UDS

Mi Universidad

ANTOLOGÍA

Nombre de la materia

FISICA I

Nombre de la Licenciatura

TECNICO EN ENFERMERIA GENERAL

Semestre

Cuarto semestre

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

INDICE

UNIDAD I CONCEPTOS BÁSICOS

UNIDAD I

1.1.- LA FISICA Y EL MUNDO CIENTIFICO

1. INTRODUCCIÓN

El filósofo británico Walter Terence Stace (17 noviembre 1886 - 2 Agosto 1967) trabajó como profesor de filosofía en la Universidad de Princeton de 1932 hasta su retiro en 1955, pero siguió asociado a dicha universidad como Profesor Emérito. Sus primeros libros fueron escritos cuando trabajo en Ceylán (actualmente Sri Lanka), A Critical History of Greek Philosophy (1920), The Philosophy of Hegel: A Systematic Exposition (1924) y The Meaning of Beauty (1929). Posteriormente siguió la tradición empirista de David Hume, George Edward Moore, Bertrand Russell y Henry Habberley Price. Sin embargo, como en seguida se muestra, a diferencia de otros filósofos, para Stace el empirismo no estaba limitado a proposiciones que es posible demostrar. Adicionalmente Stace es considerado un pionero en el estudio filosófico del misticismo, de hecho muchos consideran su obra Mysticism and Philosophy (1960) como su libro más importante. El trabajo desarrollado por Stace en Princeton entre las décadas de 1930 y 1950 muestra una fuerte influencia de fenomenalismo, que es una forma radical del empirismo (no deberá confundirse con fenomenología).En el primer libro que publicó estando en Princeton, The Theory of Knowledge and Existence (1932), propone una epistemología empírica en donde intenta, "trazar los pasos lógicos a través de los cuales la mente iniciando con lo que le es dado, concluye y justifica su creencia en un mundo externo". Este libro puede ser visto como una crítica al pragmatismo. Su trabajo refutando al realismo puede verse de modo paralelo a otra famosa refutación, la del idealismo por G.E. Moore. Stace no argumentó que el realismo sea falso sino solamente que no hay absolutamente ninguna razón para considerar que sea verdadero y por tanto no tenemos por qué creerlo. Para cualquier científico, su artículo "Science and the Physical World" (1935) es todo un reto intelectual. Puede parecer irónico que en pleno siglo XX un filósofo argumente que los átomos no existen, o que en todo caso nadie realmente podría saber si existen. Paradójicamente para muchos científicos, ésta es una discusión no concluida y de enorme actualidad filosófica -dos ejemplos del vigor y vitalidad de esta polémica son los siguientes: Roush, S. (2005) y Stanford P.K., (2006)- que esencialmente se centra en el análisis del realismo y de diferentes posturas anti-realistas.

2. La ciencia y el mundo físico

Stace inicia señalando que los científicos hablan de electrones, protones, neutrones y otras cosas que nunca percibimos directamente; por tanto, al preguntar ¿cómo sabemos que existen?, la única respuesta posible es que lo sabemos a partir de un proceso de inferencia de cosas que percibimos directamente. Pero -se pregunta- ¿qué clase de inferencia? Su respuesta es que es una inferencia causal en la que de algún modo los entes atómicos afectan a los organismos de modo tal que ellos pueden percibir el mundo cotidiano de mesas, sillas, etcétera. La única razón que tenemos para creer en la ley de la causalidad es que hemos observado ciertas regularidades o secuencias. Observamos que bajo ciertas condiciones A siempre es seguido de B y llamamos a A la causa y a B el efecto; por tanto la secuencia de causalidad A-B. Podemos notar que todas las secuencias causales observadas se dan entre objetos sensibles en el mundo de la percepción. La ley de la causalidad se aplica únicamente al mundo de los sentidos y no a nada más allá o atrás de él. Esto a su vez significa que no tenemos, ni jamás podremos tener, la mínima evidencia para creer que la ley de la causalidad pueda aplicarse fuera del mundo de la percepción. El hecho de que los átomos no sean inferidos a partir de los sentidos, implica necesariamente que de la existencia de sensaciones no podemos válidamente inferir la existencia de átomos. Esto implica que no podemos tener ninguna razón para creer en su existencia. Ésta es la razón por la cual Stace se propone argumentar que ellos no existen, o que en todo caso no podríamos saber si existen. Se sugiere no que la idea de átomo sea falsa o carente de sentido sino que éstos sólo son una abreviación ingeniosamente desarrollada por la mente humana que le permite hacer predicciones. Es importante subrayar que “predecir” aquí no se refiere exclusivamente al futuro pues igualmente podría predecirse que en el año 585 a.C. hubo un eclipse en Asia Menor.

Stace complementa su argumentación discutiendo el caso de la gravitación al señalar que Newton formuló su ley de gravitación en términos de “fuerzas”. Se suponía que esta ley -que no es nada sino una fórmula matemática- gobierna la acción de estas fuerzas. Actualmente no se cree que estas fuerzas existan a pesar de lo cual la ley puede aplicarse para la predicción de fenómenos astronómicos; para el hombre de ciencia no es importante si esas fuerzas existen o no, eso, puede argumentarse es una pregunta filosófica pura. De hecho, Stace piensa que los filósofos considerarían a esas fuerzas como ficciones pero esto no invalida la ley, no la hace falsa o inútil, si puede ser usada para predecir fenómenos sigue siendo tan verdadera como siempre. Ahora sabemos que hay fallas en la ley de Newton y que otra ley debida a Einstein la ha sustituido. Se ha supuesto que la razón de esto es que ya no se cree en las fuerzas, sólo que éste no es el caso, dado que si las fuerzas existen o no simplemente no importa, lo que importa es que la ley de Newton no permite hacer predicciones exactas sobre algunos hechos astronómicos como, por ejemplo, la posición exacta del planeta Mercurio. La otra fórmula, la de Einstein, permite hacer las predicciones correctas. Esta nueva ley es una fórmula en términos geométricos, es matemática pura y nada más, no habla en ningún momento de fuerzas. Finalmente tampoco importa si las "lomas y valles en el espacio-tiempo de la teoría general de la relatividad" existen. La ley de Einstein es más verdadera que la de Newton no porque sustituye fuerzas por lomas y valles sino debido a que es una fórmula de predicción más precisa.

No solamente se puede decir que las fuerzas no existen sino que la "gravitación" tampoco. La gravitación no es una "cosa" sino una fórmula matemática que existe sólo en las cabezas de los matemáticos. Siendo una fórmula matemática no puede causar que un cuerpo caiga y en este mismo sentido la gravitación no hace que caiga un cuerpo.El lenguaje ordinario nos puede engañar, se habla de la ley "de" la gravitación y se supone que esta ley se "aplica a" los cuerpos materiales, debido a esta confusión equivocadamente suponemos que hay dos cosas, la gravitación y los cuerpos materiales, y que una de estas cosas, la gravitación, produce cambios en la otra.

En realidad nada existe excepto los cuerpos materiales, y en este sentido ni la ley de Newton ni la de Einstein son, estrictamente hablando, una ley de gravitación. Ambas son leyes que describen el movimiento de cuerpos, que nos dicen cómo esos cuerpos se mueven. Stace no deja de preguntarse por qué los seres humanos inventamos monstruos metafísicos como las fuerzas y las lomas y valles en el espacio-tiempo, su respuesta es que esto es debido a que los humanos no nos hemos emancipado de la absurda idea de que la ciencia puede "explicar" las cosas. No era suficiente decir "cómo" se mueven los planetas sino también se pretendía saber "por qué" se mueven del modo en que lo hacen. La respuesta de Newton fue, debido a "fuerzas". Las lomas y valles de la teoría de la relatividad general tienen la misma razón. Sin embargo las leyes científicas apropiadamente formuladas, nunca "explican" nada, simplemente establecen de modo abreviado y general qué ocurre. Ningún científico o filósofo sabe por qué las cosas ocurren ni puede "explicar" nada. Las leyes de la ciencia no hacen nada más que establecer el hecho bruto de que "cuando A ocurre, B siempre ocurre también". Las leyes de esta forma son las que nos permiten predecir. Si los científicos sustituyen fuerzas por colinas y lomas, únicamente están sustituyendo una superstición por otra.

Stace considera a los átomos de modo análogo a las fuerzas y a las lomas y valles del espacio-tiempo. Afirma que en realidad la formulación matemática, que es el modo científico de establecer la teoría atómica, está constituida por simples fórmulas para calcular lo que ocurre; sin embargo, así como la mente humana requiere que a la fórmula de gravitación le corresponda una "cosa" real que llamamos "gravitación" o "fuerza", así la misma debilidad humana exige que deba haber una cosa real que corresponda a la formulación atómica, a esta cosa le llamamos átomo. Esto aunque en realidad los átomos no causen sensaciones, ni la gravitación cause que las manzanas caigan. Lo único que puede causar una sensación es otra sensación y la relación de átomos a sensaciones no es una relación de causa a efecto sino la relación de una fórmula matemática a los hechos que le permiten al matemático realizar cálculos. La conclusión de la argumentación de Stace es que estrictamente hablando, nada existe excepto sensaciones (y las mentes que las perciben). El resto es solo una construcción mental y ficción. Esto no implica que concebir una estrella o un electrón sea falso o carezca de valor sino que su verdad y valor radica en su capacidad para ayudarnos a organizar nuestras experiencias y a predecir nuestras sensaciones.

3. Realismo e instrumentalismo

Por una parte, hay construcciones humanas que son las teorías científicas y, por otra, tenemos el mundo al que esas teorías pretenden aplicarse (Brock, 2014; Psillos, 1999). ¿Cuál es la relación entre ambas? El enfoque, llamado realismo, afirma que el mundo es realmente como las teorías afirman. Por tanto, las partículas de la teoría cinética no son ficciones teóricas útiles sino átomos y moléculas con existencia real, y los campos eléctricos y magnéticos del electromagnetismo de Maxwell también son reales, así como las partículas con carga eléctrica que obedecen la ecuación de Lorentz. Un enfoque alternativo, llamado instrumentalismo, sostiene que los elementos teóricos de la ciencia no describen la realidad. Desde este punto de vista las teorías son sólo instrumentos de predicción y las partículas de la teoría cinética, los campos eléctricos y magnéticos de la teoría de Maxwell, así como las partículas con carga eléctrica que obedecen la ecuación de Lorentz, son nada sino meras ficciones.

Por lo general, el realismo se asocia con la idea de verdad pues para el realista la ciencia pretende dar descripciones verdaderas de lo que realmente es el mundo. Al instrumentalismo también se le asocia una idea de verdad pero más restringida ya que para éste una descripción del mundo observable es verdadera sólo si la descripción dada es correcta o no. Para el instrumentalista no es relevante si existen o no los elementos teóricos propuestos por una teoría sino solamente si la teoría describe o no el mundo observable. Para él la ciencia no es un medio para cubrir la distancia entre lo observable y lo inobservable.

La discusión filosófica del realismo y de diferentes formas de antirrealismo es una de las más activas y fructíferas de la filosofía de la ciencia. Preguntas como: ¿Deben las teorías científicas ser entendidas como descripciones verdaderas del mundo? ¿Debemos aceptar que las entidades que postulan las teorías realmente existen? Son fundamentales en este debate.

Por otra parte, los realistas conceden que muchas teorías aceptadas en el pasado han terminado siendo consideradas falsas, sin embargo insisten que de modo claro hay un progreso en la ciencia. Es bien conocido que entre realistas e instrumentalistas hay una cantidad de posiciones intermedias, tres ejemplos representativos son los siguientes: The Ontological

Status of Theoretical Entities, de Grover Maxwell (1962) en donde se argumenta que la línea entre lo que es observable y no observable es en el mejor de los casos difusa; The Scientific Image, de Bas van Fraassen (1980), que argumenta contra la posición de Maxwell y formula su propio empirismo constructivo, de acuerdo a esta versión de antirrealismo uno puede aceptar teorías científicas y permanecer agnóstico sobre su verdad requiriendo solamente que las teorías sean empíricamente adecuadas o verdaderas acerca de los observables; por último, Alan Musgrave (1985) en su trabajo, Realism versus Constructive Empiricism, critica el enfoque de Van Fraassen señalando que uno de los más populares argumentos del realismo científico, el del "milagro" sobrevive la crítica de Van Fraassen. Brevemente, este argumento sostiene que el realismo es la mejor explicación para el éxito de la ciencia, si el realismo fuera falso nuestras teorías científicas serian un milagro.

4. La evidencia científica

Por lo menos, desde la época de los antiguos griegos se ha postulado la existencia de los átomos, esas esferas de materia duras e invisibles tan pequeñas que constituían los diferentes elementos de los que se forman los objetos materiales en el mundo físico. Esta idea fue despreciada durante muchos siglos hasta que volvió a surgir en diferentes formas y contextos durante la Revolución Científica del siglo XVII gracias a pensadores como Descartes, Boyle, Newton y Gassendi. Así mismo, la investigación del calor y de la química durante el siglo XIX aportó grandes apoyos a la existencia de estos supuestos átomos. Finalmente, a lo largo del siglo XX se obtuvo evidencia que muchos consideran como la confirmación de la existencia del átomo más allá de toda duda razonable.

A la pregunta: ¿Cómo sabemos que los átomos existen? Los científicos tienen, o afirman tener, muchas respuestas con evidencia sólida, algunas de las más importantes, en orden cronológico, son: 1) La ley de las proporciones definidas o Ley de Proust, 2) la teoría cinética de los gases, 3) el movimiento Browniano y 4) imágenes de microscopio de efecto túnel.

La ley de las proporciones definidas o ley de Proust fue obtenida a partir de las investigaciones químicas realizadas a finales del siglo XVIII y principios del XIX las cuales mostraban que los elementos participan en los compuestos en proporciones que siempre son expresables como números naturales asignados a cada elemento. Estos compuestos nunca presentaban la participación de un elemento como una fracción de una unidad, sugiriendo que son unidades indivisibles de cada elemento, que podemos llamar átomos. Por ejemplo, 1 unidad de sodio se combinaba con una unidad de cloro para obtener 1 unidad de sal (cloruro de sodio), pero nunca 1,5 unidades de sodio con 1,1 unidades de cloro. Esta ley, puramente experimental, recibió apoyo teórico cuando John Dalton publicó su teoría atómica en el tratado A New System of Chemical Philosophy en 1808; también, cuando Amadeo Avogadro en 1811 propuso la hipótesis según la cual: “En volúmenes iguales de todos los gases, medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura, existen igual número de moléculas”, actualmente esto se enuncia como: “Un mol de diferentes sustancias contiene el mismo número de moléculas". El número de Avogadro se interpreta como el número de moléculas presentes en un mol de cualquier sustancia y se considera como fuerte evidencia de la existencia de átomos y moléculas.

La teoría cinética de los gases fue desarrollada a lo largo del siglo XIX. Las leyes de la termodinámica muestran el comportamiento macroscópico de las sustancias. De hecho, esta teoría no requiere considerar ninguna estructura microscópica para la materia. Sin embargo Clausius y Maxwell demostraron con la teoría cinética que la teoría atómica de la materia era capaz de dar cuenta de muchas propiedades de la materia que no pueden ser fácilmente explicadas de cualquier otra manera. La primera descripción sistemática de esta teoría fue dada por Rudolf Clausius en 1857 en su artículo titulado On the nature of the motion, which we call heat, en donde exitosamente deriva la ecuación de estado de un gas monoatómico. La ecuación de estado de la termodinámica de un gas ideal es una ecuación que relaciona parámetros como temperatura, presión y volumen y fue obtenida a partir de la suposición de que existen pequeñas partículas que pueden ser átomos o moléculas. Es decir; se pudo mostrar que las propiedades de los gases y el comportamiento del calor como una forma de energía en diferentes situaciones se podían explicar por los movimientos e interacciones de átomos que obedecen las leyes del movimiento de Newton. Así mismo, con la teoría cinética se obtuvo el calor especifico (la inercia térmica de un sistema) de gases formados por partículas de una sola especie, y los llamados coeficientes de transporte como la viscosidad, la conductividad térmica y el coeficiente de difusión. Partiendo de esta teoría, en 1860 James Clerk Maxwell publicó una serie de artículos titulados Illustrations of the dynamical theory of gases en donde da a conocer su ley de distribución de las velocidades moleculares, que es la primera ley estadística de la historia, la cual proporciona el número de moléculas cuya velocidad está en un rango dado. En 1877, Ludwig Boltzmann propone la segunda ley de la termodinámica entendida como una expresión del comportamiento estadístico de un gran número de partículas.

1.2.- MEDICIONES

¿Qué es la medición?

La medición es el proceso a través del cual se compara la medida de un objeto o elemento con la medida de otro. Para esto, se deben asignar distintos valores numéricos o dimensiones utilizando diferentes herramientas y procedimientos.

More Content by Concepto

Para medir se compara un patrón elegido con otro objeto o fenómeno que tenga una magnitud física igual a este para así calcular cuántas veces el patrón está contenido en esa magnitud en especial. Sin embargo, esta acción que parece tan simple de calcular, se dificulta cuando lo que se desea medir y expresar numéricamente es intangible o incluso evanescente.

Ver además: Medir

¿Cómo debe ser el proceso de medición?

El proceso de medición busca distinguir objetos, fenómenos o casos para clasificarlos. Este proceso responde a ciertos requisitos y principios:

Debe ser válido. Deben existir formas de demostrar la manera en la que se realiza la medición.

Debe ser fiable. La medición se debe aplicar en varios casos y debe proporcionar siempre los mismos -o similares- resultados.

Debe ser preciso. Debe tener mínimos errores, para eso se deben utilizar herramientas e instrumentos de medición sensibles y fieles.

¿Cómo medir con precisión?

Existen ciertas previsiones para mejorar los resultados de una medición:

Emplear las herramientas adecuadas para el tipo de medición y asegurarse de que se encuentren en buen estado.

Reducir los errores que puedan ocurrir a la hora de manipular el instrumento de medición, así como los errores sistemáticos.

Repetir la mayor cantidad de veces posible la medición y realizar un promedio de los resultados obtenidos.

Reducir toda causa del medio externo que pueda afectar la medición.

Tipos de medición

Medición directa. Se utiliza un instrumento de medición que compara la variable a medir con un determinado patrón. En este tipo de medición se comparan dos objetos que tienen la misma característica. Por ejemplo: se calcula la longitud de un objeto comparándola con la longitud establecida en un calibrador; se mide la frecuencia de un objeto con la frecuencia de un estroboscopio.

Medición indirecta. Se obtiene la medición deseada calculando una o más magnitudes diferentes que se obtuvieron mediante medición directa. Esto se debe a que no siempre se pueden calcular las medidas entre variables de manera directa, ya sea por su tamaño, naturaleza u otros factores. Por ejemplo: conocer la aceleración de la gravedad.

Medición reproducible. Se obtiene siempre el mismo resultado si se logran efectuar comparaciones entre la misma variable y el aparato para medir utilizado. Por ejemplo: si se mide varias veces el mismo lado de una cama, los resultados serán siempre iguales.

Instrumentos de medición

instrumentos de medicion cronometro

Cada magnitud puede medirse con diversos instrumentos.

Los instrumentos de medición son las herramientas que se utilizan para tomar la medida de un objeto u elemento. Existen diversos tipos de instrumentos que se clasifican según lo que miden:

Instrumentos para medir tiempo. Reloj, cronómetro, temporizador.

Instrumentos para medir peso. Báscula, balanza, dinamómetro, barómetro.

Instrumentos para medir longitud. Regla, cinta métrica, distanciómetro, calibrador.

Instrumentos para medir temperatura. Termómetro, pirómetro, termohigrógrafo.

Instrumentos para medir corriente eléctrica. Amperímetro, polímetro, galvanómetro.

Unidades de medida

Las unidades de medida son cantidades estándares que se utilizan como patrón para conocer la medida de objetos y elementos. El número que se obtiene en toda medición es fruto de la comparación del objeto o elemento y la unidad de medida establecida.

El Sistema Internacional de Unidades reconoce siete unidades de medida básicas: kilogramo, metro, amperio, kelvin, segundo, candela y mol. Estas unidades se utilizan en la mayoría de los países del mundo y representan respectivamente: peso, longitud, intensidad de corriente eléctrica, temperatura, tiempo, intensidad luminosa y cantidad de sustancia.

Error de medición

Los resultados obtenidos en una medición no siempre son exactos, ya que pueden ocurrir distintos tipos de errores:

Errores sistemáticos. Ocurren de igual modo todas las veces que se realice una determinada medición debido a una falla en el instrumento de medición o un error en el método utilizado. Son errores que se atribuyen a una ley física por lo que se pueden determinar sus causas y ser corregidos.

Errores aleatorios. Ocurren de manera inevitable y se dan por cambios en el ambiente físico en el que se realiza la medición o fallas en el operador. Son errores que no se atribuyen a una ley física, por lo que no pueden ser eliminados.

Medición en química

La química es la ciencia que estudia la composición y estructura de la materia. La materia tiene ciertas características medibles como el peso, la masa y la temperatura, y existen diversos instrumentos que se utilizan para realizar mediciones sobre estas propiedades. Entre los más representativos están:

Balanza. Objeto que se utiliza para medir la masa de dos objetos.

Termómetro. Instrumento que se utiliza para medir la temperatura de una sustancia.

Probeta. Cilindro graduado que se utiliza para medir volúmenes.

Pipeta. Instrumento graduado que se utiliza para medir volúmenes de líquidos.

Vaso de precipitado. Recipiente cilíndrico que se utiliza en laboratorios químicos y mide el volumen de un líquido.

Refractómetro. Instrumento que se utiliza para medir la densidad de una sustancia.

Calorímetro. Instrumento que se utiliza para medir la temperatura de una sustancia o cuerpo.

Matraz de Erlenmeyer. Instrumento de vidrio que se utiliza en el laboratorio químico para medir el volumen de una sustancia.

Medición en estadística

La estadística es la ciencia que recolecta y analiza datos que se comparan entre sí a partir de una serie de escalas de medición que sirven como referencia. Existen cuatro tipos de escalas de medición que varían según las características de los datos a comparar.

Escala nominal. Escala de medición cualitativa que clasifica variables en grupos o categorías y las identifica con un nombre, símbolo o número elegido por el investigador.

Escala ordinal. Escala de medición que clasifica variables en grupos o categorías y las identifica con un nombre, símbolo o número que las jerarquiza.

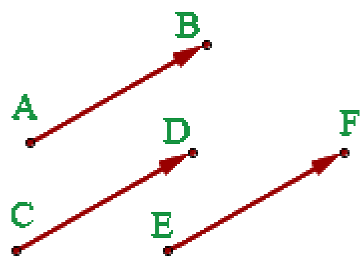
Escala de intervalo. Escala de medición numérica que mide la diferencia real y numérica entre dos variables. En este tipo de escalas el 0 no significa la ausencia de valor, sino que está dispuesto de manera arbitraria en algún lugar de la escala. Por ejemplo: la temperatura.

Escala de razón. Escala de medición numérica que mide la diferencia real y numérica entre dos variables. En este tipo de escalas el 0 representa la ausencia de medida. Por ejemplo: el peso.

- **Definiciones importantes sobre vectores**
- **Ejemplos sobre vectores**

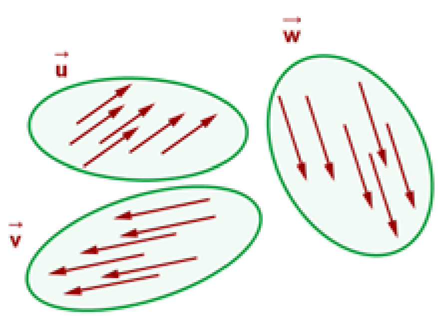
Definiciones importantes sobre vectores

Vectores equipolentes



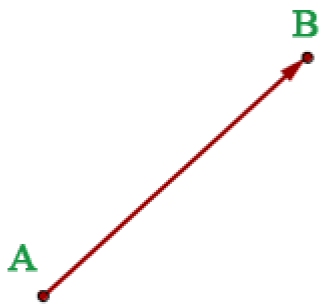
Dos vectores son **equipolentes** cuando tienen igual **módulo, dirección y sentido**.

Vectores libres



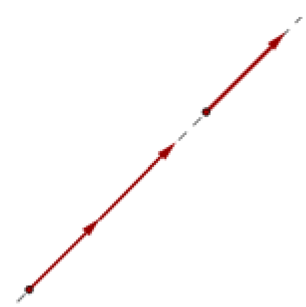
El conjunto de todos los **vectores equipolentes** entre sí se llama **vector libre**. Es decir los **vectores libres** tienen el mismo **módulo**, **dirección** y **sentido**.

Vectores fijos



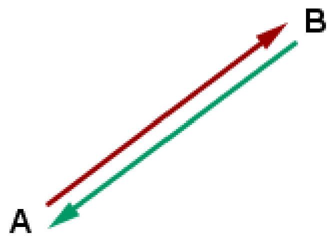
Un **vector fijo** es un representante del **vector libre**. Es decir, los vectores fijos tienen el mismo **módulo**, **dirección**, **sentido** y **origen**.

Vectores ligados



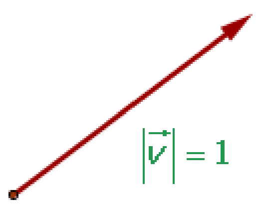
Los **vectores ligados** son vectores **equipolentes** que actúan en la misma recta. Es decir, los vectores fijos tienen el mismo **módulo**, **dirección**, **sentido** y se encuentran en la misma **recta**.

Vectores opuestos



Los **vectores opuestos** tienen el mismo **módulo**, **dirección**, y distinto **sentido**.

Vectores unitarios

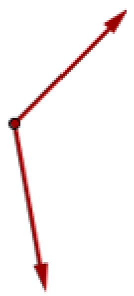


Los **vectores untario** tienen de **módulo**, la **unidad**. Esto quiere decir que un vector $\vec{v}$ es unitario si

$$||\vec{v}|| = 1$$

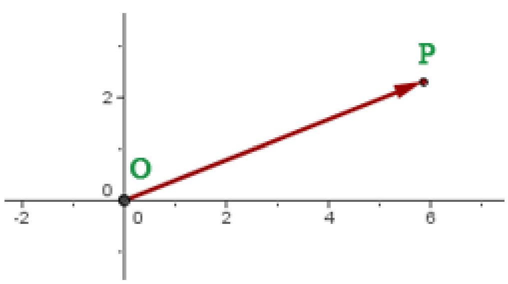
Para obtener un **vector unitario**, de la **misma dirección** y **sentido** que el **vector** dado se **divide** éste por su **módulo**.

Vectores concurrentes



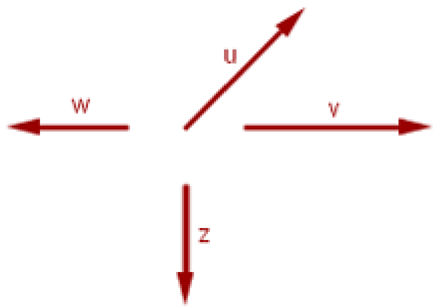
Los **vectores concurrentes** tienen el mismo **origen**.

Vector de posición



El **vector** $\overrightarrow{OP}$ que une el **origen** de coordenadas $O = (0, 0)$ con un **punto** $P = (P_1, P_2)$ se llama **vector de posición** del punto P.

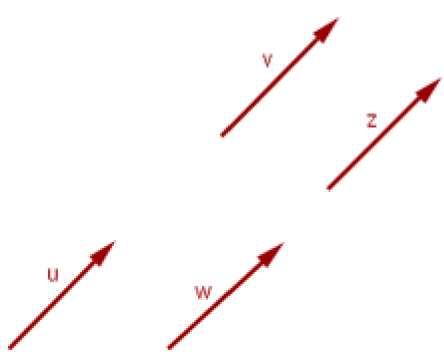
Vectores linealmente independientes



Hay dos formas principales de definir esto. La primera es que varios **vectores libres** del plano son **linealmente independientes** si ninguno puede expresarse como una combinación lineal de los demás. La segunda es que varios **vectores libres** del plano son **linealmente independientes** si es que si existe una **combinación lineal** de ellos que sea igual al **vector cero**, sin que sean **cero** todos los **coeficientes** de la **combinación lineal**. Esto es, los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ son linealmente independientes si existen números reales $a_1, a_2, \cdots, a_n$ no todos cero (al menos algún $a_i \neq 0$) tal que

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

Vectores linealmente dependientes



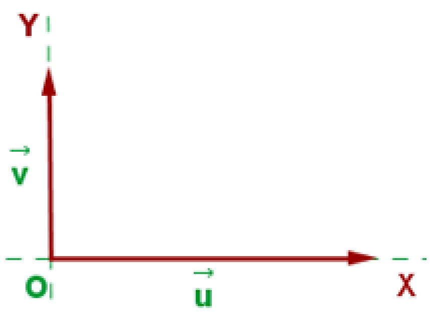
De igual manera hay dos formas principales de definir esto. La primera es que varios **vectores libres** del plano son **linealmente dependientes** si alguno puede expresarse como una combinación lineal de los demás. La segunda es que varios **vectores libres** del plano son **linealmente dependientes** si la única manera de que una combinación lineal de estos sea igual al vector cero es que todos los coeficientes sean igual al escalar cero. Esto es, tenemos que si se cumple que

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

entonces esto solo puede pasar si

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

Vectores ortogonales

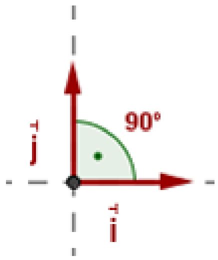


Dos **vectores** son **ortogonales** o **perpendiculares** si su **producto escalar** es **cero**. Esto es, los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son ortogonales si y sólo si

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1u_1 + v_2u_2 = 0.$$

Vectores ortonormales

UDS Universidad



Dos **vectores** $\vec{v} = (v_1, v_2)$ **y** $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son **ortonormales** si cumplen los siguiente:

-
- Son ortogonales:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

- Son unitarios:

$$||\vec{v}|| = 0, \qquad ||\vec{u}|| = 0$$

1.4.- OPERACIÓN CON VECTORES

MAGNITUDES FÍSICAS

Las magnitudes físicas o variables se clasifican en dos grandes grupos:

Las escalares: Son aquellas que quedan definidas exclusivamente por un módulo, es decir, por un número acompañado de una unidad de medida. Es el caso de masa, tiempo, temperatura, distancia. Por ejemplo, 5,5 kg, 2,7 s, 400 °C y 7,8 km, respectivamente.

Las vectoriales: Son aquellas que quedan totalmente definidas con un módulo, una dirección y un sentido. Es el caso de la fuerza, la velocidad, el desplazamiento. En estas magnitudes es necesario especificar hacia dónde se dirigen y, en algunos casos dónde se encuentran aplicadas.

Todas las magnitudes vectoriales se representan gráficamente mediante vectores, que sesimbolizan a través de una flecha.

Vector

Un vector tiene tres características esenciales: módulo, dirección y sentido. Para que dos vectores sean considerados iguales, deben tener **igual módulo**, **igual dirección e igual sentido.**

Los vectores se representan goemétricamente con flechas y se le asigna por lo general una letra que en su parte superior lleva una pequeña flecha de izquierda a derecha como se muestra en la figura.

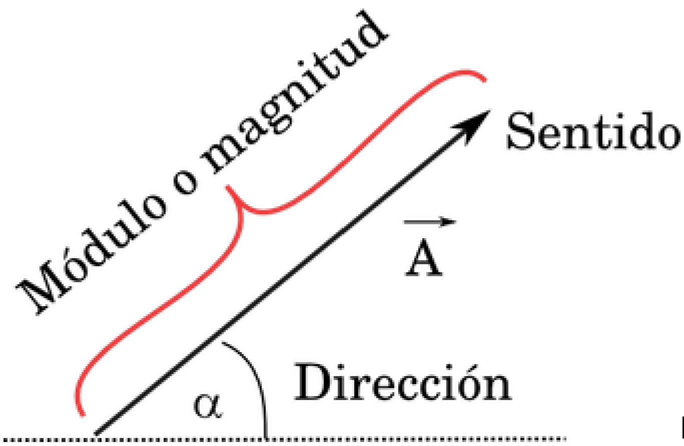


Imagen 1: Muestra las principales características de un vector

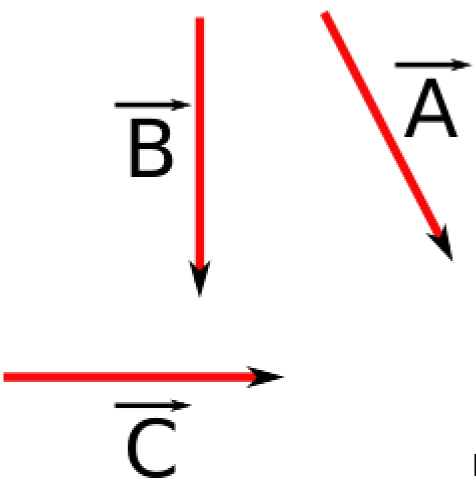


Imagen 2: Vectores con igual módulo, pero distintas direcciones

Módulo: está representado por el tamaño del vector, y hace referencia a la intensidad de la magnitud (número). Se denota con la letra solamente **A o |A|**

- *Vectores de igual módulo.* Todos podrían representar, por ejemplo, una velocidad de 15 km/h, pero en distintas direcciones, por lo tanto todos tendrían **distinta velocidad.**
- *Vectores de distinto módulo*. Se espera que el vector de menor tamaño represente por ejemplo una velocidad menor que la de los demás.
- *Vectores de distinto módulo:* Así, los vectores de la figura podrían representar velocidades de 20 km/h, 5 km/h y 15 km/h, respectivamente.

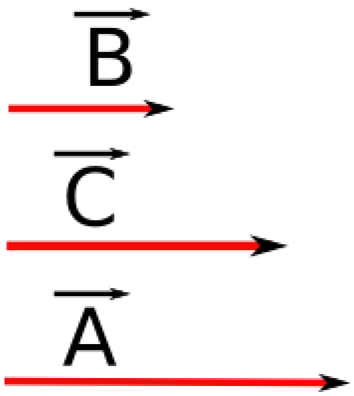


Imagen 3: Muestra tres vectores de distinto módulo, pero igual dirección y sentido

Dirección: corresponde a la inclinación de la recta, y representa al ángulo entre ella y un eje horizontal imaginario (ver figura 2) . También se pueden utilizar los ejes de coordenadas cartesianas **(x, y y z)** como también los puntos cardinales para la dirección.

- *Vectores de distinto módulo:* Dos vectores tienen la misma dirección cuando la inclinación de la recta que los representa es la misma, es decir, cuando son paralelos.
- *Vectores de igual dirección*: Sin importar hacia dónde apuntan o cuál es su tamaño, los vectores de la figura son paralelos, por lo que tienen la misma dirección. (figura 3)

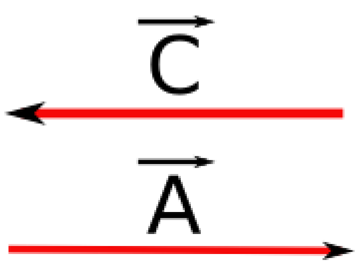


Imagen 4: Representa dos vectores con igual módulo, dirección, pero sentidos contrarios.

Sentido: está indicado por la punta de la flecha. **(signo positivo que por lo general no se coloca, o un signo negativo)**. No corresponde comparar el sentido de dos vectores que no tienen la misma dirección, de modo que se habla solamente de vectores con el mismo sentido o con sentido opuesto.

Representación geométrica de un Vector

Ya has aprendido que los vectores son definidos a través de tres características, que son: **módulo, dirección y sentido.** Aunque su posición en el espacio no es uno de los componentes para definirlo, el estudio de los vectores se facilita si los ubicamos en un sistema decoordenadas cartesianas que nos ayude a tener mayor precisión, de manera de poder representarlos de una forma algebraica como de una manera geométrica.

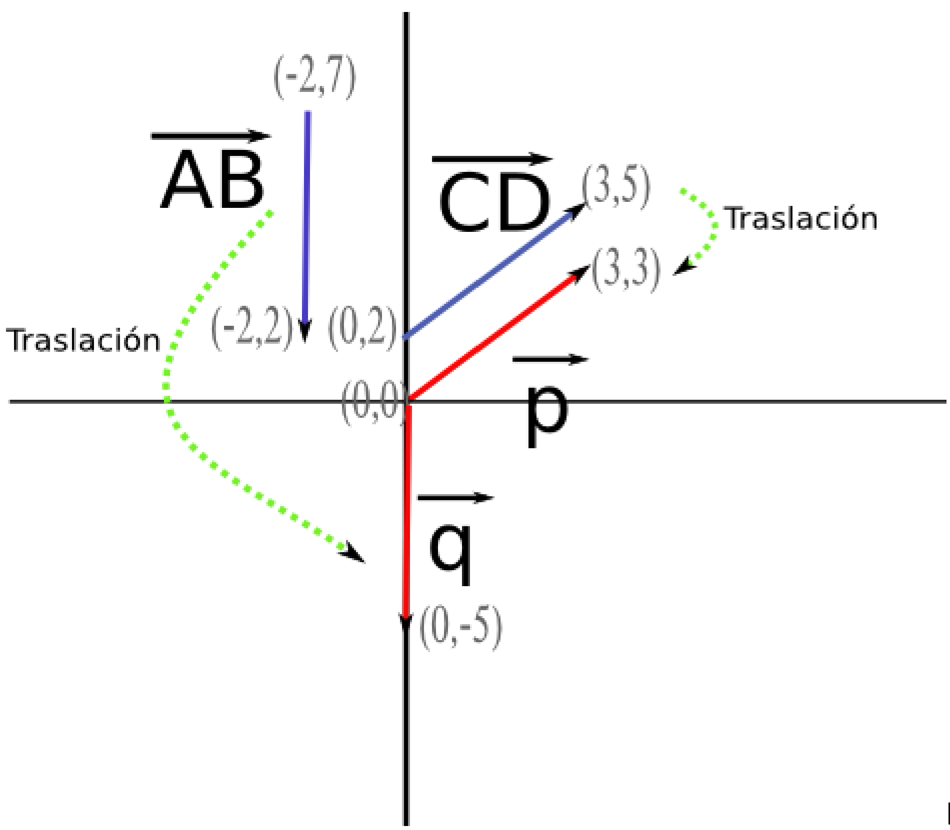


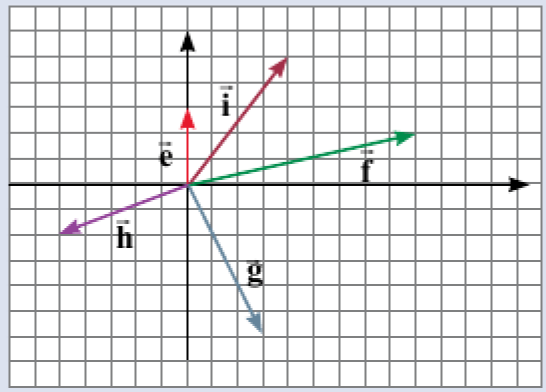
Imagen 5: Muestra la traslación de los vectores al origen

Una de las características es que cuando tenemos un vector que no está en el origen de nuestro plano cartesiano, lo podemos trasladar, de manera que siempre el origen sea el (0,0) y así facilitar nuestros cálculos, pues sólo necesitaremos el punto final para determinarlo.

En el dibujo anterior hemos llamado **p** al vector **CD** trasladado. Por otro lado hemos llamado **q** al vector **AB** trasladado. Si sus puntos de origen se trasladan al origen, veremos que el vector que antes tenía como coordenadas **(0,2)** y **(3,5)** ha sido traslado, de manera que sólo debemos identificar el punto final que en este caso corresponde a **(3,3).** De igual forma se ha procedido para el vector **q.**

Actividad modelada

Grafica los vectores $\vec{e}$ (0, 3), $\vec{f}$ (9, 2), $\vec{g}$ (3, – 6), $\vec{h}$ (–5, – 2), y $\vec{i}$ (4, 5), calcula el módulo de cada uno de ellos y ordénalos en forma creciente.



Los vectores mencionados se encuentran graficados en la figura, y a continuación se calculará el módulo de ellos.

El módulo del vector $\vec{e}$ es trivial, puesto que es igual a 3 unidades, y para obtenerlo basta con contar los cuadritos en el plano cartesiano.

Un caso más interesante tenemos en cualquiera de los demás vectores. El módulo del vector $\vec{f}$, por ejemplo, se calcula como la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos **2** y **9** unidades:

$$\sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85} = 9,2\text{u}$$

Observa que en todos los casos el módulo corresponde a la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son los valores absolutos de las componentes cartesianas del punto final del vector cuando este se inicia en el origen.

Así, por ejemplo, el vector $\vec{g}$ tiene componentes **(3, –6)**, por lo que su módulo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos **3 u** y **6 u**, es decir, su módulo es $\sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 6,7\,\text{u}$.

Continuando con el mismo procedimiento para los demás vectores, se tendría que el orden creciente de los vectores según su módulo es:

1. $\vec{e}$, **módulo** $= \sqrt{9}\,\text{u} = 3\,\text{u}$
2. $\vec{h}$, **módulo** $= \sqrt{29}\,\text{u} = 5,4\,\text{u}$
3. $\vec{g}$, **módulo** $= \sqrt{45}\,\text{u} = 6,7\,\text{u}$
4. $\vec{i}$, **módulo** $= \sqrt{41} = 6,4\,\text{u}$
5. $\vec{f}$, **módulo** $= \sqrt{85}\,\text{u} = 9,2\,\text{u}$

Operaciones geométricas vectoriales

Al igual que los números, los vectores pueden operarse entre si, a través de la suma, la resta, la multiplicación por un escalar, la divición por un escalar, producto punto y producto cruz. Estos dos últimos son propios de los vectores.

Suma geométrica de vectores

Al sumar dos vectores se obtiene otro vector (vector suma o resultante). Para obtener el vector suma es necesario recurrir a lo que se conoce como "regla del paralelogramo". Esto es, se construye un paralelogramo que tenga los vectores como lados y se traza la diagonal del mismo para obtener el vector suma.

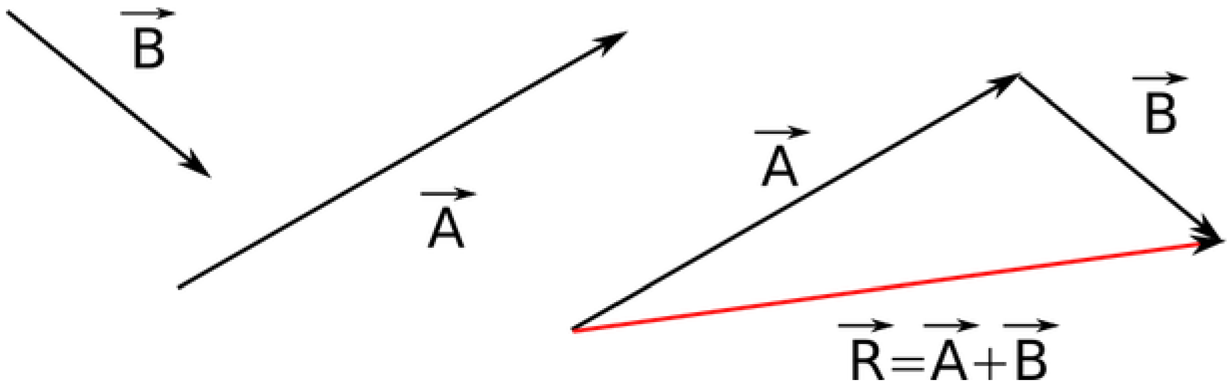


Imagen 6: Muestra la suma de vectores

Si queremos sumar **A + B** , se dibuja uno a continuación del otro, trasladándolo. El vector resultante es el que va desde el punto inicial del primero vector hasta el final del último. Cabe destacar que la suma es conmutativa es decir:

A + B = B + A

Cuando se quiere sumar más de un vector, se procede de la misma forma anterior, pero ahora se colocan uno a continuación del otro hasta el último. Luego la recta que une el inicio del primer vector con el término del último es el vector resultante.

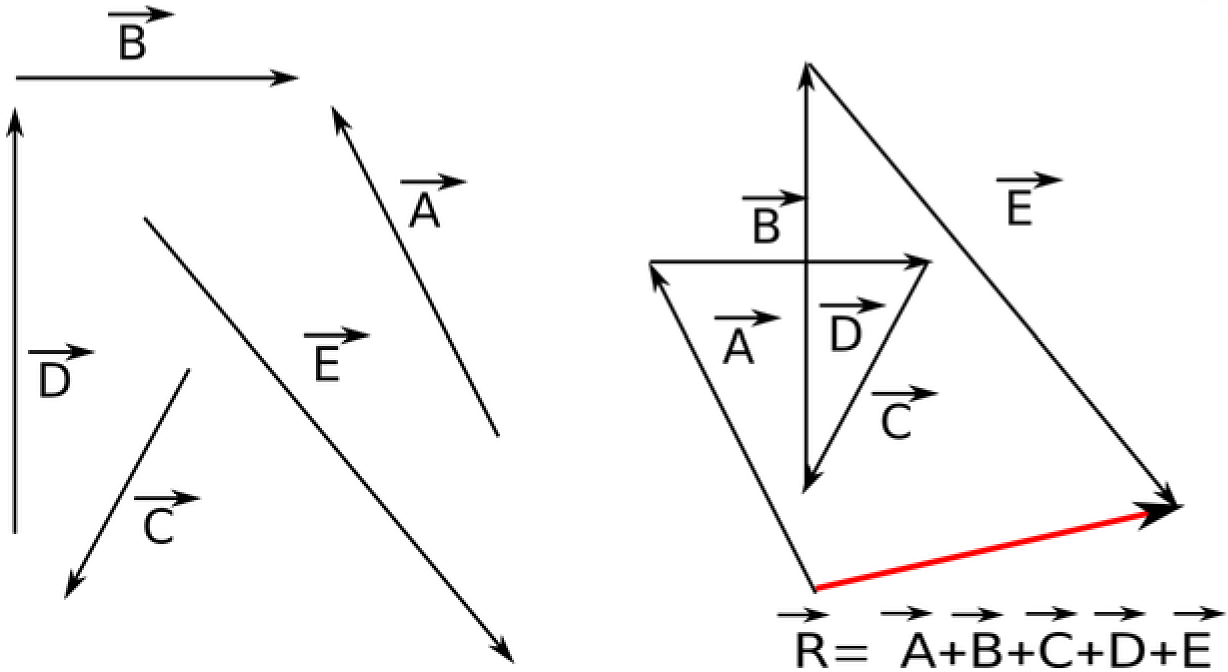


Imagen 7: Muestra la suma de más de dos vectores

Resta geométrica de vectores

Para la resta se procede de la misma forma que la suma, pero el vector que resta se debe dibujar con sentido contrario, o sea el signo negativo cambia el sentido del vector. Luego el vector resultante es el que va desde el punto inicial del primer vector, hasta el final del vector que se le cambio el sentido.

Cabe mencionar que la resta no es conmutativa

A - B es distinto a **B - A**

A - B = - (B - A)

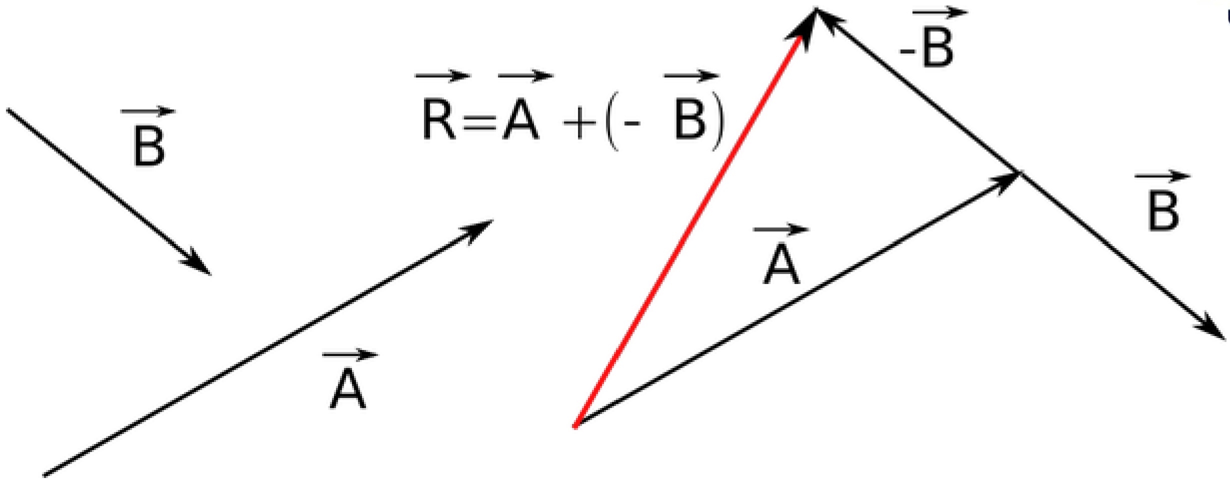
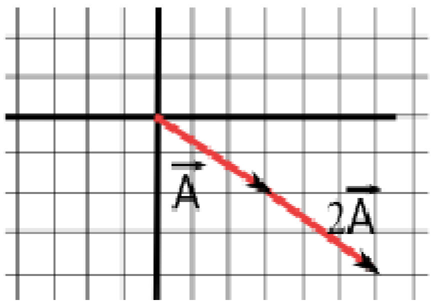


Imagen 8: Muestra la resta de dos vectores

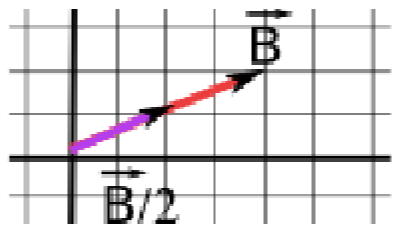
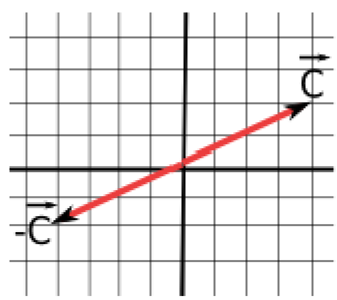
Multiplicación de un escalar por un vector

<table>
<tr>
<th>Multiplicación por un número positivo mayor que 1</th>
<th>Multiplicación por un número positivo menor que 1 y mayor que cero</th>
</tr>
<tr>
<td>En este caso el vector que se multiplica aumenta de módulo según el valor del escalar que multiplica y su dirección y sentido nunca cambian.
Ejemplo: sea el vector A= (3,-2) el cual se multiplica por 2, entonces tenemos:

Forma algebraica
2 · (3,-2) = (6,-4)

Forma geométrica
</td>
<td>En este caso el escalar que multiplica al vector, hace que el módulo disminuya en cierto valor manteniendo su dirección y sentido.
Ejemplo: Sea el vector B = (4,2) si lo multiplicamos por 0,5, entonces tenemos:

Forma algebraica
0,5 · (4,2) = (2,1)

Forma geométrica
</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="2">Multiplicación por un -1</th>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">En este caso, al multiplicar un vector por el escalar -1, o cualquier número negativo cambia el sentido del vector y si es un numero mayor o menor que 1 cambia el tamaño del módulo también.
Ejemplo: Sea C= (4,2) y se multiplica por -1, entonces tenemos que:
-1 · (4,2) = (-4,-2)
</td>
</tr>
</table>

Video Resumen

Representación algebraica de un vector

Componentes rectangulares

Se basa en escribir un vector como suma de otros dos los cuales son ortogonales (perpendiculares entre si), para ello se apoya en el plano cartesiano, los vectores que se suman estén en alguno de los ejes. Las componentes rectangulares se llaman así porque se fundamenta en la construcción de un rectángulo.

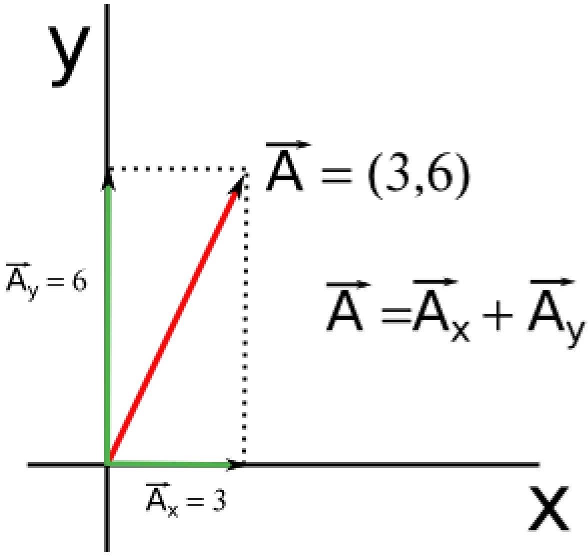


imagen 9: Todo vector se puede escribir como la suma de otro dos ortogonales

En la imagen se puede ver que el vector **A**, no es más que la suma de un vector en el eje **"X"** y otro en el eje **"Y"** . Cada uno de estos vectores se le conoce con el nombre de componente, asi el vector **Ax** es la componente **"X"** del vector **A.**

Para poder escribir correctamente estos vectores debemos introducir los vectores unitarios, los cuales se detallan a continuación.

Vectores Unitarios

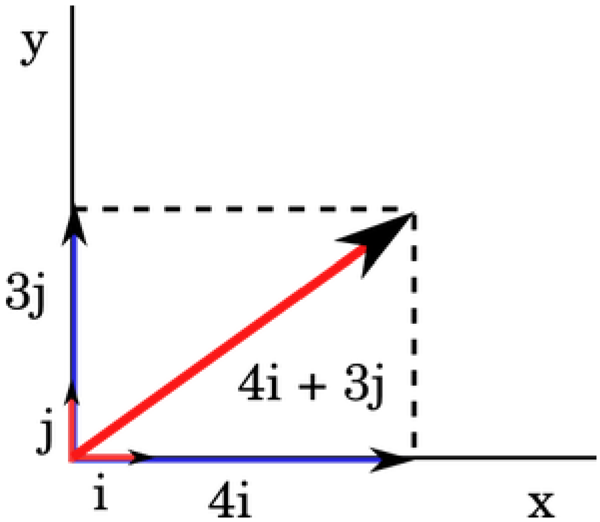


Imagen 10: Vector escrito según sus componentes

Se caracterizan porque su módulo es 1, por lo tanto sólo indican dirección. Como estamos trabajando con el plano cartesiano tendremos los siguientes vectores unitarios asociados a cada uno de los ejes.

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$\hat{u} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ *a cada vector unitario según el eje de coordenadas se le simboliza así:*
$\hat{u} = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

Suma y resta de manera algebraica

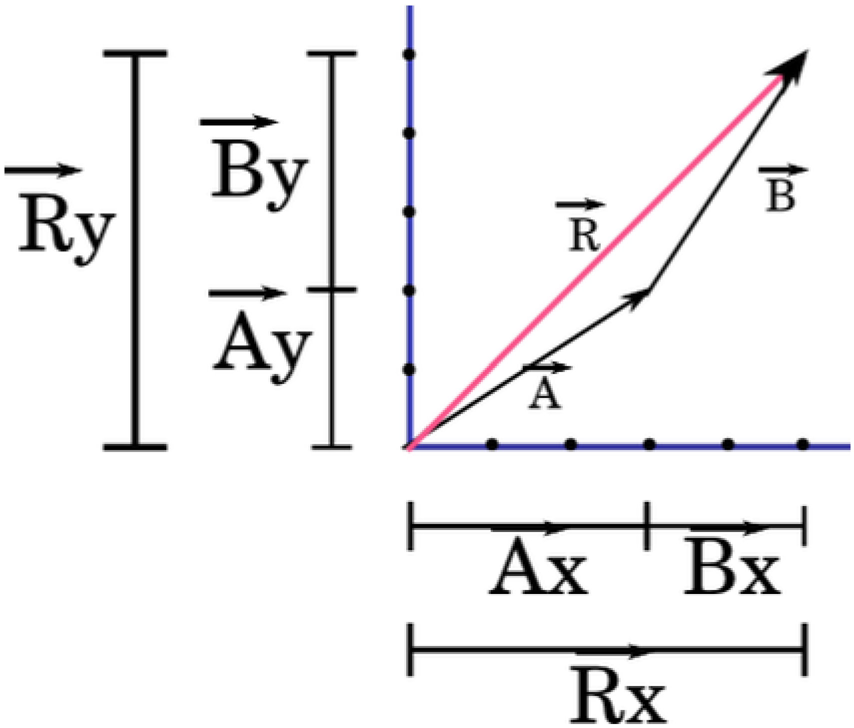


Imagen 11: suma algebraica de vectores

Sean dos vectores **A** y **B** que se quieren sumar, entonces procedemos de la manera gráfica que sabemos, lo que nos da como resultado el vector **R.**

Ahora lo que haremos es escribir tanto el vector **A** como el **B** según sus componentes, entonces nos damos cuenta que la suma de la componentes "**X**" del vector **A** y **B**, es la componente **"X"** del vector **R** y así también con el eje **"Y"**.

Por lo tanto para sumar vectores de manera algebraica se debe escribir cada vector según sus componentes y luego sumar las componentes **"X"** e **"Y"** de los vectores, el resultado será el vector resultante según sus componentes, con las cuales se puede sacar el módulo del vector **R.**

Sea los vectores:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x+B_x)\hat{i} + (A_y+B_y)\hat{j}$$

$$\vec{R}_x = (A_x+B_x)\hat{i}$$

$$\vec{R}_y = (A_y+B_y)\hat{j} \quad \textit{así}$$

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} \quad \text{y el módulo es: } |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2+R_y^2}$$

Ejemplo 1:Dados los vectores **A=(3,4)** *y* **B=(1,-2)** *¿Cuál es el vector resultante?*

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

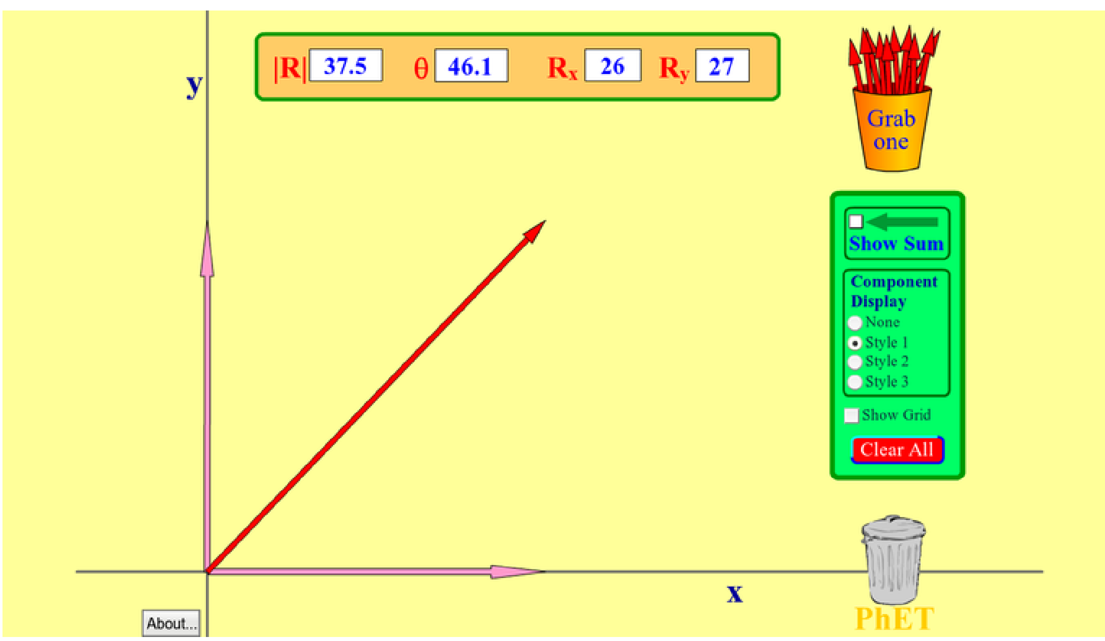
$$\vec{B} = 1\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (3+1)\hat{i} + (4-2)\hat{j}$$

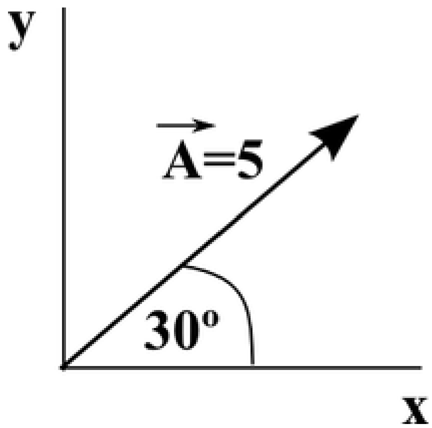
$$\vec{R} = 4\hat{i} + 2\hat{j} \quad \text{y el módulo es: } |\vec{R}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Componentes de un vector

A continuación una animación para estudiar y jugar sobre la suma, resta y componentes de un vector en un plano cartesiano



Animación para estudiar los vectores. Haz click sobre ella



Cálculo del las componentes de un vector

Como no hemos dado cuenta para sumar o restar y operar con los vectores es necesario escribirlo en sus componentes, para ello utilizaremos las proporciones trigonométricas.

Entonces al aplicar estas proporciones tenemos para el vector A que:

- Componente **x** es **5 cos 30**
- Componente **y** es **5 sen 30**
- El vector **A** según sus componentes es

Definimos el producto punto o producto escalar de **a** y **b**,y lo escribimos **a ·b** , como el número real

$$\vec{A} = 5 \ \cos 30 \hat{i} + 5 \ \sen 30 \hat{j}$$

$$\vec{A} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + 5 \cdot \frac{1}{2} \hat{j}$$

$$\vec{A} = 0{,}77 \hat{i} + 2{,}5 \hat{j}$$

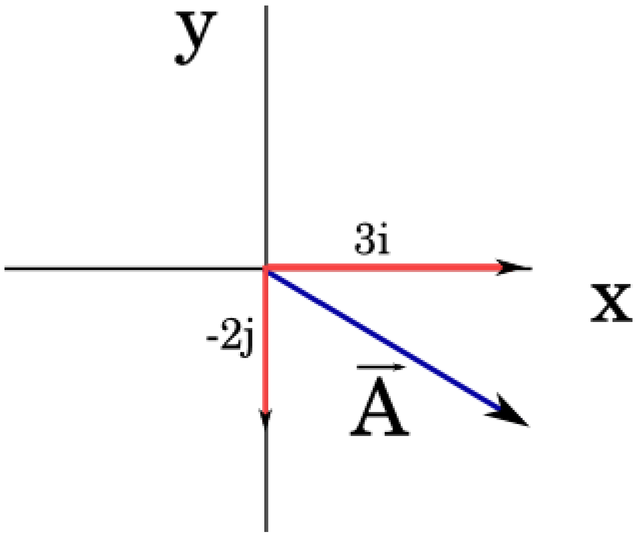
Recordemos que:

cos = ady / hip

sen = op / hip

tg = op / ady

Cálculo de la dirección de un vector

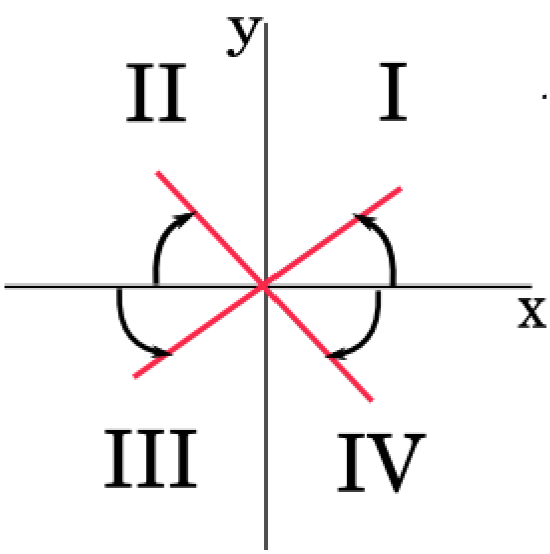


Dibujar el siguiente vector: **A = (3,-2)**

Al observar el dibujo del vector **A**, nos podemos dar cuenta que:

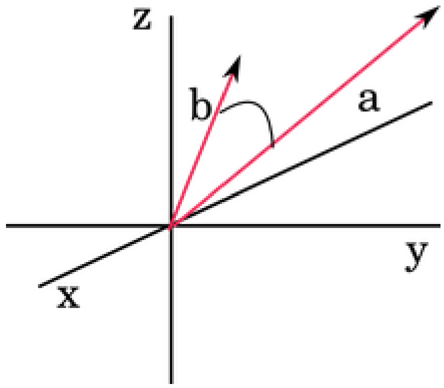
* **3i** sumado con **-2j** da como resultado el vector **A**.

* El ángulo con respecto al eje **+x**, en este caso está dado por la **tg⁻¹ 3/2,** el cual nos da como resultado un valor de **56,3°**. Para ello debe tenerse en cuenta que se está trabajando en el cuarto cuadrante por lo tanto si nos damos cuenta el denominador debe ser negativo, sin embargo no lo colocamos para el cálculo del ángulo, pero si sabemos que estamos trabajando en el cuarto cuadrante. LA CALCULADORA SIEMPRE ENTREGARÁ LOS ÁNGULOS CON RESPECTO AL EJE X, LOS SIGNOS SÓLO DARÁN EL CUADRANTE. (ver figura 2)



Producto vectoriales

Producto escalar



Supongamos que tenemos dos vectores **a** y **b** en **R³** y queremos determinar el ángulo entre ellos, esto es, el menor ángulo que forman a y b en el plano que ambos generan.

Definimos el producto punto o producto escalar de **a** y **b**, y lo escribimos **a·b** , como el número real que:

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \quad y \quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

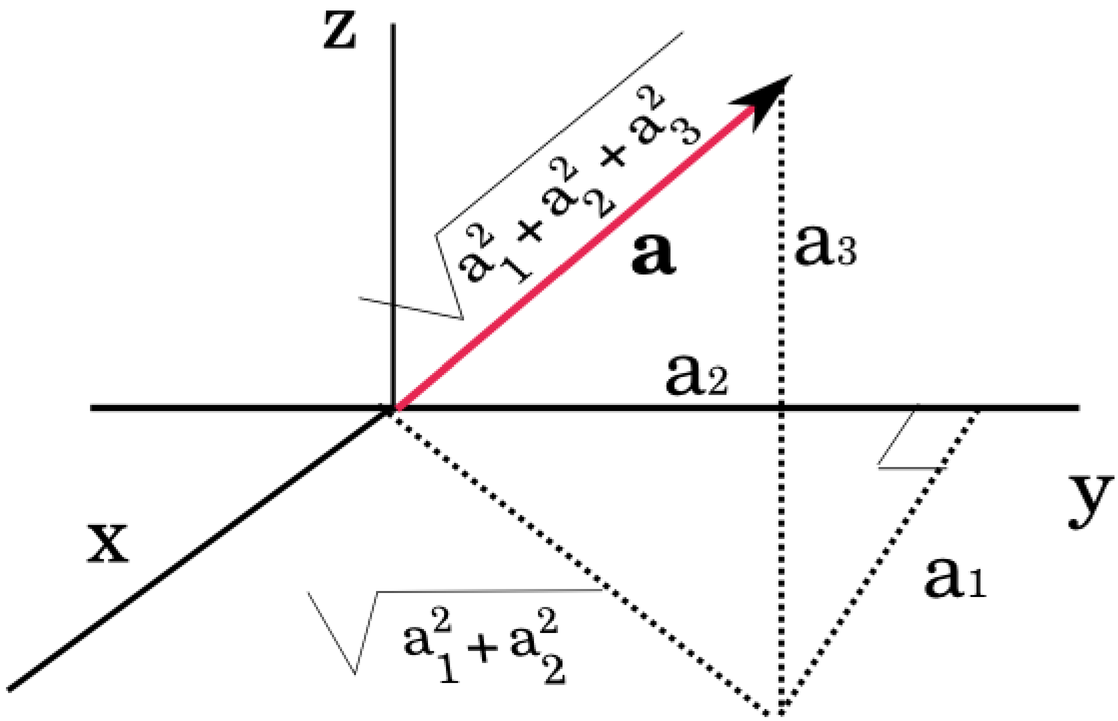
$$se\ define\ el\ produco\ punto\ entre\ \vec{a}\cdot\vec{b}\ como:$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\ b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Una forma equivalente de definir el producto escalar entre dos vectores en un espacio euclídeo corresponde al producto de sus módulos por el coseno del ángulo menor que forman. Esta notación es independiente del sistema de coordenadas elegido, por tanto, también de la base del espacio vectorial que escogemos.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |AB|\cos\theta$$

Se deduce del teorema de Pitágoras que la longitud del vector **a**= a1 **i** + a2 **j** + a3 **k** es:



Propiedades del producto escalar

1) $A \cdot B = B \cdot A$ Conmutatividad

2) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ Distributiva

3) $m(A \cdot B) = (mA) \cdot B = A \cdot (mB)$ Asociativa

4) $A \cdot A = 0$

Producto Cruz

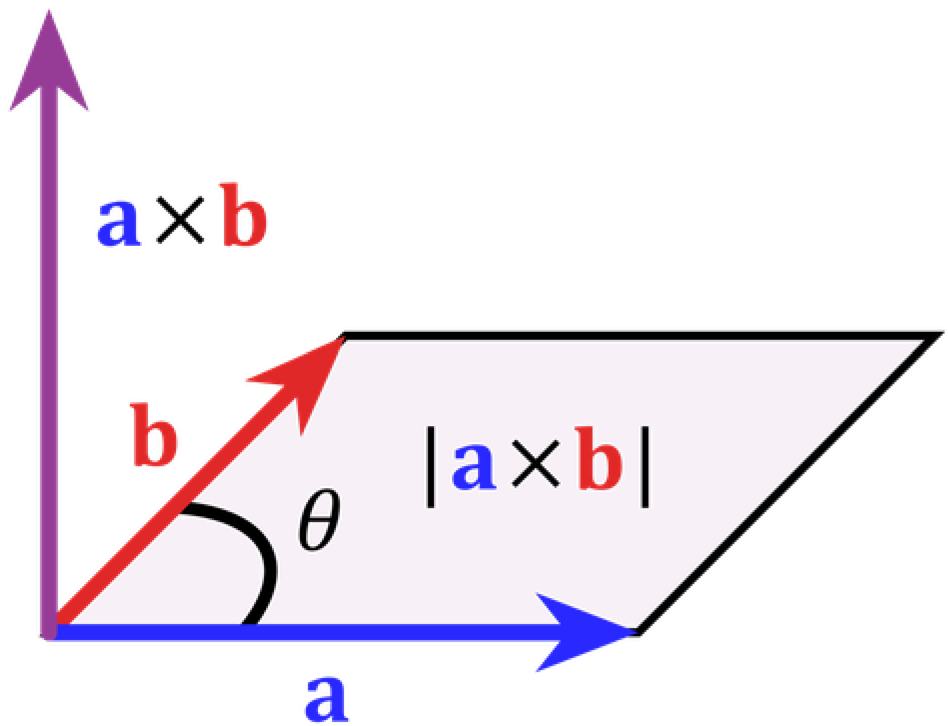
Sean dos vectores **A** y **B** en el espacio vectorial R^3. El producto vectorial entre ellos da como resultado un nuevo vector **C.** El producto vectorial se denota mediante **A *x* B**, por ello se lo llama también producto cruz. También se puede definir de una manera más sencilla en término de sus módulos donde:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\ sen\vartheta$$

donde **n** es un vector unitario y ortogonal a los vectores **A** y **B** y su dirección está dada por la regla de la mano derecha.

Regla de la mano derecha: Empuñe la mano y estire el dedo pulgar. Oriente los dedos empuñados en dirección del ángulo J (desde **A** hasta **B**), entonces el pulgar indica la dirección y sentido de J.

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0,$$
$$\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}$$
$$\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}$$



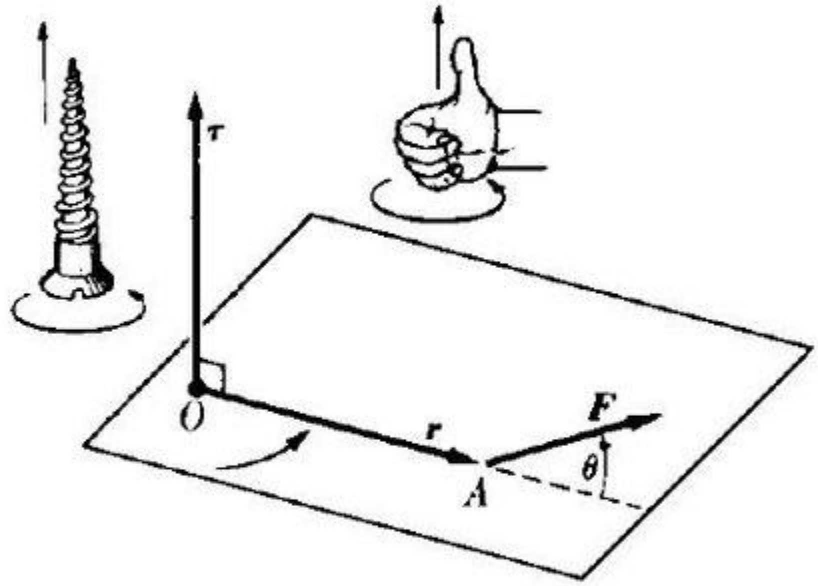
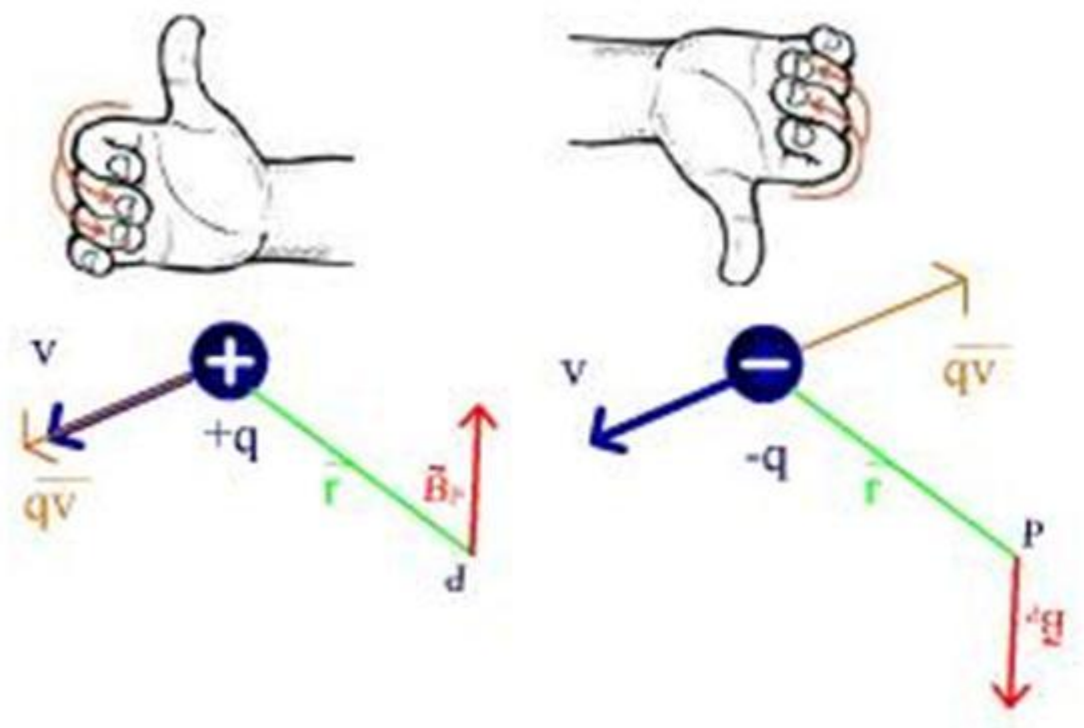


Fig. 4-8. Relación vectorial entre el torque, la fuerza y el vector posición.



Producto cruz en forma matricial

Sean los vectores

$\mathbf{u}=u_x\hat{\mathbf{i}}+u_y\hat{\mathbf{j}}+u_z\hat{\mathbf{k}}$

$\mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{i}}+v_y\hat{\mathbf{j}}+v_z\hat{\mathbf{k}}$

$\mathbf{w}=w_x\hat{\mathbf{i}}+w_y\hat{\mathbf{j}}+w_z\hat{\mathbf{k}}$

donde **w** es el producto punto de **u** y **v** definidos así:

$\times : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re^3$

$(\mathbf{u},\mathbf{v}) \times \longrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

donde la fórmula se interpreta como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{\mathbf{i}} - (u_z v_x - u_x u_z)\hat{\mathbf{j}} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{\mathbf{k}}$$

otra forma de escribirlo es:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ \mathbf{v_x} & \mathbf{v_y} & \mathbf{v_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ \mathbf{v_y} & \mathbf{v_z} \end{vmatrix} \cdot \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_z} \\ \mathbf{v_x} & \mathbf{v_z} \end{vmatrix} \cdot \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} \\ \mathbf{v_x} & \mathbf{v_y} \end{vmatrix} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

Algunas Propiedades Matemáticas

Identidades

i) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}})$ Anticonmutatividad

ii) $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \mathbf{0}$ Cancelación por ortogonalidad

iii) $(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) \times \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}) - \vec{\mathbf{C}}(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}})$ Regla de la expulsión

iv) $\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) + \vec{\mathbf{C}} \times (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{B}} \times (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$ Identidad de Jacobi

v) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = |\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}| \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo menor entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

vi) El vector unitario $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}}{|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|}$ el cual es ortogonal al plano que general los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

¿Qué significa geometricamente el producto cruz?

La magnitud del producto vectorial o producto cruz como se le conoce, es igual al área del palelógramo formado por los dos vectores, o es igual al doble del área del triángulo formado con su resultante. Esto puede verse en la figura, en la que se muestra que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \ sen\theta = h, \ pero \ B = sen\theta = h$$

$donde \ h \ es \ la \ altura \ del \ paralelógramo \ formado \ con \vec{A} \ y \ \vec{B}$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = Ah = área \ del \ paralelógramo.$$

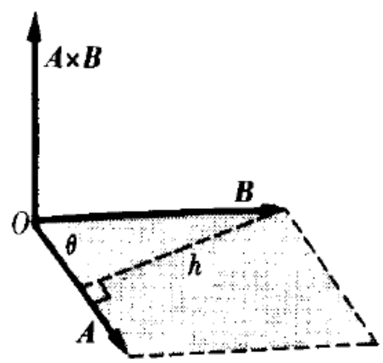


Fig. 3-31. El producto vectorial es equivalente al área del paralelogramo definido por los dos vectores.

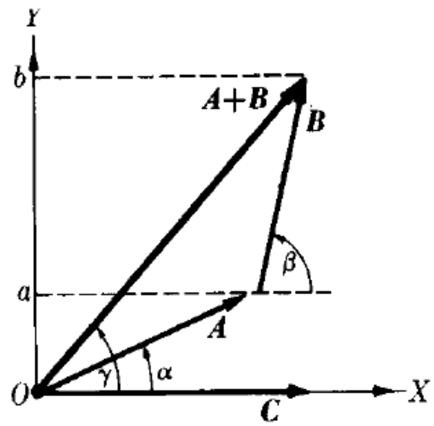
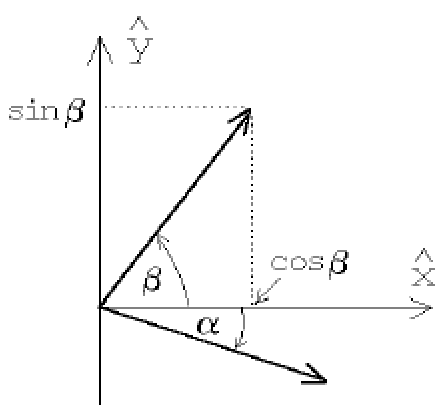


Fig. 3-32. El producto vectorial es distributivo.

Problema



Sean **A** y **B** dos vectores unitarios en el plano xy que forman ángulos -a y b con el eje *x*, respectivamente. Evalúe el producto cruz de estos vectores de dos maneras, una vez usando la definición y la segunda vez usando la expresión en términos de las coordenadas cartesianas, y de esta manera encuentre una expresión para *sin(a + b)*.

Como se observa en la figura el ángulo entre los dos vectores es *(a + b)* luego:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}||sin(\alpha+\beta)| = sin(\alpha+\beta)$$

Por otra parte

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |(cos\alpha\,\hat{x} - sin\alpha\,\hat{y}) \times (cos\beta\,\hat{x} + sin\beta\,\hat{y}|$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = (cos\alpha\ sin\beta + sin\alpha\ cos\beta)\hat{z}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = (cos\alpha\ sin\beta + sin\alpha\ cos\beta)$$

igualando las dos expresiones tenemos

$$sin(\alpha + \beta) = (cos\alpha\ sin\beta + sin\alpha\ cos\beta)$$

II UNIDAD

2.1.- Suma de vectores

Si se suman dos magnitudes escalares, basta con sumar sus valores numéricos. Por ejemplo 10 w más 20 w son 30 w de potencia. Por el contrario, para **sumar dos magnitudes vectoriales** el proceso es más complejo, pues debemos de tener en cuenta dirección y sentido.

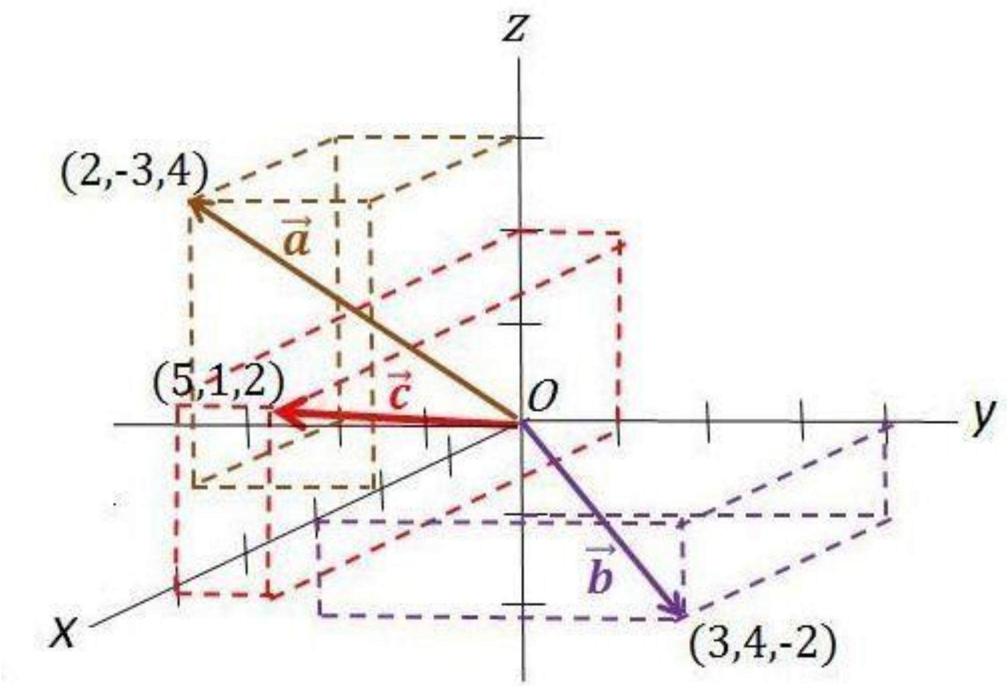
Conociendo las **componentes cartesianas** de los vectores a sumar, el vector resultante tendrá como componentes cartesianos la suma, eje a eje, de cada vector.

Si queremos sumar dos **vectores en 3D** y conocemos sus componentes, las componentes del vector suma, aplicando el mismo procedimiento, sería:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{\boldsymbol{i}} + a_y\,\vec{\boldsymbol{j}} + a_z\,\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$\vec{b} = b_x\,\vec{\boldsymbol{i}} + b_y\,\vec{\boldsymbol{j}} + b_z\,\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{\boldsymbol{i}} + (a_y + b_y)\vec{\boldsymbol{j}} + (a_z + b_z)\vec{\boldsymbol{k}}$$

Por ejemplo:

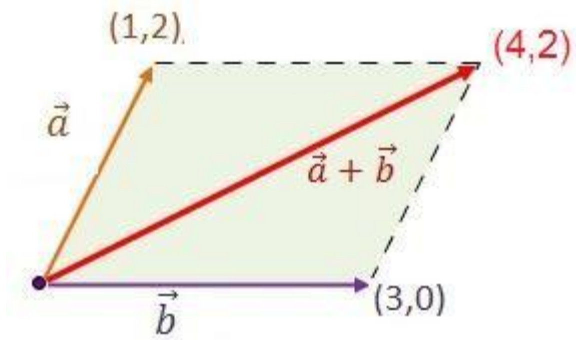
Vamos a sumar dos vectores en tres dimensiones de los que sabemos sus coordenadas cartesianas:



$$\vec{\boldsymbol{a}} = (2,-3,4)$$
$$\vec{\boldsymbol{b}} = (3,4,-2)$$
$$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}} = (2 + 3, -3 + 4, 4 - 2) = (5,1,2)$$

(5, 1, 2) serían las coordenadas *x*, *y*, *z* del extremo del vector suma.

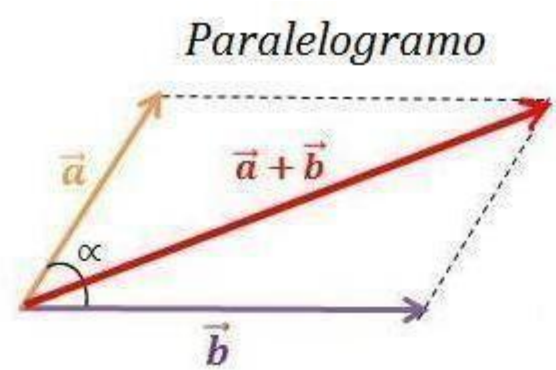
El mismo procedimiento serviría para sumar dos vectores en el plano, ejes X e Y.



Otro procedimiento para la suma de vectores es el **método del paralelogramo**. El método del paralelogramo es un procedimiento gráfico sencillo que permite hallar la suma de dos vectores.

1. Primero se dibujan ambos vectores a escala, con el punto de aplicación común.
2. Seguidamente, se completa un paralelogramo, dibujando dos segmentos paralelos a ellos.
3. El **vector suma** resultante ($\vec{a} + \vec{b}$) será la diagonal del paralelogramo con origen común a los dos vectores originales.

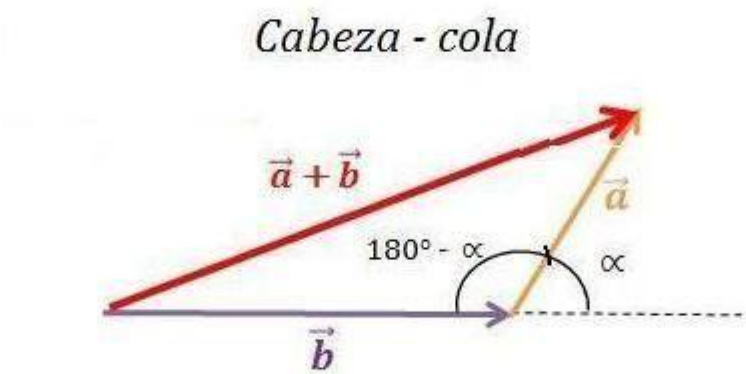
2.2. METODO DEL PARELELOGRAMO



$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos \propto}$$

2.3.- METODO DEL TRIANGULO

El **método del triángulo** o **método cabeza-cola** es una variante del método del paralelogramo. Se desplaza el vector $\vec{b}$ paralelamente hasta el extremo del vector $\vec{a}$. El lado que completa el triángulo es el vector suma ($\vec{a}$ + $\vec{b}$), cuyo inicio está en el extremo del primer vector $\vec{a}$ y su fin en el final del segundo vector sumando $\vec{b}$.



$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180° - \alpha)}$$

Mediante las dos fórmulas equivalentes anteriores, derivadas del teorema del coseno obtenemos el módulo del vector suma.

Se aplica sobre el ángulo (180° – α), opuesto al lado ($\vec{a}$ + $\vec{b}$) del triángulo. Como en los ángulos suplementarios se cumple que:

$\propto$ y $(180° - \alpha)$

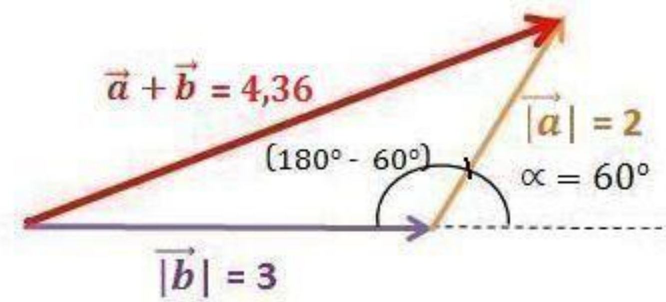
se verifica que:

$$\cos \alpha = -\cos(180° - \alpha)$$

Por **ejemplo**:

Sean dos vectores en un plano de módulos 2 y 3, que forman un ángulo de 60° ¿Cuál es el vector suma?

El vector suma será la diagonal del paralelogramo con origen en el punto de aplicación de ambos vectores, o, lo que es lo mismo, el lado que completa el triángulo con el método cabeza-cola. El módulo del vector suma será:



$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \cos(180° - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 120°} =$$

$$= \sqrt{4 + 9 - 12\cdot(-0{,}5)} = 4{,}36$$

Resta de vectores

ANUNCIOS

Se procede igual que en la suma, bien operando con las **componentes cartesianas**, o bien mediante el **método del paralelogramo**.

Sabiendo los componentes cartesianos de los vectores, restaremos los componentes cartesianos del segundo vector de los del primero:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

Por **ejemplo**:

Sean los vectores $\vec{a}$ =(2,-3,4) y el vector $\vec{b}$ =(3,4,-2):

$$\vec{a} = (2,-3,4)$$
$$\vec{b} = (3,4,-2)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} = \{2 - 3, -3 - 4, 4 - (-2)\} = (-1,-7,6)$$

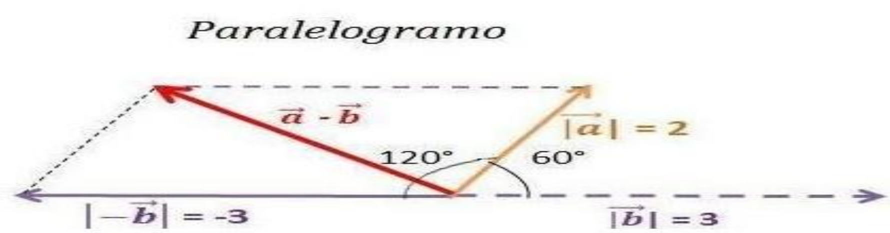
(-1, -7, 6) serían las coordenadas *x*, *y*, *z* del extremo del vector resta.

El mismo procedimiento serviría para restar dos vectores en el plano, de ejes x e y.

Otro procedimiento para la resta de vectores es el **método gráfico**. Ahora, con el **método del paralelogramo** tendremos que poner en el punto de aplicación del primer vector el punto de aplicación del vector opuesto. En otras palabras, la resta de dos vectores equivale a sumarle al primero el opuesto del segundo:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Gráficamente, y tomando la resta de los mismos vectores que los del caso de la suma por el método gráfico del ejemplo anterior:



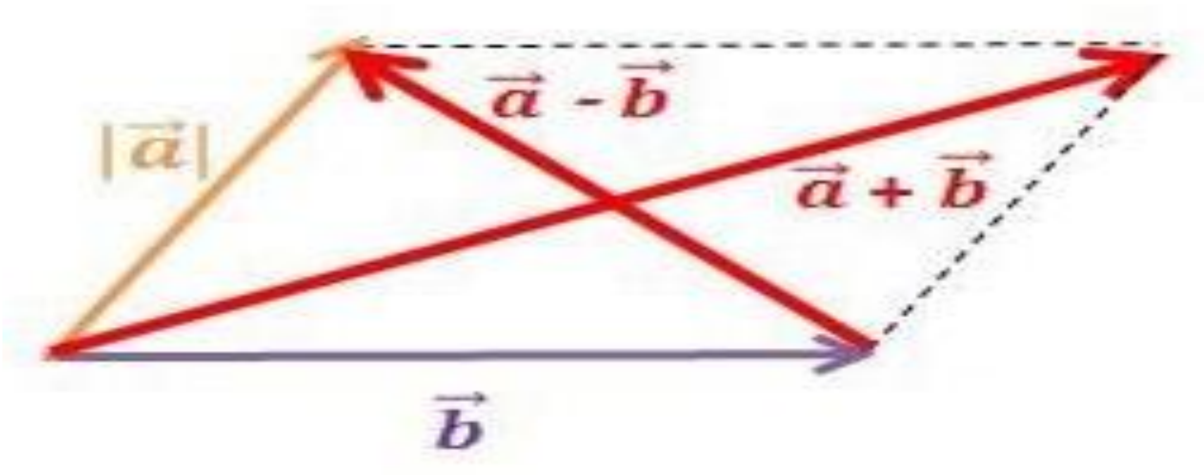
$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |-\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |-\vec{b}| \cdot cos\,(180° - 60°)}$$
$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120°} =$$
$$= \sqrt{4 + 9 + 12 \cdot (-0,5)} = 2,65$$

Vemos que la fórmula para hallar el módulo del vector resta es la misma que la del vector suma, teniendo en cuenta que ahora el ángulo que forman los vectores es el suplementario (ver ángulos suplementarios) del tomado en la suma.

En este ejemplo concreto, el **módulo del vector resta seria 2,65**. (Ver el teorema del coseno)

Al igual que en la suma de vectores, en la resta tenemos los procedimientos gráficos del paralelogramo y el del triángulo o cabeza-cola.

Vemos en las figuras cómo cambia el sentido cuando se invierte el orden de los términos de la resta.



En las figuras se han superpuesto el método del paralelogramo en la suma con el de cabeza-cola para la resta.

Propiedades de la suma y resta de vectores

La suma de vectores tiene las propiedades:

- **Asociativa**:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- **Conmutativa**:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- **Elemento opuesto** :

$$\vec{a} + \vec{b} = 0 \quad \text{cuando} \quad \vec{a} = -\vec{b}$$

- **Elemento neutro** :

$$\vec{a} + 0 = \vec{a}$$

La resta de vectores no cumple la propiedad conmutativa. Ya que:

$$\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$$

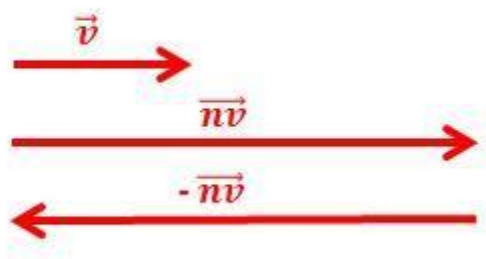
Multiplicación de vectores

Producto de un vector por un escalar

2.4.- MULTIPLICACION DE VECTORES

La **multiplicación de un vector** $\vec{v}$ **por un escalar** *n* es otro **vector** $\vec{nv}$ cuyo módulo será $|n| \cdot |\vec{v}|$.

Si *n* es positivo, el vector producto tendrá el mismo sentido. Si *n* es negativo, el vector producto tendrá el sentido opuesto.



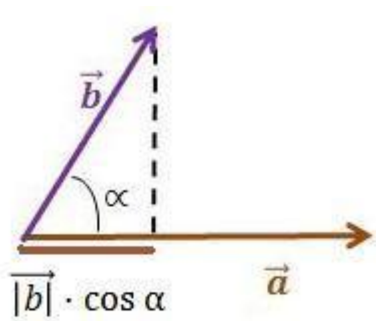
Lo mismo diremos de la división de un vector por un escalar.

Producto escalar

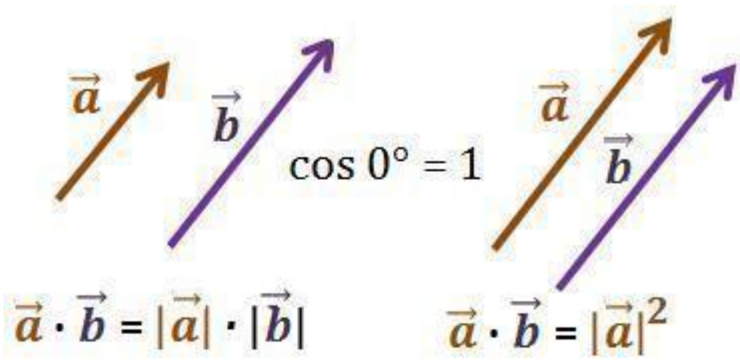
Diferente a lo anterior es el producto escalar de dos vectores. Llamamos **producto escalar** (o **producto interno**) de dos vectores que forman entre sí un ángulo α, a un **número escalar** (atención, no un vector) igual al producto de los módulos de los dos vectores por el coseno del ángulo α que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

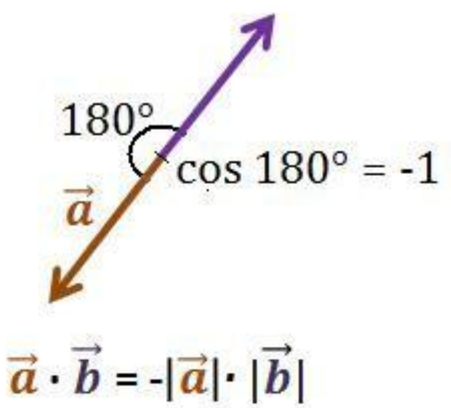
También podemos decir que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de un vector por la proyección del otro sobre él. Esta proyección es:



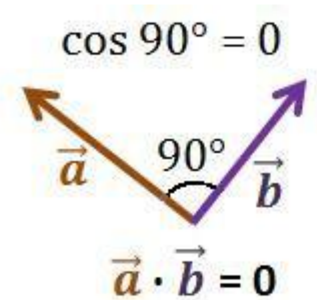
Si los dos vectores tienen la misma dirección y sentido, el producto escalar será el producto de sus módulos (cos 0° = 1). En este caso, si los dos vectores fuesen iguales, el producto escalar sería igual a:



Si los dos vectores tienen la misma dirección pero sentido opuesto, el producto escalar será el producto de sus módulos con signo contrario (cos 180° = -1).



Si los dos vectores son perpendiculares, su producto escalar será nulo (cos 90° = 0).



El producto escalar de dos vectores de los que conocemos sus componentes se puede resolver mediante matrices o determinantes:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Lo podemos expresar como el producto de una matriz fila por otra, columna:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\underline{a_x \ a_y \ a_z}} \cdot \begin{vmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{vmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Ejemplo:

$$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\underline{-1 \ \ 1 \ -3}} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 2$$

En este ejemplo, el **producto interno** es -2.

Un caso de producto escalar sería el trabajo (magnitud escalar) que realiza una fuerza, cuando ocasiona un desplazamiento. Es el producto del módulo de la fuerza por la proyección sobre la dirección de ésta del desplazamiento producido.

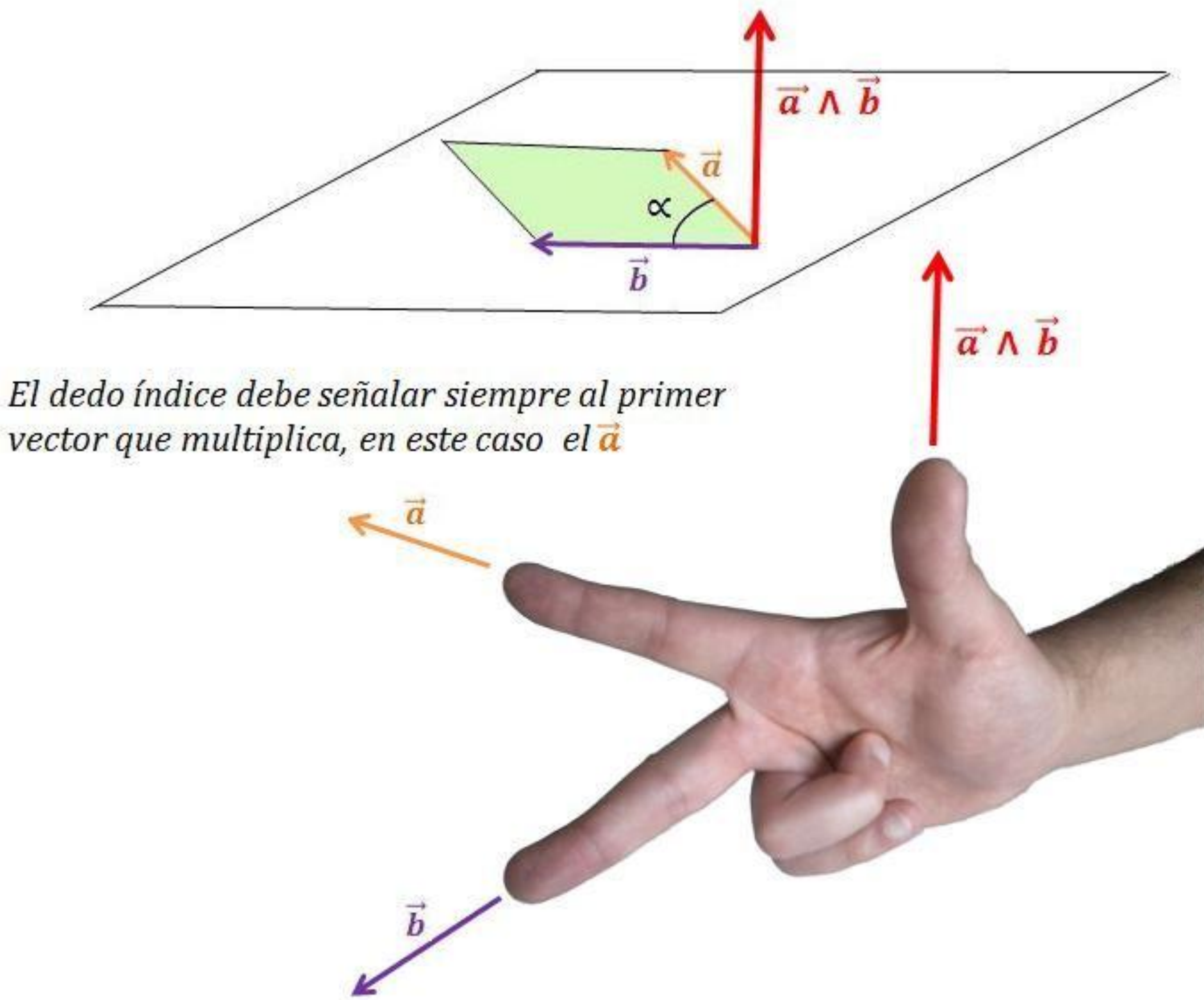
Producto vectorial

Se llama **producto vectorial** (o **producto cruz**) de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a otro vector $\vec{c}$ cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los dos primeros por el seno del ángulo que forman.

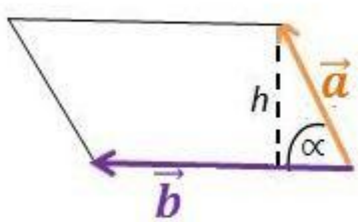
Para indicar el producto vectorial se usa tanto la notación $\vec{a}$ x $\vec{b}$ como $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Aquí utilizaremos la notación $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen} \propto$$

La **dirección del vector producto vectorial** ($\vec{c}$) es **perpendicular al plano que forman** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y su sentido lo marca la regla de la mano derecha (o regla del sacacorchos).



El módulo del vector $\vec{c}$ es igual al número que representa el área del paralelogramo formado a partir de los dos vectores iniciales.



$$Área = |\vec{b}| \cdot h = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot sen \propto$$

Se puede obtener el **producto vectorial** de dos vectores, si conocemos sus componentes:

$$\vec{a} = a_x\vec{\boldsymbol{i}} + a_y\vec{\boldsymbol{j}} + a_z\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{\boldsymbol{i}} + b_y\vec{\boldsymbol{j}} + b_z\vec{\boldsymbol{k}}$$

Podemos utilizar la función determinante, primero de orden 3:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Desarrollado por la primera fila, porque sus términos son simbólicos, no escalares, (son los vectores unitarios):

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$$

Si dos vectores son perpendiculares entre sí, el módulo de su producto vectorial será igual al producto de sus módulos (sen 90° = 1).

Pero si los vectores están en rectas paralelas o coincidentes, su producto vectorial es cero. Por lo tanto, será nulo el producto vectorial de un vector por sí mismo o por su opuesto (sen 0° = 0 y sen 180° = 0).

El **producto vectorial no tiene la propiedad conmutativa**, porque si se permutan los factores, el vector resultante, aunque tiene el mismo módulo, su dirección es la opuesta (**propiedad anticonmutativa**).

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

El producto vectorial cumple la **propiedad distributiva**:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Un ejemplo de producto vectorial es el momento de una fuerza respecto de un punto O. Este momento es otro vector $\vec{M}$ producto vectorial del vector posición $\vec{r}$, del punto de aplicación de la fuerza referido a O, por el vector fuerza $\vec{F}$. O sea, $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$.

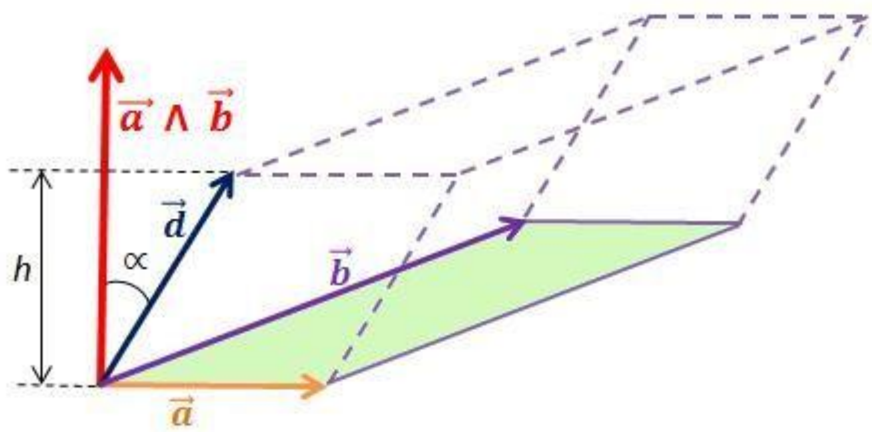
Producto de tres vectores: Producto mixto

Consideraremos el caso del llamado **producto mixto** de tres vectores. **Es un número o magnitud escalar** que se obtiene, partiendo del **producto vectorial** de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, multiplicado **escalarmente** por un tercer vector $\vec{d}$.

$$\text{Producto mixto } (\vec{d},\vec{a},\vec{b}) = \vec{d} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

En primer lugar, se resuelve el producto vectorial. El vector resultante se multiplica escalarmente por el vector $\vec{d}$.

Este producto de tres vectores es numéricamente igual al volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{d}$.



Efectivamente, hemos dicho antes que el módulo del producto vectorial es igual al área que forman los vectores factores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

El módulo del producto escalar es: $|\vec{a} \wedge \vec{b}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha$.

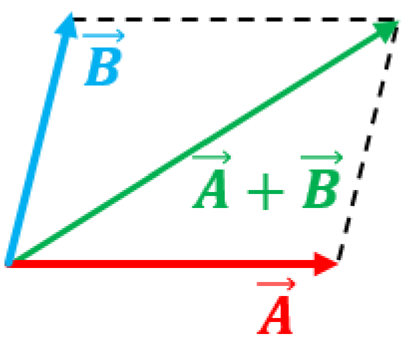
$|\vec{d}|\cdot\cos\alpha)$ es la altura *h* del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{d}$, cuando se toma como base la cara formada por $\vec{a}$, $\vec{b}$. Esta es la demostración de que el producto mixto es igual al volumen del paralelepípedo de la figura.

2.5.- SUMA Y RESTA DE VECTORES

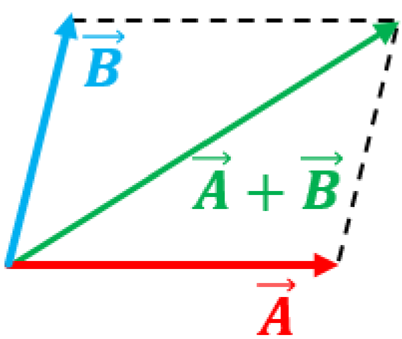
SUMA Y RESTA DE VECTORES

Compartir en Facebook

Compartir en Twitter



Html code here! Replace this with any non empty text and that's it.



La **suma** y **resta** de dos vectores ***A*** y ***B***, da como resultado otro **vector**, es decir,

A* + *B* = *C y ***A* – *B* = *C***

Para la suma y resta de vectores se aplican distintos métodos dependiendo si los éstos tienen o no la misma dirección. Los principales métodos son: el método directo, el del triángulo y el paralelogramo.

SUMA DE VECTORES

Para sumar dos vectores ***A*** y ***B*** se suma ***A*** con el vector ***B***, es decir, se suman las componentes de cada vector:

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

Ejemplo: Sean ***A*** = (3, 2, -4) y ***B*** = (-3, 2, 7), calcula el vector ***A*** + ***B***.

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (3 + (-3), 2 + 2, -4 – 7) = (0, 4, 3)$

SUMA DE DOS VECTORES CON LA MISMA DIRECCIÓN Y EL MISMO SENTIDO

1. Dibujamos el vector ***B*** a continuación del vector ***A***, de manera que sean consecutivos, respetando sus módulos, direcciones y sentidos.
2. El vector suma ***A*** + ***B*** tiene como módulo la suma de los módulos de ambos, la misma dirección y el mismo sentido de los vectores dados.

El vector resultante ***A*** + ***B*** tiene como módulo la suma de ***A*** y de ***B***, la misma dirección y el mismo sentido que ***A*** y ***B***.

SUMA DE DOS VECTORES CON LA MISMA DIRECCIÓN Y EL SENTIDO OPUESTO

1. Dibujamos el vector ***B*** a continuación del vector ***A***, de manera que sea consecutivos, respetando sus módulos, direcciones y sentidos.
2. El vector suma tiene como módulo la diferencia de los módulos de ambos, la misma dirección y el sentido del vector mayor.

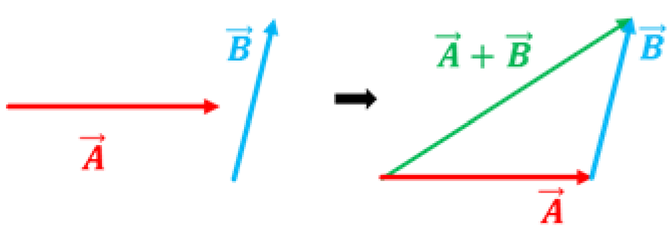
El vector resultante ***A*** + ***B*** tiene como módulo la diferencia de ***A*** y de ***B***, la misma dirección y el mismo sentido que ***A*** y ***B***.

SUMA DE DOS VECTORES CON DISTINTA DIRECCIÓN

Para sumar dos vectores ***A*** y ***B*** que forman un ángulo entre sí, se usan dos métodos: el método del triángulo y el método del paralelogramo.

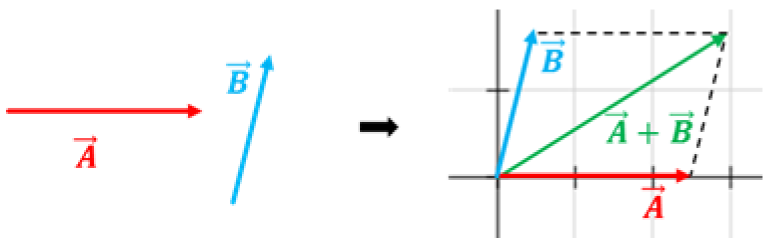
MÉTODO DEL TRIANGULO

1. Dibujamos los vectores de forma consecutiva, es decir, el origen de ***B*** tiene que coincidir con el extremo ***A***.
2. El vector suma ***A*** + ***B*** tiene como origen, el origen de ***A*** y como extremo, el de ***B***.



LEY O MÉTODO DE PARALELOGRAMO

1. Dibujamos el vector ***A*** en el origen de un plano cartesiano respetando su módulo, dirección y sentido.
2. Dibujamos en el origen de ***A***, el vector **B** respetando su módulo, dirección y sentido.
3. Se trazan rectas paralelas a cada vector formando un paralelogramo.
4. El vector resultante será la diagonal del paralelogramo que inicia en el origen del plano cartesiano.



RESTA DE VECTORES

Para restar dos vectores ***A*** y ***B*** se suma ***A*** con el opuesto de vector ***B***, es decir:

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (- \boldsymbol{B})$

Las componentes del vector ***A*** – ***B*** se obtienen restando sus componentes.

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$

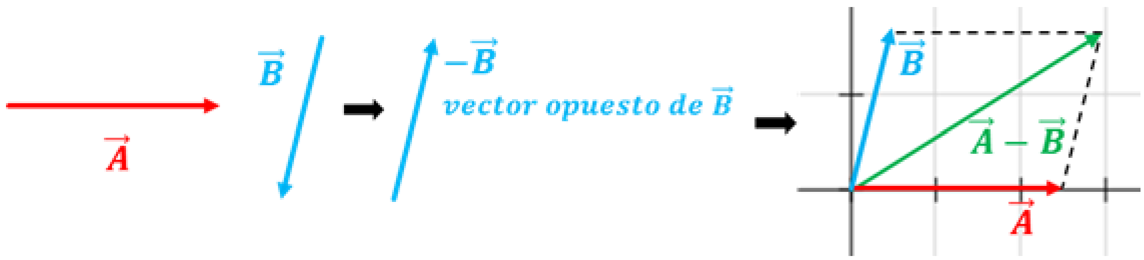
Ejemplo: Sea ***A*** = (5, 2, 4) y ***B*** = (-3, 5, 9), calcula el vector ***A*** – ***B***.

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (5-(-3), 2-5, 4-9) = (8,-3,-5)$

MÉTODO DEL VECTOR OPUESTO

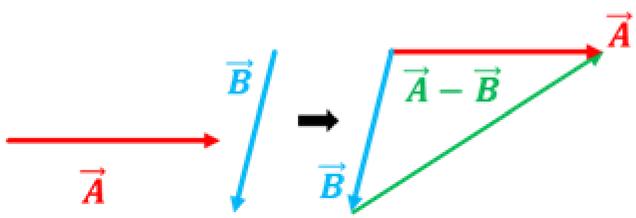
Para restar dos vectores ***A*** y ***B***:

1. Como el vector ***B*** es el sustraendo debemos dibujar su vector opuesto; por ello dibujamos un vector igual a ***B*** pero de sentido opuesto.
2. Aplicamos la ley del paralelogramo.



MÉTODO DEL TRIANGULO

1. Dibujamos en el origen de ***A***, el vector ***B*** respetando su módulo, dirección y sentido.
2. El vector resultante ***A*** – ***B*** tendrá como origen el extremo de ***B*** (vector sustraendo) y como extremo, el extremo de ***A*** (vector minuendo).



III UNIDAD

3.1.- EQUILIBRIO CON FUERZAS COPLANARES

Equilibrio de sólido rígido con fuerzas coplanares no paralelas y concurrentes. Física.

La mecánica es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo producen.

La mecánica, para su estudio, se divide en estática, cinemática y dinámica.

La estática estudia las fuerzas en equilibrio, la cinemática estudia el movimiento sin importar las causas que lo producen, y la dinámica estudia el movimiento, atendiendo las causas que lo producen.

Las fuerzas al actuar sobre un cuerpo, modifican su estado de reposo o movimiento; sin embargo, también le pueden producir una deformación. Por ejemplo, cuando se aplica el peso de un bloque de hierro sobre una pelota de esponja, ésta sufre una deformación y no logra moverla.

Las fuerzas son coplanares si se encuentran en el mismo plano.

Definición de equilibrio

Existe equilibrio en un cuerpo cuando las fuerzas que actúan sobre él tienen una suma resultante igual a cero. Un cuerpo tiende a permanecer en movimiento; mediante el análisis sencillo, se puede observar que el cuerpo permanecerá en reposo; si está en equilibrio y si el cuerpo está en movimiento, éste se mantendrá a una velocidad constante. Si únicamente dos fuerzas actúan sobre un cuerpo en equilibrio, un estudio es sencillo puede demostrar que son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

Un ejemplo de fuerzas en equilibrio sería un semáforo colgado del techo. La fuerza hacia abajo o peso (F_g) está equilibrada por la tensión del cable hacia arriba. Aquí, las fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido.

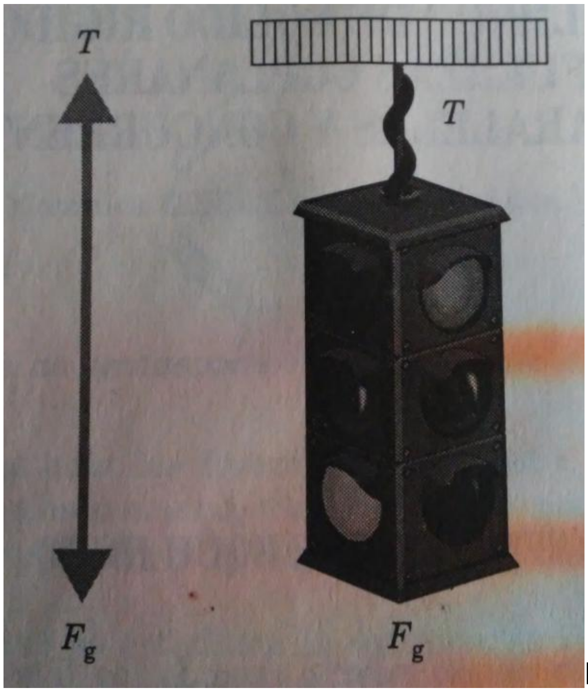


Figura 1. Un semáforo colgado del techo se encuentra en equilibrio.

Si en alguna ocasión una persona se jala de las manos con otra persona, se observa que no existe ningún movimiento oponente, por lo que las fuerzas que actúan son iguales pero opuestas en cada extremo; a esto se le conoce como condición de equilibrio. Como se muestra en la figura 2, la fuerza (*F*), de 50 N que actúa tirando hacia la derecha, está contrarrestada por una fuerza igual, pero opuesta (-*F*), de 50 N, que tira hacia la izquierda. Si las dos fuerzas se vuelven desiguales, ya no existirá el equilibrio y entonces habrá un movimiento en dirección a la fuerza mayor. Se notará, en el caso del equilibrio, que la tensión de cada mano es de 50 N y no de 100 N.

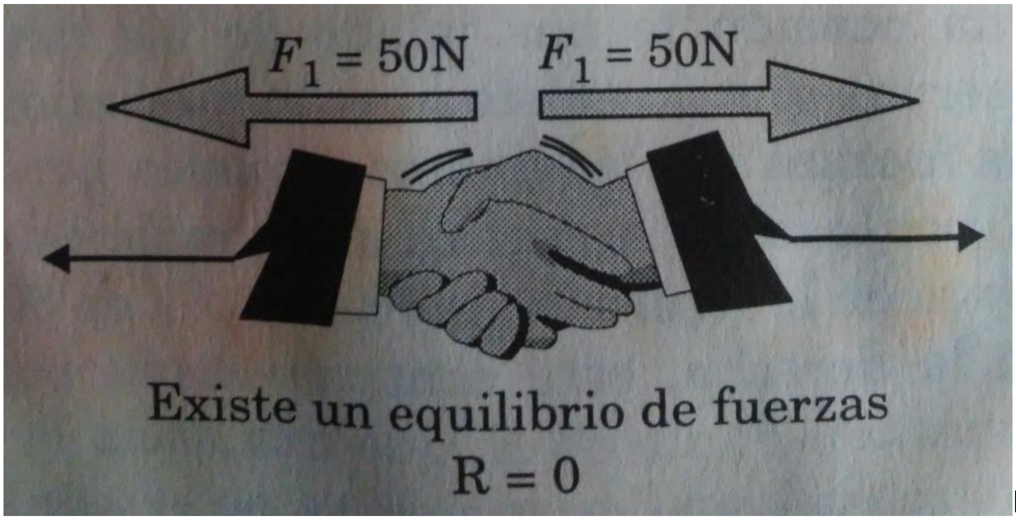


Figura 2. La tensión de cada mano es de 50 N.

Cuando un cuerpo está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero. En este caso ambas componentes rectangulares deben ser también iguales a cero; es la condición para que un cuerpo permanezca en equilibrio.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Esta ecuación representa una proposición de la primera condición de equilibrio, que puede ser enunciada como sigue:

Un cuerpo se encuentra en equilibrio si y sólo si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

Condiciones de equilibrio traslacional

Un cuerpo que se considera en equilibrio, puede estar en reposo o en un estado de movimiento rectilíneo uniforme. De acuerdo con la Primera ley de Newton, esta condición de estado sólo se puede modificar si se aplica una fuerza. Cuando todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo tienen un solo punto de intersección y su suma vectorial es igual a cero, el sistema permanecerá en equilibrio. En la figura 3 se observa que el equilibrio traslacional; el cuerpo se desplazará sobre una línea de acción sin tener un equilibrio rotacional, por lo que es necesario considerar el punto de aplicación, la magnitud y el sentido de las fuerzas.

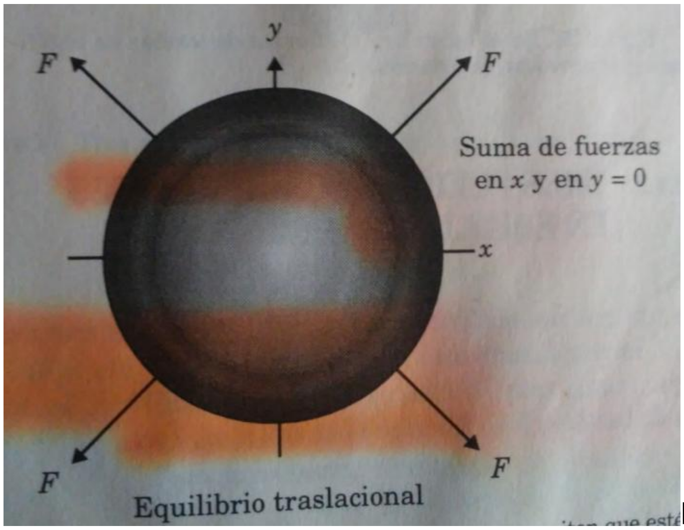


Figura 3. En el balón existen fuerzas equilibradas que permiten que esté en reposo.

En la figura 4 hay equilibrio rotacional; no se desplaza el cuerpo pues alcanza su equilibrio al tener fuerzas en diferente sentido y paralelas.

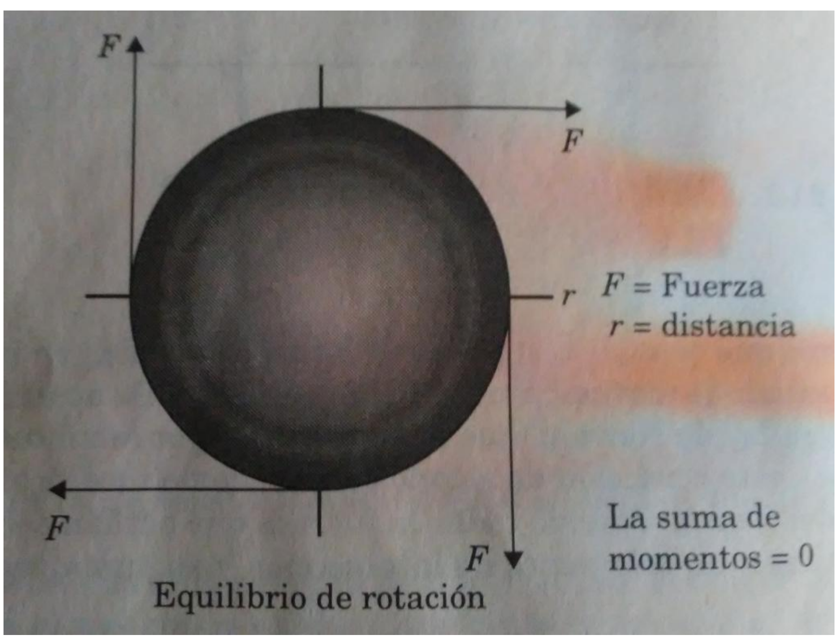


Figura 4. En el balón hay momentos de torsión en equilibrio que provocan la rotación.

Si sobre un cuerpo actúan tres fuerzas, y éste se encuentra en equilibrio, la resultante de las tres fuerzas deben ser igual a cero, por lo que, para que el cuerpo estén en equilibrio, la suma de vectores de las tres fuerzas debe ser igual a cero.

$$\sum \overrightarrow{F} = 0$$

Al dibujar los vectores a escala en sus respectivas direcciones, se obtiene un polígono cerrado, que es un triángulo.

Problemas resueltos

Problema 1. Un semáforo está suspendido de dos soportes , como se muestra en la figura 5. Las tres fuerzas que actúan a través del punto común O, son F_g, el peso del semáforo que es de 50 N que actúa en línea recta hacia abajo, F_1, la tensión de un cable a 45° hacia arriba y a la izquierda; y F_2, la tensión del otro cable, a 30° hacia arriba y a la derecha. Calcular gráfica y analíticamente las magnitudes de las tensiones.

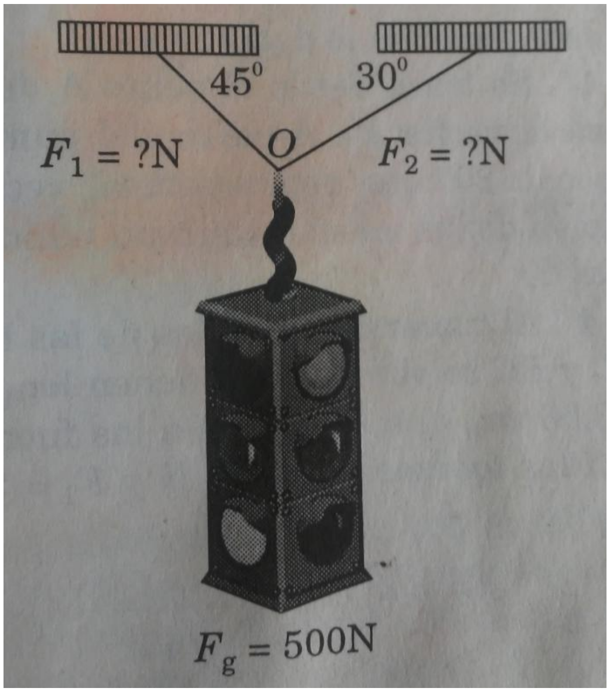


Figura 5. Tres fuerzas producen equilibrio si su suma vectorial es cero.

Solución. Los datos son los siguientes

- $\vec{F} = 500\ N$
- $\vec{F}_1 = ?$
- $\vec{F}_2 = ?$

a) Cálculo gráfico

Para representar el triángulo de las fuerzas vectorialmente, se muestra el diagrama (b) de la figura 6; entonces

$$\vec{F}_g + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

El diagrama de fuerzas demuestra las condiciones del equilibrio; se representa la magnitud de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. La manera de efectuarlo es:

1. Se dibuja en cualquier parte de una línea horizontal auxiliar (*D*) un punto, que se denominará (*A*), que representará el origen del primer vector de 5 unidades. Cada una equivale a 100 N, será derecha y hacia abajo, que representa a F_g (el peso del semáforo).

2. En la parte final del vector $\vec{F}_g = 500\ N$, se dibuja otra línea auxiliar (*E*) paralela a la horizontal anterior. A este punto se le denomina (*B*).
3. Se traza desde el punto *A* una línea a 45°, que será el vector F_1. A partir del punto *B*, se traza una línea a 30° que representa al vector F_2. La prolongación de las mismas dará un punto que se denominará *C*.
4. Al tomar las medidas de las líneas continuadas *AC* y *BC* se observa que tienen longitudes de 4.48 cm y 3.66 cm, que equivalen a las fuerzas y sus valores. Son las fuerzas $\vec{F}_1 = 448\ N$ y $\vec{F}_2 = 366\ N$, respectivamente.

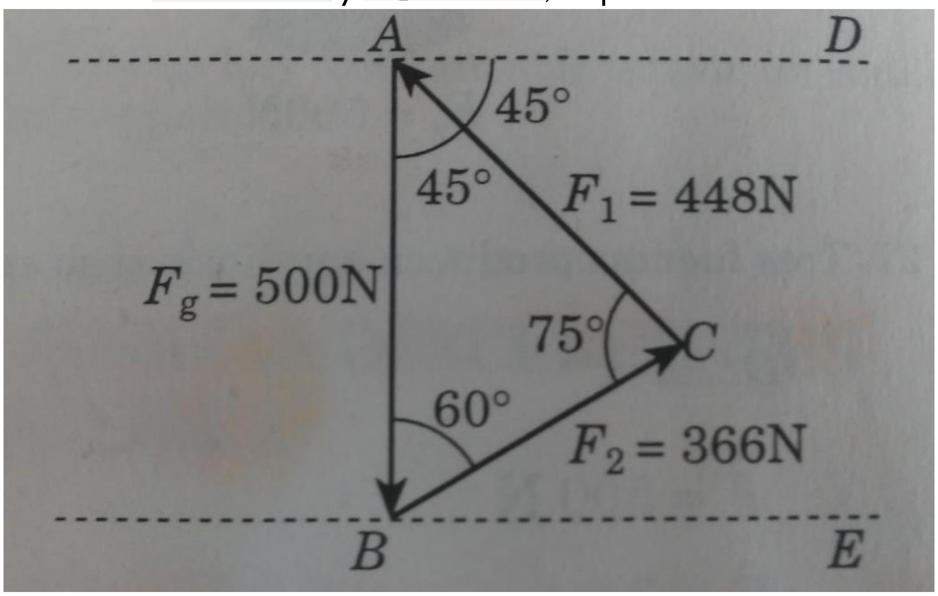


Figura 6. Los ángulos internos 45°, 60° y 75°, del triángulo ABC.

b) Cálculo analítico

Primero se determinan los ángulos internos del triángulo *ABC* y luego se aplica la ley de los senos para encontrar las longitudes de los lados *AC* y *BC*. Usando los ángulos dados en el esquema (*b*) de la figura _a, se tiene que: $A = 45$°, $B = 60$° y $C = 75$°. Por la ley de los senos.

$$\frac{AC}{\sin 60} = \frac{\vec{F}_g}{\sin 75}$$

$$AC = \frac{\vec{F}_g \sin 60}{\sin 75}$$

$$AC = \frac{(500\ N)(0.866)}{0.966}$$

$AC = 448\ N$

La longitud $\overrightarrow{F}_2$ es

$$\overrightarrow{F}_1 = AC = 448\ N$$

Y para la longitud *BC*

$$\frac{BC}{\sin 45} = \frac{\overrightarrow{F}_g}{\sin 75}$$

$$BC = \frac{\overrightarrow{F}_g \sin 45}{\sin 75}$$

$$BC = \frac{(500\ N)(0.707)}{0.966}$$

$$BC = 366\ N$$

La longitud $\overrightarrow{F}_2$ es

$$\overrightarrow{F}_2 = BC = 366\ N$$

Problema 2. Una pelota de acero de 100 N suspendida del cordel *A* es tirada hacia un lado por otro cordel *B* y mantenida de tal forma que el cordel *A* forme un ángulo de 30° con la pared vertical. Calcular las tensiones de los cordeles *A* y *B*, utilizando los métodos: a) de las componentes y b) del polígono.

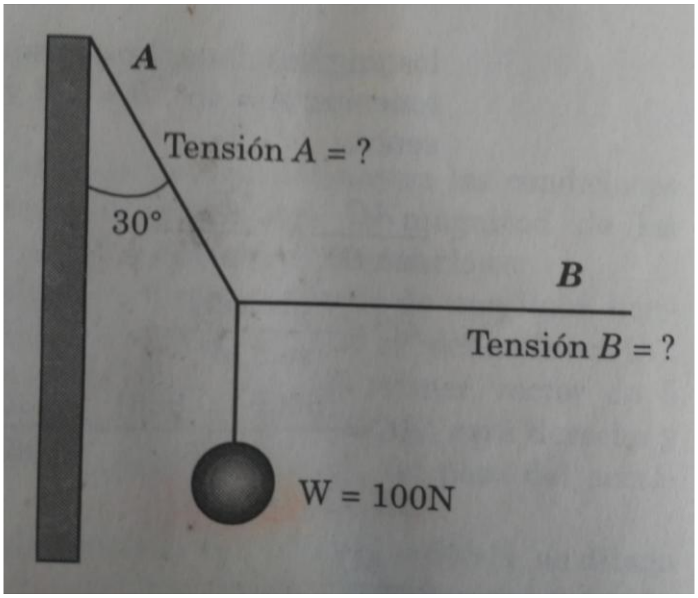


Figura 7. A y B son fuerzas que actúan sobre el nudo.

Solución. Los datos son

- $\overrightarrow{F} = 100\ N$
- $\overrightarrow{A} = ?$
- $\overrightarrow{B} = ?$
- $\theta = 30°$

a) Método de las componentes

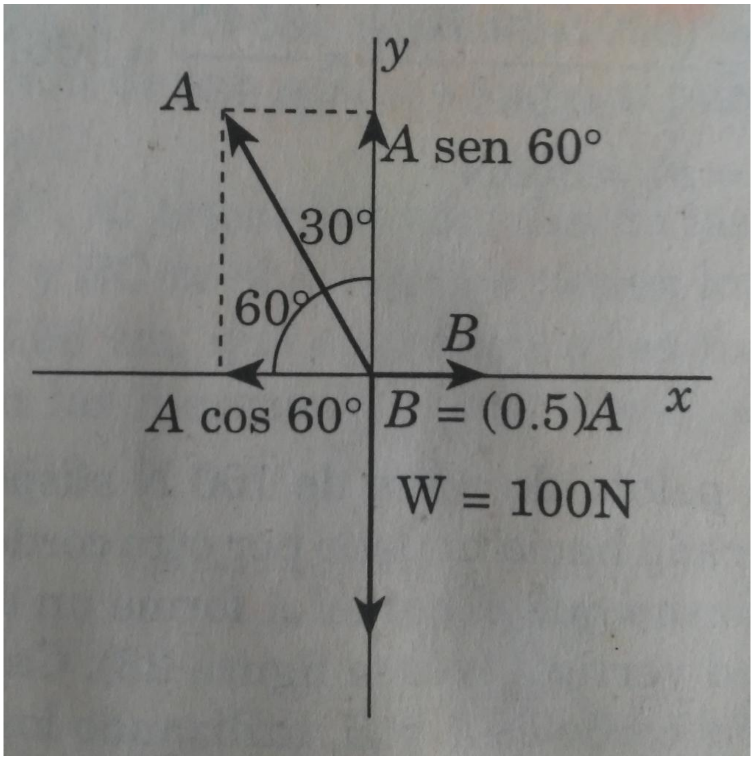


Figura 8. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el nudo.

Después

$$\sum \overrightarrow{F}_x = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\cos 60$$

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\cos 60 = 0$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A}\cos 60$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A}\cos 60$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A}(0.5)$$

$$\overrightarrow{B} = 0.5\overrightarrow{A}$$

$$\sum \overrightarrow{F}_y = \overrightarrow{A}\sin 60 - 100\ N$$

$$\overrightarrow{A}\sin 60 - 100\ N = 0$$

$$\vec{A}\sin 60 = 100\ N$$

$$\vec{A}(0.866) = 100\ N$$

$$\vec{A} = \frac{100\ N}{0.866}$$

$$\therefore\ \vec{A} = 115.47\ N$$

Conociendo el valor de *A*, se puede obtener el valor de *B* como sigue

$$\vec{B} = 0.5\vec{A}$$

$$\vec{B} = 0.5(115.47\ N)$$

$$\vec{B} = 57.75\ N$$

b) Método del polígono

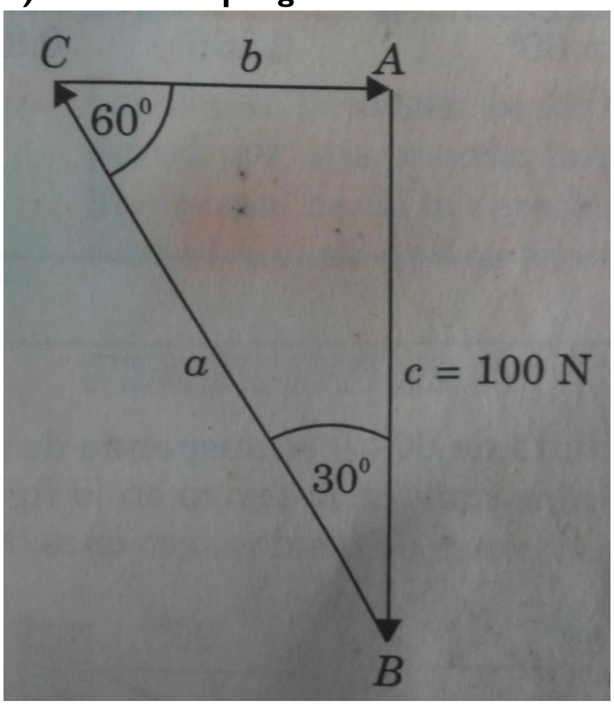


Figura 9. Representación gráfica del polígono de fuerzas.

Vectorialmente se tiene

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$

Al tomar la ley de los senos

se tiene que

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\sin A} = \frac{\overrightarrow{c}}{\sin C}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{c}\sin A}{\sin C}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{100\ N \sin 90}{\sin 60}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{100\ N(1)}{0.866}$$

$$\overrightarrow{a} = 115.5\ N$$

Y para *b*

$$\frac{\overrightarrow{b}}{\sin B} = \frac{\overrightarrow{c}}{\sin C}$$

$$\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{c}\sin B}{\sin C}$$

$$\overrightarrow{b} = \frac{(100\ N)\sin 30}{\sin 60}$$

$$\overrightarrow{b} = \frac{(100\ N)(0.5)}{0.866}$$

$$\overrightarrow{b} = 57.7\ N$$

3.2.- Equilibrio rotacional y traslacional

Condiciones de equilibrio: Para que un cuerpo se encuentre en equilibrio, se requiere que la sumatoria de todas las fuerzas o torcas que actúan sobre él sea igual a cero. Se dice que todo cuerpo tiene dos tipos de equilibrio, el de **traslación** y el de **rotación.**

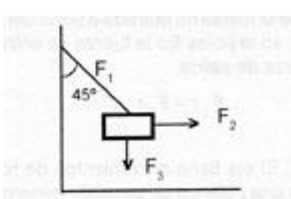
Traslación: Es aquel que surge en el momento en que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se nulifican, o sea, la sumatoria de las mismas sea igual a cero.
*E*Fx = 0
*E*Fy = 0

Rotación: Es aquel que surge en el momento en que todas las torcas que actúan sobre el cuerpo sean nulas, o sea, la sumatoria de las mismas sea igual a cero.
*E*Mx= 0
*E*My= 0

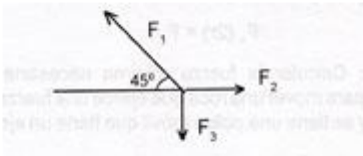
Aplicaciones: Se utiliza en todo tipo de instrumentos en los cuales se requiera aplicar una o varias fuerzas o torques para llevar a cabo el equilibrio de un cuerpo. Entre los instrumentos más comunes están la palanca,la balanza romana, la polea, el engrane, etc.

EJEMPLO DE PROBLEMA DE APLICACIÓN:

Una caja de 8 N está suspendida por un alambre de 2 m que forma un ángulo de 45° con la vertical. ¿Cuál es el valor de las fuerzas horizontal y en el alambre para que el cuerpo se mantenga estático?.
Primero se visualiza el problema de la siguiente manera:



A continuación, se elabora su diagrama de cuerpo libre.



Ahora por medio de la descomposición de los vectores, calculamos la fuerza de cada uno de ellos.

F_{1x} = - F_1 cos 45°*
F_{1y} = F_1 sen 45°
F_{2x} = F_2 cos 0° = F2
F_{2y} = F_2sen0°=0
F_{3x} = F_3cos90°=0
F_{3y} = - F_3 sen 90° = - 8 N*

Porque los cuadrantes en los que se localizan son negativos.

Como únicamente conocemos los valores de F_3, F_2 y la sumatoria debe ser igual a cero en x e y, tenemos lo siguiente:

$EF_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=0$

$EF_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=0$

Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$EF_x=-F_1$ cos $45+F_2=0$
$F_2=F_1(0.7071)$

$EF_y=-F_1sen45-8N=0$
$8N=F_1(0.7071)$

$F_1=8N/0.7071=11.31$ N

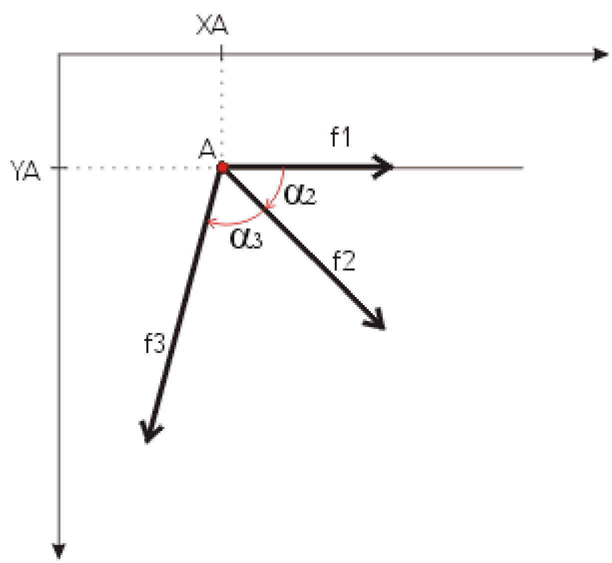
Para calcular F_2, se sustituye F_1 de la ecuación siguiente:

$F_2=F_1(0.7071)$

$F_2=11.31(0.7071)=8N$

3.3.- TRES FUERZAS CONCURRENTES EN EL EQUILIBRIO

Un **sistema de fuerzas concurrentes** es aquel para el cual existe un punto en común para todas las rectas de acción de las fuerzas componentes. La **resultante** es el elemento más simple al cual puede reducirse un sistema de fuerzas. Como simplificación diremos que es una fuerza que reemplaza a un sistema de fuerzas. Se trata de un problema de **equivalencia por composición**, ya que los dos sistemas (las fuerzas componentes por un lado, y la fuerza resultante, por el otro) producen el mismo efecto sobre un cuerpo. En el ejemplo que veremos a continuación vamos a hallar la resultante en forma gráfica y en forma analítica.



EL SISTEMA

- Las fuerzas componentes son f1, f2 y f3.

- El punto en común por el que pasan las rectas de acción de las fuerzas componentes es A, cuyas coordenadas son (XA,YA).

- Para definir la resultante R deberemos obtener su módulo, dirección y sentido (argumento) y las coordenadas de un punto cualquiera de su recta de acción...

...como veremos a continuación, su **módulo** se obtiene midiendo con una regla en el gráfico y multiplicando por escala de fuerzas (por ejemplo: tn/cm).

...y su **argumento** se obtiene midiendo con transportador el ángulo que va desde el eje X hasta la fuerza, barriendo en el sentido de giro adoptado (horario o antihorario).

...y las coordenadas de un punto cualquiera de su **recta de acción** ya las conocemos, porque tratándose de un sistema de fuerzas concurrentes, la recta de acción de la resultante R también pasará por ese punto A.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

Ahora vamos a hallar la resultante en forma gráfica. Para ello, considerando los datos dados, definiremos una escala de fuerzas (tantas toneladas equivalen a tantos centímetros dibujados en la hoja de papel). Luego iremos armando el **polígono de fuerzas**, dibujando una a una las fuerzas, una a continuación de la otra, respetando la longitud y el ángulo de cada una de ellas.

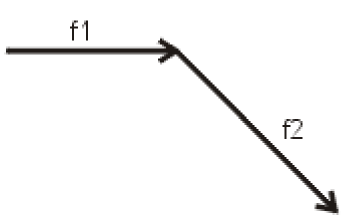
Datos del sistema:

$f1=3t$ - $\alpha 1=0°$ / $f2=4t$ - $\alpha 2=45°$ / $f3=5t$ - $\alpha 3=105°$ / $A=(3,2)$

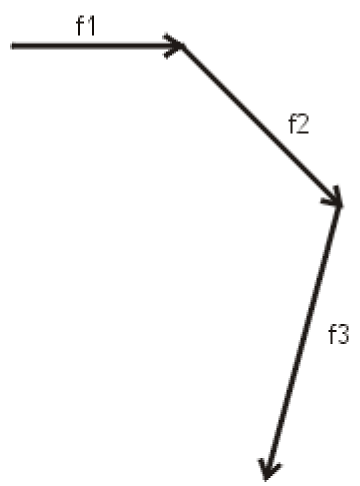
Esc. fzas. = 1tn/1cm

Giro en sentido horario

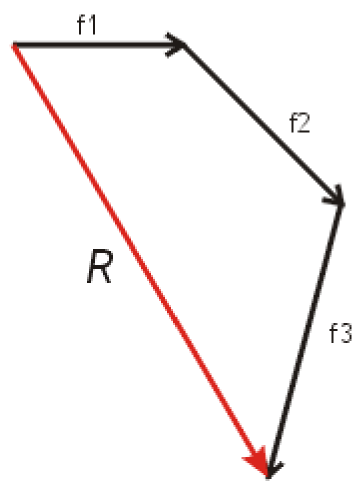
(1) Utilizaremos regla para dibujar las fuerzas y transportador para trazar los ángulos... Considerando los datos, dibujamos la f1. En nuestro caso medirá 3cm.



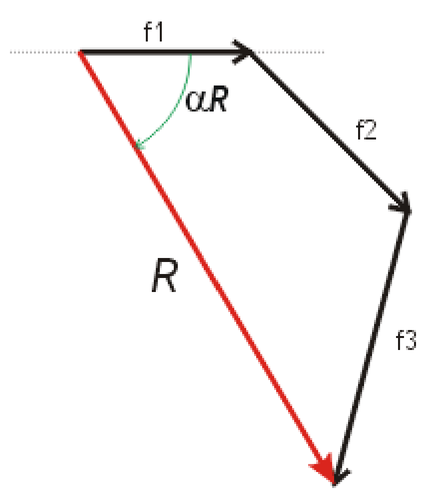
(2) A continuación de f1, dibujamos la f2 que medirá 4cm.



(3) A continuación de f2, dibujamos la f3 que medirá 5cm.

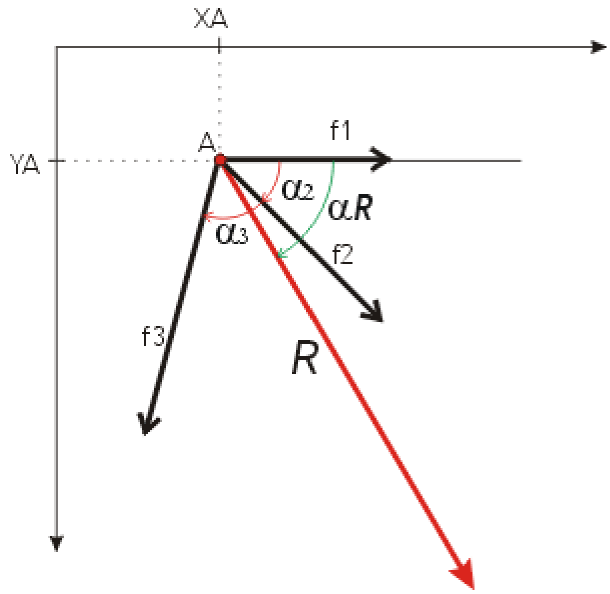


(4) Ahora dibujamos la fuerza **resultante**, que surge de unir el comienzo de la f1 con el extremo de la f3. La "flecha" de la resultante va hacia la "flecha" de f3, la última fuerza. ¿Y esto por qué? Porque estamos hallando una fuerza (la resultante) que es equivalente a las tres fuerzas componentes de nuestro sistema (f1, f2, f3).



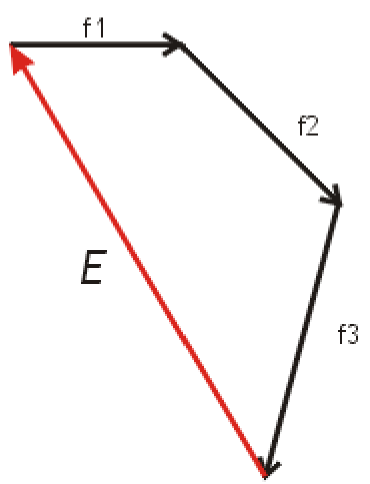
(5) Midiendo con la regla la longitud de la resultante obtenemos su módulo. Midiendo con transportador el ángulo αR obtenemos su argumento.

Esto es: 8,8cm - 59°



(6) Y para finalizar, transportamos en forma paralela la recta de acción de la resultante -usando la regla y la escuadra- haciéndola pasar por el punto de aplicación A. Ya hemos resuelto el problema en forma gráfica.

Siendo: R=8,8t - αR=59°



(7) La fuerza **equilibrante** surge de unir el extremo de la f3 con el comienzo de la f1. La "flecha" de la equilibrante va hacia el comienzo de f1, la primera fuerza. Conforman un polígono de fuerzas cerrado. La equilibrante es una fuerza de igual recta de acción, intensidad y sentido contrario que el de la resultante. Se trata de un problema de equilibrio por composición.

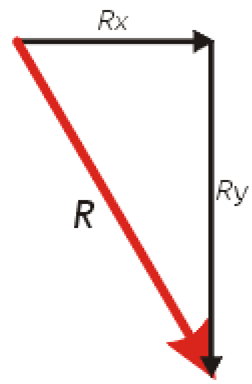
Siendo: E=8,8t - αE=239°

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Ahora vamos a hallar la resultante en forma analítica. Recordamos los datos del sistema:

$f1=3t - \alpha 1=0°$ / $f2=4t - \alpha 2=45°$ / $f3=5t - \alpha 3=105°$ / $A=(3,2)$

Primero vamos a hallar las proyecciones de R: **Rx** y **Ry**



Rx = $\sum$ Fi x cos αi
Ry = $\sum$ Fi x sen αi

Luego, con **Rx** y **Ry** hallamos la resultante **R**:

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

(esto nos dará el módulo)

αR = arc tg Ry/Rx
(esto nos dará el argumento)

A=(3,2)
(es el punto de aplicación, dato del problema por ser un sistema de fuerzas concurrentes)

Esto lo escuché en las teóricas... "Donde hay un triángulo, existe un triángulo de fuerzas" (contemporáneo argentino)

Resolvemos el problema:

Rx = 3t x cos 0° + 4t x cos 45° + 5t x cos 105°
Rx = 3t + 2,83t + (-1,29t)
<u>Rx = 4,54t</u>

Ry = 3t x sen 0° + 4t x sen 45° + 5t x sen 105°
Ry = 0t + 2,83t + 4,83t
<u>Ry = 7,66t</u>

R = $\sqrt{(4,54t)^2 + (7,66t)^2}$
<u>R = 8,90t</u>

$\alpha R = \text{arc tg } 7{,}66t/4{,}54t$

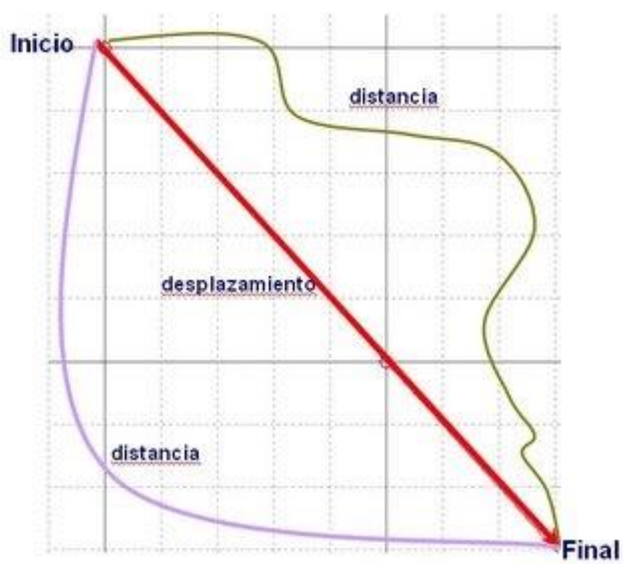
$\alpha R = \text{arc tg } 1.69$

$\underline{\alpha R = 59.34°}$

IV UNIDAD

4.1.- TRAYECTORIA DISTANCIA Y DESPLAZAMIENTO

DISTANCIA VS DESPLAZAMIENTO

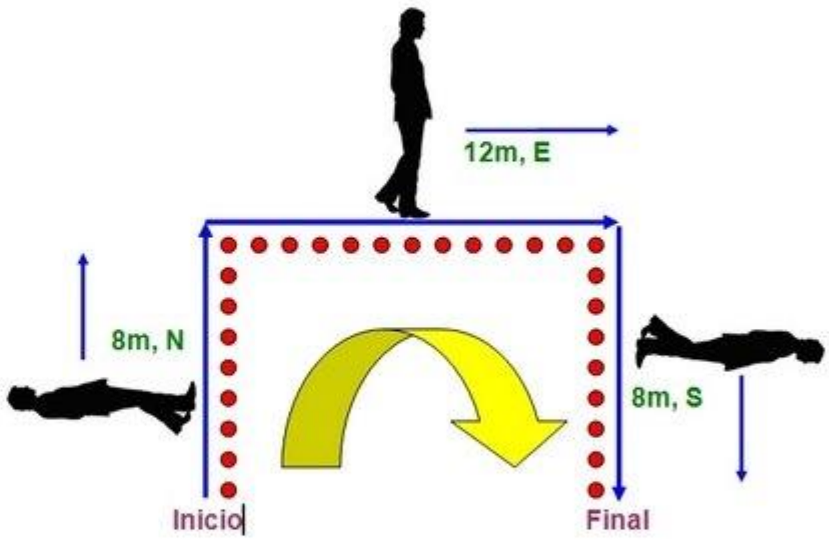


INTRODUCCION

En el lenguaje ordinario los términos **distancia y desplazamiento** se utilizan como sinónimos, aunque en realidad tienen un significado diferente. La distancia en Matemáticas y Física se refieren a situaciones diferentes aunque relacionadas entre sí. La figura de la derecha presenta la relación entre ambas. ¿Crees que puedas explicar la diferencia?

DISTANCIA

La distancia se refiere a cuanto espacio recorre un objeto durante su movimiento. Es la cantidad movida. También se dice que es la suma de las distancias recorridas. Por ser una medida de longitud, la distancia se expresa en unidades de metro según el Sistema Internacional de Medidas. Al expresar la distancia, por ser una cantidad escalar, basta con mencionar la magnitud y la unidad. Imagina que comienzas a caminar siguiendo la trayectoria: ocho metros al norte, doce metros al este y finalmente ocho metros al sur. Luego del recorrido, la distancia total recorrida será de 28 metros. El número 28 representa la magnitud de la distancia recorrida.La figura muestra que podemos iniciar un evento y seguir una ruta. Esta ruta es la que hace que recorramos una distancia.



Desplazamiento

El desplazamiento se refiere a la distancia y la dirección de la posición final respecto a la posición inicial de un objeto. Al igual que la distancia, el desplazamiento es una medida de longitud por lo que el metro es la unidad de medida. Sin embargo, al expresar el desplazamiento se hace en términos de la magnitud con su respectiva unidad de medida y la dirección. El desplazamiento es una cantidad de tipo vectorial. Los vectores se describen a partir de la magnitud y de la dirección. En la Figura anterior observa que recorres 8m en dirección Norte, luego 12 m en dirección Este y por último 8 m en dirección Sur. Para el desplazamiento solo importa el punto de inicio y el punto final por lo que el vector entrecortado muestra el desplazamiento. El resultado es 12m en dirección Este. Para esto recorres una distancia de 28m.

Matemáticamente, el desplazamiento (Δd) se calcula como:

$d_f - d_i = \Delta d$

donde df es la posición final y di es la posición inicial del objeto. El signo del resultado de la operación indica la dirección del desplazamiento según el sistema de coordenadas definido. En el caso anterior, el desplazamiento hubiese sido +12m al este.

Cuando el objeto termina en el mismo lugar de inicio el desplazamiento será cero aunque la distancia no necesariamente lo sea. A esta trayectoria en la que la posición final e inicial son iguales, se conoce como un paso cerrado. El cambio en la posición de un objeto también se puede representar gráficamente. Las características de la gráfica son parámetros que nos ayudan a describir el movimiento del objeto bajo estudio. El tema de análisis gráfico del movimiento rectilíneo que discutimos anteriormente te puede ayudar a entender el concepto básico de vectores.

También puedes acceder a la página de EducaPlus. En esta página hay un interactivo que te permitirá explorar y aplicar los conceptos de distancia y desplazamiento: Educa+ distancia y desplazamiento.

4.2.- RAPIDEZ Y VELOCIDAD

velocidad

Veamos las diferencias entre estas 2 magnitudes, rapidez y velocidad.

La rapidez nos indica que tan deprisa se mueve un objeto, mientras que la velocidad nos indica que tan deprisa se mueve un objeto y en qué dirección y sentido lo hace.

Ejemplo de rapidez:

- La rapidez de la bicicleta es de **3 m/s.**

Ejemplo de velocidad:

- La velocidad de la bicicleta es de **3 m/s hacia el norte.**

A continuación veremos algunos detalles más:

Rapidez

La rapidez indica la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado por el móvil en recorrer dicha distancia. Su fórmula es la siguiente:

$$rapidez = \frac{distancia}{tiempo}$$

La rapidez es una magnitud escalar.

Ejercicio:

Una bicicleta avanza 60 metros en 3 segundos. Calcular su rapidez:

$$rapidez = \frac{distancia}{tiempo} = \frac{60\ m}{3\ s} = 20\ \frac{m}{s} = 20\ {}^{m}/_{s}$$

La rapidez de la bicicleta es de 20 m/s.

Velocidad

La velocidad indica la relación entre el desplazamiento y el tiempo empleado por el móvil en realizar dicho desplazamiento. Su fórmula es la siguiente:

$$velocidad = \frac{desplazamiento}{tiempo}$$

La velocidad es una magnitud vectorial, es decir, **tiene módulo, dirección y sentido.**

Como verás, rapidez y velocidad no son lo mismo. La rapidez nos indica que tan deprisa se mueve un objeto, mientras que la velocidad nos indica que tan deprisa se mueve un objeto y en qué dirección y sentido lo hace.

Unidades de medida

En el sistema internacional de unidades, la rapidez y la velocidad, se miden en metros por segundo (m/s).

4.2.1 VELOCIDAD MEDIA

Velocidad

La velocidad media de un objeto se define como la distancia recorrida por un objeto dividido por el tiempo transcurrido. La velocidad es una cantidad vectorial y la velocidad media se puede definir como el desplazamiento dividido por el tiempo. Para el caso especial de movimiento en línea recta en la dirección x, la velocidad media toma la forma de:

$$v_{media} = \bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La propia definición implica que la unidad de velocidad debe ser metros/segundo o en general cualquier distancia dividido por cualquier tiempo.

Puede obtenerse una expresión para la velocidad instantánea en cualquier punto del recorrido, tomando el límite cuando el intervalo de tiempo se hace mas y mas pequeño. A ese proceso de tomar el límite se le llama derivación y la velocidad instantánea se puede definir como

$$v_{\text{instantánea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Velocidad Media, Movimiento Rectilíneo	Velocidad Media, Caso General

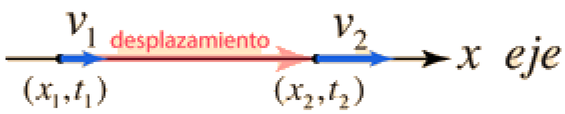
HyperPhysicsMecánica	*M Olmo R Nave*	Atrás

Velocidad Media, Linea Recta

La velocidad media de un objeto, se define como la distancia recorrida dividida por el tiempo transcurrido. La velocidad es una cantidad vectorial y la velocidad media se puede definir como el desplazamiento dividido por el tiempo. Para el caso especial de movimiento en línea recta en la dirección x, la velocidad media toma la forma:

$$v_{media} = \bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si se conocen las velocidades iniciales y finales del movimiento y la aceleración es constante, la velocidad media tambien se puede expresar como



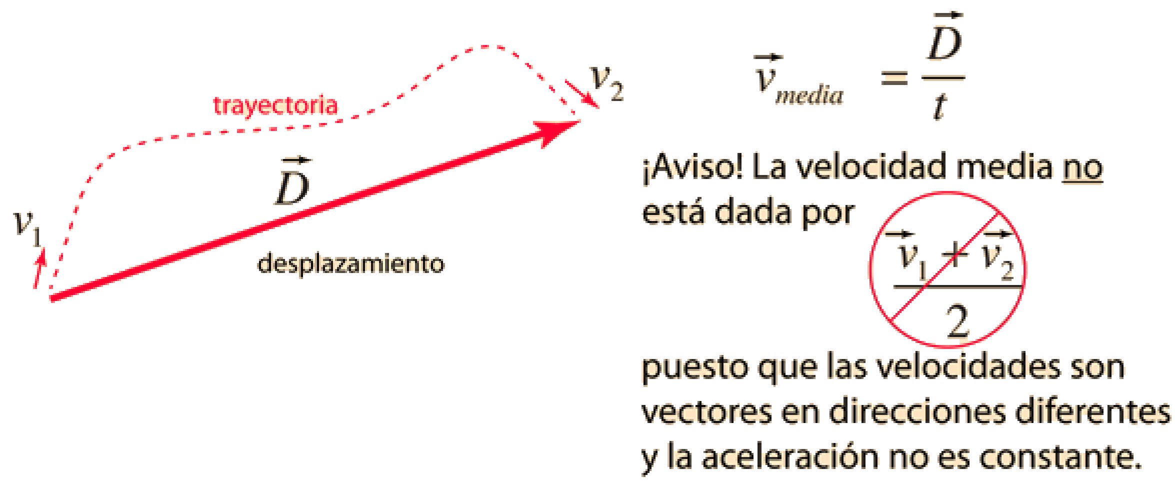
$$v_{media} = \bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

En este caso especial, estas expresiones dan el mismo resultado.

HyperPhysicsMecánica *M Olmo R Nave*

Velocidad Media, Caso General

La velocidad media de un objeto se define como la distancia recorrida dividida por el tiempo transcurrido. La velocidad es una cantidad vectorial y la velocidad media se puede definir como el desplazamiento dividido por el tiempo. Para los casos generales involucrando aceleración no constante, esta definición se debe aplicar directamente puesto que las expresiones de velocidad media en línea recta no son válidas.



4.2.2.- VELOCIDAD INSTANTANEA

Velocidad Instantánea

Si se tiene una función S(t)S(t) que da la posición de un móvil, en una recta real, en el momento tt, se define la **velocidad promedio** en un intervalo de tiempo [t1,t2][t1,t2] como vp=S(t2)−S(t1)t2−t1vp=S(t2)−S(t1)t2−t1 : la diferencia de posiciones (igual a la distancia recorrida, cuando el movimiento tiene la misma dirección) entre el tiempo transcurrido, longitud del intervalo de tiempo: t2−t1t2−t1 .

La **velocidad instantánea** se define como el límite de la velocidad promedio cuando la longitud del intervalo de tiempo se va a cero, o sea un instante, esto es:

v(t1)=limt2→t1S(t2)−S(t1)t2−t1=limt→t1S(t)−S(t1)t−t1.v(t1)=limt2→t1S(t2)−S(t1)t2−t1=lim t→t1S(t)−S(t1)t−t1.

O si en esta fórmula se define t2=t1+ht2=t1+h se tiene que cuando t2→t1t2→t1 entonces h→0h→0 y se puede replantear la velocidad instantánea como:

v(t1)=limh→0S(t1+h)−S(t1)t1+h−t1=limh→0S(t1+h)−S(t1)h.v(t1)=limh→0S(t1+h)−S(t1)t1+h−t1=limh→0S(t1+h)−S(t1)h.

Este límite se define como la derivada de la función S(t)S(t) en el momento t=t1t=t1 y se denota como:
S´(t1)=limh→0S(t1+h)−S(t1)h.S´(t1)=limh→0S(t1+h)−S(t1)h.

Esta es otra forma de llegar al concepto de la derivada.

Nótese que es totalmente análogo a lo planteado en el contexto geométrico como pendiente de la recta tangente. Y la velocidad promedio como pendiente de la recta secante.

Ejemplo 1

Si la posición de una partícula que se mueve en una recta está dada por la función S(t)=4t−t2dmS(t)=4t−t2dm. para t≥0t≥0 seg, obtener su velocidad promedio en los dos primeros segundos y su velocidad en el segundo uno.

Velocidad promedio:

vp=S(t2)−S(t1)t2−t1vp=S(t2)−S(t1)t2−t1

donde t2=2t1=0t2=2t1=0

S(t2)=s(2)=4(2)−(2)2=8−4=4S(t2)=s(2)=4(2)−(2)2=8−4=4

S(t1)=S(0)=4(0)−(0)2=0S(t1)=S(0)=4(0)−(0)2=0

Vp=4−02−0=2dmseg.Vp=4−02−0=2dmseg.

4.2.3.- MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

Recordatorio del MRU

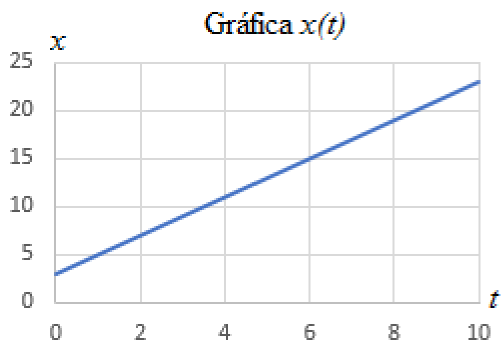
El movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es un movimiento cuya **trayectoria** es una recta y con velocidad constante (puesto que no hay aceleración).

La ecuación de la posición del móvil en el instante tt en un MRU es

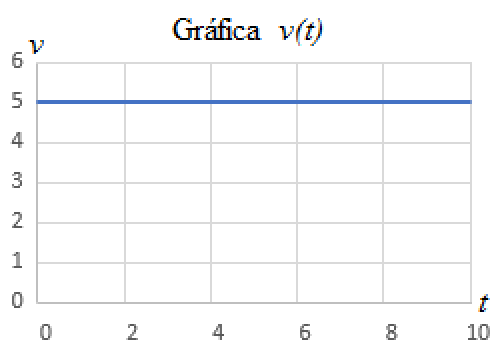
x(t)=x0+v·(t−t0)x(t)=x0+v·(t−t0)

siendo x0x0 la posición inicial, vv la velocidad, tt el tiempo y t0t0 el tiempo inicial.

La gráfica de la posición en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la velocidad:



Y la gráfica de la velocidad en función del tiempo es una recta horizontal, pues la velocidad es constante. La pendiente de esta recta es la aceleración, que, como se observa en la gráfica, es igual a 0:



2. MRUA: definición, fórmulas y gráficas

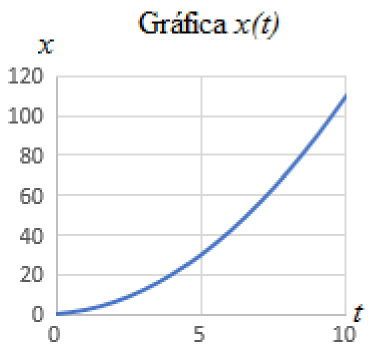
El **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** (MRUA) o **movimiento rectilíneo uniformemente variado** (MRUV) también es un movimiento cuya **trayectoria** es una recta, pero la velocidad no es necesariamente constante porque existe una **aceleración**.

La ecuación de la posición del móvil en el instante tt en un MRUA es

x(t)=x0+v0·(t−t0)+a2·(t−t0)2x(t)=x0+v0·(t−t0)+a2·(t−t0)2

siendo x0x0 la posición inicial, v0v0 la velocidad inicial, aa la aceleración, tt el tiempo y t0t0 el tiempo inicial.

La **gráfica de la posición** en función del tiempo es una parábola:



La velocidad en un MRUA, vv, no es generalmente constante debido a la presencia de la aceleración, aa. En el instante tt, la velocidad, v(t)v(t), viene dada por la fórmula

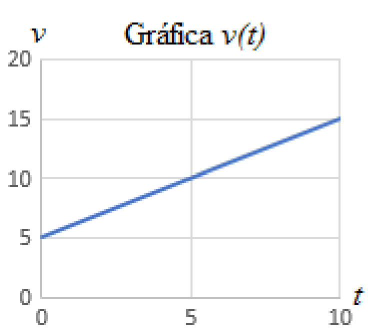
v(t)=v0+a·(t−t0)v(t)=v0+a·(t−t0)

donde v0v0 es la velocidad inicial, aa es la aceleración y t0t0 es el tiempo inicial.

En el Sistema Internacional (SI), las **unidades** de la posición y del tiempo son metros y segundos, respectivamente. Por tanto, en el SI, las unidades de las variables involucradas en las ecuaciones anteriores serían:

- **Posición:** metros: mm.
- **Velocidad:** metros por segundo: m/sm/s.
- **Tiempo:** segundos: ss.
- **Aceleración:** metros por segundo al cuadrado: m/s2m/s2.

La **gráfica de la velocidad** en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la aceleración:

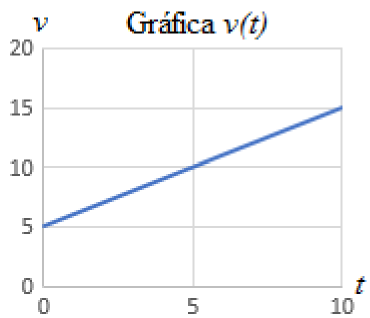


La velocidad en un MRU o en un MRUA puede ser positiva, negativa o nula. Normalmente, el signo de la velocidad nos informa del sentido del movimiento del móvil.

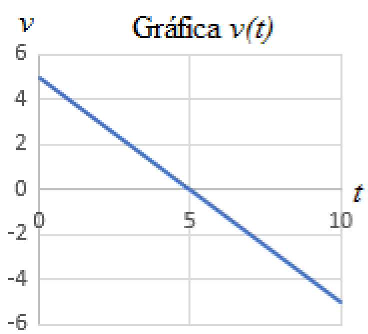
En un MRUA, la aceleración, aa, es constante, pero puede ser positiva o negativa. Si es nula (a=0a=0), no se trata de un MRUA, sino de un MRU.

Supongamos que la velocidad inicial de un móvil en un MRUA es positiva, entonces:

- si la aceleración es positiva, la velocidad aumenta con el tiempo:

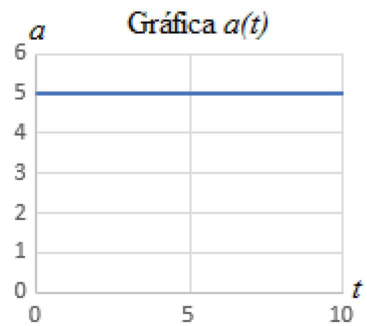


- mientras que, si la aceleración es negativa, la velocidad disminuye con el tiempo:



Nota: obsérvese en la gráfica anterior que, si la aceleración tiene signo opuesto a la velocidad inicial, entonces la velocidad puede cambiar de signo si el MRUA dura el tiempo suficiente. En este caso, existe un instante tt que anula la velocidad (el móvil se detiene) y, a partir de dicho instante, el movimiento continúa en sentido opuesto al inicial. Un ejemplo de esto es el movimiento de un objeto que se lanza desde el suelo hacia el cielo: el objeto se lanza con una velocidad, alcanza su altura máxima (donde su velocidad es 0) y cae con una velocidad de signo opuesto a la de la subida.

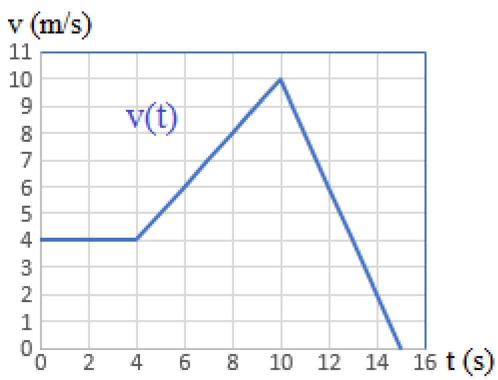
Finalmente, puesto que la **aceleración**, aa, de un MRUA es constante, su gráfica en función del tiempo es una recta horizontal sin pendiente:



3. Problemas resueltos de MRUA

Problema 1

Describir el movimiento de la siguiente gráfica y calcular v(0)v(0), v(4)v(4), v(10)v(10) y v(15)v(15):



Solución

Es la gráfica de la velocidad en función del tiempo de un movimiento.

El movimiento es rectilíneo uniforme en el intervalo de tiempo [0,4], rectilíneo uniformemente acelerado con aceleración positiva en el intervalo [4,10] y rectilíneo uniformemente acelerado con aceleración negativa en el intervalo [10,15].

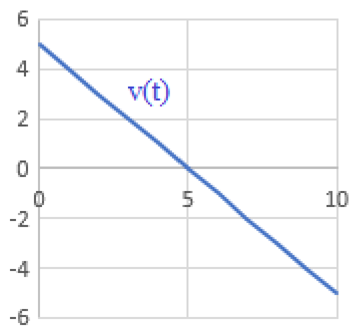
Observando la gráfica, las velocidades son

$$v(0) = 4\ {}^{m}/_{s}$$
$$v(4) = 4\ {}^{m}/_{s}$$
$$v(10) = 10\ {}^{m}/_{s}$$
$$v(15) = 0\ {}^{m}/_{s}$$

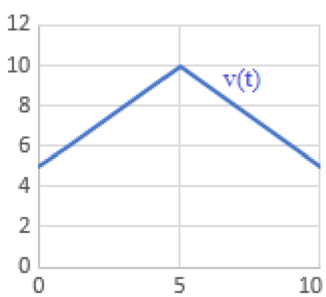
Problema 2

Elegir la gráfica de la velocidad en función del tiempo que se corresponde a cada situación.

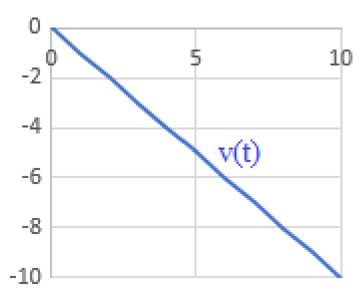
Gráfica *a*:



Gráfica *b*:



Gráfica *c*:



Situaciones:

1. Dejar caer una moneda desde la azotea de un edificio: el movimiento comienza en el momento en el que se suelta la moneda y termina cuando ésta llega al suelo.
2. Lanzar una moneda hacia arriba en línea recta: el movimiento comienza cuando se suelta la moneda y termina cuando cae al suelo.

3. Efectuar un adelantamiento a un auto en marcha con otro auto: el movimiento comienza justo antes de realizar el adelantamiento y termina cuando, una vez rebasado el auto, se lleva la misma marcha que al inicio.

Solución

La gráfica *a* describe la situación 2. En el instante t=0t=0 la velocidad no es 0 porque la moneda tiene una velocidad inicial positiva necesaria para moverse hacia arriba. La velocidad decrece hasta llegar a 0 por el efecto de la gravedad (cuando la moneda alcanza la altura máxima). En dicho instante, el efecto de la gravedad provoca que la velocidad siga decreciendo y volverse negativa, lo que se corresponde con el movimiento de la caída libre de la moneda.

La gráfica *b* describe la situación 3. En t=0t=0 el auto no tiene velocidad 0 porque está en marcha. La velocidad aumenta hasta rebasar al otro auto y después, decrece para continuar con su marcha.

La gráfica *c* describe la situación 1. La velocidad en t=0t=0 es 0 puesto que la moneda está inicialmente en reposo. La velocidad decrece por efecto de gravedad.

Problema 3

Calcular la aceleración (en m/s2m/s2) que se aplica para que un móvil que se desplaza en línea recta a 90.0 km/h reduzca su velocidad a 50.0 km/h en 25 segundos.

Comentar el resultado.

Solución

La velocidad inicial del móvil es

$$v_0 = 90\ km/h$$

También conocemos la velocidad a los 25 segundos:

$$v(25) = 50\ km/h$$

La fórmula de la velocidad es

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Despejamos la aceleración:

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t}$$

Antes de sustituir los datos, escribimos la velocidad en metros por segundo para tener las mismas unidades:

$$v_0 = 90\frac{km}{h} =$$

$$= 90\frac{km}{h} \cdot \frac{1h}{3600\,s} \cdot \frac{1000\,m}{1km} =$$

$$= 25\frac{m}{s}$$

$$v(25) = 50\frac{km}{h} =$$

$$= 50\frac{km}{h} \cdot \frac{1h}{3600\,s} \cdot \frac{1000\,m}{1km} \cong$$

$$\cong 13.9\frac{m}{s}$$

Sustituimos los datos en la fórmula de la aceleración que obtuvimos anteriormente:

$$a = \frac{v(25) - v_0}{25s} \rightarrow$$

$$a = \frac{13.9\ - 25}{25} \rightarrow$$

$$a = \frac{-11.1}{25}\frac{m}{s^2} \cong$$

$$\cong -0.4\ \frac{m}{s^2}$$

Por tanto, la aceleración es de −0.4m/s2−0.4m/s2.

Como la velocidad inicial es positiva y el móvil va frenándose, entonces la aceleración es negativa.

Problema 4

Un tren de alta velocidad en reposo comienza su trayecto en línea recta con una aceleración constante de a=0.5m/s2a=0.5m/s2. Calcular la velocidad (en kilómetros por hora) que alcanza el tren a los 3 minutos.

Solución

Como el tren está en reposo, la velocidad inicial es 0:

$$v_0 = 0$$

Nótese que la aceleración es en metros por segundos al cuadrado y el tiempo es en minutos. Debemos escribir el tiempo en segundos:

$$t = 3\ min =$$

$$= 3\ min \cdot \frac{60\ s}{1\ min} =$$

$$= 180s$$

Calculamos la velocidad aplicando la fórmula:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad \rightarrow$$

$$v(180) = 0 + 0.5\ {}^{m}/_{s^2} \cdot 180\ s =$$

$$= 90\ {}^{m}/_{s}$$

Tenemos la velocidad en metros por segundo, así que la escribimos en kilómetros por hora:

$$90\ {}^{m}/_{s} =$$

$$= 90 \frac{m}{s} \cdot \frac{1\ km}{1000\ m} \cdot \frac{3600\ s}{1\ h} =$$

$$= 324\ {}^{km}/_{h}$$

Por tanto, la velocidad del tren a los tres minutos es 324km/h324km/h.