LIBRO

MATEMÁTICAS FINANCIERA

LICENCIATURA

CUATRIMESTRE 3º

Marco Estratégico de Referencia

ANTECEDENTES HISTORICOS

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor de Primaria Manuel Albores Salazar con la idea de traer Educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer Educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tarde.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en septiembre de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró como Profesora en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de finanzas en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el Corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y Educativos de los diferentes Campus, Sedes y Centros de Enlace Educativo, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca a nivel nacional e internacional.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

MISIÓN

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad Académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

VISIÓN

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra Plataforma Virtual tener una cobertura Global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

VALORES

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

ESCUDO

El escudo de la UDS, está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

ESLOGAN

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

Nombre de la materia

Objetivo de la materia:

Conocerá y utilizará las herramientas de matemáticas financiera para establecer estrategias y optimizar los resultados de la organización en la toma de decisiones

Criterios y procedimientos de evaluación y acreditación:

Actividades en la Plataforma Educativa

Primera actividad	25%
Segunda actividad	25%
Examen	50%
Total	100%
Escala de calificaciones	7-10
Mínima aprobatoria	7

CONTENIDO

UNIDAD I

FUNDAMENTOS |DE LA MATEMÁTICA FINANCIERA
1.1 Postulados fundamentales de la matemática financiera
1.2 Operación financiera. Clasificación
1.3 Leyes financieras: Concepto y clasificación
1.4 Sistemas Financieros
1.5 Sistema de capitalización simple
1.6 Concepto y fórmula general de la capitalización simple.
1.7 Estructura de la tasa de interés
1.8 Interés simple e interés compuesto
1.8.1 Interés simple
1.8.2 Interés compuesto

UNIDAD II

INTERÉS Y CAPITALIZACIÓN
2.1 Interés civil e interés comercial: concepto y relaciones
2.2 Interés anticipado en capitalización simple. Relación con el interés por vencido.
2.3 Sistema de capitalización compuesta
2.4 Fujo de caja
2.4.1 Diagrama de tiempo o flujo de caja
2.5 Tanto de interés correspondiente a uno de descuento
2.6 Capitalización para periodos fraccionarios
2.7 Planteamiento del problema
2.8 Fraccionamiento del tiempo en Capitalización simple
2.9 Fraccionamiento del tiempo en Capitalización compuesta
2.9.1 Convenio lineal
2.9.2 Convenio exponencial
2.10 Equivalencia de capitales

UNIDAD III

SERIES UNIFORMES O ANUALIDADES
3.1 Definición de anualidad
3.2 Requisitos para que exista una anualidad
3.3 Clasificación de las anualidades según el tiempo
3.4 Valor presente de una anualidad vencida
3.5 Cálculo de la anualidad en función del valor presente
3.6 Valor futuro de una anualidad vencida
3.7 Cálculo de la anualidad en función del valor futuro
3.8 Cálculo del tiempo en una anualidad vencida
3.9 Cálculo de la tasa de interés de una anualidad vencida

UNIDAD IV

ANUALIDADES Y PRESTACIONES

4.1 Anualidades anticipadas
4.2 Cálculo del tiempo de una anualidad anticipada
4.3 Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada
4.4 Anualidades diferidas
4.5 Anualidades perpetúas
4.6 Anualidades generales
4.7 Gradientes crecientes
4.8 Gradientes decrecientes
4.9 Crédito Infonavit

INDICE

UNIDAD I 11
FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA FINANCIERA 11
1.1. Postulados fundamentales de la matemática financiera 11
1.2. Operación financiera. Clasificación 13
1.3. Leyes financieras: Concepto y clasificación 14
1.4. Sistemas Financieros 16
1.5. Sistema de capitalización simple 17
1.6. Concepto y fórmula general de la capitalización simple. 18
1.7. Estructura de la tasa de interés 18
1.8. Interés simple e interés compuesto 21
1.8.1. Interés simple 21
1.8.2. Interés compuesto 23
UNIDAD II 30
INTERÉS Y CAPITALIZACIÓN 30
2.1. Interés civil e interés comercial: concepto y relaciones 30
2.2. Interés anticipado en capitalización simple. Relación con el interés por vencido. 32
2.3. Sistema de capitalización compuesta 36
2.4. Fujo de caja 36
2.4.1 Diagrama de tiempo o flujo de caja 36
2.5. Tanto de interés correspondiente a uno de descuento 42
2.6. Capitalización para periodos fraccionarios 48
2.7. Planteamiento del problema 48
2.8. Fraccionamiento del tiempo en Capitalización simple 48
2.9. Fraccionamiento del tiempo en Capitalización compuesta 49
2.9.1 Convenio lineal 49
2.9.2. Convenio exponencial 50
2.10. Equivalencia de capitales 51
UNIDAD III 52
SERIES UNIFORMES O ANUALIDADES 52
3.1. Definición de anualidad 52
3.2. Requisitos para que exista una anualidad 55
3.3. Clasificación de las anualidades según el tiempo 55

3.4. Valor presente de una anualidad vencida 58
3.5. Cálculo de la anualidad en función del valor presente 63
3.6. Valor futuro de una anualidad vencida 67
3.7. Cálculo de la anualidad en función del valor futuro 71
3.8. Cálculo del tiempo en una anualidad vencida 74
3.9. Cálculo de la tasa de interés de una anualidad vencida 78
UNIDAD IV 81
ANUALIDADES Y PRESTACIONES 81
4.1. Anualidades anticipadas 81
4.2. Cálculo del tiempo de una anualidad anticipada 90
4.3. Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada 93
4.4. Anualidades diferidas 96
4.5. Anualidades perpetúas 99
4.6. Anualidades generales 101
4.7. Gradientes crecientes 103
4.8. Gradientes decrecientes 106
4.9. Crédito Infonavit 108
VIDEOS ACADÉMICOS 111
Referencias 112

UNIDAD I

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA FINANCIERA

1.1. Postulados fundamentales de la matemática financiera

Es un área de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero, llamados capitales financieros.

Es una parte de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero, llamados capitales.

La Matemática Financiera es una derivación de la matemática aplicada que estudia el valor del dinero en el tiempo, combinando el capital, la tasa y el tiempo para obtener un rendimiento o interés, a través de métodos de evaluación que permiten tomar decisiones de inversión.

La matemática financiera es una rama de la matemática aplicada que estudia las variaciones cuantitativas que se producen en los capitales financieros en el transcurso del tiempo.

La Matemática Financiera también es llamada como análisis de inversiones, administración de inversiones o ingeniería económica.

La Matemática Financiera se basa en dos conceptos o pilares fundamentales:

La Capitalización: trata de estudiar y explicar los procesos de traslado de valores del presente al futuro.

La Actualización: permite estudiar y explicar los procesos de traer los valores del futuro al presente.

Postulado Fundamental de las Matemática Financiera

El capital crece con el transcurso del tiempo aplicado a una operación financiera. Este crecimiento del capital, en sentido positivo, se produce en forma continua, progresiva y acumulativa, y es lo que se conoce como "interés".

Capital Financiero: Cuando se habla de capital financiero nos referimos a una cuantía (C) de unidades monetarias asociada a un momento determinado de tiempo (t). Esto significa que se encuentra invertido.

Operación Financiera: Es toda operación que consiste en sustituir un capital o conjunto de capitales por otro mediante la aplicación de una ley financiera.

El Dinero: Dinero es cualquier cosa que los miembros de una comunidad estén dispuestos a aceptar como pago de bienes y deudas, cuya función específica estriba en desempeñar la función de equivalente general.

Equivalencias: Dos sumas son equivalentes, cuando resulta indiferente recibir una suma de dinero hoy y recibir otra diferente de mayor cantidad transcurrida un período.

Valor del Dinero en el Tiempo: Valor del dinero en el tiempo, significa que sumas iguales de dinero no tendrán el mismo valor si se encuentran ubicadas en diferentes tiempos.

El Interés: El interés es el rendimiento que produce un capital. También se puede decir que es el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero.

Tasa y Tipo de interés: Indica el costo que representa obtener dinero en préstamo. En términos matemáticos la tasa de interés es la razón entre el interés I y el capital C por unidad de tiempo: Si la tasa de interés se multiplica por 100 se obtiene la tasa de interés en porcentaje o tipo de interés.

El tipo de interés es el valor de una unidad monetaria en el tiempo. Cuando la tasa de interés se expresa en porcentaje se llama tipo de interés, y al valor correspondiente expresado en decimales se denomina como tasa de interés, pero en la práctica es al primero al que le llaman tasa de interés.

1.2. Operación financiera. Clasificación

Las operaciones financieras pueden clasificarse según diferentes criterios. Los más interesantes para nuestro estudio son:

Según la certeza de la cuantía y el vencimiento:

- Ciertas. Cuando cuantía y vencimiento están determinadas. Sólo veremos estas.
- Aleatorias. Cuando se desconoce cuantía, o vencimiento o ambas.

Según la duración de la operación:

- A corto plazo, operaciones que duran un año o menos.
- A largo plazo, operaciones que duran más de un año.

Según el número de capitales que intervienen en la operación:

- Simples, cuando hay un sólo capital en prestación y contraprestación.
- Compuestas, en caso contrario al anterior. Pueden ser: de constitución, cuando hay varios capitales en la prestación y uno sólo en la contraprestación al final de la duración.
- de amortización, cuando hay un sólo capital en la prestación al inicio de la operación y varios en la contraprestación.

Según el crédito de la operación:

- Unilateral, cuando la prestación mantiene su posición acreedora durante toda la duración de la operación.
- Recíproco, cuando la parte de la contraprestación pasa a ser acreedora en algún momento.

Según la ley financiera:

- Capitalización, cuando los vencimientos de todos los capitales son anteriores o iguales al punto de valoración "p".
- Descuento o actualización, cuando los vencimientos de todos los capitales son posteriores o iguales al punto de valoración "p".
- Mixtas, cuando algunos vencimientos son anteriores y otros posteriores a "p".

1.3. Leyes financieras: Concepto y clasificación

Se entiende por LEY FINANCIERA, aquella fórmula que permite calcular el valor de un capital financiero en otro tiempo para poder intercambiarlos. Para ello se acumulan o se descuentas intereses: intereses simples, compuestos y continuos.

Propiedades de todas las Leyes Financieras

1. Los intereses que se acumulan o se descuentan deben ser proporcionales a la cuantía. Dicho con otras palabras, que los intereses varían en función a la cuantía. Cuanto mayor sea la cuantía mayor serán los intereses.

L (C, t; p) = C * L (1, t; p) es decir, L es homogénea de grado 1 en la cuantía

2. Los intereses que se acumulen o se descuenten dependerán de la amplitud del intervalo de capitalización o de descuento. Cuanto mayor sea esta amplitud, mayores serán los intereses que debemos de acumular o descontar.

L (C, t; p) debe ser creciente respecto a p y decreciente respecto a t

3. Después de acumular o descontar intereses nos debe de quedar siempre una cuantía positiva. Los intereses nunca pueden ser mayores a la cuantía.

L (C, t; p) debe ser positiva

4. Para amplitudes de tiempo distintas pero muy próximas, los intereses a acumular o descontar también deben ser muy parecidos.

L (C, t; p) debe ser continua en t y en p.

Una OPERACIÓN FINANCIERA es un intercambio de capitales financieros, con distintos vencimientos, de acuerdo con un Criterio Financiero de Valoración (Ley Financiera).

Tipos de interés a cobrar.

Momento en el que hay que pagar los intereses y devolver el principal.

Tiempo (duración de la operación).

Supone un intercambio de capitales:

Prestación (entrega de capitales financieros)

Contraprestación (recepción de capitales financieros)

Debe cumplirse: Que el intercambio de capitales no sea simultánea (producirse en dos momentos de tiempo diferentes).

Que exista mutuo acuerdo entre los sujetos implicados en la operación (acuerdo de que el valor de la contraprestación coincide con el de la contraprestación).

Que medio una ley financiera de valoración para que se cumpla la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación.

En toda operación financiera intervienen: Prestamista. Es el que inicia la operación entregando el primer capital (presta el capital). También llamado Acreedor. Prestatario. Es el que recibe ese primer capital (toma prestada). También llamado Deudor. Tendrá la obligación de devolver al prestamista el capital prestado junto con los intereses devengados.

Prestación. Capital/es que el prestamista se compromete a entregar al inicio de la operación.

Contraprestación. Capital/es que el prestatario se compromete a entregar al vencimiento de la operación. Formado por el capital prestado más los intereses.

Clases de Operaciones Financieras

Naturaleza de los capitales que intervienen en la operación:

OPERACIONES CIERTAS: Todos los capitales son ciertos (conocidos tanto en su cuantía como en su vencimiento). PRESTAMO INTERÉS FIJO.

OPERACIONES ALEATORIAS: Cuando al menos uno de los capitales es aleatoria. SEGURO DE VIDA.

Duración de la operación:

OPERACIONES A CORTO PLAZO: Son aquellas operaciones cuya duración no es superior al año. Para cálculo de los capitales empleados LEYES SIMPLES.

OPERACIONES A MEDIO Y LARGO PLAZO: Operaciones cuya duración es superior a 1 año. Para el cálculo de los capitales empleamos LEYES COMPUESTAS.

Situación crediticia:

OPERACIONES DE CRÉDITO UNILATERAL: Cuando el sujeto acreedor conserva este carácter durante todas las operaciones. PRESTAMO.

OPERACIONES DE CRÉDITO RECIPROCO: Cuando el sujeto acreedor pasa a ser deudor en algún momento de la operación. CUENTA CORRIENTE.

1.4. Sistemas Financieros

En un sentido general, el sistema financiero (sistema de finanzas) de un país está formado por el conjunto de instituciones, medios y mercados, cuyo fin primordial es canalizar el ahorro que generan los prestamistas (o unidades de gasto con superávit) hacia los prestatarios (o unidades de gasto con déficit), así como facilitar y otorgar seguridad al movimiento de dinero y al sistema de pagos.

De acuerdo con Alejandro Martínez Torres Omar, en su libro Análisis económico, el sistema financiero es el conjunto de regulaciones, normativas, instrumentos, personas e instituciones que operan y constituyen el mercado de dinero así como el mercado de capitales. Orientando y dirigiendo tanto el ahorro como la inversión, poniendo en contacto la oferta y la demanda de dinero de un país.

La labor de intermediación es llevada a cabo por las instituciones que componen el sistema financiero, y se considera básica para realizar la transformación de los activos financieros, denominados primarios, emitidos por las unidades inversoras (con el fin de obtener fondos para aumentar sus activos reales), en activos financieros indirectos, más acordes con las preferencias de los ahorradores.

El sistema financiero comprende, tanto los instrumentos o activos financieros, como las instituciones o intermediarios y los mercados financieros: los intermediarios compran y venden los activos en los mercados financieros.

Clasificación del sistema financiero esta se separa en tres grandes categorías.

- Entidades reguladoras y normativas: estas son las encargadas de vigilar y regular el funcionamiento de los intermediarios financieros.
- Intermediarios financieros: son instituciones que obtienen recursos de un prestamista y los ofrece a los prestatarios. Existen diferentes intermediarios como las sociedades inmobiliarias, los fondos de inversión inmobiliaria, las compañías de seguro y los fondos de pensiones.
- Organismos de apoyo: son aquellas instituciones del ramo que están autorizadas para captar y colocar de manera masiva y amplia, recursos del público ni recibir depósitos en cuenta de cheques.

1.5. Sistema de capitalización simple

La capitalización simple es un tipo de capitalización de recursos financieros que se caracteriza porque la variación que sufre el capital no es acumulativa. Los intereses que se generan en cada período no se agregan al capital para el cálculo de los nuevos intereses del siguiente período, aspecto que la diferencia de la capitalización compuesta. De esta manera los intereses generados en cada uno de los períodos serán iguales.

Se dice también que la capitalización constituye un medio de financiamiento para las empresas, mediante la inyección de capital para poder desarrollar sus proyectos. Al respecto hay dos opciones que tienen las empresas:

El financiamiento propio

El financiamiento externo. En donde nuevamente se encuentra con dos opciones.

Recurrir al mercado crediticio, y por tanto solicitar un préstamo de consumo a un banco (sin perjuicio del costo de oportunidad)

Dirigirse al mercado de capitales, es decir, emitir valores (seas acciones o bonos, o sea, títulos de crédito o títulos de deuda), mediante la emisión de tales valores que se venderán en el mercado, la empresa está capitalizando.

Para las sociedades anónimas también existe como medio de capitalización la opción de capitalizar las utilidades. Se consultará a la junta de accionistas si prefiere que sus dividendos sean pagados o sean aportados al capital de la sociedad.

La ley de capitalización simple se utiliza generalmente para operaciones a corto plazo, es decir, menores a un año. Para plazos superiores se suele utilizar la capitalización compuesta. Esto se debe a que en períodos inferiores a un año la capitalización simple produce más intereses que la capitalización compuesta, aunque en períodos superiores al año la situación es la contraria.

1.6. Concepto y fórmula general de la capitalización simple.

Concepto: Operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital presente por otro equivalente con vencimiento posterior, mediante la aplicación de la ley financiera en régimen de simple.

Descripción de la operación

Partiendo de un capital (C0) del que se dispone inicialmente -capital inicial-, se trata de determinar la cuantía final (Cn) que se recuperará en el futuro sabiendo las condiciones en las que la operación se contrata (tiempo -n- y tipo de interés -i-).

Este capital final o montante se irá formando por la acumulación al capital inicial de los intereses que genera la operación periódicamente y que, al no disponerse de ellos hasta el final de la operación, se añaden finalmente al capital inicial.

Características de la operación

Los intereses no son productivos, lo que significa que:

A medida que se generan no se acumulan al capital inicial para producirnuevos intereses en el futuro y, por tanto

Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital inicial, altanto de interés vigente en dicho período.

1.7. Estructura de la tasa de interés

Debe contemplarse que la intención de todo inversionista es la creación de valor (utilidades, rendimientos o dividendos), entendiéndose ésta como el desarrollo de todas aquellas actividades que tengan un propósito, la generación de un beneficio para aquel que ponga en riesgo su capital.

Todo inversionista procura aplicar su capital en las mejores opciones disponibles en el mercado o proyectos considerando que pasado un tiempo “t” (denominado plazo) no sólo recupere el capital dispuesto en la inversión sino adicionalmente obtenga un beneficio. Si se considera que el capital invertido está representado como una Cantidad Inicial (ci), la cual se aplica a un determinado plazo de manera que al término del mismo se obtiene una Cantidad Final (cf), cumpliendo, dentro de lo posible con la siguiente condición:

$$CF >> CI \ (1)$$

Donde a la diferencia entre CF y CI se denomina interés, o sea, el beneficio obtenido por aplicar y arriesgar el capital:

$$I = CF - CI \ (2)$$

El interés también puede representarse como la proporción de la CI que el inversionista recibiría al final del plazo, o sea, la tasa de interés:

$$I = \frac{CF - CI}{CI} * 100$$

Básicamente la composición de las tasas de interés no sólo debe establecer la proporción de beneficio que el inversionista espera recibir por arriesgar su dinero, sino que las tasas de interés deben incluir la cobertura de todos aquellos factores que pueden incidir en el cambio de valor del dinero en el tiempo tal como se muestra a continuación.

I (%) = f [E(tasa de inflación),

E(tasa real),

E(prima de liquidez),

E(prima de riesgo)]

Nótese que la estructura general de una tasa de interés matemáticamente es una función donde cada término situado al lado derecho está precedido por un operador de expectativas, "E". Dentro de esta función en primer lugar se identifica a la tasa de inflación, la cual es la estimación de mercado que puede obedecer a un exceso de productos o circulante. Los inversionistas tratan de estimar cuál será la inflación teniendo en cuenta que esperan que el dinero invertido conserve su poder adquisitivo, en consecuencia, las tasas de interés en el mercado incluyen una proporción que genere una cobertura que evite la pérdida de su inversión.

En segundo lugar, se ubica la tasa de interés real, la cual se refiere a la tasa de interés que expone el precio del dinero, como producto, dentro de los mercados a lo largo del tiempo, ante la ausencia de inflación. La tasa real es aquella cuyo interés iguala las solicitudes y las coberturas de préstamos en la economía; en otras palabras, es el costo de oportunidad del capital y que puede cubrir las expectativas de cada inversionista.

