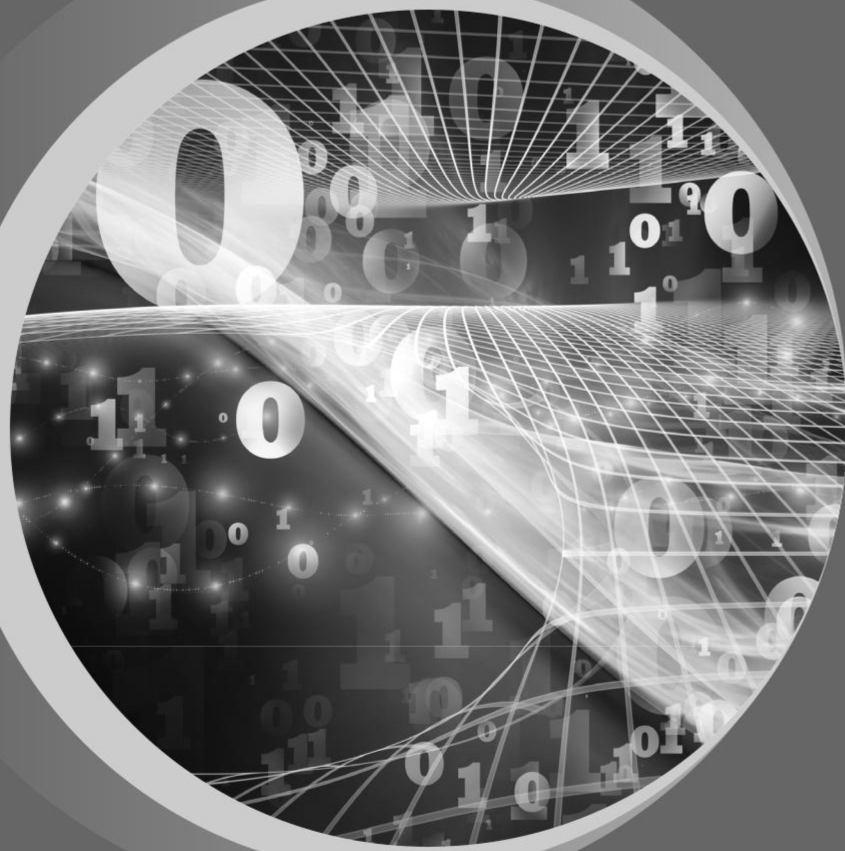
BLOQUE I

NÚMEROS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS



Competencias genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

BLOQUE I NÚMEROS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS

Propósito del bloque

Resuelve problemas sobre fenómenos cotidianos, mediante procedimientos aritméticos eligiendo de manera crítica las alternativas de solución.

Interdisciplinariedad

- üü Química I
- üü Taller de Lectura y Redacción I
- üü Informática I
- üü Ética I
- üü Metodología de la Investigación

Ejes transversales

- üü Eje transversal social
- üü Eje transversal de la salud
- üü Eje transversal ambiental
- üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Resuelve y formula, de manera colaborativa, problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que le permita afrontar retos en situaciones de su entorno.
- Argumenta procedimientos para resolver problemas aritméticos presentes en su contexto.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ Números • Clasificación y propiedades de los números reales • Operaciones con números reales - Leyes de los signos - Leyes de los exponentes - Jerarquía de operaciones - Mínimo común múltiplo - Máximo común divisor	¾¾ Clasifica los números reales y sus las propiedades. ¾¾ Utiliza las propiedades de los números reales en operaciones aritméticas. ¾¾ Explica la solución de problemas aritméticos	¾¾ Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. ¾¾ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ¾¾ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Hace dos semanas tu tía Esperanza se cayó de las escaleras de su casa y se quebró un brazo; el día de hoy te pide que la acompañes al mercadito para que le ayudes a cargar las cosas que va a comprar. Al llegar se dirige al área de frutas y verduras y pide lo siguiente:

2 kg de naranja que cuestan \$ 9 por kg, 1 kg de manzanas que cuestan \$10.50 por kg, una sandía que pesa 3.4 kg cuyo kilogramo cuesta \$6.50, 3 kg de tomate que cuestan \$8.50 por kg, $\frac{1}{4}$ kg de ajos que cuesta \$70 el kg, 1 kg de cebolla que cuesta \$10 el kg y $\frac{3}{4}$ kg de aguacate que cuesta \$18 el kg.

1. ¿Cuántos tipos de números hay en el problema?

   ____

2. ¿Qué operación aritmética necesitas realizar para obtener la cantidad que pagó por cada uno de los productos?

   ____

3. Si en ese momento no se tiene una calculadora y te piden que realices la cuenta total, ¿crees que tienes los conocimientos y la capacidad para realizarla?

   ____

4. Escribe el procedimiento de tu cuenta.

   ____

5. ¿Cuánto tiene que pagar tu tía en total?

   ____

Clasificación de los números reales

Los números reales (R) se dividen en dos grandes conjuntos de números: los racionales (Q) y los irracionales (I).

Un número “x” es racional si se puede representar como el cociente (división) de dos números, siendo el divisor diferente de cero, es decir, $x = \frac{a}{b}$, …a, b ϵ Q, b $\neq 0$.

Un número es racional si el resultado del cociente es un entero, su parte decimal es infinita o si el decimal se repite (es periódico). Será irracional si la parte decimal es infinita.

De manera que:

a) $\frac{3}{4}$ es un número racional porque su cociente es 0.75 (decimal finito).

b) $\frac{6}{3}$ es un número racional porque su cociente es 2 (número entero).

c) $\frac{5}{3}$ es un número racional porque su cociente es 1. 6666 …(decimal periódico).

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un número irracional ya que su cociente es 0.707106781186 … (decimal infinito).

Por tal motivo, los números racionales pueden ser representados como enteros, con decimal o como fracciones.

Algunos conjuntos de números que se pueden formar con los números racionales son:
Naturales: N= {1,2,3,4,5,6,…}
Enteros: incluye negativos, el cero y los naturales, Z= {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…}
Primos: {2,3,5,7,11,13,17,19,23,…}

ACTIVIDAD 1

De forma individual, elaborar un diagrama o mapa conceptual de la clasificación de los números reales.

ACTIVIDAD 2

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Encuentra el número en su forma decimal e indica si es un número racional o irracional.

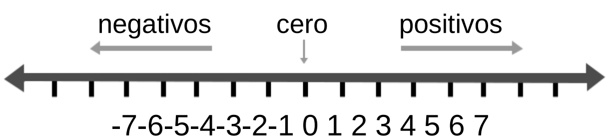
a) $2\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{11}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{2}{4}$ d) $\frac{\pi}{1}$ f) $\frac{9}{3}$

2. Completa la tabla con los diferentes tipos de números:

Fracción	Mixto	Decimal
$\frac{8}{1}$	$7\frac{2}{2}$	8.00
$\frac{5}{2}$		
	$5\frac{3}{4}$	
		0.01

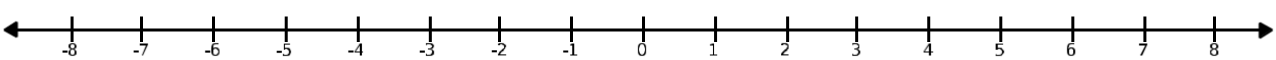
Los números reales pueden dibujarse como puntos sobre una recta llamada recta numérica, los puntos representados sobre la recta a partir del origen son negativos si están a la izquierda y positivos si están a la derecha del origen.



IDENTIFICANDO NÚMEROS REALES

Determina cuáles son números naturales, enteros, racionales e irracionales, y gráficalos en la recta numérica.

-5 4 km $\frac{5}{-2}$ π $5\frac{3}{4}$ *km* $\sqrt{5}$ $\frac{9}{3}$ e=2.71 $\frac{7}{8}$ $\sqrt{36}$



Ordenando números reales

Coloca el símbolo que corresponda < (menor), > (mayor), = (igual) entre los siguientes pares de números.

a) 9 ______5 b) -11 ______3 c) 2.3 ______0.5 d) -12______-30 e) 0 ______-6

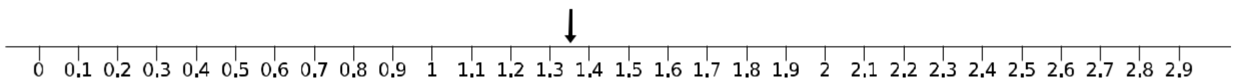
f) $\frac{1}{3}$ ____ $\frac{11}{13}$ g) $\frac{7}{16}$ ____ $\frac{2}{3}$ h) $\frac{5}{-6}$ ____ -8 i) $\frac{12}{3}$ ____ 4 j) $\frac{5}{-8}$ ____ $\frac{4}{-5}$

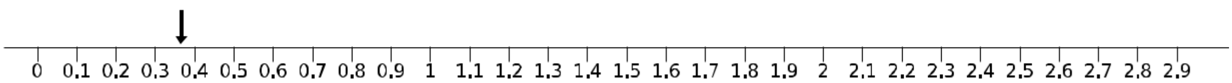
PROBLEMAS EN UNA RECTA NUMÉRICA

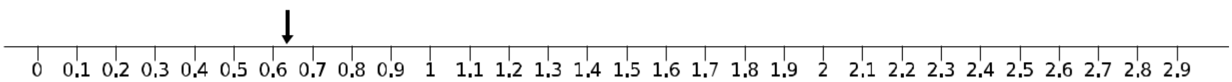
ACTIVIDAD 3

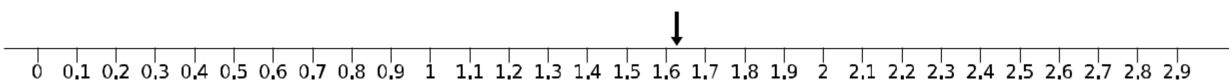
Identificar la opción correcta de los siguientes problemas, escribiendo en el paréntesis del lado derecho la letra correspondiente.

1. Martha compró 2 metros de listón y utilizó solamente 5 retazos de 1/8 de metro cada uno. ¿Qué opción representa los metros de listón sobrantes? ( )

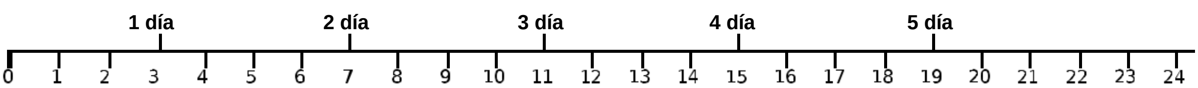
A)


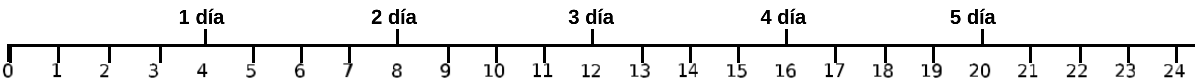
B)


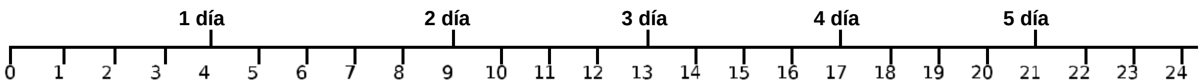
C)


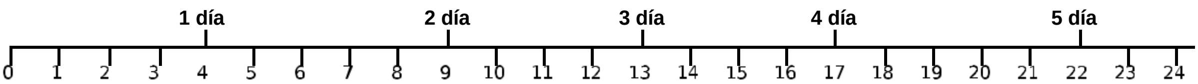
D)


2. Un ejército al iniciar un combate avanza 6 km cada noche y en el día retrocede 2 km. ¿A qué distancia del punto inicial se encuentra al finalizar el quinto día? ( )

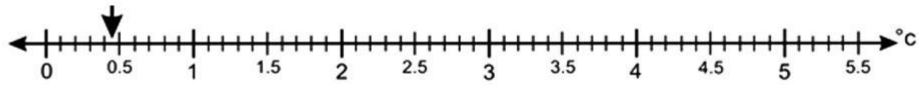
A)


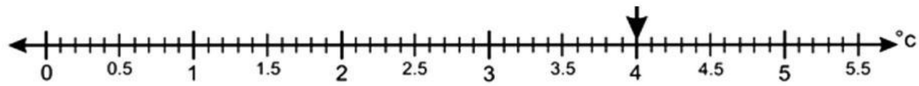
B)


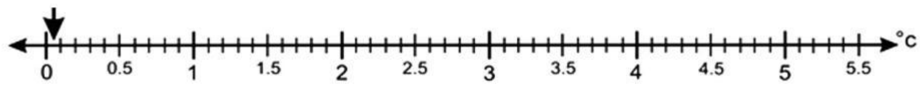
C)


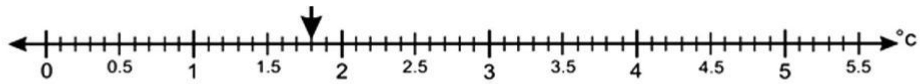
D)


3. La temperatura registrada en una ciudad a las 3:00 a.m. fue de 0.9 °C. Si para las 4:00 a.m. la temperatura se redujo a la mitad, ¿en cuál de las siguientes rectas numéricas se ubica la temperatura registrada a las 4:00 a.m.? ( )

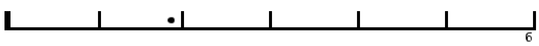
A)


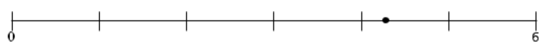
B)


C)


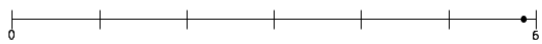
D)


4. Para conocer la cantidad de agua que contiene una cisterna, ésta se encuentra dividida en 6 niveles. El primer día se encuentra completamente vacía y se suministra agua hasta ¾ de nivel. Durante la noche desciende ¼ de nivel. Al iniciar el segundo día se suministra agua que equivale a un nivel y medio, y desciende ⅓ de nivel durante la noche. El tercer día se incrementa 2 niveles y en la noche desciende ¾ de nivel. ¿En qué nivel inicia el agua al cuarto día? ( )

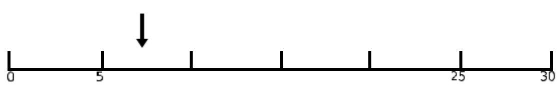
A)


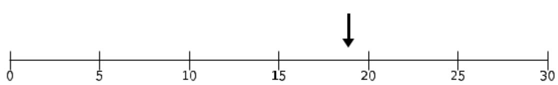
C)


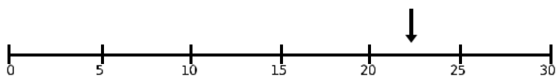
B)


D)


5. Un autobús cuya capacidad es de 30 pasajeros recorre una ruta de 100 km. Inicia su recorri-do con 7 personas, en el kilómetro 10 suben la mitad de su capacidad, en el km 25 se queda con ½ de pasajeros que traía y en el km 75 el camión queda lleno. ¿Cuántos se subieron en el km 75? (….)

A)


C)


B)


D)


REGLA DE LOS SIGNOS

En el producto y en el cociente de números positivos (+) y negativos (-) se cumplen las siguientes reglas:

PRODUCTO					COCIENTE				
+	×	+	=	+	+	÷	+	=	+
−	×	−	=	+	−	÷	−	=	+
+	×	−	=	−	+	÷	−	=	−
−	×	+	=	−	−	÷	+	=	−

ACTIVIDAD 4

Conformen equipos y realicen los ejercicios siguientes.

1. Realiza las siguientes operaciones con signo:

a) $9 + (-12) + (-2) =$

b) $-6 - (-4) =$

c) $(-2.4) + (5.6) + (-3) + (9) =$

d) $(-2) - (-3) - (-7) =$

e) $(-3)(-2)(5) =$

f) $(-2)(6)(-1) =$

g) $4(-2)(-5) =$

h) $\frac{-6}{-2} =$

i) $-40 \div -(-4) =$

j) $-\frac{72}{8} =$

Para repasar la ubicación de los números en la recta numérica y las leyes de los signos, puedes consultar las siguientes páginas:
http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349693957/widget
http://www.matematicastamayo.com/mateminis/numeros-con-signo

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

Para resolver una expresión con varias operaciones, se debe de seguir un orden en la que se realizan las operaciones.

a) Se inicia eliminando todos los signos de agrupación: paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }; realizando las operaciones indicadas, se debe de iniciar por los signos que se encuentran más al interior de la expresión hacia afuera.
b) Si se encuentran dos operaciones de la misma jerarquía en la misma expresión entonces se realiza de izquierda a derecha.

ACTIVIDAD 5

Realiza operaciones aritméticas, siguiendo el orden jerárquico al efectuarlas, eliminando los símbolos de agrupación:

a) $(7 + 8) - (5 + 9) + 4(2 + 5) =$	**R=**
b) $(4 - 1) + 5(8 + 9) + 4(8 - 3) =$	**R=**
c) $(5 + 9) + 3 + 6(4 + 5) + 6 + 9(4 - 3) =$	**R=**
d) $[6(6 + 1) + 2(2 + 5)] + 4(6 - 2) =$	**R=**
e) $5(8 + 9) + 8(5 + 9) + 4(5 + 6) =$	**R=**
f) $[5 + 5(6 + 9) - 3(7 + 5)][4(5 + 6) - 3 + 8] =$	**R=**
g) $\frac{[8 + 4(9 - 6)]}{[6 - 5]} =$	**R=**
h) $2 + 3[2(4 + 5) + 7 - 3(1 + 2)] =$	**R=**
i) $8 + 3(2 + 5) - 4(1 + 2) + 3(2 + 4) =$	**R=**
j) $\frac{4 + 2(5 + 2)}{2 + (3 + 4)} =$	**R=**
k) $\frac{2 + 5 + 15}{2 + 5 + 3} =$	**R=**

Para repasar las jerarquías de operaciones y el uso de paréntesis puedes ver el video https://www.youtube.com/watch?v=CDRV5Bv0ZB4

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

- El máximo común (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.
- Para hallar el máximo común divisor de dos o más números, por ejemplo (12, 18):

1° se descompone cada número en producto de factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

2° el producto de estos factores comunes elevados al menor exponente es el máximo común divisor de los números dados.

$12 = 2_2 \text{ x } 3$
$18 = 2 \text{ x } 3_2$

m.c.d. (12, 18) = 2 x 3 = 6

ACTIVIDAD 6

1. Hallar el máximo común divisor de los siguientes pares de números:

a) 40 y 60

b) 35 y 48

c) 70 y 62

m.c.d.=

m.c.d.=

m.c.d.=

---

a) 100 y 150

b)15, 75 y 125

c)72, 108 y 60

m.c.d.=

m.c.d.=

m.c.d.=

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.
- Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, por ejemplo (30, 45):

1° se descompone cada número en producto de factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2° el producto de estos factores comunes elevados al menor exponente y de los no comunes es el mínimo común múltiplo de los números dados.

$30 = 2 \times 3 \times 5$
$45 = 3^2 \times 5$

m.c.d. $(30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

2. Hallar el mínimo común de los siguientes pares de números:

a) 32 y 68 b) 52 y 76 c) 84 y 95

m.c.m.= m.c.m.= m.c.m.=

a) 105 y 210 b) 5, 9 y 15 c) 30, 45 y 15

m.c.m.= m.c.m.= m.c.m.=

3. Resuelve los siguientes problemas

a) Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posibles.
¿Cuál debe de ser la longitud del lado de cada cuadrado?

¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

b) Un viajante va a Sevilla cada 18 días, otro va a Sevilla cada 15 días y un tercero va a Sevilla cada 8 días. Hoy día 10 de enero han coincidido en Sevilla los tres viajantes.

¿Dentro de cuantos días como mínimo volverán a coincidir en Sevilla?

