	3	Ninguna	1.8	9	Ninguna	8.9
.23, .30, .35, .41, .56, .58, .76, .80	2.25	.30 y .35	.3125	6.75	.58 y .76	.7150

2.43 mín $= 0$, $Q_1 = 6$, $m = 10$, $Q_3 = 14$, máx $= 19$; IQR $= 8$

2.45 cuartil superior e inferior: −2.25 y 15.25; $x = 22$ es un resultado atípico

2.47 **a.** mín $= 1.70$, $Q_1 = 130.5$, $m = 246.5$, $Q_3 = 317.5$, máx $= 485$
b. cuartil superior e inferior: −150 y 598
c-d. No, pero hay cuatro observaciones extremadamente pequeñas, no identificadas por la gráfica de caja como resultados atípicos.

2.49 **a.**

Variable	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
Favre	5.00	19.25	22.00	24.75	31.00
Manning	14.00	20.25	23.50	26.75	32.00

b. *Favre*: cuartil inferior y superior: 11 y 33; un resultado atípico ($x = 5$); relativamente simétricas, excepto por el resultado atípico. *Manning*: cuartil superior e inferior: 10.5 y 36.5; no hay resultados atípicos, relativamente simétricos.

2.51 **a.** sesgada a la izquierda **b.** $\bar{x} = 108.15$; $m = 123.5$; media < mediana implica sesgada a la izquierda **c.** cuartil superior e inferior: -43.125 y 259.875; sesgada a la izquierda, no hay resultados atípicos.

2.53 Las temperaturas en mujeres tienen un centro (mediana) más alto y son más variables; tres resultados atípicos en el grupo de mujeres.

2.55 **a.** *Genérica*: $m = 26$, $Q_1 = 25$, $Q_3 = 27.25$, $IQR = 2.25$; *Sunmaid*: $m = 26$, $Q_1 = 24$, $Q_3 = 28$, $IQR = 4$ **b.** *Genérica*: cuartil superior e inferior: 21.625 y 30.625; *Sunmaid*: cuartil superior e inferior: 18 y 34 **c.** sí **d.** El tamaño promedio es casi igual; los tamaños individuales de pasas son más variables para pasas Sunmaid.

2.57 **a.** $R = 32.1$ **b.** $s \approx 8.025$ **c.** $s = 7.671$

2.59 $m = 6.35$, $Q_1 = 2.325$, $Q_3 = 12.825$; cuartil inferior y superior: -13.425 y 28.575; un resultado atípico ($x = 32.3$).

2.61 **a, b.**

k	$\bar{x} \pm ks$	Tchebysheff	Regla empírica
1	(.16, .18)	Al menos 0	Aprox. .68
2	(.15, .19)	Al menos 3/4	Aprox. .95
3	(.14, .20)	Al menos 8/9	Aprox. .997

c. No, la distribución de $n = 4$ mediciones no puede ser de forma de montículo.

2.63 68%; 95%

2.65 **a.** 27; 20.2; 6.8 **b.** ligeramente sesgada a la izquierda **c.** 23.96; 1.641 **d.** máxima $x = 27$, marcador $z = 1.85$; mínima $x = 20.2$, marcador $z = -2.29$; no **e.** 24.3 **f.** 22.95 y 24.85

2.67 **a.** $s \approx 7.75$ **b.** $\bar{x} = 59.2$; $s = 10.369$ **c.** $m = 60$, $Q_1 = 51.25$, $Q_3 = 69.75$; cuartiles inferiores y superiores: 23.5 y 97.5; no hay resultados atípicos.

2.69 $\sigma \approx 100$

2.71 **a.** 16% **b.** 81.5%

2.73 **a.** .9735 **b.** .16

2.75 **a.** .025 **b.** .84

2.77 **a.** Al menos 3/4 tienen entre 145 y 205 profesores. **b.** .16

2.81 **a.** 8.36 **b.** 4 **c.** sesgada a la derecha **d.** cuartiles inferiores y superiores: -24.375 y 42.625; no; sí

2.83 **b.** sí **c.** más de 2 o 3 desviaciones estándar desde la media

2.85 **a.** 2.5, 3.75, 4.2, 4.75, 5.7 **b.** cuartiles inferiores y superiores: 2.25 y 6.25 **c.** no **d.** en forma de montículo; sí

2.87 **b.** la media muestral se hace más pequeña **d.** $5 \leq m \leq 10$

2.89 **c.** La desviación estándar cuando se divide entre $n - 1$ está más cerca de σ.

2.91 **b-c.** sesgada a la izquierda con un resultado atípico a la derecha de las obras observaciones ($x = 520$)

Capítulo 3

3.3 **a.** gráficas de pastel comparativas; gráficas de barras pareadas o de barras en columna **c.** Las proporciones gastadas en las cuatro categorías son considerablemente diferentes para hombres y mujeres.

3.5 **a.** *Población*: respuestas a la pregunta de tiempo libre para todos los padres e hijos en Estados Unidos. *Muestra*: respuestas para las 398 personas del estudio. **b.** datos bivariados, que miden relación (cualitativa) y respuesta (cualitativa) **c.** el número de personas que caen en la categoría de relación-opinión **e.** gráficas de barras en columna o pareadas

3.9

x	y	xy	Calcule:	Covarianza
1	6	6	$n = 3$	
3	2	6	$s_x = 1$	$s_{xy} = \dfrac{\Sigma xy - \dfrac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}}{n-1} = -2$
2	4	8	$s_y = 2$	Coeficiente de correlación
$\Sigma x = 6$	$\Sigma y = 12$	$\Sigma xy = 20$		$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = -1$

3.11 **b.** Cuando x aumenta, y aumenta. **c.** .903 **d.** $y = 3.58 + .815x$; sí

3.13 **b.** Cuando x aumenta, y disminuye. **c.** $-.987$

3.15 **a.** $y = 56.11 + 23.83x$ **c.** \$199.06; no

3.17 **b.** ligera tendencia positiva **c.** $r = .760$

3.19 **a.** precio = variable dependiente; tamaño = variable independiente **b.** sí

3.21 **b.** La productividad del profesor parece aumentar, con menos tiempo necesario para escribir libros después; no

3.23 **a.** edad del soldado (cuantitativa), estado civil del soldado, recluta u oficial (cualitativa), rama de servicio (cualitativa) **b.** la población de respuestas para todos los soldados en el Ejército e Infantería de Marina; población en un momento fijo en el tiempo **c.** gráficas de barra pareadas; gráficas de barras en columna

3.27 **a.** .882 (.886 usando la salida impresa Minitab) **b.** x = semanas en exhibición, y = ingreso bruto a la fecha **c.** .148; −.642

3.29 **a.** no **b.** $r = -.039$; sí **c.** El conglomerado grande en la esquina inferior izquierda no muestra relación aparente; 7 a 10 estados forman un conglomerado con tendencia lineal negativa **d.** reglamentos ambientales locales; población por milla cuadrada; región geográfica

3.31 **a.** óxido de aluminio (cuantitativas), sitio (cualitativas) **b.** niveles más altos de óxido de aluminio en Ashley Rails e Isly Thorns

3.33 **a.** año (cuantitativas), número de redes de hogar (cuantitativas), tipo de red (cualitativa) **c.** Las redes inalámbricas aumentarán y las conectadas disminuirán.

3.35 **a.** fuerte relación lineal positiva **b.** .946 **c.** $b \approx 1$ **d.** $y = 12.221 + .815x$

3.37 **b.** fuerte relación lineal negativa

3.39 **b.** débil relación lineal negativa **c.** sí; Juneau, Alaska **d.** relación negativa más fuerte

3.43 **a.** .635

3.45 **a.** 0.5 **b.** aumenta **c.** 2.0; el cruce con el eje y **d.** 3.25; 4

Capítulo 4

4.1 **a.** {1, 2, 3, 4, 5, 6} **c.** 1/6 **e.** $P(A) = 1/6$; $P(B) = 1/2$; $P(C) = 2/3$; $P(D) = 1/6$; $P(E) = 1/2$; $P(F) = 0$

4.3 $P(E_1) = .45$; $P(E_2) = .15$; $P(E_i) = .05$ para $i = 3, 4, \ldots, 10$

4.5 **a.** {NDQ, NDH, NQH, DQH} **b.** 3/4 **c.** 3/4

4.9 **a.** .58 **b.** .14 **c.** .46

4.11 **a.** seleccionar al azar tres personas y registrar sus géneros **b.** {FFF, FMM, MFM, MMF, MFF, FMF, FFM, MMM} **c.** 1/8 **d.** 3/8 **e.** 1/8

4.13 **a.** ordenar A, B, C **b.** $\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$ **d.** 1/3, 1/3

4.15 **a.** .467 **b.** .513 **c.** .533

4.17 80

4.19 **a.** 60 **b.** 3,628,800 **c.** 720 **d.** 20

4.21 6720

4.23 216

4.25 120

4.27 720

4.29 **a.** 140,608 **b.** 132,600 **c.** .00037 **d.** .943

4.31 **a.** 2,598,960 **b.** 4 **c.** .000001539

4.33 $5.720645 \times (10^{12})$

4.35 **a.** 49 **b.** 1/49 **c.** 2/7

4.37 1/56

4.39 $\dfrac{4!(3!)^4}{12!}$

4.41

$P(A)$	$P(B)$	Condiciones para eventos A y B	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$	$P(A\|B)$
.3	.4	Mutuamente excluyentes	0	.7	0
.3	.4	Independientes	.12	.58	.3
.1	.5	Independientes	.05	.55	.1
.2	.5	Mutuamente excluyentes	0	.7	0

4.43 **a.** 3/5 **b.** 4/5

4.45 **a.** 1 **b.** 1/5 **c.** 1/5

4.47 **a.** 1 **b.** 1 **c.** 1/3 **d.** 0 **e.** 1/3 **f.** 0 **g.** 0 **h.** 1 **i.** 5/6

4.49 **a.** .08 **b.** .52

4.51 **a.** .3 **b.** no **c.** sí

4.53 **a.** no, porque $P(A \cap B) \neq 0$ **b.** no, porque $P(A) \neq P(A|B)$

4.55 **a.** .14 **b.** .56 **c.** .30

4.59 **a.** $P(A) = .9918$; $P(B) = .0082$ **b.** $P(A) = .9836$; $P(B) = .0164$

4.61 .05

4.63 **a.** .99 **b.** .01

4.65 **a.** 154/256 **b.** 155/256 **c.** 88/256 **d.** 88/154 **e.** 44/67 **f.** 23/35 **g.** 12/101 **h.** 189/256