En 1930, Irving Fisher expuso que todo aquel que desee maximizar su riqueza debe fundamentar sus decisiones de consumo e inversión en la tasa de interés determinada por e1 mercado, más que en sus propias y subjetivas tasas de rendimiento. Las decisiones óptimas de inversión están separadas de los gustos y las preferencias de los individuos. Lo anterior refiere los "Principios de separación de Fisher", los cuales consideran un entorno ideal sin inflación y cumplimiento de las obligaciones, tal como se indica a continuación:

Suponiendo un intercambio de fondos que permita la total cobertura de los requerimientos de dinero a través de préstamos, entonces:

1. Habrá una tasa de interés de equilibrio que igualará el monto de los préstamos solicitados con el monto de los préstamos concedidos;

2. Los individuos descartarán sus propias tasas subjetivas de interés y usarán la tasa de rendimiento de equilibrio del mercado para tomar decisiones óptimas de inversión, y

3. Todos los individuos se encontrarán mejor de lo que hubieran estado en un mundo sin oportunidades de solicitud y concesión de préstamos.

En relación con la prima de liquidez se puede mencionar que está definida por los mecanismos a través de los cuales el capital invertido será reintegrado, así como los beneficios esperados. Los términos pactados en cuanto a moneda o especie y los plazos son elementos determinantes de la prima de liquidez.

En cuanto a la prima de riesgo, ésta se encuentra relacionada con las condiciones del entorno globalizado en el que se desarrollará la inversión, ya que los diversos factores que componen los ámbitos político, económico y social pueden ofrecer facilidades o limitantes a las inversiones, por lo que los inversionistas deben contar con cuadros de información que les expongan las condiciones esperadas a lo largo del plazo de la inversión y que les apoyen en el proceso de toma de decisiones, permitiendo definir la prima de riesgo.

1.8. Interés simple e interés compuesto

1.8.1. Interés simple

Se calcula utilizando la misma cantidad inicial o principal de inversión o préstamo aplicándola durante un tiempo "t", donde al término del mismo el interés generado es retirado o ignorado, procediendo a aplicar el principal de nueva cuenta, repitiendo el criterio expuesto tantos periodos como se requiera; en otras palabras, se evita acumular al principal los intereses generados. Los intereses no forman parte del nuevo periodo para su cálculo, es decir, no se recapitaliza.

En los siguientes diagramas se muestra de manera gráfica cómo se desarrolla el interés simple. Para efectos de simplificar el manejo matemático se renombra al principal como presente (P), ya que representa la cantidad con la que cuenta inicialmente la persona.

Asimismo, redefiniremos la cantidad final (CF) como futuro (F), considerando que representa el monto esperado por la persona al término del periodo de aplicación; por lo tanto, se presenta en la gráfica 1.

Por consiguiente, el interés acumulado para "n" periodos por interés simple queda expresado

Como:

$$IS = P \cdot n \cdot i \quad (5)$$

Donde:

IS = Interés simple acumulado

P = Cantidad Inicial o Principal o Presente

n = número de periodos de aplicación

i = tasa de interés

Asimismo, se puede establecer que la Cantidad Final o Futuro (F) a obtener después de “n” periodos por Interés Simple se puede calcular, después de desarrollar la sucesión, como:

$$F = P + IS = P\,[1 + (n \cdot i)]$$

Ejemplo:

El 1 de enero de 2011 la senorita Arrioja decide hacer uso de una de las prestaciones que le ofrece la empresa donde labora, por lo que pide prestados $2,000 a cuenta de su aguinaldo, pagando 4% mensual bajo interes simple. Por lo que se desea saber:

a) .Cual sera el valor del futuro a pagar al final del ano?

b) .A cuanto ascendera el interes a pagar durante 2011?

Solución

P = $2,000

i = 4% mensual

n = 12 meses

IS = Interes simple

F = ?

a) Para el caso del valor futuro, tenemos:

F = P + IS

= P[1 + (n i)] sustituyendo valores en ecuacion (6):

= $2,000 1 12

4/100

= $2,000[(1 + (12 × 0.04)]

= $2,000[(1 + (0.48)]

= $2,000 (1.48)

F = $2,960.00

b) IS = P n i sustituyendo valores en ecuacion (5)

= $2,000 12

4/100

= $2,000(12)(0.04)]

= $2,000(0.48)]

IS = $960.00

1.8.2. Interés compuesto

INTERÉS COMPUESTO: Se le conoce como interés sobre interés, se define como la capitalización de los intereses al término de su vencimiento PERIODO DE CAPITALIZACIÓN: Es el intervalo de tiempo convenido y se calcula mediante la siguiente ecuación: n = ma.m

Dónde: n= número de periodos ma= número de años m= frecuencia de capitalización FRECUENCIA DE CAPITALIZACIÓN: Es el número de veces en un año que de interés se suma al capital MONTO COMPUESTO: Es el total, el capital, incluyendo los interés, capitalizables; dicho de otra forma es el capital más los intereses capitalizados MONTO COMPUESTO DE INTERÉS FRACCIONARIO:

Existen dos formas para calcularlo: a) Utilizando el cálculo del monto compuesto más el monto simple b) El segundo método es calculándolo de manera fraccionaria TASA

NOMINAL: Es aquella que denota un crecimiento en el monto de dinero, sin ajustar la moneda por inflación. TASA EFECTIVA: Es cuando el interés se capitaliza en forma semestral, trimestral o mensual, la cantidad efectivamente pagada o ganada es mayor que si se compone en forma anual. TASA EQUIVALENTE: Cuando dos tasas de interés anuales con diferentes periodos de capitalización producen el mismo interés compuesto al cabo de un año. Son las que se pagan al final del periodo, las que teniendo diferente convertibilidad producen un mismo monto.

En la mayoría del análisis económicos y financieros se emplean cálculos con interés compuesto.

En el caso del interés compuesto, el interés generado durante cada periodo de interés se calcula sobre el principal más el monto total del interés acumulado en todos los periodos anteriores. Así, el interés compuesto es un interés sobre el interés.

El interés compuesto refleja el efecto del valor del dinero en el tiempo sobre el interés. El interés para un periodo ahora se calcula de la siguiente manera:

Interés compuesto = (principal + todos los intereses acumulados) (tasa de interés)

En términos matemáticos, la cantidad de intereses I para el periodo de tiempo t se calcula con la siguiente relación.

$$I_t = \left(P + \sum_{j=1}^{j=t-1} I_J\right)(i)$$

Ejemplo:

Una compañía de ingeniería pide un préstamo de $100 000 con un interés de 10% compuesto anual, cuyo principal y todos los intereses los pagará después de tres años. Calcule el interés anual y el adeudo total después de tres años. Elabore una gráfica del interés y el monto total que se adeuda en cada año, y compare los resultados de este ejemplo con los del anterior.

Solución

Para incluir la naturaleza compuesta del interés, el interés anual y el adeudo total de cada año se calculan mediante la ecuación

Interés, año 1: 100 000(0.10) = $10 000

Adeudo total, año 1: 100 000 + 10 000 = $110 000

Interés, año 2: 110 000(0.10) = $11 000

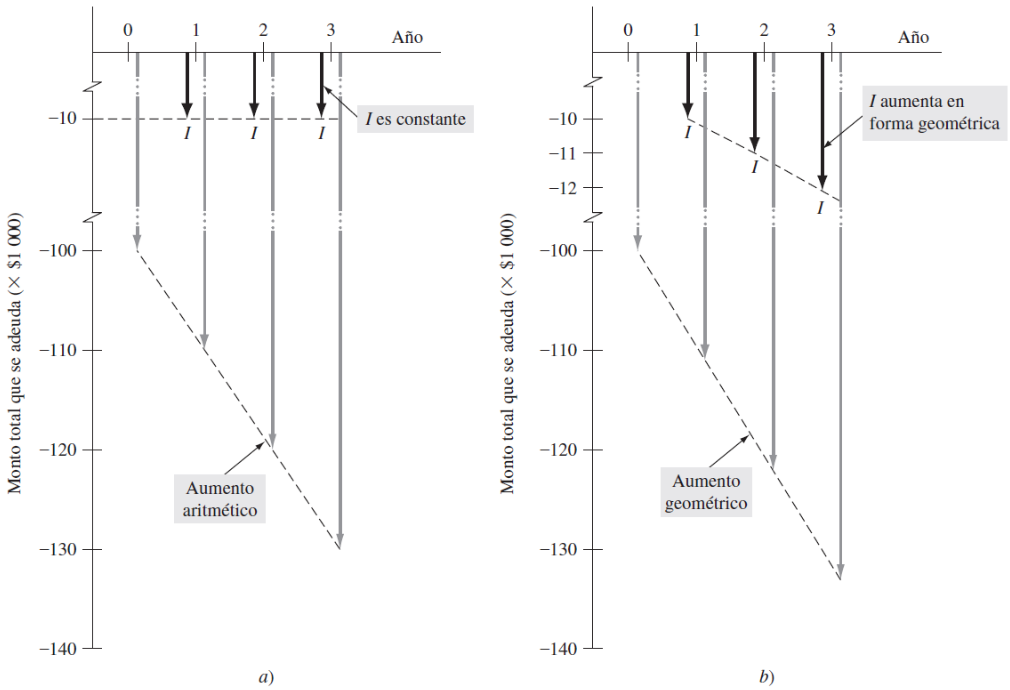
Adeudo total, año 2: 110 000 + 11 000 = $121 000

Interés, año 3: 121 000(0.10) = $12 100

Adeudo total, año 3: 121 000 + 12 100 = $133 100

El plan de pago no requiere ningún pago hasta el año 3, cuando se pagarán todos los intereses y el principal, un total de $133 100. La fi gura 1-11 usa un diagrama de flujo de efectivo para comparar al final del año a) el interés simple y b) interés compuesto, y las cantidades totales que se adeudan. Quedan claras las diferencias debidas al interés compuesto. Para el préstamo con interés compuesto se adeuda una cantidad adicional de $133 100   130 000 = $3 100 de intereses.

Observe que mientras el interés simple que se adeuda cada año es constante, el compuesto crece en forma geométrica. Debido a este crecimiento geométrico del interés compuesto, la diferencia entre la acumulación con interés simple y con compuesto aumenta rápidamente a medida que pasa el tiempo. Por ejemplo, si el préstamo fuera a 10 años, no a 3, el pago adicional para el interés compuesto resultaría de $59 374.



Una forma más eficiente de calcular el adeudo total después de cierto número de años en el ejemplo anterior consiste en aprovechar que el interés compuesto se incrementa en forma geométrica. Esto permite omitir el cálculo del interés por año. En este caso, el adeudo total al final de cada año es el siguiente:

Año 1: $100 000(1.10)1 = $110 000

Año 2: $100 000(1.10)2 = $121 000

Año 3: $100 000(1.10)3 = $133 100

Esto permite calcular directamente los totales futuros que se adeudan, sin cálculos intermedios. La forma general de la ecuación es la siguiente:

Adeudo total después de n años = principal (1 + tasa de interés)n años = P(1 + i)n donde i se expresa en forma decimal. La ecuación (1.10) se aplicó para obtener los $133 100 que se deben después de tres años. Esta relación fundamental se empleará mucho en los capítulos siguientes.

Para demostrar que los diferentes planes de pago de préstamos pueden ser equivalentes aunque difieran sustancialmente en cuanto a monto de un año a otro, se combinan los conceptos de tasa de interés,

interés simple, interés compuesto y equivalencia. Esto también muestra que existen varias formas de tomar en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

Ejemplo:

En la tabla 1-1 se presentan los detalles de cuatro planes para pagar un préstamo. Cada plan es para pagar un préstamo de $5 000 en 5 años, con una tasa de interés compuesto de 8% anual.

Plan 1: Pago total al final. No hay pago de intereses ni del principal hasta el final del año 5. Los intereses se acumulan cada año sobre el principal y todos los intereses acumulados.

Plan 2: Los intereses se pagan cada año, el principal al final. El interés acumulado se paga cada año, y el principal hasta el final del año 5.

Plan 3: Pago anual del interés y una parte del principal. Los intereses acumulados y la quinta parta del principal (o $1 000) se pagan cada año. El saldo del préstamo disminuye cada año, de modo que el interés (columna 2) se reduce cada año.

Plan 4: Pagos anuales iguales del interés compuesto y del principal. Se hacen pagos iguales cada año; una parte se destina al reembolso del principal y el resto cubre los intereses generados. Como el saldo del préstamo disminuye con un ritmo menor que en el plan 3 como consecuencia de los pagos iguales de fi n de año, el interés disminuye, aunque con un ritmo más lento.

TABLA 1-1 Diferentes esquemas de pago durante 5 años para una deuda de $5 000 con un interés compuesto de 8% anual

(1) Final del año	(2) Interés que se adeuda para el año	(3) Total que se adeuda al final del año	(4) Pago al final del año	(5) Total que se adeuda después del pago
Plan 1: Pagar todo al final				
0				$5 000.00
1	$400.00	$5 400.00	—	5 400.00
2	432.00	5 832.00	—	5 832.00
3	466.56	6 298.56	—	6 298.56
4	503.88	6 802.44	—	6 802.44
5	544.20	7 346.64	$–7 346.64	
Total			$–7 346.64	
Plan 2: Pago anual del interés; pago del principal al final				
0				$5 000.00
1	$400.00	$5 400.00	$ – 400.00	5 000.00
2	400.00	5 400.00	– 400.00	5 000.00
3	400.00	5 400.00	– 400.00	5 000.00
4	400.00	5 400.00	– 400.00	5 000.00
5	400.00	5 400.00	–5 400.00	
Total			$–7 000.00	
Plan 3: Pago anual del interés y de una parte del principal				
0				$5 000.00
1	$400.00	$5 400.00	$– 1 400.00	4 000.00
2	320.00	4 320.00	– 1 320.00	3 000.00
3	240.00	3 240.00	– 1 240.00	2 000.00
4	160.00	2 160.00	– 1 160.00	1 000.00
5	80.00	1 080.00	–1 080.00	
Total			$–6 200.00	
Plan 4: Pago anual de cantidades iguales de intereses y capital				
0				$5 000.00
1	$400.00	$5 400.00	$–1 252.28	4 147.72
2	331.82	4 479.54	– 1 252.28	3 227.25
3	258.18	3 485.43	– 1 252.28	2 233.15
4	178.65	2 411.80	– 1 252.28	1 159.52
5	92.76	1 252.28	–1 252.28	
Total			$–6 261.40	

Comente sobre la equivalencia de cada plan de 8% de interés compuesto.

Elabore un plan de pagos con un interés simple de 8% anual con el mismo enfoque que el plan 2. Comente acerca de las cantidades totales que se pagan con los dos planes.

Solución

a) Las cantidades de los pagos anuales son diferentes en cada plan de pago, y las cantidades totales para la mayoría de planes son distintas, aunque cada plan requiere exactamente 5 años. La diferencia en los montos totales pagados se explican por el valor del dinero en el tiempo y por el pago parcial del principal antes del año 5.

Un préstamo de $5 000 en el momento 0 con 8% de interés compuesto anual equivale a cada uno de los siguientes:

Plan 1 $7 346.64 al fi nal del año 5

Plan 2 $400 por año durante 4 años y $5 400 al fi nal del año 5

Plan 3 Pagos decrecientes del interés y partes del principal en los años 1 ($1 400) a 5 ($1 080)

Plan 4 $1 252.28 por año, durante 5 años

Es común que un estudio de ingeniería económica use el plan 4; el interés es compuesto y se paga una cantidad constante cada periodo. Esta cantidad cubre el interés acumulado y una parte del pago del principal.

b) En la tabla 1-2 se detalla el plan de pagos con 8% de interés simple anual. Como el interés acumulado anual de $400 se paga cada año y el principal de $5 000 en el año 5, el programa es exactamente igual que con el interés compuesto anual de 8%, y la cantidad total que se paga es la misma, de $7 000. En este caso inusual, el interés simple y el compuesto dan como resultado la misma cantidad pagada. Cualquier diferencia de este esquema hará que difieran los dos planes y cantidades.

TABLA 1-2 Esquema de pagos a 5 años de $5 000 con interés simple de 8% anual

Final del año	Interés que se adeuda durante el año	Total que se adeuda al final del año	Pago al final del año	Total que se adeuda después del pago
0				$5 000
1	$400	$5 400	$ – 400	5 000
2	400	5 400	– 400	5 000
3	400	5 400	– 400	5 000
4	400	5 400	– 400	5 000
5	400	5 400	–5 400	0
Total			$ – 7 000	

UDS

UNIDAD II

INTERÉS Y CAPITALIZACIÓN

2.1. Interés civil e interés comercial: concepto y relaciones

Interés simple ordinario o comercial o Bancario, es aquel que se calcula considerando el año de 360 días. El mes comercial de 30 días. La utilización del año con 360 días simplifica algunos cálculos. Sin embargo, aumenta el interés cobrado por el acreedor.

Interés simple real o exacto o Matemático, es el que se calcula considerando un año calendario con 365 días o 366 días si se trata de un año bisiesto.

Debe contemplarse que la intención de todo inversionista es la creación de valor (utilidades, rendimientos o dividendos), entendiéndose ésta como el desarrollo de todas aquellas actividades que tengan un propósito, la generación de un beneficio para aquel que ponga en riesgo su capital.

Todo inversionista procura aplicar su capital en las mejores opciones disponibles en el mercado o proyectos considerando que pasado un tiempo “t” (denominado plazo) no sólo recupere el capital dispuesto en la inversión sino adicionalmente obtenga un beneficio. Si se considera que el capital invertido está representado como una Cantidad Inicial (ci), la cual se aplica a un determinado plazo de manera que al término del mismo se obtiene una Cantidad Final (cf), cumpliendo, dentro de lo posible con la siguiente condición:

$$CF >> CI$$

Donde a la diferencia entre CF y CI se denomina interés, o sea, el beneficio obtenido por aplicar y arriesgar el capital:

$$I = CF - CI$$

El interés también puede representarse como la proporción de la CI que el inversionista recibiría al final del plazo, o sea, la tasa de interés:

$$I = \frac{CF - CI}{CI} \cdot 100$$

Básicamente la composición de las tasas de interés no sólo debe establecer la proporción de beneficio que el inversionista espera recibir por arriesgar su dinero, sino que las tasas de interés deben incluir la cobertura de todos aquellos factores que pueden incidir en el cambio de valor del dinero en el tiempo tal como se muestra a continuación.

I (%) = f [E(tasa de inflación),

E(tasa real),

E(prima de liquidez),

E(prima de riesgo)]

Nótese que la estructura general de una tasa de interés matemáticamente es una función donde cada término situado al lado derecho está precedido por un operador de expectativas, "E". Dentro de esta función en primer lugar se identifica a la tasa de inflación, la cual es la estimación de mercado que puede obedecer a un exceso de productos o circulante.

Los inversionistas tratan de estimar cuál será la inflación teniendo en cuenta que esperan que el dinero invertido conserve su poder adquisitivo, en consecuencia, las tasas de interés en el mercado incluyen una proporción que genere una cobertura que evite la pérdida de su inversión.

En segundo lugar se ubica la tasa de interés real, la cual se refiere a la tasa de interés que expone el precio del dinero, como producto, dentro de los mercados a lo largo del tiempo, ante la ausencia de inflación. La tasa real es aquella cuyo interés iguala las solicitudes y las coberturas de préstamos en la economía; en otras palabras, es el costo de oportunidad del capital y que puede cubrir las expectativas de cada inversionista.

En 1930, Irving Fisher expuso que todo aquel que desee maximizar su riqueza debe fundamentar sus decisiones de consumo e inversión en la tasa de interés determinada por e1 mercado, más que en sus propias y subjetivas tasas de rendimiento. Las decisiones óptimas de inversión están separadas de los gustos y las preferencias de los individuos. Lo anterior refiere los "Principios de separación de Fisher", los cuales consideran un entorno ideal sin inflación y cumplimiento de las obligaciones, tal como se indica a continuación:

Suponiendo un intercambio de fondos que permita la total cobertura de los requerimientos de dinero a través de préstamos, entonces:

1. Habrá una tasa de interés de equilibrio que igualará el monto de los préstamos solicitados con el monto de los préstamos concedidos;

2. Los individuos descartarán sus propias tasas subjetivas de interés y usarán la tasa de rendimiento de equilibrio del mercado para tomar decisiones óptimas de inversión, y

3. Todos los individuos se encontrarán mejor de lo que hubieran estado en un mundo sin oportunidades de solicitud y concesión de préstamos.

En relación con la prima de liquidez se puede mencionar que está definida por los mecanismos a través de los cuales el capital invertido será reintegrado, así como los beneficios esperados. Los términos pactados en cuanto a moneda o especie y los plazos son elementos determinantes de la prima de liquidez.

En cuanto a la prima de riesgo, ésta se encuentra relacionada con las condiciones del entorno globalizado en el que se desarrollará la inversión, ya que los diversos factores que componen los ámbitos político, económico y social pueden ofrecer facilidades o limitantes a las inversiones, por lo que los inversionistas deben contar con cuadros de información que les expongan las condiciones esperadas a lo largo del plazo de la inversión y que les apoyen en el proceso de toma de decisiones, permitiendo definir la prima de riesgo.