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDAD 7

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Escribe una fracción equivalente a:

$\frac{12}{9}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{12}$

$\frac{5}{3}$ $\frac{18}{24}$ $\frac{3}{9}$

2. Suma y resta de fracciones propias e impropias

a) $\frac{7}{12}+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}$

b) $\frac{12}{5}-\frac{3}{4}+2$

c) $\frac{10}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{9}+\frac{6}{18}-\frac{5}{3}$

e) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$

f) $2\frac{3}{4}-3\frac{2}{3}-4\frac{1}{2}$

g) $3\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1\frac{1}{5}-\frac{2}{6}$

3. Multiplicación de fracciones.

a) $\frac{14}{6}\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)$

d) $\left(\frac{3}{15}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{7}\right)$

b) $\left(9\frac{3}{4}\right)\left(\frac{16}{3}\right)(-7)$

e) $\left(-9\frac{1}{3}\right)\left(-5\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{6}\right)$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)(-2)\left(-\frac{5}{3}\right)$

f) $\left(-3\frac{2}{5}\right)\left(-1\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

4. División de fracciones:

a) $\frac{9}{6} \div \frac{5}{20}$

e) $\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}$

b) $\frac{7}{3} \div \frac{11}{6}$

f) $-2\frac{1}{2} \div \frac{2}{5}$

c) $\left(3\frac{7}{12}\right) \div \left(\frac{8}{9}\right)$

g) $\left(-1\frac{3}{4}\right) \div \left(-3\frac{5}{4}\right)$

d) $\left(2\frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{8}\right)$

h) $\dfrac{1\frac{3}{4}+2\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}}$

Te sugerimos ver los siguientes enlaces, para reforzar tus conocimientos sobre fracciones y suma y resta de fracciones con diferentes denominadores.
http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349621222/widget
whttp://www.math2me.com/playlist/aritmetica/suma-y-resta-de-fracciones-con-diferente-denominador-convertir-fracciones

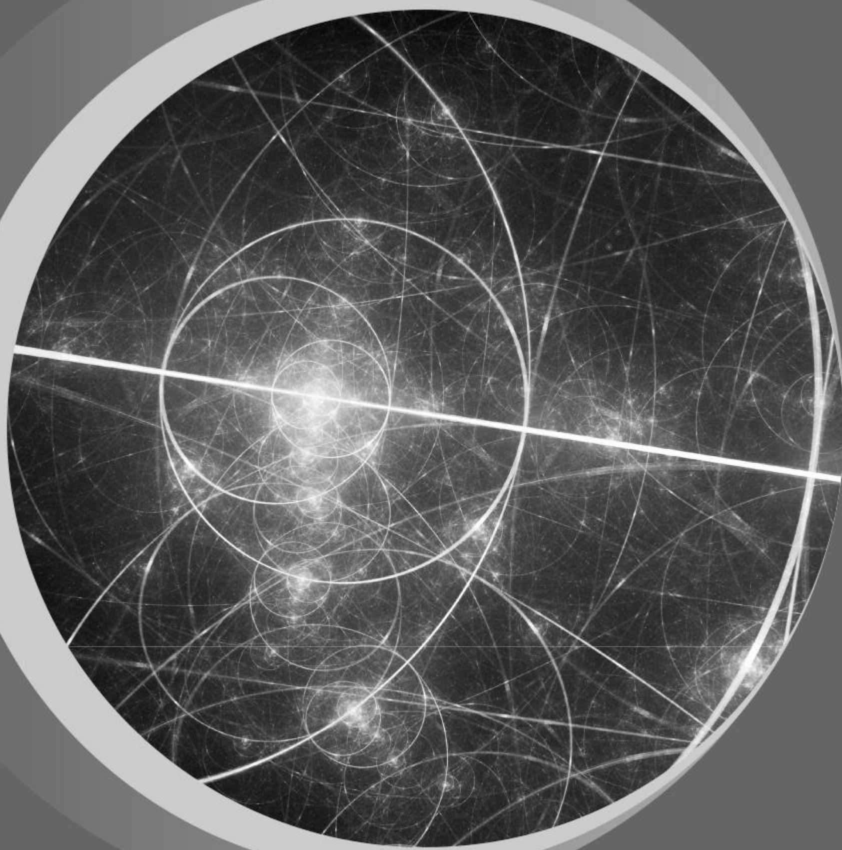
5. Resuelve los siguientes problemas.

a) Problema de repartición:
Cuando murió don Jesús, dejó como herencia “algunas” vacas. En su testamento decía lo siguiente: “Agustín debe recibir la mitad de las vacas; Raúl debe recibir una cuarta parte; finalmente Mario, el menor, debe recibir un octavo del total”. Los tres hermanos notaron que, para cumplir los deseos de su padre, necesitaban descuartizar algunas vacas. Doña Sara que había escuchado el problema, se dirigió a su corral, tomó una vaca y dijo: “Lleven esta vaca con las otras y hagan la repartición”. Después de la repartición, doña Sara tomó su vaca y la regresó a su corral. ¿Cuántas vacas le tocaron a cada hermano?

b) Del dinero que tenía gasté $\frac{1}{3}$ en comida y $\frac{1}{8}$ en pasaje, quedándome aún 39 pesos. ¿Cuánto tenía al principio?
c) Los alumnos del grupo 103 compraron una pizza, donde Juan se comió $\frac{1}{4}$ de pizza, Miguel $\frac{2}{6}$ y Lupita se comió el resto. ¿Qué fracción de la pizza comió Lupita?
d) Ángela, Manuel, Yesica y Mauricio se reparten una herencia de 480, 000 pesos que le dejó su papá. Ellos deciden que Ángela reciba $\frac{2}{5}$ partes de la herencia, Manuel $\frac{3}{8}$, Yesica $\frac{1}{10}$ y Mauricio el resto. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?
e) Pedro recorrió $\frac{2}{3}$ de una pista que mide 800 m, si $\frac{1}{4}$ de lo que recorrió lo hizo en bicicleta. ¿Cuántos metros recorrió en bicicleta?

BLOQUE II

RAZONES Y PROPORCIONES



Competencias genéricas

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

CG1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

Competencias disciplinares

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

BLOQUE II RAZONES Y PROPORCIONES

Propósito del bloque

Usa razones y proporciones para analizar el impacto de las diferentes variables cuantitativas en aspectos de su vida.

Interdisciplinariedad

- üü Química I
- üü Taller de Lectura y Redacción I
- üü Informática I
- üü Ética I

Ejes transversales

- üü Eje transversal social
- üü Eje transversal de la salud
- üü Eje transversal ambiental
- üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren de una toma de decisiones consciente e informada.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ Razones y proporciones. • Porcentajes. • Variación directa e inversa.	¾¾ Interpreta razones. ¾¾ Calcula porcentajes. ¾¾ Resuelve proporciones. ¾¾ Identifica las relaciones entre variables. ¾¾ Estima el comportamiento de variables.	¾¾ Toma decisiones de manera consciente e informada asumiendo las consecuencias. ¾¾ Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. ¾¾ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. ¾¾ Externa emociones e ideas ante las causas y consecuencias de sus actos para la toma de decisiones.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

En la carrera de Medicina se encuentra una alumna llamada Edith, ella recibe el apoyo económico por parte de su papá quien trabaja en E.U.A., cada mes le envía 875 dólares, si el tipo de cambio en este mes es de $16.5 por dólar.

5. ¿Cuánto recibe en pesos en el primer mes?

____

____

6. Si en el segundo mes el tipo de cambio es de $16.85, ¿cuánto recibe en pesos?

____

____

7. Si en el tercer mes el valor del dólar bajó y el tipo de cambio es de $15.91, ¿cuánto recibe en pesos?

____

____

RAZÓN, TASA Y PROPORCIONES

RAZÓN

El concepto de razón se presenta a menudo en la vida real, situaciones donde utilizamos expresiones como: “mi hermano tiene la tercera parte de años que mi padre”, “en los grupos de primer semestre los varones son más altos que las mujeres”. Las expresiones anteriores de relaciones entre dos cantidades se conocen como razones.

Una razón “r” es el cociente de dos números o dos cantidades de la misma especie y que tienen las mismas unidades

Una razón “r” se puede escribir como:

- Una fracción
- Como dos números separados por la palabra a
- O como dos números separados por dos puntos

Por ejemplo:

Fracción	Números separados por “a”	Números separados por dos puntos (:)	Se lee como
$\frac{3}{5}$	3 a 5	3 : 5	La razón de 3 a 5

CAMBIO DE UN PORCENTAJE A DECIMAL

Recuerda que un porcentaje se puede indicar como una fracción cuyo denominador es 100.

Para convertir un porcentaje a decimal, quita el símbolo % y divide entre 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la izquierda.

Ejemplo: $23.24\% = \frac{23.24}{100} = 0.2324$

CAMBIO DE UNA FRACCIÓN A UN PORCENTAJE

- Escribir la fracción como decimal, dividiendo su numerador entre su denominador.
- Multiplicar el decimal por 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la derecha.
- Insertar el símbolo %.

Ejemplos: ½ = 0.5   0.5 = 050% = 50%

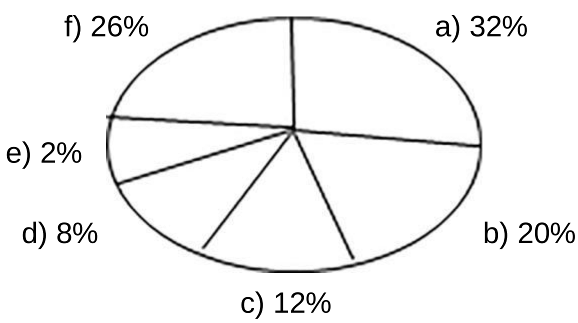
ACTIVIDAD 1

Completa la tabla con los diferentes tipos de números:

Fracción	Decimal	Porcentaje
7/1	7.00	700%
5/2		
	0.75	
	0.1	
		33.33%
		1%
1/2		

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Se realiza una encuesta a 2500 alumnos de bachillerato sobre la carrera que van a estudiar y los resultados se muestran en la siguiente gráfica:



a) Derecho
b) Medicina
c) Administración
d) Diseño gráfico
e) Comunicación
f) Otras

En equipos observen la gráfica y contesta las preguntas siguientes acerca de porcentajes.

1. ¿Cuántos alumnos tienen la carrera con mayor demanda?

____

____

2. ¿Cuántos alumnos tienen la carrera con menor demanda?

____

____

3. ¿Cuántos alumnos tienen la carrera de Administración?

____

____

4. ¿Cuántos alumnos tienen la carrera de Medicina?

____

____

Proporción

Cuando se comparan dos cantidades de tipos distintos, se le llama tasa y se puede escribir como una fracción, y siempre debe de conservar las unidades por ejemplo: “necesitas saber el rendimiento de $\frac{km}{litros}$ de gasolina de una motocicleta o un carro”.

Una tasa es un cociente de dos cantidades con distintas unidades.

Cuando se comparan dos razones, las cuales tienen relación entre sí, se llama **proporción geométrica.**

Una proporción es una afirmación de la igualdad de dos razones (o tasas).

Para resolver una proporción se utiliza **“Propiedad fundamental de las proporciones”** en donde toda proporción el producto cruzado de los “medios” es igual al producto de los “extremos”.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y d son los extremos

b y c son los medios

$$\boxed{a \times d = b \times c}$$

Ejemplos:
Resuelve la siguiente proporción.

$$\frac{x}{8}=\frac{9}{12}$$

$$(x)(12)=(8)(9)$$

$$x=\frac{(8)(9)}{12}=\frac{72}{12}=6$$

ACTIVIDAD 2

Resuelve las siguientes proporciones:

$$\frac{x}{3}=\frac{4}{12}$$

$$\frac{2}{8}=\frac{x}{32}$$

$$\frac{4}{20}=\frac{7}{x}$$

$$\frac{12.6}{x}=\frac{9.7}{6.3}$$

$$\frac{4}{x}=\frac{10}{30}$$

$$\frac{x}{9.7}=\frac{6.3}{19.4}$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{x-3}{4}=\frac{x}{5}$$

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre razones y proporciones.
http://www.math2me.com/playlist/algebra/ejercicios-de-proporciones

Problemas de proporción directa.

Ejemplo: A Lulú le ofrecen un descuento del 30% por un celular de $2500. ¿Cuánto pagará en total?

$$\frac{2500}{100\%} = \frac{x}{30\%}$$

$$x = \frac{75000}{100}$$

$$x = 750$$

ACTIVIDAD 3

Resuelve los siguientes problemas sobre proporciones Variación directa.

a. En la granja de mi tío, las 12 gallinas consumen 4.5 kg de grano al día. A partir de mañana le entregarán 5 gallinas. ¿Cuánto se espera que se consumirá diariamente de granos?

b. Realizo un viaje turístico en moto, ya recorrí los primeros 120 km y me gasté 90 pesos en combustible. A partir de mañana realizaré un viaje de 320 km. ¿Cuánto gastaré en combustible?

c. En un examen de ingreso a la universidad, 186 reactivos equivalen a 700 puntos. Si Martín logró contestar acertadamente 126 preguntas, ¿cuántos puntos alcanzó?

d. ¿Cuántos m_2 de cubierta fabrican 9 carpinteros, si normalmente 7 carpinteros realizan 200 m_2 en un día?

e. ¿Cuántos kilómetros recorreré en una autopista en 50 minutos, si ayer viajando a la misma velocidad, en hora y media, recorrí 95 kilómetros?

Problemas de porcentajes

a. Francisco se dedica a la compraventa de libros. Si adquiere un libro cuyo valor es de $457 y desea ganar 35% de su inversión, ¿a qué precio deberá venderlo?

b. Una tienda ofrece 35% de descuento en ropa. Juan escogió una camisa de $250, un pantalón de $520 y una camiseta de $180. Al llegar a la caja pagó por la ropa entre...

c. Una persona compró una computadora de $9,728.20. Al momento de pagar recibió un descuento de 25%. ¿Cuánto pagó por el aparato?

d. En una tienda hay una oferta de pantalones y Sonia quiere saber el precio con descuento para decidir su compra. Si el costo del pantalón es de $355.00 y tiene un descuento de 17%, ¿cuál es el precio del pantalón?

e. Ximena compra una caja de despensa que cuesta \$850. Al momento de pagar, la cajera le indica que la despensa tiene una rebaja de 15%. Si Ximena paga con un billete de \$1000, ¿cuánto dinero le devuelven

Problemas de proporción inversa.

Variación inversa

a) Explica con tus propias palabras, ¿qué entiendes por variación inversa?

b) En tu vida cotidiana, ¿en qué situaciones has visto que se aplique la variación inversa?

Ejemplo: Una casa de dos pisos se construye con 10 trabajadores en 65 días; si se aumenta el número de trabajadores a 18, ¿en cuántos días construyen la casa?

65 días - 10 trabajadores

x días - 18 trabajadores

$$\frac{x}{\ } = \underline{10}$$

1265

$$x = \frac{650}{18}$$

x =36.11 días

ACTIVIDAD 4

Resuelve los siguientes problemas sobre proporciones de variación inversa.

a. 4 cachorros se terminan un paquete de croquetas en 6 días. Si tuviéramos 3 cachorros, ¿cuántos días duraría el paquete de croquetas?

b. Todos los días por la mañana Alfonso maneja a una velocidad de 80 km/hr para llegar a su trabajo a tiempo, realizando un tiempo de 42 minutos. De regreso, por la tarde, disminuye su velocidad a 65 km/hr. ¿Cuánto tiempo tarda para llegar a casa?

c. En la construcción de viviendas populares, el ingeniero López tiene el compromiso de terminar en 20 días 50 viviendas contando con 12 trabajadores. Para el próximo mes contará con 16 trabajadores, ¿en cuánto tiempo terminará las 50 viviendas que debe entregar?

d. 11 alumnos pagaron 6.50 pesos para comprar un regalo a una compañera entre todos. ¿Cuánto tendrán que pagar cada uno si al final participan 21 alumnos?

e. 6 copiadoras tardan 5 horas en realizar un gran número de copias. ¿Cuánto tiempo tardarán cuatro copiadoras en realizar el mismo trabajo?

ACTIVIDAD 5

¿Qué aprendí sobre variación directa y variación inversa?
Completa la siguiente tabla con la información que se solicita

Tipo de variación	¿En qué situación se aplica?	Ejemplo de la vida real	¿Cuál es su modelo matemático?
Variación Directa			
Variación Inversa			

> Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos variación directa e inversa:
> **http://www.math2me.com/playlist/algebra/ejercicios-de-las-variaciones-directas-e-inversas**

EJERCICIO INTEGRADOR

Interdisciplinariedad

✓ Informática I

Ejes transversales

✓ Tema relacionado con educación financiera

Competencias genéricas

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.

Competencias disciplinares

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Durante el regreso a casa tu tía te comenta que de niña solo aprendió a leer y escribir, siempre se le dificultó realizar cuentas, en especial si se trata de obtener determinado porcentaje a una cantidad. Ella te comenta que piensa sacar un préstamo en el banco por $65,000 pesos con un interés mensual fijo de 3.25%, para iniciar un negocio de comida; pero no lo solicita porque no sabe cuánto pagará de interés cada mes, solo sabe que el préstamo lo tiene que pagar en 24 mensualidades.

Al llegar a casa ella te pide que le ayudes a sacar otras cuentas pero te hace notar que no tiene una calculadora; solicita lo siguiente:

1. ¿Qué cantidad corresponde a 3.25% de $65,000?

2. Si el préstamo lo pagará en 24 mensualidades, ¿cuánto pagará cada mes incluyendo el interés fijo?

3. ¿Cuánto pagará en total al término de los 24 meses?

4. ¿Crees que le conviene a tu tía solicitar el préstamo?

BLOQUE III

OPERACIONES ALGEBRAICAS

Competencias genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

BLOQUE III OPERACIONES ALGEBRAICAS

Propósito del bloque

Aplica el álgebra en su vida, valorando su importancia para dar solución a problemas relacionados con fenómenos cotidianos.

Interdisciplinariedad

üü Química I
üü Taller de Lectura y Redacción I
üü Informática I
üü Ética I

Ejes transversales

üü Eje transversal social
üü Eje transversal de la salud
üü Eje transversal ambiental
üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.
- Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ Lenguaje algebraico ¾¾ Leyes de los exponentes y radicales ¾¾ Operaciones con polinomios ¾¾ Operaciones con polinomio ¾¾ Productos notables ¾¾ Factorización ¾¾ Fracciones algebraicas	¾¾ Utiliza operaciones algebraicas para resolver problemas de la vida cotidiana. ¾¾ Reconoce el lenguaje algebraico así como las leyes de los exponentes y radicales en la resolución de problemas. ¾¾ Identifica los procedimientos para resolver problemas algebraicos. ¾¾ Explica la solución de problemas algebraicos.	¾¾ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ¾¾ Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones. ¾¾ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. ¾¾ Maneja y regula sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

De compras en el súper mercado

Andrés va de compras al súper mercado y compra $\frac{1}{2}$ *Kg* de carne molida, un litro de leche, $\frac{3}{4}$ *Kg* de carne para asar, 2 litros de jugo, Un Kg de carne de puerco y 3 litros de aceite.

¿Cómo se puede representar a la suma de los kilogramos mediante una expresión algebraica?

¿Cómo se puede representar a la suma de los litros mediante una expresión algebraica?

¿Se pueden sumar kilogramos y litros? Si tu respuesta es **sí**, justifícala.

Si tu respuesta es **no**, justifícala.

ACTIVIDAD 1

Realiza una lectura en tu libro de texto o en alguna otra fuente de información, anotando en tu cua-derno acerca de la definición de los conceptos: término, variable, exponente, monomio, binomio y polinomio. Después, compártelo con tus compañeros en plenaria.

https://www.youtube.com/watch?v=3QW6pG27U7U

OPERACIONES DE POLINOMIOS DE UNA VARIABLE
Conceptos básicos

El Álgebra es la rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de los números y sus operaciones en su forma general. Utiliza a las literales como una expresión general de un número cualquiera; además, al igual que en la Aritmética, se respeta y permite el uso de las propiedades de los números y las operaciones estudiadas.

Término algebraico: expresión algebraica donde se encuentran sólo operaciones de multiplica-ción y división de números y letras. El número se llama coeficiente numérico y las letras conforman la parte literal. Tanto el número como cada letra pueden estar elevados a un exponente o potencia.