4.67 **a.** .64 **b.** .4982 **c.** .011236

4.69 **a.** .23 **b.** .6087; .3913

4.71 .38

4.73 .012

4.75 **a.** .6585 **b.** .3415 **c.** izquierda

4.77 .3130

4.79 **a.** $P(D) = .10$; $P(D^C) = .90$; $P(N \mid D^C) = .94$; $P(N \mid D) = .20$ **b.** .023 **c.** .023 **d.** .056 **e.** .20 **f.** falso negativo

4.81 **a.** continua **b.** continua **c.** discreta **d.** discreta **e.** continua

4.83 **a.** .2 **c.** $\mu = 1.9$; $\sigma^2 = 1.29$; $\sigma = 1.136$ **d.** .3 **e.** .9

4.85 1.5

4.87 **a.** {S, FS, FFS, FFFS} **b.** $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 1/4$

4.89 **a.** $p(0) = 3/10$; $p(1) = 6/10$; $p(2) = 1/10$

4.91 **a.** .1; .09; .081 **b.** $p(x) = (.9)^{x-1}(.1)$

4.93 **a.** 4.0656 **b.** 4.125 **c.** 3.3186

4.95 $1500

4.97 **a.** .28 **b.** .18 **c.** $\mu = 1.32$; $\sigma = 1.199$ **d.** .94

4.99 $20,500

4.101 .0713

4.103 $P(A) = 1/2$; $P(B) = 2/3$; $P(A \cap B) = 1/3$; $P(A \cup B) = 5/6$; $P(C) = 1/6$; $P(A \cap C) = 0$; $P(A \cup C) = 2/3$

4.105 2/7

4.107 $p(0) = .0256$; $p(1) = .1536$; $p(2) = .3456$; $p(3) = .3456$; $p(4) = .1296$; .4752

4.109 **a.** .4565 **b.** .2530 **c.** .3889

4.111 3/10; 6/10

4.113 **a.** .73 **b.** .27

4.115 .999999

4.117 8

4.119 **a.** .3582 **b.** .4883 **c.** .4467

4.121 **a.** 1/8 **b.** 1/64 **c.** No necesariamente; podrían haber estudiado juntos, y así sucesivamente.

4.123 **a.** 5/6 **b.** 25/36 **c.** 11/36

4.125 **a.** .8 **b.** .64 **c.** .36

4.127 .0256; .1296

4.129 .2; .1

4.131 **a.** .5182 **b.** .1136 **c.** .7091 **d.** .3906

4.133 **a.** .0625 **b.** .25

4.135 **a.**

x	0	1	2
$p(x)$	6/15	8/15	1/15

b. $\mu = 2/3$; $\sigma^2 = 16/45$

4.137 **a.** $p(2) = p(12) = 1/36$, $p(3) = p(11) = 2/36$, $p(4) = p(10) = 3/36$, $p(5) = p(9) = 4/36$, $p(6) = p(8) = 5/36$, $p(7) = 6/36$

4.139 **a.** $p(0) = .5$, $p(1) = .5$

Capítulo 5

5.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x \leq k)$	.000	.001	.011	.058	.194	.448	.745	.942	1.000

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad	Hállese la probabilidad
3 o menos	0, 1, 2, 3	$P(x \leq 3)$	no es necesario	.058
3 o más	3, 4, 5, 6, 7, 8	$P(x \geq 3)$	$1 - P(x \leq 2)$	.989
Más de 3	4, 5, 6, 7, 8	$P(x > 3)$	$1 - P(x \leq 3)$	.942
Menos de 3	0, 1, 2	$P(x < 3)$	$P(x \leq 2)$	.011
Entre 3 y 5 (inclusive)	3, 4, 5	$P(3 \leq x \leq 5)$	$P(x \leq 5) - P(x \leq 2)$	.437
Exactamente 3	3	$P(x = 3)$	$P(x \leq 3) - P(x \leq 2)$	.047

5.3 no binomial; intentos dependientes; p varía de un intento a otro.

5.5 **a.** .2965 **b.** .8145 **c.** .1172 **d.** .3670

5.7 **a.** .097 **b.** .329 **c.** .671 **d.** 2.1 **e.** 1.212

5.9 $p(0) = .000$; $p(1) = .002$; $p(2) = .015$; $p(3) = .082$; $p(4) = .246$; $p(5) = .393$; $p(6) = .262$

5.11 **a.** .251 **b.** .618 **c.** .367 **d.** .633 **e.** 4 **f.** 1.549

5.13 **a.** .901 **b.** .015 **c.** .002 **d.** .998

5.15 **a.** .748 **b.** .610 **c.** .367 **d.** .966 **e.** .656

5.17 **a.** 1; .99 **b.** 90; 3 **c.** 30; 4.58 **d.** 70; 4.58 **e.** 50; 5

5.19 **a.** .9568 **b.** .957 **c.** .9569 **d.** $\mu = 2$; $\sigma = 1.342$ **e.** .7455; .9569; .9977 **f.** sí; sí

5.21 no; la variable no es el número de éxitos en n intentos. En cambio, el número n de intentos es variable.

5.23 **a.** 1.000 **b.** .997 **c.** .086

5.25 **a.** .098 **b.** .991 **c.** .098 **d.** .138 **e.** .430 **f.** .902

5.27 **a.** .0081 **b.** .4116 **c.** .2401

5.29 **a.** $\mu = 10$ **b.** 4 a 16 **c.** Si este improbable valor se observara en realidad, podría ser posible que los intentos (campos) no sean independientes.

5.31 **a.** .016796 **c.** .98320

5.33 **a.** .107 **b.** .762

5.35

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \frac{2.5^0 e^{-2.5}}{0!}$	.082085
$P(x = 1)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \frac{2.5^1 e^{-2.5}}{1!}$	.205212
$P(x = 2)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \frac{2.5^2 e^{-2.5}}{2!}$	.256516
P(2 o menos éxitos)	$P(x = 0) + P(x = 1)$	.543813

5.37

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x \le k)$	.055	.199	.423	.647	.815	.916	.966	.988	.996	.999	1.000

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad	Hállese la probabilidad
3 o menos	0, 1, 2, 3	$P(x \le 3)$	no es necesario	.647
3 o más	3, 4, 5, . . .	$P(x \ge 3)$	$1 - P(x \le 2)$	.577
Más de 3	4, 5, 6, . . .	$P(x > 3)$	$1 - P(x \le 3)$	.353
Menos de 3	0, 1, 2	$P(x < 3)$	$P(x \le 2)$	.423
Entre 3 y 5 (inclusive)	3, 4, 5	$P(3 \le x \le 5)$	$P(x \le 5) - P(x \le 2)$	.493
Exactamente 3	3	$P(x = 3)$	$P(x \le 3) - P(x \le 2)$	.224

5.39 **a.** .135335 **b.** .27067 **c.** .593994 **d.** .036089

5.41 **a.** .677 **b.** .6767 **c.** sí

5.43 **a.** .0067 **b.** .1755 **c.** .560

5.45 **a.** .271 **b.** .594 **c.** .406

5.47 $P(x > 5) = .017$; improbable.

5.49 **a.** .6 **b.** .5143 **c.** .0714

5.51 **a.** $p(0) = .36$; $p(1) = .48$; $p(2) = .15$; $p(3) = .01$ **c.** $\mu = .8$, $\sigma^2 = .50286$ **d.** .99; .99; sí

5.53 $p(0) = .2$; $p(1) = .6$; $p(2) = .2$

5.55 **a.** hipergeométrica **b.** .1786 **c.** .01786 **d.** .2857

5.61 **a.** $p(0) = .729$; $p(1) = .243$; $p(2) = .027$; $p(3) = .001$ **c.** .3; .520 **d.** .729; .972

5.63 **a.** .234 **b.** .136 **c.** Lo dicho no es improbable.

5.65 **a.** .228 **b.** no es indicación de que sea más probable que las personas escojan números del medio

5.67 **a.** $\mu = 280$ **b.** $\sigma = 9.165$ **c.** 261.67 a 298.33 **d.** sí; $x = 225$ está 6 desviaciones estándar debajo de la media.

5.69 **a.** 20 **b.** 4 **c.** .006 **d.** El psiquiatra está equivocado.

5.71 **a.** $\mu = 50$; $\sigma = 6.124$ **b.** El valor $x = 35$ está 2.45 desviaciones estándar debajo de la media. Es un tanto improbable que la cifra de 25% sea representativa de este plantel.

5.73 **a.** .5 **b.** $\mu = 12.5$; $\sigma = 2.5$ **c.** Hay preferencia por el segundo diseño.

5.75 **a.** sí; $n = 10$; $p = .25$ **b.** .2440 **c.** .0000296 **d.** Sí; el modelo genético no se comporta como se esperaba.

5.77 **a.** sí **b.** $1/8192 = .00012$

5.79 **a.** hipergeométrica, o aproximadamente binomial **b.** Poisson **c.** aproximadamente .85; .72; .61

5.81 **a.** .015625 **b.** .421875 **c.** .25

5.83 **a.** $p = 1/3$ **b.** .3292 **c.** .8683

5.85 **a.** 14 **b.** 2.049 **c.** no; $x = 10$ está sólo a 1.95 desviaciones estándar debajo de la media

5.87 **a.** .135335 **b.** .676676

5.89 .655

5.91 **a.** .794 **b.** .056 **c.** -0.82 a 3.82 o 0 a 3

5.93 **a.** 36 **b.** 4.8 **c.** Sí, porque $x =$ está a 2.71 desviaciones estándar arriba de la media.

5.95 **a.** .00006 **b.** .042 **c.** .0207 **d.** .5948 **e.** 1

5.99 **a.** .0176 **b.** .9648 **c.** .9648

Capítulo 6

6.1

El intervalo	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad	Hállese la probabilidad
Menos de -2	$P(z < -2)$	no es necesario	.0228
Mayor a 1.16	$P(z > 1.16)$	$1 - P(z \le 1.16)$	.1230
Mayor a 1.645	$P(z > 1.645)$	$1 - P(z \le 1.645)$	.0500
Entre -2.33 y 2.33	$P(-2.33 < z < 2.33)$	$P(z \le 2.33) - P(z \le -2.33)$	.9802
Entre 1.24 y 2.58	$P(1.24 < z < 2.58)$	$P(z \le 2.58) - P(z \le 1.24)$	.1026
Menor o igual a 1.88	$P(z \le 1.88)$	no es necesario	.9699

6.3 **a.** .9452 **b.** .9664 **c.** .8159 **d.** 1.0000

6.5 **a.** .6753 **b.** .2401 **c.** .2694 **d.** .0901 **e.** ≈ 0

6.7 **a.** 1.96 **b.** 1.44

6.9 **a.** 1.65 **b.** -1.645

6.11 **a.** 1.28 **b.** 1.645 **c.** 2.05 **d.** 2.33

6.13 **a.** .1596 **b.** .1151 **c.** .1359

6.15 58.3

6.17 $\mu = 8; \sigma = 2$

6.19 **a.** .1949 **b.** .4870 **c.** no **d.** sí; $y = 18$ está a 3.82 desviaciones estándar arriba de la media.

6.21 **a.** .4586 **b.** .0526 **c.** .0170

6.23 .1562; .0012

6.25 **a.** .0475 **b.** .00226 **c.** 29.12 a 40.88 **d.** 38.84

6.27 **a.** .1056 **b.** .2676

6.29 .0475

6.31 63,550

6.33 **a.** .3085 **b.** .2417 **c.** .0045

6.35 **a.** 15; 10 **b.** sí **c.** 15; 2.449 **d.** 10, 11, . . . , 25 **e.** 10; 9.5 **f.** $z = -2.25$ **g.** -2.25; .0122; .9878

6.37 **a.** sí **b.** $\mu = 7.5; \sigma = 2.291$ **c.** .6156 **d.** .618

6.39 **a.** .2676 **b.** .3520 **c.** .3208 **d.** .9162

6.41 **a.** .178 **b.** .392

6.43 **a.** .245 **b.** .2483

6.45 **a.** .0446 **b.** .0104 **c.** .0446

6.47 .9441

6.49 **a.** .5000 **b.** No consideran la estatura al votar.

6.51 **a.** .0050 **b.** .8394 **c.** .9767 **d.** sí; la parte del mercado de Pepsi es más grande que lo dicho.

6.53 **a.** 31 **b.** 3.432 **c.** no; $x = 25$ está a sólo 1.75 desviaciones estándar debajo de la media.

6.55 **a.** .3227 **b.** .1586

6.57 $z_0 = 0$

6.59 $z_0 = .67$; los percentiles 25avo y 75avo

6.61 no

6.63 5.065 meses

6.65 .0336

6.67 85.36 minutos

6.69 no; $x = 184$ está a sólo 1.26 desviaciones estándar debajo de la media.

6.71 7.301 onzas

6.73 **a.** 141 **b.** .0401

6.75 .9474

6.77 .3557

6.79 **a.** $Q_1 = 269.96$; $Q_3 = 286.04$ **b.** sí; $x = 180$ está a 8.17 desviaciones estándar debajo de la media.

6.81 **a.** ≈ 0 **b.** .6026 **c.** La muestra no es aleatoria; los resultados estarán sesgados.

6.83 **a.** $\pm .52$ desviaciones estándar **b.** ± 1.28 desviaciones estándar

6.85 **a.** .3085 **b.** 99.92 grados

6.87 **a.** .9544 **b.** .0561

6.89 **a.** $z_0 = -1.96$ **b.** $z_0 = .36$

6.91 **a.** .9651 **b.** .1056 **c.** .0062

6.93 **a.** .0442 **b.** .0445

6.95 **a.** 1.273 **b.** .1016

6.97 .1244 (probabilidad exacta = .1236)

Capítulo 7

7.1 1/500

7.11 **a.** muestra de conveniencia **c.** Sí, pero sólo si los estudiantes se comportan como una muestra aleatoria de entre la población general de jóvenes nativos americanos.

7.13 **a.** primera pregunta **b.** Disminuyó el porcentaje a favor del programa, quizá debido a la frase de "gastan miles de millones de dólares" de la pregunta.

7.15 normal; 53; 3

7.17 normal; 100; 3.16

7.19 **a.** $\mu = 10; \sigma/\sqrt{n} = .5$ **b.** $\mu = 5; \sigma/\sqrt{n} = .2$ **c.** $\mu = 120; \sigma/\sqrt{n} = .3536$

7.21 **c.** aprox. En forma de montículo

7.23 **a.** 1 **b.** .707 **c.** .500 **d.** .333 **e.** .250 **f.** .200 **g.** .100

7.25 **a.** 106; 2.4 **b.** .0475 **c.** .9050

7.27 **b.** un número grande de réplicas

7.31 **a.** 1890; 69.282 **b.** .0559

7.33 **a.** ≈ 0 **b.** sí; el valor $\bar{x} = 98.25$ está casi 5 desviaciones estándar debajo de la media supuesta, $\mu = 98.6$.

7.35 normal; .7; .0648

7.37 **a.** $p = .3$; $SE = .0458$ **b.** $p = .1$; $SE = .015$ **c.** $p = .6$; $SE = .0310$

7.39 **a.** .7019 **b.** .5125

7.41 **a.** .0099 **b.** .03 **c.** .0458 **d.** .05 **e.** .0458 **f.** .03 **g.** .0099

7.43 **a.** sí; $p = .19$; SE = .03923 **b.** .0630 **c.** .0604 **d.** El valor es inusual porque $\hat{p} = .30$ está 2.80 desviaciones estándar arriba de la media $p = .19$.

7.45 **a.** aproximadamente normal con media .13 y desviación estándar .0453 **b.** .9382 **c.** ≈ 0 **d.** .04 a .22

7.47 **a.** aproximadamente normal con media .75 y desviación estándar .0306 **b.** .0516 **c.** .69 a .81

7.49 **a.** LCL = 150.13; UCL = 161.67

7.51 **a.** LCL = 0; UCL = .090

7.53 **a.** LCL = 8598.7; UCL = 12,905.3

7.55 LCL = .078; UCL = .316

7.57 LCL = .0155; UCL = .0357

7.59 media demasiado grande a las horas 2, 3 y 4

7.63 **a.** ≈ 12.5 **b.** .9986 **c.** Es probable que sean correctas.

7.65 **c.** no

7.71 **a.** muestra de conglomerado **b.** muestra sistemática de 1 en 10 **c.** muestra estratificada **d.** muestra sistemática de 1 en 10 **e.** muestra aleatoria simple

7.73 **a.** 131.2; 3.677 **b.** sí **c.** .1515

7.75 **a.** LCL = 0; UCL = .0848 **b.** $\hat{p} > .0848$

7.77 sí

7.81 **a.** aproximadamente normal con media de 288 y desviación estándar .9798 **b.** .0207 **c.** .0071

7.83 UCL = .2273; LCL = −.0273

7.85 **a.** 3.5; 1.208

7.87 **a.** 3.5; .854

7.89 **a.** .4938 **b.** .0062 **c.** .0000

Capítulo 8

8.3 **a.** .160 **b.** .339 **c.** .438

8.5 **a.** .554 **b.** .175 **c.** .055

8.7 **a.** .179 **b.** .098 **c.** .049 **d.** .031

8.9 **a.** .0588 **b.** .0898 **c.** .098 **d.** .0898 **e.** .0588 **f.** $p = .5$

8.11 $\hat{p} = .728$; margen de error (MOE) = .029

8.13 $\bar{x} = 39.8$; MOE = 4.768

8.15 $\bar{x} = 7.2\%$; MOE = .776

8.17 **a.** $\hat{p} = .51$; MOE = .0327 **b.** $1.96\sqrt{\frac{.5(.5)}{900}}$

8.19 **a.** no **b.** nada; no

8.21 Estimación puntual es $\bar{x} = 19.3$ con margen de error = 1.86.

8.23 **a.** (.797, .883) **b.** (21.469, 22.331) **c.** Los intervalos construidos de este modo encierran el verdadero valor de μ 90% del tiempo en muestreo repetido.

8.25 (.846, .908)

8.27 **a.** 3.92 **b.** 2.772 **c.** 1.96

8.29 **a.** 3.29 **b.** 5.16 **c.** El ancho aumenta.

8.31 (3.496, 3.904); muestra aleatoria

8.33 **a.** (.932, 1.088) **c.** no; $\mu = 1$ es un posible valor para la media poblacional

8.35 **a.** (.106, .166) **b.** Aumente el tamaño muestral y/o disminuya el nivel de confianza.

8.37 **a.** $98.085 < \mu < 98.415$ **b.** no; quizá el valor 98.6 no es el verdadero promedio de temperatura corporal para personas sanas.

8.39 **a.** (4.61, 5.99) **b.** sí

8.41 (15.463, 36.937)

8.43 **a.** (17.676, 19.324) **b.** (15.710, 17.290) **c.** (.858, 3.142) **d.** sí

8.45 **a.** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 2617$; MOE = 902.08 **b.** sí

8.47 **a.** (3.333, 16.667) **b.** (−22.040, −7.960) **c.** no **d.** sí; sí

8.49 **a.** (−.528, − .032); sí, porque $\mu_1 - \mu_2 = 0$ no está en el intervalo.

8.51 **a.** (−.203, −.117) **b.** muestras aleatorias e independientes de distribuciones binomiales

8.53 **a.** (−.221, .149) **b.** no

8.55 **a.** (−.118, −.002) **b.** Sí, porque $p_1 - p_2 = 0$ o está en el intervalo.

8.57 **a.** (.095, .445) **b.** sí

8.59 (.061, .259)

8.61 **a.** (−.082, .022) **b.** No, porque $p_1 - p_2 = 0$ no está en el intervalo.

8.63 $1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}$; $1.96\sqrt{\frac{.5(.5)}{n}}$; 385; cuantitativo; uno; $1.96\frac{10}{\sqrt{n}}$; 97

8.65 **a.** $\mu < 76.63$ **b.** $\mu < 1.89$

8.67 $\mu_1 - \mu_2 < 4$

8.69 505

8.71 $n_1 = n_2 = 1086$

8.73 **b.** 9604

8.75 $n_1 = n_2 = 360$

8.77 97

8.79 $n_1 = n_2 = 136$

8.81 $n_1 = n_2 = 98$

8.83 **a.** $\bar{x} = 29.1$; MOE $= .9555$ **b.** (28.298, 29.902) **c.** $\mu > 28.48$ **d.** 234

8.85 $n_1 = n_2 = 224$

8.87 1083

8.89 $n_1 = n_2 = 925$

8.91 **a.** $\hat{p}_W = .5$; $\hat{p}_M = .75$ **b.** $-.313 < p_W - p_M < -.187$ **c.** Hay una diferencia en las dos proporciones.

8.93 (8.087, 11.313)

8.95 97

8.97 (33.41, 34.59)

8.99 **a.** MOE $= .029$ **b.** 6147

8.101 **a.** (.522, .578) **b.** (.035, .145); sí.

8.103 al menos 1825

8.105 .3874; .651

8.107 **a.** (2.837, 3.087) **b.** 276

8.109 (\$10.52, \$12.38); no

8.111 (2.694, 2.716)

8.113 (.161, .239)

8.115 al menos 97

8.117 **b.** Los anchos son iguales.

8.119 **a.** 9.702 **b.** (746.298, 765.702) **c.** sí

8.121 **b.** El error estándar y el ancho del intervalo disminuyen.

Capítulo 9

9.1

Estadístico de prueba	Nivel de significancia	¿Prueba de una o de dos colas?	Valor crítico	Región de rechazo	Conclusión
$z = 0.88$	$\alpha = .05$	Dos colas	1.96	$\lvert z\rvert > 1.96$	No rechazar H_0
$z = -2.67$	$\alpha = .05$	Una cola (inferior)	1.645	$z < -1.645$	Rechazar H_0
$z = 5.05$	$\alpha = .01$	Dos colas	2.58	$\lvert z\rvert > 2.58$	Rechazar H_0
$z = -1.22$	$\alpha = .01$	Una cola (inferior)	2.33	$z < -2.33$	No rechazar H_0

9.3 **a.** $z > 2.33$ **b.** $|z| > 1.96$ **c.** $z < -2.33$ **d.** $|z| > 2.58$

9.5 **a.** No rechazar H_0; los resultados no son estadísticamente significativos. **b.** Rechazar H_0; los resultados son altamente significativos. **c.** Rechazar H_0; los resultados son estadísticamente significativos.

9.7 **a.** .0207 **b.** Rechazar H_0; los resultados son estadísticamente significativos. **c.** sí

9.9 Valor $p = .0644$; no rechazar H_0; los resultados no son estadísticamente significativos.

9.11 **a.** H_0: $\mu = 1$; H_a: $\mu \neq 1$
b. Valor $p = .7414$; no rechazar H_0
c. No hay evidencia para indicar que el peso promedio sea diferente de 1 libra.

9.13 **a.** H_0: $\mu = 80$ **b.** H_a: $\mu \neq 80$
c. $z = -3.75$; rechazar H_0

9.15 **a.** $z = 2.63$; valor $p = .0043$; rechazar H_0 a los niveles de significancia de 1% y 5%

9.17 sí; $z = 10.94$

9.19 no; $z = -1.334$ con valor $p = .0918$; no rechazar H_0

9.21 **a.** H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$; H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$; una cola **b.** $z = 2.074$; rechazar H_0

9.23 **a.** $z = -2.26$; valor $p = .0238$; rechazar H_0
b. $(-3.55, -.25)$ **c.** no

9.25 **a.** H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$; H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
b. sí; $z = 8.77$ **c.** valor $p \approx 0$

9.27 **a.** sí; $z = -3.18$; valor $p = .0014$
b. $(-3.01, -.71)$; sí

9.29 **a.** $z = -2.22$ con valor $p = .0264$ **b.** significativa al nivel de 5% pero no al del 1%.

9.31 H_0: $p = .4$; H_a: $p \neq .4$ **b.** valor $p = .093$; no estadísticamente significativa **c.** no

9.33 **a.** H_0: $p = .15$; H_a: $p < .15$ **b.** Rechazar H_0; $z = -4.53$. **c.** ≈ 0

9.35 **a.** H_0: $p = 2/3$ **b.** H_a: $p > 2/3$
c. sí; $z = 4.6$ **d.** valor $p < .0002$

9.37 no; $z = -.90$

9.39 no; $z = -1.06$

9.41 no; $z = -.71$

9.43 **a.** H_0: $p_1 - p_2 = 0$; H_a: $p_1 - p_2 < 0$
b. de una cola **c.** No rechazar H_0; $z = -.84$

9.45 **a.** sí; $z = -2.40$ **b.** $(-.43, -.05)$

9.47 No rechazar H_0; $z = -.39$; hay suficiente evidencia para indicar una diferencia en las dos proporciones poblacionales.

9.49 $p_1 - p_2 > .001$; el riesgo es al menos 1/1000 más alto al tomar *Preparo*.

9.51 Rechazar H_0; $z = 3.14$ con valor $= .0008$; se confirman las conclusiones del investigador.

9.55 La potencia aumenta.

9.57 **a.** valor $p < .0002$ **b.** Rechazar H_0; $z = 4.47$

9.59 **a.** $H_0: \mu = 7.5$; $H_a: \mu < 7.5$ **b.** de una cola **d.** $z = -5.477$; rechazar H_0

9.61 **a.** $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ **b.** de dos colas **c.** no; $z = -.954$

9.63 no; no rechazar H_0; $z = 1.684$

9.65 **a.** no, $z = .16$ **b.** .4364 **c.** No rechazar H_0.

9.67 sí; $z = 4$; rechazar H_0

9.69 sí; $z = 4.00$

9.71 **a.** sí; $z = 4.33$ **b.** (7.12, 18.88)

9.73 **a.** no; $z = -.92$ **b.** no; $z = -.42$ **c.** no

9.75 no; $z = 2.19$

9.77 sí; $z = -2.08$

9.79 sí; $z = 3.32$

9.81 **a.** (1447.49. 4880.51) **b.** entre 1500 y 5000 más metros por semana; tienen sólo un tipo de brazada para practicar.

9.83 **a.** $H_0: \mu = 94$; $H_a: \mu \neq 94$ **b.** $z = -1.331$ **c.** .1832 **d.** No rechazar H_0. **e.** no

9.85 **a.** .7422 **b.** .9783 **c.** la potencia aumenta

Capítulo 10

10.1 **a.** 2.015 **b.** 2.306 **c.** 1.330 **d.** 1.96

10.3 **a.** $.02 <$ valor $p < .05$ **b.** valor $p < .005$ **c.** valor $p > .20$ **d.** valor $p < .005$

10.5 **a.** $\bar{x} = 7.05$; $s = .4994$ **b.** (7.496) **c.** Rechazar H_0; $t = -2.849$ **d.** Sí.

10.7 no; $t = -1.195$

10.9 **a.** sí; $t = -3.044$ **b.** 98.316

10.11 (3.652, 3.912)

10.13 **a.** Rechazar H_0; $t = -4.31$. **b.** (23.23, 29.97) **c.** La media de tratamiento previo se ve más pequeña que las otras dos medias.

10.17 (233.98, 259.94)

10.19 **a.** 3.775 **b.** 21.2258

10.21 **a.** $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ **b.** $|t| > 2.771$ **c.** $t = 2.795$ **d.** valor $p < .01$ **e.** Rechazar H_0

10.23 **a.** sí; (s^2 mayor)/(s^2 menor) $= 1.36$ **b.** $t = .06$ con valor $p = .95$ **c.** 19.1844 **d.** No rechazar H_0. **e.** $(-5.223, 5.503)$; sí

10.25 **a.** no; $t = -1.16$ **b.** valor $p = .260$ **c.** sí; (s^2 mayor)/(s^2 menor) $= 2.88$

10.27 **a.** no; (s^2 mayor)/(s^2 menor) $= 16.22$ **b.** sí; $t = -2.412$; $.02 <$ valor $p < .05$

10.29 **a.** sí **b.** no; (s^2 mayor)/(s^2 menor) $=$ 3.72 **c.** No rechazar H_0; $t = .10$ con valor $p > .20$.

10.31 No rechazar H_0; $t = 0.24$ con valor $p > .10$.

10.33 **a.** No rechazar H_0; $t = -.93$. **b.** $(-5.81, 2.18)$, usando $df = 29$; sí

10.35 **a.** Rechazar H_0; $t = 2.372$ con $.02 <$ valor p. $< .05$ **b.** (.014, .586) **c.** 62 pares

10.37 **a.** No rechazar H_0; $t = 1.177$. **b.** valor $p > .20$ **c.** $(-.082, .202)$ **d.** muestra aleatoria desde distribución normal

10.39 **a.** No rechazar H_0; $t = 1.984$; $(-7.28,$ 170.94). **b.** Rechazar H_0; $t = 2.307$; (6.867, 208.433). **c.** Rechazar H_0; $t = 4.38$. **d.** $(-1.6, 8.2)$; sí

10.41 **b.** sí; $t = 9.150$ con valor $p < .01$ **c.** (80.472, 133.328)

10.43 **a.** sí; $t = -4.326$; rechazar H_0. **b.** $(-2.594, -.566)$ **c.** al menos 65 pares

10.45 **a.** sí; $t = 2.82$; rechazar H_0. **b.** 1.488 **d.** sí

10.47 No rechazar H_0; $t = 1.03$ con valor $p > .10$; no continuar con la instalación.

10.49 (.190, .685)

10.51 Rechazar H_0; $\chi^2 = 22.449$.

10.53 **a.** no; $t = -.232$ **b.** sí; $\chi^2 = 20.18$

10.55 **a.** no **b.** sí; $z = 3.262$

10.57 no; $\chi^2 = 29.433$

10.59 (.667, 4.896)

10.61 $F = 1.057$ con valor $p > .20$; no rechazar H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

10.63 (1.544, 4.003)

10.65 Resto: $F = 1.03$ con valor $p > .20$; 80% máximo O_2: $F = 2.01$ con valor $p > .20$; máximo O_2; $F = 14.29$ con valor $p < .01$; use la prueba t no agrupada para un máximo de O_2.

10.71 (9.860, 12.740)

10.73 sí, $t = 5.985$; rechazar H_0; (28.375, 33.625).

10.75 sí, $F = 3.268$

10.77 72

10.79 (22.578, 26.796)

10.81 al menos 136 **b.** Bajar el nivel de confianza; rediseñar el experimento como una prueba de diferencia pareada.

10.83 **a.** sí **b.** $F = 19.516$; hay una diferencia en las varianzas de población.

10.85 **a.** muestras aleatorias independientes de distribuciones normales con varianzas iguales; no
b. sí; $t = 3.237$ con valor $p < .01$
c. sí; $t = 60.36$ con valor $p < .01$

10.87 no; $t = 2.2$ con valor $p > .10$

10.89 no; $t = -.177$ con valor $p > .20$

10.91 no, $t = -1.712$

10.93 no pareada: $(-1.69, .19)$; pareada: $(1.49, -.01)$; el intervalo apareado es ligeramente más angosto.

10.95 **a.** no, $t = 2.571$ **b.** (.000, .020)

10.97 **a.** de dos colas; H_a: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ **b.** de cola inferior; H_a: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ **c.** de cola superior; H_a: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

10.99 **a.** no, $\chi^2 = 7.008$ **b.** (.185, 2.465)

10.101 Rechazar H_0; $t = 2.425$; la droga aumenta el tiempo promedio de reacción.

10.103 sí, $t = -2.945$

10.105 no

10.107 no, $t = 1.86$ con valor $p = .112$

10.109 Use prueba t agrupada; $t = -1.82$ con valor $p > .10$; los resultados son no significativos.

10.111 **a.** (5.814, 7.886) **b.** muestra aleatoria; la población muestreada es normal.

10.113 Rechazar H_0; $t = 4.57$; sí.

10.115 **a.** Rechazar H_0; $t = 4.38$; sí.
b. valor $p < .01$; sí

10.117 **a.** $t > 1.8$ **b.** $|t| > 2.37$ **c.** $t < -2.6$

10.121 No rechazar H_0; $t = -1.438$ con valor $p = .1782$

10.123 sí; $t = -3.33$ con valor $p = .0030$

Capítulo 11

11.1

Fuente	*df*
Tratamientos	5
Error	54
Total	59

11.3 **a.** (2.731, 3.409) **b.** (.07, 1.03)

11.5 **a.**

Fuente	*df*	SS	MS	F
Tratamientos	3	339.8	113.267	16.98
Error	20	133.4	6.67	
Total	23			

b. $df_1 = 3$ y $df_2 = 20$ **c.** $F > 3.10$
d. sí, $F = 16.98$ **e.** valor $p < .005$; sí

11.7 **a.** CM = 103.142857; SS Total = 26.8571
b. SST = 14.5071; MST = 7.2536
c. SSE = 12.3500; MSE = 1.1227
d.

```
Analysis of Variance
Source  DF    SS   MS    F     P
Trts     2  14.51 7.25 6.46 0.014
Error   11  12.35 1.12
Total   13  26.86
```

f. $F = 6.46$; rechazar H_0 con $.01 <$ valor $p < .025$.

11.9 **a.** (1.95, 3.65) **b.** (.27, 2.83)

11.11 **a.** (67.86, 84.14) **b.** (55.82, 76.84)
c. $(-3.629, 22.963)$ **d.** No, no son independientes.

11.13 **a.** Cada observación es la longitud media de 10 hojas **b.** sí, $F = 57.38$ con valor $p = .000$ **c.** Rechazar H_0; $t = 12.09$.
d. (1.810, 2.924)

11.15

```
Analysis of Variance for Percent
Source  DF         SS          MS         F     P
Method   2   0.0000041   0.0000021   16.38 0.000
Error   12   0.0000015   0.0000001
Total   14   0.0000056
```

11.17 **a.** diseño completamente aleatorizado

b.

```
Source  DF      SS      MS       F       P
State    3  3272.2  1090.7   26.44   0.000
Error   16   660.0    41.3
Total   19  3932.2
```

c. $F = 26.44$; rechazar H_0 con valor $p = .000$.

11.19 Las medias muestrales deben ser independientes; tamaños muestrales iguales.

11.21 **a.** $1.878s$ **b.** $2.1567s$

11.23 $\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_4$

11.25 **a.** no; $F = .60$ con valor $p = .562$
b. no hay diferencias

11.27 **a.** sí; $F = 8.55$, valor $p = .005$
b. $(-157.41, -28.59)$ **c.** $\bar{x}_3$ $\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$

11.29

Fuente	*df*	SS	MS	*F*
Tratamientos	2	11.4	5.70	4.01
Bloques	5	17.1	3.42	2.41
Error	10	14.2	1.42	
Total	17	42.7		

11.31 $(-3.833, -.767)$

11.33 **a.** sí; $F = 19.19$ **b.** sí; $F = 135.75$ **c.** $\underline{\bar{x}_1 \quad \bar{x}_3 \quad \bar{x}_4 \quad \bar{x}_2}$ **d.** $(-5.332, -2.668)$ **e.** sí

11.35 **a.** 7 **b.** 7 **c.** 5 **e.** sí; $F = 9.68$ **f.** sí; $F = 8.59$

11.37

ANOVA de dos vías y contra bloques

Analysis of Variance for y

Source	DF	SS	MS	F	P
Blocks	2	7.1717	3.5858	40.21	0.000
Chemical	3	5.2000	1.7333	19.44	0.002
Error	6	0.5350	0.0892		
Total	11	12.9067			

11.39 **a.** sí; $F = 10.06$ **b.** sí; $F = 10.88$ **c.** $\omega = 4.35$ **d.** $(1.12, 5.88)$

11.41

ANOVA de dos vías: costo contra estimador, trabajo

Analysis of Variance for Cost

Source	DF	SS	MS	F	P
Estimator	2	10.862	5.431	7.20	0.025
Job	3	37.607	12.536	16.61	0.003
Error	6	4.528	0.755		
Total	11	52.997			

11.43 **a.** Los bloques son artículos; los tratamientos son tiendas. **b.** sí, $F = 14.79$; valor $p = .000$ **c.** sí, $F = 19.39$; valor $p = .000$

11.45 **a.** 20 **b.** 60 **c.**

Fuente	*df*
A	3
B	4
AB	12
Error	40
Total	59

11.47 $(-1.11, 5.11)$

11.49 **a.** hay fuerte interacción **b.** $F = 37.85$ con valor $p = .000$; sí **d.** no

11.51 **b.** sí **c.** Como la interacción es significativa, la atención debe concentrarse en medias para las combinaciones individuales de nivel de factor. **d.** Capacitación: $.05 <$ valor $p < .10$; capacidad: valor $p < .005$; interacción: $.01 <$ valor $p < .025$

11.53 **a.** factorial de 2×4; estudiantes, género en los dos niveles, escuelas a cuatro niveles **c.** no; $F = 1.19$ **e.** El principal efecto para escuelas es significativo; $F = 27.75$; $\omega = 82.63$ de Tukey.

11.55 **a.**

Source	DF	SS	MS	F	P
Training	1	4489.00	4489.00	117.49	0.000
Situation	1	132.25	132.25	3.46	0.087
Interaction	1	56.25	56.25	1.47	0.248
Error	12	458.50	38.21		
Total	15	5136.00			

b. No. $F = 1.47$; valor $p = .248$. **c.** no $F = 3.46$; valor $p = .087$. **d.** sí $F = 117.49$; valor $p = .000$.

11.57 diferencias significativas entre los tratamientos A y C, B y C, C y E y D y E

11.59 **a.** diferencia significativa en medias de tratamiento; $F = 27.78$ **b.** $\omega = .190$ de Tukey **c.** sí; $F = 6.59$

11.61

ANOVA de una vía: ventas contra programa

Analysis of Variance for Sales

Source	DF	SS	MS	F	P
Program	3	1385.8	461.9	9.84	0.000
Error	23	1079.4	46.9		
Total	26	2465.2			

11.63 **a.** no; $F = 1.40$ **b.** valor $p > .10$ **c.** sí; $F = 6.51$ **d.** sí; $F = 7.37$

11.65 **a.** experimento factorial de 2×3 **b.** no; $F = .45$ con valor $p = .642$ **d.** $(-22.56, -5.84)$

11.67 **a.** diseño de bloques aleatorizado **b.**

ANOVA de dos vías: total contra semana, tienda

Analysis of Variance for Total

Source	DF	SS	MS	F	P
Week	3	571.7	190.6	8.27	0.003
Store	4	684.6	171.2	7.43	0.003
Error	12	276.4	23.0		
Total	19	1532.7			

c. sí; $F = 7.43$ **d.** $\omega = 10.82$

11.69 **a.** experimento factorial **b.** sí; $F = 7.61$ **c.** $\omega = 2.67$

11.71 **a.** diseño completamente aleatorizado **b.** Sí, hay una diferencia significativa. $F = 126.85$, valor $p = .000$

Source	DF	SS	MS	F	P
Site	2	132.277	66.139	126.85	0.000
Error	21	10.950	0.521		
Total	23	143.227			

11.73 No hay evidencia de no normalidad. Parece haber variación de error ligeramente más grande para los valores más pequeños comparados con los valores más grandes de y.

Capítulo 12

12.1 intersección con eje $y = 1$, pendiente $= 2$

12.3 $y = 3 - x$

12.7 **a.** $\hat{y} = 6.00 - .557x$ **c.** 4.05 **d.** Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS
Regression	1	5.4321	5.4321
Residual Error	4	0.1429	0.0357
Total	5	5.5750	

12.9 **a.** $S_{xx} = 21066.82$; $S_{yy} = .374798$; $S_{xy} = 88.80003$ **b.** $\hat{y} = .0187 + .00422x$ **d.** .44

e. Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS
Regression	1	0.37431	0.37431
Residual Error	7	0.00049	0.00007
Total	8	0.37480	

12.11 **a.** $y =$ API; $x =$ ELL **b.** sí **c.** $\hat{y} = 731.277 - 3.040x$ **d.** sí

12.13 **a.** sí **b.** $\hat{y} = -11.665 + .755x$ **c.** $\hat{y} = 52.51$

12.15 **a.** fuerte relación lineal positiva **b.** aproximadamente 1 **c.** $\hat{y} = 12.221 + .815x$ **d.** $\hat{y} = 62.75$

12.17 **a.** sí, $t = 5.20$ **b.** $F = 27.00$ **c.** $t_{.025} = 3.182$; $F_{.05} = 10.13$

12.19 **a.** sí, $F = 152.10$ con valor $p = .000$ **b.** $r^2 = .974$

12.21 **a.** $y =$ costo, $x =$ distancia **b.** $\hat{y} = 128.58 + .12715x$ **d.** $t = 6.09$; $r^2 = .699$

12.23 **a.** sí; $t = 3.79$ y $F = 14.37$ con valor $p = .005$ **b.** no **c.** $r^2 = .642$ **d.** MSE = 5.025 **e.** (.186, .764)

12.25 **a.** sí **b.** $\hat{y} = -26.82 + 1.2617x$ **c.** sí; $t = 7.49$ y $F = 56.05$ con valor $p = .000$ **d.** (.7768, 1.7466)

12.27 **a.** sí; rechazar H_0, $t = 7.15$ **b.** (.5362, 1.0944) **c.** sí; el valor $\beta = 1$ está contenido en el intervalo.

12.29 grafique residuales contra ajuste; dispersión aleatoria de puntos, sin figuras

12.31 no

12.33 **a.** curva ligera **b.** 95.9% de variación total explicada por el modelo de línea recta **c.** fuerte figura curvilínea indica que la relación puede ser curvilínea

12.35 **a.** relación positiva más bien fuerte **b.** sí; Toshiba 37HLX95 **c.** sí; no

12.37 **a.** (4.6006, 5.1708) **b.** (4.2886, 5.4829) **c.** $x = 8$; extrapolación

12.39 **a.** curva ligera **b.** 95.7% de variación total explicada por el modelo de línea recta **c.** la figura indica que la relación puede ser curvilínea.

12.41 **a.** (2.01, 3.74) **b.** $(-.77, 3.02)$ **c.** $\bar{x} = 0$

12.43 **a.** (198.178, 244.254) **b.** (126.235, 316.197) **c.** no

12.47 **a.** positiva **b.** $r = .9487$; $r^2 = .9000$

12.49 **b.** $r = .982$ **c.** 96.5%

12.51 **a.** positiva **b.** $r = .760$; sí, $t = 2.615$

12.53 sí; $t = 3.158$ con valor $p < .01$

12.55 **a.** análisis de correlación **b.** $r = .981$

12.57 **a.** posiblemente **b.** $r = .658$; sí, $t = 2.140$

12.59 **a.** sí **b.** $\hat{y} = 80.85 + 270.82x$ **c.** sí; $t = 3.96$ con valor $p = .003$ **d.** (112.1, 157.9)

12.61 **a.** $r = .980$ **b.** $r^2 = .961$ **c.** $\hat{y} = 21.9 + 15.0x$ **d.** La varianza no es constante para toda x.

12.63

Análisis de regresión: API contra ELL

The regression equation is
API = 731 - 3.04 ELL

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	731.28	22.81	32.06	0.000
ELL	-3.0399	0.7551	-4.03	0.007

S = 33.72 R-Sq = 73.0% R-Sq(adj) = 68.5%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	18422	18422	16.21	0.007
Residual Error	6	6820	1137		
Total	7	25242			

12.65 **a.** no; $t = 2.066$ con valor $p > .05$ **b.** $r^2 = .299$

12.67 no; la varianza no es constante para toda x.

12.69 **a.** fuerte relación positiva **b.** $r^2 = .778$; 77.8% **c.** $\hat{y} = -14.150 + 21.430x$; sí, $t = 5.30$ **d.** sí

12.71 en los extremos de la región experimental

12.73 **a.** $\hat{y} = 20.47 - .758x$

b.

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	287.28	287.28	493.40	0.000
Residual Error	8	4.66	0.58		
Total	9	291.94			

c. Rechazar H_0, $t = -22.21$ **d.** $(-.86, -.66)$ **e.** (9.296, 10.420) **f.** $r^2 = .984$

12.77 **a.** intersección con el eje $y = 3$; pendiente $= -0.5$

Capítulo 13

13.1 **b.** rectas paralelas

13.3 **a.** sí, $F = 57.44$ con valor $p < .005$ **b.** $R^2 = .94$

13.5 **a.** cuadrático **b.** $R^2 = .815$; relativamente buen ajuste **c.** sí, $F = 37.37$ con valor $p = .000$

13.7 **a.** $b_0 = 10.5638$ **b.** sí, $t = 15.20$ con valor $p = .000$

13.9 **b.** $t = -8.11$ con valor $p = .000$; rechazar H_0: $\beta_2 = 0$ a favor de H_a: $\beta_2 < 0$.

13.11 **a.** $R^2 = .9955$ **b.** $R^2(\text{adj}) = 99.3\%$ **c.** El modelo cuadrático ajusta ligeramente mejor.

13.13 **a.** Usar variables x_2, x_3 y x_4. **b.** no

13.15 **a.** $\hat{y} = -8.177 + 292x_1 + 4.434x_2$ **b.** Rechazar H_0: $F = 16.28$ con valor $p = .002$. El modelo contribuye con información significativa para la predicción de y. **c.** sí, $t = 5.54$ con valor $p = .001$ **d.** $R^2 = .823$; 82.3%

13.17 **a.** cuantitativa **b.** cuantitativa **c.** cualitativa; $x_1 = 1$ si la planta B, 0 de otro modo; $x_2 = 1$ si la planta C, 0 de otro modo **d.** cuantitativa **e.** cualitativa; $x_1 = 1$ si turno de día, 0 si turno de noche

13.19 **a.** x_2 **b.** $\hat{y} = 12.6 + 3.9x_2^2$ o $\hat{y} = 13.14 - 1.2x_2 + 3.9x_2^2$

13.21 **a.** $y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_1x_2 + \epsilon$ con $x_2 = 1$ si pepino, 0 si algodón **c.** No, la prueba para interacción da $t = .63$ con valor $p = .533$ **d.** sí

13.23 $y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_1^2 + \beta_3x_2 + \beta_4x_1x_2 + \beta_5x_1^2x_2 + \varepsilon$

13.25 **a.** $\hat{y} = 8.585 + 3.8208x - 0.21663x^2$ **b.** $R^2 = .944$ **c.** sí; $F = 33.44$ **d.** sí; $t = -4.93$ con valor $p = .008$ **e.** no

13.27 **b.** $\hat{y} = 4.10 + 1.04x_1 + 3.53x_2 + 4.76x_3 - 0.43x_1x_2 - 0.08x_1x_3$ **c.** sí; $t = -2.61$ con valor $p = .028$ **d.** no; $F = 3.86$; considere eliminar los términos de interacción.

13.29 **a.** $y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_1^2 + \beta_4x_1x_2 + \beta_5x_1^2x_2 + \epsilon$ **b.** $F = 25.85$; $R^2 = .768$ **c.** $\hat{y} = 4.51 + 6.394x_1 + .1318x_1^2$ **d.** $\hat{y} = -46.34 + 23.458x_1 - .3707x_1^2$ **e.** no; $t = .78$ con valor $p = .439$

13.31 **a.** no; x_1, x_2, x_3 **b.** $y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + \beta_5x_5 + \epsilon$ **c.** $R^2 = 91.4\%$ y $R^2(\text{adj}) = 88.7\%$; sí. **d.** x_1, x_2, y posiblemente x_4; $y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_4 + \epsilon$; $R^2(\text{adj}) = 89.8\%$; el modelo reducido es mejor que el modelo completo.

13.35 **a.** 99.9% **b.** sí; $F = 1676.61$ con valor $p = .000$ **c.** sí; $t = -2.65$ con valor $p = .045$ **d.** sí; $t = 15.14$ con valor $p = .000$ **e.** Lineal: $R^2(\text{adj}) = 91.9\%$, cuadrático: $R^2(\text{adj}) = 99.8\%$, término cuadrático es significativo. **f.** El término cuadrático está faltante.

Capítulo 14

14.3 **a.** $X^2 > 12.59$ **b.** $X^2 > 21.666$ **c.** $X^2 > 29.8194$ **d.** $X^2 > 5.99$

14.5 **a.** H_0: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/5$ **b.** 4 **c.** 9.4877 **d.** $X^2 = 8.00$ **e.** No rechazar H_0.

14.7 Sí, $X^2 = 24.48$; los automovilistas tienden a preferir los carriles interiores.

14.9 no, $X^2 = 3.63$

14.11 no, $X^2 = 13.58$

14.13 sí; no rechazar H_0; $X^2 = 1.247$

14.15 sí; rechazar H_0; $X^2 = 28.386$

14.17 8

14.19 Rechazar H_0; $X^2 = 18.352$ con valor $p = .000$.

14.21 **a.** sí; $X^2 = 7.267$ **b.** $.025 <$ valor $p < .05$

14.23 **a.** sí; rechazar H_0; $X^2 = 20.937$ **b.** no; $X^2 = 1.255$

14.25 **a.** no; no rechazar H_0; $X^2 = 6.447$ **b.** valor $p > .10$; sí

14.27 **a.** $X^2 = 10.597$ **b.** $X^2 > 13.2767$ **c.** No rechazar H_0. **d.** $.025 <$ valor $p < .05$

14.29 sí; $X^2 = 24.31$

14.31 **a.** Cada tipo de atención representa una población binomial en la que medimos la presencia o ausencia de servicios EMI. **b.** sí; $X^2 = 18.446$

14.33 Sí, rechazar H_0; $X^2 = 36.499$.

14.35 no, $X^2 = 4.4$ con valor $p > .10$

14.37 no, $X^2 = 1.89$ con valor $p > .10$

14.39 **a.** no, $X^2 = 1.815$ **b.** valor $p > .10$

14.43 no; no rechazar H_0; $X^2 = 1.311$.

14.45 **a.** Rechazar H_0; $X^2 = 18.527$. **b.** Rechazar H_0; $z = 4.304$; sí.

14.49 sí, $X^2 = 7.488$ con $.005 <$ valor $p < .01$

14.51 sí, $X^2 = 6.190$ con $.025 <$ valor $p < .05$; (.347, .483)

14.53 **a.** no; $X^2 = 3.259$ con valor $p = .196$ **b.** no; $X^2 = 1.054$ con valor $p = .788$ **c.** sí

14.55 no, $X^2 = 3.953$ con valor $p = .139$

14.57 **a.** No rechazar H_0; $X^2 = 3.660$ con valor $p = .454$; sí.

14.59 **a.** sí; $X^2 = 11.690$ con valor $p = .003$ **b.** La susceptibilidad de un resfrío parece disminuir cuando aumenta el número de parentescos.

14.61 Sí, rechazar H_0; $X^2 = 16.535$.

14.63 **a.** 27.69 **b.** 5.99

14.65 Los consumidores tienen una preferencia; $X^2 = 18.5$ con valor $p = .0001$.

14.69 no; $X_2 = 2.87$ con valor $p = .2378$

Capítulo 15

15.1 **a.** T_1^* **b.** $T \leq 31$ **c.** $T \leq 27$

15.3 **a.** H_0: las distribuciones poblacionales son idénticas; H_a: la población 1 corrida a la izquierda de la población 2 **b.** $T_1 = 16$; $T_1^* = 39$ **c.** $T \leq 19$ **d.** sí; rechazar H_0

15.5 No rechazar H_0; $z = -1.59$.

15.7 No rechazar H_0; $T = 102$.

15.9 sí; rechazar H_0; $T = 45$

15.11 sí; rechazar H_0; $T = 44$

15.13 **b.** $\alpha = .002, .007, .022, .054, .115$

15.15 de una cola: **n = 10:** $\alpha = .001, .011, .055$; **n = 15:** $\alpha = .004, .018, .059$; **n = 20:** $\alpha = .001, .006, .021, .058, .132$; de dos colas: **n = 10:** $\alpha = .002, .022, .110$; **n = 15:** $\alpha = .008, .036, .118$; **n = 20:** $\alpha = .002, .012, .042, .116$

15.17 **a.** H_0: $p = \frac{1}{2}$; H_a: $p \neq \frac{1}{2}$; región de rechazo: $\{0, 1, 7, 8\}$; $x = 6$; no rechazar H_0 en $\alpha = .07$; valor $p = .290$.

15.19 $z = 3.15$; rechazar H_0.

15.21 **b.** $T = \min\{T^+, T^-\}$ **c.** $T \leq 137$ **d.** No rechazar H_0.

15.23 No rechazar H_0; $z = -.34$.

15.25 **a.** Rechazar H_0; $T = 1.5$ **b.** Los resultados no concuerdan.

15.27 **a.** no; $T = 6.5$

15.29 **a.** No rechazar H_0; $x = 8$. **b.** No rechazar H_0; $T = 14.5$.

15.31 **a.** prueba de diferencia pareada, prueba del signo, prueba de rango con signo de Wilcoxon **b.** Rechazar H_0 son ambas pruebas; $x = 0$ y $T = 0$.

15.33 sí, $H = 13.90$

15.35 **a.** no; $H = 2.63$ **b.** valor $p > .10$ **c.** valor $p > .10$

15.37 no; $H = 2.54$ con valor $p > .10$

15.39 **a.** Rechazar H_0; $F_r = 21.19$. **b.** valor $p < .005$ **d.** $F = 75.43$ **e.** valor $p < .005$ **f.** Los resultados son idénticos.

15.41 **a.** No rechazar H_0; $F_r = 5.81$. **b.** $.05 <$ valor $p < .10$

15.43 **a.** $r_s \geq .425$ **b.** $r_s \geq .601$

15.45 **a.** $|r_s| \geq .400$ **b.** $|r_s| \geq .526$

15.47 **a.** $-.593$ **b.** sí

15.49 **a.** $r_s = .811$ **b.** sí

15.51 sí

15.53 sí, $r_s = .9118$

15.55 **a.** No rechazar H_0; $x = 2$. **b.** No rechazar H_0; $t = -1.646$.

15.57 **a.** No rechazar H_0; $x = 7$. **b.** No rechazar H_0; $x = 7$.

15.59 No rechazar H_0 con la prueba de la suma de rango de Wilcoxon ($T = 77$) o la prueba de diferencia pareada ($t = .30$).

15.61 No rechazar H_0 usando la prueba del signo ($x = 2$); no.

15.63 sí; $r_s = -.845$

15.65 Rechazar H_0; $T = 14$.

15.67 **a.** Rechazar H_0; $F_r = 20.13$. **b.** Los resultados son iguales.

15.69 **a.** Rechazar H_0; $H = 9.08$. **b.** $.025 <$ valor $p < .05$ **c.** Los resultados son iguales.

15.71 **a.** no **b.** diferencias significativas entre las respuestas a las tres tasas de aplicación; $F_r = 10.33$ con valor $p = .006$

15.73 $T = 19$. $T_{.05} = 21$ ($T_{.01} = 18$.) Rechazar H_0.

15.75 $z = 1.18 < z_{.05} = 1.645$; la iluminación no es efectiva

15.77 $H = 7.43$ $df = 3$ valor $p = 0.059$; no hay diferencia significativa

15.79 **a.** $r_s = .738$. **b.** valor $p = .025 < .05$; sí, correlación positiva

Índice

Créditos

La presente constituye una extensión de la página de derechos de autor. Hemos hecho nuestro mejor esfuerzo para dar seguimiento a la propiedad de todo el material de copyright y para asegurar el permiso de los propietarios de éste. En caso de duda por el uso de cualquier material, tendremos mucho gusto en hacer las correcciones necesarias en futuras impresiones. Damos gracias a los siguientes autores, editores y agentes por su permiso para usar el material indicado.

Introducción. 1: © Mark Karrass/CORBIS; 2: "Hot News: 98.6 Not Normal", © McClatchy-Tribune Information Services. Todos los derechos reservados. Reimpreso con permiso.

Capítulo 1. 7: © Jupiterimages/Brand X/CORBIS; 9: Las partes de la entrada y salida contenidas en esta publicación/libro están impresas con permiso de Minitab®, Inc. Todo el material continúa siendo propiedad exclusiva y copyright de Minitab®, Inc. Todos los derechos reservados. www.minitab.com; **31, Ejercicio 1.29:** Adaptado de "Top Ten Organized Religions of the World", www.infoplease.com/ipa/A0904108.html, como apareció el 15 de noviembre de 2007 en la base de datos Info Please, © Pearson Education, Inc. Reproducido con permiso de Pearson Education, Inc. que publica como Info Please. Todos los derechos reservados; **47, ejercicio 1.58:** Usado con permito de GEICO.

Capítulo 2. 52: Joe Sohm-VisionsofAmerica/Photodisc/Getty.

Capítulo 3. 97: © Janis Christie/Photodisc/Getty Images; **126:** © 2007 por Consumers Union of U.S., Inc., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de septiembre de 2007 de CONSUMERS **REPORTS®** sólo para fines educativos. No se permite el uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

Capítulo 4. 127: © Tammie Arroyo/Getty Images.

Capítulo 5. 183: © Kim Steele/Photodisc/Getty Images; **218:** De *The New York Times*, 5/21/1987, p. A22. Copyright © 1987 The New York Times. Todos los derechos reservados. Usado con permiso y protegido por las Leyes de Copyright de Estados Unidos. La impresión, copia, redistribución o retransmisión del material sin expreso permiso por escrito están prohibidas.

Capítulo 6. 219: © AFP/Getty Images.

Capítulo 7. 254: © Picture Net/CORBIS; **291, Ejercicio 7.66:** De *Newsweek*, octubre 26, 2006, © 2006 Newsweek, Inc. Todos los derechos reservados. Usado con permiso y protegido por las Leyes de Copyright de Estados Unidos. La impresión, copia, redistribución o retransmisión del material sin expreso permiso por escrito están prohibidas.

Capítulo 6. 219: © AFP/Getty Images.

Capítulo 7. 254: © Picture Net/CORBIS; **291, Ejercicio 7.66:** De *Newsweek*, octubre 26, 2006, Newsweek, Inc. Todos los derechos reservados. Usado con permiso y protegido por las leyes de Copyright de Estados Unidos. La impresión, copia, redistribución o retransmisión del material sin expreso permito por escrito están prohibidas; **293, Ejercicio 7.78:** De J. Hackl, *Journal of Quality Technology,* abril de 1991. Usado con permiso.

Capítulo 8. 297: © Associated Press; **306, Ejercicio 8.14:** Reimpreso con permiso de *Science News,* publicación semanal de *Science*, copyright 1989 por Science Services, Inc.; **322, Ejercicio 8.43:** De "Performance Assessment of a Standards-Based High School Biology Curriculum" por W. Leonard, B. Speziale y J. Pernick en *The American Biology Teacher* 2001, 63(5); 310-316. Reimpreso con permiso de la National Association of Biology Teachers; **323, Ejercicio 8.46:** De "Performance Assessment of a Standards-Based High School Biology Curriculum" por B. Speziale y J. Pernick en *The American Biology Teacher* 2001, 63(5); 310-316. Reimpreso con permiso de la National Association of Biology Teachers; **338, Ejercicio 8.101:** De una encuesta de la CBS/New York Times, "Is America Ready for a Woman President?" 5 de febrero, 2006. Copyright © 2006 CBS Broadcasting Inc. Todos los derechos reservados. Usado por cortesía de CBS News.

Capítulo 9. 343: © Scott Olson/Getty Images.

Capítulo 10. 386: © CORBIS SYGMA; **397, Ejercicio 10.6:** De "Pricing of Tuna", Copyright 2001 por Consumers Union of U.S., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de junio de 2001 de Consumer Reports® sólo para fines educativos. No se permite el uso comercial o reproducción. www.ConsumerReports.org®; **446:** De "Four-Day Work Week Improves Environment" por C.S. Catlin en *Environmental Health*, Vol. 59, núm. 7, marzo de 1997. Copyright 1997 National Environmental Health Association. Reimpreso con permiso.

Capítulo 11. 447: © James Leynse/CORBIS; **462, Ejercicio 11.16:** De "Pricing of Tuna", Copyright 2001 por Consumers Union of U.S., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de junio de 2001 de Consumer Reports® sólo para fines educativos. No se permite el uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

Capítulo 12. 502: © Justin Sulliven/Getty Images; **549, Ejercicio 12.80:** De "Ratings: Walking Shoes", Copyright 2006 por Consumers Union of U.S., Inc., Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de octubre de 2006 de Consumer Reports® sólo para fines educativos. No se permite el uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

Capítulo 13. 551: © Will & Deni McIntyre/CORBIS; **590, Ejercicio 13.33:** De "Tuna Goes Upscale", Copyright 2001 por Consumers Union of U.S., Inc. Yonkers, NY 10703-1057, organización sin fines de lucro. Reimpreso con permiso de la edición de junio de 2001 de Consumer Reports® sólo para fines educativos. No se permite el uso comercial ni reproducción. www.ConsumerReports.org®.

Capítulo 14. 594: © Dave Bartruff/CORBIS; **601, Ejercicios 14.13, 14.14:** M&M's® y M® son marcas registradas propiedad de Mars, Incorporated y sus afiliados. Estas marcas registradas están usadas con permiso. Mars, Incorporated no está asociada con Cengage Learning Market Group Worldwide. © Mars, Inc. 2008.

Capítulo 15. 629: © Don Carstens/Brand X/CORBIS; **677:** De "Eggs Substitutes Rang in Quality" por K. Sakekel en *The San Francisco Chronicle,* 10 de febrero, 1993, p. 8. Copyright © 1993 San Francisco Chronicle.

Apéndice 691: De "Table of Percentage Points of the *t*-Distribution", *Biometrika* 32 (1941):300. Reproducido con permiso de los fideicomisarios; **692:** De "Tables of the Percentage Points of the x2-Distribution", *Biometrika Tables for Statisticians,* Vol. 1, 3a. ed. (1966). Reproducido con permiso de los fideicomisarios de *Biometrika*; **694:** Parte de "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (*F*) Distribution", *Biometrika Tables for Statisticians,* Vol. 1, Cambridge University Press, 1954, editado por E.S.Pearson y H.O. Hartley. Reproducido con permiso de los autores, editores y fideicomisarios de *Biometrika*; **702, Tablas 7*a*) y 7*b*):** Datos de "An Extended Table of Critical Values for the Mann-Whitney (Wilcoxon) Two-Sample Statistic" por Roy C. Milton, pp. 925-934, en la *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 59, núm. 307, septiembre de 1964. Reimpreso con permiso de la Journal of the American Statistical Association. Copyright 1964 por la American Statistical Association. Todos los derechos reservados; **704:** De "Some Rapid Approximate Statistical Procedures" (1964) 28, por F. Wilcoxon y R.A. Wilcoxon. Reproducido con el amable permiso de Lederle Laboratories, una división de American Cyanamid Company; **705:** De "Distribution of Sums of Squares of Rank Differences for Small Samples" por E.G. Olds, *Annals of Mathematical Statistics* 9(1938). Reproducido con el permiso del editor, *Annals of Mathematical Statistics*; **706:** De *Handbook of Tables for Probability and Statistics*, 2a. ed., editado por William H. Beyer (CRC Press). Usado con permiso de William H. Beyer.

MI ENTRENADOR PERSONAL

Índice de figuras con applet

Lista de aplicaciones

Administración y economía

Ciencias de la vida

(*continúa*)

Ciencias sociales

Interés general

Respuestas a los ejercicios de Mi entrenador personal

Capítulo 1

A.

90	12.86	15
5.9	.98	1.0
200	25	25

B.

0	0 a $<$ 15
	15 a $<$ 30
0	0 a $<$ 1.0
	1.0 a $<$ 2.0
500	500 a $<$ 525
	525 a $<$ 550

Capítulo 2

A.

Conjunto de datos	Ordenados	n	Posición de Q_1	Posición de Q_3	Cuartil inferior Q_1	Cuartil superior Q_3
2, 5, 7, 1, 1, 2, 8	1, 1, 2, 2, 5, 7, 8	7	2nd	6th	1	7
5, 0, 1, 3, 1, 5, 5, 2, 4, 4, 1	0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5	11	3rd	9th	1	5

B.

Conjunto de datos ordenado	Posición de Q_1	Valores adyacentes	Q_1	Posición de Q_3	Valores adyacentes	Q_3
0, 1, 4, 4, 5, 9	1.75	1 and 4	$1 + .75(3) = 3.25$	5.25	5 and 9	$5 + .25(4) = 6$
0, 1, 3, 3, 4, 7, 7, 8	2.25	1 and 3	$1 + .25(2) = 1.5$	6.75	7 and 7	$7 + .75(0) = 7$
1, 1, 2, 5, 6, 6, 7, 9, 9	2.5	1 and 2	$1 + .5(1) = 1.5$	7.5	7 and 9	$7 + .5(2) = 8$

Capítulo 3

A.

x	y	xy	Calcular:	Covarianza
0	1	0	$n = 3$	$s_{xy} = \dfrac{\Sigma xy - \dfrac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}}{n - 1} = 1$
2	5	10	$s_x = 2$	
4	2	8	$s_y = 2.082$	Coeficiente de correlación
$\Sigma x = 6$	$\Sigma y = 8$	$\Sigma xy = 18$		$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = .240$

B.

De la parte A	De la parte A	Calcular:	Pendiente	intercepto y
$\Sigma x = 6$	$s_x = 2$	$\bar{x} = 2$	$b = r\left(\dfrac{s_y}{s_x}\right) = .25$	$a = \bar{y} - b\bar{x} = 2.167$
$\Sigma y = 8$	$s_y = 2.082$	$\bar{y} = 2.667$		
	$r = .240$		Recta de regresión: $y = 2.167 + .25x$	

Capítulo 4

P(A)	P(B)	Condiciones para los eventos A y B	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$	$P(A\|B)$
.3	.4	Mutuamente excluyentes	0	.7	0
.3	.4	Independientes	.12	.58	.3
.1	.5	Mutuamente excluyentes y dependientes	0	.6	0
.2	.5	Independientes	.10	.6	.2

Capítulo 5

Sección 5.2 **A.**

.010, .087, .317, .663, .922, 1.000

B.

0, 1, 2, 3, 4	$P(x \leq 4)$	n/a	.922
4, 5	$P(x \geq 4)$	$1 - P(x \leq 3)$	.337
5	$P(x > 4)$	$1 - P(x \leq 4)$	.078
0, 1, 2, 3	$P(x < 4)$	$P(x \leq 3)$	.663
2, 3, 4	$P(2 \leq x \leq 4)$	$P(x \leq 4) - P(x \leq 1)$	.835
4	$P(x = 4)$	$P(x \leq 4) - P(x \leq 3)$	.259

Capítulo 5 Sección 5.3

A.

$\frac{1.5^0 e^{-1.5}}{0!}$, .223
$\frac{1.5^1 e^{-1.5}}{1!}$, .335
0, 1, .558

B.

.223, .558, .809, .934, .981, .996, .999, 1.000

C.

0, 1, 2, 3	$P(x \le 3)$	n/a	.934
3, 4, 5, . . .	$P(x \ge 3)$	$1 - P(x \le 2)$	.191
4, 5, 6, . . .	$P(x > 3)$	$1 - P(x \le 3)$	.066
0, 1, 2	$P(x < 3)$	$P(x \le 2)$	.809
2, 3, 4	$P(2 \le x \le 4)$	$P(x \le 4) - P(x \le 1)$	.423
3	$P(x = 3)$	$P(x \le 3) - P(x \le 2)$	.125

Capítulo 6 Sección 6.3

1.5	n/a	.9332
2	$1 - P(z \le 2)$	$1 - .9772 = .0228$
2.33	$1 - P(z \le 2.33)$	$1 - .9901 = .0099$
-1.96, 1.96	$P(z < 1.96) - P(z < -1.96)$	$.9750 - .0250 = .9500$
-1.24, 2.37	$P(z < 2.37) - P(z < -1.24)$	$.9911 - .1075 = .8836$
-1	n/a	.1587

Capítulo 6 Sección 6.4

A.

1. 12; 18	2. si	3. 12; 2.683

B.

1. 20, 21, . . . , 30	2. 20; 19.5	3. 2.80	4. 2.80; .9974; .0026

Capítulo 7 Sección 7.5

A.

normal; 75; 2

B.

$P(\bar{x} > 80)$; 2.5; 80; 2.5; .9938; .0062

C.

$P(70 < \bar{x} < 72)$; -2.5; -1.5; 70; 72; -2.5; -1.5; .0668; .0062; .0606

Capítulo 7 Sección 7.6

A.

normal; .4; .08165

B.

$P(\hat{p} > .5)$; 1.22; .5; 1.22; .8888; .1112

C.

$P(.5 < \hat{p} < .6)$; 1.22; 2.45; .5; .6; 1.22; 2.45; .9929; .8888; .1041

Capítulo 8

Tipo	1 o 2	Margen de error	Solución	Tamaño muestral
		$1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}$	$1.96\sqrt{\frac{.4(.6)}{n}} \le .1$	$n \ge 93$
Cuantitativa	Una		$1.96 \frac{6}{\sqrt{n}} \le 1$	$n \ge 139$
		$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$	$1.96\sqrt{\frac{36}{n} + \frac{36}{n}} \le 2$	$n_1 \ge 70$ $n_2 \ge 70$
Binomial	Dos		$1.96\sqrt{\frac{.4(.6)}{n} + \frac{.4(.6)}{n}} \le .05$	$n_1 \ge 738$ $n_2 \ge 738$

Capítulo 9

A.

Valor crítico	Región de rechazo	Conclusión
1.645	$z > 1.645$	No rechazar H_0
2.33	$z > 2.33$	Rechazar H_0
1.96	$z > 1.96$ or $z < -1.96$	No rechazar H_0
2.58	$z > 2.58$ or $z < -2.58$	Rechazar H_0

B.

Valor p	¿Valor p $< \alpha$?	Conclusión
.0808	no	No rechazar H_0
.0069	si	Rechazar H_0
.4592	no	No rechazar H_0
≈ 0	si	Rechazar H_0

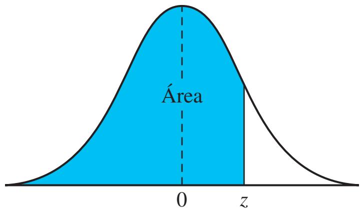


TABLA 3 **Áreas bajo la curva normal, páginas 688-689**

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABLA 3 (*continuación*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

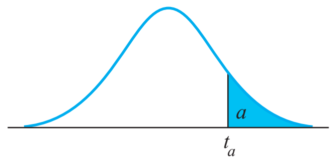


TABLA 4
Valores críticos de *t* página 691

df	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	df
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	∞

Fuente: De "Table of Percentage Points of the *t*-Distribution", *Biometrika* 32 (1941):300. Reproducido con permiso de the *Biometrika* Trustees.

Introducción a la probabilidad y estadística, décima tercera edición, conserva la presentación sencilla y el esbozo tradicional para las estadísticas descriptiva e inferencial, e incorpora útiles ayudas de aprendizaje como los entrenadores Mi entrenador personal, Mi applet y Mi consejo para garantizar que los estudiantes aprenden y comprenden la importancia de los materiales. Además de mostrar cómo aplicar procedimientos estadísticos, los autores explican cómo describir significativamente conjuntos de datos reales, lo que significan las pruebas estadísticas en términos de sus aplicaciones prácticas, cómo evaluar la validez de los supuestos detrás de pruebas estadísticas y qué hacer cuando supuestos estadísticos han sido violados.

CARACTERÍSTICAS

- Amplia cobertura: ofrece una oferta más rigurosa con cobertura tradicional de probabilidad. Más de 35 años de enseñanza y experiencia en la escritura contribuyen a la exposición clara, ejemplos interesantes y ejercicios eficaces.

- Datos reales: el primero en incorporar los estudios de casos y datos reales, Mendenhall/Beaver/Beaver sigue la norma. Muchos ejemplos y ejercicios usan conjuntos de datos auténticos, ayudando a los estudiantes a ver las conexiones entre sus estudios y sus vidas.

- Referencia rápida: al final de cada capítulo, secciones de conceptos clave y fórmulas proporcionan una referencia rápida para los estudiantes, ayudándoles a asegurarse de que están bien preparados para tareas y exámenes.

- Sitio Web de Premium para el estudiante: este sitio, protegido por una contraseña, incluye más de 30 applets interactivos de Java, ejercicios de autocorrección y conjuntos de datos para los ejercicios en el texto.

ISBN-13: 978-607481466-8
ISBN-10: 607481466-X

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com