2.2. Interés anticipado en capitalización simple. Relación con el interés por vencido.

Como se ha comentado, toda persona que cuente con una cierta cantidad de dinero tendrá la intención de aplicarlo de la mejor manera a efecto de generar la mayor cantidad de beneficios posibles. En atención a lo anterior, la persona puede optar por invertir o salvaguardar su dinero por lo que debe tener en claro los mecanismos o las formas de aplicación, así como de la recuperación de los beneficios.

Si los beneficios esperados están definidos por intereses, resultado de inversiones o ahorro, entonces éstos pueden generarse bajo dos modalidades:

Interés simple.

Se calcula utilizando la misma cantidad inicial o principal de inversión o préstamo aplicándola durante un tiempo “t”, donde al término del mismo el interés generado es retirado o ignorado, procediendo a aplicar el principal de nueva cuenta, repitiendo el criterio expuesto tantos periodos como se requiera; en otras palabras, se evita acumular al principal los intereses generados. Los intereses no forman parte del nuevo periodo para su cálculo, es decir, no se recapitaliza.

En los siguientes diagramas se muestra de manera gráfica cómo se desarrolla el interés simple. Para efectos de simplificar el manejo matemático se renombra al principal como presente (P), ya que representa la cantidad con la que cuenta inicialmente la persona. Asimismo, redefiniremos la cantidad final (CF) como futuro (F), considerando que representa el monto esperado por la persona al término del periodo de aplicación; por lo tanto se presenta en la gráfica 1.

Por consiguiente, el interés acumulado para “n” periodos por interés simple queda expresado como:

$$\mathrm{IS} = \mathrm{P} \cdot n \cdot i$$

Donde

IS = Interés simple acumulado

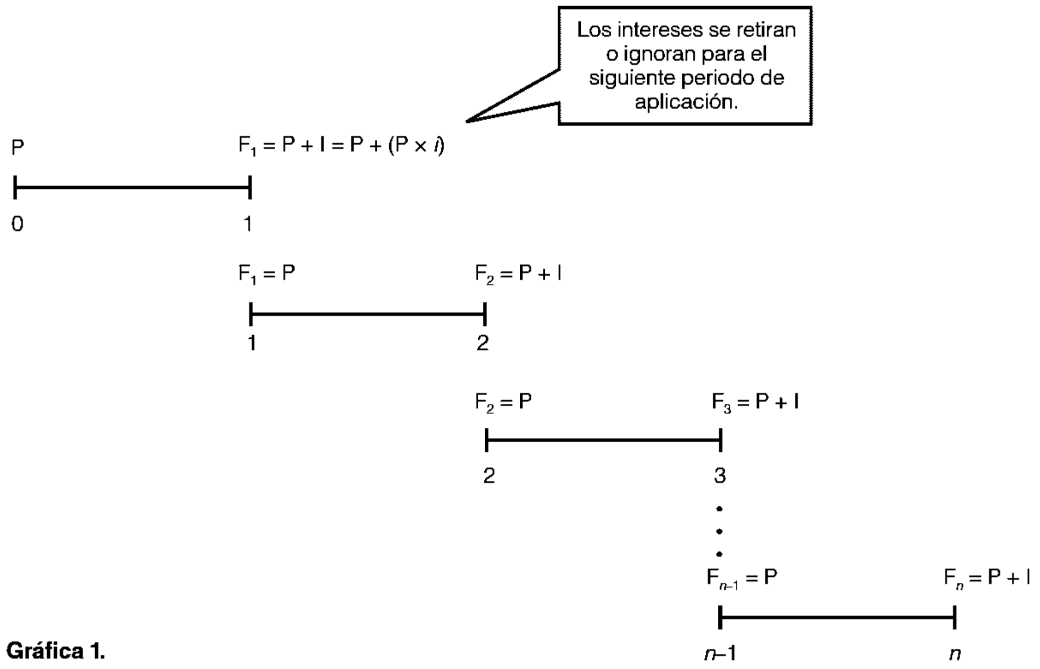
P = Cantidad Inicial o Principal o Presente

n = número de periodos de aplicación

i = tasa de interés

Asimismo, se puede establecer que la Cantidad Final o Futuro (F) a obtener después de “n” periodos por Interés Simple se puede calcular, después de desarrollar la sucesión, como:

$$\mathrm{F} = \mathrm{P} + \mathrm{IS} = \mathrm{P}\ [1 + (n \cdot i)]$$



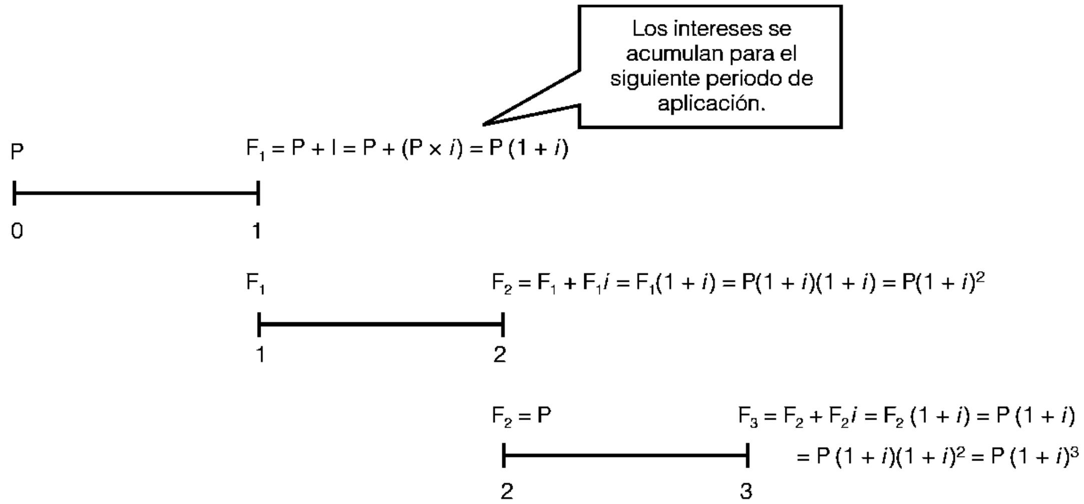
Gráfica 1.

Interés compuesto.

Se calcula utilizando la cantidad inicial o principal de inversión o préstamo aplicándolo durante un tiempo "t", donde al término del mismo, el interés generado se integra al principal, aplicando el monto acumulado al siguiente periodo procediendo a repetir el criterio expuesto tantas veces como periodos sean requeridos; en otras palabras, se acumula al principal o presente los intereses generados al final de cada periodo de aplicación.

Al hecho de que al final de un periodo de aplicación los intereses generados se integren al principal o presente para efectos del cálculo de los intereses del periodo siguiente se le denomina capitalización de intereses.

De manera gráfica el interés compuesto queda explicado en el siguiente diagrama,



Como se puede observar y deducir, el valor futuro de cada periodo de aplicación es igual al valor presente "P" multiplicado por (1 + i) elevado al número de periodos de aplicación (n), por lo que se puede señalar que el valor futuro de un monto "P" por interés compuesto ueda expresado como

$$F = P(1 + i)^n$$

donde:

F = cantidad final o futuro

P = principal o valor presente

i = tasa de interés

n = número de periodos

Normalmente los intereses se pagan al final del periodo. Esta es la práctica habitual, y cuando se hace esto hablamos de intereses pospagables, o "por vencido". Otro tipo de intereses menos habitual son los intereses prepagables o intereses anticipados, que son aquellos que se pagan al inicio del periodo.

Partimos de un capital inicial en t=0 de 1 €, y vamos a capitalizar 1 periodo, que normalmente será 1 año. Veamos lo que sucede tanto si el pago de intereses se pacta por anticipado o por vencido.

2.3. Sistema de capitalización compuesta

En economía financiera, la capitalización compuesta tiene en cuenta para la obtención del rendimiento final el capital aportado inicialmente, así como los intereses generados en todo el tiempo. De esta manera, el resultado no estará compuesto sólo de la aportación inicial y de los intereses generados sobre éste, sino también las ganancias generadas como consecuencia de la incorporación de los intereses al principal de manera acumulativa.

La elección de una capitalización compuesta o de otro tipo vendrá definida por la valoración de la inversión así de la necesidad de liquidez o establecimiento de una renta.

En el caso de la capitalización compuesta, obtendremos todas las ganancias al final del periodo de la inversión, el principal más lo intereses generados y acumulados en el periodo, mientras que en una capitalización simple iremos obteniendo los pagos (intereses) periódicamente, sin que se incorporen al principal de la operación.

2.4. Fujo de caja

El flujo de caja es el esquema que muestra los montos de los ingresos y los egresos o, en su caso, la diferencia entre ellos, en un periodo o varios periodos.

Ha de considerarse que el desarrollo de cualquier actividad, de acuerdo con su naturaleza y propósitos, requiere la aplicación de recursos de diferentes órdenes; sin embargo, todos los recursos tienen un valor, el cual puede expresarse en unidades monetarias.

2.4.1 Diagrama de tiempo o flujo de caja

Es la representación gráfica del flujo de caja mediante una escala de tiempo que permite ubicar los montos de ingresos o egresos en periodos de tiempo específicos. La escala de tiempo es una recta numérica cuyas subdivisiones pueden representar semanas, meses, trimestres, años, etcétera.

La representación y ubicación de los valores de los montos dentro de un diagrama de flujo obedecen a reglas muy simples, como son:

1. La escala de tiempo inicia en el "periodo cero" o "presente", de manera que todo monto que se ubique por delante de este periodo se considerará como un futuro.

2. Los flujos de dinero deben ubicarse de manera puntual sobre un periodo específico.

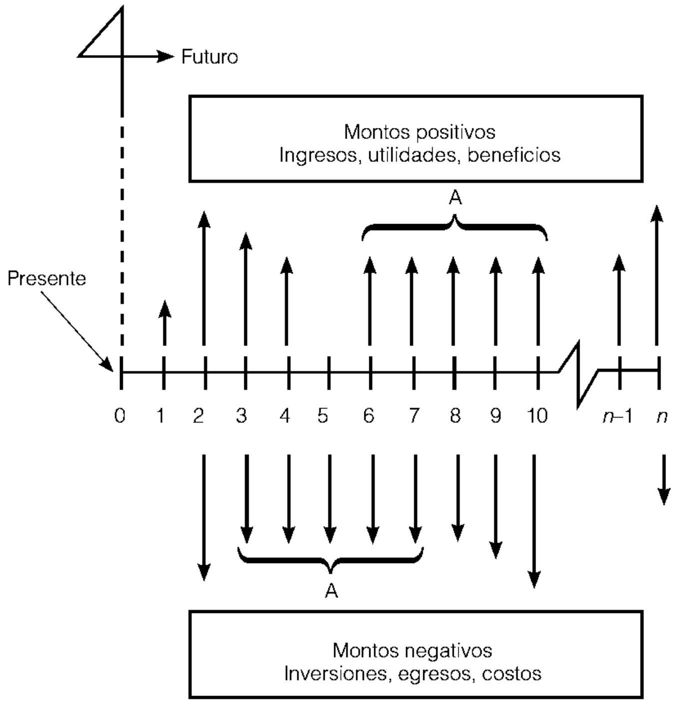
3. Los flujos de efectivo se representan mediante "vectores monetarios" cuya magnitud representa el valor a declarar.

4. Las cantidades ubicadas por arriba de la escala representan valores positivos, como: utilidades, ingresos o cualquier beneficio.

5. Las cantidades ubicadas por debajo de la escala representan valores negativos, como: inversiones, costos, gastos, pérdidas, egresos o desbeneficios.

6. Los flujos se pueden simplificar mediante su diferencia directa en cada periodo, o sea, no se pueden combinar montos de periodos anteriores o posteriores al que se está simplificando.

Las reglas anteriores se resumen a continuación de manera gráfica.



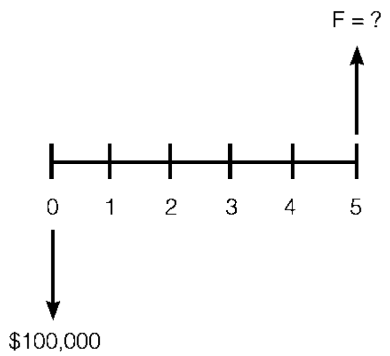
Para dar cuenta de la aplicación y utilidad de los conceptos anteriores considérense los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

El señor Requemes invierte $100,000.00 en un instrumento financiero que ofrece una tasa de 24.00% anual (recapitalizable anualmente). Si mantiene invertido su dinero durante los próximos 5 anos, .cuanto obtendrá al final del plazo?

Solución

La inversión queda expresada de manera grafica como sigue:



Se debe aclarar que las unidades de tiempo deben ser del mismo valor, es decir, si el interés es semestral los periodos deben ser igualmente semestrales.

Para obtener el valor futuro al termino de los 5 años se deberá aplicar la formula del valor futuro,

$$F = P\,(1 + i)^n$$

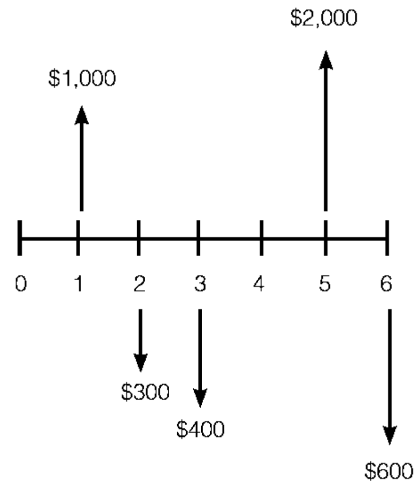
Por tanto, sustituyendo valores,

F = $100,000(1.24)5 = $100,000(2.9316) = $293,162.51

Se observa que la cantidad obtenida representa lo que podría obtener al final de 5 años de no tener otra opción de inversión.

Ejemplo 2:

La señorita Sánchez realiza la planeación de sus ingresos y gastos personales más importantes de los siguientes 6 meses, para lo cual construye el diagrama de flujo que se muestra. La persona se pregunta: ¿A cuánto dinero equivale hoy mi flujo de caja personal si se considera una tasa de 3% mensual?



Solución:

Considerando que el periodo cero es el presente, todos los montos del flujo de caja son un futuro por lo que se debe calcular el valor presente de cada uno utilizando la formula del valor presente bajo interés compuesto.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

Llevando un orden se calculan los valores presentes de los ingresos,

$$P_{1000} = \frac{\$1,000}{(1.03)} = \$970.87$$

$$P_{1000} = \frac{\$2,000}{(1.03)^5} = \$1,725.22$$

Donde la suma del Valor Presente de los Ingresos (VPI) es,

$$\Sigma VPI = \$970.87 + \$1,725.22 = \$2,696.09$$

De la misma manera se procede con los egresos,

$$P_{300} = \frac{\$300}{(1.03)^2} = \$282.78$$

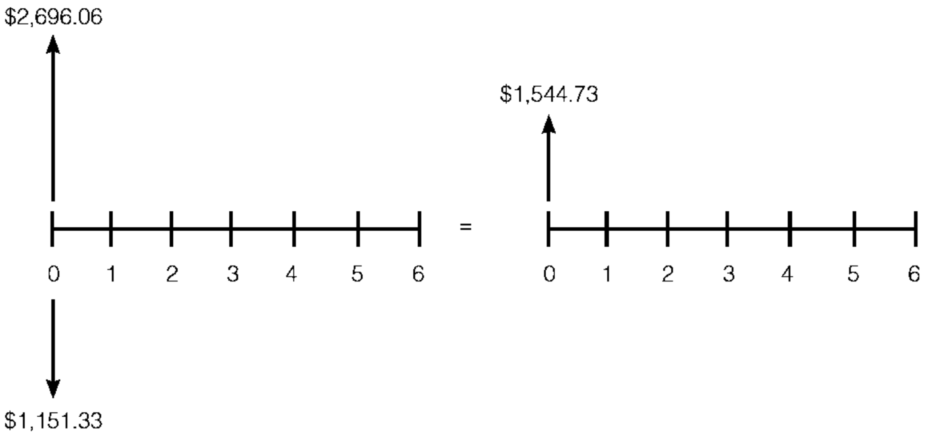
$$P_{400} = \frac{\$400}{(1.03)^3} = \$366.06$$

$$P_{600} = \frac{\$600}{(1.03)^6} = \$502.49$$

Donde la suma del Valor Presente de los Egresos (VPE) es,

$$\Sigma VPE = \$282.78 + \$366.06 + 502.49 = \$1{,}151.33$$

Gráficamente, los resultados obtenidos se expresan como:



En atención a que las sumatorias de los valores presentes se pueden simplificar, se obtiene que el monto del valor presente del flujo de caja de la persona equivale a,

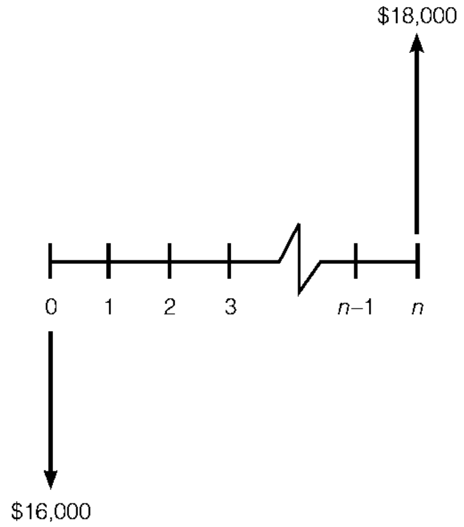
$$\Sigma VPI - \Sigma VPE = \$1{,}544.73$$

Ejemplo 3

El señor José Luis López invierte, el primer día del ano, de manera íntegra su aguinaldo, que asciende a $16,000.00 en un contrato de inversión bancaria el cual le ofrece 1.93% mensual (28 días). El señor López desea saber cuántos meses debe mantener depositado su dinero para obtener $18,000.00.

Solución:

El diagrama de flujo del problema queda expresado como sigue:



Como se puede observar, se cuenta con el monto del valor presente inicial de $16,000.00 y el monto del valor futuro deseado de $18,000.00, pero se desconoce el numero de periodos de aplicación de la inversión. Por lo que, utilizando la formula del valor futuro, se puede despejar n a efecto de conocer su valor aplicando las reglas de los logaritmos, como se expone a continuación.

Si

$$F = P(1 + i)^n$$

dividiendo los términos de la ecuación entre P,

$$\frac{F}{P} = (1+i)^n$$

aplicando las reglas de los logaritmos a ambos miembros de la ecuación,

$$y^n = n \ln y$$

$$\ln\left(\frac{F}{P}\right) = n \cdot \ln(1+i)$$

despejando n ,

$$\frac{\ln\left(\frac{F}{P}\right)}{\ln(1+i)} = n$$

Sustituyendo valores y operando,

$$\frac{\ln\left(\frac{\$18{,}000.00}{\$16{,}000.00}\right)}{\ln(1.0193)} = n = 6.16 \approx 7 \text{ meses}$$

Comprobando,

$$F = \$16{,}000.00\ (1.0193)^7 = \$16{,}000.00\ (1.1432) = \$18{,}291.20$$

2.5. Tanto de interés correspondiente a uno de descuento

El descuento es una operación de crédito que se lleva a cabo principalmente en instituciones Bancarias y consiste en que estas adquieren letras de cambio o pagarés de cuyo valor nominal ofrecen un descuento una suma equivalente a los intereses que devengaría el documento a lo largo del plazo de la operación que se haya estipulado en el documento por cobrar. Existen dos tipos de descuento el Comercial y el Real.

Descuento Comercial

Es este descuento, la cantidad que se descuenta se calcula sobre el valor nominal del documento.

D = Mdt

D= descuento

M= valor nominal

d= tasa de descuento

t= Tiempo que faltaba para que terminara la operación

(vencimiento)

Ejemplo:

Se tiene un pagaré con los siguientes datos: Fecha de emisión 10 de mayo, fecha de vencimiento 15 de agosto, fecha en la que se ofrece el descuento 15 de junio, la tasa de descuento es del 50% simple anual. Se pide determinar la cantidad que se descontó, el valor nominal del documento era de $285,000.00.

Datos:

Fecha de emisión = 10 de marzo

Fecha de vencimiento = 15 de agosto

Fecha del descuento = 15 de junio

Valor nominal = $285,000.00

Tasa de descuento (d) = 50%/100= .50

Tiempo para que terminara la operación = 2 meses

Fórmula:

$D= Mdt$

$D= (285000)(.50)\ (2/12)$

D= $23750.00

Entonces al valor nominal le restamos el descuento y el resultado es la cantidad que ahora se deberá pagar.

$$C= M - D$$

$$285000 - 23750 = \$\ 261{,}250.00$$

Otra fórmula que podemos utilizar:

$$D = \frac{Cdt}{1 - dt}$$

Ejemplo:

A una empresa le ofrecen un descuento y ahora tendrá que pagar $87,900.00 con una tasa de descuento del 45% anual simple y un valor nominal de $ 100,000.00. ¿Cuánto tiempo faltaba para que se venciera el documento?