Un **polinomio** es una expresión algebraica con varios términos que se forma con variables y números separados con signos de suma y resta y sólo intervienen operaciones de suma y resta y multiplicación, así como exponentes enteros positivos. Cuando un polinomio consta de un solo término algebraico se llama **monomio**, con dos términos **binomio** y con tres términos **trinomio.**

1. Completa la siguiente tabla identificando los elementos de un término algebraico:

Término	Signo	Coeficiente	Literal	Exponente
$-2x^5$	-	2	x	5
$3x^2$				
$-2/3\ a^9$				
$64\ b^4$				
-16/4 y				
x				
	+	2	m	-3

2. Completa la siguiente tabla utilizando los conceptos:

Expresión algebraica	Nombre	Grado
3X	Monomio	Uno
$4X^2$		
x + 2	binomio	Uno
$a^3 – 1$		
	trinomio	tres
x + y – 8		
	polinomio	cuatro
$1 – 3x + 7x^6$		

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Los **términos semejantes** son los que tienen exactamente la misma parte literal (con las mismas letras elevadas a los mismos exponentes), y varían sólo en el coeficiente. Sólo se pueden sumar y restar términos semejantes; sin embargo, se puede multiplicar y dividir todo tipo de términos.

La reducción y agrupación de términos semejantes consiste en hacer las operaciones algebraicas de suma y resta según sea el caso, que coincidan en la misma parte literal y el mismo exponente, no importando su coeficiente numérico.

Ejemplos:

a) $3x + 2x = 5x$ La variable x tiene el mismo exponente en los 2 términos y por eso se pueden simplificar dichos términos sumando los coeficientes.

b) $3x^2 – x^2 = 2x^2$

c) $x^2 + 5x – 3x = x^2 – 2x$ Solo se pueden reducir los términos $5x – 3x$

d) $6x^3 + 2x^3 + 2x + 4x = 8x^3 + 6x$ Se pueden reducir $6x^3$ con $2x^3$ y $2x$ con $4x$

e) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x = x$ recordando la suma con el mismo denominador $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 1x = x$

f) $\frac{2}{4}x + \frac{6}{5}x = \frac{34}{20}x$ buscando común denominador $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{10+24}{20} = \frac{34}{20} = \frac{34}{20}x$

3. Realiza las siguientes sumas y resta de polinomios con términos semejantes:

a) $3m + m$	b) $– x – 3x$
c) $– 8x – 13x$	d) $4x^2 – 15x^2$
e) $– 3x^2y + 15x^2y – 24x^2y$	f) $ab + 2ab – 5ab$
g) $\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}m - \frac{3}{5}m =$	h) $3x – \frac{1}{7}x\ 9x + \frac{2}{9}x =$
i) $a + b + c – b – c – a + 2c$	j) $– 6m + 8n + 5 – m – n – 6m – 11$
k) $– a + b\ 2a – 2c\ 3a – 3b + 2c$	l) $15a^2 – 6ab – 8a^2 – 5ab + 20 + a^2 – ab – 31$
m) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + 2a - 3b - \frac{3}{4}a - \frac{1}{6}b$	

LEYES DE LOS EXPONENTES

1ra. ley. La multiplicación de dos cantidades con la misma base es igual a la misma base pero los exponentes se suman, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Cuando $\left(x^a\right)\left(x^b\right) = x^{a+b}$ entonces; $(3)^2\,(3)^5 = 3^{2+5} = 3^7$

$$(4x)^3\,(4x)^5 = (4x)^{3+5} = (4x)^8 = 4^8\,x^8$$

2da. ley. La división de dos cantidades con la misma base es igual a la misma base y los exponen-tes se restan, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Cuando $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ entonces; $\dfrac{(5)^7}{(5)^5} = 5^{7-5} = 5^2$

$$\frac{(6x)^6}{(6x)^3} = (6x)^{6-3} = (6x)^3$$

3ra. ley. Cuando una potencia se eleva a otra potencia se conserva la misma base y los exponen-tes se multiplican.

Cuando $\left(x^a\right)^b = x^{(a)(b)}$ entonces; $(2^3)^2 = 2^{3x2} = 2^6$

$$(8x^4)^3 = 8^{3x1}\,x^{4x3} = 8^3\,x^{12}$$

4ta. ley. Nunca debe quedar una potencia negativa y en caso de que así sea, se deberá proceder de la siguiente manera:7

Cuando $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$ entonces; $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$

4. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las leyes de los exponentes.

a)	$x\,(x - 4) =$	b)	$(x - 3)(x+1) =$
c)	$3x^2(4x^3y) =$	d)	$\dfrac{(4x^3\,y)(2x^4\,y^2)}{2x^3\,y} =$
e)	$(y - 2)\,(y - 7) =$	f)	$2x\,(x^4 + 3) =$
g)	$\dfrac{(4x^3\,y^2)^2}{2x^2\,y}$	h)	$(3x^3\,y^2\,z^3)^3$
i)	$x^3\,(-x^2)(2x)^3 =$	j)	$5\,(3x + 6y) =$

RADICALES

Las expresiones radicales se denotan con el símbolo ( ), misma que está conformada por un radicando (valor que se encuentra dentro del radical) y u[redacted]dice que indica la raíz a la que se hace referencia en el radical, como se muestra a continuación.

DONDE:

n es el índice que indica la raíz del radical $\sqrt[n]{x}$

x es el radicando

Leyes de los radicales

1.- El producto de dos radicales con la misma raíz.

Cuando se tiene un radical $\sqrt[n]{ab}$, entonces podemos separar $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ o viceversa.

Ejemplos:

$$\sqrt{4}\sqrt{9} = \sqrt{(4)(9)} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{4}\sqrt{16} = \sqrt{(4)(16)} = \sqrt{64} = 8$$

Para este caso;

C) $\sqrt[3]{39}$ primero buscamos los factores para 39 y descomponemos el radical como se muestra a continuación:

$\sqrt[3]{39} = \sqrt[3]{(3)(13)} = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{13} = (1)^3$ [redacted] $=^3$ [redacted]

2.- El cociente de dos radicales con la misma raíz.

Cuando $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, entonces $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

3.- El radical de un radical.

Cuando se tiene $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, entonces; $\sqrt[mxn]{a}$

4.- El radical de una misma potencia.

Cuando se tiene $\sqrt[n]{a^n} = a$ sólo si n es un número impar
Cuando se tiene $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ sólo si n es un número par

Por ejemplo:

a) $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

b) $\sqrt[3]{(-3)^4} = 3$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Antes de iniciar con la simplificación de radicales, es necesario seguir con los siguientes pasos:

1. Si el radicando contiene coeficiente distinto de uno (1), escríbelo como producto de dos números, uno de los cuales debe ser la máxima potencia perfecta del índice.
2. Escribe cada factor variable como el producto o cociente de dos factores, donde uno de los cuales es la máxima potencia perfecta de la variable del índice.
3. Utiliza las reglas para escribir la expresión radical y coloca las potencias perfectas (números y variables), bajo el mismo radical.
4. Simplifica el radical que contiene las potencias perfectas.

Ejemplos: simplifica los siguientes radicales.

a)	$\sqrt{98}$	b)	$\sqrt[3]{180}$
c)	$\sqrt[6]{(-5)^6}$	d)	$\sqrt[5]{4^5}$
e)	$\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$	f)	$\sqrt{(6)(9)}$

Ejercicios: simplifica las siguientes expresiones radicales.

a)	$\sqrt{12}$	b)	$\sqrt[3]{180}$
c)	$\sqrt[4]{(-6)^4}$	d)	$\sqrt[6]{64}$
e)	$\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$	f)	$\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$

OPERACIONES BÁSICAS CON RADICALES

Suma y resta con radicales

Para poder llevar a cabo esta operación es necesario contar en nuestra expresión con términos que sean semejantes como se muestra en los siguientes ejemplos:

a) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}$ Como en este ejemplo contamos con la misma raíz y el mismo radicando, entonces nuestro resultado sería dos veces el mismo radical. $2\sqrt[3]{5}$	b) $3\sqrt[6]{2}+5\sqrt[6]{2}$ Para este caso, como se tiene el tres y el cinco fuera del radical pero ambos radicales son iguales, entonces, el resultado sería ocho veces el mismo radical. $8\sqrt[6]{2}$
c) $5\sqrt[6]{2}+5\sqrt[4]{2}-3\sqrt[6]{2}$ En este ejemplo podemos notar que dos radicales son iguales y uno de ellos es diferente, por tal motivo no se pueden sumar o restar los tres, solo los que son iguales. $5\sqrt[6]{2}-3\sqrt[6]{2}+5\sqrt[4]{2}$ Obteniendo como resultado $2\sqrt[6]{2}+5\sqrt[4]{2}$	d) $5\sqrt[5]{6}-3\sqrt[5]{6}=2\sqrt[5]{6}$

MULTIPLICACIÓN CON RADICALES

Para multiplicar radicales es importante seguir con el procedimiento que a continuación se te presenta.

Ejemplo	Procedimiento
a) $\sqrt{6}\sqrt{8}$	Expresión original.
$\sqrt{6}\sqrt{8}=\sqrt{(6)(8)}=\sqrt{48}$	Aplicando el producto de dos radicales.
$\sqrt{48}=\sqrt{16}\sqrt{3}$	Descomponiendo en factores para 48 con una raíz cuadrada exacta.
$\sqrt{16}=4$ $4\sqrt{3}$	Solo tiene raíz exacta el 16, entonces: Solución.

DIVISIÓN CON RADICALES

Para realizar la división de radicales se utiliza la regla que se indicó con anterioridad para posteriormente continuar como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo	Procedimiento
a) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$	Expresión original.
$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}}$	Aplicando el cociente de dos radicales.
$= \sqrt{16}$	Después de dividir 48 entre 3.
$\sqrt{16}=4$	Finalmente sacamos la raíz de 16
$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = 4$	Solución.

Ejercicios: Realiza las operaciones básicas con los siguientes radicales.

a) $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$	b) $6\sqrt{5}+5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$
c) $8\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$	d) $8\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}$
e) $\sqrt{4}\sqrt{25}$	f) $\sqrt{3}\sqrt{9}$
g) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$	h) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

LENGUAJE ALGEBRAICO

En el álgebra es muy importante saber expresar las proposiciones verbales comunes con lenguaje algebraico, ya que esto nos permite plantear algunas condiciones propuestas en los problemas a resolver. Recordemos el nombre del resultado de cada una de las operaciones fundamentales.

De la adición, suma, de la sustracción, resta o diferencia, de la multiplicación, producto y de la división cociente, como se muestra en el siguiente cuadro.

Algunas palabras que significan adición	Suma Más	Aumentar Más grande que	Mayor que ganar
Algunas palabras que significan sustracción	Resta Diferencia	Menos Disminuir	Menor que Perder
Algunas palabras que significan multiplicación	Producto Multiplicado	Veces Doble	Triple Cuádruple
Algunas palabras que significan división	Cociente Dividido en	Mitad Tercera	Razón Entre
Algunas palabras que significan igual	Es	Da como resultado	Tiene

Por ejemplo:.

Expresión verbal	Expresión algebraica
1. Un número cualquiera.	x
2. La suma de dos números.	$x + y$
3. La diferencia de dos números.	$x + y$
4. El producto de dos números.	$x\,y$
5. El cociente de dos números.	$\frac{x}{y}$
6. La suma de dos números dividida entre su diferencia.	$\frac{x + y}{y - y}$
7. El cubo de un número.	x^3
8. El doble del cubo de un número.	$2x^3$
9. La suma de dos números al cuadrado.	$x^2 + y^2$
10. El cuadrado de la suma de dos números.	$(x^2 + y^2)$
11. La tercera parte del cubo de un número.	$\frac{x^3}{3}$
12. El cubo de la tercera parte de un número.	$\frac{x}{y}^3$
13. ¿Cuál es el número que al agregarle 3 suma 8?	$x + 3 = 8$
14. ¿Cuál es el número que disminuido en cinco de trece?	$x - 5 = 13$

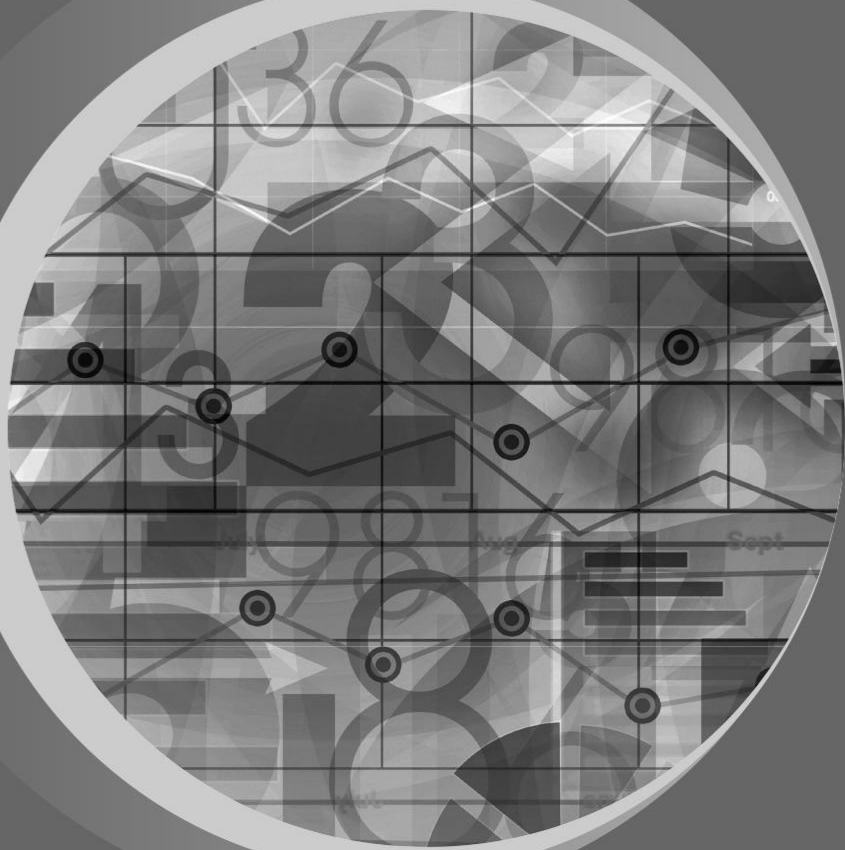
Ejercicios: Desarrolla la habilidad de analizar y escribir al traducir al lenguaje algebraico las siguientes expresiones verbales.

Expresión verbal	Expresión algebraica
1. La suma de dos números.	
2. El producto de dos números.	
3. El triple de un número.	
4. El cociente de dos números.	
5. El cociente de la diferencia de dos números entre otro número.	
6. El cuadrado de un número aumentado en trece unidades.	
7. El triple del cuadrado de un número.	
8. La raíz del producto de dos números.	
9. La suma de los cuadrados de dos números.	
10. La diferencia de los cuadrados de dos números.	

Expresión algebraica	Expresión verbal
1. $2a + b$	
2. $a - (b + c)$	
3. $(a + b)(a - c)$	
4. $\frac{ab}{a+b}$	
5. $3a_2$	

BLOQUE IV

ECUACIONES LINEALES



Competencias genéricas

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
CG1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. CG4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
CG5.3 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
CG6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Competencias disciplinares

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 4 Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

BLOQUE IV ECUACIONES LINEALES

Propósito del bloque

Resuelve modelos lineales que representan fenómenos de la vida cotidiana.

Interdisciplinariedad

üü Química I
üü Taller de Lectura y Redacción I
üü Informática I
üü Ética I

Ejes transversales

üü Eje transversal social
üü Eje transversal de la salud
üü Eje transversal ambiental
üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas de forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución.
- Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ Ecuaciones lineales. • Una variable. • Dos variables. • Tres variables.	¾¾ Representa las variables de un problema en su contexto. ¾¾ Deduce alternativas de solución a problemas reales. ¾¾ Propone problemas a resolver con ecuaciones lineales. ¾¾ Describe modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos).	¾¾ Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. ¾¾ Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. ¾¾ Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. ¾¾ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Juan pagó $ 50 pesos por 3 cajas de taquetes y 5 cajas de clavos, mientras que Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 cajas de clavos y tuvo que pagar $ 74 pesos. ¿Cuál el precio de cada caja de taquetes y de cada caja de clavos?

a. ¿Cuántas incógnitas hay en el problema?
 ____
b. ¿Cuántas ecuaciones puedes construir según el texto?
 ____
c. ¿Cuáles son esas ecuaciones?

Lee el problema planteado y realiza lo que se te pide a continuación:

a. Con lo que sabes del problema anterior obtén una posible solución al problema planteado.
b. Grafica cada una de las ecuaciones planteadas en un mismo sistema cartesiano.

c. ¿Cuál es la solución aproximada que obtienes por medio de la gráfica?

____

____

d. ¿Se parece a la solución analítica?

____

____

e. Comenta tus resultados en plenaria.

____

____

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación es una igualdad donde por lo menos hay un número desconocido, llamado incógnita o variable, y que se cumple para determinado valor numérico de dicha incógnita.

Se denominan **ecuaciones lineales** o de **primer grado** a las igualdades algebraicas con incógnitas cuyo exponente es 1 (elevadas a uno, que no se escribe).

Como procedimiento general para resolver ecuaciones enteras de primer grado se deben seguir los siguientes pasos:

a. Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.
b. Se hace la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo), los que contengan la incógnita se ubican en el miembro izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho.
c. Se reducen términos semejantes, hasta donde es posible.
d. Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.

Ejemplo: Resolver la ecuación **2x – 3 = 53**

Debemos tener las letras a un lado y los números al otro lado de la igualdad (=), entonces para llevar el –3 al otro lado de la igualdad, le aplicamos el inverso aditivo (el inverso aditivo de –3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Entonces hacemos: 2x -3 +3 = 53 + 32x = 56

$$x = \frac{56}{2} \quad x = 28$$

ACTIVIDAD 1

Resuelve las siguientes ecuaciones lineales.

$2x - 4 = 3$	$12x - 4 = 3x$
$5x - 12 = 8$	$5x - 2x = 8$
$5x + 2 = 3x + 7$	$15x + 2 = 3x + 10$
$3(x - 1) = 5(x + 4)$	$3(x - 1) = 5x + 4$
$-2(x + 3) = 4(x - 1)$	$12x + 3 = 4(x - 1)$
$5(2x - 4) = 4(x - 1)$	$5(2x - 1) = 3(2x + 6)$
$\frac{3x - 2}{4} = \frac{x}{2}$	$\frac{3x - 1}{4} = \frac{x}{5}$
$\frac{x}{7} = \frac{x - 3}{4}$	$\frac{x}{5} = \frac{x - 1}{4}$
$\frac{x - 3}{4} = \frac{2x + 1}{9}$	$\frac{2x - 3}{6} = \frac{x + 1}{3}$
$\frac{3x - 2}{8} = \frac{x}{2}$	$\frac{3x - 2}{10} = \frac{x}{4}$

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones lineales.
https://youtu.be/4h2-GpUcqwQ

Liga para la resolución de problemas de una ecuación lineal.
http://www.youtube.com/watch?v=wE6OydOzC-k

Resolución de problemas que involucren ecuaciones lineales

Para resolver cualquier problema por medio de ecuaciones debes seguir el siguiente procedimiento:

- Leer y comprender el problema.
- Plantear el problema (establecer incógnita).
- Resolver el problema (usando ecuación lineal).

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes problemas planteando su respectiva ecuación lineal:

a) Lorena tiene el doble de CD que Estela, y entre ambas tienen 111. ¿Cuántos CD tenemos cada una?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

b) Tres números consecutivos suman 210. ¿Cuáles son esos números consecutivos?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

c) El perímetro de un rectángulo es de 100 cm. El ancho mide 10 cm menos que su largo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

d) En un triángulo el mayor de los ángulos mide 3 veces el ángulo menor, el ángulo de en medio mide el doble del ángulo menor. ¿Cuánto mide el ángulo menor?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

e) La base de un rectángulo mide 5 cm más que el doble de su altura. Determina las dimensiones del rectángulo, considerando que su perímetro es 46 cm.

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

f) Se sabe que un terreno rectangular tiene 1200 metros de perímetro y su largo tiene 160 metros más que su ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

g) Ricardo representó a COBACHBC en un torneo de basquetbol estatal. Participó en tres juegos y anotó un total de 108 puntos. Se sabe que en el segundo juego anotó el doble de puntos que en el primer juego y en el tercer juego anotó el triple de puntos que en el primero. ¿Cuántos puntos anotó en el primer juego?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

h) Un campesino utiliza 100 metros de malla para cercar un terreno que tiene forma rectangular. Si el largo es el triple del ancho, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

i) Un vehículo que participa en la carrera Baja 1000, al hacer un recorrido de prueba le llena el tanque de gasolina. Después de una hora de recorrido, nota que se han consumido $\frac{5}{8}$ partes del tanque y aún le quedan **60** litros de gasolina. ¿Cuántos litros tenía el tanque lleno?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

j) La familia de Karla compro un costal lleno de naranjas. Solamente consumieron $\frac{3}{5}$ partes del costal y quedaron solo 30 naranjas en el costal. ¿Cuántas naranjas tenía el costal originalmente?

Incógnita(s)	Ecuación y procedimiento	Resultado

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una forma común de las ecuaciones lineales de dos variables es: Ax + By = C, que puede representarse como: $y = mx + b$

Las ecuaciones lineales con dos variables forman sistemas de ecuaciones denominadas sistemas 2x2.

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un <u>sistema lineal de ecuaciones</u> formado por sólo dos ecuaciones.

$3x + 2y = 4$…………… ec. 1

$2x + 5y = 1$…………….ec. 2

El número de incógnitas nos indica la cantidad de ecuaciones que deberán existir para que el sistema pueda ser resuelto.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden pre-sentar. De acuerdo con ese caso se pueden presentar los siguientes:

- **Sistema compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:

  Sistema compatible determinado cuando tiene una única solución.
  Sistema compatible indeterminado cuando admite un conjunto infinito de soluciones.

- **Sistema incompatible** si no tiene solución.

Los diferentes métodos numéricos, algebraicos y gráficos para resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas son:

¾¾ Método de reducción (suma y resta).
¾¾ Método de igualación.
¾¾ Método de sustitución.
¾¾ Método de determinantes
¾¾ Método gráfico.

MÉTODO DE REDUCCIÓN (SUMA Y RESTA)

Este método suele emplearse mayoritariamente en los sistemas lineales, es el más fácil de aplicar y se basa en transformar las ecuaciones, de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y distinto signo. A continuación, se suman ambas ecuaciones, produciéndose así la reducción o cancelación de dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, donde el método de resolución es el visto en el bloque anterior.

Ejemplo: resuelve por el método de suma y resta el sistema de ecuaciones:

$2x - 8y = 22$ ……..ec. 1

$5x + 3y = 9$……..…ec.2

Paso	Desarrollo
1) Multiplica ambas ecuaciones por números adecuados de forma tal que una de las incógnitas tenga coeficientes inversos. Nota: Se puede eliminar la incógnita que tú decidas, aprovecha las incógnitas que tengan signos inversos, en caso contrario se preparan las ecuaciones para eliminar una de ellas.	Se buscará eliminar la incógnita "x", se multiplica la ec. 1 por (5) anteponiéndole un signo (-) y la ec. 2 por (2). ec. 1: $-5(2x - 8y = 22)$ ec. 2: $2(5x + 3y = 9)$ dando como resultado: -[redacted] $+ 40y = -110$ $10x + 6y = 18$
2) Suma las ecuaciones obtenidas en el paso anterior (se eliminará la incógnita con los coeficientes inversos).	$-10x + 40y = -110$ $10x + 6y = 18$ $46y = -92$
3) Resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que resulta (obtendrás el valor de una de las incógnitas).	$y = \frac{-92}{46} = -2$ $\underline{y = -2}$
4) Obtén el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor de la incógnita encontrada en una de las ecuaciones y despeja la otra.	Sustituyendo en la ec. 2 $y = -2$ $5x + 3y = 9$ $5x + 3(-2) = 9$ $5x - 6 = 9$ $5x = 9 + 6$ $y = \frac{15}{5} = 3$ $\underline{x = 3}$

5) Comprueba la solución en las 2 ecuaciones. 15-6	**Comprobación:** **1)** $2x - 8y = 22$ $2(3) - 8(-2) = 22$ $6 + 16 = 22$ $22 = 22$ **2)** $5x + 3y = 9$ $5(3) + 3(-2) = 9$ $= 9$ $9 = 9$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para la resolución por el método de **igualación** se despeja cualquiera de las incógnitas en ambas ecuaciones, igualando entre sí los dos valores de la incógnita que se obtuvieron en el despeje y se resuelven.

Ejemplo: resuelve por el método de igualación el sistema de ecuaciones:

$9x + 5y = 4$…….ec.1

$2x - 3y = 5$……..ec. 2

Paso	Desarrollo
1) Despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones.	Despejamos cualquiera de las incógnitas, en este caso se despejará x. **Ec. 1** $9x + 5y = 4$ $9x = 4 - 5y$ $x = \dfrac{4 - 5y}{9}$ **Ec. 2** $2x - 3y = 5$ $2x = 5 + 3y$ $x = \dfrac{5 + 3y}{2}$
2) Se igualan ambas ecuaciones despejadas.	$\dfrac{4 - 5y}{9} = \dfrac{5 + 3y}{2}$
3) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita que resultó de la igualación.	$\dfrac{4 - 5y}{9} = \dfrac{5 + 3y}{2}$ $2(4 - 5y) = 9(5 + 3y)$ $8 - 10y = 45 + 27y$ $-10y - 27y = 45 - 8$ $-37y = 37$ $y = \dfrac{37}{-37} = -1$ $\underline{\mathbf{y = -1}}$

4) Obtén el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las ecuaciones despejadas.	Sustituyendo en la ec. 1, $y = -1$ $x = \frac{4 - 5y}{9}$ $x = \frac{4 - 5(-1)}{9} = \frac{4 + 5}{9} = \frac{9}{9} = 1$ $\underline{x = 1}$
5) Comprueba la solución en las 2 ecuaciones.	**Comprobación:** 1) $9x + 5y = 4$ $9(1) + 5(-1) = 4$ $9-5=4$ $4 = 4$ 2) $2x - 3y = 5$ $2(1) - 3(-1) = 5$ $2+3=5$ $5 = 5$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En este método a diferencia del método de igualación únicamente despejamos una incógnita de las ecuaciones y sustituimos su valor en la otra ecuación donde no despejamos.
Ejemplo: resuelve por el método de sustitución el sistema de ecuaciones, siguiendo los pasos indicados en el lado izquierdo del cuadro escribiendo su resultado del lado derecho.

$x - y = 2$……..ec. 1

$x + y = 6$ ……ec. 2

Paso	Desarrollo
1) Despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones.	Despejamos en este caso la incógnita x de la ecuación 1. $x - y = 2$…….. ec. 1 $x = 2 + y$
2) Sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación.	Se sustituye a la ecuación 2 $x + y = 6$……. ec.2 $(2 + y) + y = 6$

3) Resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que resulta de la sustitución.	$2 + y + y = 6$ $2y = 6 - 2$ $2y = 4$ $y = \frac{4}{2}$ $\underline{y = 2}$
4) Calcula la otra incógnita en la ecuación despejada obtenida en el primer paso.	Sustituimos el valor $y = 2$ en la ecuación despejada $x = 2 + y$ $x = 2 + (2)$ $x = \underline{4}$
5) Comprueba la solución.	$x - y = 2x + y = 6$ 4-2=24+2=6 2=26=6

MÉTODO DE DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER)

Uso del Método de Determinantes para Resolver un Sistema de Ecuaciones con 2 incógnitas.

La disposición de cuatro números reales en un cuadrado, como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

Recibe el nombre de **determinantes de segundo orden.** (Es importante advertir que los números se ordenan entre rectas paralelas y no entre corchetes. Los corchetes tienen otro significado). El determinante anterior tiene dos renglones y dos columnas (los renglones son horizontales y las columnas, verticales). A cada número del determinante se le llama elemento del propio determinante.

En general, podemos simbolizar un determinante de segundo orden de la manera siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Donde se usa una sola letra, con **doble subíndice**, para facilitar la generalización de los determinantes de orden superior. El primer número del subíndice indica el renglón en que está el elemento; y el segundo número, la columna. Así, a21es el elemento situado en el segundo renglón y primera columna.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{21} - a_{21} a_{12}$$

Cada determinante de segundo orden representa un número real, dado por la siguiente fórmula:
Valor de un determinante 2 x 2

Si a, b, c y d son números, el **determinante** de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

El determinante de una matriz 2 x 2 es el número que se obtiene con el producto de los números de la diagonal principal.

menos el $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ producto de los números de la otra diagonal $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

PROCEDIMIENTO

Solución de un sistema de ecuaciones mediante el método de determinantes de segundo orden:

Para resolver el sistema donde $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ x y y son las incógnitas y a, b, c, d, r, s, son números reales.

1. Consideramos el arreglo que consta de los coeficientes de las variables.

2. Obtenemos el denominador para ambas variables si multiplicamos los números que se encuentran en la esquina superior izquierda e inferior derecha y restando el producto de los números que están en las esquinas inferior izquierda y superior derecha. El número obtenido se llama determinante delta (Δ) del arreglo. Aunque parezca complicado, es fácil de recordar si usamos símbolos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Recuerda que para calcular el determinante efectuamos los productos señalados por las flechas que aparecen en el diagrama, asignando a la flecha hacia abajo un signo positivo y hacia arriba un signo negativo y sumando los resultados obtenidos.

3. Con la notación observamos que la solución del sistema es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{rd - bs}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{as - rc}{\Delta}$$

Conviene observar, para recordar la solución, que el denominador de ambos se obtiene tomando el determinante de los coeficientes de las variables en el sistema y para el numerador consideramos el determinante obtenido al sustituir, en el determinante del sistema en la columna de la variable que se quiere encontrar, los términos independientes.

Resuelve el sistema $\begin{cases} 5x + 6y = -10 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ utilizando los determinantes.

SOLUCIÓN: Calculamos primero el determinante delta (Δ) del sistema.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5(3)-2(6)=15-12=3$$

Ahora, calculamos el valor de "*x*" sustituyendo en el determinante los valores independientes en la primera columna y los coeficientes de la variable "y" en la segunda columna y se divide entre el valor obtenido del determinante delta (Δ).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-10(3) - (-1)(6)}{3} = \frac{-30+6}{3} = \frac{-24}{3} = -8$$

Para calcular el valor de "*y*" se sustituye en el determinante los coeficientes de la variable "x" en la primera columna y los valores independientes en la segunda columna y se divide entre el valor obtenido del determinante delta (Δ).

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5(-1) - (2)(-10)}{3} = \frac{-5+20}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores $x = -8$ y $y = 5$ en las ecuaciones.

Primera ecuación: $5x + 6y = 5(-8) + 6(5) = -10$

Segunda ecuación $2x + 3y = 2(-8) + 3(5) = -1$

Consulta en el siguiente video el método "Solución de un Sistema de Ecuaciones de 2x2 por el "Método de Cramer" para que puedas resolver las ecuaciones, utilizando este método:

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre los sistemas de ecuaciones simultáneas.
http://www.youtube.com/watch?v=yVRpljpObDU

ACTIVIDAD 3

Atendiendo la instrucción del profesor, realiza estos ejercicios en forma individual o reúnete en binas u organízate con tus compañeros. Trabajando en forma colaborativa y de respeto entre ustedes.

1. Resolver por el método de **suma** y **resta** y por sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $x + y = 2$
$3x + 2y = 1$

b) $3x - y = 5$
$8x - 4y = 4$

2. Resolver por el método de **igualación** y por **determinantes** los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $2x + y = 1$
$5x - y = 15$

b) $4x - 2y = 20$
$x + y = -1$

3. Resolver por el método que gustes, o el que te indique el profesor los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x - 8y = 13 \end{cases}$

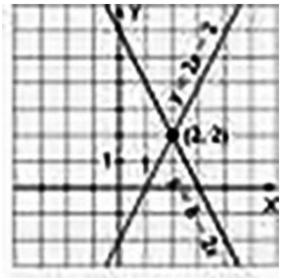
e) $\begin{cases} 3x - (9x + y) = 5y - (2x + \\ 9y)\ 4x - (3y + 7) = 5y - 47 \end{cases}$

MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico consiste, en representar ambas rectas en el plano cartesiano, y con base en el punto donde se cortan determinar la solución del sistema de ecuaciones, en caso de que ésta exista.

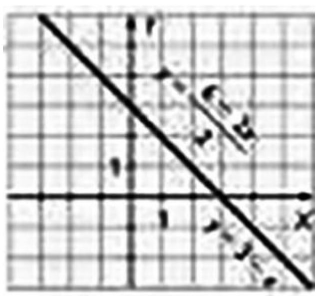
Al representar gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados hay tres posibilidades de solución:

- Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas x e y. **Sistema compatible determinado.**



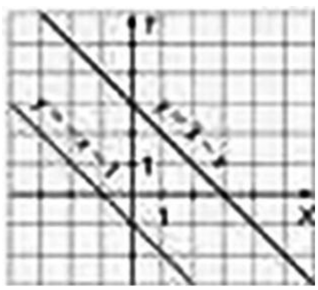
SOLUCIÓN ÚNICA

- Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. **Sistema compatible indeterminado.**



INFINITAS SOLUCIONES

- Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. **Sistema incompatible.**



NO TIENE SOLUCIONES

Ejemplo: resuelve por el método gráfico el sistema de ecuaciones.

$2x - y = 4$……..ec. 1

$3x + y = 1$ ……ec. 2

Realizamos la gráfica de la primera ecuación por intersección en los ejes.

$2x - y = 4$

x=0
$2x - y = 4$
$2(0) - y = 4$
$y = -4$

P1(0,-4)

y=0
$2x - (0) = 4$
$2x = 4$
$x = \frac{4}{2}$
$x = 2$

P2(2,0)

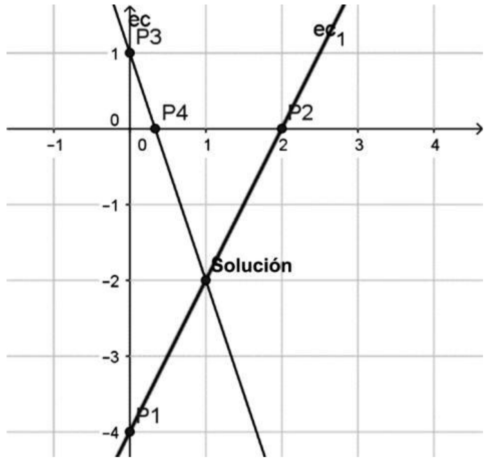
$3x + y = 1$

x=0
$3x + y = 1$
$3(0) + y = 1$
$y = 1$

P3(0,1)

y=0
$3x - (0) = 1$
$3x = 1$
$x = \frac{1}{3}$

P4($\frac{1}{3}$,0)



Solución única x=1, y= - 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ACTIVIDAD 4

Resuelve los siguientes problemas, planteando para ello un sistema de ecuaciones lineales, utilizando para resolver el método que gustes.

a. Dos amigas fueron a la dulcería de don José. Diana pagó 15 pesos por dos sodas y tres empanadas. Adriana compró una soda y cuatro empanadas por 10 pesos. Julio va a ir a comprar sodas y empanadas, ¿podrías decirle cuánto cuesta cada producto? Julio cuenta con 25 pesos y desea comprar tres sodas y seis empanadas ¿le alcanzará el dinero?

b. Encuentra dos números que sumados den 285 y restados 121.

c. La suma de las edades de dos hermanos es igual a 76; si el hermano mayor tiene dos años más que el menor, ¿cuáles son las edades de cada uno?

d. El perímetro de un terreno rectangular mide 232 m. Si se sabe que el largo es 8 m mayor que el ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

e. Jovita y Felipe hacen paletas de chocolate para vender. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta $5.00 y para una paleta chica $3.00. Si disponen de $570.00 y quieren hacer 150 paletas, ¿cuántas paletas de cada tamaño podrán hacer?

f. El costo de las entradas para un juego de beisbol es de $30 para los adultos y $20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron $5930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron al estadio a ver el juego de beisbol?

g. Marta y sus amigos pagaron $109 por 5 hamburguesas y 7 sodas. Si la semana anterior consumieron 8 hamburguesas y 11 sodas y la cuenta fue de $173, ¿cuánto cuesta cada hamburguesa y cada soda?

h. El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo y cuáles las medidas del rectángulo agrandado?

i. Don José y don Tiburcio fueron a comprar semillas para sembrar. Don José compró cuatro sacos de maíz y tres sacos de frijol, y don Tiburcio compró tres sacos de maíz y dos de frijol. La carga de don José fue de 480 kilogramos y la de don Tiburcio de 340. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de frijol?

j. Encuentra dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.

k. En una fábrica tienen máquinas de tipo A y máquinas de tipo B. La semana pasada se dio mantenimiento a 5 máquinas de tipo A y a 4 del tipo B por un costo de $3405. La semana anterior se pagó $3135 por dar mantenimiento a 3 máquinas de tipo A y 5 de tipo B. ¿Cuál es el costo de mantenimiento de las máquinas de cada tipo?

l. Las edades de Pedro y de su papá suman 44 años. Hace 4 años la edad de Pedro era la octava parte de la de su papá. ¿Cuántos años tiene cada uno?

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE 3 ECUACIONES LINEALES CON 3 INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas se conoce como de tercer orden, consta de tres columnas y tres filas y se resuelve por método de determinantes (método de Cramer) o método de reducción.

Método de determinantes

El método de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de determinantes es como sigue:

1. Se calcula el determinante del sistema
2. Se calcula el valor de las incógnitas **X, Y** y **Z,** formando el determinante del numerador y dividiendo entre el determinante del sistema.
3. La solución se comprueba sustituyendo los valores numéricos de las tres incógnitas en las tres ecuaciones del sistema.

Método de determinantes

Ejemplo:

$x + y + z = 6$..........ec.1
$x - y + 2z = 5$……..ec. 2
$x - y - 3z = -10$…ec. 3

A. Calculamos primero el valor del determinante de Delta, formado por los coeficientes solamente:

Para calcular este valor, aquí lo resolveremos por la Regla de Cramer, con expansión de columnas repitiendo las dos primeras y multiplicando en diagonal:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array}$$
$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right| =(3+2-1)-(-1-2-3)=(4)-(-6)=10$$

Este valor formará parte del denominador para calcular el valor de las tres incógnitas x, y, z.

B. Para calcular el valor de la **x**, sustituimos sus coeficientes (la primer columna) por los términos independientes (o los resultados de cada ecuación):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} & \mathbf{C} & \mathbf{Y} \end{array}$$
$$x = \frac{\left| \begin{array}{ccccc} 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ -10 & -1 & -3 & -10 & -1 \end{array} \right|}{\Delta} = \frac{(18-20-5)-(10-12-15)}{10} = \frac{-7-(-17)}{10} = 1$$

C. Para calcular el valor de **y**, sustituimos sus coeficientes (la segunda columna) por los términos independientes (o los resultados de cada ecuación):

$$y = \frac{\begin{array}{ccccc} \textbf{X} & \textbf{C} & \textbf{Z} & \textbf{X} & \textbf{C} \\ \hline \end{array}\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -10 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right|}{\Delta} = \frac{(-15 + 12 - 10) - (5 - 20 - 18)}{10} = \frac{-13 - (-33)}{10} = 2$$

D. Para calcular el valor de la **z**, sustituimos sus coeficientes (la tercer columna) por los términos independientes (o los resultados de cada ecuación):

$$z = \frac{\begin{array}{ccccc} \textbf{X} & \textbf{Y} & \textbf{C} & \textbf{X} & \textbf{Y} \\ \hline \end{array}\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -10 & 1 & -1 \end{array}\right|}{\Delta} = \frac{(+10+5-6)-(-6-5-10)}{10} = \frac{9 - (-21)}{10} = 3$$

Así, la solución es: x = **1,** y = **2,** z = **3**.

