UDS

Mi Universidad

LIBRO

Nombre de la materia

Calculo

Bachillerato en Administración de recursos humanos

Cuarto cuatrimestre

Septiembre-Diciembre

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Mi Universidad"

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

INDICE

UNIDAD I

1.1.- Antescedentes históricos

El Cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. Una vez construído, la historia de la matemática ya no fue igual: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría, se colocaron en una nueva perspectiva teórica. Detrás de cualquier invento, descubrimiento o nueva teoría, existe, indudablemente, la evolución de ideas que hacen posible su nacimiento. Es muy interesante prestar atención en el bagaje de conocimientos que se acumula, desarrolla y evoluciona a través de los años para dar lugar, en algún momento en particular y a través de alguna persona en especial, al nacimiento de una nueva idea, de una nueva teoría, que seguramente se va a convertir en un descubrimiento importante para el estado actual de la ciencia y, por lo tanto merece el reconocimiento. El Cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Una larga lista de personas trabajaron con los métodos "infinitesimales" pero hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir el Cálculo que utilizamos en nuestros días.

Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Newton y Leibniz son considerados los inventores del cálculo pero representan un eslabón en una larga cadena iniciada muchos siglos antes. Fueron ellos quienes dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores inmediatos, Barrow y Fermat, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior. Estos desarrollos estuvieron elaborados a partir de visiones de hombres como Torricelli, Cavalieri, y Galileo; o Kepler, Valerio, y Stevin. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron, fueron también resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones previas decisivas fue la Geometría Analítica desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres más, el cálculo de Newton y Leibniz seguramente no existiría. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII.Los nuevos métodos enfatizaron la experiencia empírica y la descripción matemática de nuestra relación con la realidad. La revolución científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos V y XV. Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento estuvieron precedidos por las importantes transformaciones que se vivieron durante los siglos XV y XVI con el Renacimiento y la Reforma Protestante. El Cálculo Diferencial e Integral están en el corazón del tipo de conocimiento, cultura y de sociedad de la que, esencialmente, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX, se lo debemos al Cálculo infinitesimal y por eso se puede considerar como una de las joyas de la creación intelectual de la que el hombre puede sentirse orgulloso.

El siglo XVII y la disputa por la creación del cálculo

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

En parte estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes de este siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico-matemático inglés Issac Newton: la creación del cálculo. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales (dy/dx). No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos. Se puede decir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos. Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post-renacentista y duramente criticada. Dos siglos pasaron hasta que las desprolijidades en los fundamentos del cálculo infinitesimal se solucionaron, y hoy aquel cálculo, potencialmente enriquecido, se muestra como uno de los más profundos hallazgos del razonamiento humano.

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica desatada a raíz de la prioridad en el descubrimiento. Al principio la disputa se realizó en el marco de la cortesía pero al cabo de tres décadas comenzó a ser ofensiva hasta que en el siglo XVIII se convirtieron en mutuas acusaciones de plagio. La polémica se tornó cada vez mayor y finalmente se convirtió en una rivalidad entre los matemáticos británicos y los continentales.

La discusión siguió hasta mucho después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, afortunadamente, hoy ha perdido interés y la posteridad ha distribuido equitativamente las glorias. Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas. Los nuevos logros fueron sometidos a severas críticas, la justificación y las explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados no se dieron hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, más preocupados por la presentación final de los métodos que por su utilización en la resolución de problemas concretos.

El siglo XVIII

Durante buena parte del siglo los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés Monge la geometría descriptiva. Lagrange, también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo Laplace escribió *Teoría analítica de las probabilidades* (1812) y el clásico *Mecánica celeste* (1799-1825), que le valió el sobrenombre de "el Newton francés".

Sin embargo el gran matemático del siglo fue el suizo Euler, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. El éxito de Euler y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de Newton se basó en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de Lagrange era completamente algebraico y basado en el concepto de las series infinitas. Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

A los matemáticos de fines del siglo el horizonte matemático les parecía obstruido. Se había llegado al estudio de cuestiones muy complicadas a las que nos se les conocía o veía un alcance claro. Los sabios sentían la necesidad de estudiar conceptos nuevos y hallar nuevos procedimientos.

El siglo XIX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange y el matemático francés Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Dirichlet quien propuso su definición en los términos actuales. En 1821, un matemático francés, Cauchy, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de "función continua". Basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales. Los matemáticos alemanes Cantor y Weierstrass también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo.

Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, se llevaron a cabo importantes avances en esta materia. Gauss, uno de los más importantes matemáticos de la historia, dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de Cauchy, Weierstrass y el matemático alemán Riemann. Otro importante avance fue el estudio de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas, herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas, hecho por Fourier. Cantor estudió los conjuntos infinitos y una aritmética de números infinitos. La teoría de Cantor fue considerada demasiado abstracta y criticada. Encontramos aquí un espíritu crítico en la elaboración de estas nociones tan ricas. Esto constituye un punto de vista muy diferente del que animaba a los matemáticos del siglo anterior. Ya no se trata de construir expresiones ni forjar nuevos métodos de cálculo, sino de analizar conceptos considerados hasta entonces intuitivos.

Gauss desarrolló la geometría no euclideana pero tuvo miedo de la controversia que pudiera causar su publicación. También en este siglo se pasa del estudio simple de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos.

Los fundamentos de la matemática fueron completamente transformados durante el siglo XIX, sobre todo por el matemático inglés Boole en su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854).

[Volver a Índice]

Siglo XX y nuestros días

Es importante el aporte realizado por Lebesgue referido a la integración y a la teoría de la medida y las modificaciones y generalizaciones realizadas por matemáticos que lo sucedieron.

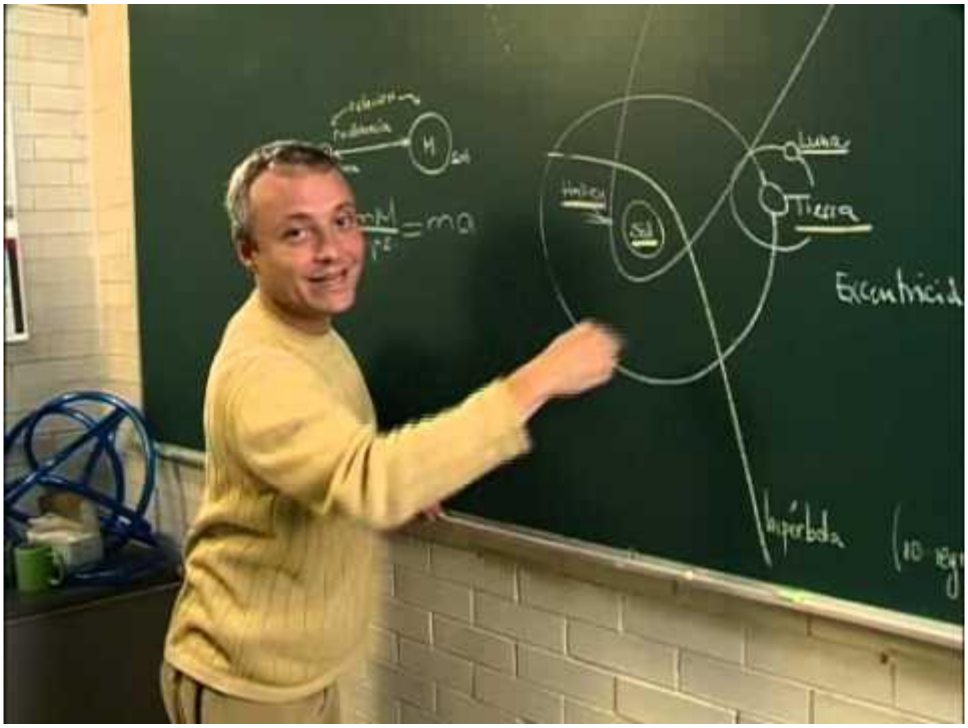
En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán David Hilbert, quien contribuyó de forma sustancial en casi todas las ramas de la matemática retomó veintitrés problemas matemáticos que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que recién comenzaba. Estos problemas fueron el estímulo de una gran parte de los trabajos matemáticos del siglo.

El avance originado por la invención del ordenador o computadora digital programable dio un gran impulso a ciertas ramas de la matemática, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se convirtió en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente.

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros siguen sin solución. Al mismo tiempo aparecen nuevos y estimulantes problemas y aún la matemática más abstractas encuentra aplicación.

¿Que es calculo?

En general el término cálculo (del latín calculus = piedra) hace referencia al resultado correspondiente a la acción de calcular. Calcular, por su parte, consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.



CALCULO DIFERENCIAL

El cálculo diferencial es una parte del análisis matemático que consiste en el estudio de cómo cambian las funciones cuando sus variables cambian. El principal objeto de estudio en el cálculo diferencial es la derivada. Una noción estrechamente relacionada es la de diferencial de una función.

El estudio del cambio de una función es de especial interés para el cálculo diferencial, en concreto el caso en el que el cambio de las variables es infinitesimal, esto es, cuando dicho cambio tiende a cero (se hace tan pequeño como se desee). Y es que el cálculo diferencial se apoya constantemente en el concepto básico del límite. El paso al límite es la principal herramienta que permite desarrollar la teoría del cálculo diferencial y la que lo diferencia claramente del álgebra.

Desde el punto de vista matemático de las funciones y la geometría, la derivada de una función en un cierto punto es una medida de la tasa en la cual una función cambia conforme un argumento se modifica. Esto es, una derivada involucra, en términos matemáticos, una tasa de cambio. Una derivada es el cálculo de las pendientes instantáneas de en cada punto . Esto se corresponde a las pendientes de las tangentes de la gráfica de dicha función en sus puntos (una tangente por punto); Las derivadas pueden ser utilizadas para conocer la concavidad de una función, sus intervalos de crecimiento, sus máximos y mínimos

1.2 .- FUNCIONES

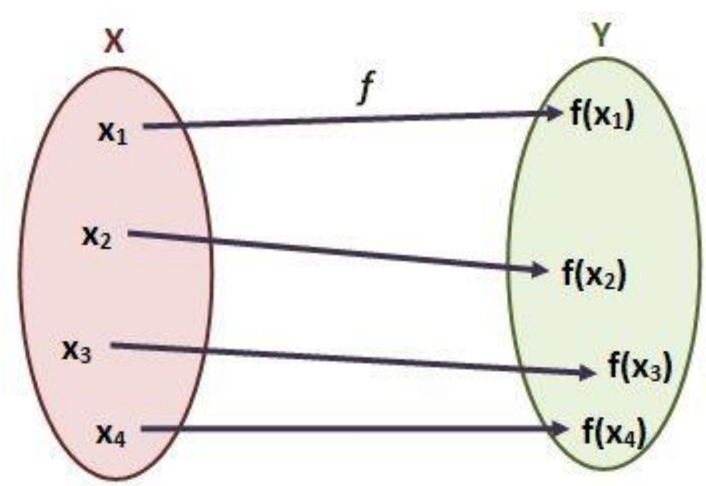
ANUNCIOS

Las funciones son reglas que relacionan los elementos de un conjunto con los elementos de un segundo conjunto.

Cuando una magnitud depende de otra, se dice que está en función de ésta.

Una función *f* es una relación que asigna a los elementos de un primer conjunto (conjunto inicial *X*) un elemento de un segundo conjunto (conjunto final *Y*). A cada elemento de *X* le corresponde, un y solo un elemento de *Y*.

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$



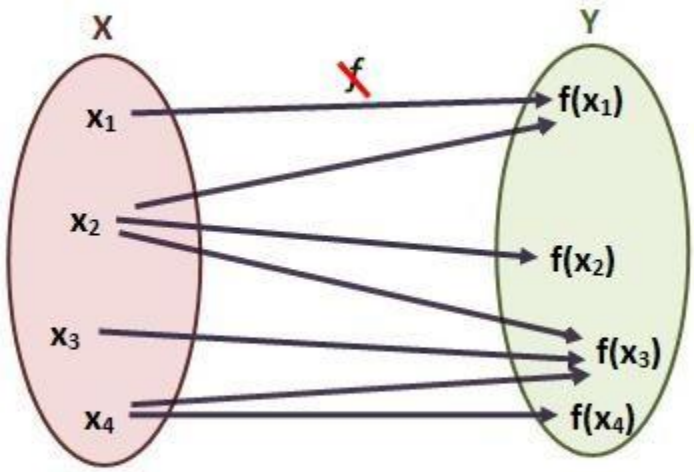
El elemento *x* del primer conjunto es la variable independiente. Es un valor que se fija previamente.

La letra *y* es la variable dependiente y corresponde a los elementos del conjunto final. Ésta variable depende del valor de la variable independiente *x*.

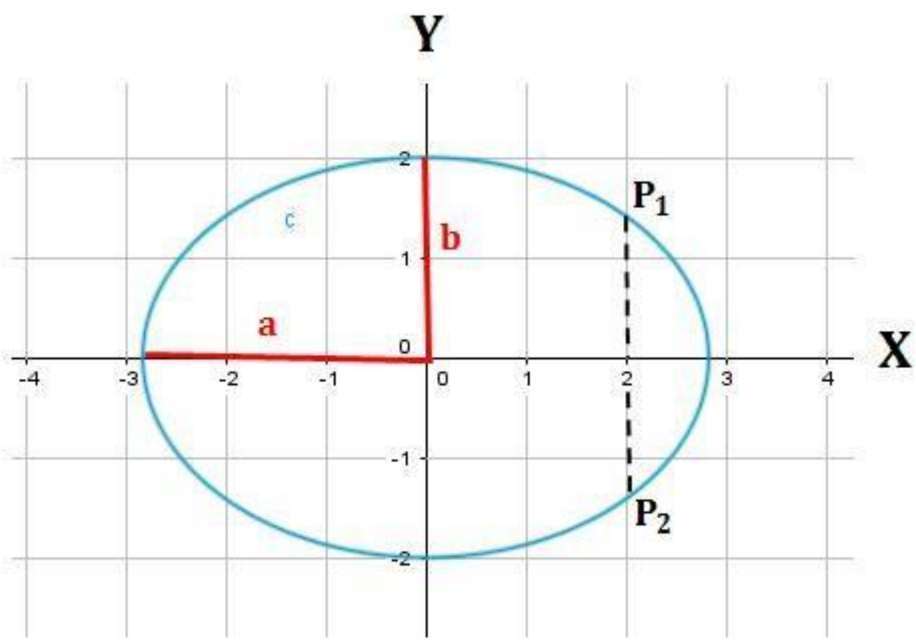
A *f*(*x*) se le denomina imagen de *x*, mientras que a *x* se le llama antiimagen de *f*(*x*).