Para este p conocemos el nuevo pago (C), tasa de descuento y Valor Nominal:

Usamos la fórmula D= Mdt y despejaremos a t

$$t = \frac{D}{Md} \quad \text{pero } D = M - C$$

Por lo tanto queda la fórmula:

$$t = \frac{M - C}{Md}$$

Sustituyendo valores

$$t = \frac{100000 - 87900}{(100000)(.45)} = 12100/\,45000 = .26888$$

t= .26888 (lo multiplicamos por 12 para conocer los meses= 3.22 y el .22 (se multiplica por 30 para conocer los días= 6.6 = 7

Por lo tanto, el resultado es = 3 meses y 7 días.

Una empresa recibió un descuento sobre un pagaré que tenía firmado con HSBC, finalmente pagó $168,000.00, con una tasa de descuento del 60% simple anual, faltaban 4 meses para el vencimiento del documento. Mencione cual era el valor nominal del pagaré.

Usaremos ala siguiente fórmula

$$D = \frac{Cdt}{1 - dt}$$

Sustituyendo valores:

$$D = \frac{(168000)(.60)(4/12)}{1 - (.60)(4/12)}$$

$$D = \$42,000$$

Finalmente: M = C + D

M= 168000 + 42000 = $210,000.00

Descuento Real

A diferencia del Descuento Comercial, en este tipo de descuento la cantidad base para calcular el tipo de descuento, es la cantidad final a pagar y no del valor nominal.

La fórmula para utilizar es:

$$M = C\ (\ 1 + dt)$$

Donde:

C= cantidad a pagar

d= tasa de descuento

t= tiempo que faltaba para el vencimiento del documento

De la fórmula anterior podemos despejar cualquier literal.

Ejemplo:

Se tiene un pagaré con los siguientes datos:

Fecha de emisión = 10 de marzo

Fecha de vencimiento = 15 de agosto

Fecha del descuento = 15 de junio

Valor nominal = $285,000.00

Tasa de descuento (d) = 50%/100= .50

Tiempo para que terminara la operación = 2 meses

Se pide calcular la cantidad que se descontó (note que son los mismo datos de un ejemplo de descuento comercial)

Despejamos C de:

$$M = C\,(1 + dt)$$

Quedando:

$$C = M/1 + dt$$

$$C = (285000)/\ 1 + (.5)(2/12)$$

$$C = \$\ 263{,}320.79$$

Ahora calcularemos al descuento (D):

$$D = M - C = 285000 - 263{,}320.79 = \$21{,}680.00$$

Comparando: con descuento comercial obtuvimos D= $23750.00 por lo tanto se obtiene un poco más dinero descontado con este tipo de descuento.

Otro ejemplo:

Determine la tasa de Descuento Real que se le aplicó a un documento cuyo valor nominal es de $ 149000, si se descontó 45 días antes de su vencimiento y el descuento fue de $11,000.00.

Despejamos (d) de la fórmula

$$M = C\,(1 + dt)$$

Quedando:

$$d = \frac{M/C - 1}{T}$$

$$d = \frac{149000/\,138000 - 1}{(45/365)} = \frac{.079710}{.123287}$$

$$d = .6465\,(100) = 64.65\%$$

C se obtuvo de: C= M – D = 149000-11000 = 138000

En este problema se pude haber dividido el tiempo de 45 días entre 360 (tiempo aproximado).

Como se ha visto, el tanto por ciento representa una cierta cantidad con respecto a 100. Si en lugar de tomar como referencia 100, se toma la unidad 1, se llama tanto por uno.

Si se divide un tanto por ciento entre 100 dará el tanto por uno correspondiente.

Si t es un tanto por ciento, t/100 es el tanto por uno correspondiente

Por ejemplo, si de cada 100 unidades se consideran 35, de una unidad se considerará 35/100 = 0,35.

0,35 es el tanto por uno correspondiente al 35 %.

Para realizar operaciones, es más práctico y rápido utilizar el tanto por uno correspondiente en lugar del tanto por ciento.

2.6. Capitalización para periodos fraccionarios

Las condiciones convenidas, en una operación financiera a interés compuesto, fijan el período de capitalización suponiendo que serán períodos enteros.

Cuando se presentan fracciones de períodos, la costumbre comercial es calcular el monto compuesto para los períodos enteros de capitalización y utilizar el interés simple, para las fracciones de períodos.

Teóricamente, el interés simple en las fracciones de período es mayor que el compuesto a la misma tasa, ya que significa capitalizar los intereses en un período menor que el convenido y, como consecuencia, la tasa efectiva resulta mayor.

2.7. Planteamiento del problema

Una operación de capitalización simple es aquélla en la que hay una cantidad de dinero inicial (capital C0) que genera unos intereses de forma periódica, pero esos intereses no se acumulan al capital; es decir no son productivos. El capital final es el resultado de sumar al capital inicial los intereses que éste genera periódicamente.

2.8. Fraccionamiento del tiempo en Capitalización simple

Operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital presente por otro equivalente con vencimiento posterior, mediante la aplicación de la ley financiera en régimen de simple.

Descripción de la operación

Partiendo de un capital (C0) del que se dispone inicialmente -capital inicial-, se trata de determinar la cuantía final (Cn) que se recuperará en el futuro sabiendo las condiciones en las que la operación se contrata (tiempo -n- y tipo de interés -i-).

Este capital final o montante se irá formando por la acumulación al capital inicial de los intereses que genera la operación periódicamente y que, al no disponerse de ellos hasta el final de la operación, se añaden finalmente al capital inicial.

Características de la operación

Los intereses no son productivos, lo que significa que:

A medida que se generan no se acumulan al capital inicial para producirnuevos intereses en el futuro y, por tanto

Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital inicial, altanto de interés vigente en dicho período.

2.9. Fraccionamiento del tiempo en Capitalización compuesta

La capitalización compuesta es una ley financiera en la cual los intereses que se generan en un intervalo se acumulan para el siguiente intervalo para generar nuevos intereses, a diferencia de la capitalización simple, donde no se incluían.

Después de ver cómo funciona vamos a ver como calcular la capitalización compuesta, los tantos equivalentes y el cálculo del vencimiento común y medio.

2.9.1 Convenio lineal

Hasta ahora, hemos visto como diferir o actualizar un capital durante t periodos de capitalización. Como, por ahora, estoy explicando la capitalización anual, he movido el dinero en el tiempo un número de años t entero (4 años, 8 años...).

Pero ¿qué ocurre si necesitamos diferir, por ejemplo, 6 años y 7 meses? En este caso, queremos diferir un número n de periodos de capitalización enteros, más una fracción h de periodos de capitalización, 7 meses. Por lo tanto queremos diferir un periodo t, donde:

$$t= n+h$$

Cuando ocurre esto, podemos acordar si aplicamos el convenio exponencial o el convenio lineal.

Convenio lineal. Capitaliza a interés compuesto un número exacto de años y a interés simple la fracción restante.

Consiste en aplicar capitalización compuesta para el número de periodos de capitalización enteros, n, y capitalización simple para la fracción h de periodo de capitalización. Esto supone aplicar, multiplicando o dividendo:

(1+r)^n*(1+r*h)

2.9.2. Convenio exponencial

Convenio exponencial. El cálculo del capital final se realiza mediante la aplicación de la fórmula general de capitalización compuesta.

Este convenio consiste en aplicar lo que hemos visto de capitalización compuesta, cualquiera que sea el valor que tome t. Por lo tanto, seguiremos aplicando, multiplicando o dividendo, según estemos calculando los valores finales o actuales, la fórmula que conocemos, (1+r)^t. Sólo que ahora t = n+h.

(1+r)^(n+h)

Ejemplo:

El Sr.X presta al Sr.Y 100 euros para un plazo de 4 años y 8 meses, a un interés del 12% anual. ¿Cuánto deberá el Sr.Y al vencimiento del préstamo?

1- Aplicando convenio exponencial
2- Aplicando convenio lineal

Aplicando convenio exponencial:

Tenemos que aplicar (1+r)t . En este caso, t será un número comprendido entre 4 y 5.

t = n+h ==> t = (4 + 8/12) años = 4,66 años

Ct = 100*(1+0,12)4.66 = 169,57

Aplicando convenio lineal:

Para diferir un capital 4 años y 8 meses, aplicando el convenio lineal, debemos emplear la fórmula del interés compuesto para los 4 primeros años (4 periodos de capitalización enteros) y la del interés simple para la fracción del periodo de capitalización (8 meses).

$$C4,66 = 100*(1+0.12)4*(1+0.12*(8/12)) = 169,94$$

Se puede apreciar que el valor final del capital es mayor si aplicamos el convenio lineal que si aplicamos el convenio exponencial.

2.10. Equivalencia de capitales

Cuando se dispone de varios capitales de diferentes cuantías y situados en diferentes momentos de tiempo puede resultar conveniente saber cuál de ellos es más interesante desde el punto de vista financiero (porque valga más o menos que los demás). Para decidir habría que compararlos, pero no basta con fijarse solamente en las cuantías, se tendría que considerar, a la vez, el momento de tiempo donde se encuentran situados. Además, la comparación debería ser homogénea, es decir, tendrían que llevarse todos los capitales a un mismo momento y ahí efectuar la comparación.

Comprobar la equivalencia financiera entre capitales consiste en comparar dos o más capitales situados en distintos momentos y, para un tipo dado, observando si tienen el mismo valor en el momento en que se comparan. Para igualar los capitales en un momento determinado se utilizará la capitalización o el descuento.

UNIDAD III

SERIES UNIFORMES O ANUALIDADES

3.1. Definición de anualidad

Una anualidad es una serie de flujos de cajas iguales o constantes que se realizan a intervalos iguales de tiempo, que no necesariamente son anuales, sino que pueden ser diarios, quincenales o bimensuales, mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, anuales. Las anualidades se simbolizan con la letra A.

El concepto de anualidad es importante en el área de las finanzas, entre otras consideraciones, porque es el sistema de amortización más utilizado en las instituciones financieras en sus diferentes modalidades de créditos. Además, es muy frecuente que las transacciones comerciales se realicen mediante una serie de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo, en vez de un pago único realizado al final del plazo establecido en la negociación.

En general se denomina anualidad a un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales de tiempo. Se conserva el nombre de anualidad por estar muy arraigado en el tema, aunque no siempre se refieren a periodos anuales de pago. Algunos ejemplos de anualidades son:

- Los pagos mensuales por renta de una casa o local
- El cobro quincenal o semanal de sueldos
- Los abonos mensuales a una cuenta de crédito
- Los pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida.
- Mensualidades escolares.

Se conoce como intervalo o periodo de pago al tiempo que transcurre entre un pago y otro y se denomina plazo de una anualidad al tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último. Renta es el nombre que se da al pago periódico que se hace.

Es conveniente, antes de seguir con el estudio de las anualidades, tener en cuenta las definiciones de los siguientes términos:

Renta o Pago:

Es un pago periódico que se efectúa de manera igual o constante. A la renta también se le conoce con el nombre: cuota, depósito. Cualquier de estos términos pueden ser utilizados en lugar de anualidad.

Periodo de Renta:

Es el tiempo que transcurre entre dos pagos periódicos consecutivos o sucesivos. El periodo de renta puede ser anual, semestral, mensual, etc.

Plazo de una anualidad:

Es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer período de pago y el final del último período de pago.

Tipos de anualidades

Existen diversas clasificaciones para las anualidades, a continuación, se presentan, pero las más utilizadas son: anticipadas, vencidas y diferidas.

Anualidad cierta:

Sus fechas son fijas y se estipulan de antemano. Por ejemplo al realizar una compra o crédito se fija la fecha en que se debe hacer el primer pago, así como la fecha para efectuar el último.

Anualidad contingente:

La fecha del primer pago, la fecha del último pago o ambas no se fijan de antemano.

Anualidades simples:

Se trata de anualidades cuando el periodo de pago coincide con el e capitalización de los intereses.

Anualidades generales:

El periodo de pago no coincide con el de capitalización.

Anualidad vencida:

También se le conoce como anualidad ordinaria se trata de casos en los que los pagos se efectúan a su vencimiento, es decir, al final de cada periodo.

Anualidad anticipada:

Son aquellos en los que los pagos se efectúan al inicio de cada periodo.

Anualidad inmediata:

Es el caso más común, la realización de los cobros o pagos tienen lugar inmediato. Siguiente a la finalización del trato.

Anualidades diferidas:

Se pospone la realización de los cobros o pagos, se obtiene hoy un artículo a crédito para pagarlo en pagos mensuales pero el primer pago ahora se hace hasta pasando algunos meses (los que otorgue la empresa emisora).

Monto de la Anualidad:

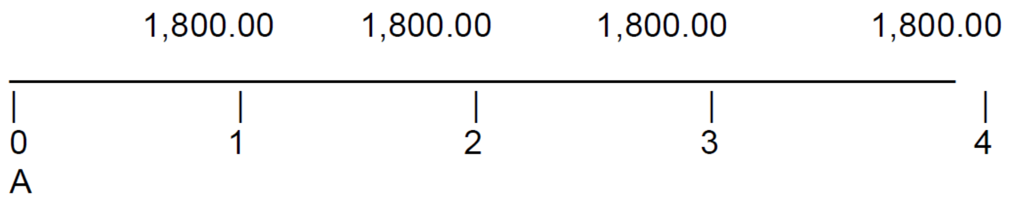
El monto "M" de la anualidad es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo.

Renta de la Anualidad (R):

Es el pago periódico de la anualidad, es valor no varía durante la duración de la anualidad.

Ejemplo.

Que cantidad se acumularía si consideramos una anualidad ordinaria (vencida) de $ 18,000.00 anuales durante 4 años con 6% de intereses.



El primer pago gana 3 años intereses, el 2do. gana dos, y así sucesivamente

$M= C (1+i)^n$

$M= 18000(1+.06)^3+18000(1.06)^2 +18000(1.06)^1 + 18000$

Como hay un factor común que son los 18000, lo factorizamos

$M=18000[(1.06)^3 + (1.06)^2 + (1.06) +1]$

$M=18000(1.191 + 1.1236 + 1.06 +1)$

$M= 18000 (4.37469)$

M= $ 78742.80

3.2. Requisitos para que exista una anualidad

Para que exista una anualidad se debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Todos los flujos de caja deben ser iguales o constantes.
- La totalidad de los flujos de caja en un lapso de tiempo determinado deben ser periódicos.
- Todos los flujos de caja son llevados al principio o al final de la serie, a la misma tasa de interés, a un valor equivalente, es decir, a la anualidad debe tener un valor presente y un valor futuro equivalente.
- El número de períodos debe ser igual necesariamente al número de pagos.

3.3. Clasificación de las anualidades según el tiempo

Las anualidades según el uso del tiempo se clasifican en ciertas y contingentes.

Anualidades Ciertas: Son aquellas en las cuales los flujos de caja (ingresos o desembolsos) inician y terminan en periodos de tiempos definidos. Por ejemplo, cuando una persona compra en un almacén un electrodoméstico a crédito, se establecen en forma inmediata las fechas de iniciación y terminación de la obligación financiera.

Las anualidades perpetuas o indefinidas son una variante de las anualidades ciertas. Los flujos de caja de las anualidades indefinidas comienzan en un periodo específico o determinado y la duración es por tiempo ilimitado.

Anualidades contingentes: Son aquellas en las cuales la fecha del primer flujo de caja, la fecha del último flujo de caja, o ambas dependen de algún evento o suceso que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo. El ejemplo más clásico, es el contrato de un seguro de vida, se sabe que hay un beneficiario, al cual hay que realizarle una serie de pagos en un tiempo plenamente definido, pero no se sabe cuándo empezarán, por desconocerse fecha en que morirá el asegurado. Por el alcance que tienen las anualidades contingentes, no serán estudiadas en este libro.

Clasificación de las anualidades según los intereses

Según el uso de los intereses las anualidades se clasifican en anualidades simples y generales.

Anualidades simples: Son aquellas en que el periodo de capitalización de los intereses coincide con el periodo de pago. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos trimestrales en una cuenta de cuenta de ahorros intereses capitalizables cada trimestre.

Anualidades Generales: Son aquellas en que el periodo de capitalización de los intereses no coincide con el periodo de pago. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos mensuales en una cuenta de ahorro, pero los intereses se capitalizan cada bimestre.

Clasificación de las anualidades según el momento de iniciación.

Las anualidades se clasifican según el momento de iniciación en diferidas e inmediatas.

Anualidades diferidas: Son aquellas en las cuales la serie de flujos de caja (Ingresos ó Desembolsos), se dan a partir de un período de gracia. Este se puede dar de dos maneras:

a) Período de gracia muerto

b) Período de gracia con cuota reducida.

En el periodo de gracia muerto, no hay abonos a capital, ni pagos de interés, lo que implica que el valor de obligación financiera al final del período de gracia se acumula por efecto de los intereses, incrementándose el saldo de la obligación financiera, por lo tanto, a partir de este nuevo valor se determina el valor de la cuota ó de la anualidad (A).

En el periodo de gracia con cuota reducida, se hacen pagos de intereses, pero no abono al capital, por lo cual, el valor de la obligación financiera no cambia por efecto de los intereses, ya que estos se han venido cancelando a través del tiempo, por lo tanto, el valor de la obligación financiera al final del periodo de gracia es el inicial, y a partir de él, se calcula ó se determina el valor de la cuota ó de la anualidad (A)

Para el cálculo del valor presente y del valor futuro de una anualidad diferida, se} pueden utilizar las expresiones que se demostraran para las anualidades vencidas y anticipadas, posteriormente; sé vera como se pueden adaptar las fórmulas para aplicarlas sobre las anualidades diferidas.

Anualidades inmediatas: Son aquellas en la que serie de flujos de caja (Ingresos ó Desembolsos) no tiene aplazamiento algunos de los flujos, es decir, los flujos se realizan en el periodo inmediato a la firma del contrato o del pagaré.

Clasificación de las anualidades según los pagos

Según los pagos las anualidades pueden ser vencidas u ordinarias y anticipadas.

Anualidades Vencidas: Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al final de cada periodo, por ejemplo, el salario mensual de un trabajador, en general las cuotas mensuales e iguales que se generan en todo tipo de transacciones comerciales, como la compra de vehículos, electrodomésticos, etc.

Anualidades anticipadas: Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al inicio de cada periodo, por ejemplo, el valor del canon de arrendamiento que se cancelan al comienzo de cada periodo.

3.4. Valor presente de una anualidad vencida

El valor presente o actual (A o C) de una anualidad es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo.

Recordar la fórmula de valor actual o presente para interés compuesto

$$C= M\,(1+i)^{-n}$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C= 18000(1.06)^{-4} + 18000(1.06)^{-3} + 18000\,(1.06)^{-2} + 18000(1.06)^{-1}$$

$$= 18000[(1,06)^{-4} + (1.06)^{-3} + (1.06)^{-2} + (\,1.06)^{-1}]$$

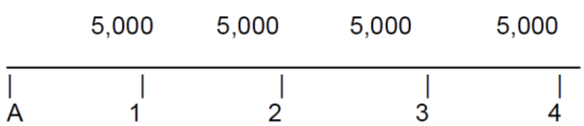
$$= 1,800(.792+.8396+.89+.943)$$

$$=18000(3.4646) = \$\ \mathbf{62362.80}$$

La anualidad vencida es el tipo de anualidad se refiere a que el pago se realiza al vencimiento del periodo establecido (quincenal, mensual, trimestral, etc.)

Ejemplo:

Considerando una anualidad ordinaria (vencida) de $ 50000.00 anuales, durante 4 años a una tasa del 45% determine el monto de la anualidad y el valor presente



$$M= 50000\,(1.045)^{3} + 5,000(1+.045)^{2} + 50000\,(1+.045)+ 50000$$

$$= 50000\,[(1.045)^{3} + (1.045)^{2} + (1.045) +1\,]$$

$$= 50000\,(1.1411+ 1.092 + 1.045 + 1)$$

$$= 50000\,(4.2781\,) = \$\ 213,905$$

Valor presente

$$C = 500000\ (1.045)^{-4} + 50000\ (1.045)^{-3} + 50000\ (1.045)\ -2 + 50000(1.045)^{-1}$$

$$= 50000\ (.8386 + .8763 + .9157 + .9569)$$

$$= 50000\ (3.5875) = \mathbf{\$\ 179{,}375.00}$$

Ahora bien, existen fórmulas específicas para anualidades y cada tipo de anualidad tiene sus Fórmulas.