Método de reducción (suma y resta)

Ejemplo:
Utilizaremos el mismo sistema para que veas las ventajas de uno o del otro.

$x + y + z = 6$ ……….ec. 1
$x – y + 2z = 5$……….ec. 2
$x – y – 3z = –10$……ec. 3

A. Numeramos a cada ecuación:

$x + y + z = 6$. . . . . ..(ec. 1)
$x – y + 2z =5$. . . . . .(ec. 2)
$x – y – 3z = – 10$.. . (ec. 3)

B. Trabajamos con la (1) y la (2) y eliminamos a la incógnita z:

(- 2) $x + y + z = 6$. . . . . .(1)
(+1) $x – y + 2z =5$. . . . . .(2)
$– 2x – 2y – 2z = – 12$
$+1x – 1y + 2z = + 5$
$–1x – 3y\ \ 0\ = – 7$le llamamos ecuación (4)

C. Hacemos lo mismo con las ecuaciones (1) y (3), eliminamos a la misma incógnita z.

$$\begin{array}{l} (3)\ x + y + z = 6. \ldots\ldots (1) \\ (+1)\ x - y - 3z = -10. \ldots (3) \\ \hline 3x + 3y + 3z = 18 \\ x - y - 3z = -10 \\ \hline 4x + 2y\ 0\ = \ 8 \end{array}$$

le llamamos ecuación (5)

D. Juntamos ahora a las ecuaciones (4) y (5) y eliminamos a la incógnita y (o la x, la que quieras).

$$\begin{array}{l} (2)\ -1x - 3y = -7. \ldots (4) \\ (3)\ 4x + 2y = 8. \ldots (5) \\ \hline -2x - 6y = -14 \\ 12x + 6y = 24 \\ \hline 10x \quad 0 \quad = 10 \\ \mathbf{x = 1} \end{array}$$

E. Ahora, este valor de $x = 1$, lo sustituimos en cualquiera de la ecuación (4) o (5) y despejamos y encontramos el valor de la y:

$$\begin{array}{l} 4x + 2y = 8. \ldots (5) \\ 4(1) + 2y = 8 \\ 2\,y = 8 - 4 \\ y = 4/2 = \mathbf{2} \end{array}$$

F. Sustituimos estos dos valores $x = 1$, $y = 2$, en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3) y obtenemos el valor de la z:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 6. \ldots\ldots (1) \\ (1) + (2) + z = 6 \\ z = 6 - 1 - 2 \\ z = 3 \end{array}$$

Que resultan ser los mismos resultados del ejemplo anterior resuelto por determinantes.

ACTIVIDAD 5

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de 3x3 por el método de determinantes. Revisa en plenaria los resultados obtenidos para cada sistema.

a. $x + y + 3z = 3$
$-2x - y + z = 5$
$4x - 2y + 2z = 2$

b. $3x - 2y - z = -5$
$x - 3y - 2z = -12$
$2x + y - 3z = -1$

c. $2x + 3y + 6z = -23$
$-4x + 2y + z = 28$
$x + 4y + 2z = -7$

d. $x + y - 4z = -7$
$-2x + 5y + z = -28$
$x + 3y + z = -19$

e. $x + 4y - 2z = -16$
$x + y + z = -73$
$x + y + 3z = -3$

ACTIVIDAD 6

Resuelve los siguientes problemas que da un sistema de ecuaciones de 3x3 por el método de determinantes.

- En un banquete hay 43 personas entre hombres, mujeres y niños. En total el banquete costó 1075 pesos. Cada hombre pagó 45 pesos, cada mujer 30 pesos y cada niño 10 pesos. Si el número de hombres y mujeres es igual al número de niños menos 1. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay?

- Ricardo, Rubén y Ramiro compraron sus útiles escolares en la misma papelería. Ricardo compró tres lápices, dos plumas y cuatro cuadernos, pagando 34 pesos; Rubén compró dos lápices, una pluma y un cuaderno y pago 14 pesos; mientras Ramiro pagó 24 pesos por cuatro lápices, dos plumas y un cuaderno. ¿Cuál era el precio de cada uno de los artículos que compraron?

Te sugerimos ver los siguientes videos, para reforzar tus conocimientos sobre los métodos de ecuaciones simultáneas de 3X3 Recursos

Anexo 1: Se agrega la liga de un sistema de 3 x 3 por el método de determinantes.
http://www.youtube.com/watch?v=ZBot29AaZg8&feature=channel_page
hhttps://youtu.be/T82dyC3pAjE
Anexo 2: Otro método para resolver sistemas de tres ecuaciones lineales **http://www.vadenumeros.es/primero/sistemas-gauss.htm**

MIS NOTAS:

BLOQUE V

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Competencias genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 4 Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

BLOQUE V ECUACIONES CUADRÁTICAS

Propósito del bloque

Aplica métodos de solución en problemas que involucren ecuaciones de segundo grado, valorando su uso en situaciones de la vida cotidiana.

Interdisciplinariedad

üü Química I
üü Taller de Lectura y Redacción I
üü Informática I
üü Ética I

Ejes transversales

üü Eje transversal social
üü Eje transversal de la salud
üü Eje transversal ambiental
üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Propone soluciones de manera colaborativa a ecuaciones cuadráticas, interpretando el resultado en el contexto del problema.
- Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ Ecuaciones cuadráticas. yy Clasificación. yy Métodos de solución	¾¾ Describe las características de las ecuaciones cuadráticas y sus métodos de solución. ¾¾ Argumenta la solución obtenida para la toma de decisiones.	¾¾ Toma decisiones con base en resultados analizando consecuencias. ¾¾ Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. ¾¾ Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. ¾¾ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

En los bloques anteriores aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado: aquellas cuyas incógnitas aparecen sólo con exponente uno.

En este bloque aprenderás a utilizar las ecuaciones cuadráticas, comprenderás su aplicación y la forma de utilizar los diferentes métodos de solución, su interpretación gráfica y numérica así como la aplicación que tiene esta función en otras asignaturas por ejemplo: en Física; en las trayectorias de los satélites, en los lanzamientos horizontales y parabólicos, en el cálculo de la altura máxima de un objeto, también en economía se utilizan la ecuaciones cuadráticas para representar modelos económicos de oferta y demanda para producir gráficas. En este manual podrás resolver ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, utilizando los métodos de factorización y fórmula general.

Esto permite que con ideas algebraicas se puede estudiar diferentes tipos de relaciones entre objetos matemáticos como son: “productos notables” y las diferentes técnicas de “Factorización”.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Para resguardar piezas de cristal y hacer seguro su transporte, en cada caja cuadrada se usan separadores que les protegen de choques entre ellas y de golpes externos. Con estas relaciones se construyen cajas de distinto tamaño y volumen.

Área de la tapa de la caja que guardará las copas = $4x^2 +8x+4$

- ¿Sabes que son los embalajes?
- ¿Por qué será importante saber calcular el área de una superficie?
- ¿Cuáles son las expresiones que representan la longitud y anchura de la tapa de la caja?
- Si ``x´´ representa 5 cm, ¿cuál será la longitud y anchura de la tapa de la caja que guardará las copas?
- ¿Cuál será el área de la tapa de la caja?

PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son productos especiales cuyos resultados se obtienen sin llevar a cabo la multiplicación, es posible obtener los resultados, utilizando reglas establecidas.

Estos productos se encuentran clasificados según su forma en:

- Binomios conjugados
- Binomio al cuadrado
- Binomios al cubo
- Binomios con término común

Binomios conjugados

Es el producto de dos binomios iguales con signos diferentes, tienen la forma algebraica siguiente:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(x-y)= \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}$$

Regla: Un binomio conjugado es igual al cuadrado de los dos términos separados por un signo negativo.

Binomios al cuadrado

Es una expresión algebraica que incluye un par de términos diferentes que están elevados al cuadrado.

$$(x + y)^2= (x + y)(x + y)= x^2 + 2xy + y^2$$

Nota. Un binomio al cuadrado, da como resultado un trinomio cuadrado perfecto

Regla:
El cuadrado del primer término $(X)^2 = X^2$
Más el doble del primer término por el segundo término $2(X)(Y) = 2XY$
Más el cuadrado del segundo término (Y)2 = Y2

Ejemplo
$(X + 2Y)^2$ $(X)^2 = X^2$, $2(X)(2Y) = 4XY$, $(2Y)^2 = 4Y^2$ Resultado $X^2 + 4XY + 4Y^2$

Binomio con término común

Es el producto de binomios que contiene un término común, tiene la siguiente forma algebraica:

$$(x + a)(x + b)$$

donde x es el término común y los términos que no son comunes “a” y “b”.

Regla: un binomio con un término común es igual al cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

$$(x + 7)(x - 3)= (x)^2+ (7 - 3)x + (7)(-3)$$

$$= x^2 + 4x - 21$$

ACTIVIDAD 1

Realiza las siguientes multiplicaciones con binomios, y además escribe el nombre del pro-ducto notable que es cada uno de ellos.

a) $(x - 1)(x + 1) =$	b) $(x + 1)(x + 1) =$	c) $(x + 4)(x - 4) =$
d) $(x + 5)(x + 7) =$	e) $(x - 2)(x - 2) =$	f) $(x + 3)(x + 8) =$
g) $(2y + 8x)^2 =$	h) $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2$	i) $\left(\frac{3x^2}{2y^3} + \frac{5w^2}{3z^2}\right)^2$
j) $(x + 7)(x + 10) =$	k) $(3xy + 5)(3xy - 3) =$	l) $(a + 6)(a - 4) =$
m) $(4x - 2)(4x + 6) =$		

FACTORIZACIÓN

Es el proceso inverso de desarrollar una multiplicación. Factorizar es descomponer un número en dos omás factores, significa encontrar todos sus divisores posibles, que al multiplicarse entre sí dan como resultado la expresión inicial. Por lo general, el procedimiento de factorización se asocia con algunos casos de los productos notables.

Las factorizaciones más comunes son:

- Factorización de un polinomio por factor común.
- Factorización de una diferencia de cuadrados.
- Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.
- Factorización de un trinomio de segundo grado

Los casos de factorización por factor común, diferencia de cuadrados y trinomios cuadrados perfectos se verán en este bloque y factorización de trinomios no perfectos en el bloque siguiente.

Factorización de un polinomio por factor común

En este caso, factorizar quiere decir identificar a los factores comunes a todos los términos y agruparlos. Los factores comunes son aquellos números que aparecen multiplicando a todos y cada uno de los términos de una expresión algebraica y que pueden estar dados por constantes (números) o representados por variables (letras).

Regla: se busca el coeficiente numérico común más grande posible que sea divisible a todos los demás coeficientes numéricos de la expresión, y la variable común con el menor exponente que se encuentre en todos los términos de la expresión.

Ejemplo: Factorizar $15x^5y^6 - 45x^3y^4 + 30x^2y^3$

Todos los valores numéricos de los términos se pueden dividir entre 15 que es el máximo común divisor, $\frac{15}{15}=1$, $\frac{45}{15}=3$, $\frac{30}{15}=2$.

Por lo que la ecuación queda de la siguiente forma $15(x^5y^6 - 3x^3y^4 + 2x^2y^3)$.

Las literales que aparecen en todos los términos son x, y, elegimos las de menor exponente que son x^2y^3; y dividimos las literales de todos los términos como en el paso anterior:

$$x^5y^6 / x^2y^3 = x^3y^3,\ -3x^3y^4 / x^2y^3 = -3xy,\ 2x^2y^3 / x^2y^3 = 2$$

Por lo que la ecuación factorizada queda $(15x^2y^3)(x^3y^3 - 3xy+2)$ que es el resultado final.

Si comprobamos la ecuación $(15x^2y^3)(x^3y^3 - 3xy + 2) = 15x^5y^6 - 45x^3y^4 + 30x^2y^3$

Diferencia de cuadrados

La factorización de una diferencia de cuadrados se asocia con la regla del producto notable llamado binomios conjugados. $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

Ejemplo:

$$9x^2 - 4y^4 = (3x + 2y^2)(3x - 2y^2)$$

Regla: Se extrae raíz cuadrada a los dos términos cuadráticos. Se escriben las raíces encontradas en dos paréntesis separados por un signo negativo y otro positivo.

$\sqrt{9x^2} = 3x$, comprobando $(3x)(3x) = 9x^2$ $\sqrt{4x^4} = 2y^2$, comprobando $(2y^2)(2y^2) = 4y^4$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

Se le llama trinomio cuadrado perfecto al trinomio que resulta de resolver un binomio al cuadrado o multiplicar 2 binomios iguales, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

La factorización consiste en sacar raíz cuadrada al primero y último término $\sqrt{ax^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$, esto nos da los términos de 2 binomio iguales, $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$

Nota. El signo del binomio es el signo del término lineal.

Hacemos la comprobación $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Ejemplo: Factoriza el siguiente trinomio $X^2 + 6X + 9$.

$\sqrt{x^2} = X$, $\sqrt{9} = 3$ $(X + 3)(X + 3) = (X + 3)^2$.

Si comprobamos $(X + 3)(X + 3) = X^2 + 6X + 9$

Factoriza el trinomio $16X^2 – 48X + 36$

$\sqrt{16x^2} = 4X$, $\sqrt{36} = 6$, se forman 2 binomio iguales que es la factorización $(4X – 6)(4X – 6)$

Comprobamos $(4X – 6)(4X – 6) = 16X^2 – 24X – 24X + 36$, reducimos $16X^2 – 48X + 36$

ACTIVIDAD 2

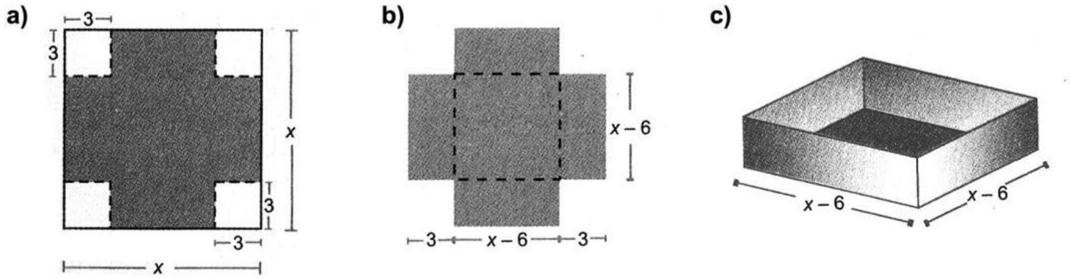
Aplica las reglas de factorización “por término común”, “diferencia de cuadrados” y trinomios cuadrados perfectos y realiza las siguientes factorizaciones:

a) $5x^2 + 2x =$	b) $12a – 6ab + 3ac =$	c) $2y^4 – y^3 – 7y^2 =$
d) $15z^4 + 30z^2 =$	e) $y^2 + 2y^2 + 1 =$	f) $y^2 – 1 =$
j) $100 – h^2 =$	k) $49x^2 – 9y^2=$	l) $16x^4 – 9y^4=$
m) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{81}{49}$	n) $36m^2 + 48mn + 16n^2 =$	o) $16h^2 – 40hg + 25g^2 =$

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre los procesos de factorización básica.
http://www.math2me.com/playlist/algebra/ejercicio-de-factorizar-por-termino-comun
http://www.math2me.com/playlist/algebra/trinomio-cuadrado-perfectotp
http://www.math2me.com/playlist/algebra/diferencia-de-cuadrados

SITUACIÓN DIDÁCTICA

En una fábrica de cajas de cartón, se recibe el pedido de construir cajas abiertas por arriba pero de diferente volumen y con una **altura** constante de **3 cm**. Esta altura se logra cortando cuadrados de **3 cm** de lado, en cada esquina de las **hojas cuadradas** del cartón. Se tienen hojas de diferente tamaño y doblando las pestañas hacia arriba se obtiene una caja sin tapa, como se ve en la figura.



El volumen de la caja se puede expresar como: V= (largo)(ancho)(altura).

¿Qué tipo de trinomio es? __________________________ ¿Puedes factorizarlo? _____________

¿Cómo lo harías? ____

____

SITUACIÓN DIDÁCTICA

1. Un proveedor del mercado **COSTCO** le notifica a la empresa que las medidas originales de las racas (las superficies de madera donde se asientan las cajas de productos, figura No. 1), aumentarán 2 unidades en cada una de sus dimensiones como se muestra en la figura No. 2.

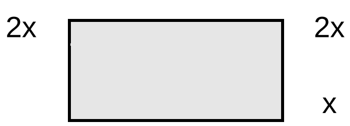


Fig. 1

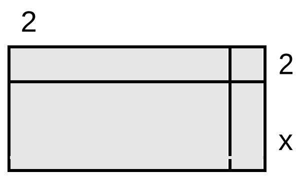


Fig. 2

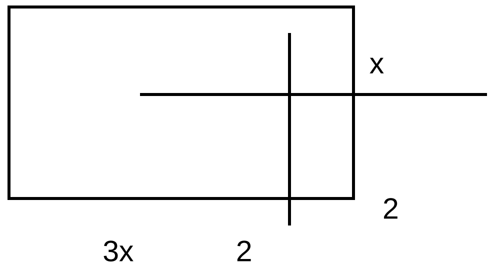
Determina la expresión algebraica que representa la medida de su longitud, ancho y el área de la figura no. 2

Largo: __________________________

Ancho: _________________________

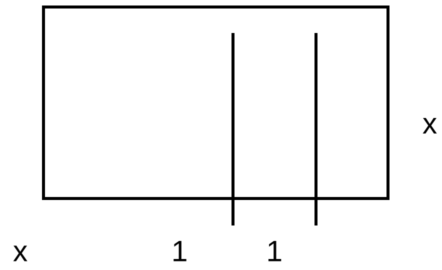
Área de la base: _________________

2. Resuelve los siguientes ejercicios: Determina la expresión que represente la medida de su longitud, ancho y el área de cada una de las diferentes figuras rectangulares, considerando las dimensiones dadas.



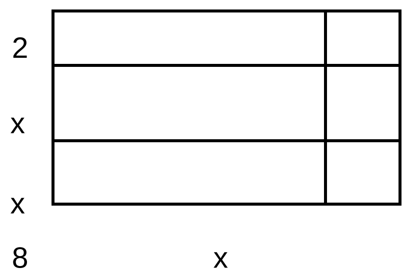
Largo : _________ Ancho: _______

Área:_________________________



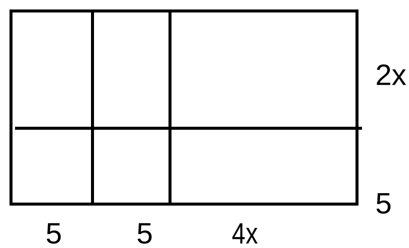
Largo : _________ Ancho: _______

Área:_________________________



Largo : _________ Ancho: _______

Área:_________________________



Largo : _________ Ancho: _______

Área:_________________________

Factorización del trinomio de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se reconoce porque sólo uno de sus términos es cuadrático con coeficiente igual a **1y** admite raíz cuadrada, un término lineal (**b x**) y un término independiente que **no** contiene x.

ACTIVIDAD 3

Factoriza cada trinomio:

1) $x^2 + 6x + 8 =$

9) $x2 + 2x - 8 =$

2) $x^2 + 2x + 2 =$

10) $X^2 + x - 42 =$

3) $x^2 + 7x + 12 =$

11) $X^2 + 5x - 24 =$

4) $x^2 + 7x + 10 =$

12) $X^2 + 9x - 22 =$

5) $m^2 + 11m + 28 =$

13) $m^2 - 4m + 3 =$

6) $y^2 + 3y + 2 =$

14) $y^2 - 3y + 2 =$

7) $w^2 + 9w + 20 =$

15) $w^2 - 5w - 6 =$

8) $b^2 + 6b + 5 =$

16) $b^2 - 4b - 5 =$

Factorización del trinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$

El trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ se reconoce porque su término cuadrático presenta coeficiente **a≠1**, un término lineal (**b x**) y un término independiente que **no** contiene **x**.