¿Qué no es una función?

Si a un valor de la variable x le corresponde más de un valor de y, entonces esa relación no es una función.



Un ejemplo de lo que no es una función es cuando asignamos al conjunto de entrada las estaturas y al de salida, los alumnos un colegio. Esta relación no sería una función, pues podrían haber casos de valores de estaturas que tuviesen varios alumnos.



Otro ejemplo de lo que no sería una función: la ecuación de la elipse (para simplificar, centrada en el origen O).

Y sabemos que la ecuación de la elipse centrada en O es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por la imagen y por la ecuación, podemos ver que a valores concretos de *x* les corresponden dos valores de *y*. Por lo tanto, esta ecuación tampoco se corresponde con una función.

Como se ha dicho que la condición de una función es que a cada elemento del conjunto inicial *X* le corresponda, un y solo un elemento del conjunto final *Y*, de eso se deduce que:

- Toda relación no tiene porqué ser necesariamente una función, aunque toda función sí que es una relación.
- Por lo tanto, una ecuación (que es una relación) no tiene que ser necesariamente una función.

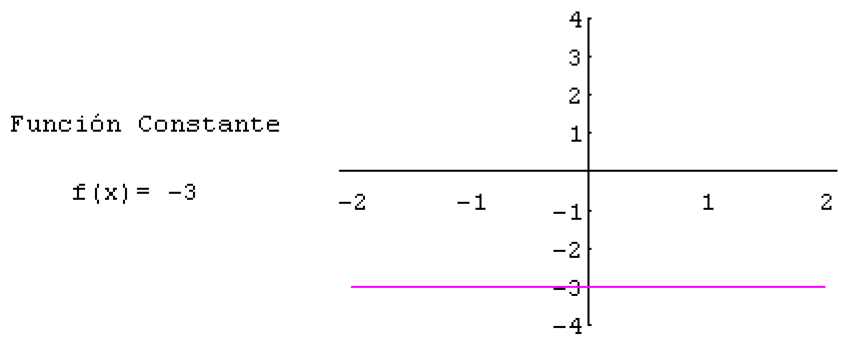
1.3 .- Clasificación de los tipos de funciones

La gráfica de una función

> La gráfica de una función es el conjunto de puntos en el plano de la forma *(x,y)* en donde *x* está en el dominio de la función y además *y=f(x)*.

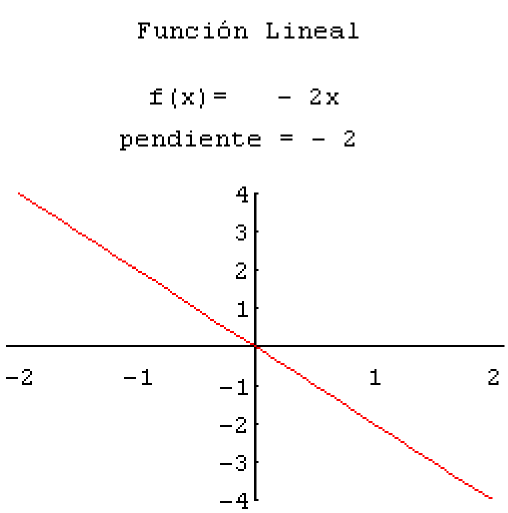
A continuación discutiremos algunos tipos importantes de funciones y observaremos sus gráficas. Pon atención a la forma que tienen las gráficas de estas funciones. Todos los ejemplos son de funciones algebráicas, discutiremos otros tipos de funciones, como las funciones trigonométricas, más adelante. Por lo pronto, observa las siguientes funciones y sus gráficas.

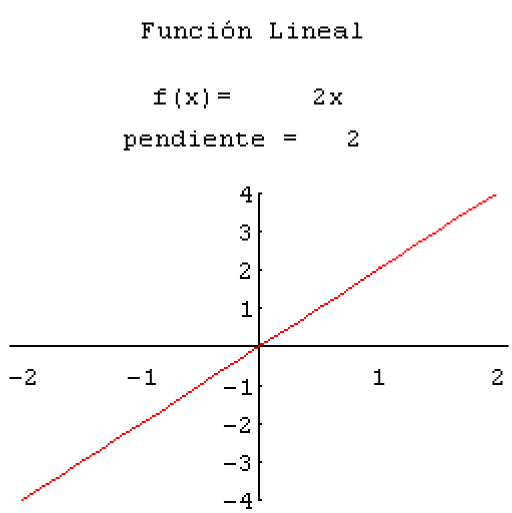
Función constante: *f(x)=k*, donde *k* es alguna constante

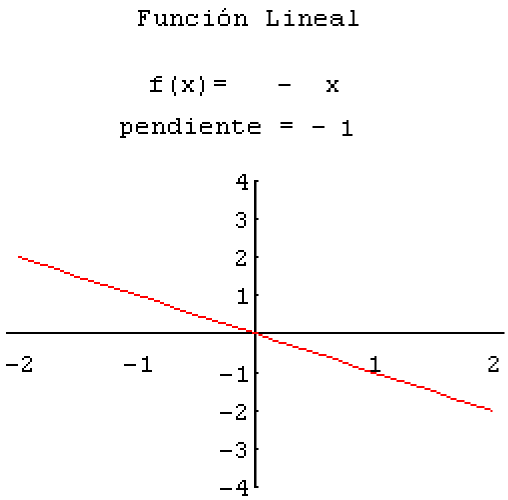


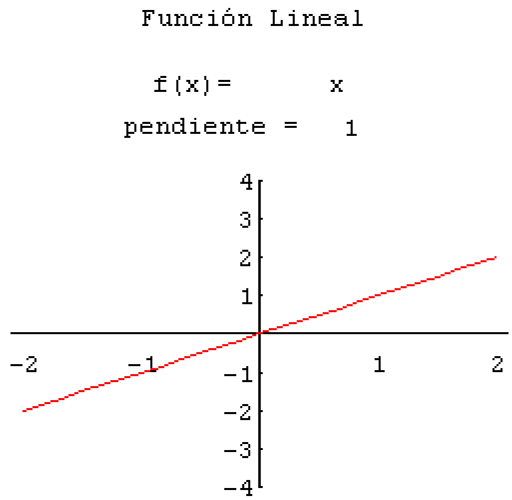
¿Qué tienen en común todas las gráficas? ¿En qué difieren?

Función lineal: *f(x)* = *ax* + *b*









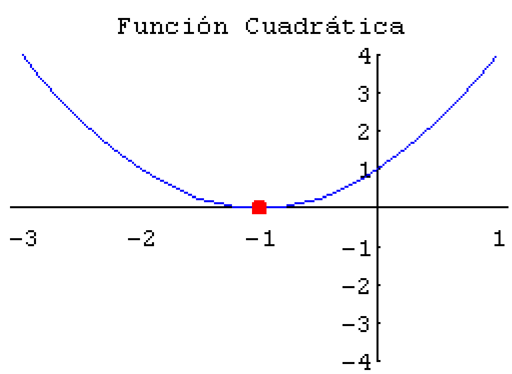
¿Qué tienen en común todas las gráficas? ¿En qué difieren?

Función cuadrática: $f(x)= ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$

El punto rojo se llama vértice de la parábola.

¿Cuáles son sus coordenadas?

¿Cómo se relacionan las coordenadas del vértice con los números en la forma $f(x)= a(x-x_0)^2 + y_0$?

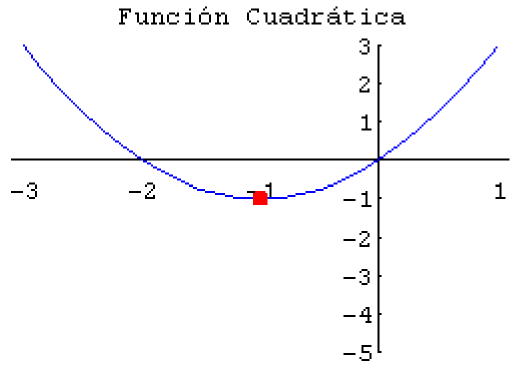


$f(x)= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

El punto rojo se llama vértice de la parábola.

¿Cuáles son sus coordenadas?

¿Cómo se relacionan las coordenadas del vértice con los números en la forma $f(x)= a(x-x_0)^2 + y_0$?

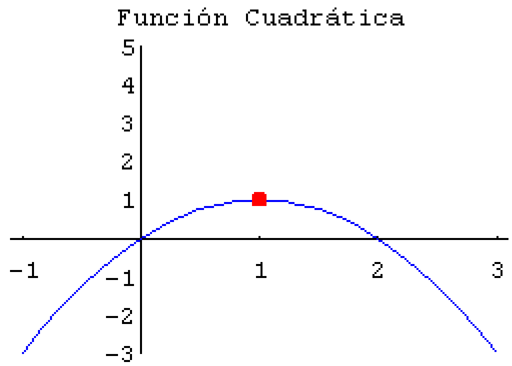


$f(x)= 2\ x^2 + x = (x + 1)^2 - 1$

El punto rojo se llama vértice de la parábola.

¿Cuáles son sus coordenadas?

¿Cómo se relacionan las coordenadas del vértice con los números en la forma $f(x)= a(x-x_0)^2 + y_0$?

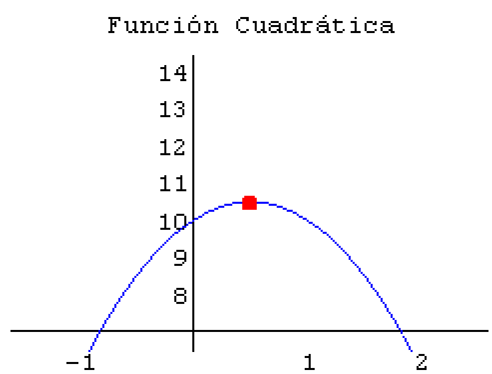


$f(x)= 2\ x - x^2\ = 1 - (x - 1)^2$

El punto rojo se llama vértice de la parábola.

¿Cuáles son sus coordenadas?

¿Cómo se relacionan las coordenadas del vértice con los números en la forma $f(x)= a(x-x_0)^2 + y_0$?



$f(x)= 10 + 2\ x - 2\ x^2$

21 *1*

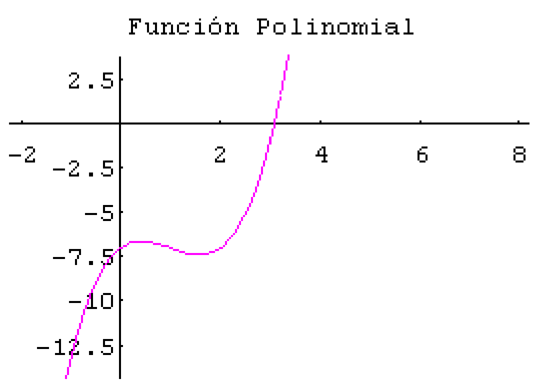
¿Qué significancia tienen los números a, x_0, y_0 para la gráfica de la función $f(x)= a(x-x_0)^2 + y_0$?

= - 2 [- ( ) + x^2]

2 2

Función polinomial

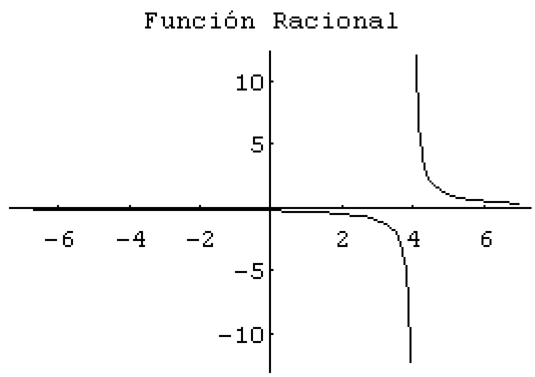
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$



Función racional

Una función racional es un cociente de dos polinomios, $f(x) = P(x) / Q(x)$

$$f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$$



¿Qué sucede en los valores de x en los que el denominador es igual a cero?

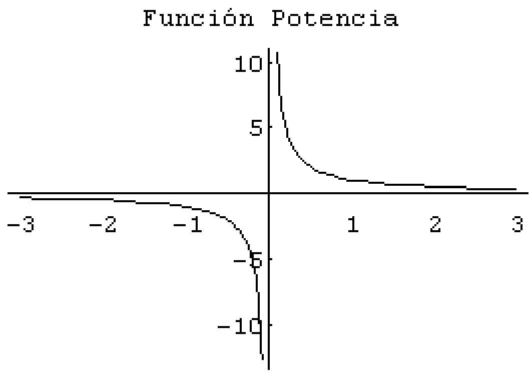
Función potencia: $f(x)= k\, x^n$

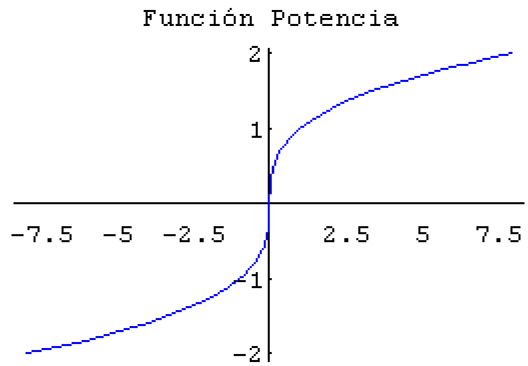
En donde k es cualquier constante real y n es un número real.