Fórmulas para anualidades para calcular monto y valor presente para una anualidad cierta vencida u ordinaria.

$$M = R\left(\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right)$$

$$C = R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

R= Pago periódico

i= Tasa de intereses por periodo

n= Número de periodos (pagos o depósitos9

M= Monto

C= Valor actual o presente

Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de $ 1500.00 mensuales durante 3 años 6 meses al 6 % convertible mensualmente.

R= 1500.00

$$i = \frac{.06}{12} = .005$$

$$M = 1500 \left\{ \frac{(1+.005)^{42} - 1}{.005} \right\}$$

n= (12)(3.5) = 42

M= $ 69,909.81

Valor Presente

$$C = 1500 \left\{ \frac{1 - (1.005)^{-42}}{.005} \right\}$$

C= $ 56,697.40

Hallar el monto compuesto y el valor presente de una anualidad de $2,275.00 cada 6 meses durante 6.5 años al 5.4% convertible semestralmente.

R= 2,275.00

$$M = 2275 \; \frac{(1.027)^{17} - 1}{.027}$$

$$i = \frac{.054}{2} = .027$$

M= $ 48,271.00

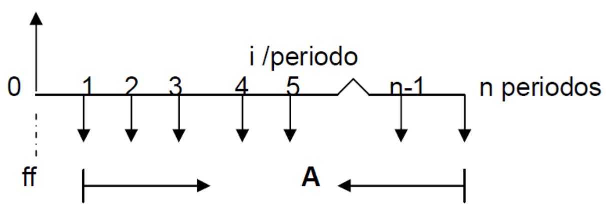
n= (2)(6.5) = 17

$$C = 2,275 \; \frac{1 - (1.027)^{-17}}{.027}$$

C= 30,689.45

El valor presente de una anualidad vencida es una cantidad o valor, localizado un periodo antes a la fecha del primer pago, equivalente a una serie de flujos de caja iguales y periódicos. Matemáticamente, se puede expresar como la suma de los valores presentes de todos los flujos que compone la serie.

Si se considera que una deuda (P) se va a cancelar mediante n pagos iguales de valor A, a una tasa de interés se tiene: P =?



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots + A(1+i)^{-n+1} + A(1+i)^{-n}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por (1 + i), se tiene:

$$P(1+i) = \left[A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots + A(1+i)^{-n+1} + A(1+i)^{-n}\right](1+i)$$

De la expresión anterior, se tiene la ecuación 2

$$P(1+i) = \left[A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots\ldots + A(1+i)^{-n+2} + A(1+i)^{-n+1}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$P(1+i) - P = A - A(1+i)^{-n}$$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene: $P(1+i-1) = A\left[1-(1+i)^{-n}\right]$ por lo que se tendrá:

$$Pi = A\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

Por lo cual, se obtendrá.

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Con la expresión anterior se encuentra un valor presente equivalente (P) a una serie de flujos de cajas iguales y periódicos, conocidos el número de pagos (n), el valor de cada pago (A) y la tasa de interés (i). Para evitar errores en el cálculo del valor presente de una anualidad, es importante recordar que: el valor presente (P) estará ubicado al principio del periodo en que aparece el primer flujo de caja (A).

El valor entre llaves de la fórmula se conoce con el nombre de factor valor presente serie uniforme. Usando la forma nemotécnica, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera: P = A(P/A,i,n) La expresión se lee: Hallar P dados A, i, n. Es importante anotar, que lo clave ó fundamental para resolver ejercicios relacionados con anualidades vencidas, es la determinación del cero (0), porque en él se encontrara el valor presente de la anualidad, teniéndose en cuenta que siempre se ubicará un periodo antes del primer flujo de caja ó pago de la anualidad, de la misma manera, es necesario determinar, el período donde termina la anualidad vencida, recordando siempre que éste periodo, es él que contiene el último flujo de caja o pago. Por lo tanto, el n de una anualidad vencida, se determina por la diferencia que existe entre el período donde termina la anualidad y el período donde se encuentra localizado su cero (0).

Pago periódico

Se refiere al pago que se hace de manera constante y cuyo valor no cambia lo representamos con la letra R

¿Cuál será el importe de cada uno de los depósitos semestrales que deberán hacerse en una cuenta de ahorros que paga el 3.5 % convertible semestralmente durante 10 años para que el monto sea de $ 25,000.00 precisamente después del último deposito?

En este problema la incógnita es R, por lo tanto, se despejará esta literal de la fórmula de Monto.

$$M = \$\ 25{,}000.00 \qquad i = \frac{.035}{2} = .0175 \qquad n = (2)(10) = 20$$

$$M = R \; \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

$$25{,}000 = R \; \frac{(1 + .0175)^{20} - 1}{.0175}$$

$$R = 25000 \; \frac{1}{23.701611}$$

$$R = 25000 \; (.0421912)$$

R= $ 1,054.78

Una persona adquiere hoy a crédito una máquina de escribir. La máquina cuesta $975.00 y conviene pagarla con cuatro mensualidades vencidas. ¿Cuánto tendrá que pagar cada mes si le cobran 3.5% mensual de intereses?

C= 975   R= ?   i=.035   n= 4

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{975\,(.035)}{1-(1.035)^{-4}} = \frac{34.125}{.128558} = \mathbf{\$265.44}$$

Una persona debe pagar $ 3,000.00 al final de cada año, durante varios años ¿cuánto tendría que pagar a fines de cada mes para sustituir el pago anual, si se consideran intereses a razón de 25% anual convertible mensualmente?

R=?   M= 3,000.00 $i = \frac{.25}{12} = .020833$ n= 12

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = R\,\frac{(1+.020833)^{12}-1}{.020833}$$

$$R = \frac{3000}{13.475137} = \mathbf{\$\ 222.63}$$

3.5. Cálculo de la anualidad en función del valor presente

Se demostró que:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Por lo tanto, despejando el valor de A, se obtendría:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

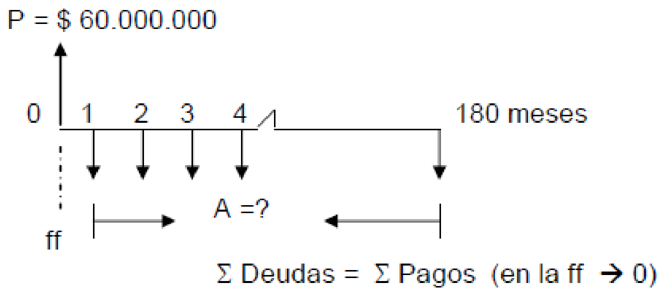
La anterior fórmula permite encontrar el valor de la anualidad o de la cuota, conocidos el valor presente (P), la tasa de interés (i) y el número de pagos (n). El valor entre llaves se denomina factor de recuperación de capital. Usando la forma nemotécnica, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera: A =P(A/P,i,n); La expresión se lee: Hallar A dados P, i, n

Ejemplo:

Un apartamento se adquiere a crédito por la suma de $ 60.000.000 en cuota mensuales iguales, la obligación se pacta a 15 años a una tasa de interés del 3% mensual. Determinar el valor de las cuotas.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



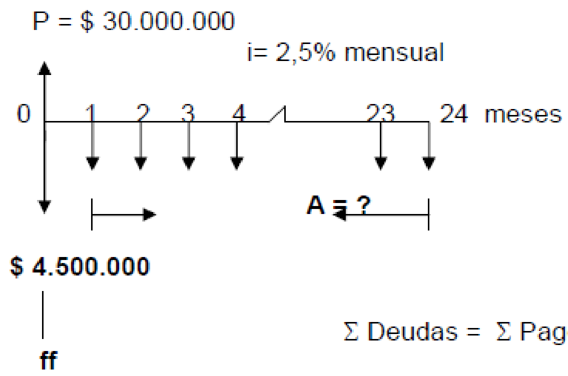
$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 60.000.000\left[\frac{0.03}{1-(1+0.03)^{-180}}\right] = \$1.808.845,062$$

$$A = \$1.808.845,062 \quad ; \text{ Seria el valor de las cuotas}$$

Ejemplo:

Una empresa desea construir una fábrica, por lo cual adquiere un terreno por la suma de $ 30.000.000 dando una cuota inicial del 15% y 24 cuota mensuales con una tasa de interés del 2.5%. Calcular el valor de las cuotas.

Solución: El diagrama económico de la operación financiera será:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

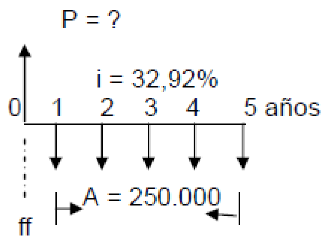
$$30.000.000 = 4.500.000 + A\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-24}}{0{,}025}\right]$$; por consiguiente:

$$25.500.000 = 17{,}885\,A \;;\; \text{Donde:} \quad A = \frac{25.500.000}{17{,}885} = 1.425.776{,}92$$

Ejemplo:

Sustituir una serie de flujos de cajas constantes de $ 250.000 al final de cada año, durante 5 años, por el equivalente en cuotas mensuales vencidas, con un interés del 2.4% mensual.

Solución: El diagrama económico de la operación financiera será:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Lo primero que se debe realizar es encontrar una tasa efectiva anual a partir de la tasa del 2,4% mensual, a continuación, se muestra el procedimiento.

$i = ie = ?$ anual, por consiguiente **m= 1**.

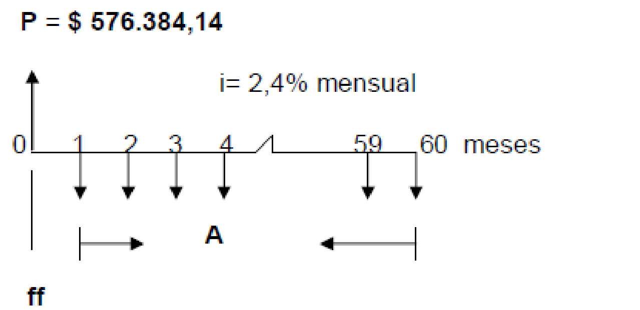
$i = i_e = 2{,}4\%$ mensual, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) meses.

$(1+i_e)^m = (1+i_e)^t$; $(1+i_e)^1 = (1+0{,}024)^{12}$, por lo tanto: $ie = (1{,}024)^{12} - 1$,

por lo que: $i = 0{,}3292$ anual $\cong 32{,}92\%$ anual

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = 250.000\left[\frac{1-(1+0{,}3292)^{-5}}{0{,}3292}\right] = \$\,576.384{,}14$$

Una vez calculado el valor presente, se procede al cálculo de las anualidades mensuales.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

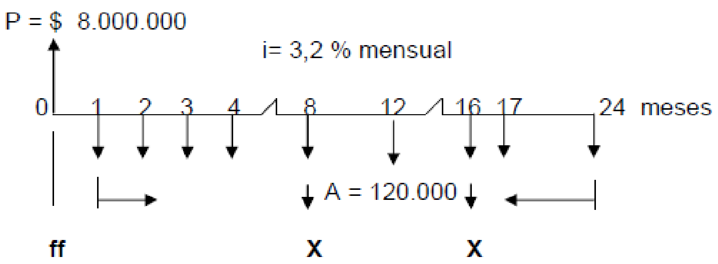
$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 576.384{,}14\left[\frac{0.024}{1-(1+0.024)^{-60}}\right] = \$\,18.234{,}88$$

$A = \$18.234{,}88$; Seria el valor de las cuotas

Ejemplo

Un crédito de $ 8.000.000 para cancelarlo en 24 cuotas mensuales de $ 120.000 con dos cuotas extras en pactadas en los meses 8 y 16, si la tasa de intereses es del 3,2% mensual; calcular el valor de las cuotas extras.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

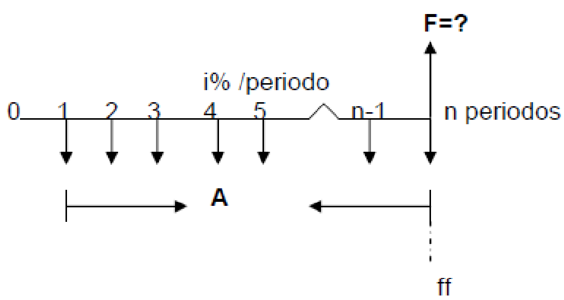
$$8.000.000 = 120.000\left[\frac{1-(1+0{,}032)^{-24}}{0{,}032}\right] + X(1+0{,}032)^{-8} + X(1+0{,}032)^{-16}$$

Por consiguiente: $6.010.834{,}475 = 1{,}3814X$; entonces:

$$X = \frac{6.010.834{,}475}{1{,}3814} = \$4.351.340{,}66$$

3.6. Valor futuro de una anualidad vencida

Es la cantidad o valor ubicado en el último flujo de caja, equivalente a todos los flujos de caja constantes y periódicos de la serie. Matemáticamente, es el valor final que se obtiene al sumar todos los valores llevados al futuro.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → n)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-4} + \dots\dots + A(1+i)^{1} + A$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por (I + i), se tiene:

$$F(1+i)=\left[A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+A(1+i)^{n-3}+A(1+i)^{n-4}+\ldots\ldots+A(1+i)^{1}+A\right](1+i)$$

Simplificando términos en el segundo miembro de la ecuación anterior, la ecuación No 2 quedaría:

$$F(1+i)=\left[A(1+i)^{n}+A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+A(1+i)^{n-3}+\ldots\ldots+A(1+i)^{2}+A(1+i)^{1}\right]$$

Restando (I) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$F(1+i)-F=A(1+i)^{n}-A$$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene $F(1+i-1)=A\left[(1+i)^{n}-1\right]$; por lo que se tendrá:

$Fi=A\left[(1+i)^{n}-1\right]$; por lo cual, se obtendrá: $F=A\left[\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$

Con la expresión anterior se encuentra un valor futuro equivalente (F) a una serie de flujos de cajas iguales y periódicos, conocidos el número de pagos (n), el valor de cada pago (A) y la tasa de interés (i). Para evitar errores en el cálculo del valor presente de una anualidad, es importante recordar que : el valor futuro (F) equivalente a una serie de flujos de caja iguales y periódicos estará ubicado en el periodo en que aparece el último flujo de caja (A).

El valor entre llaves de la fórmula, se conoce con el nombre de factor cantidad compuesta serie uniforme. Usando la forma nemotécnica, la formula se puede expresar de la siguiente manera:

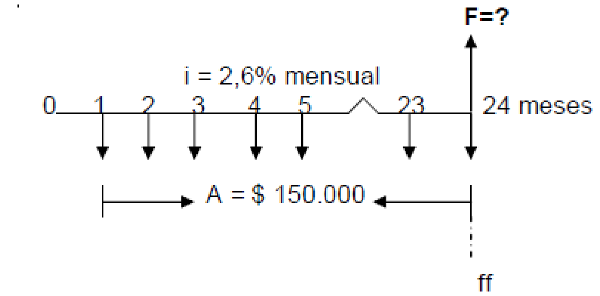
$$F=A(F/A,i,n)$$

La expresión se lee: Hallar F de A, i, n

Ejemplo

Se hacen depósitos mensuales de $ 150.000 en una institución financiera que paga el un interés del 2,6% mensual. ¿Qué suma se tendrá acumulada al final de dos años?

Solución:



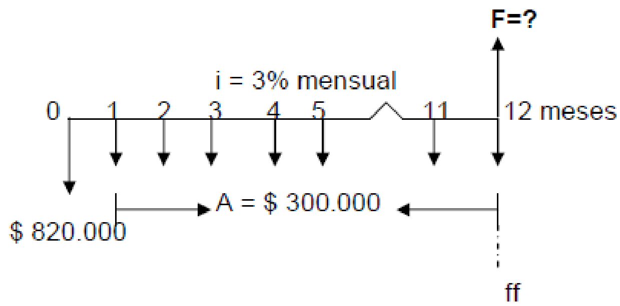
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 24)

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 150.000\left[\frac{(1+0,026)^{24} - 1}{0,026}\right] = \$4.912.818,33$$

Ejemplo

Una persona deposita hoy en una institución financiera la suma de $ 820.000 que le paga una tasa de interés del 3% mensual. ¿Calcular el valor acumulado al final de año, si cada mes deposita $ 300.000?

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 12)

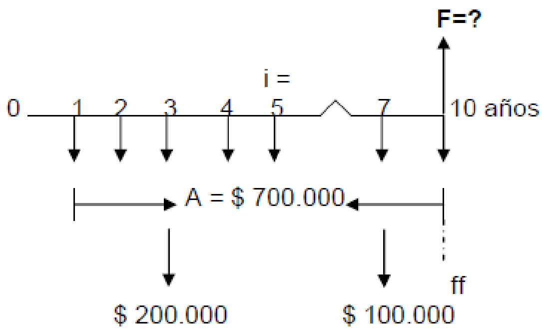
$$F = P(1+i)^n + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 820.000(1+0{,}03)^{12} + 300.000\left[\frac{(1+0{,}03)^{12} - 1}{0{,}03}\right]$$

$$F = \$\ 5.426.732{,}80$$

Ejemplo

Un padre de familia desea reunir para dentro de diez años la suma de $X para garantizar los estudios universitarios de su hijo, por lo cual deposita en una institución financiera que reconoce un interés del 32% ACM, $ 700.000 cada año, y en los años 3 y 7 deposita adicionalmente $ 200.000 y $ 100.000 respectivamente.

Solución:



$i = ie = ?$ Anual, por consiguiente **m= 1**.

$r = 32\%$ ACM, en este caso **t = 12**, en un año hay doce (12) meses.

$$(1+i_e)^m = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t \quad ; \quad (1+i_e) = \left(1+\frac{0{,}32}{12}\right)^{12}$$, de donde se obtiene:

$$i_e = \left(1+\frac{0{,}32}{12}\right)^{12} - 1$$, por lo que: $ie = 0{,}3714\text{Anual} = 37{,}14\%\text{Anual}$

Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff → 10)

$$F = 700.000\left[\frac{(1+0{,}3714)^{10} - 1}{0{,}3714}\right] + 200.000(1+0{,}3714)^7 + 100.000(1+0{,}3714)^3$$

$$F = \$\ 44.548.216{,}87$$

3.7. Cálculo de la anualidad en función del valor futuro

Se demostró que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

Por lo tanto, despejando el valor de **A** se obtendrá: $A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$

La anterior fórmula permite encontrar el valor de la anualidad o de la cuota, conocidos el valor futuro (F), la tasa de interés (i) y el número de pagos (n). El valor entre llaves se denomina factor fondo de amortización.

Usando la forma nemotécnica, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera: $A = F(A/F, i, n)$ La expresión se lee: Hallar A dados F, i, n

Ejemplo

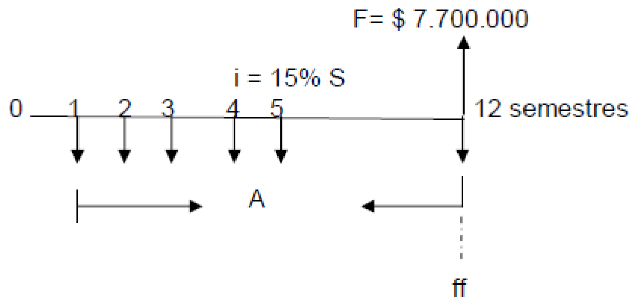
Una empresa necesitará reponer una máquina dentro de 6 años, la cual, en ese momento tendrá un valor de mercado de $ 1.800.000. De acuerdo a estudios de mercado realizados, se espera que la máquina cueste alrededor de $ 9,500.000 y se decide hacer un fondo para cubrir el costo. Si se puede obtener una tasa de interés del 30% ACS, ¿Cuánto se tiene que depositar cada semestre para tener el dinero para reponer la máquina al final de su vida útil?

Solución:

El monto al final del año 6 será igual a la diferencia entre el costo de la maquina y su valor de diseño:

$$F = 9.500.000 - 1.800.000 = \$7.700.000$$

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,30}{2} = 0,15 \text{ Semestral}$$



Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff → 12)

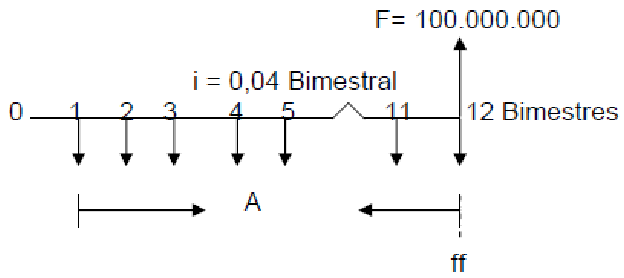
$$7.700.000 = A\left[\frac{(1+0{,}15)^{12}-1}{0{,}15}\right]$$; Donde $7.700.000 = 29{,}001A$; por consiguiente;

$$A=\frac{7.700.000}{29{,}001}=\$\ 265.501{,}98$$

Ejemplo

El gerente de un hospital desea invertir en una institución financiera para comprar un equipo de Rx en un término de dos años. Para esto debe destinar cierta cantidad cada bimestre hasta completar la cantidad $ 100.000.000. Si la institución financiera reconoce un 24% ACBimestralmente, determínese el valor del depósito bimestral.