ACTIVIDAD 4

Factoriza cada trinomio:

1) $2x^2 + 3x + 1 =$
2) $3x^2 + 10x + 8 =$
3) $5x^2 + 7x + 2 =$
4) $4x^2 + 8x + 3 =$
5) $4x^2 + 16x + 15 =$
6) $2x^2 + 11x + 5 =$
7) $7x^2 + 16x + 4 =$
8) $3x^2 + 12x + 9 =$
9) $3x^2 + 14x - 5 =$
10) $6x^2 + 5x - 4 =$
11) $5x^2 + 3x - 2 =$
12) $2y^2 + 3y - 9 =$
13) $7a^2 - 9a + 2 =$
14) $2a^2 - 5a + 2 =$
15) $100m^2 + 10m - 20 =$
16) $122y^2 + 11y - 15 =$

ACTIVIDAD 5

Simplifica las siguientes expresiones racionales:

1. $\frac{x^2 - 4}{3x + 4}$	**2.** $\frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 50}$	**3.** $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x + 4}$
4. $\frac{x^2 - 6x + 9}{5x - 15}$	**5.** $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 25}$	**6.** $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 + x - 25}$
7. $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 25}$	**8.** $\frac{x^2 - 4}{3x - 6}$	**9.** $\frac{x - 4}{x^2 - 16}$

ECUACIONES CUADRÁTICAS.

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Determina los lados de una casa si su ancho es de x y su lado más grande mide cuatro unidades más que su ancho, cuando su área mide A = 96 cm^2. Utilizando formula general.

x

x + 4

a) ¿Cuáles son las dimensiones de la casa?

b) ¿Cuáles son las incógnitas del problema?

c) ¿Cuál es la fórmula que debe usarse como un dato importante?

d) ¿Son importantes las unidades en los datos para validar la ecuación que se obtenga?

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación cuadrática también es llamada de segundo grado, el máximo exponente de la incógnita es dos.

La forma general de la ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **a**, **b** y **c** son números reales, (x^2) término cuadrático, (x) término lineal, (c) término independiente.

Las ecuaciones cuadráticas se clasifican en **COMPLETAS** cuando tienen el término de segundo grado, el término lineal y el independiente $x^2 + 3x + 5 = 0$.

Son **INCOMPLETAS** cuando carecen del término lineal $x^2 + 3 = 0$ **(PURAS)** o el término independiente $5x^2 + 15x = 0$ **(MIXTAS).**

Resolver una ecuación cuadrática es encontrar los valores para la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera, los valores encontrados de la incógnita reciben el nombre de raíces o soluciones, representándose como:

$$x_1 \; ; \; x_2$$

ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

La solución consiste en despejar la incógnita, para luego obtener las soluciones por medio de una raíz cuadrada.

Resuelve por medio de despeje $x^2 - 8 = 0$

SOLUCIÓN:

$x^2 - 8 = 0$

$x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{8}$

$= \pm 2\sqrt{2}$

$x = 2$ y $x = -2$

Resuelve por medio de despeje $x^2 - 81 = 0$

SOLUCIÓN:

$x^2 = 81$ $\quad x = \pm\sqrt{81}$

$x = 9$ y $x = -9$

ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + bx = 0$

Consiste en factorizar, utilizando el método de factor común visto con anterioridad y aplicando el principio de los productos nulos para encontrar las soluciones.

Ejemplo 1: Resuelve por factor común $2x^2 - 3x = 0$

SOLUCIÓN:

$$2x^2 = 3x$$
$$(2x^2 - 3x) = 0$$
$$x(2x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2: Resuelve la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 2x = 0$

SOLUCIÓN:

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x\,(x - 2) = 0$$
$$x = 0 \qquad x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

ECUACIONES COMPLETAS $ax^2 + bx + c = 0$

Las ecuaciones completas se pueden resolver por los métodos más comunes, que son los siguientes:

- Factorización
- Completando el trinomio cuadrado perfecto
- Por fórmula general.

FACTORIZACIÓN

Ejemplo 1

Resuelve por factorización $x^2 + 2x - 15 = 0$ **(es un trinomio de segundo grado, se sigue el método de un trinomio de segundo grado).**

SOLUCIÓN:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 15)(x - 3) = 0$$

$$x + 15 = 0$$

$$x_1 = -5$$

$$x - 3 = 0$$

$$x_2 = 3$$

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización.

http://www.youtube.com/watch?v=dXakJkBRpqM

Ejemplo 2

Resuelve por factorización $x^2 - 2x - 24 = 0$ (es un trinomio de segundo grado, se sigue el método de un trinomio de segundo grado).

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$(x - 6)(x + 4) = 0$

$x - 6 = 0$

$x_1 = 6$

$x + 4 = 0$

$x_2 = -4$

COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Resolución de ecuaciones cuadráticas o de 2do. grado por el método **trinomio cuadrado perfecto**. Pasos para resolver una ecuación:

Ejemplo 1.

1.- Se ordena el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$-6x + x^2 = 9x^2 \rightarrow 6x + 9 = 0$

2.- Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término.

1... $\sqrt{x^2} = x$

2... $\sqrt{9} = x$

3.- Se halla el doble producto de las raíces obtenidas en el paso anterior respetando el signo del segundo término.

$$2(x)(-3) = \mathbf{-6x}$$

4.- Se compara el resultado obtenido en el paso anterior con el segundo término del trinomio.

$$x^2 \mathbf{- 6x} + 9 = 0$$

5.- Obteniendo un binomio elevado al cuadrado poniendo las raíces encontradas en el paso 2.

$$(x - 3)^2$$

Ejemplo 2.

$x^2 + 2x + 1 = 0$

2.- Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término.
1... $\sqrt{x^2} = x$

2... $\sqrt{1} = 1$

3.- Se halla el doble producto de las raíces obtenidas en el paso anterior respetando el signo del segundo término.

$$2(x)(1) = \mathbf{2x}$$

4.- Se compara el resultado obtenido en el paso anterior con el segundo término del trinomio.

$$x + \mathbf{2x} + 1$$

5.- Obteniendo un binomio elevado al cuadrado poniendo las raíces encontradas en el paso 2.

$$(x + 1)^2$$

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado por el método completando el trinomio cuadrado perfecto:

http://www.youtube.com/watch?v=at8YGH8jl8k

FÓRMULA GENERAL

Este método de la fórmula general sirve para resolver cualquier ecuación cuadrática completa, incompleta, empleando únicamente los coeficientes de a; b; y c.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Resuelve $2x^2 - 4x - 3 = 0$ por la fórmula cuadrática.

SOLUCIÓN: Anotamos la fórmula cuadrática e identificamos a=2, b=-4 y c=-3.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

Sustituimos la fórmula y simplificamos.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 6.32}{4}$$

$x_1 = \dfrac{4 + 6.32}{4} = 2.58$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{4 - 6.32}{4} = -0.58$

$x_1 = 2.58$ $\qquad$ $x_2 = -0.58$

Discriminante

$ax^2 + bx + c = 0$

$\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se llama **discriminante** de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el **número de soluciones**. Podemos distinguir tres casos:

$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4*6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$

La ecuación tiene una solución doble.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4*1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$$

La ecuación no tiene soluciones reales.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Instrucciones: Atendiendo la instrucción del profesor, realiza estos ejercicios en forma individual o reúnete en binas u organízate con tus compañeros. Trabajando en forma colaborativa y de respeto entre ustedes.

ACTIVIDAD 6

Realiza la lectura acerca de los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas, analiza los ejemplos y después resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$	e) $12x - 4 - 9x^2 = 0$
b) $4x^2 - 3x - 22 = 0$	f) $5x^2 - 7x - 90 = 0$
c) $x^2 + 11x = -24$	g) $x^2 + 49 = 0$
d) $x^2 = 16x - 63$	h) $3x^2 - x + 15 = 0$

a) ¿Cómo son las soluciones de las ecuaciones anteriores? ¿Qué similitudes hay?

b) ¿Qué características tienen aquellas ecuaciones que no tienen una solución real?

c) ¿Cómo se verifica el resultado obtenido?

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factor común:

Ejercicios	Procedimiento
1. $3x^2 + 7x = 0$	
2. $x^2 + 9x = 0$	
3. $-y^2 + 8x = 0$	
4. $15x^2 + 21x = 0$	

ACTIVIDAD 7

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por despeje:

Ejercicios	Procedimiento
1. $x^2 - 16 = 0$	
2. $100x^2 - 225 = 0$	

3. $4x^2 - 16 = 0$	
4. $121x^2 - 1 = 0$	
5. $7x^2 - 63 = 0$	

ACTIVIDAD 8

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización:

Ejercicios	**Procedimiento**
1. $x^2 + 12x + 20 = 0$	
2. $x^2 -16 = 0$	
3. $100x^2 - 225 = 0$	

4. $100x^2 + 120x + 36 = 0$	
5. $x^2 + 4x + 4 = 0$	

ACTIVIDAD 9

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por fórmula general:

Ejercicios	**Procedimiento**
1. $3x^2 - 5x + 2 = 0$	
2. $4x^2 + 3x - 22 = 0$	
3. $x^2 + 11x = -24$	

4. $x^2 = 16x - 63$	
5. $12x - 4 - 9x^2 = 0$	

ACTIVIDAD 10

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por completar TCP:

Ejercicios	**Procedimiento**
1. $x^2 - 16x + 64 = 0$	
2. $x^2 - 2x + 3 = 0$	
3. $x^2 + 6x + 9 = 0$	
4. $x^2 - 2x - 15 = 0$	

PROBLEMAS DE SU ENTORNO.

ACTIVIDAD 11

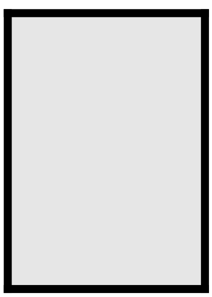
Resuelve los siguientes problemas aplicando tu conocimiento sobre ecuaciones cuadráticas.

1. Una persona adquirió un terreno de forma triangular, con un área de 40 m^2; si conoces que la base es 2 metros mayor que la altura. ¿Cuáles son sus dimensiones?

x

x + 2

2. La empresa VIREYDEL fabricará marcos de madera como parte de una nueva producción que está por lanzar al mercado, dichos marcos deberán tener un área de 84 cm^2 además el interior del marco tiene que ser de 9 cm de largo por 8 cm de ancho.



¿Qué ancho deberá tener el marco para cumplir con las especificaciones?

3. Desde una plataforma que está a 80 m bajo el suelo se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 48 metros por segundo. La altura h, en metros, del proyectil a los t segundos de tiempo está dada por:

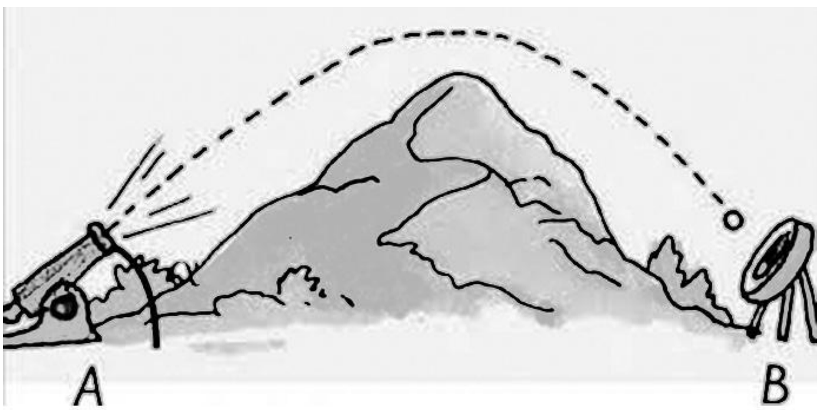
$$h = -4t^2 + 48t - 80$$

a) Determina el tiempo en el que el proyectil alcanza su máxima altura.

b) Encuentra la máxima altura que alcanza el proyectil.

c) Traza la gráfica de la función.

d) Interpreta el significado físico de las intersecciones de la curva con los ejes coordenados.



BLOQUE VI

MODELOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

CG4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

CG4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

CG5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

Competencias disciplinares

CDBM 7 Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

CDBM 8 Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

BLOQUE VI MODELOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Propósito del bloque

Aplica modelos tanto estadísticos como probabilísticos para analizar, interpretar además de co-municar la información de fenómenos naturales y sociales.

Interdisciplinariedad

- üü Taller de Lectura y Redacción I
- üü Informática I
- üü Ética I
- üü Metodología de la Investigación

Ejes transversales

- üü Eje transversal social
- üü Eje transversal de la salud
- üü Eje transversal ambiental
- üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

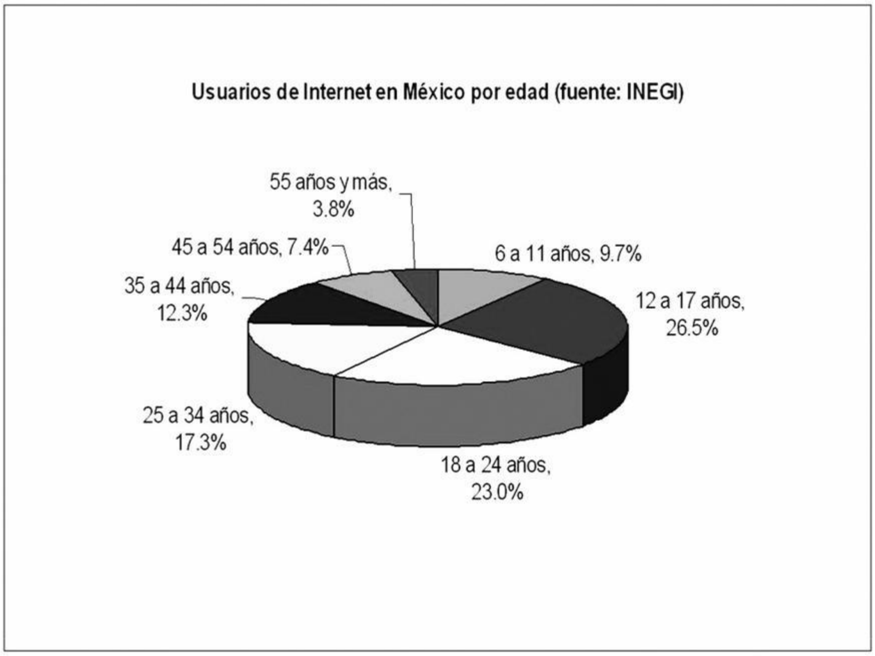
- Utiliza medidas de tendencia central y de dispersión para interpretar de forma crítica y cons-ciente un fenómeno social o natural.
- Organiza y representa información mediante métodos gráficos, proponiendo formas innova-doras de solución a diversas problemáticas de su entorno.
- Evalúa los posibles resultados de un fenómeno social o natural a partir de la elección de un enfoque determinista o aleatorio.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ **Conceptos básicos de estadística descriptiva** • Medidas de tendencia central - Media - Mediana - Moda • Medidas de dispersión - Rango - Varianza - Desviación típica o estándar • Gráficos - De pastel - De barras - Histograma ¾¾ **Probabilidad** • Conceptos básicos de probabilidad. • Ley aditiva • Ley multiplicativa	¾¾ Reconoce medidas de centralización y dispersión. ¾¾ Representa la información en tablas, gráficas y diagramas. ¾¾ Describe fenómenos naturales y sociales utilizando la estadística. ¾¾ Identifica cuándo aproximarse a la solución de un problema utilizando un enfoque determinista o aleatorio.	¾¾ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. ¾¾ Actúa de manera congruente y consciente previniendo riesgos. ¾¾ Toma decisiones de manera consciente e informada asumiendo las consecuencias.

Conceptos básicos de estadística descriptiva

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Observa la gráfica de pastel y contesta las preguntas:

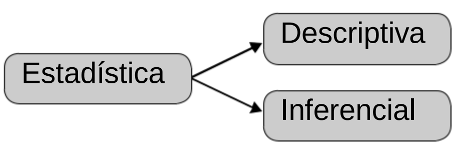


A) ¿Cuál es el rango de edad que tiene mayor porcentaje de usuarios de Internet?
B) ¿Cómo crees que se obtuvieron los datos?
C) Si se sabe que en México existen 40.1 millones de usuarios de Internet, ¿cómo calcularías el número de usuarios de 55 años en adelante?
D) ¿Estarías de acuerdo a la vista de los resultados que la probabilidad de los usuarios en el rango de 18 a 24 años es $P(A)=\frac{23}{100}$?

Conceptos

Estadística: Rama de las matemáticas que se ocupa de reunir, organizar y analizar datos numéricos y que ayuda a resolver problemas como el diseño de experimentos y la toma de decisiones.

El estudio de la Estadística puede dividirse en dos grandes ramas.



Estadística descriptiva: Es una ciencia que analiza, estudia y describe a la totalidad de los individuos de una población. Su finalidad es obtener información, analizarla, elaborarla y simplificarla lo necesario para que pueda ser interpretada cómoda y rápidamente analiza, estudia y describe a la totalidad de los individuos de una población. Esta estadística analiza serie de datos como: edad de una población, altura de estudiantes y la temperatura en los meses de verano.

Estadística inferencial: Este tipo de estadística trabaja con muestras, subconjuntos formados por algunos individuos de la población. A partir del estudio de la muestra se pretende inferir en aspec-tos relevantes de toda la población, y toma de decisiones.

Conceptos básicos

Población: Es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento interesa. Cada uno de esos elementos es un individuo.

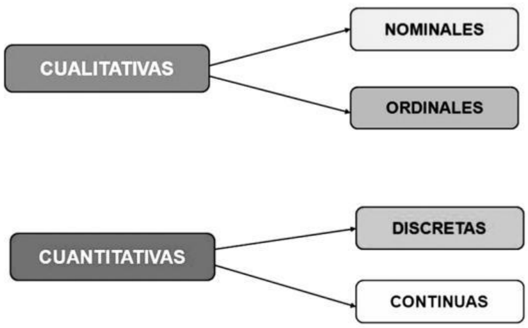
Una población puede clasificarse como:

- **Población finita**: El número de elementos que la componen es limitado.
- **Población infinita**: Cuando el número de sus elementos es muy grande.

Muestra: Conjunto de individuos extraídos de una población con el fin de inferir, mediante su estudio, características de toda la población.

Variable: Son las series de datos que pretenden analizar en los individuos de una población. Por ejemplo: las edades de una población, altura de los estudiantes, etc.

Las variables pueden ser de dos tipos:



Variables Cualitativas: No se pueden medir numéricamente.

- **Variable nominal**: Es una variable cualitativa que clasifica en categorías a los elementos de una población, por ejemplo, la nacionalidad, color de piel, etc.
- **Variable ordinal**: Es una variable cualitativa que ubica en una posición a los individuos, por ejemplo el nivel de satisfacción de una persona, lo bueno o malo, etc.

- **Variable continua**: Es una variable cuantitativa que puede tomar cualquier valor real dentro de un intervalo, por ejemplo, la velocidad de un vehículo puede ser 80.3km/h, los litros de agua que bebe una persona. (Valores decimales).
- **Variable discreta**: Es una variable cuantitativa la cual puede tomar valores enteros, por ejemplo: el número de hermanos, el número de hijos en una familia. (Valores enteros).

ACTIVIDAD 1

Instrucciones: Completa el cuadro utilizando el siguiente listado de variables

Listado de variables		
a) Número de hermanos	f) Número de hijos	k) Estado civil
b) Talla de ropa (CH, M)	g) Estatura	l) Peso de personas
c) Razas de perros	h) Nombre de partidos políticos	m) Tipo de sangre
d) Sueldo mensual	i)Temperatura registrada en una ciudad durante un año	n) Tipo de tornillos
e) Medida de tornillos	j) Escolaridad	ñ) Promedio de calificaciones

Numéricas o cuantitativas		Categóricas o cualitativas
Continuas	Discretas	

Medidas de tendencia central

✓ü **Medidas de tendencia central**: Son valores que se puede tomar como representativo de todos los datos, nos dan un centro de la distribución de frecuencias. Hay diferentes caminos para definir el "centro" de las observaciones en un conjunto de datos. Por orden de importan-cia, son:

✓ü **Media**: es también conocida como promedio. Se trata de la medida que se obtienen al sumar todos los valores de la variable y dividir el resultado entre el número total de datos

$$\overline{x} = \frac{\sum \textit{de datos}}{\text{número total de datos}}$$

✓ü **Mediana**: el que queda al centro de todos los datos ordenados. (***símbolo*** $\tilde{x}$). Cuando la lista es un número par, se encuentra el par central de números, y después se calcula su valor medio, sumándolos y dividiendo entre dos.

✓ü **Moda**: es un conjunto de números, la moda es el valor de la variable que se presenta con mayor frecuencia, es decir, el valor que más se repite. (***símbolo*** $\hat{x}$).

Ejemplo: Mis calificaciones del primer parcial son: 8, 7, 9, 6, 10, 8, 8. Calcula las medidas de tendencia central.

a) **Media**: $\bar{x} = \frac{8+7+9+6+10+8+8}{7} = \frac{56}{7}$ $\bar{x} = 8$

b) **Mediana**: Primero ordenamos todos los datos: 6, 7, 8, **8**, 8, 9, 10. Observamos que al centro quedó el número 8, así $\tilde{x}$= 8

c) **Moda**: $\hat{x}$ = 8, pues es el que más se repite.

ACTIVIDAD 2

Instrucciones: realiza las actividades que se te piden, resolviendo correctamente

1. Obtén la media, mediana y moda aritmética de los siguientes datos no agrupados recopila-dos en las entradas de cine en una semana.

128	132	136	136	139	143	147

2. Los siguientes datos representan el tiempo (en minutos) en que fueron llenadas 8 cajas de sodas para un estudio de mercado. Calcular el tiempo promedio en el que se llena una caja de sodas.

7	9	8	9	10	9	8	7

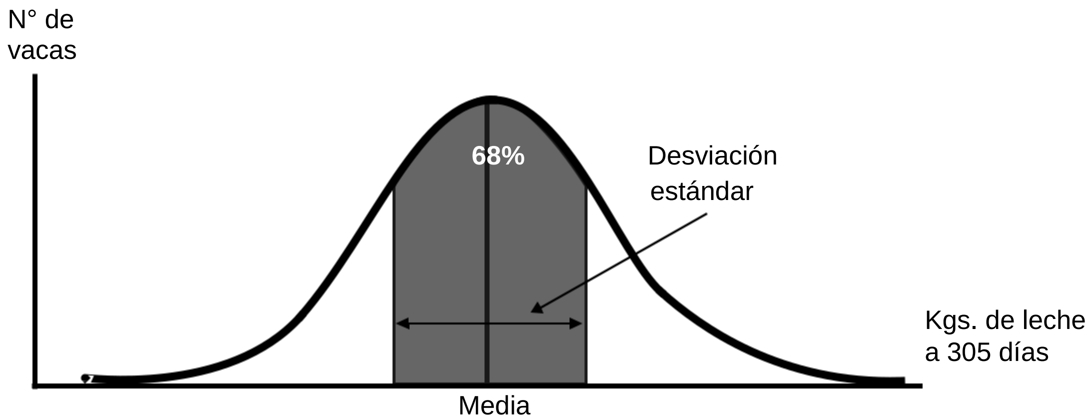
3. Actualmente se está estudiando en mi plantel el número de hijos por familia para estudiar la natalidad, preguntando el número de integrantes de cada familia. Se recogen al azar los siguientes datos mostrados de un grupo de 40 alumnos.

4	5	6	3	4	5	6	3	8	6	5	4

a) ¿Cuál es la población?
b) ¿Cuál es la muestra?
c) Encuentra la media aritmética o población:
d) Calcula la moda:
e) Determina la mediana:
f) ¿Cuál de estos datos es más representativo del conjunto? Explica por qué.

Medidas de dispersión

Las medidas de tendencia central pueden resumir el comportamiento de un conjunto de datos en un solo valor representativo, sin embargo, no proporcionan toda la información necesaria para comprender la conformación de los datos. Por lo que es importante las medidas de dispersión que nos ofrecen información sobre la variabilidad o dispersión de los datos; en otras palabras, nos ha-blan sobre la heterogeneidad de su conjunto.



Medidas de Dispersión: las medidas de dispersión cuantifican la separación, la dispersión, la variabilidad de los valores de la distribución respecto al valor central.

✓ü **Rango**. Es la diferencia entre el mayor y menor de todos los datos.

Rango = Dato mayor – Dato menor

✓ü **Varianza (s^2)**. Es el número que se obtiene a partir del promedio de los cuadrados de las dis-tancias entre cada dato y la media aritmética.

$$s^2 = \frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n}$$

✓ü **Desviación estándar (s)**. Es la raíz cuadrada de la varianza.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n}}$$

Ejemplo: Mis calificaciones son: 8, 7, 9, 6, 10, 8, 8. Calcula las medidas de dispersión.

a) Rango = 10 – 6 = 4.

b) Varianza $S^2 = \dfrac{(8-8)^2+(7-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2}{7}$

$S^2 = \dfrac{10}{7}$

$S^2 = 1.4$

c) Desviación Estándar: $S = \sqrt{1.4} = 1.18$

Gráficos

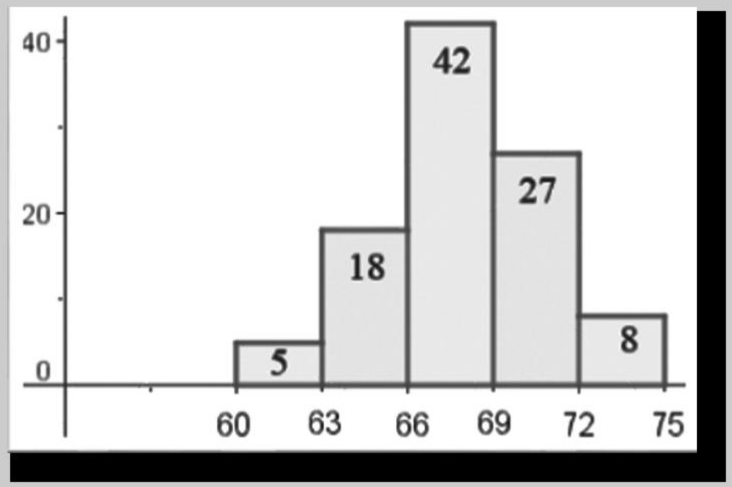
Hay un dicho que dice “una imagen dice más que mil palabras” por eso ahora te mostraremos como diseñar gráficas a de una distribución de frecuencias para que la distribución de información sea más agradable, pero sobre todo aún más fácil de comprender.

Una gráfica es el espejo donde se refleja una parte de la información que contiene la distribución de frecuencias. Gráficas de pastel, barras e histogramas.

ACTIVIDAD 3

Instrucciones: analiza la siguiente gráfica y responde las preguntas.

La gráfica corresponde al peso de 100 alumnos de primer semestre de tu escuela.



a) Si Juan pesa 72 kg, ¿cuántos alumnos hay menos pesados que él?

b) Calcula la **moda** y mediana

c) ¿A partir de qué valores se encuentra el **25%** de los alumnos más pesados?

En una clase de química de 30 alumnos; 12 juegan baloncesto, 3 practican la natación, 4 juegan al fútbol y el resto no practica ningún deporte. Estos datos se representan en la tabla y grafica siguiente:

a) Determina el porcentaje que le corresponde a cada deporte

Deporte	Alumnos	Ángulo
Baloncesto	12	124°
Natación	3	36°
Fútbol	9	108°
Sin deporte	6	72°
Total	30	360°

ACTIVIDAD 4

Instrucciones: A partir de la situación en equipos contesten lo que se pide.

¿Quiénes son más altos?

El equipo de basquetbol representativo de Zona Valle se enfrentará al de Zona Costa. Siempre se ha corrido el rumor que el equipo de Zona Costa tiene jugadores de mayor estatura, por lo que tienen mayor ventaja. La Dirección General del Cobachbc tiene el registro de estatura de los jugadores que participarán en este encuentro deportivo y los publica para ambos equipos.

Equipo Zona Costa: 1.73, 1.75, 1.83, 1.75, 1.89, 1.95, 1.85, 1.76, 1.75, 1.82, 1.90 (en metros).
Equipo Zona Valle: 1.85, 1.69, 1.92, 1.89, 1.78, 1.78, 1.89, 1.88, 1.69, 1.95, 1.89 (en metros).

Con base en esta información, determinen qué equipo tiene los jugadores más altos.

a) ¿Cómo puedes comparar las estaturas de ambos equipos para que nos ayude a saber quién tiene mayor ventaja por su estatura?
b) Para cada equipo, realiza la suma de todos los datos y divídelo entre el total de ellos. Al resultado obtenido se le llamará **media aritmética**.
c) ¿Cuál es la diferencia entre la media aritmética de cada equipo?
d) ¿El equipo con la mayor media es donde está el jugador más alto?
e) ¿Podría ocurrir que en el equipo con la mayor media no estuviera el jugador más alto?
f) Ordena de menor a mayor cada una de las estaturas, para cada equipo. ¿Qué estatura es la que se encuentra a la mitad de la lista? Al valor así obtenido se le llama mediana.
g) ¿Es la mediana muy diferente a la media aritmética?
h) ¿Consideras que ambas pueden ayudarte a realizar la comparación de ambos equipos?
i) ¿Cuál prefieres?
j) De cada lista de jugadores, ¿cuál estatura es la que más se repite?
k) ¿Encuentras alguna similitud de este valor con la media y la mediana?
l) Al valor que tiene más frecuencia o se repite más se le llamará moda.

¿En qué situaciones que conozcas puedes utilizar el concepto de moda? Escribe tres ejemplos.

Un día antes del encuentro, decidió el comité deportivo aumentar a la lista de jugadores tres personas más por equipo.

Zona Costa llevará a José, Arturo y Pedro, de 1.75, 1.84 y 1.68 m de estatura, respectivamen-te. Mientras que Zona Valle llevará a Luis, Jorge y Santiago de 1.78, 1.69 y 1.78 m.

a) Determinen para cada equipo la media aritmética, la mediana y la moda con estos nuevos datos.

b) ¿Qué equipo tiene más ventaja por su estatura?

ACTIVIDAD 5

Instrucciones: A partir de la situación de manera individual contesta lo que se te pide. **¿Quién ganará la excelencia académica?**

En el concurso de ciencias convocado por la Universidad Tecnológica de Tijuana, se entre-gará un premio a la excelencia académica a la institución que tenga el mayor promedio de calificación de sus alumnos participantes en el concurso. Participaron varios planteles del Colegio de Bachilleres, pero uno de ellos obtuvo las siguientes calificaciones en sus alumnos:

Matemáticas: 7.3, 9.7, 9.2, 8.9, 9.3
Física: 5.8, 9.5, 9.2, 8.8, 8.5
Biología: 9.1, 9.5, 7.2, 9.3, 8.9
Química: los resultados están aún pendientes.

Uno de los equipos más fuertes a vencer es CETYS Tijuana, el cual obtuvo los siguientes resultados:

Matemáticas: 9.2, 8.7, 9.0, 6.6, 8.1
Física: 9.1, 7.5, 8.2, 9.3, 8.3,
Biología: 8.5, 9.2, 8.0, 9.3, 6.2
Química: aún pendientes.

a) Calcula la media o promedio para cada escuela, por materia y general.
b) Realiza un histograma en Excel donde se observe el desempeño de cada escuela por materia (grafica materia vs calificación)
c) Escribe tus conclusiones a partir de la gráfica que has obtenido del desempeño de cada escuela en la competencia.
d) De las calificaciones de ambos planteles determina la desviación estándar, tomando las15 calificaciones como un solo conjunto.
e) ¿Cuál de los dos planteles presenta mayor variabilidad con relación a la medida de dis-persión?
f) ¿En cuál de las dos escuelas la preparación de sus alumnos es más homogénea? Explica tu respuesta.

Finalmente se dan las calificaciones de Química que estaban pendientes. Plantel Cobach obtuvo promedio por los 5 alumnos la calificación de 8.6 y CETYS Tijuana 8.7.

g) ¿Qué escuela lleva la ventaja para el premio?

En la ceremonia de premiación la escuela que obtuvo el tercer lugar tuvo como promedio de calificación en todas sus asignaturas 8.39.

h) ¿Qué escuela obtuvo el premio de excelencia académica?

PROBABILIDAD

Se llama **Probabilidad** a la medida que expresa la frecuencia con que se espera que ocurran los resultados aleatorios de un suceso, fenómeno, hecho o evento.
Fenómeno, Experimento o Evento: Es la ocurrencia de un hecho o suceso. Los que aquí nos van a interesar, son aquellos eventos los cuales podemos observar.

Experimentos deterministas y experimentos aleatorios
Dentro de las situaciones y fenómenos que se desarrollan en la sociedad y en la naturaleza se presentan dos tipos de eventos: los **deterministas** y los **aleatorios**.

Fenómeno Determinista: Es aquel del cual siempre que lo realicemos, manteniendo las mismas condiciones, sabremos cual va a ser su resultado.

Ejemplos:

a) Cuando levantamos un objeto en el aire y lo soltamos sabemos que este siempre va a caer debido a la gravedad.
b) Cuando inflamos un globo continuamente, pasando un cierto límite de resistencia elástica, éste estallará.
c) Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

Fenómeno aleatorio: Es aquel del cual no sabemos de antemano el resultado que se va a obte-ner.

Ejemplos:

a) Cuando lanzamos un dado no nos es posible saber con seguridad, cual es la cara que va a quedar mirando hacia arriba.
b) Cuando lanzamos una moneda al aire, no sabemos con seguridad si caerá águila o sol.
c) Cuando lanzamos un dardo a un disco giratorio, no es posible determinar rotundamente, la región donde se clavará el dardo.

Espacio muestral: es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un evento aleato-rio, (símbolos más comunes **E, S, Ω,U** seguidos por unas llaves).

Ejemplos:

a) Al lanzar la moneda, los resultados posibles son: $E = \{águila, sol\}$.
b) Al lanzar un dado, el espacio muestral tiene seis resultados posibles: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

ACTIVIDAD 1

Instrucciones: de acuerdo a la definición de fenómeno aleatorio y de fenómeno determinístico, clasifica los siguientes eventos, contestando de manera individual, si corresponde a un Fenómeno Aleatorio, escribiendo (FA), o un (FD) si corresponde a un Fenómeno determinista.

a) Lanzar una moneda para determinar si cae cara o sello.
b) Conocer el número de meses de cualquier año.
c) Los días del año que se tendrán en Mexicali con más de 40°C de temperatura.
d) Lanzar un dado para conocer la forma en que caerá.
e) El número de horas que comprende la asignatura de Matemáticas II.
f) Meter la mano en una caja con canicas rojas, para saber de qué color será la canica selec-cionada.
g) De una urna con esferas marcadas del cero al nueve, sacar un número par.
h) La cantidad de productos defectuosos en una maquiladora durante un mes.
i) El promedio de las calificaciones 9, 8, 8, 9 y 6.
j) Lanzar dos dados para determinar la suma de ambos.
k) Escoger de entre varios cuadriláteros una figura que tenga 4 lados.
l) El agua hierve a 1000 C a nivel del mar

ACTIVIDAD 2

A partir de la situación contesta en equipos.

Determina el espacio muestral para cada uno de los siguientes eventos:

b) Se lanzan dos monedas al mismo tiempo para determinar cuántas caras o sello ocurren.
c) Se lanzan tres monedas al mismo tiempo.
d) Se lanza un solo dado para obtener un número en la cara de arriba.
e) En un dominó, que la ficha sea “mula”, es decir, que tenga el mismo número en los dos lados de la ficha.

PROBABILIDAD

Con los resultados de los estudios de información sobre fenómenos aleatorios, puede ocurrir que se obtengan varias conclusiones posibles o inciertas. En estos casos de estudios (muestreo y pre-dicciones de resultados) la estadística se auxilia de la *probabilidad*.

Probabilidad clásica o teórica es aquella que podemos determinar sin la realización del experimento aleatorio, también la podemos expresar de la siguiente manera, si A es un fenómeno aleatorio, entonces:

$$P(A) = \frac{\textit{resultados posibles de } A}{\textit{Total de resultados}} = \frac{\#A}{\#S}$$

1. Ejemplo: sea el experimento de lanzar una moneda al aire, y sea A el evento aleatorio de que caiga sol al lanzar dicha moneda. Sabemos que el espacio muestral está formado por águila y sol, entonces.

Datos	Fórmula	Desarrollo	Resultado
$S_{\text{caras}}=\{1,2\}$ $A_{\text{sol}} = \{1\}$ N= 2 n(A) = 1	$P(A) = \dfrac{\textit{resultados posibles de } A}{\textit{Total de resultados}} = \dfrac{\#A}{\#S}$	$P(A_{\text{sol}}) = \dfrac{1}{2} = 0.5 = 50\%$	Existe una probabilidad de 50% de que salga sol

2. Ejemplo: al lanzar un dado al aire. ¿cuál es la probabilidad que una cara con puntuación par quede arriba?

Datos	Fórmula	Desarrollo	Resultado
$S_{\text{puntos}}=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A_{\text{caras con puntos par}} = \{2,4,6\}$ N= 6 n(A) = 3	$P(A) = \dfrac{\textit{resultados posibles de } A}{\textit{Total de resultados}} = \dfrac{\#A}{\#S}$	$P(A) = \dfrac{3}{6} = 0.5 = 50\%$	Existe una probabilidad de 50% de que la cara quede arriba tenga puntuación par

Leyes de la probabilidad:

1. A, B mutuamente excluyentes (unión)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

2. A, B no excluyentes (unión menos intersección)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3. A, B independientes

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Propiedades

1. $0 \leq \boldsymbol{P(A)} \leq \mathbf{1}$

Ejemplos de cada una de las propiedades de la Probabilidad:

1. Lancemos un dado normal:
   a) la probabilidad de que caiga un número cualquiera P(número cualquiera) = 1.
   b) la probabilidad de que caiga sol es P(sol) = 0

2. Se tira un dado, determina la probabilidad de que salga un número menor que 3 o mayor que 4. Sea A el evento menor que 3 y B el evento mayor que 4. Así, A = {1, 2}, B = {5, 6}, vemos que NO tienen elementos en común, siendo así excluyente, aplicamos la fórmula:

$$P(A \cap B)=P(A)+P(B)$$

$$P\ (menor\ a\ 3\ o\ mayor\ a\ 4) = P\ (menor\ a\ 3) + P\ (mayor\ a\ 4)$$

$$P\ (menor\ a\ 3\ o\ mayor\ a\ 4) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6}$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = 0.667$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = 6.7\%$$

3. Se tira un dado, determina la probabilidad de que salga un número impar o un número mayor a 4. Sea el evento A número impar, evento B mayor a 4. Así, A = {1, 3, 5}, B = {5, 6}, vemos que estos eventos tienen un elemento en común el 5, entonces el evento {A y B} = {que salga impar y mayor a 4 al mismo tiempo} = {5}, aplicando la fórmula:

$$P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = P\ (impar) + P\ (mayor\ a\ 4) - P(impar\ y\ mayor\ a\ 4)$$

$$P\ (menor\ a\ 3\ o\ mayor\ a\ 4) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = 0.667$$

$$P\ (impar\ o\ mayor\ a\ 4) = 6.7\%$$

4. Por ejemplo, al nacer un segundo hijo, no es influido por el nacimiento del primero, es decir, son independientes.

ACTIVIDAD 3

A partir de la situación contesta de manera individual.

¿A qué jugamos?

Los papás de Marco Antonio e Isabel decidieron salir a festejar su aniversario de bodas, por lo que los dejaron cuidando a los hermanos pequeños. Para no aburrirse Marco Antonio e Isabel inventaron unos juegos, pues tenían el siguiente material:

- Un bote con 50 canicas, 20 azules, 15 blancas y el resto eran verdes.
- Un juego de dominó (28 piezas).
- Dos dados.

Juego 1. Se pasaban el bote entre ellos, cinco veces; en cada vuelta, cada uno sacaba una canica, la mostraba y la regresaba al bote. Gana el que saque primero tres canicas verdes.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que Isabel gane este juego?

Juego 2. Las piezas de dominó las Revolvían y por turnos levantaban una pieza, la mostraban y la volvían a poner boca abajo.

1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una mula?
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pieza cuya suma de puntos sea menor a 4?

Juego 3. Marco Antonio e Isabel, deciden ahora, jugar lanzando los dos dados para obtener la suma de ambos. Decidieron que ganaba el que tiene más puntos al tirar los dos dados.

1. ¿Cuáles son los diferentes resultados posibles y cuáles son las probabilidades de cada uno de ellos?

2. Determina el espacio muestral o de posibles resultados para este evento, en un cuadro como el siguiente:

Total, de puntos	Posibles resultados	probabilidad
2	(1,1)	1/36
3	(1,2), (2,1)	2/36

A partir el cuadro anterior, contesta lo siguiente:

Marco Antonio al tirar los dados obtuvo una suma de 6.

1. ¿Qué probabilidades tiene Isabel de ganarle a Marco Antonio?

Isabel en su turno obtuvo como suma 5 y perdió. En su siguiente turno lanza los dados y obtiene 7.

2. ¿Qué probabilidad tiene Marco Antonio de perder?
3. ¿Y de empatar?

Si Isabel obtiene como suma 4 o 6 cortará el césped o si Marco Antonio suma 5 o 6, lavará los trastes al día siguiente.

4. ¿Qué probabilidad tiene cada uno de recibir el castigo?
5. ¿Quién tiene la mayor probabilidad de ser castigado?

ACTIVIDAD 4

A partir de la situación contesta en equipos.

¿A favor o en contra?
Analiza la información obtenida en la encuesta anterior, presentada en la tabla siguiente:

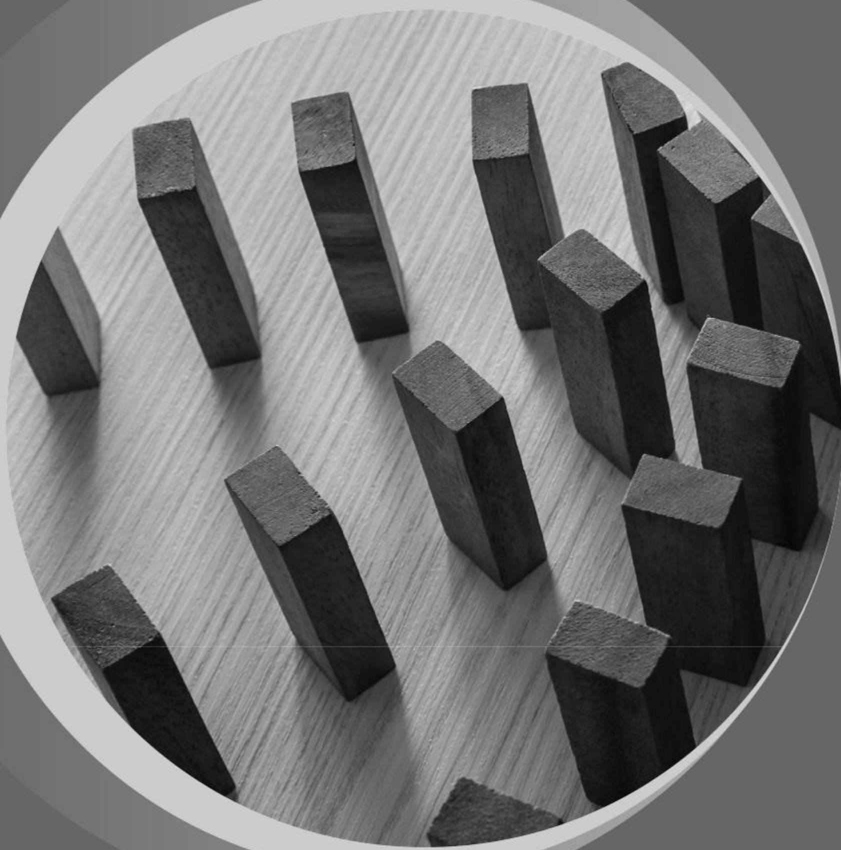
Semestre	A favor	En contra	N° de votantes
Segundo	300	250	550
Cuarto	280	200	480
Sexto	280	90	370
Total	860	540	1,400

Supón que un votante se selecciona al azar de los 1,400 alumnos votantes.

a) Encuentra la probabilidad de que un votante seleccionado esté "a favor".
b) Encuentra la probabilidad de que un votante seleccionado esté "en segundo".
c) Encuentra la probabilidad de que un votante seleccionado esté "en cuarto".
d) Encuentra la probabilidad de que un votante seleccionado esté "en cuarto o a favor".
e) Encuentra la probabilidad de que un votante seleccionado esté "en cuarto o en contra".

BLOQUE VII

SUCESIONES Y SERIES



Competencias genéricas

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 8 Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

BLOQUE VII SUCESIONES Y SERIES

Propósito del bloque

Resuelve modelos aritméticos, algebraicos y gráficos basándose en el reconocimiento de patrones para relacionar magnitudes constantes y variables de un fenómeno social o natural.

Interdisciplinariedad

- üü Química I
- üü Taller de Lectura y Redacción I
- üü Informática I
- üü Ética I

Ejes transversales

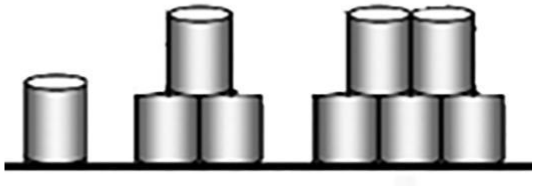
- üü Eje transversal social
- üü Eje transversal de la salud
- üü Eje transversal ambiental
- üü Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Explica regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones que se encuentran en su entorno.
- Resuelve colaborativamente e interpreta problemas reales o hipotéticos que presentan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos de su localidad..

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
¾¾ Búsqueda de patrones. ¾¾ Sucesiones y series. • Aritméticas. • Geométricas.	¾¾ Calcula valores de series aritméticas y geométricas. ¾¾ Deduce valores faltantes en sucesiones aritméticas y geométricas. ¾¾ Infiere patrones numéricos y gráficos de sucesiones aritméticas y geométricas.	¾¾ Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. ¾¾ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. ¾¾ Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones.

SITUACIÓN DIDÁCTICA



Ernesto trabaja en el almacén de una ferretería en la que acomodó latas de barniz de manera vertical de acuerdo al siguiente patrón: 1, 3, 5, 7... Si en total realizó 15 grupos de latas:

a. ¿Cuántas latas tiene este último grupo?

____

b. ¿Cuántas latas acomodó en total?

____

c. ¿Cuántas latas se agregan a cada grupo que se va formando?

____

d. ¿Podrías determinar una regla o ecuación que te permita calcular el número de latas para “n” cantidad de grupos?

____

SITUACIÓN DIDÁCTICA

En una florería se realizan arreglos con rosas de la siguiente manera: el primer arreglo con 4 rosas, el segundo con 6 rosas, el tercero con 8 y así sucesivamente.

a. Continuando con este patrón, ¿cuántas rosas tendrá el décimo arreglo?

____

b. ¿Puedes determinar la cantidad de rosas por arreglo a través de una fórmula?

____

c. Si a cada arreglo le asignaron un número consecutivo, ¿qué número de arreglo tiene 32 rosas?

____

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Arturo es un estudiante que ingresará al primer semestre de bachillerato, en sus vacaciones de verano su tío lo invita como su ayudante en su taller mecánico y le indica cuáles serán sus actividades:

- Proporcionar las herramientas que le indique.
- Salir y comprar lo que necesiten por cada día de trabajo (aceite, bujías, filtros, etc.).
- Guardar y ordenar las herramientas todos los días.

Su tío le dice que como él no tiene conocimientos acerca de mecánica, le estará pagando de la siguiente manera: $30 el primer día, $35 el segundo, $40 el tercero, y así sucesivamente hasta el final del mes que tiene 30 días.

a. ¿Qué operaciones matemáticas utilizarías para obtener el sueldo final de Arturo?

____

____

b. ¿Consideras que existe otro procedimiento matemático diferente al que propusiste para llegar al mismo resultado?

____

c. ¿Cuánto ganaría Arturo el día 30?

____

SUCESIONES Y SERIES ARITMÉTICAS

Una **sucesión numérica** es un conjunto ordenado de números. Toda sucesión tiene una propiedad o ley de formación de sus elementos. Ejemplo de sucesión:

2, 4, 6, 8,...es una sucesión infinita, el primer término es 2 como ley de formación los siguientes se obtienen sumando 2 en cada paso.

Para designar los términos de una sucesión cualquiera utilizaremos la misma letra con subíndices $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n}$ indicando que $\mathbf{a_1}$ es el primer término, $\mathbf{a_2}$ es el segundo, y $\mathbf{a_n}$ es el término de orden **n**. Donde **n** es cualquier número natural o término general de la sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión **2, 4, 6, 8,...**pondremos $a_1=$ 2, $a_2=$ 4, $a_3=$ 6, $a_4=$ 8,…, a_n =2n

Progresión aritmética. Es una progresión de números en la que la diferencia entre dos términos sucesivos, a excepción del primero, es constante y se llama **diferencia común.**

En lenguaje común, para encontrar un elemento es necesario sumar o restar el valor constante. La fórmula está dada por:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Dónde:

a_n = término cualquiera

n = número de términos que se pide encontrar

d = diferencia común entre término y término.

a_1 = primer término de la sucesión.

Ejemplos:

- El término general de la progresión aritmética 5,8,11,14...es: a_n=5+ 3(n- 1) = 5+3n-3= 3n+2
- El término general de una progresión aritmética en la que a1= 13yd= 2 es: a_n=13+ 2(n- 1) = 13+ 2n- 2=2n+ 11

En Matemáticas, una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Si nos referimos a una **serie aritmética**, es la suma de todos los términos pertenecientes a una progresión aritmética, la fórmula es:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ejercicios

1. Encuentra para cada secuencia aritmética los **tres** siguientes números.

a. 7, 10, 13, 16, 19, ______________________________

b. 2, 7, 12, 17, 22, ______________________________

c. $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, ______________________________

2. Dada la sucesión aritmética 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26… Resuelve los siguientes ejercicios **aplicando las fórmulas** de progresiones aritméticas.

a. Calcula el término 20 de la sucesión.

b. Calcula la suma de los primeros 10 números de la sucesión.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Es una sucesión de números donde el cociente entre dos términos sucesivos es constante y se llama razón común. Ésta se representa como **r.**

Los elementos de una serie geométrica prácticamente son los mismos que los de las progresiones aritméticas, **la progresión geométrica es diferente porque el valor entre términos sucesivos es una razón en vez de la diferencia común.** La fórmula para encontrar un término de la progresión es: $a_n = a_1 r^{n-1}$

Y para encontrar la **suma** de una serie geométrica es: $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$

Ejercicios

1. Encuentra para cada secuencia geométrica los **tres** siguientes números.

a. -2, -6, -18, ________________________________

b. $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{16}$, ______________________________

c. 4, - 8, 16, - 32, ____________________________

d. 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ______________________________

2. Dada la sucesión geométrica1, -2, 4, -8,… Resuelve los siguientes ejercicios **aplicando las fórmulas** de progresiones geométricas.

a. Calcula el término 8 de la sucesión.

b. Calcula la suma de los primeros 10 números de la sucesión.

3. Cada oscilación de un péndulo recorre $\frac{4}{5}$ de la oscilación anterior. El péndulo recorre 10 pies durante la primera oscilación.

a. ¿Cuál es la razón?

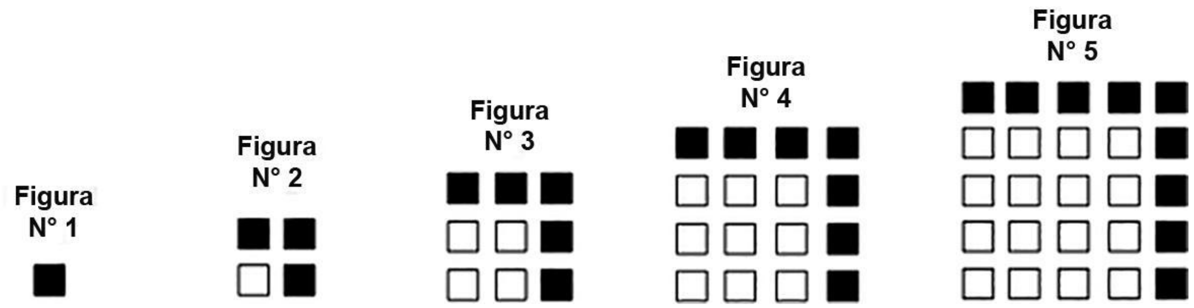
b. Determina la serie geométrica para los primeros 5 términos.

c. Aplicando la fórmula de la progresión geométrica calcula la distancia total que recorre el péndulo después de 10 oscilaciones.

Existen series de números o figuras que tienen una razón o diferencia variable en las cuales para determinar el patrón se deberá analizar el comportamiento de los primeros términos.

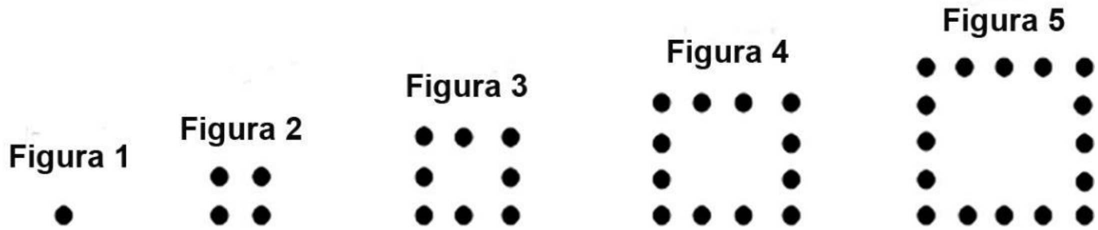
Por ejemplo:

1. Observa la secuencia de figuras formadas con cuadros blancos y cuadros negros. ¿Cuántos cuadros negros tiene la figura número 20?



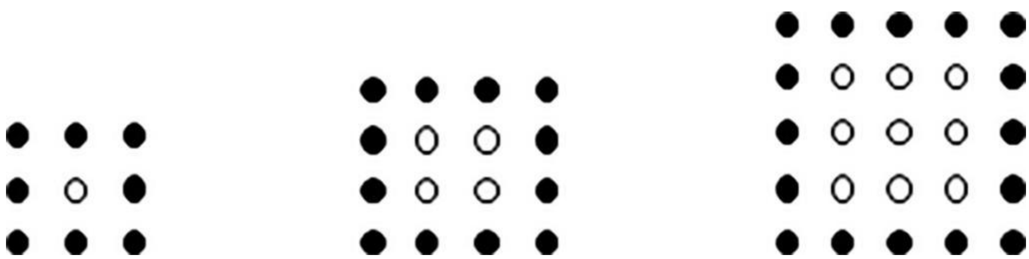
2. En la secuencia de figuras con forma de cuadrado de la figura, ¿cuántos círculos negros se necesitan para formar la figura 15?

___



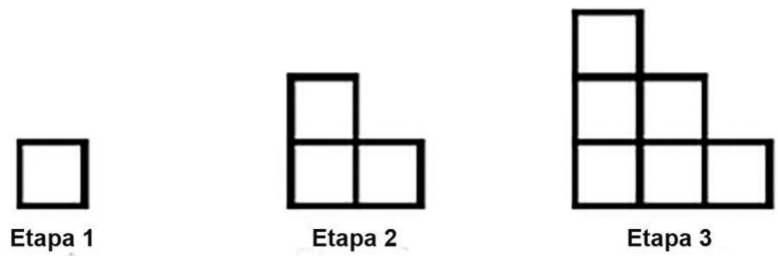
3. En la secuencia de figuras siguientes, formadas de círculos negros y círculos blancos, si se mantiene el patrón de formación, ¿cuántos círculos negros tiene la décima figura?

___



4. ¿Cuántos cuadritos tendrá la etapa 4?

___



5. Analiza el patrón de comportamiento de las siguientes series y determina el número faltante:

a. 3, 4, 6, 9, 13, ___, 24, …
b. 2, 4, 8, 14, 22, ___, 44, …
c. 1, 8, 27, ___, 125, …
d. 1, 2, 4, 7, ___, 16, 22, …
e. 1, –2, 3, – 4, 5, – 6, ___…

ACTIVIDAD 1

Lee cuidadosamente cada punto y contesta lo que se te pide.

1. Indica en los siguientes incisos si se trata de una progresión **aritmética o geométrica. Añade tres** términos más:

a) 3, 7, 11, 15, 19, ________________

b) 10, 7, 4, 1, –2, _________________

c) 200; 100; 50; 25; _______________

d) 3, 8, 13, 18, 23, ________________

e) 8; 4; 2; 1; 0,5; ___________________

f) 3, 6, 12, 24, 48, 96, ___________________

g) 1, 3, 9, 27, 81, ________________________

h) 5, –5, 5, –5, 5, –5, ____________________

i) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, ______________ j)

20, 13, 6, –1, – 8, ______________________

2. Una llave estuvo tirando agua durante varios minutos llenándose un recipiente de la siguiente manera:

minutos	1	2	3	4
litros	8	11	14	19

A los 15 minutos se dieron cuenta del desperfecto de la llave, afortunadamente, el agua acumulada en el recipiente será utilizada para la limpieza del centro de trabajo.

a. ¿Cuántos litros se derramaron a los 11 minutos?

____

b. ¿A los cuántos minutos se derramaron en el recipiente 29 litros?

____

c. ¿Cuál es la regla que permitirá calcular la cantidad de agua derramada a los 15 minutos?

____

d. ¿Cuántos litros se acumularon en total hasta el momento de detener la fuga?

____

3. Dada la sucesión aritmética 5, 9, 13, 17, __, __, 29… Resuelve los siguientes ejercicios **aplicando las fórmulas** de progresiones aritméticas.

a. ¿Cuál es la diferencia común entre término y término?

____

____

____

b. ¿Cuáles son los números faltantes?

____

c. Calcula el término 50 de la sucesión.

d. Calcula la suma de los primeros 15 números de la sucesión.

4. A una persona le ofrecen un empleo para los siguientes 10 fines de semana, de tal manera que su sueldo irá en aumento: 30 el primer fin de semana, 45 el segundo, 67.5 el tercero, 101.25 el cuarto, 151.87 el quinto…

A partir de la situación anterior, contesta las siguientes preguntas:

a. Con la sucesión geométrica anterior encontrar la razón común.

b. Encuentra la fórmula que te permita obtener los siguientes 5 pagos.

c. Utilizando la fórmula, obtener los pagos de los siguientes 5 fines de semana.

5. En un laboratorio, se estudia el comportamiento de reproducción de un virus “X”; en el cual tiene una tendencia de multiplicación que se encuentra expresado en la siguiente gráfica.

Días	1	2	3	4	5
No. bacterias	1	4	9	16	

A partir de la situación anterior, contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos infectados habrá en el día 5?

____

b. ¿Es el instrumento de infectados constante día a día?

____

____

c. ¿Cómo expresarías una ecuación que permita saber el número de bacterias para cualquier día?

Te sugerimos ver el video, para reforzar tus conocimientos sobre las sucesiones aritméticas
http://www.math2me.com/playlist/series-y-sucesiones/formula-para-suma-de-sucesiones-aritmeticas
http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-series.html

MIS NOTAS:

MIS NOTAS: