UDS

Mi Universidad

LIBRO

Geometría y trigonometría

Bachillerato en Recursos Humanos

Segundo cuatrimestre

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Objetivo de la materia:

El propósito fundamental de este libro es que sea un instrumento autogestivo, es decir, que te permita aprender de forma independiente a través de actividades que te permitan obtener conocimientos y desarrollar habilidades, actitudes y valores en el campo de la geometría y la trigonometría plana.

ÍNDICE

UNIDAD I

UNIDAD 2

UNIDAD 3

UNIDAD 4

UNIDAD I

OBJETIVO: QUE EL ALUMNO APRENDA LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

1.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La historia de la geometría se remota a los albores de la humanidad. Los hombres primitivos poseían de manera intuitiva los conceptos de recta, punto y plano. Además, la naturaleza les ofrecía múltiples ejemplos de representaciones geométricas: el Sol y la Luna eran representados por medio de círculos; una estrella de mar para polígono estrellado, y un caracol cualquiera por un espiral.

Posteriormente, la necesidad que surgió de conocer y modificar el mundo que les rodeaba los obligó a profundizar y relacionar sus ideas, surgiendo el personaje de *Euclides* (matemático griego) que organizó sus conocimientos de Geometría y sentó las bases de lo que hoy en día se conoce como *Geometría Clásica.* Su obra fue tan exitosa que desde hace 2000 años se sigue enseñando, desde entonces se le ha llamado *Geometría Euclidiana.*

1.2. ETAPAS DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA

Sumerios y babilonios: La rueda inventada por los sumerios 3500 años A.C., marca en la historia el inicio de la civilización; inventaron la escritura, crearon la aritmética y las construcciones de sus ciudades revelan la aceptación de las figuras geométricas.

En la antigua Mesopotamia florece la cultura de los Babilonios, herederos de los sumerios: adaptaron la rueda a sus carros de guerra, descubriendo las propiedades de la circunferencia, deduciendo el valor de "3" como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

De acuerdo a sus estudios astronómicos, conocieron que el año tiene aproximadamente 360 días, motivo por el cual dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, obteniéndose así el grado sexagésimo.

También tenían el conocimiento de cómo trazar su hexágono regular inscrito en el círculo; conocían una fórmula para hallar el área del trapecio rectángulo.

EGIPTO: Los egipcios obligados por las constantes avenidas (*CRECIDAS*) del Río Nilo que año con año inundaba sus tierras de cultivo, por lo cual tenían que rehacer las divisiones de tierra para calcular los impuestos para cada dueño de la superficie cultivada; la aplicación de sus conocimientos geométricos se hizo sobre la medida de la tierra de lo cual se deduce el significado de *GEOMETRÍA* (medidas de la tierra) cuyas raíces griegas son: *GEO*-Tierra y *METRE*-Medida.

También aplicaron sus conocimientos de geometría en la construcción de pirámides como la de *KEOPS, KEFREN y MEKERINOS*, que son cuadrangulares y sus caras laterales son triangulares equiláteros, la de *KEOPS* es una de las siete maravillas del mundo antiguo donde se ha comprobado que además de la precisión en sus dimensiones era perfectamente orientada.

Los conocimientos de los egipcios están contenidos en cinco papiros, siendo el de mayor interés el de *RHIND* donde se establecen las reglas para calcular el área del triángulo isósceles, área del círculo; determinaron el valor de 3.1604 como relación entre la circunferencia y diámetro de un círculo, valor mucho más aproximado que el de los Babilonios para π.
Los egipcios empleaban el cordel (*TENEDORES DE CUERDA*) para sus operaciones de construcción y diseño, siendo regla, compás y escuadra al mismo tiempo.

GRIEGOS: Los conocimientos egipcios sobre la geometría eran netamente empíricos, ya que no se cimentaban en una sistematización lógicas deducidas a partir de axiomas y postulados.

En Grecia comienza la geometría como ciencia deductiva, con los matemáticos, *TALES DE MILETO, HERODOTO, PITAGORAS DE SAMOS y EUCLIDES DE ALEJANDRIA*; quienes fueron a Egipto a iniciarse en los conocimientos de la geometría.

TALES DE MILETO: (*SIGLO VII A.C.*) fue uno de los siete sabios y fundador de la escuela "*JONICA*", se inicia en la filosofía y las ciencias, especialmente en la geometría.

Resolvió algunas dudas como la altura de las pirámides, conociendo la sombra que proyectan; la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles; el valor del ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto; demostró algunos teoremas relativos a las proporcionalidades de segmento determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelos.

TEOREMAS DE TALES DE MILETO:

1. " Los ángulos en la base de triángulo isósceles son iguales."
2. " Todo diámetro biseca a la circunferencia."
3. " Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son iguales."

PITÁGORAS DE SAMOS: (SIGLO VI A.C.) fue discípulo de Tales de Mileto, fundó en CROTONA, ITALIA la escuela pitagórica, atribuyéndosele el Teorema que lleva su nombre y que se enuncia:
"El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de sus cuadrados construidos sobre los catetos".

Otro de sus teoremas expresa: " La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos".

También demostró la construcción del pentágono y poliedros regulares como:
Tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

EUCLIDES DE ALEJANDRIA: (*SIGLO IV A.C.*) uno de los más distinguidos maestros de la universidad de Alejandría y quién por encargo de *PTOLOMEO* Rey de Egipto, reunió y ordenó los teoremas y demás proporciones geométricas en su obra llamada " *ELEMENTOS* " que ha sobrevivido hasta el presente, por lo que se le considera el " padre de la geometría ".

1.3. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA PLANA

1.3.1. CONCEPTO DE PUNTO

Un punto como parte un objeto físico.

Un punto como la marca más pequeña que se puede dibujar

Un punto es una idea o abstracción. Un punto no puede definirse con términos más sencillos es un término indefinido

1.3.2. CONCEPTO DE LÍNEA

*.- Una recta como parte de una situación física.

*.- Una recta como la línea más delgada que se pueda dibujar

*.- Una recta es una idea o abstracción. Como no puede definirse con términos más sencillos por si sola está definida.

1.3.3. CONCEPTO DE PLANO

Ilimitado, continúo en todas direcciones, llano, sin grosor.

1.4. PROPOSICIONES GEOMÉTRICAS

Una proposición es el enunciado de un hecho, como una ley o un principio, que puede ser verdadero o falso, pero nunca ambas cosas a la vez.

En la obra de Euclides “Elementos”, se plantea un conjunto de principios primarios, clasificados en definiciones, nociones comunes y postulados, considerados como verdades incuestionables, que permitieron deducir otras conclusiones de mayor complejidad que Euclides denomino proposiciones, que ahora son conocidas como teoremas.

1.4.1. LA DEFINICIÓN

Una definición es una proposición que implica la descripción clara y precisa de las características de una cosa.

1.4.2. EL AXIOMA

El axioma es una proposición que por su evidencia se admite como definición

1.4.3. EL POSTULADO

Un postulado es una proposición no tan evidente como el axioma, pero que también se admite como demostración.

1.4.4. EL TEOREMA Y EL COROLARIO

El teorema es una proposición que requiere ser demostrada para que se acepte su validez. Su demostración se apoya en los axiomas y postulados que, por convención, han sido aceptados como verdaderos.

1.5. LA RECTA

1.5.1. DEFINICIONES, NOMENCLATURA Y NOTACIÓN

La recta es una sucesión infinita de puntos, los cuales están ubicados en una misma dirección y en ambos sentidos.

1.5.2. POSTULADOS DE LA RECTA

Postulado: por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

Postulado: dos rectas se intersecan en uno y solo un punto.

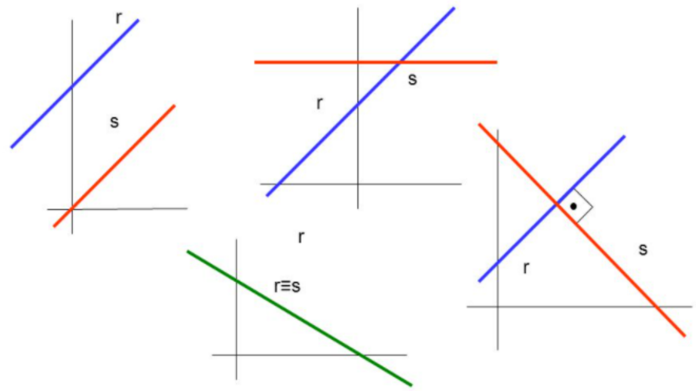
1.5.3. CONCEPTOS DERIVADOS DE LA RECTA

Rayo o semirrecta: Un rayo es una parte de una línea recta que comienza en un punto determinado y se extiende en forma indefinida en un sentido; también se le denomina semirrecta. La notación de una semirrecta se efectúa colocando el símbolo (flecha) arriba de las letras mayúsculas que representen a un rayo.

Segmento rectilíneo: Un segmento rectilíneo es una porción o sección de una línea recta comprendida entre dos puntos cualesquiera de esta. La notación de un segmento se efectúa colocando el símbolo (--) sobre las letras mayúsculas que representan los puntos extremos del segmento.

1.6. POSICIÓN DE DOS RECTAS EN UN PLANO

La posición relativa de dos líneas rectas trazadas en el mismo plano, es decir dos rectas coplanares, puede ocurrir de tres maneras: que sean paralelas, perpendiculares u oblicuas.

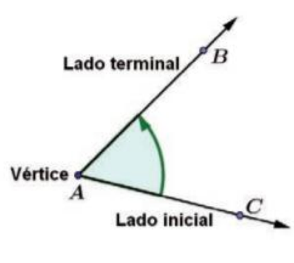


1.7. ÁNGULO

1.7.1. DEFINICIÓN DE ÁNGULO Y SU NOTACIÓN

Los ángulos son una herramienta necesaria en diversas situaciones. Estas van desde cálculos de corte científico, como por ejemplo saber la dirección que una nave espacial debe tomar para cruzar la atmósfera terrestre, hasta para la forma en la que deben colocarse las butacas y la pantalla en una sala de cine que permita la visibilidad de los asistentes de forma adecuada, o el ángulo que debe tomar una bola de billar para lograr un tiro efectivo.

Las semirrectas AC υυυρ y AB υυυρ se denominan lado inicial y lado terminal, respectivamente, y el punto A , de intersección de los lados, se llama vértice. Existen diferentes formas de notación para los ángulos. Las más comunes son: la notación de tres letras y la notación del vértice.



Notación de tres letras

Consiste en escribir la letra de un punto del lado inicial distinto del vértice (C), la letra del vértice (A) y la letra de un punto del lado terminal distinto del vértice (B); precedido por alguno de los símbolos angulares: ∠ , Ρ o Σ . De este modo, el ángulo de la figura 1.5 puede denotarse mediante las expresiones ∠CAB , ΡCAB o ΣCAB . Ten en cuenta, que la letra para el vértice debe quedar en medio.

Notación del vértice

Si no hay ambigüedad acerca del ángulo que pertenece a un vértice, puede emplearse la notación simplificada en la que después del símbolo angular se escribe la letra correspondiente al vértice del ángulo. En la figura 1.5, el ángulo representado se denota como ∠A. Esta notación es particularmente útil cuando se trabaja con triángulos.

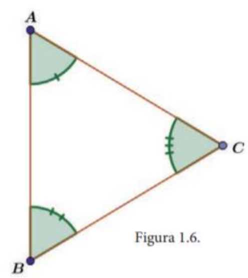


Figura 1.6.

1.7.2 CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

Los ángulos pueden ser clasificados de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Por el sentido de giro que da lugar al ángulo:

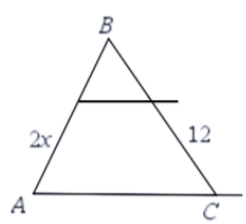
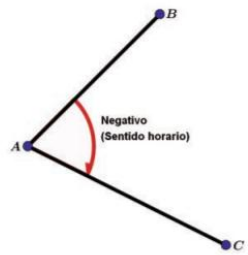
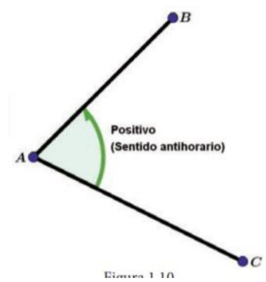


Figura 1.8.

a) Negativos Se generan en sentido horario, que es el mismo del movimiento de las manecillas del reloj.

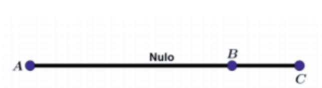


b) Positivos Se generan en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

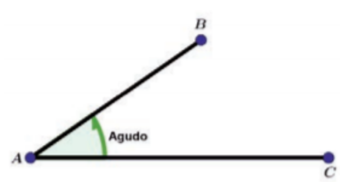


2. Por la medida del ángulo:

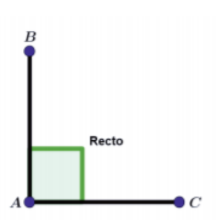
a) Nulo Su medida es de cero grados: $\theta = 0^\circ$



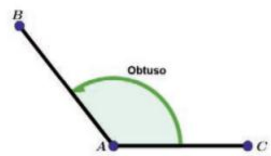
b) Agudo Su medida es mayor que 0° pero menor de 90°. $0^\circ\ 90^\circ < < \theta$.



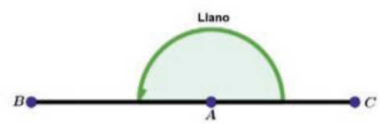
c) Recto Mide 90°. $\theta = 90^\circ$.



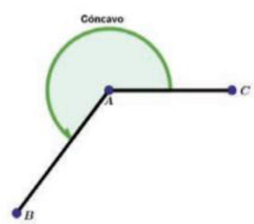
d) Obtuso Su medida es mayor de 90º pero menor de 180º. 90º 180º < < θ.



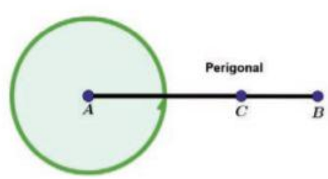
e) Llano Mide 180º. θ =180º.



f) Cóncavo o entrante Su medida es mayor de 180º pero menor de 360º .



g) Perigonal o completo Mide 360º. θ = 360º



1.7.3 TEOREMAS SOBRE ÁNGULOS

A continuación, se presentan algunos teoremas básicos relativos a ángulos. Varios de estos teoremas serán utilizados para demostrar otras propiedades de figuras geométricas.

*.- Si dos rectas se cortan formando un Angulo recto entonces forman cuatro ángulos rectos.

*.- Si dos ángulos son iguales y suplementarios entonces cada uno de ellos es recto.

*.- Si dos ángulos son iguales entonces sus ángulos conjugados son iguales.

*.- Los ángulos opuestos al vértice son iguales.

*.- Un ángulo externo de un triángulo es igual a la sumas de los dos ángulos internos que no le son adyacentes.

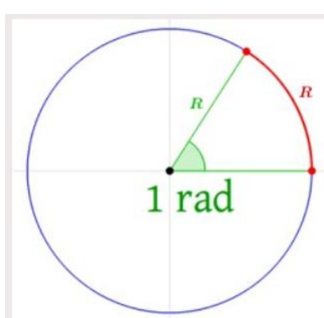
*.- Los suplementos de ángulos son iguales.

*.- Los complementos de ángulos iguales son iguales.

1.7.4 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Radianes

Un *radián* es la unidad de medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y cuyos lados delimitan un arco de circunferencia que tiene la misma longitud que el radio. El radián (rad) es la unidad de medida para ángulos en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.).



La relación del radián con la otra unidad de medida para ángulos más ampliamente utilizada, los grados sexagesimales o simplemente grados (°), es la siguiente:

1 vuelta completa de la circunferencia = $360^\circ = 2 \cdot \pi$ *radianes*

Para entender la anterior igualdad, se parte de saber que la medida en radianes de un ángulo (θ) medido en una circunferencia es igual a la longitud del arco que abarca dividida entre el radio de dicha circunferencia, es decir:

$$\theta_{(radianes)} = \frac{\text{Longitud del arco}}{\text{Radio}}$$

Por tanto, cuando se trata del ángulo correspondiente a una circunferencia completa, cuya longitud total es $2 \cdot \pi \cdot r$ (siendo r el radio de la circunferencia) le corresponden en radianes un ángulo de:

$$\theta_{(circunferencia\ completa)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2 \cdot \pi \text{ radianes}$$

En el sistema sexagesimal, el ángulo que abarca la circunferencia completa mide 360°, por lo que se puede establecer la ya vista relación entre grados y radianes:

1 vuelta completa $= 360^\circ = 2 \cdot \pi$ *radianes*

Otras equivalencias útiles entre grados y radianes son las siguientes:

$0^\circ = 0$ *rad*

$90^\circ = \pi/2$ *rad*

$180^\circ = \pi$ *rad*

Sistema sexagesimal

El *sistema sexagesimal* es un sistema de unidades muy empleado cuyo fundamento es que cada unidad se divide en 60 unidades de una orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60. Se aplica en la actualidad fundamentalmente para la medida de ángulos y también en la medida del tiempo.

La unidad de medida de ángulos en el sistema sexagesimal es el grado (º), que es el resultado de dividir el ángulo llano en 180 partes iguales, o bien un ángulo recto en 90 partes, o un ángulo completo en 360 partes. A cada una de esas partes se les llama *grado* (º). Así, un ángulo llano mide 180º, un ángulo recto 90º y un ángulo completo 360º.

A su vez, cada grado se subdivide en otras unidades inferiores, en concreto, en sesenta partes iguales. De esta manera, cada grado se divide en 60 minutos (1° = 60´) y cada minuto, a su vez, en 60 segundos (1´ = 60´´).

- Medidas de ángulos: 1 grado (º) → 60 minutos (´) → 60 segundos (´´)

- Medidas de tiempo: 1 hora → 60 minutos (´) → 60 segundos (´´)

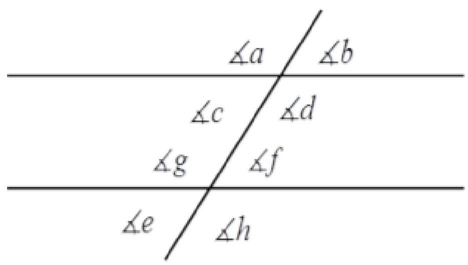
UNIDAD 2

OBJETIVO: QUE EL ALUMNO APRENDA LAS PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LOS ANGULOS

ANGULO ENTRE DOS LINEAS RECTAS CORTADAS POR UNA LINEA RECTA TRANSVERSAL

2.1 ANGULO ENTRE DOS LINEAS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA LINEA RECTA TRANSVERSAL

Si cortas dos rectas paralelas por una transversal, como se muestra en la siguiente figura, se forman ocho ángulos, de los cuales hay cuatro ángulos agudos iguales entre sí y cuatro ángulos obtusos iguales entre sí, que se clasifican de la siguiente manera: ángulos opuestos por el vértice; ángulos internos alternos; ángulos alternos externos y ángulos correspondientes.



1. Ángulos opuestos por el vértice: P P a y d , P P b y c , P P e y h y P P f y g . Por tanto, en este sistema se cumple que ma md P P = , mb mc P P = , me mh P P = y mf mg P P = .

2. Ángulos correspondientes: un ángulo es correspondiente de otro si al trasladar una paralela hacia la otra, dichos ángulos se sobreponen o enciman, de modo que son iguales. En la figura 1.23, P P a y e , P P b y f , P P c y g y P P d y h . Por tanto, en este sistema se cumple que ma me P P = , mb mf P P = , mc mg P P = y md mh P P = .

3. Ángulos internos: son los ángulos entre las dos paralelas, como si se tratará de los ingredientes entre las dos rebanadas de pan en un sandwich. En la figura 1.23, los ángulos internos son: Pc , Pd , Pe y Pf .

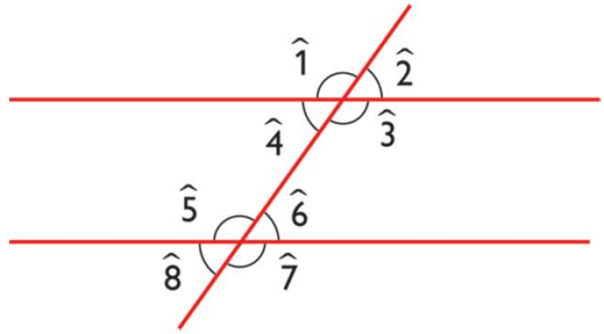
4. Ángulos externos: son los ángulos fuera de las paralelas, como si se tratará de las aceitunas exteriores del sandwich ensartadas en el palillo que atraviesa las piezas de pan. En la figura 1.23, los ángulos externos son: Pa , Pb , Pg y Ph .

5. Ángulos alternos: son los ángulos que se localizan hacia lados diferentes de la transversal. Entre los internos, los alternos internos son: P P c y f y P P d y e. Estos ángulos tienen la propiedad de ser iguales, por lo tanto, mc mf P P = y md me P P = . Entre los externos, los alternos externos son:P P a y h y P P b y g , por lo tanto, ma mh P P = y mb mg P P .

6. Ángulos colaterales: son los ángulos que se localizan hacia el mismo lado de la transversal. Entre los internos, los colaterales internos son: P P c y e y P P d y f . Estos ángulos tienen la propiedad de ser suplementarios, por lo tanto, m c m e 180° P P + = y m d m f 180° P P + = . Entre los externos, los colaterales externos son: P P a y g y P P b y h , por lo tanto, m a m g 180° P P + = y m b m h 180° P P + = .

2.2 PROPIEDADES DE LOS ANGULOS FORMADOS ENTRE DOS RECTAS PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL.

Cuando dos rectas se localizan en el plano, tenemos que éstas se cortan en un solo punto, o bien no se cortan. Este segundo caso, que definiremos a continuación merece un trato especial dada la importancia que tiene cuando son cortadas por una recta y forman una serie de ángulos con características especiales en cuanto a su posición y que son utilizados en el análisis de figuras, así las rectas paralelas se definen como aquellas que estando en el plano, no se cortan.



Como observarás en la figura anterior, las rectas al cortarse forman ocho ángulos que se clasifican en parejas, como a continuación se describen:

1) **Internos**. Son aquellos que quedan determinados entre las rectas paralelas y estos a su vez se clasifican en:

a) *Alternos internos*: Son dos ángulos no adyacentes localizados en los lados opuestos de la trasversal. De la figura, tenemos que, $\angle 4 y \angle 6$, $\angle 3 y \angle 5$

b) *Colaterales internos*. Se ubican en el mismo lado de la transversal. De la figura tenemos, $\angle 3 y \angle 6$, $\angle 4 y \angle 5$. .

2**) Externos**: Son los que quedan fuera de las rectas paralelas; análogamente, se clasifican a su vez en:

a) *Alternos externos*. Son los ángulos no adyacentes ubicados en los lados opuestos de la transversal de la figura tenemos que: , $\angle 2 y \angle 8$, $\angle 1 y \angle 7$.

b) *Colaterales externos*: Se localizan en el mismo lado de la transversal de la figura tenemos que: $\angle 2 y \angle 7$, $\angle 1 y \angle 8$,

3)**Correspondientes**. Estos están situados del mismo lado de la transversal y del mismo lado de las rectas paralelas (uno internos y otro externo).

De la figura tenemos que: , $\angle 2 y \angle 6$, $\angle 1 y \angle 5$, $\angle 3 y \angle 7$, $\angle 4 y \angle 8$. .

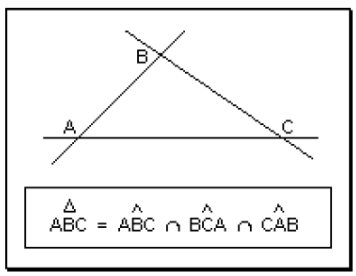
Estas parejas de ángulos, al igual que la sección anterior, tienen ciertas propiedades respecto a su magnitud.

a) Los ángulos alternos, tanto internos como externos son iguales.

b) Los ángulos colaterales, tanto internos como externos, son suplementarios.

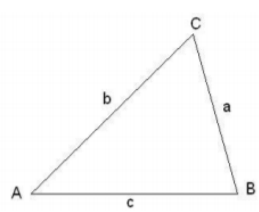
2.3 TRIANGULOS
2.3.1. DEFINICION DE TRIANGULO

Un triángulo es una figura geométrica formada por la unión de tres semirrectas o segmentos de recta, las cuales comparten tres puntos de unión llamados vértices.



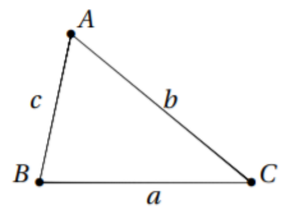
2.3.2 ELEMENTOS DE UN TRIANGULO

El triángulo, como polígono que tiene tres lados y tres ángulos, se clasifica según sus lados y según sus ángulos.



2.3.3 NOTACION

Los ángulos están determinados por los lados del triángulo. Los ángulos se miden en grados o en radianes. Así tenemos que 180 grados, corresponden a π radianes. En lo que sigue los ángulos varían entre 0° y 360° y un ángulo de 360° o será equivalente a un ángulo de 0 °



(Triángulo 1)

∆ABC es la representación para el triángulo de la figura.

A, B, C es la representación para los vértices del triángulo.

´ a = BC, b = CA, c = AB es la representación para los lados del triángulo. Su longitud se ´ representa por BC, CA, AB o´ a, b, c respectivamente.

Los ángulos del triángulo se representan por ´ BAC d , CBA d, ACB d o´ Ab, Bb, Cb respectivamente.

2.3.4 CLASIFICACION DE LOS TRIANGULOS

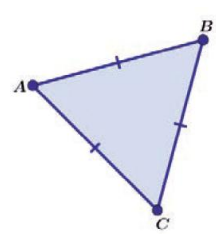
Los triángulos pueden ser clasificados de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Por la medida de sus lados:
2. Por la abertura de sus ángulos:

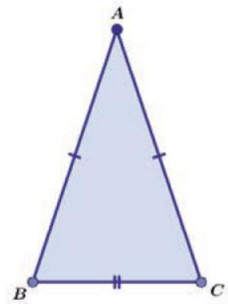
Lo importante es distinguir las partes principales del triángulo: lados, ángulos, vértices y, desde luego, la sección del plano que delimitan sus lados, es decir: su superficie. El triángulo es también cada punto que se encuentra dentro de él.

2.3.5 TRIANGULO S DE ACUERDO CON LA MEDIDIA DE SUS LADOS

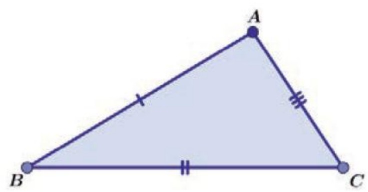
a) **Equilátero** Es el que tiene sus tres lados iguales.



b) **Isósceles** Tiene dos lados iguales y el tercero diferente a ellos.

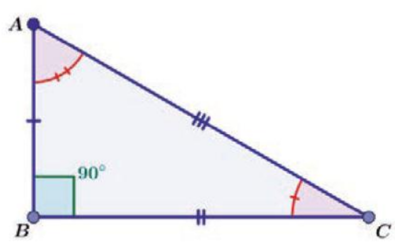


c) **Escaleno** Tiene sus tres lados de diferente medida.

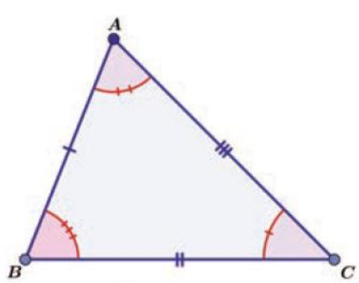


2.3.6 TRIANGULOS DE ACUERDO CON EL TIPO DE SUS ANGULOS INTERNOS

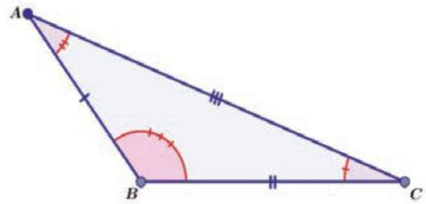
a) **Rectángulo** Tiene un ángulo interior recto y los otros dos agudos.



b) **Acutángulo** Tiene sus tres ángulos interiores agudos.



c) **Obtusángulo** Tiene un ángulo interior obtuso y los otros dos agudos.

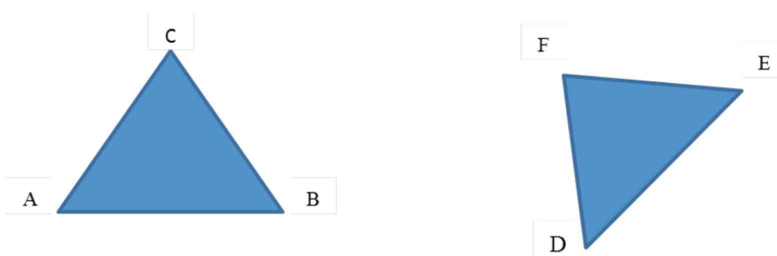


2.4 CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

La congruencia de objetos geométricos es importante para la solución de problemas en contextos muy variados como ingeniería, aeronáutica, construcción, arquitectura, diseño de autopartes, Mecatrónica, etcétera.

Congruencia es el término que se emplea en Geometría para decir que dos figuras son iguales. Un paso importante para establecer la igualdad de triángulos es determinar la correspondencia de sus elementos, la cual debe hacerse a partir de los vértices del triángulo; es decir, si queremos demostrar que los triángulos ΔABC y ΔDEF de la figura 2.3, son congruentes, entonces debe existir correspondencia entre las parejas de los vértices $A - D$, $B - E$ y $C - F$. En consecuencia, tendríamos

La correspondencia de sus lados y ángulos: $AB - DE$, $BC - EF$ y $AC - DF$ para los lados.

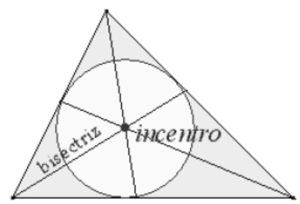


2.5 RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIANGULO

2.5.1 BISECTRIZ E INCENTRO

Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

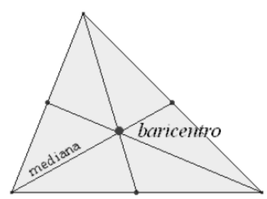
Incentro es el punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia inscrita.



2.5.2 MEDIANA Y BARICENTRO

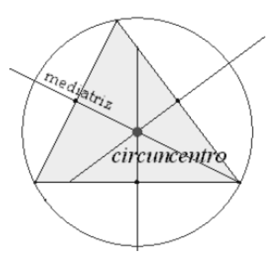
Mediana es el segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Baricentro es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo.



2.5.3 MEDIATRIZ Y CIRCUNCENTRO

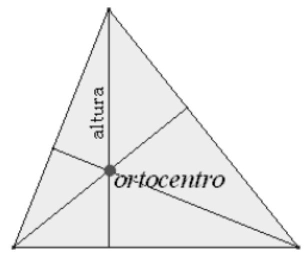
Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio. **Circuncentro** es el punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia circunscrita.



2.5.4 ALTURA Y ORTOCENTRO

Altura es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto.

Ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.



UNIDAD 3

OBJETIVO: QUE EL ALUMNO CONOZCA Y APLIQUE LAS PROPIEDADES DE LOS ANGULOS

SEMEJANZA DE TRIANGULOS

3.1 SEMEJANZA DE TRIANGULOS

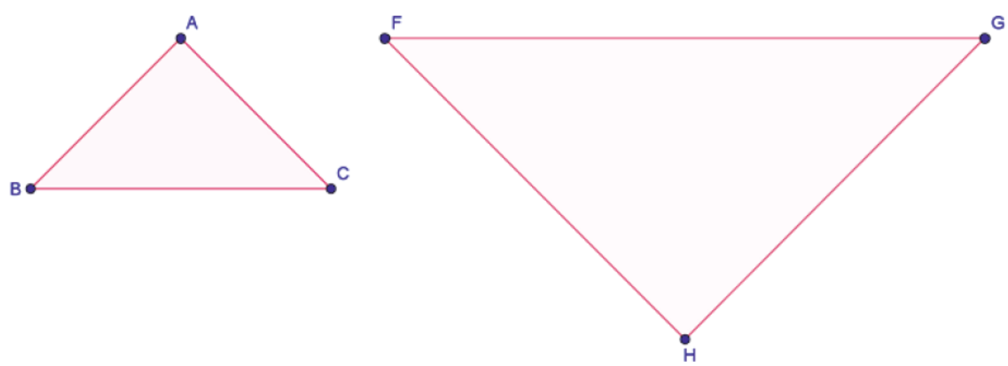
En esta sección abordarás el concepto de semejanza de triángulos y sus aplicaciones en problemas reales y situaciones teóricas. Para ello vamos a adentrarnos un poco a la idea intuitiva de semejanza.

Si cada centímetro de dibujo que hagamos representa tres metros de la realidad, ¿de qué tamaño dibujarías un tronco de un árbol, que en la realidad mide 28 metros?

La semejanza entre dos elementos se da precisamente cuando lo que varía entre ellos es su dimensión, es decir; la forma básica no cambia, solamente se altera el tamaño.

Vamos a acercarnos de una manera más específica a la semejanza de triángulos, para ello observaremos un par de triángulos. Existen algunos elementos a identificar y verificar, antes de decidir acerca de la semejanza entre dos triángulos.

Ejemplo: Analiza con tus escuadras los triángulos equiangulares de perímetros diferentes de la figura 3.12 y responde ¿son semejantes? ¿A qué atribuyes tu respuesta? Comparte con los compañeros de clase tus observaciones para establecer algunos acuerdos que el docente pueda validar.



3.1.1 RAZON Y PROPORCION

Razón

En matemáticas una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de división o cociente.

La razón entre a y b, cuando b es un número distinto de cero se escribe:

a / b y se lee « a es a b »

Calcular una razón, significa determinar el valor de esta, el que se establece haciendo la división entre el antecedente y el consecuente.

Ejemplo:

a) El valor de la razón entre 1 y 2 es:

1 / 2 => 1 : 2 = 0.5

Proporción

Una proporción es la igualdad entre dos o más razones. Se escribe:

a / b = c / d = k a : b = c : d = k b, d ≠ 0 y para que pueda existir una razón a, c ≠ 0

Ejemplo:

7 / 6 = v 14 / 6 = 2.3

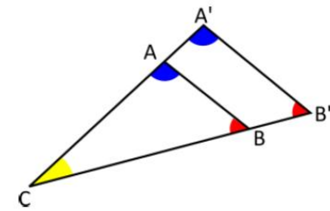
3.1.2 DEFINICION DE TRIANGULOS SEMEJANTES

Se podría afirmar, con lo que ya se conoce, que dos triángulos son semejantes si poseen una misma forma (todos sus ángulos de la misma medida) y sus partes guardan una proporción (lados).

En la figura, los ángulos correspondientes son A = A', B = B' y C = C'. Para denotar que dos triángulos ABC y DEF son semejantes se escribe ABC ~ DEF, donde el orden indica la correspondencia entre los ángulos: A, B y C se corresponden con D, E y F, respectivamente.

Por su parte, dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales, lo que nos conduce al teorema de Tales de Mileto.

$$(ABC \sim A'B'C') \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \right)$$



3.1.3 TEOREMA DE TALES

En la antigüedad, el filósofo griego Tales de Mileto (624-547 aC) diseñó, a partir de observaciones simples, un método para medir elementos que le resultaban curiosos. Por ejemplo: las pirámides de Egipto, los árboles que lo rodeaban, e incluso las alturas de algunos de sus conciudadanos que obtenía utilizando segmentos proporcionales.

Al realizar los cortes en sus zanahorias (o probablemente algún elemento que tuviera a su disposición), descubrió las bases de lo que conocemos actualmente como teorema de Tales. Dicho teorema establece lo siguiente: "Si tres o más paralelas cortan a dos transversales o secantes, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales". Este teorema lo verás representado en la figura 3.3.

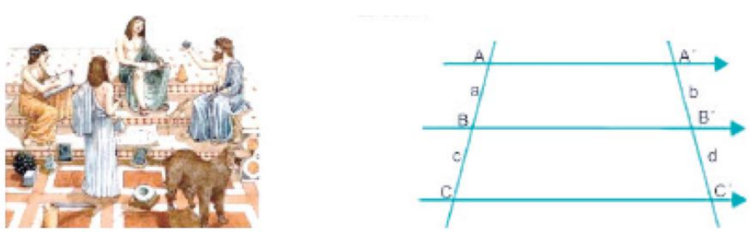


Figura 3.3. Teorema de Tales.

Donde se construye la siguiente proporción:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

Además, se pueden formar las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ o } \frac{c}{d}=\frac{a}{b};\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ o } \frac{d}{c}=\frac{b}{a};\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \text{ o } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

Teorema de Tales Si las rectas de la figura 3.3,

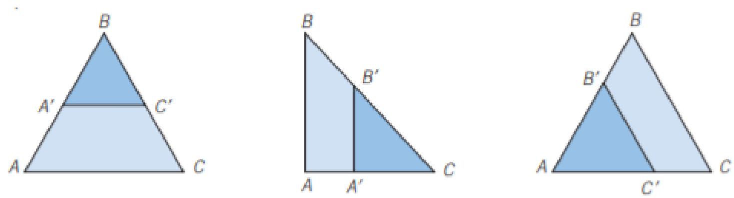
$$\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$$

y están cortadas por las secantes *AC y A´C´*, entonces:

$$\frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{BC}}=\frac{\overleftrightarrow{A'B'}}{\overleftrightarrow{B'C'}}.$$

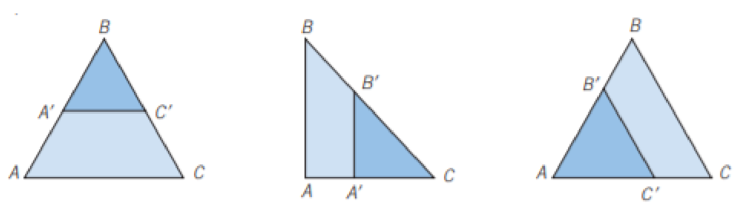
3.1.4 TEOREMA DE PROPORCINALIDAD DE TRIANGULOS

Toda recta paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.



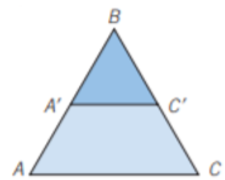
3.1.5 RECIPROCO DEL TEOREMA DE PROPORCIONALIDAD

Si una recta corta a dos lados de un triángulo y determina sobre ellos segmentos correspondientes proporcionales entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.



3.1.6 PROPORCIONES EN UN TRIANGULO

Si se traza un triángulo ABC y se dividen dos de sus lados proporcionalmente entonces la proporción obtenida, a / b = c /d se puede escribir en forma directa.



Asi de acuerdo con la figura anterior se pueden escribir las siguientes proporciones del triangulo ABC:

1) a / b = c / d 2) b / a = d / c 3) b / d = a /c 4) c / a = d / b

3.2 CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

3.2.1 DEMOSTRACION DE LOS TEOREMAS AAA, LLL, LAL DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Criterio 1: LLL (lado-lado-lado)

Si los tres lados de un triángulo son proporcionales, éstos son semejantes. Se muestra en la figura 3.13.

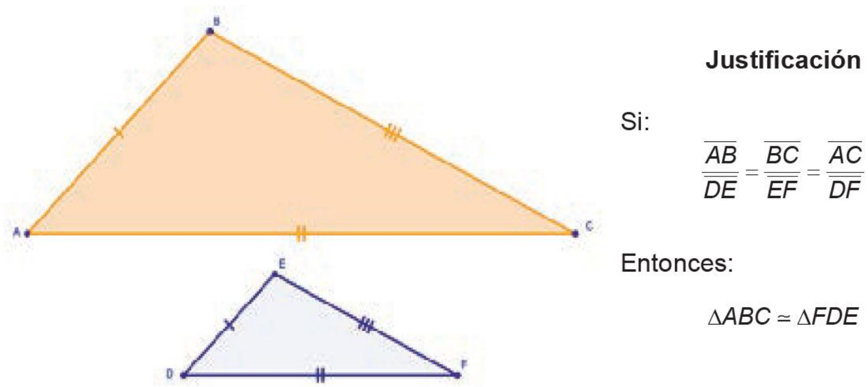


Figura 3.13

Criterio 2: LAL (lado-ángulo-lado)

Si dos triángulos tienen un par de lados proporcionales y el ángulo comprendido entre esos lados es congruente en ambos casos, los triángulos son semejantes. Se muestra en la figura 3.14.

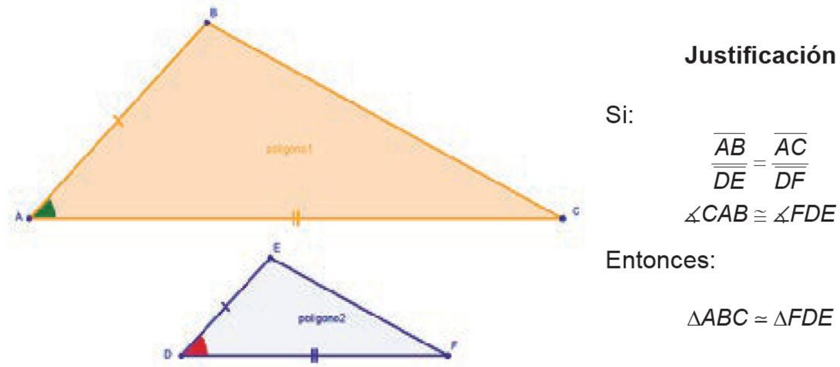


Figura 3.14.

Criterio 3: AA (ángulo-ángulo)

Si dos triángulos tienen dos parejas de ángulos congruentes entre ellos, significa que son semejantes. Se muestra en la figura 3.15.

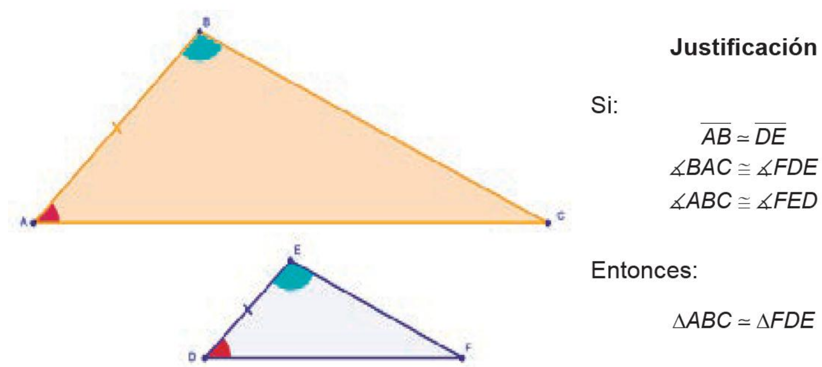
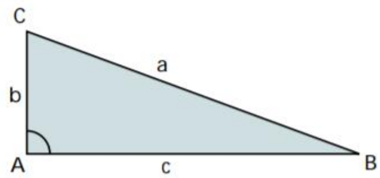


Figura 3.15.

3.3. TEOREMA DE PITAGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

De esta fórmula se obtienen las siguientes:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

3.3.1 DEMOSTRACION POR CONSTRUCCION DEL TEOREMA DE PITAGORAS

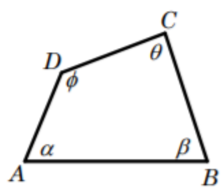
INVESTIGACION Y PRACTICA POR PARTE DEL ALUMNO

UNIDAD 4

OBJETIVO: QUE EL ALUMNO APRENDA LAS PROPIEDADES DE LOS CUADRILATEROS Y LA CIRCUNFERENCIA.
CUADRILATEROS

4.1. DEFINICION DE CUADRILATERO Y NOTACION

Un cuadrilátero es una figura plana, que tiene cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos internos. Dos lados consecutivos se intersecan en un vértice formando así un ángulo interno.

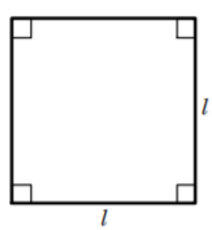


Una propiedad de todos los cuadriláteros es que la suma de sus ángulos internos es igual a 360°, es decir que

$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 360^{\circ}$$

La propiedad anterior se demuestra fácilmente ya que al trazar un segmento que pase por dos vértices opuestos se forman dos triángulos y como ya se ha establecido en la sección anterior la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Los cuadriláteros que serán estudiados en esta sección son el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo, el trapecio y el rombo

El cuadrado es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales, los cuatro ángulos iguales con medida de 90° y sus lados opuestos paralelos.



Las fórmulas para calcular el área y el perímetro de un cuadrado son

$$A = l^2$$

$$P = 4l$$

En algunos problemas puede ser útil calcular la diagonal d del cuadrado utilizando el teorema de Pitágoras.

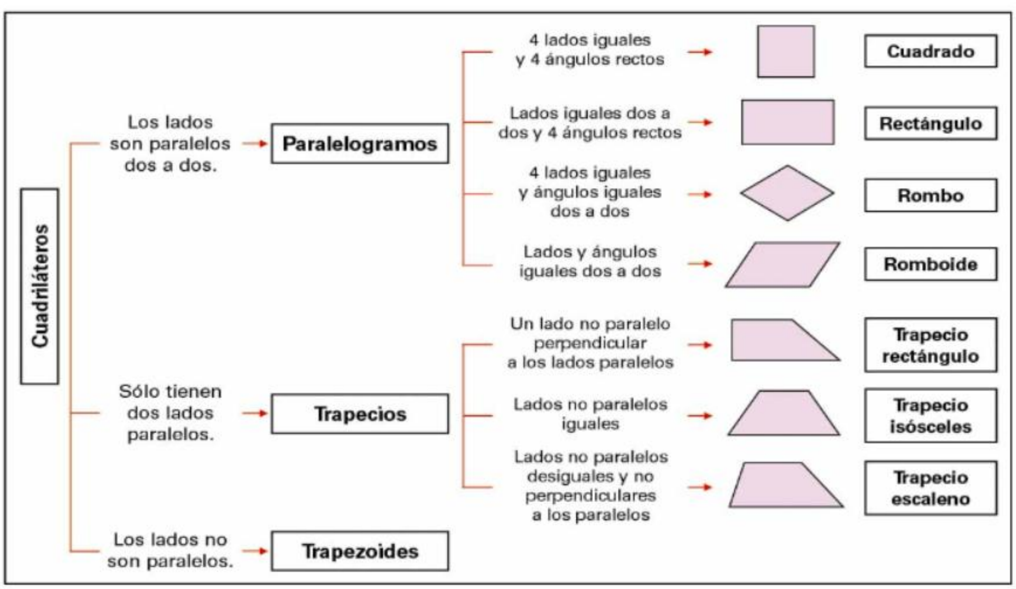
$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$= 2l^2$$

Extrayendo raíz cuadrada para despejar la diagonal se tiene

$$d = \sqrt{2l^2}$$
$$d = \sqrt{2}\, l$$

4.2. CLASIFICACION DE LOS CUADRILATEROS

La clasificación de los cuadriláteros se basa en la longitud, el paralelismo, la perpendicularidad y los ángulos de sus lados.



4.3. PROPIEDADES DE LOS CUADRILATEROS

- La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es igual a 360°; A + B + C + D = 360°.
- Las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan.
- Todo cuadrilátero convexo puede expresarse como la unión de dos triángulos con lado común en una de las diagonales.
- Si se unen con cuatro segmentos los puntos medios de todos los lados de un cuadrilátero, entonces dichos segmentos forman un paralelogramo.
- Si hay un segmento por la intersección de las diagonales de un cuadrilátero y une dos lados opuestos, determina dos cuadriláteros con un lado común.
- Si un cuadrilátero está circunscrito, la suma de sus lados opuestos es igual; AB + CD = BC + DA.
- Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de sus ángulos opuestos es igual a 180°.
- Sea ABCD un cuadrilátero inscrito, AB su diámetro, entonces las proyecciones de sus lados AD y BC sobre la recta CD son iguales.

4.3.1. PARALELOGRAMOS

Un paralelogramo es un cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos.

Los paralelogramos gozan de las siguientes propiedades:

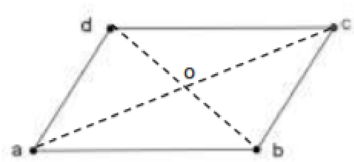
1.- En todo paralelogramo, los lados opuestos son congruentes

2.- En todo paralelogramo, las diagonales se bisecan

Observación:

El punto de intersección de las diagonales es centro de simetría, ¿por qué?

En todo paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes.



4.3.2. TRAPECIOS

Un trapecio es un cuadrilátero que posee al menos un par de lados opuestos paralelos

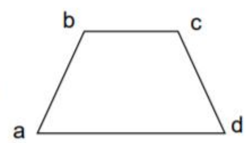
TRAPECIO ISÓSCELES

Definición

Un trapecio que tiene el par de lados no paralelos congruentes se llama trapecio isósceles

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{bc} \parallel \overline{ad} \\ \overline{ab} \nparallel \overline{cd} \\ \overline{ab} = \overline{cd} \end{array}\right\} \Rightarrow abcd \text{ trapecio isósceles}$$



Observación A cualquiera de los lados paralelos se le llama base del trapecio isósceles.

Propiedades:

(I) En un trapecio isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

(II) En un trapecio isósceles, las diagonales son congruentes.

4.4. POLIGONOS

4.4.1. DEFINICION DE POLIGONOS

Son figuras planas formadas por una línea poligonal cerrada y su interior. Cualquier figura plana que esté formada por “lados rectos” es un polígono.

4.4.2. CLASIFICACION DE POLIGONOS

A) Por el número de lados:

Triángulo, Cuadrilátero, Pentágono, Hexágono, Heptágono, Octógono, Eneágono, Decágono

B) Por su forma:

b.1) Equilátero: lados iguales

b.2) Equiángulo: ángulos iguales

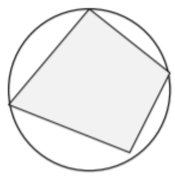
b.3) Regular: lados y ángulos iguales

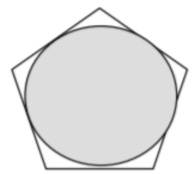
b.4) Irregular: lados y ángulos desiguales

Un polígono se halla inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices están contenidos en ella. Se dice entonces que la circunferencia está circunscrita al polígono.

Un polígono se halla circunscrito a una circunferencia cuando todos sus lados son tangentes (tocan en un solo punto) a la misma.

Se dice entonces que la circunferencia está inscrita en el polígono.





Pentágono circunscrito a una circunferencia, o circunferencia inscrita en un pentágono

4.4.3. ELEMENTOS DE UN POLIGONO

Los elementos de un polígono se establecen a tres niveles:

1. EN SU LÍNEA POLIGONAL: lados, vértices y ángulos (interiores y exteriores).

2. EN SU INTERIOR: el elemento más importante son las diagonales, aunque podríamos establecer otros elementos como mediatrices de sus lados y bisectrices de sus ángulos. En los polígonos regulares también se establecen las apotemas, los radios, el centro y los ángulos interiores.

2 CÁLCULOS ESPACIALES. Los principales son el perímetro (la suma de todos sus lados) y la superficie o área (lo que mide su espacio interior).

ELEMENTOS EN SU LÍNEA POLIGONAL

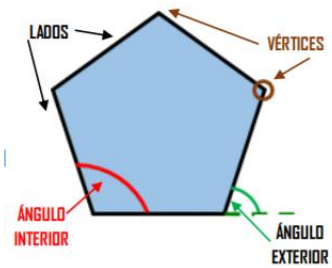
● LADOS. Son cada uno de los segmentos que forman su contorno.

● VÉRTICES. Son los puntos donde se unen dos lados.

● ÁNGULOS. Son las aberturas entre dos lados consecutivos. Hay 2 tipos:

▪ Ángulos interiores: están dentro del polígono.

▪ Ángulos exteriores: están fuera del polígono. Son suplementarios a los internos. La suma de los ángulos externos de un polígono es 360°.



ELEMENTOS EN SU INTERIOR

DIAGONALES

Son segmentos que van desde un vértice a otro no consecutivo. Cada polígono tiene:

« n · (n – 3) / 2 » diagonales, siendo 'n' el número de lados del polígono. Por ejemplo, un pentágono tiene 5 diagonales.

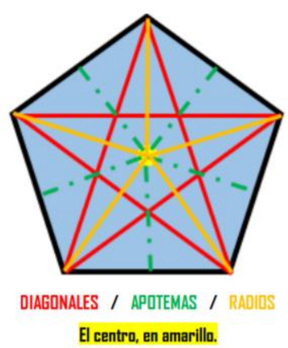
SOLO EN POLÍGONOS REGULARES:

CENTRO. Es un punto interior equidistante de todos sus vértices. (En algunos polígonos irregulares, también se puede establecer un centro).

APOTEMAS. Segmentos que van desde el centro de cada lado al centro del polígono.

RADIOS. Segmentos que van desde cada vértice al centro del polígono.

ÁNGULOS CENTRALES. Hay varios tipos, los formados por sus apotemas, los formados por sus radios y los formados entre ambos



4.4.4. DIAGONALES EN UN POLIGONO

Son segmentos que van desde un vértice a otro no consecutivo. Cada polígono tiene:

«n · (n – 3) / 2» diagonales, siendo 'n' el número de lados del polígono.

4.4.5. ANGULOS EN UN POLIGONO

Son las aberturas entre dos lados consecutivos. Hay 2 tipos:

- Ángulos interiores: están dentro del polígono.
- Ángulos exteriores: están fuera del polígono. Son suplementarios a los internos. La suma de Los ángulos externos de un polígono es 360°

4.5. MEDIDAS GEOMETRICAS: AREA
4.5.1. AREA DE UN RECTANGULO

RECTÁNGULO

Los lados son iguales dos a dos.

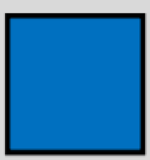
$P = 2 \cdot (a + b)$

A = lado mayor · lado menor

$A = b \cdot a$

4.5.2. AREA DE UN CUADRADO

CUADRADO



Como los 4 lados miden lo mismo, podemos multiplicar lo que mide un lado por cuatro.

$P = 4 \cdot lado$

A = lado · lado

$A = l^2$

4.5.3. AREA DE UN ROMBOIDE

ROMBOIDE

Los lados son iguales dos a dos.

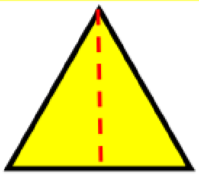
$P = 2 \cdot (a + b)$

A = lado de la base · altura

$A = b \cdot a$

4.5.4. AREA DE UN TRIANGULO

TRIÁNGULO



La mejor forma es **sumar lo que miden sus tres lados.**

$P = a + b + c$

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

4.5.5. AREA DE UN TRAPECIO

TRAPECIO

La mejor forma es **sumar lo que miden sus cuatro lados, ya que, muchas veces, todos miden distinto.**

$P = a + b + c + d$

$$A = \frac{\text{altura} \cdot (\text{Base mayor} + \text{base menor})}{2}$$

$$A = \frac{a \cdot (B + b)}{2}$$

4.5.6. AREA DE UN ROMBO

ROMBO

Los 4 lados miden lo mismo.

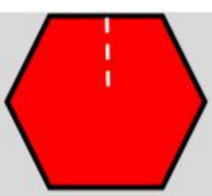
$P = 4 \cdot \text{lado}$

$$A = \frac{\text{Diagonal mayor} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

4.5.7. AREA DE POLIGONOS REGULARES

POLÍGONO REGULAR



Se multiplica lo que mide un lado (todos son iguales) por el número de lados del polígono.

$P = n \cdot \text{longitud lado}$

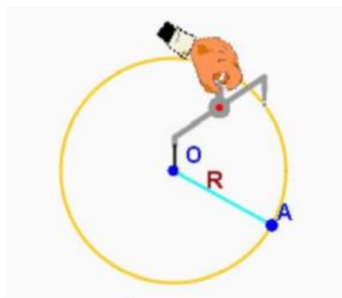
$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$A = \frac{p \cdot ap}{2}$$

4.6 CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Marca un punto O sobre un plano. Marca ahora otro punto A cualquiera y calcula la distancia entre O y A. Si buscas todos los puntos del plano que están a esa misma distancia del punto O, obtendrás una figura plana, que se conoce como circunferencia.

De manera más precisa, la circunferencia es una línea plana y cerrada formada por todos los puntos se encuentran a igual distancia de un punto O dado. El punto O se llama centro de la circunferencia y la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos de la circunferencia se llama radio.



4.6.1. DEFINICION Y NOTACION

La circunferencia es una línea plana y cerrada en la que todos los puntos están a igual distancia de un punto O dado.

4.6.2. ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

• Centro: es el punto situado en su interior que se encuentra a la misma distancia de cualquier punto de la circunferencia.

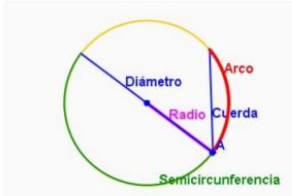
• Radio: es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.

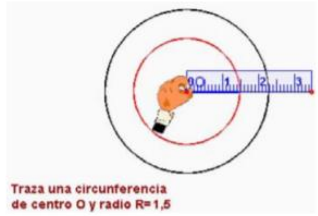
• Cuerda: es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

• Diámetro: es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

• Arco: es el segmento de circunferencia comprendido entre dos de sus puntos.

• Semicircunferencia: es el arco que abarca la mitad de la circunferencia.





4.6.3 PERIMETRO Y AREA DE LA CIRCUNFERENCIA

El área de un sector circular de amplitud n, se calcula utilizando la proporcionalidad directa, con lo que resulta la fórmula:

$$\text{Área} = \pi \cdot R^2$$

PERIMETRO:

Es la longitud (L) de la circunferencia, se calcula con la siguiente fórmula.

$$P = 2\pi r$$

4.6.4. ANGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA Y SUS MEDIDAS

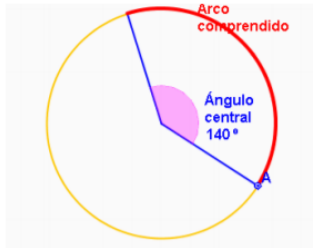
ANGULO CENTRAL

Se llama ángulo central a cualquier ángulo que tenga su vértice en el centro de la circunferencia.

Todo ángulo central corta a la circunferencia en dos puntos que determinan un arco comprendido.

Así, un ángulo de 360° comprende a la circunferencia completa, un ángulo de 180° divide a la circunferencia en dos arcos iguales y un ángulo recto comprende un arco que es la mitad de una semicircunferencia.

De esta manera es posible identificar cada ángulo central con su arco de circunferencia correspondiente.



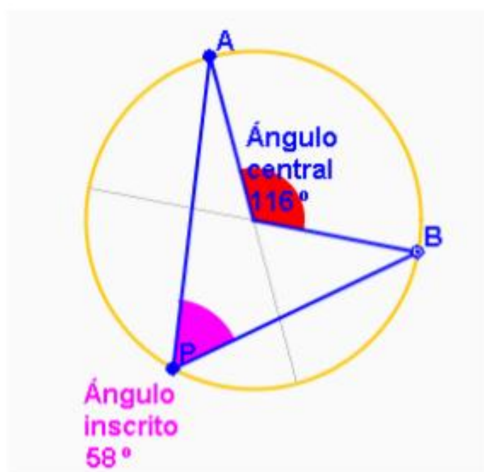
Todo ángulo central determina un arco sobre la circunferencia.

ANGULO INSCRITO

Se llama ángulo inscrito al ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia, de forma que sus lados son secantes con la circunferencia.

Si A y B son los puntos en que los lados del ángulo inscrito APB cortan a la circunferencia y consideramos el ángulo central AOB que queda determinado por los puntos A y B, resulta entonces que este ángulo central AOB tiene amplitud doble que el ángulo inscrito APB.

Sabemos así que la amplitud de cualquier ángulo inscrito es la mitad de la amplitud del ángulo central correspondiente.



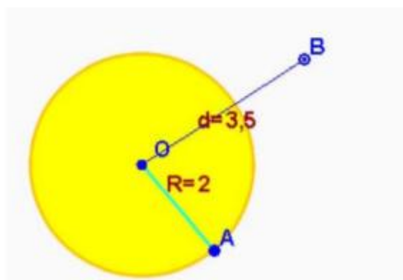
EL CÍRCULO.

Llamamos círculo a la región plana encerrada por una circunferencia. De forma más precisa, si O es el centro de la circunferencia, el círculo es la región del plano formada por todos los puntos cuya distancia al centro O es menor o igual que el radio de la circunferencia.

Así, el círculo comprende a todos los puntos de la circunferencia y también a todos los puntos interiores a ella. La circunferencia es por lo tanto el contorno, la "frontera" del círculo.

Se llaman centro, radio y diámetro del círculo al centro, radio y diámetro de su circunferencia.

El círculo está formado por la circunferencia y todos los puntos interiores a ella.



Si la distancia al centro es mayor que el radio, el punto será exterior al círculo.

BIBLIOGRAFIA

https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/20140414113505O.GuiaN2MatematicaICiclodeEM.pdf

https://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/teorema_pitagoras.pdf

https://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/2.3-Cuadrilateros.pdf

https://rephip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/4873/1107-15%20MATEMATICA%20Cuadrilateros.pdf?sequence=2

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/21003232/helvia/sitio/upload/apuntes20__poligons_____conc_y_elements.pdf

http://caminos.udc.es/info/asignaturas/101/AL1/pdfs/Precursos/5_Poligonos1.pdf