Solución:



Se encuentra la tasa bimestral mediante la siguiente expresión:

$$i=\frac{r}{m}=\frac{0{,}24}{6}=0{,}04\,\text{Bimestral}$$

Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff →12)

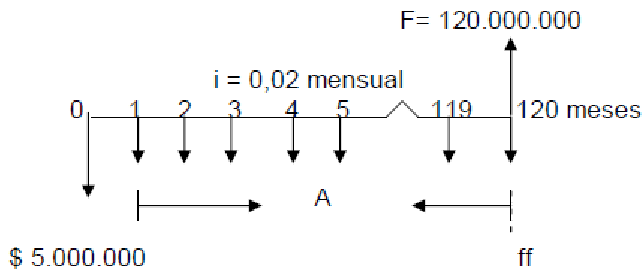
$$100.000.000 = A\left[\frac{(1+0{,}04)^{12}-1}{0{,}04}\right]$$; Donde $100.000.000 = 15{,}026A$; por consiguiente

$$A = \frac{100.000.000}{15{,}026} = \$6.655.217{,}27$$

Ejemplo

Una persona desea adquirir un apartamento que dentro de 10 años costará la suma de $ 120.000.000. Por tal motivo hoy cancela una cuota inicial de $ 15.000.000 y cada mes cancela cuotas mensuales iguales. La tasa de intereses que se le cobra es del 24% ACM. ¿Cuál es la cuota mensual requerida?

Solución:



$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 \text{ mensual}$$

$$\Sigma \text{ Arriba} = \Sigma \text{ Abajo} \text{ (en la ff } \rightarrow 120)$$

$$120.000.000 = 5.000.000(1+0{,}02)^{120} + A\left[\frac{(1+0{,}02)^{120}-1}{0{,}02}\right]$$; donde:

$66.174.184{,}82 = 488{,}26A$; Por consiguiente $A = \frac{66.174.184{,}82}{488{,}26} = 135.531{,}14$

3.8. Cálculo del tiempo en una anualidad vencida

El número de cuotas para amortizar una obligación financiera se puede determinar a partir del valor presente o valor futuro de una anualidad.

Cálculo del tiempo (n) en función del valor presente (P) de una anualidad (A)

Se tiene que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; despegando se obtiene: $\frac{Pi}{A} = 1-(1+i)^{-n}$; sumando $(1+i)^{-n}$ y restando $\frac{Pi}{A}$; a ambos lados de la ecuación se obtiene: $(1+i)^{-n} = \left(1-\frac{Pi}{A}\right)$; aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad. Para el primer término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base; se tendría: $-nLn(1+i) = Ln\left(1-\frac{Pi}{A}\right)$, donde: $n = \frac{-Ln\left(1-\frac{Pi}{A}\right)}{Ln(1+i)}$, en la anterior expresión, se debe garantizar que: $0 \langle \left[1-\frac{Pi}{A}\right] \langle 1$ con el objeto que n, sea positivo y definido.

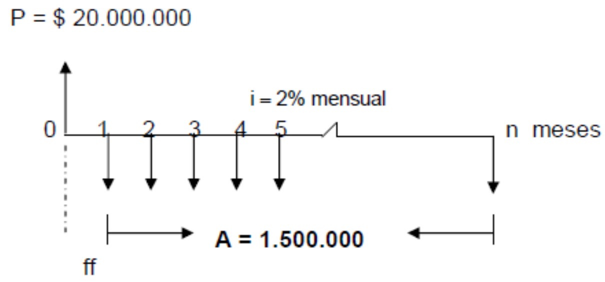
De manera general, el n de una anualidad se podrá determina por la diferencia entre en período donde termina la anualidad y el período donde se encuentra localizado su cero.

Ejemplo

Una deuda de $ 20.000.000 se debe cancelar con cuotas mensuales iguales de $ 1.500.000 cada una. Si la tasa de interés es del 2% mensual. Determine el número de cuotas para cancelar la obligación financiera:

Solución:

El diagrama económico será el siguiente:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff $\rightarrow$ 0)

Se tiene que: $20.000.000 = 1.500.000\left[\dfrac{1-(1+0{,}02)^{-n}}{0{,}02}\right]$, entonces:

$\dfrac{20.000.000 * 0{,}02}{1.500.000} = 1-(1{,}02)^{-n}$, donde: $0{,}2666 = 1-(1{,}02)^{-n}$, por lo tanto: $(1{,}02)^{-n} = 0{,}7333$, por consiguiente:

$$n = \frac{-Ln(0{,}7333)}{Ln(1{,}02)} = 15{,}6623 \text{ meses}$$

Cálculo del tiempo (n) en función del valor futuro de una anualidad (A)

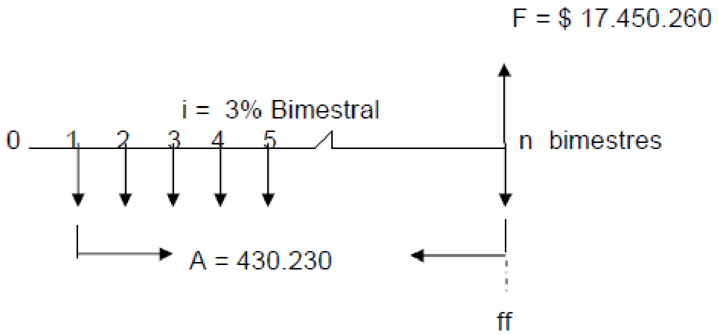
Se tiene que: $F = A\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ despegando se obtiene: $\dfrac{Fi}{A} = (1+i)^n - 1$ sumando 1 a ambos lado de la igualdad, se obtendrá $\left(1+\dfrac{Fi}{A}\right) = (1+i)^n$; aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación. Para el segundo término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base, se tendría:

$$Ln\left(1+\frac{Fi}{A}\right) = nLn(1+i) \text{ ; Por consiguiente: } n = \frac{Ln\left(1+\frac{Fi}{A}\right)}{Ln(1+i)}$$

Ejemplo

Se desea tener un monto de $ 17.450.260 mediante depósitos cada dos meses vencidos de $ 430.230. Calcular cuántos depósitos se deben hacer si se ganan intereses del 18% Capitalizable cada bimestre.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → n)

$i=\dfrac{0{,}18}{6}=3\%$ Bimestral y se tiene que: $17.450.260=430.230\left[\dfrac{(1+0{,}03)^{n}-1}{0{,}03}\right]$,

por lo tanto: $\dfrac{17.450.260 * 0.03}{430.230}=(1{,}03)^{n}-1$, donde: $1{,}2168=(1{,}03)^{n}-1$, por consiguiente: $2{,}2168=(1{,}03)^{n}$; y entonces:

$$n=\frac{Ln(2{,}2168)}{Ln(1{,}03)}=26{,}9317 \text{ Bimestres}$$

Se observa que la solución del ejercicio, no arroja un número de pagos bimestrales entero, lo que da origen a las anualidades impropias; es decir, aquellas en las cuales los pagos no son iguales. Para lo cual, se puede plantear: las siguientes alternativas:

1) Redondear el número de períodos al entero anterior o al posterior.

2) Hacer 26 depósitos bimestrales iguales y un depósito menor en bimestre 27.

3) Hacer 26 depósitos bimestrales iguales y otro depósito extra en ese mismo período.

Alternativa 1.

a) Se hará redondeando al entero anterior, es decir, tomando un n = 26 bimestres; y se procede al cálculo de la anualidad.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]; \qquad A = 17.450.260\left[\frac{0,03}{(1+0,03)^{26} - 1}\right] = \$452.629,91$$

Se deben realizar 26 depósitos bimestrales de \$ 452.629,91

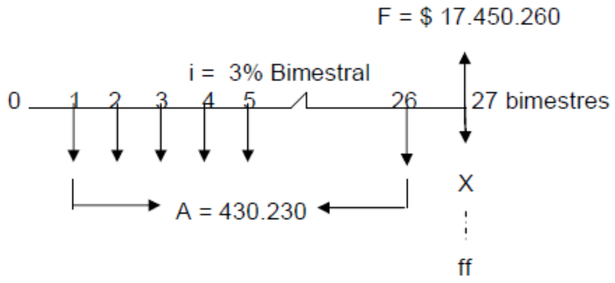
b) En este caso se hará redondeando al entero posterior, es decir, tomando un n = 27 bimestres; y se procede al cálculo de la anualidad.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right];$$

$$A = 17.450.260\left[\frac{0,03}{(1+0,03)^{27} - 1}\right] = \$428.651,86$$

Se deben realizar 27 depósitos bimestrales de \$ 428.651,86

Alternativa 2



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 27)

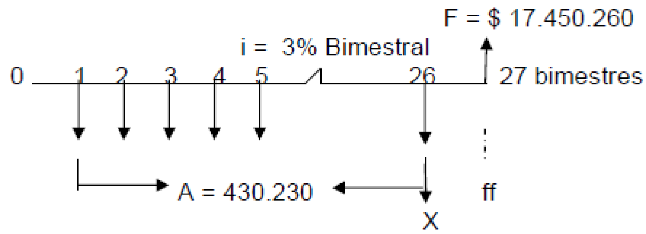
Se puede plantear la siguiente igualdad: $F = X + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^n$; por lo tanto:

$$17.450.260 = X + 430.230\left[\frac{(1+0,03)^{26} - 1}{0,03}\right](1+0,03); \text{ de donde:}$$

$$17.450.260 = X + 17.084.275,63; \text{ por consiguiente: } X = 365.984,37$$

Se realizan 26 depósitos de \$ 430.230 y un depósito de \$ 365.984,37 en el bimestre 27.

Alternativa 3



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 27)$$

Se puede plantear la siguiente igualdad: $F = X(1+i)^n + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^n$ por lo consiguiente:

$F = X(1+0{,}03)^1 + A\left[\frac{(1+0{,}03)^{26} - 1}{0{,}03}\right](1+0{,}03)^1$ por lo tanto:

$$17.450.260 = 17.084.275{,}63 + 1{,}03X \text{ ; de donde: } 1{,}03X = 365.984{,}37 \text{ ; entonces:}$$

$$X = \frac{365.984{,}37}{1{,}03} = \$\ 355.324{,}63$$

Se deben realizar 26 depósitos bimestrales de \$ 430.230 y un depósito extra en el bimestre 26 por valor de \$ 355.324,63.

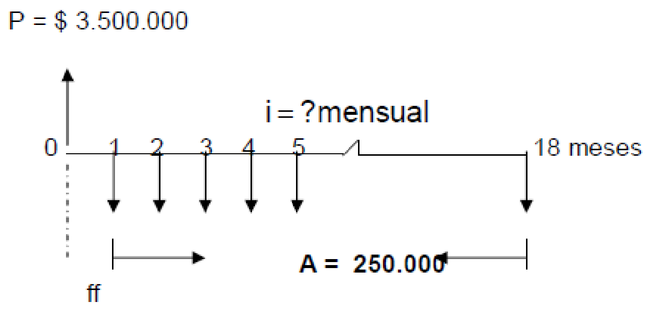
3.9. Cálculo de la tasa de interés de una anualidad vencida

Cuando se recurre a créditos comerciales para adquirir electrodomésticos, vehículos y otros activos, por medio de cuotas uniformes periódicas, normalmente el comprador no conoce el costo, es decir, la tasa de interés que se le cobra, para hallarla es necesario utilizar el método de interpolación lineal, una calculadora financiera o el Excel, caso en el cual el resultado se obtiene más rápido y de forma exacta.

Ejemplo

Un activo que de contado tiene un valor de $ 3.500.000, puede adquirirse financiado a 18 cuotas mensuales de $ 120.000 cada una, ¿Cuál es la tasa de interés mensual que se cobra?

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se plantea la siguiente igualdad: $3.500.000 = 250.000\left[\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}\right]$ La tasa de interés solicitada, se encontrará por el método de tanteo, para lo cual, se le dará valores arbitrarios a i, de manera que se encuentre un valor a cero (0) muy cercano por la derecha y por la izquierda, es decir, se buscará un número positivo y negativo, y se procederá a una interpolación lineal, que permita encontrar la tasa de interés, que se está solicitando.

Para un i= 2,7% , se tiene: $3.500.000 = 250.000\left[\frac{1-(1+0{,}027)^{-18}}{0{,}027}\right]$

De donde: $3.500.000 = 3.527.231{,}83$

Se presenta una diferencia de: $3.500.000 - 3.527.231{,}83 = -27.231{,}83$

Para un i = 3%, se tendrá: $3.500.000 = 250.000\left[\frac{1-(1+0{,}03)^{-18}}{0{,}03}\right]$

Entonces: $3.500.000 = 3.438.378{,}27$

Se presenta una diferencia de: $3.500.000 - 3.438.378{,}27 = 61.621{,}73$

Ahora se tiene un valor por la izquierda de cero y uno por la derecha, y se asumirá que están cercanos a cero, por lo cual, ya se puede proceder a la interpolación lineal, por lo tanto, se tiene la siguiente tabla:

	i	Valor	
$\Re_1 \rightarrow$	2,7	-27.231,83	$\rightarrow$ X1
	?	0	$\rightarrow$ X
$\Re_2 \rightarrow$	3	61.621,73	$\rightarrow$ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los Â en la columna donde se encuentra la incógnita,

en frente de cada $\Re$ se localizarán los X. Por consiguiente:

$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 2,7 + \frac{3 - 2,7}{61.621,73 + 27.231,83}(0 + 27.231,83)$$

$$i = 2,7 + \frac{0,3}{88.853,56}(27.231,83) = 2,79\% \text{ mensual}$$

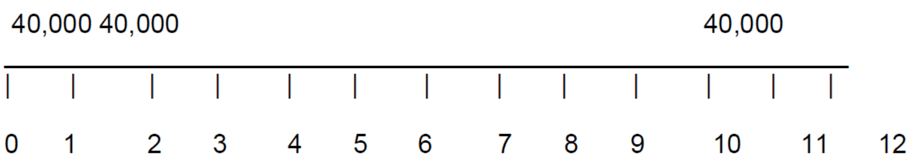
UNIDAD IV

ANUALIDADES Y PRESTACIONES

4.1. Anualidades anticipadas

Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al inicio de cada periodo; por ejemplo, el pago mensual del arriendo de una casa, ya que primero se paga y luego se habita en el inmueble. Es una anualidad cuyo pago periódico vence al principio del intervalo de pago. Ejemplo pago de la renta de una casa.

Ejemplo. La renta mensual de un local comercial es $ 40,000.00 y se tiene que pagar por adelantado, esto significa que al principio de cada mes se debe pagar la renta ¿cuál será la renta anual pagada por adelantado al 6% convertible mensualmente?



El primer pago se toma como anualidad anticipada y los 11 restantes como anualidad ordinaria.

$$n = 11 \qquad i = \frac{.06}{12} = .005$$

$$X = C + C \; \frac{1-(1+i)^{-n} - 1}{i}$$

$$X = 40000 + 40000 \; \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$X = 4000 + 4000 \; \frac{1-(1+.005)^{-11}}{.005}$$

$$X = \$\ 467{,}200.00$$

Formula empleadas para este tipo de anualidad:

$$M= R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$$

$$C= R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$N= \frac{Log\left[(M/R+1)\,i+1\right]}{Log\,(1+i)} - 1$$

$$n= 1- \frac{\log\left(1+I-(Ci/R)\right)}{\log(1+i)}$$

Ejemplo. Los días 15 de cada mes, Manuel invierte $2000.00 en un fondo que paga el 30% convertible mensualmente ¿cuánto habrá en el fondo justamente antes del día 10 depositado?

Para problema es importante notar que se desea saber el monto antes del depósito 10, por lo tanto, n es igual a 9.

Fórmula utilizada para este caso

$$M= R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$$

$$M= 2000\left[\frac{(1+.025)^{9+1}-1}{.025} - 1\right]= \$\ \mathbf{20406.76}$$

Se debe tener cuidado con el uso de la fórmula, primero sumamos lo que está dentro del paréntesis (1+i), después elevamos (n+1), a continuación le restamos 1, posteriormente dividimos entre (i), después le restamos 1, y al final multiplicamos por R.

Encuentre el monto de 6 pagos semestrales anticipados de $1,450.00 si el interés es de 27% convertible semestralmente.

n= 6
i= .27/2 = .135
R= 1,450.00

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$$

$$M = 1{,}450.00\left[\frac{(1.135)^{6+1}-1}{.135} - 1\right]$$

M= $ 13,871.111

Un comerciante alquila un local para su negocio y acuerda pagar $8500.00 de renta por anticipado. Desea librarse del compromiso mensual de la renta, decide proponer una renta anual equivalente y también anticipada. Si se calculan los intereses a razón del 36 convertible mensualmente ¿de cuánto deberá ser la renta anual?

$$n = 12$$
$$R = 8500.00$$
$$i = \frac{.36}{12} = .03$$

Para este problema debemos calcular el valor actual o presente

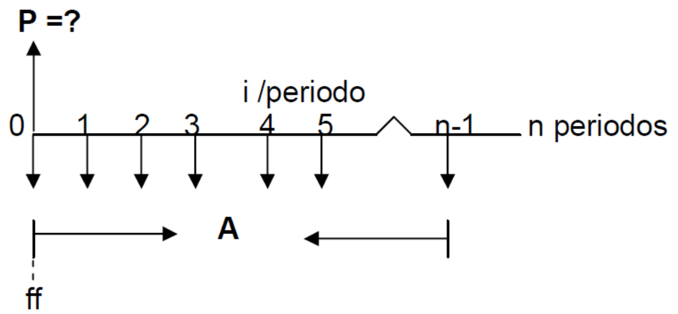
$$A = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$A = 8500\left(1 + \frac{1-(1.03)^{-11}}{.03}\right) = \mathbf{\$\ 87{,}125.00}$$

En el empleo de la fórmula anterior es importante notar que primero elevamos (1+i) a la (-n+1), después dividimos entre (i), posteriormente le sumamos 1, y al final lo multiplicamos por R

Valor presente de una anualidad anticipada

El valor presente de los flujos de caja (ingresos y desembolsos) iguales anticipados será el valor, que en el momento de realizada la operación financiera, sea equivalente a todos los flujos de caja. Si se considera que una deuda (P) se va a cancelar mediante n pagos iguales de valor A, a una tasa de interés (i) se tiene:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff $\rightarrow$ 0)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1.

$$P = A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots\ldots + A(1+i)^{-n+1}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por (1+ i) , se tiene:

$$P(1+i) = \left[A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots\ldots + A(1+i)^{-n+1}\right](1+i)$$

Simplificando términos en el segundo miembro de la ecuación anterior, la ecuación No 2 quedaría:

$$P(1+i) = \left[A(1+i) + A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} A(1+i)^{-3} + \ldots\ldots\ldots + A(1+i)^{-n+2}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3: $P(1+i) - P = A(1+i) - A(1+i)^{-n+1}$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene. $P(1+i-1) = A(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]$; por lo que se tendrá:

$Pi = A(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]$; por lo cual, se obtendrá. $P = A\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$

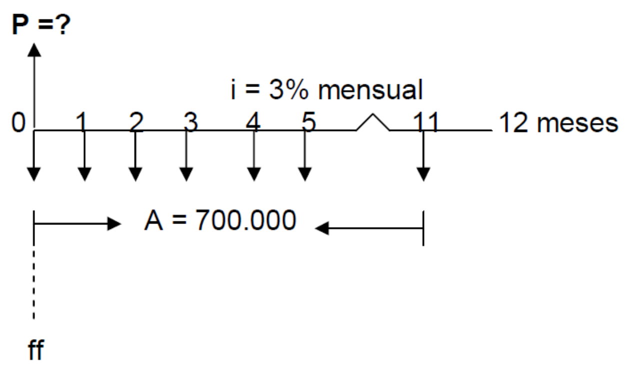
Se puede concluir que el valor presente de una anualidad anticipada, ubicado en el período que se da el primer flujo de caja, resulta de multiplicar el valor presente de una anualidad vencida por (1+i).