Por lo pronto nos restringiremos a exponentes racionales. Funciones como x^{Pi} serán discutidas más tarde. El dominio de una función potencia depende del exponente n.

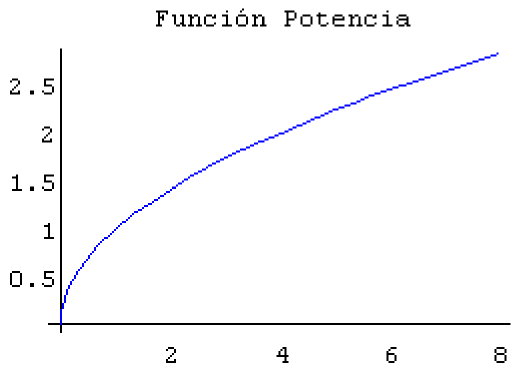
$f(x)= x^{-1}$

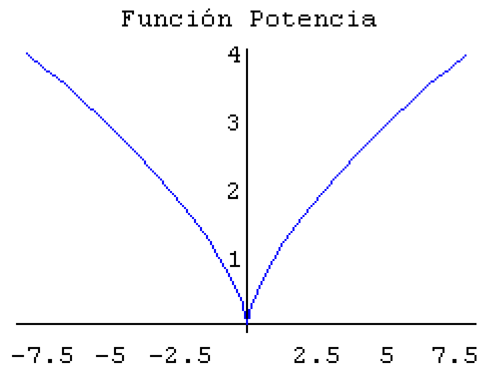
$f(x)= x^{1/3}$





$f(x)= x^{1/2}$ $f(x)= x^{2/3}$



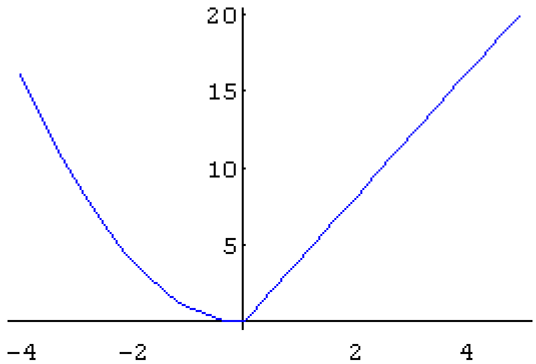


Función definida por secciones

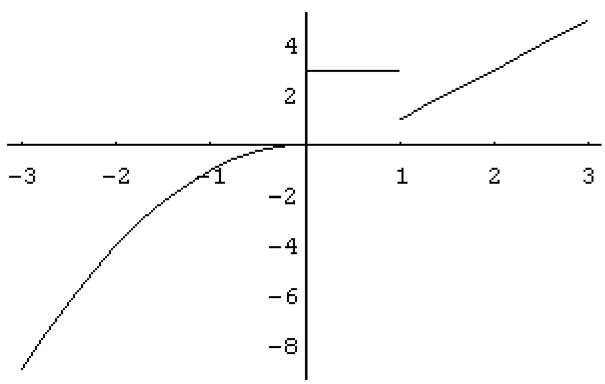
No es necesario que una función esté definida por una sola fórmula. La regla de correspondencia puede depender de qué parte del dominio proviene la variable independiente.

En las siguientes dos gráficas veremos dos ejemplos de funciones definidas por secciones.

$$f(x)=\{ \begin{array}{l} x^2 , \\ 4\,x \text{ ,si } 0 <= x <= 5 \end{array}$$



$$\begin{array}{lll} & -x^2 , & \text{si } x < 0 \\ f(x)=\{ & 3 , & \text{si } 0 <= x < 1 \\ & 2\,x - 1 \text{ ,} & \text{si } x >= 1 \end{array}$$



FUNCIONES: DOMINIO, RANGO Y GRAFICA

Dominio, Codominio y Rango de una función

Dominio

El dominio de una función son todos los valores reales que la variable X puede tomar y la gráfica queda bien definida, es decir que no tiene hoyos o rupturas.

Se pueden expresar esos valores del dominio con notación de conjuntos ó intervalos.

Codominio

El codominio son todos los números reales que conforman el conjunto de los valores que puede tomar en determinado momento la variable "y" (los valores que podrían salir).

Rango

Rango de una función: Es el conjunto formado por las imágenes.

Son los valores que toma la función "Y" (variable dependiente), por eso se denomina "f(x)", su valor depende del valor que le demos a "X".

La manera más efectiva para determinar el Rango consiste en graficar la función y ver los valores que toma "Y" de abajo hacia arriba. O sea son los valores que tiene la variable "y" para determinados valores de x, en esa función (los valores que realmente salen).

Así que el rango es un subconjunto del codominio.

Ejemplo: puedes definir una función $f(x)=2x$ con dominio y codominio los enteros (porque tú lo eliges así).

Pero si lo piensas, verás que el rango (los valores que salen de verdad) son sólo los enteros pares.

Así que el codominio son los enteros (lo has elegido tú) pero el rango son los enteros pares.

Ejemplo. En una escuela hay 10 salones numerados del 1 al 10. Mediante una función le asignamos un salón a cada niño. A Juan le corresponde el Salón 1 y a Pedro el Salón 7. Esa es la función.

El dominio es el conjunto formado por Juan y Pedro: el codominio son los 10 salones. El Rango son sólo los salones que tienen correspondientes; esto es, el Rango es el conjunto formado por los salones 1 y 7.

CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES

Vamos a calcular de forma numérica y gráfica el dominio y rango de varias funciones para fijar los conceptos anteriores.

FUNCIONES POLINOMICAS

Las funciones polinómicas, tienen como dominio todo el conjunto de los números reales: R, puesto que a partir de una expresión polinómica, se puede sustituir el valor de "X" por cualquier número real que hayamos elegido y se puede calcular sin ningún problema el número real imagen "Y".

Son funciones polinómicas : La recta (función lineal o afín), la parábola (función de segundo grado) y los polinomios de grado superior.

FUNCION LINEAL

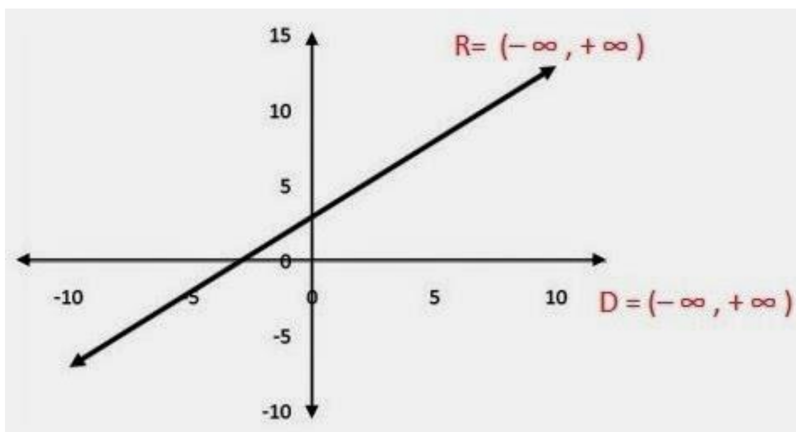
EJERCICIO 1: Determinar Dominio y Rango de f(x) = X + 3

Lo primero que hacemos es tabular valores de los pares ordenados x,y para representarlos en el plano cartesiano:

y=x+3

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Ahora ubicamos cada pareja en el plano y unimos los punots para obtener la gráfica de nuestra función.



Como podemos ver, la gráfica es una línea recta. Este tipo de función se conoce como lineal y representa a los polinomios de grado 1.

Dominio de la función

Como es una función lineal el dominio será todo el conjunto de los números reales (puede tomar cualquier valor negativo o positivo sin restricción alguna).

Dom f(x) = R o también puede expresarse Dom f(x) = (– ∞ , + ∞)

Rango de la función

El Rango será también todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "Y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

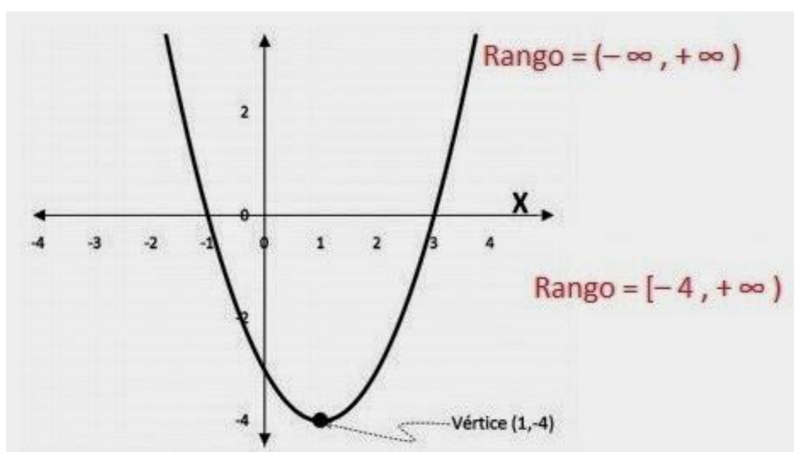
Rango = (– ∞ , + ∞)

FUNCION CUADRATICA

EJERCICIO 2 : Determinar Dominio y Rango de f(x) = x2 - 2x – 3 Tabulamos valores de los pares ordenados x,y para representarlos en el plano cartesiano:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

Ahora ubicamos cada pareja en el plano y unimos los puntos para obtener la gráfica de nuestra función.



Como podemos ver, la gráfica es una parábola. Este tipo de función se conoce como cuadrática y representa a los polinomios de grado 2.

Dominio de la función
Como es una función polinómica de segundo grado el dominio será todo el conjunto de los números reales (siempre tomará valores tanto negativos como positivos en el eje x).

Dom f(x) = R

Rango de la función

Note cómo la gráfica empieza a tomar valores en el eje y sólo a partir de un punto determinado. ¨Por lo tanto, en este caso, el rango ya no serán todos los reales.

Para hallar el Rango, debemos determinar a partir de qué punto la función empieza a tomar valores en el eje y.Esto ocurre en el vértice de la función.

El vértice de una función cuadrática se define como (-b /2a, f(-b, 2a)) reemplazando valores tenemos que -b /2a = (-(-2) / 2(1)) = 1. Este es el valor de x en el vértice.

Ahora reemplazamos este valor de x en la función original para conocer el valor de y en el vértice:
f(1) = 12 - 2(1) – 3 = 1- 2 - 3 = - 4

Por lo tanto, el vértice está en el punto (1, - 4).

El eje "Y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) a partir de -4.
Rango = [– 4 , + ∞)

* El paréntesis cerrado [o] significa que el valor está incluido en el intervalo.

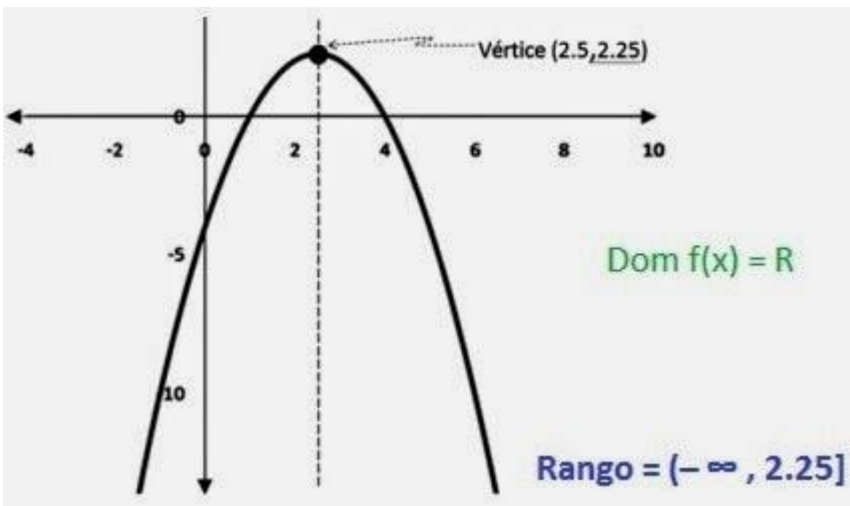
* El paréntesis abierto (o]) significa que el valor no está incluido en el intervalo.

EJERCICIO 3: Determinar Dominio y Rango de f(x) = – x2 + 5x - 4

– x2 + 5x - 4

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3	4	5	6
y	-40	-28	-18	-10	-4	0	2	2,25	2	0	-4	-10

Ahora ubicamos cada pareja en el plano y unimos los puntos para obtener la gráfica de nuestra función.



Dominio de la función

Todos los reales.

Dom f(x) = R

Rango de la función

Ahora hallemos el Rango, entonces, determinemos en qué punto se encuentra el vértice de la función.

El vértice está en (-b /2a, f(-b, 2a)) reemplanzando valores tenemos que -b /2a =(- 5 / 2(-1)) = 5/2 (o 2,5). Este es el valor de x en el vértice.

Ahora reemplazamos este valor de x en la función original para conocer el valor de y en el vértice:

f(5/2) = -(5/2)2 + 5(5/2) – 4 = -25/4 + 25/2 - 4 = 9/4 = 2,25

Por lo tanto, el vértice está en el punto (2.5; 2,25).

El eje "Y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) desde menos infinito y llega hasta el vértice de la parábola (hasta Y = 2,25).

Rango = [– ∞ , 2.25)

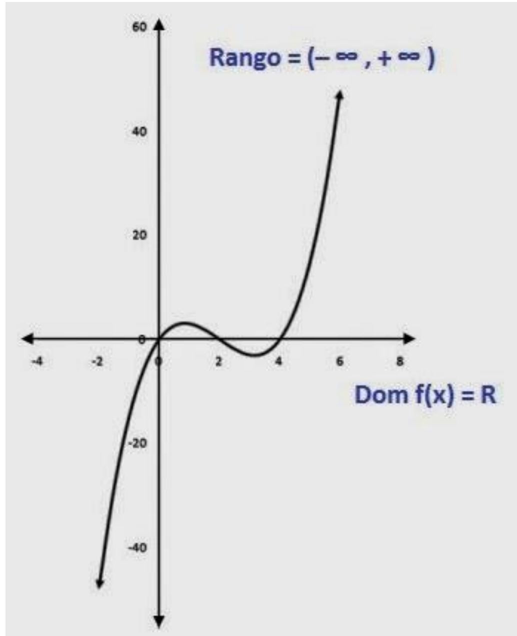
FUNCION CUBICA

EJERCICIO 4 : Determinar Dominio y Rango de f(x) = x3 – 6x2 + 8x

x3 – 6x2 + 8x

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-192	-105	-48	-15	0	3	0	-3	0

hora ubicamos cada pareja en el plano y unimos los puntos para obtener la gráfica de nuestra función.



Como es una función polinómica de tercer grado el dominio será todo el conjunto de los números reales.

Dom f(x) = R

El Rango será también todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje “Y” de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

Rango = [– ∞ , ∞)

FUNCIONES RACIONALES

Para calcular el dominio de este tipo de funciones el primer paso es igualar el denominador a cero y resolver esa ecuación, una vez resuelta esa ecuación el dominio estará formado por todos los reales excepto las soluciones de la ecuación.

Dom f(x) = R -{los valores de x que me anulan el denominador (si los hay)}

EJERCICIO 5 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{(x+2)}{(x-3)}$$

En este tipo de funciones, lo primero que hacemos es establecer si existen valores para los cuales la función no está definida. Recordemos que la división por cero no está definida en los reales. Para ello, igualamos el denominador a cero:

X – 3 = 0 , luego X = 3.

esto significa que para x=3 la función no está definida.

Por tanto, el dominio estará formado por todos los reales excepto para x=3. Es decir, habrá una asintota vertical en x=3 y además será punteada, porque la función se acerca a este valor pero nunca lo toca.

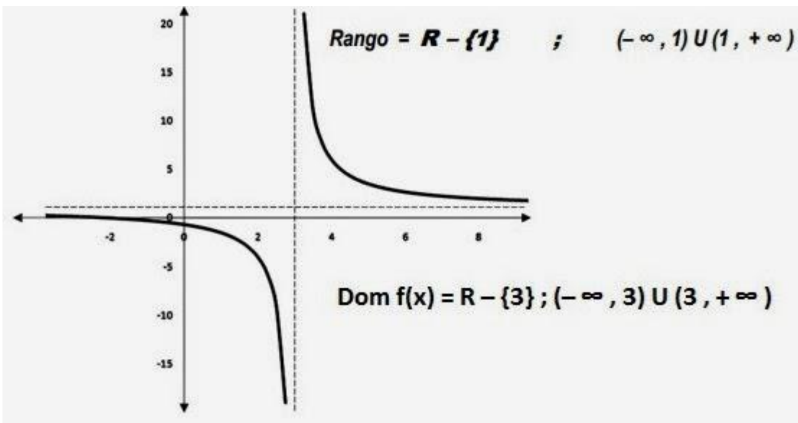
Dom f(x) = R – {3} ; También podemos expresar el Dominio como

Dom f(x) = (– ∞ , 3) U (3 , + ∞)

Ahora tabulamos valores de los pares ordenados x,y para representarlos en el plano cartesiano y ver qué forma tiene nuestra gráfica

(x + 2) / (x+3)

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,143	1,167	1,2	1,25	1,333	1,5	2	#¡DIV/0!	0	0,5	0,667	0,75	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	0,909	0,917	0,923



Para calcular el valor del Rango, vamos ahora a despejar a X y averiguar si existen valores de "y" para los cuales no esté definida la función. Para ello vamos a reemplazar f(x) por y, para simplificar las operaciones:

$$y = \frac{(x+2)}{(x-3)}$$

$$y(x-3) = (x+2)$$

$$xy - 3y = x + 2$$

$$xy - x = 3y + 2$$

$$x(y-1) = 3y + 2$$

$$x = \frac{3y+2}{(y-1)}$$

Para que se cumpla la regla de que el denominador sea diferente de cero, hacemos que y - 1=0 , de donde tenemos que Y =1. Esto significa que habrá una asíntota horizontal (punteada) en y=1, lo cual significa que la función se acercará cada vez más a este valor pero nunca lo tocará.
Esto podemos comprobarlo fácilmente en la gráfica.

Luego, la función estará definida en todos los valores de Y menos en “y = 1”.

Rango = R – {1} ; (– ∞ , 1) U (1 , + ∞)

EJERCICIO 6 : Determinar Dominio y Rango de

$$y = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

Lo primero que tenemos que determinar los valores para los cuales no está definida la función. para ello igualamos el denominador a cero :

X – 1 = 0 ; X = 1

Por tanto, el dominio estará formado por todos los reales excepto para x=1. Es decir, habrá una asíntota vertical en x=3 y además será punteada, porque la función se acerca a este valor pero nunca lo toca.

El dominio estará formado por todos los reales excepto en x=1.

Dom f(x) = R – {1} ; (– ∞ , 1) U (1 , + ∞)

Antes de tabular valores, lo primero que tenemos que mirar es si se puede simplificar o no la función.

En el numerador tenemos una diferencia de cuadrados perfectos que podemos expresar como (x -1) (x +1), la cual podemos simplificar. Así:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

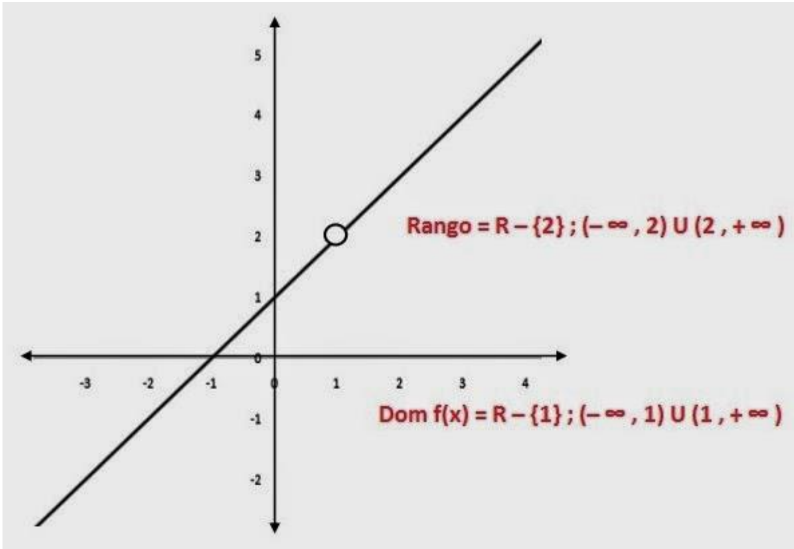
$$y = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

Tenemos finalmente que y = x+1 (esto significa que nuestra gráfica será una recta discontinua en x = 1).

Ahora tabulamos valores de los pares ordenados x,y para representarlos en el plano cartesiano y ver qué forma tiene nuestra gráfica

$$y = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-4	-3	-2	-1	0	1	#¡DIV/0!	3	4	5	6



Cálculo del rango

Esta gráfica presenta un “hueco” en “Y = 2”, Luego la función estará definida en todos los valores de Y excepto en “Y = 2”.

Rango = R – {2} ; (– ∞ , 2) U (2 , + ∞)

EJERCICIO 7. Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$$

Como sabemos, el denominador no puede ser igual a cero, porque la función no tendría solución, luego lo primero que haremos es Igualar a cero el denominador para establecer que valores arrojan como valor cero:

2x2 – 8 = 0

2x2 = 8

x2 = 8/2

x2 = 4

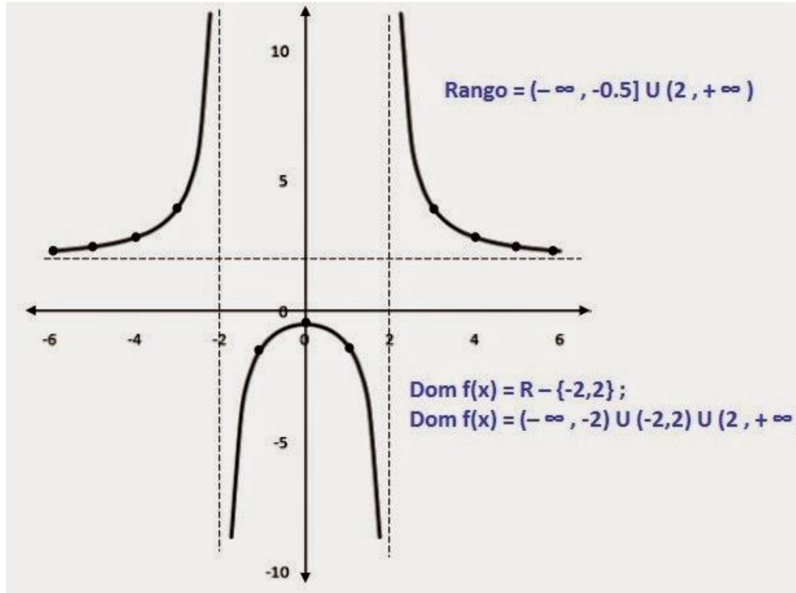
de donde obtenemos que las raices son : X = -2 y X = 2. Estos son los valores para los cuales no está definido el denominador.

Entonces, El dominio estará formado por todos los reales excepto los números “2” y “ -2”
Dom f(x) = R – {-2,2} ; (– ∞ , -2) U (-2,2) U (2 , + ∞)

Tabulamos algunos valores para graficar nuestra función.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2,222	2,313	2,47619	2,833	4	#¡DIV/0!	-1,3333	-0,5	-1,33	#¡DIV/0!	4	2,833	2,476	2,313	2,222



Ahora vamos a establecer si hay valores de y para los cuales la función no esté definida. Para ello despejamos la variable x:

$$y = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$$

$$y(2x^2 - 8) = 4x^2 + 4$$

$$2x^2y - 8y = 4x^2 + 4$$

$$2x^2y - 4x^2 = 4 + 8y$$

$$2x^2(y - 2) = 4 + 8y$$

$$x^2 = \frac{2(2 + 4y)}{2(y - 2)}$$

$$x^2 = \frac{(2 + 4y)}{(y - 2)}$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

La gráfica presenta una asíntota horizontal en “Y = 2”, pero además podemos notar que la curva que está debajo del eje “X” corta al eje “Y” en el punto (0,-0.5). Luego el Rango será:

Rango = (– ∞ , -0.5] U (2 , + ∞)

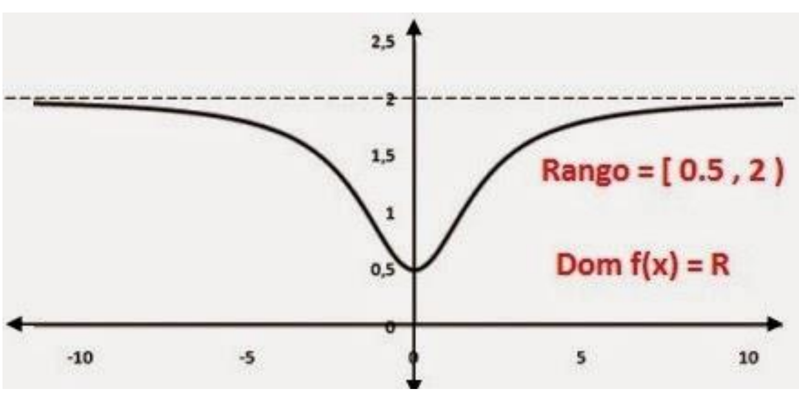
Verifique que los valores de “Y” entre “Y = -0.5” y “Y = 2” no están señalados en la gráfica, por lo tanto no pertenecen al Rango.

EJERCICIO 8. Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 + 8}$$

Igualamos a cero el denominador. Como podemos ver, no existe ningún valor para el cual x sea igual a cero, es decir x puede tomar cualquier valor en R. Por lo tanto, el Dominio estará representado por todos los números reales.
Dom f(x) = R

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1,7931	1,7	1,5385	1,25	0,8	0,5	0,8	1,25	1,5385	1,7	1,7931



Ahora vamos a establecer si hay valores de y para los cuales la función no esté definida. Para ello despejamos la variable x:

$$y = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 + 8}$$

$$y(2x^2 + 8) = 4x^2 + 4$$

$$2x^2y + 8y = 4x^2 + 4$$

$$2x^2y - 4x^2 = 4 - 8y$$

$$2x^2(y - 2) = 4 - 8y$$

$$x^2 = \frac{2(2 - 4y)}{2(y - 2)}$$

$$x^2 = \frac{(2 + 4y)}{(y - 2)}$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

La gráfica presenta una asíntota horizontal en “Y = 2”, pero además podemos notar que la curva corta al eje “Y” en el punto (0,0.5). Luego el Rango será :

Rango = [0.5 , 2)

Funciones irracionales son las que vienen expresadas a través de un radical que lleve en su radicando la variable independiente.

Si el radical tiene índice impar, entonces el dominio será todo el conjunto R de los números reales porque al elegir cualquier valor de X siempre vamos a poder calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando.

Pero si el radical tiene índice par, para los valores de X que hagan el radicando negativo no existirá la raíz y por tanto no tendrán imagen.
Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

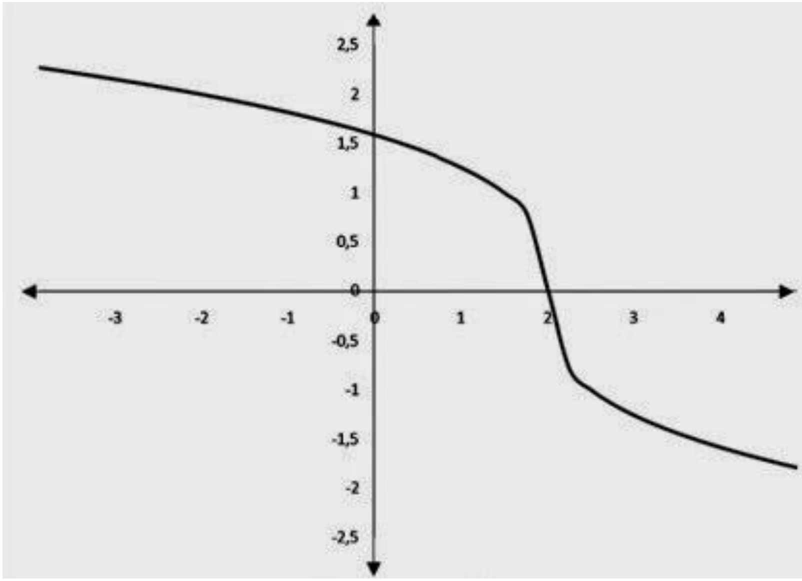
EJERCICIO 9. Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x+4}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x+4}$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2,41	2,289	2,15443	2	1,817	1,5874	1,25992	0	-1,26	-1,5874	-1,82

Raíz de índice impar :
Dom f(x) = R



Rango = R

EJERCICIO 10. Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

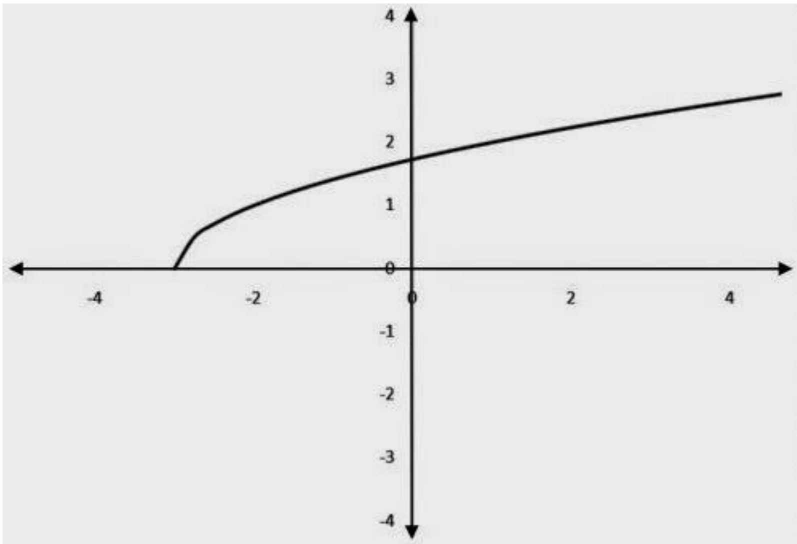
Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

X + 3 ≥ 0 ; X ≥ – 3

Dom f(x) = [– 3 , + ∞)

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	#¡NUM!	#¡NUM!	0	1	1,414	1,73205	2	2,23607	2,449	2,64575	2,828



Cálculo del rángo

Al observar la gráfica, vemos que esta toma valores en el eje y a partir de 0 y crece indefinidamente. Por lo tanto:

Rango = [0 , + ∞)

EJERCICIO 11. Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \sqrt{-2x+4}$$

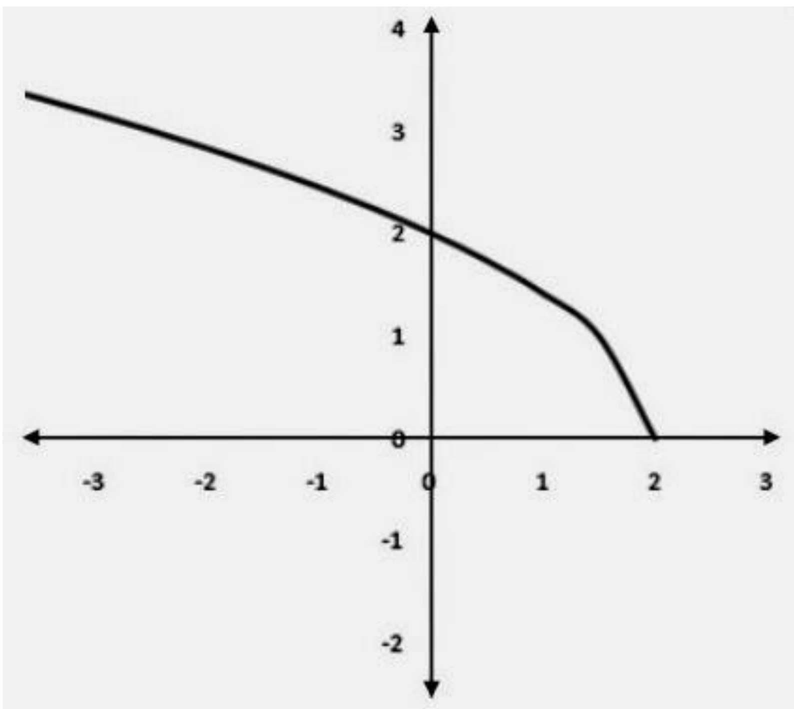
Tomamos lo que hay dentro de la raíz y hacemos que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

- 2X + 4 ≥ 0 ; -2X ≥ – 4 por menos uno ; 2X ≤ 4 ; X ≤ 2

Dom f(x) = (– ∞ , 2]

$f(x) = \sqrt{-2x+4}$

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4,899	4,6904	4,47214	4,243	4	3,74166	3,4641	3,16228	2,828	2,44949	2	1,414	0	#¡NUM!	#¡NUM!



1.4.- Operaciones con funciones

Suma de funciones

(f + g)(x) = f(x) + g(x)

Dominio

$D(f + g) = D f \cap D g$

Ejemplo

$f(x) = \frac{3}{x-2}$ $g(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) + g(x) = \frac{3}{x-2} + \sqrt{x}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\} D_g = [0, \infty)$

$D(f + g) = [0, 2) \cup (2, \infty)$

Propiedades

Asociativa:

f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)

Conmutativa:

f(x) + g(x) = g(x) + f(x)

Elemento neutro:

La función constante: f(x) = 0.

Elemento simétrico:

La función opuesta: −f(x).

Resta de funciones

(f − g)(x) = f(x) − g(x)

Dominio

D(f − g) = D f ⋂ D g

$f(x) = \frac{3}{x-2}$ $g(x) = \sqrt{x}$

$f(x) - g(x) = \frac{3}{x-2} - \sqrt{x}$

D(f + g) = [0, 2) ∪ (2, ∞)

Producto de funciones

(f · g)(x) = f(x) · g(x)

Dominio

D(f · g) = D f ⋂ D g

$f(x) = \frac{3}{x-2}$ $g(x) = \sqrt{x}$

$f(x) \cdot g(x) = \frac{3}{x-2} \cdot \sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}}{x-2}$

D(f + g) = [0, 2) ∪ (2, ∞)

Propiedades

Asociativa:

f(x) · [g(x) · h(x)] = [f(x) · g(x)] · h(x)

Conmutativa:

f(x) · g(x) = g(x) · f(x)

Elemento neutro:

La función constante: f(x) = 1.

Distributiva:

$$f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = [f(x) \cdot g(x)] + [f(x) \cdot h(x)]$$

División de funciones

$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

Dominio

$D(f + g) = (D f \cap D g) - \{x \in \mathbb{R} \ / \ g(x) = 0\}$

$$f(x) = \frac{3}{x-2} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{\frac{3}{x-2}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{(x-2)\sqrt{x}}$$

$D\,f = \mathbb{R} - \{2\} D\,g = [0, \infty)\ g(x) \neq 0$

$D(f + g) = (0, 2) \cup (2, \infty)$

UNIDAD II

LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

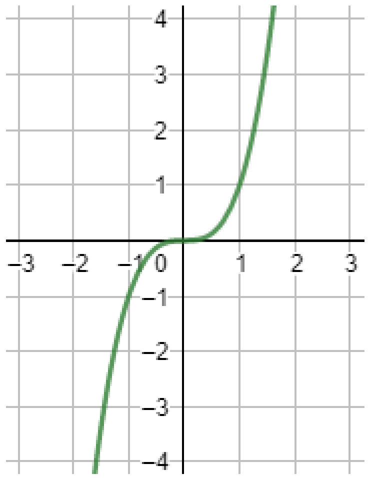
2.1.- LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Concepto de continuidad

Intuitivamente, una funciÃ³n es continua si su grÃ¡fica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, sin levantar el lÃ¡piz del papel.

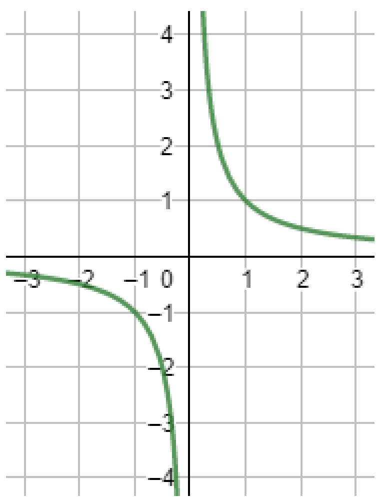
Ejemplo de funciÃ³n continua: $f(x)=x3$.

GrÃ¡fica:



Ejemplo de funciÃ³n no continua: $f(x)=1/x$.

GrÃ¡fica:



DefiniciÃ³n formal:

La funciÃ³n f es continua en el punto c si

$\lim_{x \to c} f(x)=f(c)$

La funciÃ³n f es continua si es continua en todos los puntos.

Por ejemplo, la funciÃ³n $f(x)=1/x$ no es continua en $x=0$ porque no existe $f(0)$.

Observaciones:

En realidad, para hablar de continuidad en un punto a, deberÃa ser indispensable que el punto a pertenezca al dominio de la funciÃ³n.

Por ejemplo, el dominio de $f(x)=1/x$ es $R-\{0\}$ y la funciÃ³n es continua en su dominio. Sin embargo, no existe el lÃmite de $f(x)$ cuando $x\to 0$ ni existe $f(0)$, por lo que decimos que f no es continua en $x=0$.

Como normalmente consideramos a todas las funciones como f:R→R, tenemos que calcular primero el dominio de la funciÃ³n y, despuÃ©s, la continuidad en el dominio.

2. Funciones elementales

- Funciones polinÃ³micas

  $f(x)=amxm + am-1xm-1 ++ \ldots + a1x + a0$

  Son continuas en todos los reales.

- Funciones racionales

  $f(x)=p(x)q(x)$

  Son continuas en todos los reales excepto en los que anulan al denominador.

- Funciones exponenciales

  $f(x)=ax$

  Como regla general, son continuas en todos los reales. Cuando la base es no positiva, $a\leq 0$, puede haber complicaciones.

- Funciones logarÃtmicas

$f(x)=\log(x)$

Son continuas en todos los reales positivos.

- Funciones irracionales

$f(x)=n\sqrt{x}$

Si n es par, son continuas en todos los reales. Si n es impar, en los reales positivos.

- Funciones trigonomÃ©tricas

El seno y el coseno son continuas en todos los reales. La tangente no es continua en $\pi/2+n\pi$ para todo entero n.

La mayorÃa de las funciones que veremos son combinaciones de las anteriores, asÃ que es recomendable aprender su continuidad.

2.2.- CALCULO DEL LIMITE DE UNA FUNCION

1. Introducción

Las funciones matemáticas se utilizan en otros ámbitos, por ejemplo, para calcular los beneficios o los costes de una empresa, la velocidad o aceleración de un móvil, etc., por lo que es importante conocer el comportamiento de una función.

Por ejemplo, la siguiente función no está definida en x=0x=0 ni en x=−1x=−1 (porque no se puede dividir entre 00):

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

Sin embargo, sí podemos preguntarnos cómo se comporta la función cuando xx se aproxima a 00 o cuando se aproxima a −1−1. ¿Y si xx crece o decrece indefinidamente? Los límites de la función ff nos proporcionan las respuestas.

Además de ayudarnos a visualizar la gráfica de la función, los límites también se utilizan para estudiar otras propiedades, como la continuidad de una función, la diferenciabilidad, etc.

2. Concepto de límite

Dada una función f:R→Rf:R→R y un punto x0∈Rx0∈R, el límite de ff cuando xx tiende a x0x0 se representa como

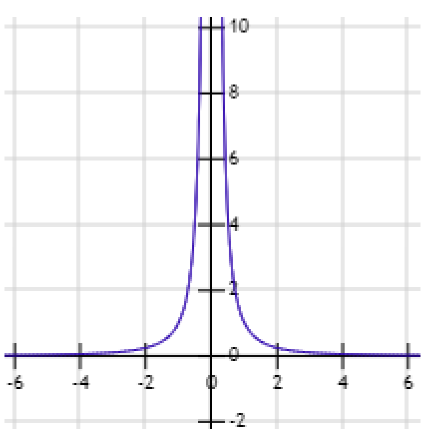
$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

En un principio, este límite **es el valor que toma** ff **en el punto** x0x0, es decir, f(x0)f(x0). Si f(x0)f(x0) no existe (por ejemplo, cuando x0x0 anula el denominador de ff), entonces el límite es el valor al que ff se aproxima cuando xx se aproxima a x0x0.

Por ejemplo, sea la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

No existe f(0)f(0), pero cuanto más se aproxima xx a 00, la función crece más y más, como podemos observar en la gráfica:



Por tanto, el límite de ff cuando xx tiende a 00 es infinito:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

También, podemos predecir el comportamiento de la función cuando xx crece o decrece indefinidamente (cuando xx tiende a ±∞±∞). Cuando esto ocurre, la función f(x)=1/x2f(x)=1/x2 se aproxima cada vez más a 00:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

3. Definición formal

Ver texto

Para los interesados, la definición formal del límite es la siguiente:

Sea la función f:R→Rf:R→R y sea x0∈Rx0∈R, existe el límite de ff cuando xx tiende a x0x0 y es K∈RK∈R si ∀ε>0∀ε>0, ∃δ>0∃δ>0 tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - K| < \varepsilon$$

Matemáticamente, lo resumimos con la notación de límite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = K$$

La definición del límite cuando x→∞x→∞ es ligeramente distinta.

4. Límites laterales

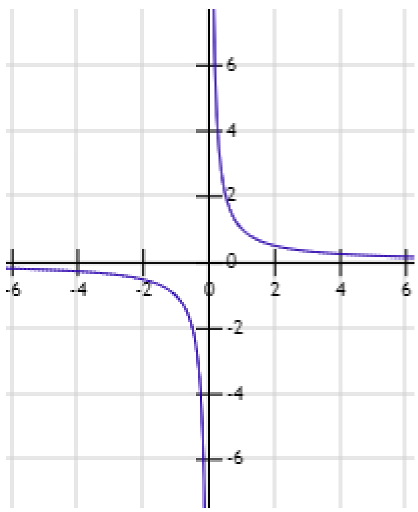
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = K$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = K$$

Ver texto

Vimos en un ejemplo anterior que la función f(x)=1/x2f(x)=1/x2 tiende a +∞+∞ cuando xx tiende a 00. Sin embargo, no ocurre los mismo con la función f(x)=1/xf(x)=1/x:



En este caso, la función crece indefinidamente cuando xx se aproxima a 00 por la derecha (de 00) y decrece indefinidamente cuando se aproxima a 00 por la izquierda.

En este caso, decimos que no existe el límite x→0x→0, pero sí existen los límites laterales.

El límite lateral de ff por la derecha de 00 es

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Y el límite lateral de ff por la izquierda de 00 es

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

El límite de f(x)f(x) cuando xx tiende a x0x0 existe si y sólo si existen los límites laterales y, además, coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = K$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = K$$

5. Límites infinitos

Hemos estado hablando, básicamente, de límites en puntos finitos x0∈Rx0∈R, pero también podemos preguntarnos cuál es límite de una función cuando xx crece o decrece indefinidamente, es decir, cuando x→+∞x→+∞ y cuando x→−∞x→−∞.

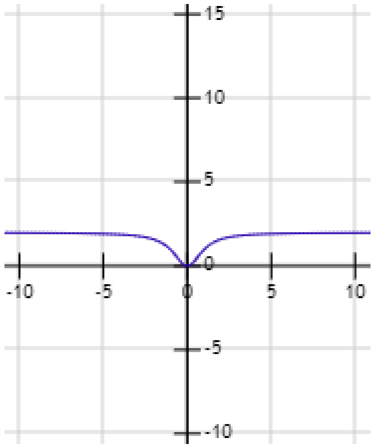
Ver ejemplo

Por ejemplo, la siguiente función tiende a 8/58/5 cuando xx tiende a ±∞±∞:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 8/5$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 8/5$$

Más adelante, veremos cómo se calculan estos límites.

La gráfica de la función anterior es



Obviamente, no podemos hablar de límites laterales cuando xx tiende a infinito.

6. Reglas básicas

Hasta el momento, no hemos explicado cómo calcular los límites.

1. Lo primero que hacemos para calcular el límite de ff en el punto x0x0 es comprobar si se puede calcular f(x0)f(x0) porque, en este caso, el límite es dicho valor:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Es decir, en este caso sólo hay que cambiar las xx por x0x0.

Ver ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Nota: en una función definida a trozos, hay que calcular primero los límites laterales en x0x0 si es un punto de cambio de definición.

2. Es importante comprobar que la función está escrita en su mínima expresión.

Ver ejemplo

Por ejemplo, el siguiente límite parece indeterminado (no se puede dividir 00 entre 00):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = ?$$

Sin embargo, podemos simplificar la función:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x - 1} =$$

$$= x - 1$$

De este modo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} x - 1 =$$

$$= 1 - 1 = 0$$

2.3.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Continuidad de Funciones.

Intuitivamente se puede decir que una función es continua cuando en su gráfica no aparecen saltos o cuando el trazo de la gráfica no tiene "huecos". En la figura 8.6., aparece la gráfica de tres funciones: dos de ellas **no continuas (discontinuas)** en el punto $x = a$ de su dominio (fig. 8.6. (a) y 8.6. (b)) y la otra (fig. 8.6. (c)) continua en todo su dominio.

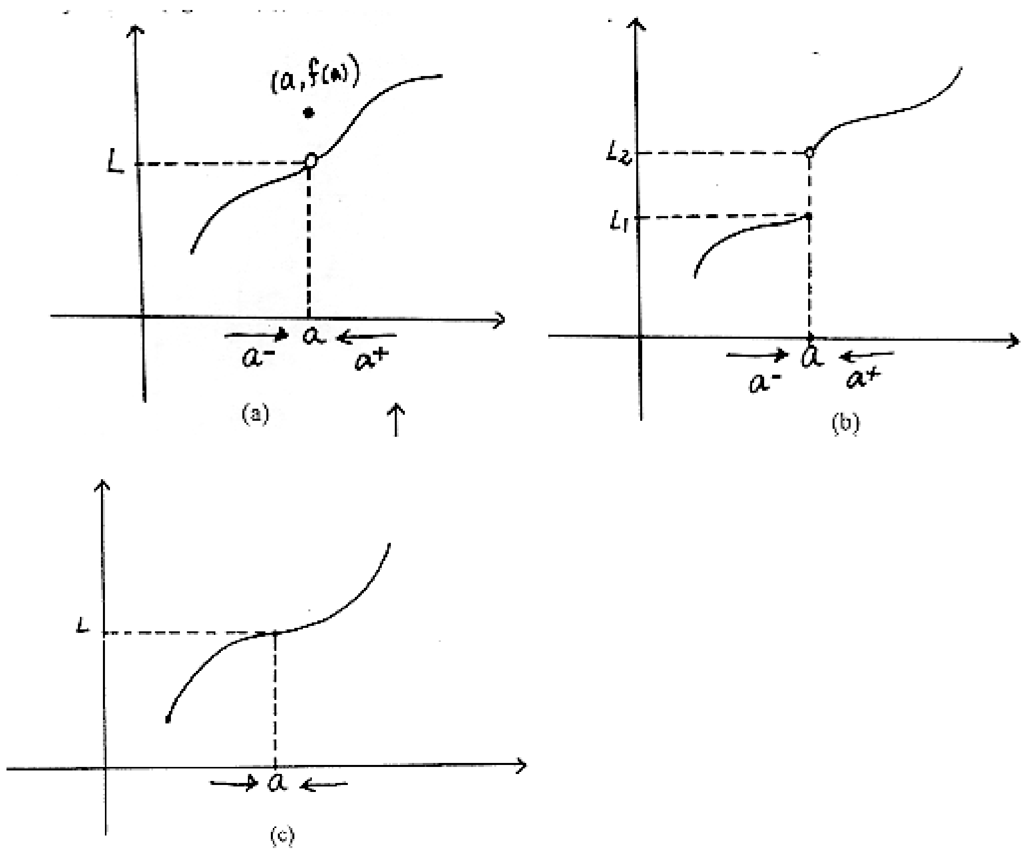


fig. 8.6.

Al mirar con un poco de cuidado las gráficas de la fig. 8.6., se pueden deducir intuitivamente, resultados que permitirán comprender con mayor claridad la definición precisa de lo que significa: "ser una función continua en un punto dado de su dominio". En la gráfica de la **fig. 8.6. (a)** se tiene:

i. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. (Existe).

ii. *f(a)* existe.

Pero, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$. (Por esta razón *f* es discontinua) ¿Qué le sucede a la gráfica si *f(a)*= *L*?

Para la gráfica de la **fig. 8.6. (b)** se tiene:

i. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *No existe.* (Por esta razón *f* es discontinua)

ii. f(a) = L_1(Existe).

Finalmente, para la gráfica de la **fig. 8.6. (c)** se tiene:

i. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$. (Existe).

(Por esta razón *f* es discontinua)

ii. *f(a)* (Existe).

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Estas tres condiciones son las que en última instancia, permiten deducir intuitivamente que la función cuya gráfica aparece en la fig. 8.6. (c) es continua en el punto *a*. Lo anterior nos permite establecer la siguiente definición.

Definición:

Una función *f* es **CONTINUA EN *x* = *a***, si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

i. *f(a)* existe.

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si al menos una de estas tres condiciones deja de cumplirse se dice que *f* es **DISCONTINUA** (NO CONTINUA) en *x* = *a*.

Observaciones:

i. Si en la definición anterior, sustituimos $\lim_{x \to a} f(x)$ por $\lim_{x \to a^+} f(x)$ o por $\lim_{x \to a^-} f(x)$, se dice entonces que *f* es **continua a la derecha**, respectivamente, **a la izquierda** del punto *x* = *a*.

ii. Algunos autores adoptan como definición de continuidad en un punto, la condición iii. de la definición anterior, esto es, ***f* es continua** en *x* = *a*, si y solo si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

iii. Si en la definición de continuidad se hace: *x* = *a* + *h*; con *a* y *(a* + *h)* en el dominio de *f*, se dice entonces, que *f* es continua en *a* si y solo si, $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

iv. Si *f* es discontinua en *x* = *a* y $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero es diferente de *f(a)*, se dice que la discontinuidad es **REMOVIBLE O EVITABLE**. En caso contrario, se dice que la discontinuidad es ESENCIAL.

Asi por ejemplo, la gráfica de la fig. 8.6. (a) corresponde a la gráfica de una función con discontinuidad **Removible** o **evitable** en $x = a$. Mientras que la gráfica de la fig. 8.6. (b) corresponde a la gráfica de una función con discontinuidad ESENCIAL en $x = a$.

v. Cuando una función tiene discontinuidad removible en un punto, se usa la frase "Remover la discontinuidad" para indicar que se puede redefinir la función haciendo que: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ y de esta manera obtener una nueva función continua en $x = a$. Considere por ejemplo, la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x < 0 \\ 3 & si \quad x = 0 \\ 2x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

La gráfica de la función aparece en la fig. 8.7.

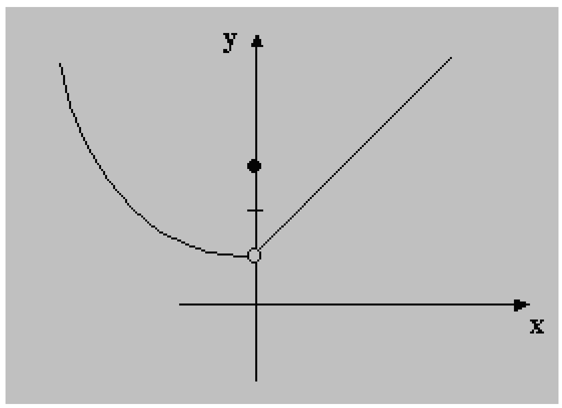


fig. 8.7.

Si se analiza la continuidad de f en el punto $x = 0$, se tiene:

i. $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(2x + 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (Existe)

ii. $f(0) = 3$ (Existe)

Pero, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 3$; lo que indica que f es discontinua en $x = 0$. Ahora, como $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, la discontinuidad es evitable.

Se puede entonces, **"remover"** o **"evitar"** la discontinuidad, redefiniendo una nueva función de tal forma que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Esto es, redefiniendo a f asi:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 2x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Esta nueva función es continua en $x = 0$.
Es de anotar que la función *f* se ha redefinido y por lo tanto, no se trata de la misma función. ¿Porqué?

8.3.1. Teoremas sobre funciones continuas. Los siguientes teoremas, que se enuncian sin demostración, señalan importantes propiedades de las funciones continuas y son al mismo tiempo herramientas útiles que permiten deducir, en muchos casos, la continuidad de una función, sin recurrir directamente al empleo de la definición.

TEOREMA 1. (Algebra de funciones continuas)

Sean *f*, *g* dos funciones continuas en el punto $x = a$. Entonces:

i. $(f + g)$ es continua en $x = a$. (Suma de funciones continuas es continua).

ii. $(f - g)$ es continua en $x = a$. (Diferencia de funciones continuas es continua).

iii. $(f \times g)$ es continua en $x = a$. (Producto de funciones continuas es continua).

iv. $\left(\frac{f}{g}\right)$ es continua en $x = a$, si *g(a)* ' *0*. (Cociente de funciones continuas es continua).

Consecuencias:

C.C.1. La función polinómica es continua en todo punto del eje real. En efecto, sea $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ una función polinómica de grado *n*.

Sea *a* un punto cualquiera del eje real. Al aplicar sucesivamente el teorema 1 en sus partes i., ii. y iii se obtiene que:

$\lim_{x \to a} P_n(x) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = P_n(a)$ y de aquí, $P_n(x)$ es una función continua en todo punto del eje real.

C.C.2. Toda función racional es continua en los puntos que no anulen el denominador de la función.

Demostración: aplicar el teorema 1.

TEOREMA 2. (Límite de la función compuesta)

Sean *f* y *g* dos funciones tales que: *f* es continua en *b* y $\lim_{x \to a} g(x) = b$.

Entonces: $\lim_{x \to a} (f o g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(b)$.

Algunas consecuencias importantes de este teorema son las siguientes:

C.C.3. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, entonces, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$. Cuando *n* sea par, se debe cumplir además que *b* > 0.

C.C.4. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, entonces, $\lim_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right| = |b|$

Las consecuencias **C.C.3. y C.C.4.**, se expresan respectivamente en palabras de la siguiente forma: "El límite de la raiz n-sima, es la raiz n-sima del límite y "El límite del valor absoluto, es el valor absoluto del límite".

C.C.5. (Continuidad de la función compuesta). Si *g* es continua en *a* y *f* es continua en *g(a)*, entonces *(f o g) (x)* = *f (g(x))* es continua en *a*.

8.3.2. Continuidad En Un Intervalo

Definiciones:

i. Una función *f* es continua en un INTERVALO ABIERTO si y solo si, *f* es continua en **TODO** punto del intervalo.

ii. Una función *f* es continua en un INTERVALO CERRADO *[a, b]* si y solo si, *f* es continua en el intervalo abierto *(a, b)*, continua por la derecha de *a* y continua por la izquierda de *b*.

Definiciones similares se establecen para la continuidad de una función en un intervalo semiabierto de cualquiera de las formas: *(a, b]* ó *[a, b)*.

Asi por ejemplo, la función $f(x) = [|x|]$ (mayor entero menor o igual a *x*), es continua en los intervalos de la forma $(n-1, n), n \in$ ü , ya que en cada uno de estos intervalos, la función es constante.

Considere también la función *f* definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -1 \le x < 2 \\ x+2 & si \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

y cuya gráfica aparece en la fig. 8.8.
Se desea analizar la continuidad de *f* en el intervalo [-1, 3]

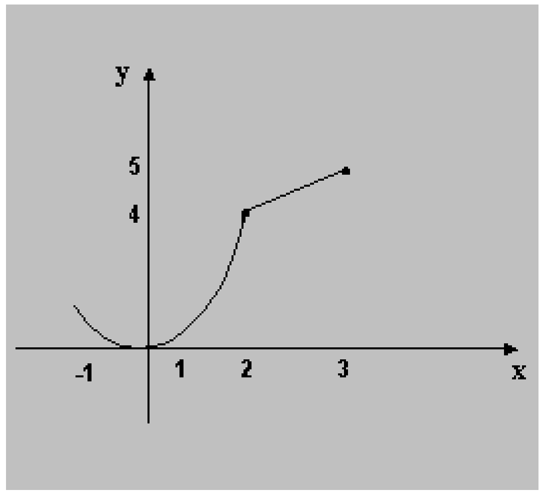


fig. 8.8.

1.Continuidad en el intervalo abierto (-1, 3). Se analiza la continuidad sólo en el punto $x = 2$, ya que en los demás puntos del intervalo *f* es continua por ser polinómica en cada tramo. Continuidad en $x = 2$

i. $f(2) = 4$

ii. $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

iii. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ De i., ii., y iii. se concluye que *f* es continua en $x = 2$ y por lo tanto *f* es continua en el intervalo (-1, 3).

2. Continuidad por la derecha del punto $x = -1$

i. $f(-1) = (-1)^2 = 1$ (Existe)

ii. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = 1$ (Existe)

iii. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Luego *f* es continua por la derecha del punto *x* = -1.

3. Continuidad por la izquierda del punto *x* = 3

i. *f*(3) = 3 + 2 = 5 (Existe)

ii. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+2) = 5$ (Existe)

iii. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$ Asi que *f* es continua por la izquierda del punto *x* = 3.

De 1. 2. y 3. se concluye de acuerdo a la definición, que *f* es continua en el intervalo cerrado [-1, 3].

UNIDAD III

DERIVADAS REGLA DE LA CADENA

REGLA DE LA CADENA

INTRODUCCIÓN

Ahora analizaremos una de las reglas de derivación más potentes: **la regla de la cadena.** Ésta se aplica a las funciones compuestas y añade versatilidad a las reglas analizadas anteriormente (Reglas de derivación). Como ejemplo, comparar las funciones que se muestran a continuación; las de la izquierda se pueden derivar sin la regla de la cadena, mientras que a las de la derecha conviene aplicarles dicha regla.

SIN REGLA DE LA CADENA	CON REGLA DE LA CADENA
$y = x^2 + 1$	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
$y = Sen\ x$	$y = Sen\ 6x$
$y = 3x + 2$	$y = (3x + 2)^2$
$y = x + tan\ x$	$y = x + tan\ x^2$

TEOREMA

Si y = f(u) es una función derivable de u y además u = g(x) es una función derivable de x, entonces y = f(g(x)) es una función derivable de x y simbólicamente lo expresamos mediante la siguiente formula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

En esencia, la regla de la cadena establece que si y cambia dy/du veces más rápido que u, mientras que u cambia du/dx veces más rápido que x, entonces y cambia (dy/du)(du/dx) veces más rápido que x.

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta *f* • g está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función Exterior

y = f(g(x)) = f(u)

Función Interior

La derivada de y = *f*(u) es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior.

FUNCIONES DERIVABLES POR REGLA DE LA CADENA

EJEMPLO N° 1

Usar la regla de la cadena para calcular la derivada de la función $f(x) = (5x^3 - 3)^8$

PASO N° 1: Escribamos la Función Interior y la Función Exterior.

$$sea \quad u = g(x) = 5x^3 - 3 \quad entonces \quad y = f(u) = u^8$$

PASO N° 2: Calculemos las derivadas.

$$\frac{dy}{du} = 8u^7 \quad y \quad \frac{du}{dx} = 15x^2$$

PASO N° 3: Usando la regla de la cadena se tiene.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 8u^7 \ . \ 15x^2 = 8(5x^3 - 3)^7 \ . \ 15x^2$$

PASO N° 4: Expresamos la derivada simbolicamente.

$$f(x) = (5x^3 - 3)^8 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 8(5x^3 - 3)^7(15x^2)$$

EJEMPLO N° 2

En algunos casos podemos transformar una función para no usar la regla de la cadena, pero siempre resultará más más rápido calcular la derivada de un función aplicando la regla de la cadena, veamos:

Hallar la derivada de la siguiente función: $f(x) = (x^5 + 1)^2$

PASO N° 1: Escribamos la Función anterior en forma de producto.

$$f(x) = (x^5 + 1)\ .\ (x^5 + 1)$$

PASO N° 2: Aplicar la regla de derivación de un producto.

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 1).(x^5 + 1) = \frac{d}{dx}(x^5 + 1).(x^5 + 1) + (x^5 + 1).\frac{d}{dx}(x^5 + 1)$$

$$= (x^5 + 1)\ .\ 5x^4 + (x^5 + 1)\ .\ 5x^4$$

$$\frac{d}{dx} = 2(x^5 + 1)\ .\ 5x^4 = 10(x^5 + 1)\ .\ x^4$$

EJEMPLO N° 3

Usar la regla de la cadena para calcular la derivada de la función $f(x) = (x^5 + 1)^2$

PASO N° 1: Escribamos la Función Interior y la Función Exterior.

$$Sea\ u = g(x) = (x^5 + 1) \quad entonces \quad y = f(u) = u^2$$

PASO N° 2: Calculemos las derivadas.

$$\frac{dy}{du} = 2u \quad y \quad \frac{du}{dx} = 5x^4$$

PASO N° 3: Usando la regla de la cadena se tiene.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 2(x^5 + 1)\ .\ 5x^4$$

PASO N° 4: Expresamos la derivada simbolicamente.

$$f(x) = (x^5 + 1)^2 \ \rightarrow \ f'(x) = 10(x^5 + 1)\ .\ x^4$$

EJEMPLO N° 4

Usar la regla de la cadena para calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

Reescribamos la función como: $f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$

PASO N° 1: Escribamos la Función Interior y la Función Exterior.

$$Sea\ u = g(x) = (3x+1) \quad entonces \quad y = f(u) = u^{\frac{1}{2}}$$

PASO N° 2: Calculemos las derivadas.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}\, u^{\frac{-1}{2}} \quad y \quad \frac{du}{dx} = 3$$

PASO N° 3: Usando la regla de la cadena se tiene.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3$$

PASO N° 4: Expresamos la derivada simbolicamente.

$$f(x) = \sqrt{3x+1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

REGLA DE LA CADENA

Cuando una variable y depende de una variable independiente **x** en una forma muy complicada, es conveniente considerarla como una función compuesta de dos o más funciones .

EJEMPLO :

$$y = (3x^2 + x - 5)^4$$

entonces podemos considerar :

$$y = \mu^4 \text{ donde } \mu = 3x^2 + x - 5$$

Esto a veces se representa esquemáticamente como una **"cadena"** de variables , lo cual da nombre a la regla que veremos más adelante :

$$y \to \mu \to x$$

y podemos leer , **y** depende de μ ; μ depende de **x** . Estudiaremos la derivada de una composición de funciones , la cual es de gran importancia en la resolución de problemas físicos , químicos , etc .

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

La derivada de una función compuesta está basada en el siguiente teorema :

TEOREMA :

Si **u** es diferenciable en **x** , y **g** es diferenciable en **u(x)**, entonces **g o u** , es diferenciable en **x** , luego se tiene :

$$\left[g(u(x))\right]' = \underbrace{g'(u(x))}_{\substack{Parte\\Externa}} \cdot \underbrace{u'(x)}_{\substack{Parte\\Interna}}$$

EJEMPLO 1 :

Supongamos que deseamos encontrar la derivada de la función **f** definida por $\mathbf{f(x) = (5x^4 + 7)^{15}}$. ¿Será necesario elevar el binomio a la potencia **15** , para posteriormente derivar ? Lo anterior no es necesario , para esto existe la REGLA DE LA CADENA .

Por el teorema:

$$g(u(x)) = (5x^4 + 7)^{15} \Rightarrow u(x) = 5x^4 + 7$$

luego : $g(u) = u^{15}$

Ahora : $g'(u) = 15u^{14}$ y $u'(x) = 20x^3$

$$\to \frac{d}{dx}\left[5x^4 + 7\right]^{15} = g'(u(x)).u'(x) = 15u^{14}.20x^3$$

$$= 15\left(5x^4 + 7\right)^{14}.20x^3 = 300x^3\left(5x^4 + 7\right)^{14}$$

Observa que para obtener el resultado primero se deriva la función externa (la función potencial) y el resultado se multiplica por la derivada de la función interna (que es $5x^4 + 7$).

EJEMPLO 2 :

Calcular la derivada de la función: $y = (3x - 2)^3$

RESOLUCIÓN :

La función cúbica es externa y $3x - 2$ es la función interna . $y' = \underbrace{3(3x-2)^2}_{Externa} \underbrace{3}_{Interna} = 9(3x-2)^2$

EJEMPLO 3:

Calcular la derivada de la función $h(x)=(5x-2)^3$

RESOLUCIÓN :

La función $h(x)$ es una función compuesta por :

$f(x) = 5x - 2$ y $g(x) = x^3$

Por lo tanto :

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \rightarrow h(x) = (5x-2)^3$$
$$h'(x) = g'(f(x)).f'(x) \rightarrow h'(x) = \underbrace{3(5x-2)^2}_{\text{Derivada de la función externa}} \underbrace{5}_{\text{Derivada de la función interna}}$$

COROLARIO :

Suponga que g es una función diferenciable y que $n \in \mathbb{Z}$.

I) Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

II) Si $f(x) = [g(x)]^n$, entonces :

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

EJEMPLO 4 :

Hallar la derivada de cada una de las funciones siguientes :

I) $f(x) = (4x^2 - 3x + 6)^5$ II) $f(x) = \left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^3$

III) $f(x) = [(x^2 + 1)^6 + 4]^4$ IV) $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$

RESOLUCIÓN :

I) $f'(x) = 5(4x^2 - 3x + 6)^4(8x - 3)$

II) $f'(x) = 3\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^2 . \left(\frac{3x+1}{x-2}\right)'$

$$= 3\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^2 \cdot \left\{\left(\frac{3(x-2)-(3x+1)}{(x-2)^2}\right)\right\}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{3(3x+1)^2(-7)}{(x-2)^2} = \frac{-21(3x+1)^2}{(x-2)^2}$$

III) $f'(x) = 4[(x^2+1)^6+4]^3 . 6(x^2+1)^5 . 2x$

$$= 48x(x^2+1)^5[(x^2+1)^6+4]^3$$

IV) $f'(x) = (2x+3)^{-2} \rightarrow f'(x) = -2(2x+3)^{-3}(2)$

$$\rightarrow f'(x) = -\frac{4}{(2x-3)^3}$$

NOTACIÓN DE LEIBNIZ PARA LA RECLA DE LA CADENA

Sea **y = g(u(x))**. Queremos expresar , ahora , el teorema anterior de manera más simple .

Para esto hacemos **v = u(x)**

[**v** depende de **x**, entonces $\frac{dv}{dx} = \mu'(x)$]

Nos queda : **y = g(v)**

[**y** depende de **v** , entonces :

$$\frac{dy}{dv} = g(v)]$$

Reemplazando en el teorema anterior :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[g(u(x))] = g(u(x)).\mu'(x)$$

Nos queda : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

EJEMPLO 1 :

Halle la derivada de la función :

$$f(x) = (3x^2+x-5)^4$$

RESOLUCIÓN :

Sea **y = f(x)** , luego podemos escribir :

$$y = \mu^4 \text{ donde } \mu = 3x^2+x-5$$

$\frac{dy}{d\mu} = 4\mu^3$ y $\frac{d\mu}{dx} = 6x+1$, como $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$

Entonces : $\frac{dy}{dx} = 4\mu^3.(6x+1)$

$$= 4(3x^2+x-5)^3.(6x+1)$$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $\dfrac{d}{dx}\sqrt[3]{x^4-3x^3+2}$

RESOLUCIÓN :

Sea $y=\sqrt[3]{x^4-3x^3+2}=(x^4-3x^3+2)^{1/3}$, debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$

Efectuando el cambio de variable :

u = x^4 – 3x^3 + 2 ...(**u** depende de **x**)

* Nos queda $y=\sqrt[3]{u}=u^{1/3}$ (**y** depende de **u**)

* Utilizando la notación de Leibnitz :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}...(I)$$

Pero : $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}u^{1/3}=\dfrac{1}{3}u^{-2/3}$

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(x^4-3x^3+2)=4x^3-9x^2$$

Reemplazando en **(I)** :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}u^{-2/3}.(4x^3-9x^2)$$

$$=\frac{1}{3}(x^4-3x^3+2)^{-2/3}.(4x^3-9x^2)$$

Es decir : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^4-3x^3+2)^2}}.(4x^3-9x^2)$

$$=\frac{4x^3-9x^2}{3\sqrt{(x^4-3x^3+2)^2}}$$

EJEMPLO 3 :

Hallar : $\dfrac{d}{dx}(3x^2+2x-1)^{20}$

RESOLUCIÓN :

Sea **y = (3x^2 + 2x – 1)^{20}**, debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$

Haciendo el cambio de variable : **u = 3x^2 + 2x –1** (**u** depende de **x**)

Nos queda : **y = u^{20}** (**y** depende de **u**)

- Utilizando la notación de Leibnitz :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=(20u^{19})(6x+2)$$

$$=20(3x^2+2x-1)^{19}(6x+2)$$

TEOREMA :

Si **f** es una función continua e inyectiva , definida en un intervalo , entonces su función inversa **f *** también es continua .

TEOREMA :

Si **f** es una función inyectiva diferenciable, entonces su función inversa **f** * es diferenciable :

$$\boxed{\left(f^*\right)'(y)=\frac{1}{f^*\left(f^*(y)\right)}}$$

OBSERVACIÓN :

Si asumimos que **f *** es diferenciable , la fórmula obtenida en el teorema anterior se puede deducir a partir del hecho que :

$$f\left(f^*(y)\right)=\left(f\circ f^*(y)\right)=y:\ \forall\, y\in R_f$$

En efecto , si derivamos ambos lados , obtenemos que :

f '(f*(y)) . (f*)'(y) = 1 y entonces

$$\left(f^*\right)'(y)=\frac{1}{f'\left(f^*(y)\right)},\ \forall\, y\in R_f \text{ con } f'(f^*(y))\neq 0$$

EJEMPLOS :

1) Si $y=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

2) Si $y=\sqrt[n]{g(x)}$ y **g** es diferenciable entonces de **y =** $\mu^{1/n}$ donde μ **= g(x)** se sigue que :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{n}\mu^{1/n-1}\cdot g'(x)=\frac{1}{n}\left[g(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}\cdot g'(x)$$

Es decir :

$$\left\{\sqrt[n]{g(x)}\right\}=\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]^{1/n}=\frac{1}{n}\left[g(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}\cdot g'(x)$$

$$3)\ \frac{d}{dx}\left\{\sqrt[3]{x^2+1}\right\}=\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)^{1/3}=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{-2/3}.2x$$

$$4)\ \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\left(x^2+1\right)^{-1/4}\right\}=-\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)^{-5/4}.2x$$

EJERCICIO :

Halle la derivada de la función **y = [g(x)]** $^{m/n}$ asumiendo que **g** es diferenciable .

RESOLUCIÓN :

Es claro que **y = $\mu^{m/n}$** donde **μ = g(x)**, luego :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\frac{m}{n}\mu^{\frac{m}{n}-1}.g'(x)=\frac{m}{n}[g(x)]^{\frac{m}{n}-1}.g'(x)$$

Es decir : $\frac{d}{dx}\{[g(x)^{m/n}]\}=\frac{m}{n}[g(x)]^{\frac{m}{n}-1}.g'(x)$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

De acuerdo a lo estudiado anteriormente tenemos que las funciones logarítmicas y exponenciales son continuas en todo su dominio de definición . Se demuestra que dichas funciones son también diferenciables . Tenemos las siguientes reglas de derivación .

I) Si: **$f(x) = e^x$**, entonces : **$f'(x) = e^x$**

II) Si: **$f(x) = e^{g(x)}$**, entonces : **$f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$**

III) Si : **$f(x) = Lnx$** , entonces : **$f'(x)=\frac{1}{x}$**

IV) Si : **$f(x) = Ln[g(x)]$** , entonces:**$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$**

V) Si : **$f(x) = Log_b x$** , entonces : **$f'(x) = \frac{1}{x}Log_b e$**

VI) Si : **$f(x) = b^x$**, entonces : **$f'(x) = (Ln\ b).b^x$**

EJEMPLO 1 :

Derivar : $f(x)=e^{x^3+2x}$

RESOLUCIÓN :

$$f(x)=e^{x^3+2x}.\frac{d}{dx}[x^3+2x]=(3x^2+2)e^{x^3+2x}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la derivada de : **$y = Ln\ x^3$**.

RESOLUCIÓN :

$y=Lnx^3$, luego $y'=\frac{1}{x^3}3x^2=\frac{3}{x}$

EJEMPLO 3 :

Calcular la derivada de $y = \sqrt{e^x + 1}$

RESOLUCIÓN :

Hacemos $y = [e^x + 1]^{1/2}$

Se aplica la fórmula de la derivada de una raíz .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x + 1)^{1/2-1}\frac{d}{dx}(e^x + 1) = \frac{1}{2}(e^x + 1)^{-1/2}e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$$

EJEMPLO 4 :

Calcular la derivada de **$y = \cos(\mathrm{Ln}\ x^2)$**

RESOLUCIÓN :

* La función **$y = \cos(\mathrm{Ln}x^2)$** ; es de la forma **$y=\cos u$** donde **u** es una función de la forma **$u = \mathrm{Ln}\ v$** donde **v** es una función de **x** .

Si **$y = \cos(\mathrm{Ln}x^2)$** $\Rightarrow y' = \dfrac{-2x}{x^2}sen(Lnx^2)$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2}{x}sen(Lnx^2)$$

EJEMPLO 5 :

Calcular **$f'(x)$** , si : **$f(x) = \mathrm{Ln}(senx)$**

RESOLUCIÓN :

$$\frac{d}{dx}[Ln(senx)] = \frac{1}{senx}\cdot\frac{d}{dx}(senx) = \frac{1}{senx}\cdot cosx = ctg\ x$$

PROBLEMA 8:

Calcula: $\dfrac{d}{dx} sen\left(cos\left(x^2-2x\right)\right)$

RESOLUCIÓN:

Sea: ***y=sen(cos(x²–2x))*** debemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

Empezando de "adentro hacia afuera", efectuamos los cambios de variable:

Cambio: $u=x^2-2x$, nos queda: ***y=sen(cos u)***.

Cambio: ***v=cos u***, nos queda ***y=sen v***.

Luego: $\dfrac{dy}{dx}$ se expresa como:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ldots(I)$$

Pero: $\dfrac{dy}{dv}=\dfrac{d}{dv}(sen\,v)=cos\,v$;

$$\frac{dv}{du}=\frac{d}{du}(cos\,u)=-sen\,u;\ \frac{du}{dx}=2x-2$$

Reemplazando en ***(I)***:

$$\frac{dy}{dx}=cos\,v\cdot(-sen\,u)\cdot(2x-2)\ \text{luego :}$$

$$\frac{dy}{dx}=cos\left(cos\,u\right)\cdot\left[-sen\left(x^2-2x\right)\right]\cdot\left(2x-2\right)=$$

$$=cos\left(cos\left(x^2-2x\right)\right)\cdot\left(-sen\left(x^2-2x\right)\right)(2x-2)$$

Nota que el mismo resultado se obtiene si derivamos primero la función externa y el resultado se multiplica por la derivada de la función interna. Veamos esto:

La derivada de (x²–2x) es (2x–2)

$$\frac{d}{dx}sen(cos(x^2-2x))=cos(cos(x^2-2x))\,(-sen(x^2-2x))\,(2x-2)$$

La derivada del coseno es –seno

PROBLEMA 14 :

Determinar la ***n***-ésima derivada de :

I) $f(x)\ (ax+b)^n$

II) $f(x) = cosax$

III) $f(x) = sen^2x$

IV) $f(x) = (1-3x)^{-1}$

RESOLUCIÓN :

I) De : $y = (ax+b)^n \rightarrow y' = na(ax+b)^{n-1}$

$\rightarrow y'' = n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2}$

$\rightarrow y''' = n(n-1)(n-2)a^3(ax+b)^{n-3}$

De donde se puede inducir que :

$y^n = n!\,a^n(ax+b)^{n-n} \rightarrow y^n = n!a^n$

II) De : $y = \cos ax$

$$\rightarrow y' = -a\ sen\ ax = a\cos\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow y'' = -a^2\cos ax = a^2\cos\left(ax+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow y''' = a^3\ sen\ ax = a^3\cos\left(ax+3\frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces : $y^{(n)} = a^n\cos\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

III) Como : $sen^2x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Luego su enésima derivada , será :

$$f^n(x) = \underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2}\right)}_{vale\ cero} - \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)$$

$$\rightarrow f^n(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x)$$

$$\rightarrow f^n(x) = -\frac{1}{2}.2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)........(ver\ II)$$

IV) De : $y = (1-3x)^{-1}$

$\rightarrow y' = (-1)(1-3x)^{-2}(-3)$

$\rightarrow y'' = (-1)(-2)(1-3x)^{-2}(-3)^2$

$\rightarrow y''' = (-1)(-2)(-3)(1-3x)^{-3}(-3)^3$

De donde se puede inducir y deducir que :

$f^n_{(x)} = 3^n\,n!\,(1-3x)^{-n-1}$

DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

Derivada de la función coseno

$$f(x) = \cos(u) \qquad f'(x) = -\sin(u) \cdot u'$$

Derivada de la función tangente

$$f(x) = \tan(u) \qquad f'(x) = \sec^2(u) \cdot u'$$

Derivada de la función cotangente

$$f(x) = \cot(u) \qquad f'(x) = -\csc^2(u) \cdot u'$$

Derivada de la función secante

$$f(x) = \sec(u) \qquad f'(x) = \sec(u) \cdot \tan(u) \cdot u'$$

Derivada de la función cosecante

$$f(x) = \csc(u) \qquad f'(x) = -\csc(u) \cdot \cot(u) \cdot u'$$

Ejemplos de ejercicios de funciones derivadas

Deriva las siguientes funciónes

Recuerda siempre derivar el argumento de la función trigonométrica y multiplicarlo por la derivada de la función.

1 $f(x) = \sin(4x)$

$$f'(x) = \cos(4x) \cdot 4$$

$$f'(x) = 4\cos(4x)$$

2 $f(x) = \sin(x^4)$

$$f'(x) = \cos(x^4) \cdot 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 \cos(x^4)$$

3 $f(x) = sen^4(x) = (sen(x))^4$ En este ejemplo, partiremos de la formula: $\frac{dy}{dx}u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$f'(x) = 4sen^3(x) \cdot cos(x)$$

4 $f(x) = \frac{cos(x)}{5} = \frac{1}{5} \cdot cos(x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{5} \cdot sen(x)$$

5 $f(x) = \cos(3x^2 + x - 1)$

$$f'(x) = -\sin(3x^2 + x - 1) \cdot (6x + 1)$$

$$f'(x) = -(6x + 1) \cdot \sin(3x^2 + x - 1)$$

6 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot cos^2(5x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot cos(5x) \cdot -sen(5x) \cdot 5$$

$$f'(x) = -5 \cdot cos(5x) \cdot sen(5x)$$

7 $f(x) = tan\sqrt{x}$

$$f'(x) = sec^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

8 $f(x) = cot(4x^2)$

$$f'(x) = -sec^2(4x^2) \cdot 8x$$

$$f'(x) = -8x \cdot sec^2(4x^2)$$

9 $f(x) = cot^2(4x)$

$$f'(x) = 2 \cdot cot(4x) \cdot -csc^2(4x) \cdot 4$$

$$f'(x) = -8 \cdot cot(4x) \cdot csc^2(4x)$$

10 $f(x) = sec(5x)$

$$f'(x) = sec(5x) \cdot tan(5x) \cdot 5$$

$$f'(x) = 5 \cdot sec(5x) \cdot tan(5x)$$

11 $f(x) = csc\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = -csc\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cot\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot csc\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

BIBLIOGRAFÍA

STEWART, James. Cálculo, Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición. Editorial Thomson.

LARSON, Roland E. y HOSTETLER, Robert P. Cálculo y Geometría Analítica. Sexta edición. Madrid:Editorial McGraw-Hill.

PÉREZ José Luis, MERCADO Norman. Notas para un curso de Cálculo Diferencial.