UDS

Mi Universidad

LIBRO

ALGEBRA LINEAL

ING. EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

SEGUNDO CUATRIMESTRE

Enero – Abril

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distingue

Algebra lineal

Objetivo de la materia.

El alumno conocerá y comprenderá los conceptos básicos de lógica matemática, álgebra booleana, grafos y algebra lineal para aplicarlos a modelos matemáticos que resuelvan problemas de la ingeniería en sistemas computacionales.

Criterios de evaluación.

No	Concepto	Porcentaje
1	Trabajos Escritos	10%
2	Actividades web escolar	20%
3	Actividades Áulicas	20%
4	Examen	50%
	Total de Criterios de evaluación	100%

INDICE

UNIDAD IV ESPACIOS VETORIALES

UNIDAD I

LOGICA MATEMATICA Y CONJUNTOS

1.1.- Proposiciones simples y compuestas.

Tipos de proposiciones

Existen distintos criterios para clasificar proposiciones:

Universales / particulares. Según Aristóteles, existen proposiciones universales, en las que se generaliza un estado para todo elemento que cumpla con una característica, y proposiciones particulares, cuando el sujeto está tomado de su extensión particular.

Negativas / positivas. Expresan un estado de situación (las positivas) o la ausencia misma de ese estado (las negativeas).

Simples / compuestas. Las proposiciones compuestas son aquellas más extensas y complejas, mientras que las proposiciones simples son las más breves y directas, en general contienen un sujeto, un objeto y el verbo "es".

Las proposiciones simples.

Las proposiciones simples son aquellas que expresan un estado de situación en su estado más sencillo, es decir, uniendo a un sujeto con un objeto a partir del verbo "es". Existen tanto en el ámbito de la matemática como en el de otras disciplinas y se caracterizan por no tener ningún término que condicione la proposición de ninguna manera. Por ejemplo: La pared es azul.

Las proposiciones compuestas.

Las proposiciones compuestas aparecen mediadas por la presencia de alguna clase de conector, que puede ser de oposición (o, ni), de adición (y, e) o de condición (si). Además, se consideran compuestas a las proposiciones negativas, que incluyen la palabra no.

Esto explica que en la proposición compuesta la relación entre el sujeto y el objeto no se produzca en forma general, sino sometida a la presencia del conector: podrá cumplirse solo cuando otra cosa suceda, podrá cumplirse tanto para ese como para otros, o podrá cumplirse solo para uno de todos.

EJEMPLO: Si hay lluvias, hay cosechas; si hay enfermedades, no hay cosechas; hay heladas o hay enfermedades; no hay enfermedades. Por lo tanto, hay lluvias.

1.- Identificamos las hipótesis y la conclusión, que en este caso son separadas por ";".

H1.- Si hay lluvias, hay cosechas.

H2.- Si hay enfermedades, no hay cosechas.

H3.- Hay heladas o hay enfermedades.

H4.- No hay enfermedades.

C.- Hay lluvias.

1.2 .- conectivos lógicos

Dentro del uso de los conectores lógicos, tenemos varias formas de emplearse y estará en función de la forma en que se emplea. A continuación revisamos algunos de ellos.

1. Aditivos. Su función central es la de agregar una nueva idea a lo que con anterioridad se ha venido desarrollando. Esto permite darle un mejor sentido a las ideas que se están planteando.

2. Adversativos. Caso contrario al anterior, busca presentar una oposición a lo que ya se había venido desarrollando. Encontramos dentro de ellos tres tipos de adversativos de acuerdo a funciones específicas y son:

Exclusivos. La finalidad de este tipo de adversativo es la de generar un contraste entre una nueva idea y lo que se ha venido desarrollando.

Restrictivos. Buscan darle una acotación a la importancia que tiene la nueva idea en relación a lo que se ha dicho con anterioridad.

3. Concesivos. Buscan presentar un sutil contraste entre una idea y otra, aunque no de manera contundente, solo buscan variaciones de ideas.

4. Causales. Este es otro tipo de conector que tiene como función específica la de darle un sentido de causalidad a la idea que se está desarrollando.

5. Consecuenciales. Conector que busca darle un sentido de consecuencia a la idea que se ha desarrollado.

6. Comparativos. Se busca darle un soporte a la idea anteriormente manejada con una similitud de otra idea para que precisamente sea comparada.

7. Modales. Trata de desarrollar expresiones específicas de la idea que se da en una nueva idea.

8. Secuenciales. Conectan una idea nueva con la anterior bajo la premisa de la relación de tiempo que existe entre ambas. Se maneja en este sentido una secuencia.

9. Reformulativos. Toma la idea ya manejada y lo plantean de otra manera para poder ejemplificar y sustentar lo ya dicho. De este tipo de conectores existe una clasificación de tres tipos:

10. Explicativos. Buscan replantear con ideas más claras lo ya dicho anteriormente y se usa mucho en las estrategias pedagógicas para reforzamiento.

11. Recapitulativos. Se encuentra antes de la presentación de un resumen o síntesis para plantear lo que se verá posteriormente.

12. Ejemplificativos. Es un tipo de conector que se vale de planteamiento de ejemplos de las ideas anteriormente señaladas para una mejor comprensión de lo visto.

13. Correctivos. Su función básica es la de hacer correcciones inmediatas en relación a información de una idea desarrollada que pueda resultar contradictoria de anteriores.

14. Ordenadores. Tiene la función de ir preparando al lector ante las ideas que están por tratarse posteriormente, para ello se hacen alusiones a partes de un texto, sea de manera parcial o total. Este tipo de conector se clasifica a su vez en lo siguiente:

15. Iniciales. Buscan presentar de manera introductoria las ideas que se están desarrollando en el texto.

16. Transitivos. Como se indica, permite una transición entre una serie de ideas desarrolladas con otras que están por venir de manera posterior en un texto.

17. Digresivos. Conector que permite darle una pauta al desarrollo del texto, pudiendo apartar la secuencia de las ideas principales para tratar aspectos secundarios sin perder la lógica del texto argumentativo.

18. Temporales. Le dan un sentido de temporalidad a las ideas, sea que se presenten en pasado, presente o futuro, es decir, se le da una temporalidad.

19. Espaciales. Llevan al lector dentro del desarrollo de las ideas hacia diversos espacios de manera metafórica como un recurso de escritura.

20. Finales. Le dan un sentido de aviso al lector respecto a la idea del final de la argumentación en el texto mismo.

1.2.1.- Conjunción, disyunción, negación, condicional y bicondicional

Conectiva	Expresión en el lenguaje natural	Ejemplo	Símbolo en este artículo	Símbolos alternativos
Negación	no	**No** está lloviendo.	$\neg$	$\sim$
Conjunción	y	Está lloviendo **y** está nublado.	$\wedge$	&
Disyunción	o	Está lloviendo **o** está soleado.	$\vee$	
Condicional material	si... entonces	**Si** está soleado, **entonces** es de día.	$\rightarrow$	$\supset$
Bicondicional	si y sólo si	Está nublado **si y sólo si** hay nubes visibles.	$\leftrightarrow$	$\equiv$

1.3.- Tablas de verdad

Las tablas de la verdad.

Estas tablas pueden construirse haciendo una interpretación de los signos lógicos como: no, o, y, si…entonces, sí y sólo si. La interpretación corresponde al sentido que estas operaciones tienen dentro del razonamiento. Puede establecerse una correspondencia entre los resultados de estas tablas y la deducción lógico matemática. En consecuencia, las tablas de verdad constituyen un método de decisión para chequear si una proposición es o no un teorema. Para la construcción de la tabla se asignará el valor 1(uno) a una proposición cierta y 0 (cero) a una proposición falsa.

Negación: El valor de verdad de la negación es el contrario de la proposición negada.

La conjunción sirve para indicar que se cumplen dos condiciones simultáneamente, por ejemplo:

La función es creciente y está definida para los números positivos, utilizamos Para que la conjunción p^q sea verdadera las dos expresiones que intervienen deben ser verdaderas y sólo en ese caso como se indica por su tabla de verdad.

- **Disyunción**: La disyunción solamente es falsa si lo son sus dos componentes.

Con la disyunción a diferencia de la conjunción, se representan dos expresiones que afirman que una de las dos es verdadera, por lo que basta con que una de ellas sea verdadera para que la expresión p ∨ q sea verdadera.

- **Condicional**: El condicional solamente es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. De la verdad no se puede seguir la falsedad.

P	Q	PVQ
I	I	I
I	0	I
I	I	I
0	0	0

- **Bicondicional**:El bicondicional solamente es cierto si sus componentes tienen el mismo valor de verdad.

P	Q	P®Q

1	1	1
1	0	1
1	1	1
0	0	1

Se denomina **tautología** una proposición que es cierta para cualquier valor de verdad de sus componentes. Por tanto, la última columna de su tabla de verdad estará formada únicamente por unos. **Contradicción** es la negación de una tautología, luego es una proposición falsa cualesquiera sea el valor de verdad de sus componentes. La última columna de la tabla de verdad de una contradicción estará formada únicamente por ceros.

Tablas de verdad trivalentes

TABLA DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción

Las tablas de verdad tradicionales pueden rescribirse si se dejan vacías casillas en las que el valor de verdad de la fórmula atómica es irrelevante, por ejemplo, la tabla de la disyunción:

Las primeras dos líneas señalan que no importa cuál sea el valor de verdad de uno de los disyuntos, siempre que el otro sea verdadero, la disyunción será verdadera. De la misma manera, se podría abreviar la tabla de la conjunción de la siguiente manera:

TABLA DE VERDAD DE LA CONJUNCIÓN.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjunción

Las últimas dos líneas señalan que no importa cuál sea el valor de verdad de uno de los disyuntos, siempre que el otro sea falso, la conjunción será falsa. La ventaja de este tipo de tablas es que permiten extenderse de manera muy natural para permitir un tercer valor de verdad que no sea ni verdadera ni falso. Será llamado "I" por "indeterminado". Ahora se puede usar la tabla abreviada de la disyunción clásica para desarrollar una tabla de verdad (no abreviada) para la disyunción trivalente. Primer paso: identificar las diferentes nueve posibilidades de combinaciones para dos variables.

P	Q	PvQ
V	V	
V	I	
V	F	
I	V	
I	I	
I	F	
F	V	
F	I	
F	F	

Disyunción trivalente

Segundo paso: Usar las primeras dos líneas de la tabla abreviada para determinar el valor de verdad de los renglones con por lo menos un argumento verdadero:

P	Q	P&Q
V	V	V
V	I	I
V	F	F
I	V	I
I	I	I
I	F	F
F	V	F
F	I	F
F	F	F

Conjunción trivalente

Tercer paso: Cómo la última línea de la tabla abreviada es también la última línea de la nueva tabla, le corresponde el mismo valor de verdad: falso.

P	Q	PvQ
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	I
I	F	I
F	V	V
F	I	I
F	F	F

Disyunción trivalente

Cuarto paso: Finalmente, cómo ya están los renglones que son verdaderos o falsos según la tabla original, los renglones que aún no tienen valor de verdad, dado que no son ni verdaderos (sino hubieran quedado como tales en el segundo paso) ni falsos (ya que tampoco quedaron así en el tercer paso), deben ser indeterminados!

En algunos casos, esta tabla de verdad aparece, no en tres columnas, sino en un cuadro. Lo cual tiene la ventaja de dejar más claro el patrón que emerge de la tabla. Siguiendo los mismos pasos se obtiene la tabla de la conjunción:

Construcción de Tablas de Verdad

Algoritmo para construir una tabla de verdad de una fórmula en lógica de proposiciones.

1. Escribir la fórmula con un número arriba de cada operador que indique su jerarquía. Se escriben los enteros positivos en orden, donde el número 1 corresponde al operador de mayor jerarquía. Cuando dos operadores tengan la misma jerarquía, se le asigna el número menor al de la izquierda.
2. Construir el árbol sintáctico empezando con la fórmula en la raíz y utilizando en cada caso el operador de menor jerarquía. O sea, del número mayor al menor.
3. Numerar las ramas del árbol en forma secuencial empezando por las hojas hacia la raíz, con la única condición de que una rama se puede numerar hasta que estén numerados los hijos. Para empezar con la numeración de las hojas es buena idea hacerlo en orden alfabético, así todos obtienen los renglones de la tabla en el mismo orden para poder comparar resultados.
4. Escribir los encabezados de la tabla las fórmulas siguiendo la numeración que se le dió a las ramas en el árbol sintáctico.
5. Asignarle a los átomos, las hojas del árbol, todos los posibles valores de verdad de acuerdo al orden establecido. Por supuesto que el orden es arbitrario, pero como el número de permutaciones es n!, conviene establecer un orden para poder comparar resultados fácilmente.

6. Asignar valor de verdad a cada una de las columnas restantes de acuerdo al operador indicado en el árbol sintáctico utilizando la tabla de verdad. Conviene aprenderse de memoria las tablas de los operadores, al principio pueden tener un resumen con todas las tablas mientras se memorizan.
7. La última columna, correspondiente a la fórmula original, es la que indica los valores de verdad posibles de la fórmula para cada caso.

Otras tablas de verdad divergentes

Además de las tablas polivalentes e intencionales, hay muchas otras tablas de verdad. Por ejemplo, hay tablas de verdad en las que los renglones se bifurcan en dos o más sub-renglones y son útiles para lo que en lógica llamamos super-valuaciones. También existen tablas con valores y más de 2n renglones, ¿cómo es posible? Pues porque, a diferencia de las tablas tradicionales, en estas tablas el orden de los renglones sí importa, de tal manera que renglones repetidos cuentan como renglones distintos. Finalmente, también existen las tablas bidimensionales, usadas originalmente en ciertas lógicas intencionales, pero popularizadas gracias al trabajo de Robert Stalnaker y otros.

Ejemplos

Ejercicio 6.07
Comprobar por tablas de verdad si las siguientes fbfs son o no *simultáneamente satisfacibles*:

$\neg(p \rightarrow q) \qquad p \vee q$

p	q	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \vee q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Las dos fbfs son *simultáneamente satisfacibles*, ya que son V a la vez en la 2ª interpretación.

Ejercicio 6.08
Comprobar por tablas de verdad si las siguientes fbfs son o no *simultáneamente satisfacibles*:

$\neg(p \rightarrow q) \qquad (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Las dos fbfs son *simultáneamente insatisfacibles*, ya que en ninguna de las 4 interpretaciones resultan V a la vez.

Ejercicio 6.09
Comprobar por tablas de verdad si es o no *válido* el siguiente esquema argumentativo:

$p \rightarrow q \models p \vee q \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$\rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V
			1ª	2ª

El esquema es *válido*, ya que en las tres interpretaciones en que la premisa es V también es V la conclusión.

p	q	r	s	$p \to q$	$r \to s$	$p \vee r$	$q \vee \neg s$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	F	V

El esquema es *inválido* ya que hay una interpretación (la 13ª) en la que, siendo V las tres premisas, la conclusión es F.

EJERCICIO 6.11

Comprobar por tablas de verdad si las fbfs siguientes son o no *equivalentes*:

$$(p \to q) \to q \;\dashv\vDash\; p \vee q$$

p	q	$(p \to q)$	$\to q$	$p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F
		1ª	2ª	

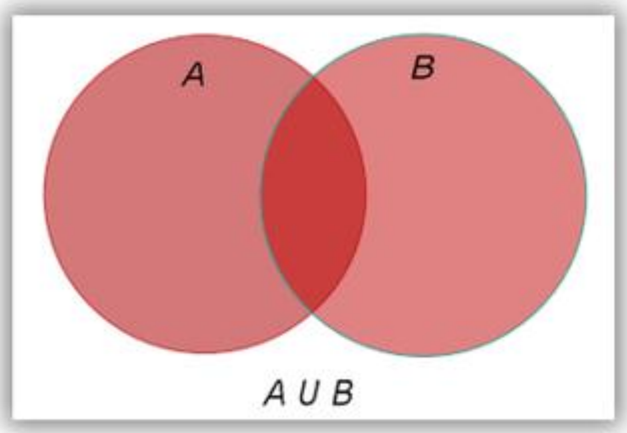
Las dos fbfs son *equivalentes*, ya que tienen el mismo valor en todas las interpretaciones.

1.7.- Operaciones con conjuntos

UNIÓN DE CONJUNTOS

Se llama *UNIÓN* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos de A o de B, es decir:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$



Ejemplo:

Sean *A* = {*a, b, c, d, e, f*} y *B*={*b, d, r, s*}

Entonces $A \cup B$ está formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B.

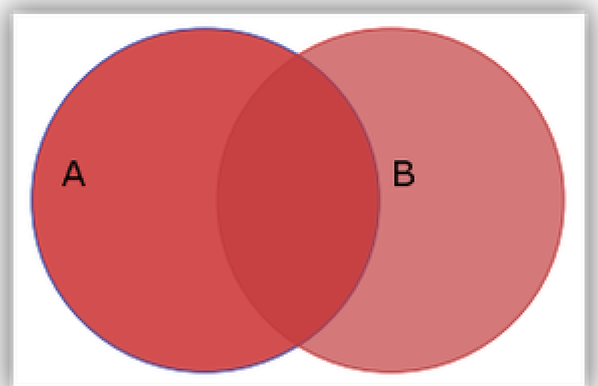
Luego,

$$A \cup B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ r,\ s\}$$

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Se llama *INTERSECCIÓN* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B, es decir:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$



En la imagen la intersección es la parte obscura de la misma.

Ejemplo:

Sean A = {a, b, c, e, f}, B = {b, e, f, r, s} y

C = {a, t, u, v}.

Encuentre:

$A \cap B, A \cap C \ y \ C \cap B$

Como la intersección está formada por los elementos comunes de ambos conjuntos, se tiene que:

$$A \cap B = \{b,\ e,\ f\}$$

$$A \cap C = \{a\}$$

$$C \cap B = \{\ \}$$

Cuando dos conjuntos no tienen elementos en común como B y C en el ejemplo anterior, se denominan ***Conjuntos disjuntos***.

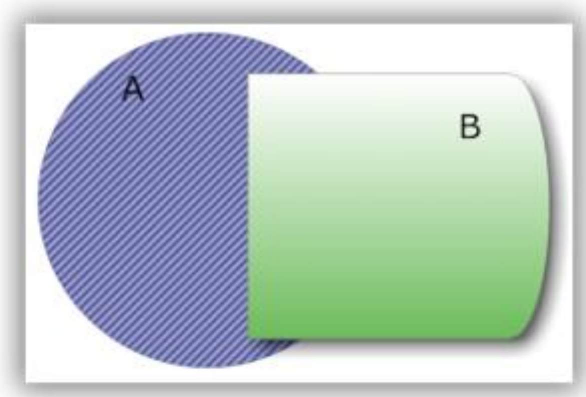
DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se llama *DIFERENCIA* al conjunto:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Luego A-B se llama complemento de B con respecto a A.

A – B



En el diagrama de Venn A-B está representado por la zona rayada.

Ejemplo:

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d, e\}$. Entonces:

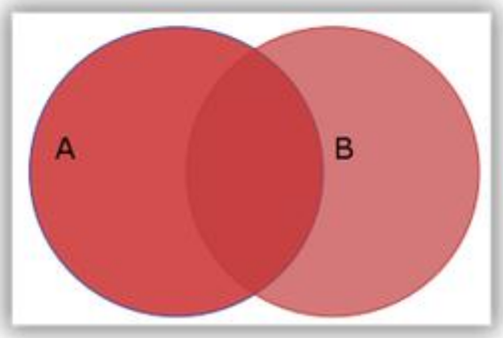
$A – B = \{a\}$ y $B – A = \{d, e\}$.

Asimismo, se llama *DIFERENCIA SIMÉTRICA* entre A y B al conjunto

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \triangle B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$A \triangle B$



En el diagrama de Venn la diferencia simétrica está representada por las regiones menos oscuras. (Lo que no tienen en común).

Ejemplo:

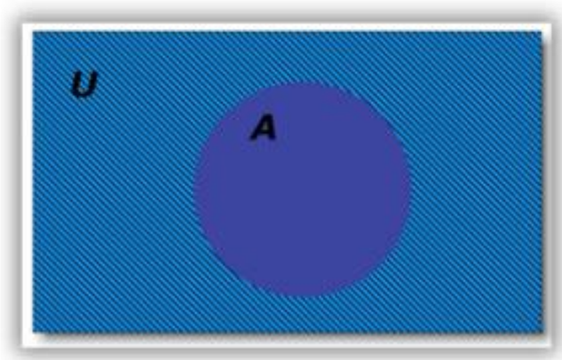
Sean *A* = {*a, b, c, d*} y *B* = {*a, c, e, f, g*}.

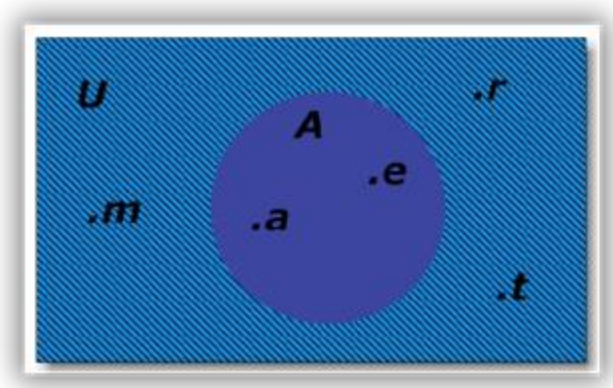
Entonces $A \triangle B = \{b, d, e, f, g\}$

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Si un conjunto A es subconjunto de otro conjunto universal U, al conjunto A ' formado por todos los elementos de U, pero no de A, se llama complemento de A con respecto a U. Simbólicamente se expresa:

$$A' = \{x / x \in U \land x \notin A\}$$





Ejemplos:

a) Sean *U* = {*m, a, r, t,* e } y *A* = {*a,* e }

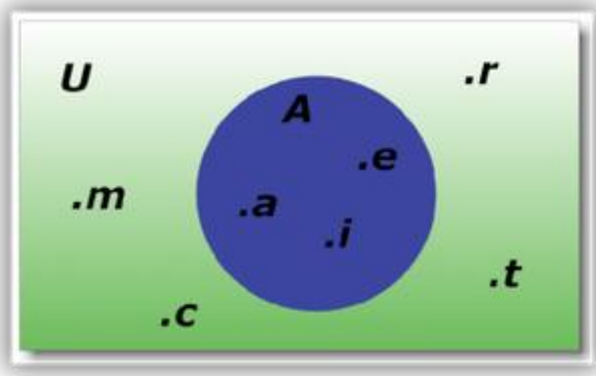
Su complemento de A es: *A*' = {*m, t, r*}

b) Sean *U* = {*letras de la palabra aritmética*} y *A* = { e, *i, a* }

Determinado por extensión tenemos

U = {*a, r, i, t, m,* e, *c*} *A* = { e, *i, a* }

Su complemento es: *A*' = {*r, t, m, c*}



En forma gráfica:

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BOOLEANAS

Las llamadas *OPERACIONES BOOLEANAS* (unión e intersección) verifican las siguientes propiedades:

PROPIEDADES	UNION	INTERSECCION
1.- Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.- Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.- Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.- Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
5.- Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6.- Complementariedad	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \varnothing$

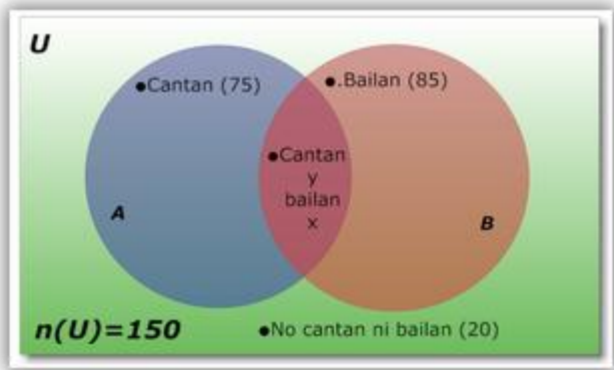
Estas propiedades hacen que partes de U con las operaciones unión e intersección tenga una estructura de álgebra de Boole.

Además de éstas, se verifican también las siguientes propiedades:

$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$ *(elemento nulo).*

$A \cup U = U, A \cap U = A$ *(elemento universal).*

$(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$ *(leyes de Morgan).*



PROBLEMAS CON OPERACIONES CON CONJUNTOS

Mediante diagramas de Venn y las definiciones y aplicación de las distintas operaciones con conjuntos se pueden resolver problemas, que nos preparan en el campo de la lógica formal.

Ejemplo:

A una fiesta llegaron 150 personas, de las cuales 75 cantan, 85 bailan, 20 no cantan ni bailan. ¿Cuántas personas cantan y bailan?

Solución: La pregunta lleva implícita una conectiva lógica y, que es parte importante de la definición formal de la operación intersección. Por lo tanto, podemos representar el problema de la siguiente manera:

$$n(A) + x + n(B) + 20 = 150$$

$$n(A) = 75 - x$$

$$n(B) = 85 - x$$

Luego sustituyendo en la ecuación original

$$75 - x + x + 85 - x + 20 = 150$$

Despejando

$$75 + 85 - x + 20 = 150$$

$$x = 75 + 85 + 20 - 150$$

$$x = 3030$$

R./ El número de personas que cantan y bailan es igual a 30.

Ejercicios:

1. *Sean U={a, b, c, d, e, f, g, h, k} A={a, b, c, g} B={d, e, f, g} C={a, c, f} D={f, h, k}.*
   Escriba por extensión

   a. $A \cup B$
   b. $B \cup C$
   c. $A \cap C$
   d. $B \cap D$
   e. $A - B$
   f. $A \triangle B$
   g. $A \cup D$
   h. $D \cup B$
   i. $C \cap D$
   j. $A \cap D$
   k. $B - C$
   l. $C - B$
   m. $C \triangle D$
   n. A'
   o. D'
   p. $A \cup B \cup C$
   q. $A \cap B \cap C$
   r. $A \cap (B \cup C)$
   s. $(A \cup B) \cap C$
   t. $A \cup \{\ \}$
   u. $A \cup U$
   v. $B \cup B$
   w. $C - D$
   x. $D \triangle C$

2. *Sean U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}* *A={1, 2, 4, 6, 8}* *B={2, 4, 5, 9}*
$C = \{x / x \in \mathbb{Z}^{+} \wedge x^2 \leqslant 16\}$ *D={7, 8}*. Escriba por extensión

a. $A \cup B$ *b.* $B \cup C$ *c.* $A \cap C$
d. $B \cap D$ *e.* $A - B$ *f.* $A \triangle B$
g. $A \cup C$ *h.* $A \cup D$ *i.* $A \cap D$
j. $B \cap C$ *k.* $C \cap D$ *l.* $B - A$
m. $C - D$ *n.* $C \triangle D$ *o.* $B \triangle C$
p. $A \cup B \cup C$ *q.* $A \cap B \cap C$ *r.* $A \cap (B \cup C)$
s. $(A \cup B) \cap C$ t. $A \cup \{\ \}$ u. $A \cup U$

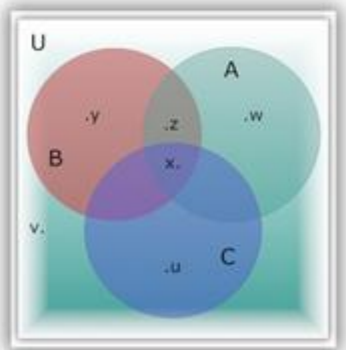
3. De acuerdo al diagrama: Identifique los siguientes casos como verdaderos o falsos

a. ( ) $y \in A \cap B$ *b.* ( ) $x \in B \cup C$

c. ( ) $w \in B \cap C$ *d.* ( ) $u \notin C$

e. ( ) $x \in A \cap B \cap C$ *f.* ( ) $y \in A \cup B \cup C$

g. ( ) $z \in A \cap C$ *h.* ( ) $v \in B \cap C$



UNIDAD II

ALGEBRA BOOLEANA

2.1.- Definición y principio de dualidad.

En el área matemática de la teoría del orden, cada conjunto parcialmente ordenado P da lugar a un conjunto parcialmente ordenado dual (también denominado opuesto) que a menudo se denota por Pop o Pd. Este orden dual Pop se define como el conjunto con el orden inverso, es decir, los x ≤ y se mantiene en Pop si y solo si los y ≤ x se mantiene en P. Es fácil ver que esta construcción, que se puede representar dando la vuelta al diagrama de Hasse de P, dará un conjunto parcialmente ordenado. En un sentido más amplio, también se dice que dos conjuntos parcialmente ordenados son duales si son doblemente isomorfos, es decir, si un conjunto parcialmente ordenado es ordenadamente isomorfo al dual del otro.

La importancia de esta simple definición proviene del hecho de que cada definición y teorema de la teoría del orden puede transferirse fácilmente al orden dual. Formalmente, este hecho es definido en el principio de dualidad para conjuntos ordenados:

Si un enunciado dado es válido para todos los conjuntos parcialmente ordenados, entonces su declaración dual, obtenida invirtiendo la dirección de todas las relaciones de orden y mediante la idealización de todas las definiciones teóricas de orden involucradas, también es válida para todos los conjuntos parcialmente ordenados.

Si una declaración o definición es equivalente a su dual, entonces se dice que es auto dimensional. Téngase en cuenta que la consideración de órdenes duales es tan fundamental que a menudo ocurre implícitamente cuando se escribe ≥ para la orden dual de ≤ sin dar ninguna definición previa de este símbolo "nuevo".

Ejercicios de Programación Lineal - Dualidad

Programación Maten ática

Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas

Curso 06/07

1. Dado el problema lineal

Max $x1 + x2 - x3$

s.a $x1 - x2 + 2x3 \geq 1$

$-2x1 + x3 \geq -2$

$x \geq 0$,

se pide que:

a) Calcules un vértice factible inicial aplicando el método Simplex.

b) Encuentres el problema dual, y lo pongas en forma estándar.

c) Determines si este problema dual es factible, acotado u ´optimo.

2. Un agricultor es propietario de 500 Ha. de tierras, adecuadas para cultivar trigo, avena o centeno. Por cada hectárea que cultive, necesita la mano de obra, incurre en los costes y obtiene los beneficios que se indican en la tabla siguiente:

Cosecha Horas-hombre Coste Beneficio

Trigo 6 100 60

Avena 8 150 100

Centeno 10 120 80

Si el agricultor dispone de mano de obra capaz de proporcionar 5000 horas-hombre en el periodo de cultivo, y de 60000 euros. para gastos de cultivo, se pide que:

a) Encuentres las superficies de cultivo que maximicen los beneficios del agricultor.

b) Plantees el problema dual del anterior.

c) Si el agricultor pudiese contratar 500 horas-hombre de trabajo adicional por 1500 euros, ¿le interesaría hacerlo?

d) La superficie cultivada mínima de trigo para percibir subvenciones es de 100 Ha. Si se perciben subvenciones el beneficio por hectárea para el trigo es de 60 euros, pero si no se perciben dicho beneficio baja a 45 euros por hectárea. Estudia la solución ´optima del problema bajo estas condiciones.

e) ¿Como cambia la solución si se reducen (contratando una cosechadora mejor) las horas-hombre necesarias para cultivar una hectárea de centeno a 7?

3. Para el problema lineal

Max $x1 + 2x2 + 2x3$

s.a $x1 + x2 + 2x3 \geq 1$

$x1 - x2 + x3 \leq -2$

$x \geq 0$,

se pide que:

1

a) Indiques la forma de su problema dual (en forma estándar).

b) Calcules la solución del problema primal a partir del vértice ¯x = 0 2 0

.

c) ¿Como es el problema dual (´optimo, no acotado, no factible)? ¿Por qué?

d) Si se añade una nueva variable (no negativa) al problema primal, x4, con coeficiente en la función objetivo −1, y coeficientes en las restricciones 1 y 2 respectivamente, ¿cómo son el problema primal y el problema dual resultantes?

4. Para el problema lineal siguiente:

Max $2x1 + 6x2 + 8x3$

s.a $x1 + x2 + x3 \leq 10$

$-2x1 + x2 \leq 2$

$x3 \leq 5$

$x1 - 2x2 \leq 1$

$x \geq 0$,

se pide que:

a) Encuentres el problema dual y lo formules en forma estándar.

b) Encuentres los valores ´óptimos de las variables de los problemas primal y dual, sabiendo que en la solución del problema primal las restricciones primeras, segunda y

tercera están activas.

c) Si en el problema original se eliminan la primera y cuarta restricciones justifica que

el nuevo problema es no acotado.

5. Calcula la soluci´on del siguiente problema lineal:

$\min 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5$

s.a $-2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -3$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 6$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8$

$x \geq 0$,

partiendo del v´ertice en el que son b´asicas las variables x_1, x_2 y x_4.

Encuentra la nueva soluci´on si al problema anterior se le a˜nade la restricci´on

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$.

Si ahora añadimos una segunda restricción al problema inicial,

$-3x_2 + x_3 \geq 4/3$,

¿cuál es la nueva solución?

2.2..- Teoremas fundamentales

1- ¿Qué es un Teorema?

Un teorema, es toda proposición que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una verdad (tesis) no evidente por sí misma, por lo tanto, **deben ser demostradas**.

El enunciado de un teorema consta de dos partes:

- **Hipótesis,** que contiene los datos.

- **Tesis**, que es la verdad que se quiere demostrar.

El razonamiento o deducción lógica que se hace para concluir la tesis utilizando la hipótesis se llama ***demostración***.

Existen también los **lemas**, que son teoremas de menor importancia, cuyo único objetivo es facilitar la demostración de otro teorema más importante.

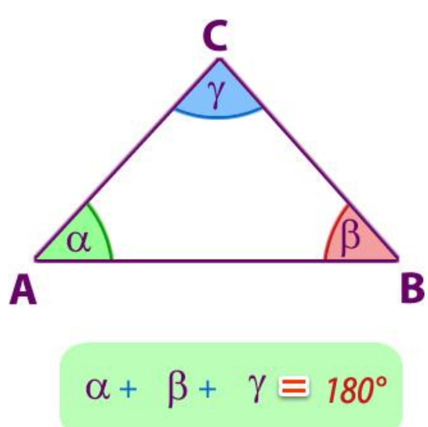
Se llama **corolario** a toda consecuencia directa de un teorema que se deduce por un razonamiento simple.

Un **teorema** se llama **recíproco** de otro cuando la tesis del primero pasa a ser la hipótesis del segundo y la hipótesis del primero se convierte en la tesis del segundo.

2- Teoremas fundamentales sobre triángulos

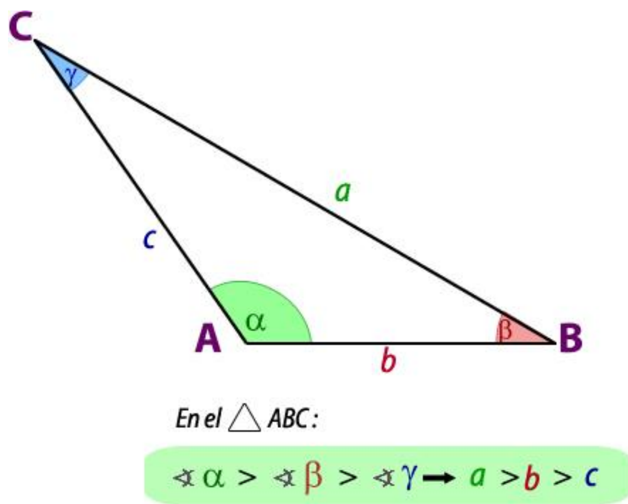
1- Teorema de la suma de los ángulos interiores

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°



2- Teorema del lado mayor (propiedad de correspondencia)

En un triángulo, al lado de mayor longitud se le opone el ángulo de mayor medida y viceversa.



2.3.- Funciones booleanas

Al formular expresiones matemáticas para circuitos lógicos es importante tener conocimiento del álgebra booleana, que define las reglas para expresar y simplificar enunciados lógicos binarios. Una barra sobre un símbolo indica la operación booleana NOT, que corresponde a la inversión de una señal.

Leyes fundamentales

ORA + 0A + 1A + AA + A====A1A1 ANDA • 0A • 1A • AA • A====0AA0 NOTA=A

Leyes conmutativas

$A + B = B + A$

$A \cdot B = B \cdot A$

Leyes asociativas

$(A + B) + C = A + (B + C)$

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Leyes distributivas

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Otras identidades útiles

$A + (A \cdot B) = A$

$A \cdot (A + B) = A$

$A + (A \cdot B) = A + B$

$(A + B) \cdot (A + B) = A$

$(A + B) \cdot (A + C) = A + (B \cdot C)$

$A + B + (A \cdot B) = A + B$

$(A \cdot B) + (B \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + C$

$(A \cdot B) + (A \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (B \cdot C)$

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

Al usar los teoremas y leyes booleanas, podemos simplificar las expresiones booleanas, mediante las cuales podemos reducir el número requerido de compuertas lógicas a implementar. Podemos simplificar la función Boolean utilizando dos métodos:

1. El método algebraico: mediante el uso de identidades (leyes booleanas).
2. El método gráfico: utilizando el método del Mapa de Karnaugh.

Ejemplo

Se va a simplificar la siguiente expresión aplicando las leyes e identidades booleanas mencionadas:

$E = (X \cdot Y \cdot Z) + (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Es posible aplicar la ley asociativa y la ley fundamental de que $A \cdot 1 = A$:

$E = X \cdot (Y \cdot Z) + I \cdot (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Ahora es posible factorizar el termino (Y · Z):

$E = (X + I) \cdot (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Dado que A + 1 = 1 según las leyes fundamentales por lo tanto X + 1 = 1:

$E = I \cdot (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Al realizar la operación tendremos ya simplificada la expresión:

$E = (Y \cdot Z) + (X \cdot Y)$

Aún podemos simplificar la expresión al factorizar Y:

$E = Y \cdot (Z + X)$

Modos de representación

Existen distintas formas de representar una función lógica, entre las que podemos destacar las siguientes:

- Algebraica
- Por tabla de verdad
- Numérica
- Gráfica

El uso de una u otra, como veremos, dependerá de las necesidades concretas en cada caso.

Algebraica

Se utiliza cuando se realizan operaciones algebraicas. A continuación se ofrece un ejemplo con distintas formas en las que se puede expresar algebraicamente una misma función de tres variables.

1. F = [(A + BC')' + ABC]' + AB'C
2. F = A'BC' + AB'C' + AB'C + ABC'
3. F = (A + B + C)(A + B + C')(A + B' + C')(A' + B' + C')
4. F = BC' + AB'
5. F = (A + B)(B' + C')
6. F = [(BC')'(CB)´ (AB')']'
7. F = [(A + B)' + (B' + C')']'

La expresión 1) puede proceder de un problema lógico planteado o del paso de unas especificaciones a lenguaje algebraico. Las formas 2) y 3) reciben el nombre expresiones canónicas: de suma de productos (*sum-of-products*, SOP, en inglés), la 2), y de productos de sumas (*product-of-sums*, POS, en inglés), la 3); su característica principal es la aparición de cada una de las variables (A, B y C) en cada uno de los sumandos o productos.

Por tabla de verdad

Una tabla de verdad contiene todos los valores posibles de una función lógica dependiendo del valor de sus variables. El número de combinaciones posibles para una función de n variables vendrá dado por 2^n. Una función lógica puede representarse algebraicamente de distintas formas como acabamos de ver, pero solo tiene una tabla de verdad. La siguiente tabla corresponde a la función lógica del punto anterior.

La forma más cómoda para ver la equivalencia entre una tabla de verdad y una expresión algebraica es cuando esta última se da en su forma canónica. Así, la función canónica de suma de productos (o forma canónica disyuntiva)

$$F = A'BC' + AB'C' + AB'C + ABC'$$

nos indica que será 1 cuando lo sea uno de sus sumandos, lo que significa que tendrá por lo tanto cuatro combinaciones que lo serán (010 para A'BC', 100 para AB'C', 101 para AB'C y 110 para ABC') siendo el resto de combinaciones 0. Con la función canónica de producto de sumas (o forma canónica conjuntiva) se puede razonar de forma análoga, pero en este caso observando que la función será 0 cuando lo sea uno de sus productos.

También es fácil obtener la tabla de verdad a partir de la función simplificada, pero no así a la inversa.

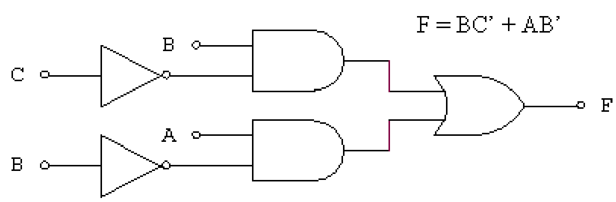
Numérica

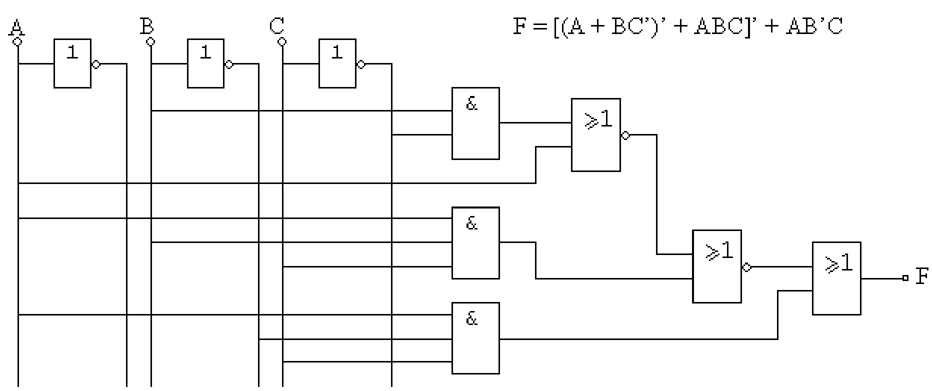
La representación numérica es una forma simplificada de representar las expresiones canónicas. Si consideramos el criterio de sustituir una variable sin negar por un 1 y una negada por un 0, podremos representar el término, ya sea una suma o un producto, por un número decimal equivalente al valor binario de la combinación. Por ejemplo, los siguientes términos canónicos se representarán del siguiente modo (observe que se toma el orden de A a D como de mayor a menor peso):

Para representar una función canónica en suma de productos utilizaremos el símbolo (sigma) y en producto de sumas (pi), donde n indicará el número de variables. Así, la representación numérica correspondiente a la tabla de verdad del punto anterior quedará como: Matemáticamente se demuestra, que para todo término i de una función, se cumple la siguiente ecuación: A modo de ejemplo se puede utilizar esta igualdad para obtener el producto de sumas a partir de la suma de productos del ejemplo anterior:

Gráfica

La representación gráfica es la que se utiliza en circuitos y esquemas electrónicos. En la siguiente figura se representan gráficamente dos funciones algebraicas, una con símbolos no normalizados, superior, y la otra con normalizados, inferior (véanse los símbolos de las puertas lógicas)





Métodos de simplificación[editar]

Por simplificación de una función lógica se entiende la obtención de su mínima expresión. A la hora de implementar físicamente una función lógica se suele simplificar para reducir así la complejidad del circuito.

A continuación, se indican los modos más usuales de simplificar una función lógica.

Algebraico

Artículo principal:

Para la simplificación por este método no sólo bastará con conocer todas las propiedades y teoremas del álgebra de Boole, además se debe desarrollar una cierta habilidad lógico-matemática que se adquiere fundamentalmente con la experiencia.

Como ejemplo se simplificará la siguiente función:

$F = A'C' + ABC + BC' + A'B'C + A'BC$

Observando cada uno de los sumando podemos ver que hay factores comunes en los sumandos 2° con 5° y 4° con 5° que conllevan simplificación:

$F = A'C' + BC' + BC(A + A') + A'C(B + B')$

Note que el término 5° se ha tomado dos veces, de acuerdo con la propiedad que dice que A + A = A. Aplicando las propiedades del álgebra de Boole (A + A' = 1 y A . 1 = A), queda

$F = A'C' + BC' + BC + A'C$

Repitiendo nuevamente el proceso,

$F = A'(C' + C) + B(C' + C) = A' + B$

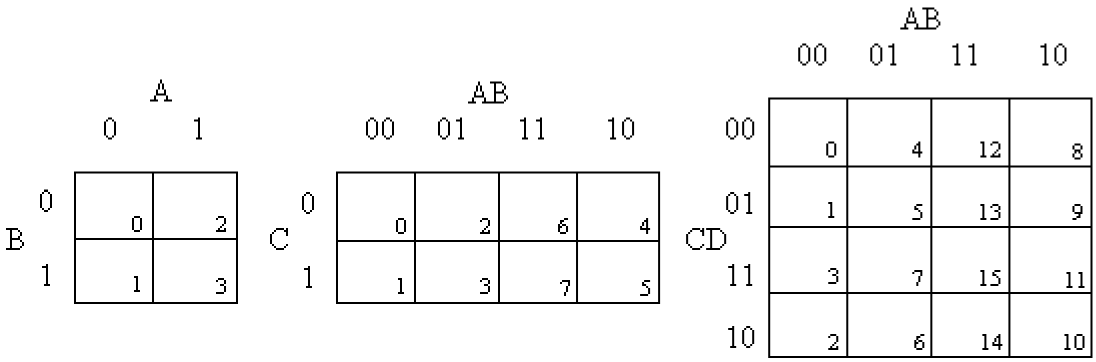
No siempre las funciones son tan fáciles de simplificar como la anterior. El método algebraico, por lo general, no resulta cómodo para los no expertos, a los cuales, una vez simplificada una ecuación le pueden quedar serias dudas de haber conseguido la máxima simplificación.

Mapa de Karnaugh[editar]

Artículo principal: Mapa de Karnaugh

Este método consiste en formar diagramas de 2^n cuadros, siendo n el número de variables. Cada cuadro representa una de las diferentes combinaciones posibles y se disponen de tal forma que se puede pasar de un cuadro a otro en las direcciones horizontal o vertical, cambiando únicamente una variable, ya sea en forma negada o directa.

Este método se emplea fundamentalmente para simplificar funciones de hasta cuatro variables. Para



un número superior utilizan otros métodos como el numérico. A continuación pueden observarse los diagramas, también llamados mapas de Karnaugh, para dos, tres y cuatro variables.

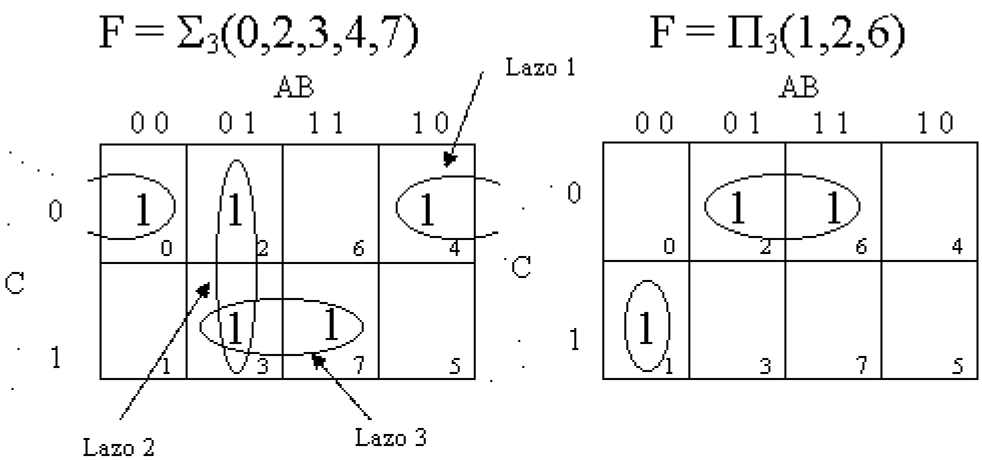
Es una práctica común numerar cada celda con el número decimal correspondiente al término canónico que albergue, para facilitar el trabajo a la hora de plasmar una función canónica.

Para simplificar una función lógica por el método de Karna3ugh se seguirán los siguientes pasos:

1. Se dibuja el diagrama correspondiente al número de variables de la función a simplificar.
2. Se coloca un 1 en los cuadros correspondientes a los términos canónicos que forman parte de la función.
3. Se agrupan mediante lazos los unos de casillas adyacentes siguiendo estrictamente las siguientes reglas:
1. Dos casillas son adyacentes cuando se diferencian únicamente en el estado de una sola variable.
2. Cada lazo debe contener el mayor número de unos posible, siempre que dicho número sea potencia de dos (1, 2, 4, etc.)
3. Los lazos pueden quedar superpuestos y no importa que haya cuadrículas que pertenezcan a dos o más lazos diferentes.
4. Se debe tratar de conseguir el menor número de lazos con el mayor número de unos posible.
4. La función simplificada tendrá tantos términos como lazos posea el diagrama. Cada término se obtiene eliminando la o las variables que cambien de estado en el mismo lazo.

A modo de ejemplo se realizan dos simplificaciones de una misma función a partir de sus dos formas canónicas:

De acuerdo con los pasos vistos anteriormente, el diagrama de cada función quedará del siguiente modo:



La función simplificada tendrá tres sumandos en un caso y dos productos en el otro. Si nos fijamos en el mapa correspondiente a la suma de productos, observamos que en el lazo 1 cambia la variable A (en la celda 0 es negada y en la 4 directa), en el lazo 2 es la C y en el lazo 3 vuelve a ser A. por lo tanto, la ecuación simplificada es:

2.4 .- Formas canónicas o normales

Consideremos la función lógica

$F = A \cdot B + C$

cuya tabla de verdad tenemos aquí.

A	B	C	F	n (ordinal)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	1	3
1	0	0	0	4
1	0	1	1	5
1	1	0	1	6
1	1	1	1	7

Vamos a ver que se puede escribir de dos formas diferentes, a las que vamos a llamar **primera** y **segunda formas canónicas**.

Para ello, primero vamos a definir dos conceptos:

- ***Minterm o minitérmino***: producto de n variables (n, en nuestro ejemplo, es 3), con sus valores negados o no. Por ejemplo un minterm es: $\bar{A} \cdot B \cdot C$.
- ***Maxterm o maxitérmino***: suma de n variables, con sus correspondientes valores, negados o no. Por ejemplo: $A + \bar{B} + \bar{C}$

Para una función booleana con n variables, hay 2^n minitérminos y 2^n maxitérminos.

Los minitérminos y maxitérminos acostumbran a etiquetarse según el valor decimal que representan las combinaciones de sus variables (el ordinal que se ha indicado en la tabla).

Así, el término 011 se etiquetaría como {3} (porque es el que tiene el ordinal "3"; observa la última columna de la tabla).

Si es un minitérmino se escribiría m3, y si es un maxitérmino se escribiría M3.

PRIMERA FORMA CANÓNICA:

se obtiene haciendo la suma de todos los minitérminos cuyo valor es 1. En nuestro caso, la expresión en primera forma canónica de nuestra función sería:

que también puede escribirse así de fácil:

$$F = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

F = m(2,3,5,6,7)

leyéndose esto como que "*F es igual a la suma de los minitérminos 2, 3, 5, 6 y 7*". Fácil, ¿no?

SEGUNDA FORMA CANÓNICA:

se obtiene haciendo el producto de todos los maxitérminos cuyo valor es cero. En nuestro caso, la expresión de la función F como segunda forma canónica sería:

$$F = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C})$$

que también puede escribirse de esta otra forma:

F = M(0,1,4)

leyéndose esto como que "*F es igual al producto de los maxitérminos 0,1 y 4*".

Ambas expresiones representan a la misma función. Simplemente cambia el modo en que se representan, y siempre nos da una idea de la complementariedad que hay en el álgebra de Boole entre una variable o función y su negación (recuerda las dos leyes de De Morgan).

Una muestra de esta complementariedad es, precisamente, que los minitérminos que faltan en la primera forma canónica son los maxitérminos que aparecen en la segunda.

2.5.- Cambio de forma de una función booleana.

Los lógicos combinacionales se resuelven partiendo de la tabla de verdad al establecer esta todas las combinaciones posibles de entrada y salida. Tomando la tabla de verdad, podemos establecer una función lógica de dos formas posibles:

(1) Primera forma canónica o forma canónica disyuntiva (suma de productos o minterms).

(2) Segunda forma canónica o forma canónica conjuntiva (producto de sumas o maxterms).

En la primera forma canónica, SoP (Sum of Products) se obtiene sumando todos los minitérminos que dan salida 1. En un minitérmino se asigna 0 la variable inversa y se asigna 1 la variable directa (Teorema de Shannon).

$S = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i cuandoF(i) = 1$	$S = \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i cuandoF(i) = 0$
Primera forma canónica	Segunda forma canónica

La segunda forma canónica, PoS (Products of Sums), se obtiene de forma dual a la anterior: multiplicando los maxitérminos cuya columna resultado sea 0. El maxitérmino es el dual del minitérmino.

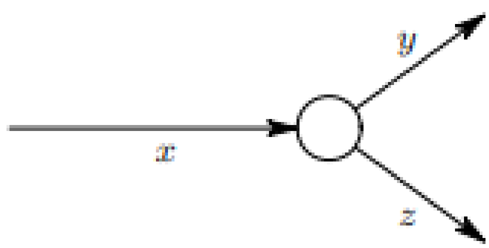
Mirando el siguiente ejemplo:

	A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Primera forma canónica
$S=m0+m3+m5+m7$ $S=(\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C})+(\bar{A}\cdot B\cdot C)+(A\cdot\bar{B}\cdot C)+(A\cdot B\cdot C)$
Segunda forma canónica
$S=M1\cdot M2\cdot M4\cdot M6$ $S=(A+B+C)\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot(\bar{A}+B+C)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)$

2.6.- Algebra de redes eléctricas.

El ejemplo más intuitivo y sencillo es el de redes de carreteras, donde el flujo se refiere a la cantidad de vehículos que circulan por la vía. En el caso de redes que representan flujos supondremos en esta sección que *la cantidad que llega a un nodo es igual a la que sale:*



$$x = y + z$$

Figura 1.2: Flujo que entra al nodo es igual al que sale.

.

Ejemplo 1.17 La siguiente red representa el flujo vehicular por un sector de la ciudad donde, los nodos son las intersecciones y los arcos, las carreteras. Las flechas indican el sentido del movimiento de los vehículos.

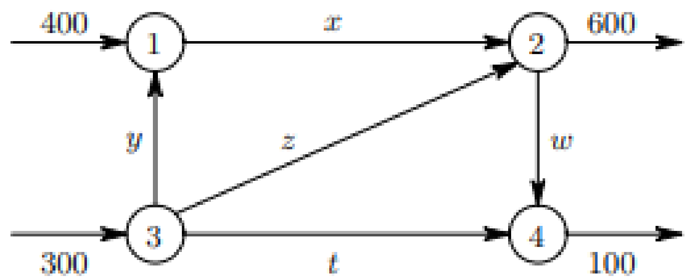


Figura 1.3: Flujo vehicular por un sector de la ciudad.

Las cantidades de vehículos que circulan por la red entre dos nodos consecutivos se indican con las letras x, y, z, w y t las cuales son las variables del problema. En tales condiciones:

i) Formule un sistema de ecuaciones lineales cuya solución aporte todas las opciones posibles de flujo vehicular.

ii) Si el flujo vehicular entre el nodo 1 y 2 es 550 y entre el nodo 2 y 4 es 50, entonces calcule los otros flujos.

i) De acuerdo con la red el sistema es :

$$\begin{cases} x - y & = 400 \quad \text{nodo } 1 \\ x + z - w & = 600 \quad \text{nodo } 2 \\ + y + z + t & = 300 \quad \text{nodo } 3 \\ + w + t & = 100 \quad \text{nodo } 4 \end{cases}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & : & 400 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & : & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & : & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & : & 100 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones elementales sobre esta matriz se obtiene la solución: $S = \{(700 - z - t, 300 - z - t, z, 100 - t, t) \,|\, z, w \in I\!R\}$.

ii) Como $x = 550$ entonces $y = 150$. Además $w = 100 - t = 50$ entonces $t = 50$. Por otra parte $y = 300 - z - t = 300 - z - 50 = 150$ por lo que $z = 100$.

UNIDAD III

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE CUACIONES LINEALES

3.1.- DEFINICON DE UNA MATRIZ

Una matriz es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados elementos) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con *m* filas y *n* columnas se le denomina matriz *m*-por-*n* (escrito $m \times n$). Las dimensiones de una matriz siempre se dan con el número de filas primero y el número de columnas después.

Comúnmente se dice que una matriz *m*-por-*n* tiene un orden de $m \times n$ ("orden" tiene el significado de tamaño). Dos matrices se dice que son iguales si son del mismo orden y tienen los mismos elementos.

Ejemplo:

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

que es una matriz 4x3. El elemento A[2,3] es el 7

La matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

es una matriz 1×9, o un vector fila con 9 elementos.

1.7.2 Redes eléctricas

Considérese un modelo simple de circuito eléctrico que consta solo de resistencias (bombillas eléctricas, electrodomésticos, ...) y fuerza electromotriz o baterías. A través de la red (o circuito) fluye la corriente eléctrica en el sentido que indican las flechas. Los nodos representan puntos de la red donde se redirecciona y distribuye la corriente. Los generadores se simbolizan con dos rayas verticales una más corta que la otra. La corriente entra por

la raya corta y sale por la raya larga. El otro símbolo que aparece en la Figura 1.4 es el de las resistencias.

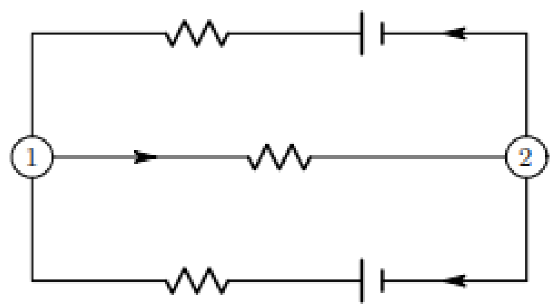


Figura 1.4: Red eléctrica con dos nodos, tres resistencias y dos generadores.

La fuerza electromotriz se mide en voltios, la corriente en amperios y la resistencia en ohmios. El movimiento de la corriente en el circuito se rige por las conocidas leyes de Kirchhoff, a saber: a) La corriente que fluye hacia un nodo es igual a la que sale. b) En una trayectoria cerrada la fuerza electromotriz es igual a la suma de las ca´ıdas de voltaje. Una trayectoria cerrada es una parte de la red donde la corriente sale de un nodo y regresa a ´el. En la figura anterior se tienen dos trayectorias cerradas. una sale del nodo 1 y la otra del nodo 2. La ca´ıda de voltaje E a trav´es de una resistencia es el producto RI donde I es la corriente y R es la resistencia. Es decir E = RI

Ejemplo 1.18 Considere la red siguiente y determine las corrientes I_1, I_2 e I_3

36 *Sistemas de ecuaciones lineales*

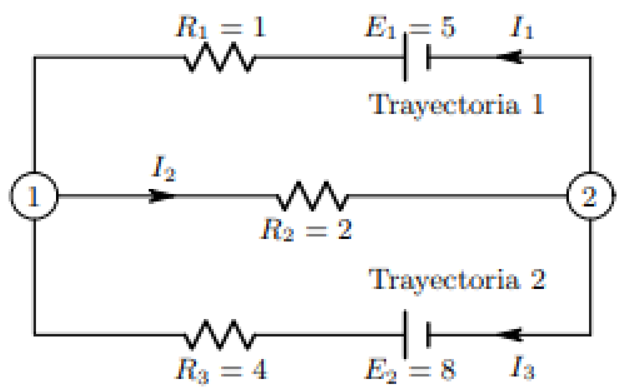


Figura 1.5: Red eléctrica con dos trayectorias.

Solución: A partir de la Figura 1.5, vemos que el sistema de ecuaciones es:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 & \text{Nodo 1 o 2} \\ I_1 & +2I_2 & & = & 5 & \text{Trayectoria 1} \\ & +2I_2 & +4I_3 & = & 8 & \text{Trayectoria 2} \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución: $I_1 = 1$ amperio, $I_2 = 2$ amperios e $I_3 = 1$ amperio.

3.2.- Tipos de matrices: cuadradas, filas, columna, diagonal, escalar, triangular, unitaria, transpuesta, simétrica y asimétrica.

MATRIZ FILA

Una **matriz fila** está constituida por una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA

La **matriz columna** tiene una sola columna

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ RECTANGULAR

La **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su **dimensión mxn**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ CUADRADA

La **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas.
Los elementos de la forma a_{ii} constituyen la **diagonal principal**.
La **diagonal secundaria** la forman los elementos con **i+j = n+1**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

Una **matriz escalar** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD

Una **matriz identidad** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA

Dada una matriz A, se llama **matriz traspuesta** de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{(A^t)^t = A}$
$\mathbf{(A + B)^t = A^t + B^t}$
$\mathbf{(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t}$
$\mathbf{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

MATRIZ REGULAR

Una **matriz regular** es una matriz cuadrada que tiene inversa.

MATRICES NORMALES

Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si AAT = ATA. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que AAT = ATA, la matriz es normal

MATRICES NORMALES

Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si AAT = ATA. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que AAT = ATA, la matriz es normal

MATRICES ESCALONADA

Una matriz es escalonada si al principio de cada fila (o columna) un elemento nulo mas que en la fila (o columna) anterior

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por filas

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por columnas

MATRICES ESCALARES

Una matriz es escalar si es diagonal y además todos los elementos de la diagonal son iguales

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ es una matriz escalar

MATRIZ NULA

En una **matriz nula** todos los elementos son ceros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

En una **matriz triangular superior** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

En una **matriz triangular inferior** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

En una **matriz diagonal** todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ SINGULAR

Una **matriz singular** no tiene matriz inversa.

MATRIZ IDEMPOTENTE

Una matriz, A, es idempotente si:

$\mathbf{A^2 = A}$.

MATRIZ INVOLUTIVA

Una matriz, A, es involutiva si:

$\mathbf{A^2 = I}$.

MATRIZ SIMÉTRICA

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = A^t}$.

MATRIZ ANTISIMÉTRICA O HEMISIMÉTRICA

Una **matriz antisimétrica o hemisimétrica** es una matriz cuadrada que verifica:

$\mathbf{A = -A^t}$.

MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz es ortogonal si verifica que:

$\mathbf{A \cdot A^t = I}$.

3.3.- Operaciones matrices.

SUMA:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\1 & 0 & 0\\1 & 2 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\7 & 5 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+1 & 3+0 & 2+5\\1+7 & 0+5 & 0+0\\1+2 & 2+1 & 2+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\8 & 5 & 0\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

Propiedades

-Asociativa

Dadas las matrices m×n A, B y C
(A + B) + C = A + (B + C)

-Conmutativa

Dadas las matrices m×n A y B
A + B = B + A

-Existencia de matriz cero o matriz nula
A + 0 = 0 + A = A

PRODUCTO POR UN ESCALAR:

Dada una matriz A y un escalar c, su producto cA se calcula multiplicando el escalar por cada elemento de A

$$2\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\4 & -2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3\\2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\8 & -4 & 12\end{bmatrix}$$

Propiedades

Sean A y B matrices y c y d escalares.

-Clausura: Si A es matriz y c es escalar, entonces cA es matriz.

-Asociatividad: (cd)A = c(dA)

-Elemento Neutro: 1 ·A = A

-Distributividad:

-De escalar: c(A+B) = cA+cB

-De matriz: (c+d)A = cA+dA

PRODUCTO DE DOS MATRICES:

El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si *A* es una matriz *m*×*n* y *B* es una matriz *n*×*p*, entonces su producto matricial *AB* es la matriz *m*×*p* (*m* filas, *p*columnas).

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Si los elementos de la matriz pertenecen a un cuerpo, y puede definirse el producto, el producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

-Propiedad asociativa: (AB)C = A(BC).

-Propiedad distributiva por la derecha: (A + B)C = AC + BC.

-Propiedad distributiva por la izquierda: C(A + B) = CA + CB.

-En general, el producto de matrices tiene divisores de cero: Si A.B = 0 , No necesariamente A ó B son matrices nulas

-El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación: Si A.B = A.C, No necesariamente B=C.

-El producto de dos matrices generalmente no es conmutativo, es decir, AB ≠ BA. La división entre matrices, es decir, la operación que podría producir el cociente A / B, no se encuentra definida. Sin embargo, existe el concepto de matriz inversa, sólo aplicable a las matrices invertibles.

Si **A** es una matriz *m x r* y **B** es una matriz *r x n*, entonces el producto **AB** es la matriz *m x n* cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en el renglón "i" y en la columna "j" de **AB**, considerar solo el renglón "i" de la matriz **A** y la columna "j" de la matriz **B**. Multiplicar entre si los elementos correspondientes del renglón y de la columna mencionados y luego sumar los productos restantes.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Como **A** es una matriz 2 x 3 y **B** es una matriz 3 x 4, el producto AB es una matriz 2 x 4. Para determinar, por ejemplo, el elemento en el renglón 2 y en la columna 3 de **AB**, solo se consideran el renglón 2 de **A** y la columna 3 de **B**. Luego, como se ilustra a continuación, los elementos correspondientes (en tipo negro) se multiplican entre si y se suman los productos obtenidos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & \mathbf{4} & 3 \\ 0 & -1 & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & 7 & \mathbf{5} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

(2*4) + (6*3) + (0*5) = 26

y así obtenemos el siguiente resultado:

(1*4) + (2*0) + (4*2) = 12
(1*1) + (2*1) + (4*7) = 27
(1*4) + (2*3) + (4*5) = 30
(1*3) + (2*1) + (4*2) = 13
(2*4) + (6*0) + (0*2) = 8
(2*1) + (6*1) + (0*7) = -4
(2*3) + (6*1) + (0*2) = 12

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

3.4.- Definición de determinante

El determinante de una matriz cuadrada es un número real cuya definición exacta es bastante complicada. Por ello, definiremos primero el determinante de matrices pequeñas, y estudiaremos métodos y técnicas para calcular determinantes en general. Solamente se puede calcular el determinante a matrices cuadradas.

En cuanto a la notación, a veces el determinante se escribe con la palabra det, y otras veces se indica sustituyendo los paréntesis de la matriz por barras verticales.

El determinante de una matriz determina si los sistemas son singulares o mal condicionados. En otras palabras, sirve para determinar la existencia y la unicidad de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales.

• El determinante de una matriz es un número.
• Un determinante con valor de cero indica que se tiene un sistema singular.
• Un determinante con valor cercano a cero indica que se tiene un sistema mal condicionado.

Un sistema singular es cuando en el sistema de ecuaciones se tiene a más de una ecuación con el mismo valor de la pendiente. Por ejemplo ecuaciones que representan líneas paralelas o ecuaciones que coinciden en los mismos puntos de traficación.

3.5.- Calculo de determinantes por menores y cofactores

Ejemplo 1.

Obtener los menores M_{13} y M_{21} del determinante D de 3×3.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para M_{13} eliminamos el renglón 1 y la columna 3 para obtener

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

De la misma forma, se elimina el renglón 2 y la columna 1 para tener

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Se llama cofactor del elemento a_{ik} del determinante D, al menor M_{ik} con el signo $(-1)^{i+k}$ y se denota A_{ik}, esto es

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \qquad (1)$$

Ejemplo 2.

Obtenga los cofactores A_{13} y A_{21} del determinante D dado:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la fórmula (1) el cofactor A_{13} está dado por

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = (4)(-3) - (6)(5) = -42$$

Y de la misma forma

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(-1)(7) - (-3)(3)\right] = -2$$

Expansión por cofactores de un determinante.

Se puede probar el siguiente

Teorema
Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de un renglón (o columna) cualquiera por sus cofactores correspondientes.

Esto es

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (2)$$

es el desarrollo del determinante D por el renglón i, y similarmente

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \qquad (3)$$

es el desarrollo del determinante D por la columna k.

Las expresiones (2) y (3) son fórmulas completamente generales, cualquier determinante de cualquier dimensión se puede evaluar usando estas fórmulas.

Ejemplo 3.

Desarrollar por cofactores del segundo renglón y calcular el valor del determinante D.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Para expandir D, por cofactores del segundo renglón, calculamos primero los cofactores A_{21}, A_{22} y A_{23} de los elementos del segundo renglón.

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = (4)(-2) + (5)(-4) + (2)(0) = -28$$

Ejemplo 4.

Desarrollar por cofactores de la primera columna y calcular el valor del determinante D del ejemplo 3 para verificar que obtenemos el mismo valor.

Para expandir por cofactores de la primera columna, primero evaluamos los cofactores A_{11}, A_{21}, A_{31} de los elementos de la primera columna:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 41 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Entonces

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = (2)(41) + (4)(-2) + (6)(-17) = -28$$

Ejemplo 5.

Considere la matriz A y calcule su determinante $\det A$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para evaluar el determinante de *A* usamos la fórmula (2) que permite desarrollar un determinante por cofactores de una columna. Observe que la primera columna de *A* consta de tres ceros y un 2. Desarrollando por la columna (1) se tiene

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}=$$

$$=(2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aún falta evaluar el determinante de 3x3, que desarrollamos por cofactores de la columna 3 porque dos de sus elementos son ceros, entonces

$$\det A=(2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(2)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=(-12)(1+12)=-156$$

Ejemplo 6.

El determinante de una matriz triangular.
Considere la matriz *B* triangular, calcule det *B*

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces, desarrollando por cofactores de la primera columna, y desarrollando los menores correspondientes de la misma forma, se tiene

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(2)(1)(5) = 30$$

Así que, el determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos en la diagonal principal.

3.6.- Propiedades de los determinantes

1 El determinante de una matriz A y el de su traspuesta A^t son iguales.

$$|A^t| = |A|$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad A^t = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = |A^t| = -2$$

2 $|A| = 0$ Si:

Posee dos filas (o columnas) iguales.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los elementos de una fila (o una columna) son nulos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los elementos de una fila (o una columna) son combinación lineal de las otras.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$F_3 = F_1 + F_2$$

3 Un determinante triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

4 Si en un determinante se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), su valor sólo cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2$$

5 Si a los elementos de una fila (o una columna) se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Es decir, si una fila (o una columna) la transformamos en una combinación lineal de las demás, el valor del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16 \qquad C_3 = 2C_1 + C_2 + C_3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 16$$

6 Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila (o cualquier columna), pero sólo una.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 1 & 2 \\ 1 \cdot 2 & 2 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

7 Si todos los elementos de una fila (o columna) están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes en los que las demás filas (o columnas) permanecen invariantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a+b & a+c & a+d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & a & a \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ b & c & d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

8 $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

Introducción

Sea una matriz de dimensión y **regular** (su determinante es distinto de 0). Entonces, existe una matriz que llamamos **inversa de A** y representamos por que cumple:

- , siendo la matriz identidad de dimensión
- la matriz inversa es única. Es decir, sólo hay una matriz que cumple el punto anterior.

Existen varios métodos para obtener la matriz inversa. Nosotros vamos a calcular la inversa mediante donde representa la matriz **adjunta** de ; el operador ^T (elevado a T) representa la operación **transposición** (matriz transpuesta); y representa el determinante de . Vamos a ver cómo calcular estos elementos que aparecen en la fórmula.

Transposición

Para cualquier matriz de dimensión . llamamos **matriz transpuesta** de y la denotamos por a la matriz que resulta al escribir las columnas de como filas de . Es decir, la fila *i* de es la columna *i* de . Al cambiar filas por columnas, la dimensión de es . **Ejemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta

Para cualquier matriz , llamamos **matriz adjunta** de y la denotamos por a la matriz cuyo elemento de la fila y la columna es donde la matriz es la matriz que se obtiene al eliminar la fila *i* y la columna *j* de la matriz .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo $$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos de matriz inversa

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Calculamos los elementos de la adjunta de A:

$$ad_{1,1} = (-1)^2 \det(-1) = -1$$
$$ad_{1,2} = (-1)^3 \det(2) = -2$$
$$ad_{2,1} = (-1)^3 \det(2) = -2$$
$$ad_{2,2} = (-1)^4 \det(1) = 1$$

La matriz adjunta es $Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Notemos que no es necesario escribir su transpuesta ya que coinciden. El determinante de A es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 =$$
$$= -1 - 4 =$$
$$= -5$$

Por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-5} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos los elementos de la adjunta:

$$ad_{1,1} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6$$
$$ad_{1,2} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$$
$$ad_{1,3} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$ad_{2,1} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 36$$
$$ad_{2,2} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -12$$
$$ad_{2,3} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$ad_{3,1} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -20$$
$$ad_{3,2} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$$
$$ad_{3,3} = (-1)^6 \det\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

La adjunta es: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 36 & -12 & 0 \\ -20 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ El

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -12 + 0 + 0$$
$$- 0 - 0 - 0 =$$

determinante de A es $= -12$ Por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^T}{\det(A)} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 6 & 36 & -20 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-12} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

IV UNIDAD

ESPACIOS VETORIALES

4.1.- Definición de espacio vectorial

Del latín spatium, el espacio puede ser la extensión que contiene la materia existente, la capacidad de un lugar o la parte que ocupa un objeto sensible.

Espacio vectorial

Vectorial, por su parte, es lo perteneciente o relativo a los vectores. Este término, de origen latino, refiere al agente que transporta algo de un lugar a otro o a aquello que permite representar una magnitud física y que se define por un módulo y una dirección u orientación.

La noción de espacio vectorial se utiliza para nombrar a la estructura matemática que se crea a partir de un conjunto no vacío y que cumple con diversos requisitos y propiedades iniciales. Esta estructura surge mediante una operación de suma (interna al conjunto) y una operación de producto entre dicho conjunto y un cuerpo.

Es importante tener en cuenta que todo espacio vectorial dispone de una base y que todas las bases de un espacio vectorial, a su vez, presentan la misma cardinalidad.

Datos históricos y aplicaciones

Espacio vectorialFue a partir del siglo XVII que los estudiosos comenzaron a caminar hacia la concepción de los espacios vectoriales, con temas tales como las matrices, los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría analítica. Este concepto deriva de la geometría afín (estudio de las propiedades de la geometría que no varían con transformaciones afines, tales como las traslaciones o las lineales no singulares), al introducir coordenadas en el espacio tridimensional o el plano.

Cerca del año 1636, Descartes y Fermat (célebres científicos originarios de Francia) establecieron los fundamentos de la geometría analítica, tomando una ecuación con dos variables y vinculando sus soluciones con la determinación de una curva plana. Para conseguir una solución dentro de los límites de la geometría sin necesidad de recurrir a las coordenadas, el matemático checo Bernard Bolzano presentó un siglo y medio más tarde algunas operaciones sobre planos, líneas y puntos que pueden considerarse antecesores de los vectores.

Sin embargo, recién a finales del siglo XIX, Giuseppe Peano, conocido matemático italiano, realizó la primera formulación moderna y axiomática de los espacios vectoriales. Seguidamente, esta teoría se enriqueció de la rama de las matemáticas conocida con el nombre de análisis funcional, más precisamente de los espacios de funciones. Para poder resolver los problemas de análisis funcional que presentaban el fenómeno conocido como límite de una sucesión o convergencia, se asignó a los espacios vectoriales una topología apropiada, para que fuese posible considerar la continuidad y la proximidad.

Cabe mencionar que los vectores como concepto propiamente dicho nacen con el bipoint de Giusto Bellavitis, un segmento orientado que posee un extremo llamado origen y otro, objetivo. Más tarde, fue tomado en cuenta cuando Argand y Hamilton presentaron los números complejos y este último creó los cuaterniones, además de ser quien concibió la denominación de vector. Laguerre, por su parte, fue responsable de la definición de los sistemas de ecuaciones lineales y de la combinación lineal de vectores.

También en la segunda mitad del siglo XIX, un matemático británico llamado Arthur Cayley presentó la notación matricial, gracias a la cual es posible armonizar y simplificar las aplicaciones lineales. Casi cien años más tarde, se produjo una interacción entre el análisis funcional y el álgebra, principalmente con conceptos tan importantes como los espacios de Hilbert y los de funciones p-integrables.

Entre las aplicaciones de los espacios vectoriales se encuentran ciertas funciones de compresión de sonido e imágenes, que se basan en las series de Fourier y otros métodos, y la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (relacionar una función matemática con diversas variables independientes y las derivadas parciales de la misma respecto de dichas variables). Por otro lado, sirven para el tratamiento de objetos físicos y geométricos, como ser los tensores.

4.2 .- Sub espacio vectorial

Definición de espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto no vacío VV de objetos, llamados **vectores**, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar (número real) sujetas a los diez axiomas que se dan a continuación. Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores uu, vv y ww en VV y todos los escalares $\alpha\alpha$ y $\beta\beta$ reales.
Llamamos $u+vu+v$ a la suma de vectores en VV, y $\alpha v\alpha v$ al producto de un número real $\alpha\alpha$ por un vector $v\in Vv\in V$.
1. $u+v\in Vu+v\in V$
2. $u+v=v+uu+v=v+u$
3. $(u+v)+w=u+(v+w)(u+v)+w=u+(v+w)$
4. Existe un vector nulo $0V\in V0V\in V$ tal que $v+0V=vv+0V=v$
5. Para cada vv en VV, existe un opuesto $(-v)\in V(-v)\in V$ tal que $v+(-v)=0Vv+(-v)=0V$
6. $\alpha v\in V\alpha v\in V$
7. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
8. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$
9. $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
10. $1v=v1v=v$

Observación: En la definición anterior, cuando decimos «escalares» nos estamos refiriendo a números reales. En este caso, se dice que VV es un **espacio vectorial real**.
También es posible que los escalares pertenezcan a otro conjunto numérico, por ejemplo los números complejos con los cuales trabajaremos en la última unidad.

Ejemplo 1

De acuerdo con las propiedades que vimos en la primera unidad, podemos afirmar que $R3R3$ es un espacio vectorial.

Los espacios $RnRn$, con $n\geq 1n\geq 1$, son los ejemplos principales de espacios vectoriales. La intuición geométrica desarrollada para $R3R3$ nos ayudará a entender y visualizar muchos conceptos de esta unidad.

Los vectores de $RnRn$ son n-uplas de números reales, o sea:
$Rn=\{(x1,x2,\ldots,xn),conxi\in R\}Rn=\{(x1,x2,\ldots,xn),conxi\in R\}$
En $RnRn$, la suma de vectores y el producto por un escalar se definen así:
Sean $u=(u1,u2,\ldots,un)yv=(v1,v2,\ldots vn)\in Rnu=(u1,u2,\ldots,un)yv=(v1,v2,\ldots vn)\in Rn$
$u+v=(u1+v1,u2+v2,\ldots,un+vn)\in Rnu+v=(u1+v1,u2+v2,\ldots,un+vn)\in Rn$
$\alpha v=(\alpha v1,\alpha v2,\ldots,\alpha vn)\in Rn\alpha v=(\alpha v1,\alpha v2,\ldots,\alpha vn)\in Rn$
Puede comprobarse que las operaciones definidas verifican los axiomas de espacio vectorial.

Ejemplo 2

De acuerdo con las propiedades enunciadas en la segunda unidad, para cada mm y nn $RmxnRmxn$ es un espacio vectorial.
Tenemos por ejemplo $R2\times 3R2\times 3$, espacio vectorial cuyos vectores son las matrices de $2\times 32\times 3$.
Ejemplo 3

Llamemos $P2P2$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2, incluyendo el polinomio nulo.
Recordemos la suma de polinomios y la multiplicación por un escalar:

Dados $p(x)=ao+a1x+a2x2\in P2p(x)=ao+a1x+a2x2\in P2$ y $q(x)=bo+b1x+b2x2\in P2q(x)=bo+b1x+b2x2\in P2$
Definimos las operaciones:

$(p+q)(x)=p(x)+q(x)=(ao+bo)+(a1+b1)x+(a2+b2)x2\in P2(p+q)(x)=p(x)+q(x)=(ao+bo)+(a1+b1)x+(a2+b2)x2\in P2$
$(\alpha p)(x)=\alpha p(x)=(\alpha ao)+(\alpha a1)x+(\alpha a2)x2\in P2(\alpha p)(x)=\alpha p(x)=(\alpha ao)+(\alpha a1)x+(\alpha a2)x2\in P2$
Puede demostrarse que estas operaciones verifican todos los axiomas de espacio vectorial.

En particular, el vector nulo en este espacio es el *polinomio nulo*, es decir el polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero.

Generalizando, para cualquier $n\geq 0n\geq 0$, el conjunto $PnPn$ de todos los polinomios de grado menor o igual que nn (incluyendo el polinomio nulo) es un espacio vectorial.
Observación:

¿Por qué no definimos PnPn como el conjunto de polinomios de grado exactamente igual a nn? Si lo definiéramos así, no sería un espacio vectorial como se muestra en el siguiente ejemplo: p(x)=x2p(x)=x2 y q(x)=–x2+1q(x)=–x2+1 son polinomios de grado 2, pero la suma es un polinomio de grado cero. Entonces no se verificaría el primer axioma de espacio vectorial (la suma de vectores de un espacio vectorial VV debe estar en VV).

4.3.- Condiciones de existencia.

Propiedades de los espacios vectoriales

A partir de los axiomas de espacios vectoriales, pueden demostrarse estas propiedades que resultan «naturales»:

Propiedad 1

0u=0V0u=0V

Propiedad 2

α0V=0Vα0V=0V

Propiedad 3

(–α)u=–(αu)(–α)u=–(αu)

En particular, para α=1α=1 :(–1)u=–u(–1)u=–u

Propiedad 4

αu=0V⇒α=0∨u=0Vαu=0V⇒α=0∨u=0V

Veamos cómo puede demostrarse esta última propiedad:

Si α=0α=0 , se cumple la proposición.

Si α≠0α≠0 , podemos multiplicar por 1α1α :

αu=0V⇒1ααu=1α0V⇒u=0Vαu=0V⇒1ααu=1α0V⇒u=0V

¡Demostrado!

Subespacios vectoriales

Definición

Sea VV un espacio vectorial y WW un subconjunto no vacío de VV.

WW es un ***subespacio*** de VV si WW es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones (suma de vectores y producto por un escalar) definidas en VV.

Ejemplo

W={(x1,x2)∈R2:x2=3x1}W={(x1,x2)∈R2:x2=3x1} ¿es un subespacio de R2R2?

Primero analicemos el conjunto WW. Son todos vectores de R2R2 tales que la segunda componente es el triple de la primera:

(x1,3x1)=x1(1,3)(x1,3x1)=x1(1,3)

WW es la recta que pasa por el origen y tiene vector director (1,3), o sea la recta de ecuación y = 3x.

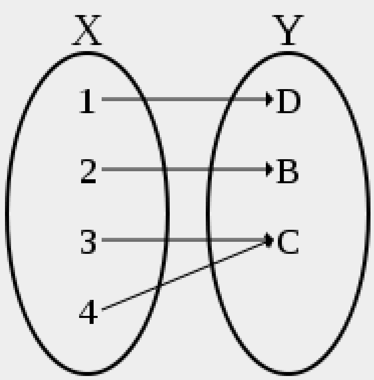
Para decidir si WW es un subespacio de R2R2 habría que verificar que se cumplen los axiomas del 1 al 10. El lector puede comprobar que todos se cumplen en este caso.
Pero en general no es necesario verificar los axiomas porque existe un criterio sencillo para determinar si un subconjunto WW de un espacio vectorial VV es un subespacio, es el que sigue.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

Sea WW un subconjunto de un espacio vectorial VV (W⊆V)(W⊆V).
WW es ***subespacio*** de VV si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:
a. 0V0V está en WW.
b. Si uu y vv están en WW, entonces u+vu+v está en WW.
c. Si uu está en WW y kk es un escalar, kuku está en WW.

4.3.- Condiciones de existencia.

Una función matemática es una relación particular entre dos conjuntos, el de entrada, que se llama dominio, y el de salida, que se llama codominio. Esta relación empareja los elementos de ambos conjuntos de forma tal de que a cada elemento del dominio le corresponde un sólo elemento en el codominio. Esto puede ilustrarse dibujando dos conjuntos y relacionando mediante flechas sus elementos. Así:



Recalco nuevamente que de cada elemento de X sale una sola flechita, lo que se conoce como *condición de unicidad*. Esa es la primera condición que toda función debe cumplir; la segunda es la *condición de existencia*: de todo elemento de X sale si o si una flechita.

La forma algebraica de expresar una función es mediante una ecuación con variables. Por ejemplo

$y = 2x$

Esta es la función que a cada x le asigna un y. Así, si entra 2 sale 4, si entra 3 sale 6 y así *ad infinitum*. Sin embargo, ¿x puede ser sólo números enteros o cualquier cosa? ¿y qué hay de y? Si tenemos estas dudas es porque no he descrito apropiadamente cómo es la función. Veamos ahora

$$y : N \to N / y = 2x$$

Ahora ya se entiende que la función y va del conjunto de los números naturales, representados con la letra N, hacia otro conjunto de números naturales. Generalmente suele notarse $f(x)$ en lugar de y, lo que se interpreta como "f es la función cuya variable es x".

Para definir correctamente una función es necesario explicitar cuál de dónde hasta dónde va, tal y como acabo de hacer. Si no se dice nada se sobreentiende que la función acepta todos los valores posibles, tanto en el conjunto de salida como en el de llegada.

2. PREIMAGEN E IMAGEN

Supongamos que tenemos la función genérica $f : X \to Y, f(x) = y$. En ese caso, X sería el dominio de f, Y el codominio, y la imagen de x y x la preimagen de y$. También recibe el nombre de imagen de f el subconjunto del codominio al cual realmente llega la función. Veamoslo con un ejemplo. Si tengo la función

$$f : N \to Q / f(x) = \frac{1}{x}$$

El dominio es el conjunto de los números naturales y el codominio es Q. Sin embargo la imagen de f es sólo una pequeña parte de este: el conjunto de todos los números fraccionarios de numerador 1. Todo esto se nota así

$$Dom(f(x)) = \{x | x \in N\}$$

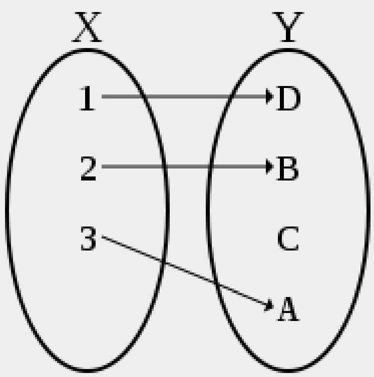
Esto se lee "todos los x tal que x está en los naturales"

$$Im(f(x)) = \left\{\frac{1}{y} | y \in N\right\}$$

Esto se lee "todos los $\frac{1}{y}$ tal que y está en los naturales"

3. INYECTIVIDAD

Según la forma en que interactuen el dominio y el codominio, las funciones serán inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. El primer caso ocurrirá si por cada x hay una y solo una imagen. La siguiente imagen ilustra esto:



Por ejemplo,

$$y : N \to N / f(x) = 2x + 1$$

es una función inyectiva. Vamos a demostrarlo. Si f no fuese inyectiva, entonces existe un x, que llamaré x_0, que tiene dos imágenes distintas, llamémoslas h y g. Sin embargo,

$$h = 2x_0 + 1$$
$$g = 2x_0 + 1$$

Así, no pueden ser distintas. Luego, f es inyectiva.

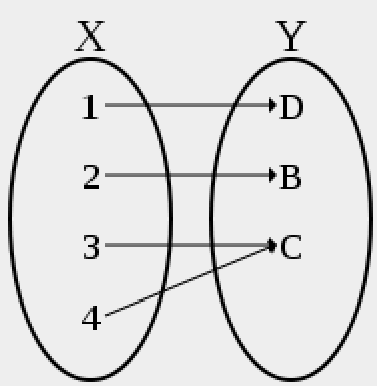
Veamos ahora una definición un poquito más formal de inyectividad:

f *es inyectiva si y solo si* $\forall x, y \in Dom(f), f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

("$\forall$" se lee *para todo*; "$\Rightarrow$" significa *implica*)

4. SOBREYECTIVIDAD

Una función se dice sobreyectiva si su imagen es todo el codominio.



Volviendo al ejemplo anterior, ¿es $f : N \to N, f(x) = 2x + 1$ sobreyectiva? Claramente no, pues para serlo la imagen debería ser todo N; sin embargo el valor más pequeño que puede tomar f es $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

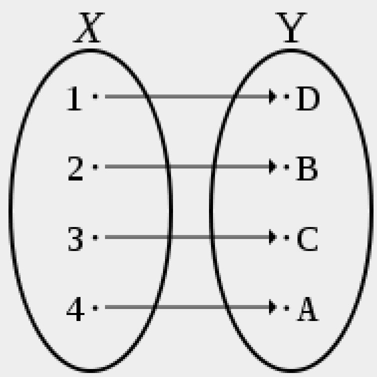
Una definición formal de sobreyectividad sería la seguiente:

$f : X \to Y$ *se dice sobreyectiva si* $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ *tal que* $f(x) = y$

($\exists$ se lee *existe*; "$\in$ significa *pertenece*)

5. BIYECTIVIDAD

Una función se dice biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Graficamente:



Un ejemplo trivial sería

$$f : N \to N / f(x) = x$$

4.4.- Independencia lineal.

Sea *V* es un espacio vectorial. Se dice que un vector $\vec{v}$ en *V* es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, también en *V*, si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

Se dice que un conjunto de *n* vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de un espacio vectorial *V* son linealmente dependientes si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todos cero, tales que

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \qquad (1)$$

Observa que la ecuación (1) se cumple siempre si las constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todas cero. Si la única forma en que se cumple la ecuación (1) es ésta, esto es, si

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{sólo si} \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

entonces se dice que los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo 1.

Considere los vectores $\vec{v}_1 = (2,-1,3)$, y $\vec{v}_2 = (-6,3,-9)$. Al observar las componentes de ambos vectores vemos que $\vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$ o que

$$3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$$

lo que podemos expresar diciendo que el vector cero se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Mas formalmente decimos que el vector cero es una combinación lineal no trivial de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. En el sentido de que los coeficientes de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son diferentes de cero. Por lo tanto estos vectores son dependientes.

Ejemplo 2.

Considere ahora los vectores $\vec{x} = (2,-1,3)$ y $\vec{y} = (3,-1,4)$. La combinación lineal

$$a_1\vec{x} + a_2\vec{y} = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + 3a_2 \\ a_1 - a_2 \\ 3a_1 + 4a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

implica que

$$\begin{aligned} 2a_1 + 3a_2 &= 0 \\ a_1 - a_2 &= 0 \\ 3a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}$$

y la única solución a este sistema es $a_1 = a_2 = 0$. Entonces $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son vectores independientes o linealmente independientes.

En el ejemplo 2 se ve que la idea de independencia lineal está relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales. Esta relación se puede establecer así:

Un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de k vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si, y sólo si, el

sistema homogéneo de ecuaciones de $n \times k$ $$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n = \vec{0} \qquad (2)$$ tiene sólo la solución trivial $\vec{x} = \vec{0}$.

Este sistema de ecuaciones lineal homogéneo (2) tiene solución no trivial si el número de incógnitas *k* es mayor que el número de ecuaciones *n*, esto es, si *k* > *n*. Por lo que cualquier conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si *k* > *n*.

Ejemplo 3.

El conjunto de vectores $(1,0), (0,1), (2,3)$ de $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente por ser tres vectores en $\mathbb{R}^2$.

La independencia lineal puesta en palabras:

- Un conjunto de vectores (diferentes de cero) de un espacio vectorial *V* es linealmente dependiente si y sólo si, algún vector del conjunto es una combinación lineal de los demás. Es decir, si uno de los vectores depende de los demás, el conjunto es dependiente.

- Un conjunto de vectores (diferentes de cero) de un espacio vectorial *V* es linealmente independiente, si y sólo si, ningún vector del conjunto es una combinación lineal de los demás. Es decir, si ninguno de los vectores depende de los demás, el conjunto es independiente.

- Si un vector es un múltiplo escalar de otro, los vectores son linealmente dependientes.

- Cualquier conjunto de mas de *n* vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.

Finalmente:

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ n vectores de $\mathbb{R}^n$, las siguientes condiciones son equivalentes

1. Los vectores son independientes.
2. La matriz *A* que tiene a estos vectores como vectores columna es invertible.
3. *A* se puede reducir a la matriz identidad de $n \times n$. (*A* es equivalente por renglones a I_n).
4. La forma escalonada por renglones de *A* tiene n pivotes.
5. $\det A \neq 0$.

4.5.- Vectores propios

4.6 .- valores propios

Sea *T* una aplicación o transformación lineal endomórfica de orden *N*, se dice que el vector *V* no nulo es un **vector propio** si y sólo se transforma de la manera:

- *T(V)=kV*

donde *k* es un **valor propio**.

Ejemplo

Sea la matriz *A*:

- $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

asociada a la aplicación lineal $T{:}R^3 \text{->} R^3$; obtener los valores propios de *A*.

1ro. Se plantea $|A-kI|=0$ para obtener el polinomio característico:

- $$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

- $$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 3 & 2-k & 1 \\ 2 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$
- $$(1-k)\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2-k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que es reducido a:

- $-k^3+6k^2+2k-12=0$ (Polinomio característico de *A*)

2do. Se determinan las raíces del polinomio:

- $-k^3+2k+6k^2-12=0$
- $=-k(k^2-2)+6(k^2-2)$
- $(6-k)(k^2-2)=0$

siendo 6 y $\pm\sqrt{2}$ que son valores propios de *A* por ser reales.

3ro. Se calculan los subespacios vectoriales de cada valor propio, sustituyéndolos por *k* en el sistema:

- $$\begin{pmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 3 & 2-k & 1 \\ 2 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $k=6$ el subespacio vectorial es $\{(a,b,c) \in R^3 \mid a=b=c\}$.

Luego se determina un vector no nulo cualquiera por cada subespacio vectorial que serán vectores propios del correspondiente valor propio. En el caso del valor propio 6 puede un vector propio suyo sería *(1,1,1)*.

Importancia

Los valores y vectores propios son clave para la diagonalización de matrices cuadradas, proceso que se hace mediante la resolución del polinomio característico de la matriz cuadrada asociada a la transformación lineal en cuestión, usando por lo general el teorema de Cayley-Hamilton. Una vez encontrada la matriz diagonal semejante, los cálculos de la aplicación lineal se simplifican notablemente a meros productos. Para matrices superiores al orden 3, se obtendrán polinomios que no tendrán un método general de factorización.

4.7.- Base y demenciones

Base y dimensión de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores S={v1, v2,…, vn} en un espacio vectorial V se denomina base de V si se cumplen las siguientes condiciones.

* S genera a V.

* S es linealmente independiente

Una base posee 2 características que se acaban de ver, debe tener suficientes valores para generar a V, pero no tantos de modo que uno de ellos pueda escribirse como una combinación lineal de los demás vectores en S. Si un espacio vectorial consta de un número finito de vectores, entonces V es de dimensión finita. En caso contrario, V es de dimensión infinita.

Base

En términos generales, una "base" para un espacio vectorial es un conjunto de vectores del espacio, a partir de los cuales se puede obtener cualquier otro vector de dicho espacio, haciendo uso de las operaciones en él definidas.

La base es natural, estándar o canónica si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forman base para R^n.

Si $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V entonces todo vector v en V se puede expresar como:

1. $V = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$

2. $V = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$

Restar 2-1

$0 = (c_1 - k_1)\, v_1 + (c_2 - k_2)\, v_2 + \ldots + (c_n - k_n)\, v_n$

Ejemplo:
demostrar si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_3\}$ es base de R^3, $v_1 = (1,2,1)$; $v_2 = (2,9,0)$; $v_3 = (3,3,4)$

Proponer vector arbitrario, combinación lineal

$b = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$
$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4)$
$(b_1, b_2, b_3) = c_1+2c_2+3c_3; 2c_1+9c_2+3c_3; c_1+4c_3$

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b_1$
$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = b_2$
$c_1 \quad + 4c_3 = b_3$

det A = $[(1*9*4)+(2*3*1)+0]-[(1*9*3)+0+(4*2*2)]$
$= [36+6]-[27+16]$
$= -1$

Si genera a R^3

4.8.- Bases ortonormales. Proceso de Gram-schimidt.

Los vectores de una base pueden ser mutuamente perpendiculares, o pueden no serlo. Cuando son mutuamente perpendiculares se dice que es una base ortogonal.

Recuérdese que dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si $u \cdot v = 0$.

Si se tiene un conjunto de tres vectores u, v y w en $\mathbb{R}^3$, y se quiere verificar que sean un conjunto ortogonal, se necesitan realizar todas las combinaciones de los productos punto:

$$u \cdot v \;,\; u \cdot w \;,\; v \cdot w$$

Ejemplo 1.

Sean los vectores $u = (1, 2, 1)$, $v = (4, 0, -4)$ y $w = (1, -1, 1)$, ¿son un conjunto ortogonal?

Al realizar los productos punto

$$u \cdot v = 0 \;,\; u \cdot w = 0 \;,\; v \cdot w = 0$$

nos damos cuenta de que todos son iguales a cero, por lo que el conjunto de vectores es ortogonal.

Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^n$ es una base ortogonal si:

- El conjunto es base de $\mathbb{R}^n$ y

- Es un conjunto ortogonal.

Ejemplo 2.

Sean los vectores u = (1, 2, 1), v = (4, 0, -4) y w = (1, -1, 1); queremos determinar si son una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, se forma la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante det$A$ = –24 (diferente de cero) , lo que implica que los vectores son linealmente independientes, y el conjunto es base de $\mathbb{R}^3$.

Realizamos los productos punto y obtenemos que

$$u \cdot v = 0, \quad u \cdot w = 0 \quad \text{y} \quad v \cdot w = 0$$

por lo que el conjunto es ortogonal, entonces, es una base ortogonal.

Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal si:

- El conjunto es base de $\mathbb{R}^n$
- Es un conjunto ortogonal y
- Sus vectores son unitarios

4.9.- transformaciones lineales

En primer lugar, una transformación lineal es una función. Por ser función, tiene su dominio y su codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales. Tenemos dos espacios vectoriales VV y WW, y una función que va de VV a WW. O sea una regla de asignación que transforma vectores de VV en vectores de WW. Pero no toda función que transforme vectores de VV en vectores de WW es una transformación lineal. Debe cumplir ciertas condiciones:

F:V→WF:V→W es una transformación lineal si y sólo si:

1. F(u+v)=F(u)+F(v) ∀u,v∈VF(u+v)=F(u)+F(v) ∀u,v∈V

2. F(k.v)=k.F(v) ∀v∈V, ∀k∈RF(k.v)=k.F(v) ∀v∈V, ∀k∈R

Propiedades de una transformación lineal

Propiedad 1

La imagen del vector nulo del dominio 0V0V es el vector nulo del codominio 0w0w:
T(0V)=0wT(0V)=0w
Demostración:

T(0V)=T(0.v)=0.T(v)=0.w=0WT(0V)=T(0.v)=0.T(v)=0.w=0W
Donde hemos expresado a 0V0V como el producto del escalar 00 por cualquier vector del espacio vectorial VV, hemos usado la segunda condición que debe cumplir una transformación lineal, y finalmente hemos vuelto a usar la propiedad de espacios vectoriales sobre el producto del escalar 0 por cualquier vector.
Propiedad 2

La imagen del vector –v–v es igual al opuesto de la imagen de vv:
T(–v)=–T(v)T(–v)=–T(v)
Demostración:

T(–v)=T(–1.v)=–1.T(v)=–T(v)T(–v)=T(–1.v)=–1.T(v)=–T(v)
La justificación de los pasos dados en la demostración es similar a la anterior.

Propiedad 3

Consideremos rr vectores del espacio vectorial VV:
v1,v2,…,vr∈Vv1,v2,…,vr∈V
Tomemos una combinación lineal en el dominio:

α1v1+α2v2+α3v3+...+αrvrα1v1+α2v2+α3v3+...+αrvr
Donde αi∈Rαi∈R.
Si aplicamos la transformación lineal FF de VV a WW, teniendo en cuenta las propiedades enunciadas en la definición, resulta:
F(α1v1+α2v2+α3v3+...+αrvr)=α1F(v1)+α2F(v2)+…+αrF(vr)F(α1v1+α2v2+α3v3+...+αrvr)=α1F(v1)+α2F(v2)+…+αrF(vr)
Es decir que una transformación lineal «transporta» combinaciones lineales de VV a WW, conservando los escalares de la combinación lineal.
Ejemplo 1

Analizar si la siguiente función es una transformación lineal:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ | \ T\left(\underbrace{(x, y, z)}_{\in \mathbb{R}^3}\right) = \underbrace{(x + z, y - 2z)}_{\in \mathbb{R}^2}$$

Resolución

Controlemos primero que el transformado del 0V0V sea el 0W0W. Ésta es una condición necesaria: si no se cumpliera, no sería transformación lineal. Como T((0,0,0))=(0,0)T((0,0,0))=(0,0), la función dada es «candidata» a ser transformación lineal. Para demostrar que es una transformación lineal tenemos que comprobar las condiciones dadas en la definición.
Condición 1: T(u+v)=T(u)+T(v)∀u,v∈VT(u+v)=T(u)+T(v)∀u,v∈V
Tomemos dos vectores de R3R3
u=(u1,u2,u3)u=(u1,u2,u3)
v=(v1,v2,v3)v=(v1,v2,v3)
Veamos si

T(u+v)=T(u)+T(v)T(u+v)=T(u)+T(v)
Primero hacemos la suma de uu y vv:

$$u + v = \left(\underbrace{u_1 + v_1}_{x}, \underbrace{u_2 + v_2}_{y}, \underbrace{u_3 + v_3}_{z}\right)$$

Y ahora aplicamos TT:
T(u+v)=(u1+v1+u3+v3,u2+v2–2u3–2v3)T(u+v)=(u1+v1+u3+v3,u2+v2–2u3–2v3)

$$T(u + v) = \underbrace{(u_1 + u_3,\ u_2 - 2u_3)}_{T(u)} + \underbrace{(v_1 + v_3,\ v_2 - 2v_3)}_{T(v)}$$

T(u+v)=T(u)+T(v)T(u+v)=T(u)+T(v)
En conclusión: se cumple la primera de las condiciones.

Nos faltaría la otra propiedad.

Condición 2: T(k.v)=k.T(v)∀v∈V,∀k∈RT(k.v)=k.T(v)∀v∈V,∀k∈R
T(k.v)=T((kv1,kv2,kv3))=(kv1+kv3,kv2–2kv3)T(k.v)=T((kv1,kv2,kv3))=(kv1+kv3,kv2–2kv3)
=k.(v1+v3,v2–2v3)=k.T(v)=k.(v1+v3,v2–2v3)=k.T(v)
Como TT cumple las dos condiciones, es una transformación lineal.
Ejemplo 2

Analizar si la siguiente función es una transformación lineal:

F:P2→R|F(p)=p(0)F:P2→R|F(p)=p(0)
Observación: con P2P2 se designa al conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que dos, con el polinomio nulo.

Resolución

Entonces a un polinomio pp de grado menor o igual que dos, le aplicamos la función FF y obtenemos un número real que proviene de evaluar el polinomio en x=0x=0.

$$p \in P_2 \longrightarrow p(0) \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo evaluemos la transformación en x2–1x2–1:

$$F\left(\underbrace{x^2-1}_{p}\right) = -1 \in \mathbb{R}$$

Veamos si el vector nulo del espacio vectorial P2P2 va al 0∈R0∈R (es condición necesaria).
El polinomio cero es:

0P2=0x2+0x+00P2=0x2+0x+0
¿Cuánto vale el polinomio nulo evaluado en 00? 00
0P2(0)=0.02+0.0+0=00P2(0)=0.02+0.0+0=0
Entonces la condición necesaria para este ejercicio se cumple, porque F(0P2)=0F(0P2)=0
Primera condición F(u+v)=F(u)+F(v)∀u,v∈VF(u+v)=F(u)+F(v)∀u,v∈V
Para que sea transformación lineal se debe cumplir la primera condición. Veamos qué pasa con el transformado de la suma:

(p+q)∈P2(p+q)∈P2
F(p+q)=(p+q)(0)=p(0)+q(0)F(p+q)=(p+q)(0)=p(0)+q(0)
Observación: evaluar una suma de funciones en 00, es evaluar cada una en 00 y sumarlas. Esto no es una particularidad de los polinomios, sino que se corresponde con la definición de suma de funciones: Para cualquier función: (f+g)(x)=f(x)+g(x)(f+g)(x)=f(x)+g(x), para todo xx perteneciente al dominio de ff y de gg.
Otra forma de pensar la misma propiedad. Si consideramos

p(x)=ax2+bx+cp(x)=ax2+bx+c y q(x)=dx2+ex+fq(x)=dx2+ex+f
p+q=(a+d)x2+(b+e)x+(c+f)p+q=(a+d)x2+(b+e)x+(c+f)
F(p+q)=c+f=F(p)+F(q)F(p+q)=c+f=F(p)+F(q)
Por los dos caminos arribamos a la misma conclusión.

Segunda condición F(k.v)=k.F(v)∀v∈V,∀k∈RF(k.v)=k.F(v)∀v∈V,∀k∈R
Veamos si se cumple la segunda condición. Para esto podemos recordar que dada una función f(x)f(x) y un escalar kk, la función (k.f)(x)(k.f)(x) se define como k.f(x)k.f(x). De esta forma podemos decir:

- $p \in P2, k \in Rp \in P2, k \in R$
- $F(k.p)=(k.p)(0)=k.p(0)=k.F(p)F(k.p)=(k.p)(0)=k.p(0)=k.F(p)$

Otra forma de verlo es escribir a un polinomio $p \in P2p \in P2$ de forma genérica y aplicar la transformación sobre $k.pk.p$:
$p(x)=ax2+bx+cp(x)=ax2+bx+c$
$F(k.p)=F(k.(ax2+bx+c))=F(k.ax2+k.bx+k.c)=k.c=k.F(p)$

Bibliografía

Anton, Howard (1994): "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Anton, Howard (1994): "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications (Applications Version)". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Anton, Howard (1994): "Elementary Linear Algebra. Elementary Linear Algebra Applications (Solution Students)". 7ª edición. John Wiley & Sons Ltd.

Banchoff, T.; Wermer, J. (1993): "Linear Algebra Thourgh Geometry". 2ª ed. Springer-Verlag.