Es importante anotar, que lo clave ó fundamental para resolver ejercicios relacionados con anualidades anticipadas, es la determinación del cero (0) de la anualidad, porque en él se encontrará el valor presente de la anualidad, teniéndose en cuenta que siempre se ubicará en el periodo, donde se da el primer flujo de caja ó pago de la anualidad, de la misma manera, es necesario determinar, el período donde termina la anualidad anticipada, recordando siempre que éste periodo, es él que se encuentra un período después del último flujo de caja o pago. Por lo tanto, el n de una anualidad anticipada, se determina por la diferencia que existe entre el período donde termina (un período después del último flujo) la anualidad y el período donde se encuentra localizado su cero (0)

Ejemplo

Supóngase el caso de un contrato de arrendamiento por un año, en el que los pagos del canon son mensuales por un valor de $700.000, si las partes del contrato acuerdan que se realice un solo pago al principio del contrato y la tasa estipulada es del 3% mensual, de cuanto sería el valor de ese pago único.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) = 700.000\left[\frac{1-(1+0{,}03)^{-12}}{0{,}03}\right](1+0{,}03) = \$7.176.836{,}88$$

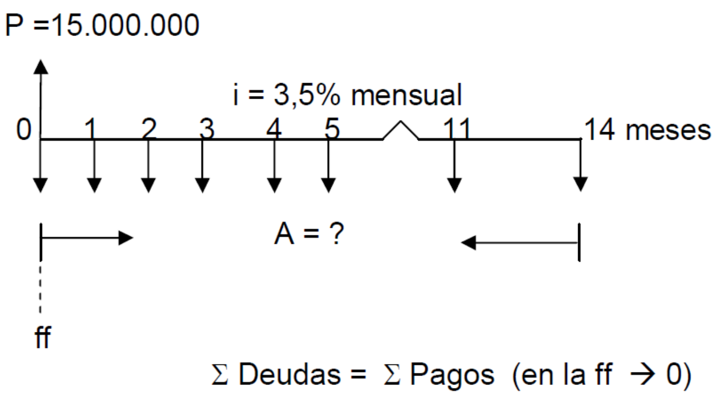
Cálculo de una anualidad anticipada en función del valor presente

Teniendo en cuenta que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$; entonces realizando las transposiciones de términos se estable la fórmula que permite calcular la anualidad anticipada a partir de valor presente así: $A = \frac{P}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)}$

Ejemplo

Se recibe un préstamo de $ 15.000.000 para cancelarlo en 15 cuotas mensuales iguales, pagaderas en forma anticipada, si la tasa de interés es del 3,5% mensual, hallar el valor de las cuotas.

Solución:

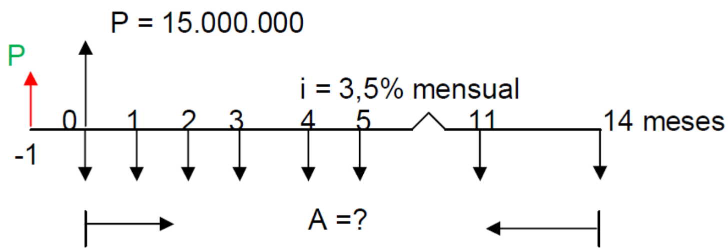


El flujo que está en el período cero, se puede manejar de manera independiente, y los flujos que están desde el período 1 hasta el período 23, se tratan como una anualidad vencida. Por lo tanto, se puede plantear la siguiente igualdad:

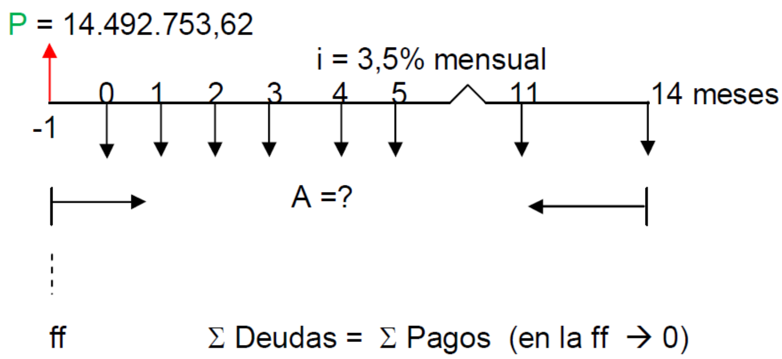
$$P = A + A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right];$$ por consiguiente: $$15.000.000 = A + A\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-14}}{0{,}035}\right];$$

por lo tanto: 15.000.000 =11,9205A ; $$A = \frac{15.000.000}{11{,}9205} = \$1.258.334{,}34$$

El ejercicio se podría realizar calculando un valor presente en el período -1 a partir de los $ 10.000.000 y luego se calcula la anualidad a partir de ese valor presente. Lo anterior, se puede visualizar en el diagrama económico siguiente:



Se puede plantear la siguiente igualdad: P=F(1+ i)-n ; por lo tanto: P=15.000.000 (1+ 0,035)-1 ; de donde: P=14.492.753,62 . A partir de este presente que se encuentra en el período -1; se calcula la anualidad, se tiene el siguiente diagrama:

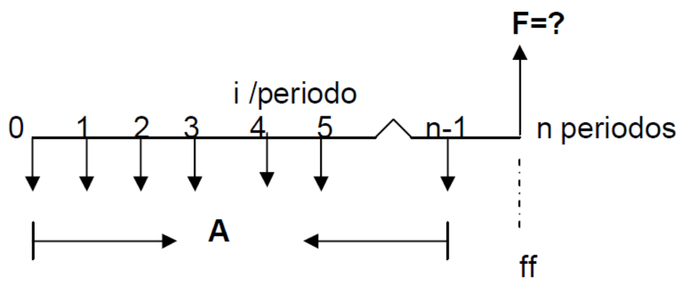


$$14.492.753{,}62 = A\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-15}}{0{,}035}\right]$$; de donde: 14.492.753,62=11.5174A ;

$$A = \frac{14.492.753{,}62}{11{,}5174} = \$\,1.258.334{,}34$$

Valor futuro de una anualidad anticipada

A partir del diagrama económico que se detalla a continuación se puede determinar la fórmula que permite calcular el valor futuro de una anualidad anticipada.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → n)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1

$$F = A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-4} + \ldots\ldots. + A(1+i)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por (1+ i), se tiene:

$$F(1+i) = \left[A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots. + A(1+i)\right](1+i)$$

Simplificando términos en el segundo miembro de la ecuación anterior, la ecuación No 2 quedaría:

$$F(1+i) = \left[A(1+i)^{n+1} + A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots. + A(1+i)^{2}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$F(1+i) - F = A(1+i)^{n+1} - A(1+i)$$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene. $F(1+i-1) = A(1+i)\left[(1+i)^{n} - 1\right]$; por lo que se tendrá: $Fi = A(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]$; por lo cual, se obtendrá.

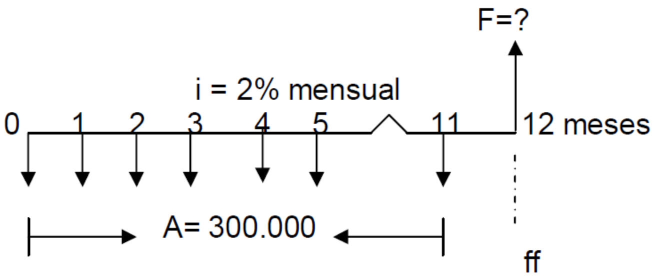
$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

Ejemplo

Una persona recibe por concepto de arriendo (mes anticipado), la suma de $1.000.000 mensuales, y deposita el 30% en una cuenta de ahorros en una institución financiera, que le reconoce el 2% de interés mensual. El depósito lo realiza una vez recibe el valor de la renta. Si el inmueble estuvo arrendado por un año, ¿Cuánto tendrá acumulado en la cuenta al final de los 12 meses?

Solución:

Depósito = 1.000.000 *0,30 =$300.000



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 12)

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i) = 300.000\left[\frac{(1+0,02)^{12} - 1}{0,02}\right](1+0,02) = \$4.023.626,92$$

4.2. Cálculo del tiempo de una anualidad anticipada

Es el número de flujos de caja (ingresos y egresos) que ocurren al inicio de cada período, que garantizan la amortización de una obligación financiera. Se puede determinar, en función del valor presente o del valor futuro.

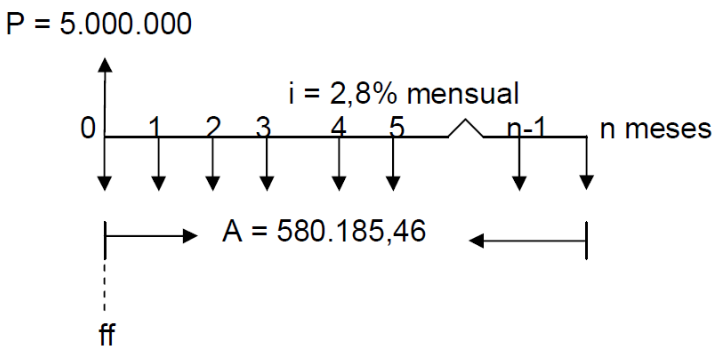
a) Cálculo del tiempo (n) en función del valor presente (P) de una anualidad (A) anticipada

Se tiene que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$; despegando se obtiene: $\frac{Pi}{A(1+i)} = \left[1-(1+i)^{-n}\right]$; sumando (1+ i)-n y restando $\frac{Pi}{A(1+i)}$; a ambos lados de la ecuación se tiene: $(1+i)^{-n} = \left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)$; aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad. Para el primer término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base; se tendría: $-nLn(1+i) = Ln\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)$, donde: $n = \frac{-Ln\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)}{Ln(1+i)}$; en la anterior expresión, se debe garantizar que: $0 \langle \left[1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right] \langle 1,$ con el objeto que n, sea positivo y definido.

Ejemplo

Una obligación de $ 5.000.000 se va a cancelar con pagos mensuales iguales anticipados de 580.185,46. Si la tasa de interés es del 2,8% mensual, calcular el número de pagos que garanticen el pago de la obligación.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se plantea la siguiente igualdad: 5.000.000 = 580.185,46 $\left[\frac{1-(1+0,028)^{-n}}{0,028}\right]$; donde:

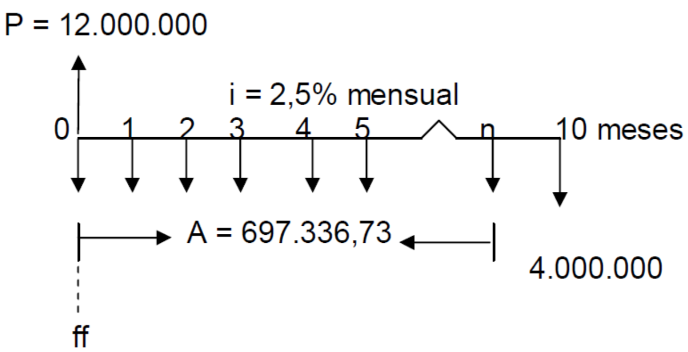
$1-(1,028)^{-n} = \frac{5.000.000*0,028}{580.185,46}$; por lo tanto: (1,028)-n =1-0,2413 ; entonces:

$n = \frac{-Ln(0,7587)}{Ln(1,028)} = 10 \text{ meses}$

Ejemplo

Se quedan debiendo 12.000.000 que se pagarán con cuotas mensuales iguales, comenzando hoy, de $ 697.336,73 y una cuota extra pactada en el mes de 10 de $ 4.000.000. Si el acreedor cobra una tasa del 2,5% mensual, Con cuántas se cancela la deuda?

Solución



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

El primer flujo de caja, se maneja de manera independiente, por lo tanto, se puede plantear la siguiente igualdad:

$$12.000.000 = 697.336,73 + 697.336,73\left[\frac{1-(1+0,025)^{-n}}{0,025}\right] + 4.000.000(1+0,025)^{-10}$$

donde: 8.177.869,66 = 697.336,73 $\left[\frac{1-(1,025)^{-n}}{0,025}\right]$; por lo tanto:

$1-(1,025)^{-n} = \frac{8.177.869,69 * 0,025}{697.336,73}$; entonces: $1-(1,028)^{-n} = 0,2932$; por consiguiente: (1,028)-n =1-0,2932 ; donde: $n = \frac{-Ln(0,7068)}{Ln(1,025)}$ = 14,05 meses

b) Cálculo del tiempo (n) en función del valor futuro de una anualidad (A) anticipada

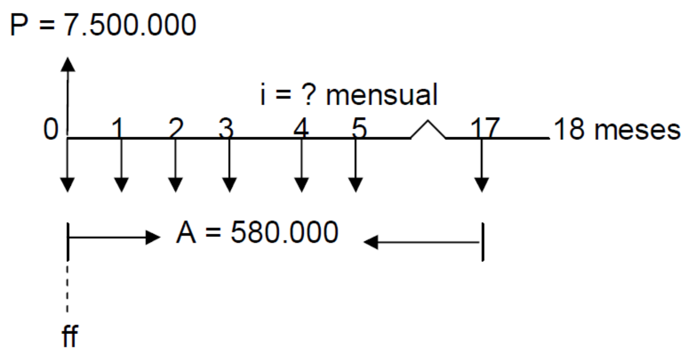
Se tiene que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$; despegando se obtiene: $\frac{Fi}{A(1+i)} = \left[(1+i)^n - 1\right]$

sumando 1 a ambos lados de la igualdad, se obtendrá $\left(1+\frac{Fi}{A(1+i)}\right) = (1+i)^n$; aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación. Para el segundo término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base, se tendría: $Ln\left(1+\frac{Fi}{A(1+i)}\right) = nLn(1+i)$; por consiguiente: $n = \frac{Ln\left(1+\frac{Fi}{A}\right)}{Ln(1+i)}$

4.3. Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada

Ejemplo: Una maquina se adquiere a crédito por la suma de $ 7.500.000 se va a financiar por medio de 18 cuotas mensuales anticipadas de $ 580.000, determinar la tasa de interés:

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se plantea la siguiente igualdad: 7.500.000 = 580.000 $\left[\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}\right](1+i)$; La tasa de interés solicitada, se encontrará por el método de tanteo, para lo cual, se le dará valores arbitrarios a i, de manera que se encuentre un valor a cero (0) muy cercano por la derecha y por la izquierda, es decir, se buscará un número positivo y negativo, y se procederá a una interpolación lineal, que permita encontrar la tasa de interés, que se está solicitando.

Para un i= 3,5% , se tiene: $7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+0,035)^{-18}}{0,035}\right](1+0,035)$

De donde: 7.500.000 =7.917,765,94

Se presenta una diferencia de: 7.917,765,94 -7.500.000 = - 417.765,94

Para un i = 4%, se tendrá: $7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+0,04)^{-18}}{0,04}\right](1+0,04)$

Entonces: 7.500.000 =7.636.087,94

Se presenta una diferencia de: 7.636.087,94 -7.500.000 = -136.087,94

Para un i = 4,5% , se tendrá: $$7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+0,045)^{-18}}{0,045}\right](1+0,045)$$

Entonces: 7.500.000 =7.370.171,03

Se presenta una diferencia de: 7.500.000 -7.370.171,03 = 129.828,97

Ahora se tiene un valor por la izquierda de cero y uno por la derecha, y se asumirá que están cercanos a cero, por lo cual, ya se puede proceder a la interpolación lineal, por lo tanto, se tiene la siguiente tabla:

	i	**Valor**	
$\Re_1 \rightarrow$	4	-136.087,94	$\rightarrow$ X1
	?	0	$\rightarrow$ X
$\Re_2 \rightarrow$	4,5	129.828,97	$\rightarrow$ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión

$$? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$$

Teniendo el cuidado de ubicar los Â en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada Â, se localizarán los X. Por consiguiente:

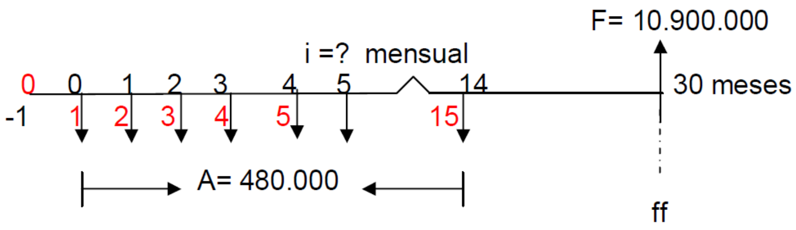
$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 4 + \frac{4,5 - 4}{129.828,97 + 136.087,94}(0 + 136.087,94)$$

$$i = 4 + \frac{0,5}{265.916,91}(136.087,94) = 4,25\%\ \text{mensual}$$

Ejemplo

Una persona hace 15 depósitos mensuales de $ 480.000 al comienzo de cada mes, iniciando hoy, y después de 2,5 años tiene acumulada en su cuenta de $ 10.900.000, ¿Qué tasa interés le aplicaron?

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 30)

Se plantea la siguiente igualdad: $10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+i)^{15}-1}{i}\right](1+i)^{16}$; La tasa de interés solicitada, se encontrará por el método de tanteo, para lo cual, se le dará valores arbitrarios a i, de manera que se encuentre un valor a cero (0) muy cercano por la derecha y por la izquierda, es decir, se buscará un número positivo y negativo, y se procederá a una interpolación lineal, que permita encontrar la tasa de interés, que se está solicitando.

Para un i= 1,5% , se tiene: $10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+0,015)^{15}-1}{0,015}\right](1+0,015)^{16}$

De donde: 10.900.000 =10.161.308,03

Se presenta una diferencia de: 10.900.000 -10.161.308,03 = 738.691,96

Para un i = 1,7%, se tendrá: $10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+0,017)^{15}-1}{0,017}\right](1+0,017)^{16}$

Entonces: 10.900.000 =10.638.138,15

Se presenta una diferencia de: 10.900.000 -10.638.138,15 = 261.861,85

Para un i = 1,9% , se tendrá:

$$10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+0,019)^{15}-1}{0,019}\right](1+0,019)^{16}$$

Entonces: 10.900.000 = 11.137.141,26

Se presenta una diferencia de: 10.900.000 -11.137.141,26 = - 237.141,26

Ahora se tiene un valor por la izquierda de cero y uno por la derecha, y se asumirá que están cercanos a cero, por lo cual, ya se puede proceder a la interpolación lineal, por lo tanto, se tiene la siguiente tabla:

	i	Valor	
$\Re_1 \rightarrow$	1,7	261.861,85	$\rightarrow$ X1
	?	0	$\rightarrow$ X
$\Re_2 \rightarrow$	1,9	-237.141,26	$\rightarrow$ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los Â en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada Â, se localizaran los X. Por consiguiente:

$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 1{,}7 + \frac{1{,}9 - 1{,}7}{-237.141{,}26 - 261.861{,}85}(0 - 261.861{,}85)$$

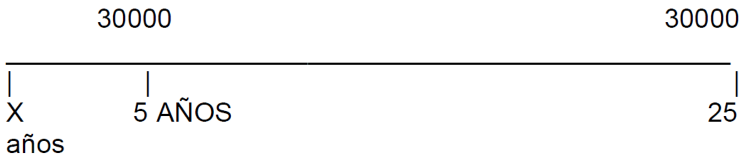
$$i = 1{,}7 + \frac{0{,}2}{-499.003{,}11}(-261.861{,}85) = 1{,}805\% \text{ mensual}$$

4.4. Anualidades diferidas

Una anualidad diferida es aquella en que el primer pago se efectúa después de transcurrido cierto número de periodos. El tiempo transcurrido entre la fecha en la que se realiza la operación financiera y la fecha en que se da el primer pago, es llamado período de gracia.

El periodo de gracia puede ser muerto o de cuota reducida. En el primero, no se pagan intereses ni se abona a capital, por lo tanto, el capital inicial se va incrementando a través del tiempo de gracia por no pagarse los intereses; mientras que en el segundo se pagan los intereses, pero no se hacen abonos a capital, es decir, en este caso, el capital principal no se incrementa en el período de gracia, porque se están cancelando los intereses.

Ejemplo: Un edificio recién construido no necesitara reparación hasta el término de cinco años, cuando se requerirán $ 300,000.00 para reparaciones mayores. Se estima que de ahí en adelante se necesitaran $30,000.00 al final de cada año en los próximos 20 años para mantenimiento. Determine el valor presente del mantenimiento del edifico sobre el 3% de intereses.



Para calcular el valor presente utilizaremos 21 periodos porque los primeros 4 no efectuamos pago alguno. El uso de la fórmula requiere de tener cuidado con las operaciones, primero se puede obtener el resultado de (1+ i) -n después el resultado de la operación (1- (1+i) -n)/i y al final multiplicaros con R

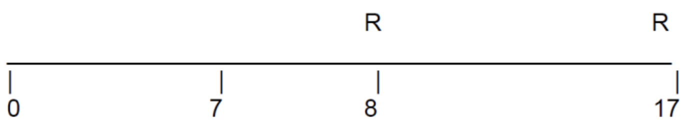
$$C = R\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ (1+i)^{-n}$$

$$C = (30000)\ \frac{1-(1+.03)^{-21}}{.03}\ (1+.03)^{-4}$$

$$C = (30000)(15.415024)(.888427)$$

C= $ 410,814.80

Un rancho valuado en $25,000,000.00 es vendido con $5,000,000.00 de enganche. El comprador acuerda pagar el saldo con intereses al 5% convertible semestral, mediante 10 pagos iguales semestrales de R, cada uno, el primer pago con vencimiento dentro de 4 años, hallar “R”.



En este caso, debemos restar a los 25 millones el enganche, quedando una deuda de 20 millones, el primer pago se hará en el 8 semestre (final del 4to. Año). El número 17 de la recta nos indica cuando el semestre en que terminaremos de pagar la deuda.

$$i = \frac{.05}{2} = .025$$

$$C = R\left\{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right\}(1+i)^{-n}$$

$$20{,}000{,}000 = R\left\{1 - \frac{1-(1+.025)^{-10}}{.025}\right\}(1+.025)^{-7}$$

$$20{,}000{,}000 = R\ (8.752068)\ (8.8412652)$$

$$20{,}000{,}000 = R\ (7.3628068)$$

$$R = \frac{20{,}000{,}000}{7.3628068} = \$\ 271{,}635.54$$

Calcular el valor actual de una renta semestral de $ 6,000.00 durante 7 años, si el primer pago semestral se realiza dentro de 3 años y el interés es del 17% semestral.

Solución:

```
6000          6000      6000  6000          6000
_________________________________________________________________
|   |   |   |  |  |   |  |   |  |   |    |    |    |    |    |   |   |   |   |
0   1   2   3  4  5   6  7   8  9   10   11   12   13   14   15 16 1718  19
HOY
```

$$C = R\,\frac{1-(1.17)^{-14}}{.17}\,(1.17)^{-5}$$

$$i = \frac{.17}{7} = .17$$

int.semestral

$$= 6{,}000\,\frac{1-(1.17)^{-14}}{.17}\,(1.17)^{-5}$$

$$= (6{,}000)\ (5.229299)\ (.456111)$$

$$= \$\ 14{,}310.85$$

Del problema anterior determina el monto

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$M = 6{,}000\,\frac{(1+.17)^{14}-1}{.17}$$

$$M = (6{,}000)\ (47.102672) = \$\ 282{,}614.96$$

El 12 de enero un deudor acuerda pagar sus deudas mediante 8 pagos mensuales de $ 350.00, haciendo el primero el 12 de julio del mismo año. Si después de realizar el quinto pago deja de hacer 2 pagos ¿qué pago único deberá hacer al vencer el último pago pactado originalmente para saldar completamente su deuda, si el interés se calcula al 43.96% con capitalización mensual?

12 EN 12JL 12AG 12SEP 12OCT 12NOV 12DIC 12EN 12FEB

| | | | | | | |

Lo pactado

350 350 350 350 350 350 350 350

Lo pagos realizados y el plazo de no pago.

350 350 350 350 350 ___ ___

?

$$i = \frac{.4396}{2} = .0366$$

El monto de adeuda al 12 de febrero sería:

$$1)\ M = 350 \left(\frac{(1.0366)^{8} - 1}{.0366} \right)$$

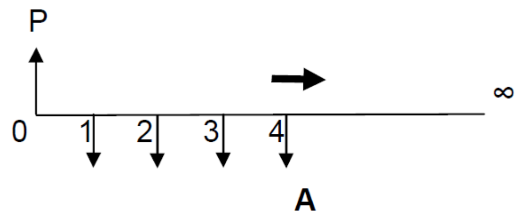
$$= 350\ (\ 9.103349\ ) = \$\ 3{,}186.7$$

$$2)\ M = 350\ \frac{(1.0366)^{5} - 1}{.0366}\ (1.0366)^{3}$$

4.5. Anualidades perpetúas

Una anualidad perpetua es aquella en la que no existe el último pago, o aquella que tiene infinito números de pagos. Teniendo en cuenta que en este mundo todo tiene fin, se puede definir, que una anualidad indefinida o perpetuas, es aquella que tiene muchos flujos de caja (ingresos o desembolsos), como ejemplos, se podrían citar las cuotas de mantenimiento de una carretera o de un puente, o una inversión a muy largo plazo donde solo se retiran los intereses, claro, suponiendo que éstos son iguales en cada uno de los períodos. En esta anualidad, solo existe valor presente que viene a ser finito, porque el valor futuro o monto será infinito por suponerse que los flujos de caja son indefinidos. En realidad, las anualidades perpetuas o indefinidas no existen. La anualidad perpetua vencida se representa en un diagrama económico de la siguiente manera:

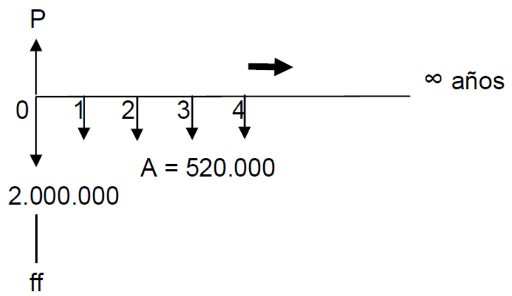
Se sabe que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; si se aplica limite cuando n®¥ ; entonces: (1+ i)-n se vuelve cero (0); por lo tanto: $P = \frac{A}{i}$



Ejemplo

Los exalumnos de una universidad deciden donarle un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial es de $ 2.000.000 y el mantenimiento de estima en $ 520.000 anuales, hallar el valor de la donación, si la tasa efectiva es de 15% anual.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$P = 2.000.000 + \frac{520.000}{0,15} = \$5.466.666,67$$

4.6. Anualidades generales

Las anualidades generales, son aquellas en las cuales los períodos de pago no coinciden con los períodos de interés, por ejemplo; una serie de pagos semestrales con una tasa efectiva trimestral. Una anualidad puede ser reducida a una anualidad simple, si se hace que los períodos de tiempo y los períodos de interés coincidan, hay dos formas como se puede realizar:

Calcular pagos equivalentes, que deben hacerse en concordancia con los períodos de interés. Consiste en encontrar el valor de los pagos que, hechos al final de cada período de interés, sean equivalentes al pago único que se hace al final de un periodo de pago.

Modificar la tasa, haciendo uso del concepto de tasas equivalentes, para hacer que coincidan los periodos de pago con los del interés.

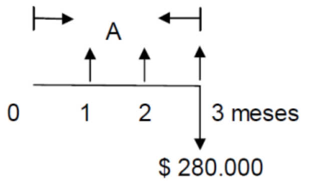
Ejemplo

Hallar el acumulado de 24 pagos trimestrales de $ 280.000 cada uno suponiendo una tasa de interés del 30% ACM. Realice el ejercicio por la dos formas enunciadas anteriormente

Solución: Forma I

Se tomará un flujo o pago trimestral de $ 280.000 y se convertirán a flujos o pagos mensuales, para que sea concordante con la aplicación de la tasa de interés, que para el caso es mensual.

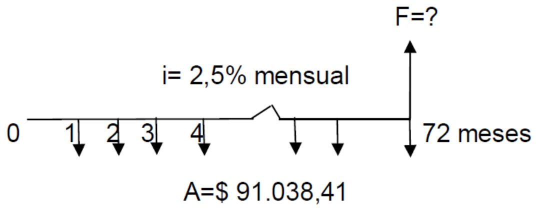
$$i=\frac{r}{m}=\frac{0,30}{12}=0,025 \text{ mensual}$$



Como los $ 280.000 se compartan como un futuro en cada uno de los períodos trimestrales, se procederá a partir de este valor a encontrar el flujo o pago mensual, para lo cual, se aplicará la siguiente igualdad.

$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$; por consiguiente: $A = 280.000\left[\frac{0,025}{(1+0,025)^3 - 1}\right] = \$91.038,41$

Ahora, teniendo los pagos mensuales, se procederá a determinar el valor futuro o acumulado, consideran que en 24 trimestres hay 72 meses (24 x 3).

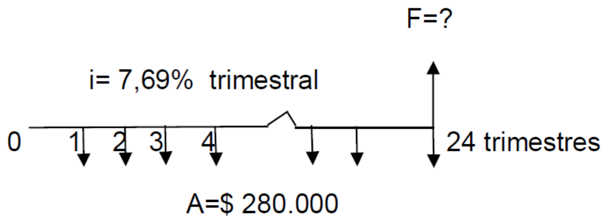


Se sabe que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 91.038,41\left[\frac{(1+0,025)^{72} - 1}{0,025}\right] = \$\ 17.906.264,98$

Forma 2

A partir de la tasa mensual de 2,5% se determina una tasa periódica o efectiva trimestral, así:

$(1+i_e)^m = (1+i_e)^t$; de donde: $(1+i_e)^1 = (1+0,025)^3$; entonces: $i_e = (1+0,025)^3$ **-1=0,0769** trimestral



Se sabe que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 280.000\left[\frac{(1+0{,}0769)^{24} - 1}{0{,}0769}\right] = \$\ 17.906.264{,}98$

4.7. Gradientes crecientes

Se denomina gradiente a una serie de flujos de caja (ingresos o desembolsos) periódicos que poseen una ley de formación, que hace referencia a que los flujos de caja pueden incrementar o disminuir, con relación al flujo de caja anterior, en una cantidad constante en pesos o en un porcentaje.

Para que una serie de flujos de caja se consideren un gradiente, deben cumplir las siguientes condiciones:

- Los flujos de caja deben tener una ley de formación.
- Los flujos de caja deben ser periódicos
- Los flujos de caja deben tener un valor un valor presente y futuro equivalente.
- La cantidad de periodos deben ser iguales a la cantidad de flujos de caja.

Cuando los flujos de caja crecen en una cantidad fija periódicamente, se presenta un gradiente lineal creciente vencido, sí los flujos de caja se pagan al final de cada

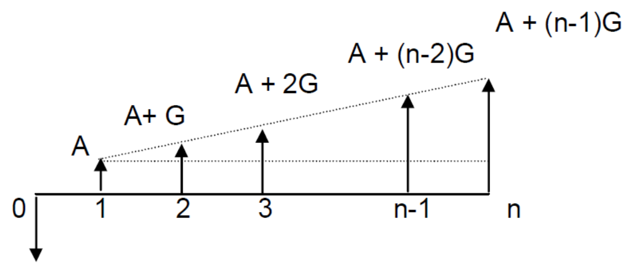
periodo. Si los flujos de caja ocurren al comienzo de cada período se está frente a un gradiente lineal creciente anticipado. Si el primer flujo se posterga en el tiempo, se presenta un gradiente lineal creciente diferido. Las combinaciones anteriores también se presentan para el gradiente lineal decreciente.

En el caso en que los flujos de caja aumenten en cada período en un porcentaje y se realizan al final de cada período se tiene un gradiente geométrico creciente vencido, y si los flujos ocurren al inicio de cada período, se tiene un gradiente geométrico creciente anticipado. Se tendrá un gradiente geométrico creciente diferido, si los flujos se presentan en períodos posteriores a la fecha de realizada la operación financiera.

El gradiente aritmético o lineal: Es la serie de flujos de caja periódicos, en la cual cada flujo es igual al anterior incrementado o disminuido en una cantidad constante en pesos y se simboliza con la letra G y se le denomina variación constante. Cuando la variación constante es positiva, se genera el gradiente aritmético creciente. Cuando la variación constante es negativa, se genera el gradiente aritmético decreciente.

Valor presente de un gradiente aritmético o lineal creciente

Es un valor ubicado en un período determinado, que resulta de sumar los valores presente de una serie de flujos de caja que aumenta cada período en una cantidad constante denominada gradiente (G).



$$P_{TG} = P_A + P_G$$

El valor A, se conoce como la base de la serie gradiente lineal creciente, y se comporta como una anualidad, esta base se encuentra localizada un periodo después del cero de la serie gradiente aritmética y en este cero se ubica el valor presente total de la serie gradiente aritmética o lineal, el cual se calcula a través de la fórmula PTG = PA +PG,

donde PA , es el presente de la base o de la anualidad, y PG es el presente del gradiente. El crecimiento o gradiente (G), se encuentra ubicado dos periodos después de donde se localiza el cero de la serie gradiente lineal o aritmética.

El valor presente total de la serie gradiente aritmética o lineal, se determina a través de la siguiente expresión:

$$P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

Donde:

Ptg = Valor presente de la serie gradiente

A = Valor de la base o anualidad

i = tasa de interés de la operación

n = Número de flujos de caja

G = Variación constante o gradiente

Para calcular el valor de cualquier flujo de caja en una serie gradiente aritmética creciente, se usa la siguiente expresión:

$$Cuota_n = A + (n-1)G$$

Donde:

Cuota n = Valor de la cuota n de la serie gradiente

A = Valor de la base

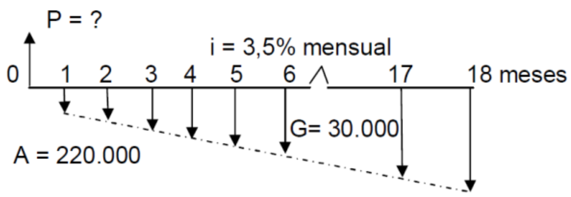
n = Número de flujo de la caja que se está analizando

G = Variación constante o gradiente

Ejemplo:

El valor de un torno se cancela en 18 cuotas mensuales, que aumentan cada mes en $ 30.000, y el valor de la primera es de $ 220.000. Si la tasa de interés es del 3,5% mensual, hallar el valor del torno.

Solución:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 0)$$

$$P = 220.000\left[\frac{1-(1+0,035)^{-18}}{0,035}\right] + \frac{30.000}{0,035}\left[\frac{1-(1+0,035)^{-18}}{0,035} - \frac{18}{(1+0,035)^{18}}\right]$$

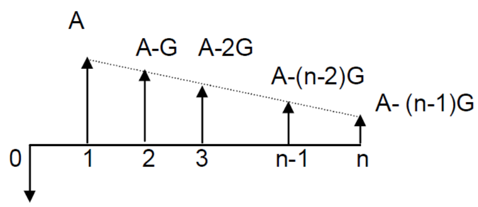
$$P = \$\ 5.901.028,16$$

4.8. Gradientes decrecientes

Valor Futuro del Gradiente Lineal Decreciente

Un gradiente aritmético (G) o uniforme es una serie de flujos de caja que aumenta o disminuye de manera uniforme. Es decir que el flujo de caja, ya sea ingreso o desembolso, cambia en la misma cantidad cada año. La cantidad de aumento o disminución es el gradiente.

Es un valor localizado en el presente equivalente a una serie de flujos de caja periódicos que disminuyen, cada uno respecto al anterior, en una cantidad constante (G)



$$P_{TG} = P_A - P_G$$

El valor A, se conoce como la base de la serie gradiente lineal decreciente, y se comporta como una anualidad, esta base se encuentra localizada un periodo después del cero de la serie gradiente aritmética y en este cero se ubica el valor presente total de la serie gradiente aritmética o lineal, el cual se calcula a través de la fórmula PTG = PA -PG, donde PA , es el presente de la base o de la anualidad, y PGes el presente del gradiente. El decrecimiento o gradiente (G), se encuentra ubicado dos periodos después de donde se localiza el cero de la serie, gradiente lineal o aritmética.

El valor presente total de la serie gradiente aritmética decreciente, se determina mediante la siguiente expresión:

$$P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

Donde:

PTG = Valor presente de la serie gradiente

A = Valor de base o anualidad

i = Tasa de interés de la operación

n = Número de flujos de caja

G = Variación constante o gradiente

Para calcular el valor de cualquier flujo de caja en una serie gradiente aritmética decreciente, se usa la siguiente expresión:

$$Cuota_n = A - (n-1)G$$

Donde:

Cuota n = Valor de la cuota n de la serie gradiente

A = Valor de la base

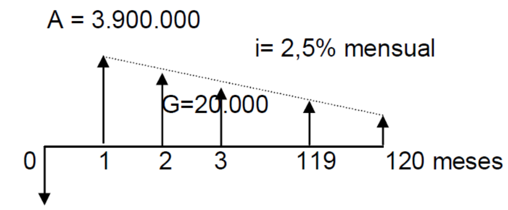
n = Número de flujo de caja que se está analizando

G = Variación constante o gradiente

Ejemplo:

Una vivienda se está cancelando con 120 cuotas mensuales que decrecen en $ 20.000 cada mes, siendo la primera cuota $ 3900.000. Si la tasa de financiación que se cobra es del 2,5% mensual, calcular el valor de la vivienda.

Solución:



$$P_{TG} = P_A - P_G$$

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los pagos para arriba y el valor del activo, en este caso el valor de la vivienda para abajo.

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

$$P_{TG} = 3.900.000\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-120}}{0{,}025}\right] - \frac{20.000}{0{,}025}\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-120}}{0{,}025} - \frac{120}{(1+0{,}025)^{120}}\right]$$

$$P_{TG} = 147.941.378{,}6 - 25.387.797{,}85 = 122.553.580{,}07$$

4.9. Crédito Infonavit

El crédito Infonavit es el préstamo económico con garantía hipotecaria que otorga el Infonavit para adquirir vivienda, nueva o usada, para construir en terreno propio, ampliar o remodelar la existente o bien para pagar la hipoteca de la que el trabajador es propietario. Solicitar crédito para vivienda al Infonavit es un derecho que tienen los trabajadores de México, establecido en el artículo 123 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, la Ley Federal del Trabajo y la Ley del Infonavit.

El Infonavit es una entidad gubernamental de asistencia para la vivienda dirigido a ayudar a los trabajadores mexicanos a comprar casa. El crédito Infonavit es un crédito hipotecario que se otorga a todos los trabajadores que estén afiliados al Instituto Mexicano del

Seguro Social (IMSS), el cual se otorga a través del Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (Infonavit).

Dicho crédito otorgado a los trabajadores en México, les permite:

- Comprar un inmueble
- Construir una casa
- Ampliar o remodelar una vivienda
- Pagar una hipoteca existente

Los beneficiarios de viviendas para trabajadores en México otorgadas por INFONAVIT deben asegurarse de lo siguiente:

- Toda la documentación del crédito contenga el nombre completo del beneficiario.
- La propiedad que se construye, compra, amplía o remodela debe estar legalmente titulada e inscrita en el Registro Público de la Propiedad.
- La casa que se vende debe estar a nombre completo de la persona o personas que realizan la venta.
- La ubicación debe estar escrita de manera completa, es decir, nombre, número de la calle, barrio, Ciudad, Estado y código postal.
- La información sobre las características de la vivienda (tipo de construcción, edificios no anexos y terminaciones) debe estar completa en la documentación de descripción del crédito.
- El precio de compra de la vivienda recién construida se debe indicar claramente en la documentación relacionada con la venta de la propiedad.

Existen 7 tipos de créditos Infonavit, los cuales se pueden destinar a diferentes usos. En la siguiente tabla con información tomada de Mi Portal Infonavit te los damos a conocer:

Tipos	Comprar	Construir	Ampliar o Reparar	Pagar Hipoteca	Mejorar	Sumar Ahorros
Infonavit	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Infonavit Total	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Cofinavit Ingresos Adicionales	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Cofinavit	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Crédito Seguro	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Tu 2do Crédito	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Mejoravit	✗	✗	✗	✗	✓	✗

Solicitar un crédito Infonavit

Lo primero que debes hacer para solicitar tu crédito Infonavit es determinar cuál es el que más se adapta a las necesidades de la persona interesada.

Después tendrás que realizar la precalificación, la cual definirá si la persona interesada está en condiciones de obtener un crédito. Una vez obtenida la aprobación del crédito en la precalificación, se deben reunir todos los documentos solicitados y se tendrá que presentar la solicitud en una oficina Infonavit.

Finalmente, el interesado debe firmar el Aviso de Retención de Descuentos ingresando a la cuenta Infonavit. Este aviso es un documento a través del cual el Infonavit informa al patrón de un trabajador que solicita un crédito y cuál será la cantidad para descontar de su salario base.

El patrón estará en la obligación de realizar los descuentos mensualmente. Sin embargo, estos descuentos son informados al Infonavit de manera bimestral.

Ten por seguro que ofrecer la posibilidad de que tus clientes adquieran una vivienda con un crédito Infonavit te generará más interesados.

VIDEOS ACADÉMICOS

Generalidades de la Matemática Financiera. Felipe Delgado

https://youtu.be/urr7OmAx4G0

Interés Capital. Míster Dubón

https://www.youtube.com/watch?v=o1IakzvXB2I

Anualidades. Luis Lap

https://www.youtube.com/watch?v=7I1oDZFaQas

Referencias

Alvarao, V. (2014). Ingeniería económica, Nuevo Enfoque. México D.F.: Grupo Editorial PATRIA.

Molinares, C. R. (2009). Fundamentos de matemáticas financieras. Colombia: Universidad Libre.

Rodríguez, C. h. (2021). Matemáticas financieras para las ciencias administrativas. Xalapa, Veracruz, México: Grupo Editorial INNOVA.

Tarquin, A. (2012). Ingeniería económica. México. D.F.: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES.

Urbina, G. B. (2007). Fundamentos de ingeniería económica. México D.F.: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES.