



Análisis de Estructuras

Licenciatura en Arquitectura

Quinto Cuatrimestre

Enero – Abril

García López Pedro Alberto

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1978 con el inicio de actividades de la normal de educadoras “Edgar Robledo Santiago”, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los

jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra universidad inició sus actividades el 19 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a las instalaciones de carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de educación que promueva el espíritu emprendedor, basados en Altos Estándares de calidad Académica, que propicie el desarrollo de estudiantes, profesores, colaboradores y la sociedad.

Visión

Ser la mejor Universidad en cada región de influencia, generando crecimiento sostenible y ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo



El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

“Pasión por Educar”

Balam



Es nuestra mascota, su nombre proviene de la lengua maya cuyo significado es jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen a los integrantes de la comunidad UDS.

Modelo educativo

Análisis Estructural

Objetivo de la materia:

Proporcionar una formación adecuada al alumno, que logre una competencia en el diseño, análisis y solución de armaduras simples y planas para la arquitectura. Lo que requiere de este la capacidad de selección de los métodos de nudos y secciones, usando donde sea posible el análisis de miembros de fuerzas cero, todo esto por medio del estudio, comprensión y aplicación de conceptos fundamentales que requieren ser sólidos en conceptos de física y conceptos de matemáticas, sistemas en equilibrio de partículas y de armaduras simples y planas, referente a sistemas de fuerzas coplanares, utilizando diagrama de cuerpo libre, condición de equilibrio y metodología de nudos y secciones.

Unidad I

Introducción

- 1.1 Conceptos e introducción al análisis estructural (cargas muertas, vivas y accidentales).

Unidad 2

Métodos energéticos

- 2.1 Introducción (deducción de ecuaciones de métodos energéticos y arcos).
- 2.2 Trabajo real.
- 2.3 Aplicación a vigas, marcos, armaduras y arcos.
- 2.4 Aplicación a vigas, marcos, armaduras y arcos.
- 2.5 Primer teorema de Castigliano.
- 2.6 Aplicación a vigas, marcos, armaduras y arcos.
- 2.7 Segundo teorema de Castigliano.
- 2.8 Aplicación a vigas, marcos, armaduras y arcos.

- 2. 9 Teoremas de Maxwell y Betti.
- 2. 10 Aplicación a vigas, marcos, armaduras y arcos.

Unidad 3

LÍNEAS DE INFLUENCIA

- 3. 1 Introducción.
- 3. 2 Definición y propiedades de la línea de influencia.
- 3. 3 Método de Müller - Breslau aplicado a estructuras estáticamente determinadas (vigas, armaduras, marcos y arcos).
- 3. 4 Estructuras estáticamente indeterminadas.
- 3. 5 Construcción de líneas de influencia utilizando el método del Trabajo virtual.
- 3. 6 Serie de sobrecargas aisladas.

Unidad 4

Ejecución

- 4. 1 Introducción.
- 4. 2 Naturaleza del problema viga – columna.
- 4. 3 Ecuaciones diferenciales para viga – columna.
- 4. 4 Estabilidad del equilibrio.
- 4. 5 Carga de pandeo de Euler (para diferentes tipos De apoyos).
- 4. 6 Limitación de la ecuación de pandeo elástico.
- 4. 7 Modificación en la ecuación de la carga crítica de Euler.
- 4. 8 Columnas cargadas excéntricamente.
- 4. 9 Aplicación de programas computacionales para la solución de estructuras (Software).

4. 10 Utilización de software educativo para resolver vigas, armaduras, marcos y arcos.

Criterios de evaluación:

No	Concepto	Porcentaje
1	Trabajos Escritos	10%
2	Actividades web escolar	20%
3	Actividades Áulicas	20%
4	Examen	50%
Total de Criterios de evaluación		100%

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN

¿Qué es una Estructura? una estructura es un conjunto de elementos que se interconectan para cumplir funciones tales como: salvar vanos (puentes), contener sólidos o líquidos (silos, piscinas), soportar empuje de tierras (muros de contención), etc. Las cualidades de una buena estructura deben ser: seguridad, economía, racionalidad y por qué no decirlo: belleza.

Se entiende por análisis de una estructura el proceso sistemático que concluye con el conocimiento de las características de su comportamiento bajo un cierto estado de cargas; se incluye, habitualmente, bajo la denominación genérica de estudio del comportamiento tanto el estudio del análisis de los estados tensional y deformacional alcanzados por los elementos y componentes físicos de la estructura como la obtención de conclusiones sobre la influencia recíproca con el medio ambiente o sobre sus condiciones de seguridad.

I.1. CONCEPTOS E INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL (CARGAS MUERTAS, VIVAS Y ACCIDENTALES)

Elementos estructurales.

A continuación se hará una descripción de algunos de los elementos estructurales más importantes, con la finalidad de precisar conceptos y evitar confusiones.

CLASIFICACIÓN GENERAL EN FUNCIÓN DE SU FORMA

Elementos lineales: Son aquellos que tienen una dimensión preponderante frente a las otras dimensiones, pueden asociarse a líneas y así se los representa (vigas, columnas).

Elementos superficiales: Son aquellos que tienen una dimensión despreciable frente a las otras dos, se asocian a superficies (losas, diafragmas).

CLASIFICACIÓN EN FUNCIÓN DEL TIPO DE SOLICITACIÓN

VIGA: Es un elemento lineal solicitado primordialmente por cargas perpendiculares a su eje, sus esfuerzos correspondientes son de flexión. Generalmente tienen posición horizontal. (fig. 1a).

COLUMNA: Es un elemento lineal solicitado primordialmente por cargas de compresión en su propio eje. Generalmente tienen posición vertical. (fig. 1b).

TENSOR O TIRANTE: Es un elemento lineal solicitado primordialmente por cargas de tracción. Utilizamos el término 'primordialmente' por cuanto existen elementos que también participan de otro tipo de sollicitación, por ejemplo, la columna de un pórtico posiblemente estará también sujeta a esfuerzos de flexión, lo que hace que algunos autores las llamen vigas-columnas. Asimismo la losa de una escalera, por ser inclinada, estará sometida a esfuerzos de compresión, además de flexión.

LOSA: Es un elemento superficial sometido primordialmente a sollicitaciones perpendiculares a su plano medio. Generalmente tiene posición horizontal. (fig. 1c)

DIAFRAGMA: Es un elemento superficial sometido primordialmente a esfuerzos en su plano medio (Diafragmas antisísmicos o Muros de corte). Generalmente son verticales (fig. 1d).

ARCO: Es un elemento lineal curvo y si su directriz es la línea de presiones estará solicitado fundamentalmente por esfuerzos de compresión en su propio eje. Si la única sollicitación a la que está sometido es su propio peso, su forma debería ser la de una catenaria invertida y si su sollicitación más importante es una carga uniformemente distribuida su directriz (línea de presiones) debería ser parabólica. Cabe señalar que la parábola es una curva muy similar a la catenaria; esto trae importantes consecuencias (fig. 1e)

CABLE: Es un elemento lineal curvo, sujeto exclusivamente a esfuerzos de tracción. Si la única sollicitación es el peso propio, su forma responde a la curva denominada catenaria.

BÓVEDA: Puede describirse como una sucesión de arcos que si están bien diseñados seguirán la línea de presiones y estarán sujetos a esfuerzos de compresión (fig. 1g). Una bóveda de cubierta cuya sollicitación primordial es la de su propio peso, podría diseñarse mediante una cadena suspendida desde sus extremos con la luz y flecha deseadas tomadas a

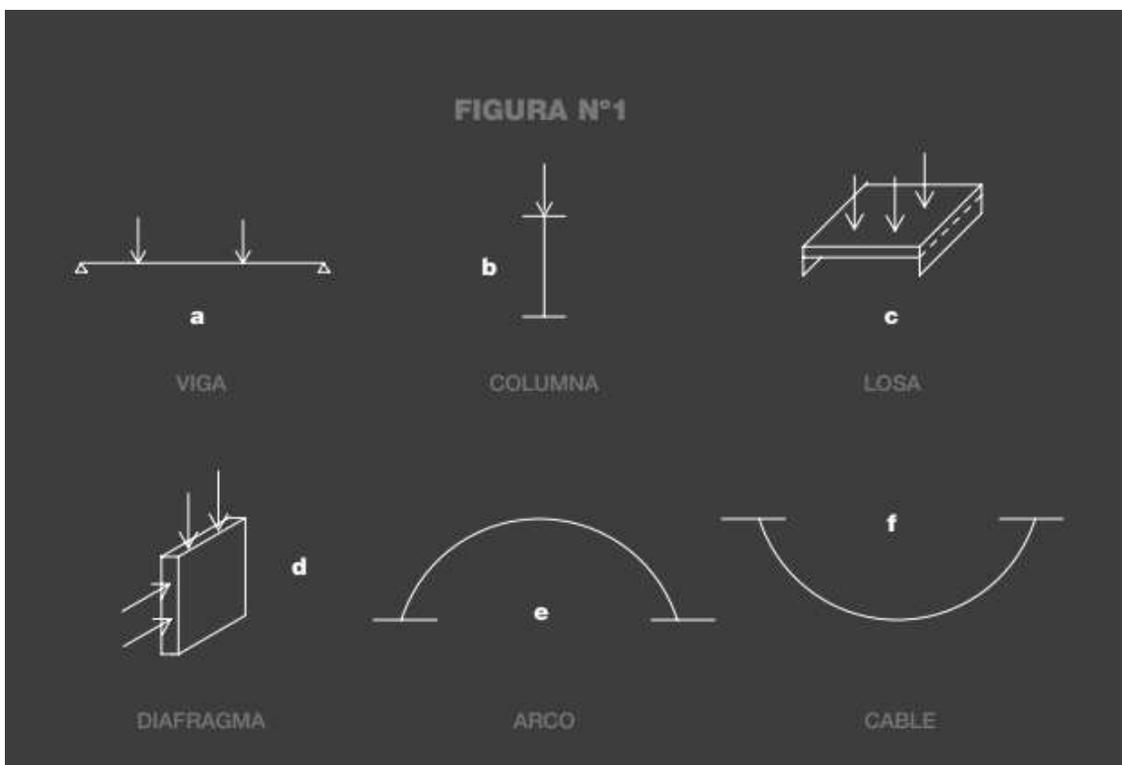
escala. Esa forma invertida sería la de la cubierta y estaría sometida a esfuerzos de compresión.

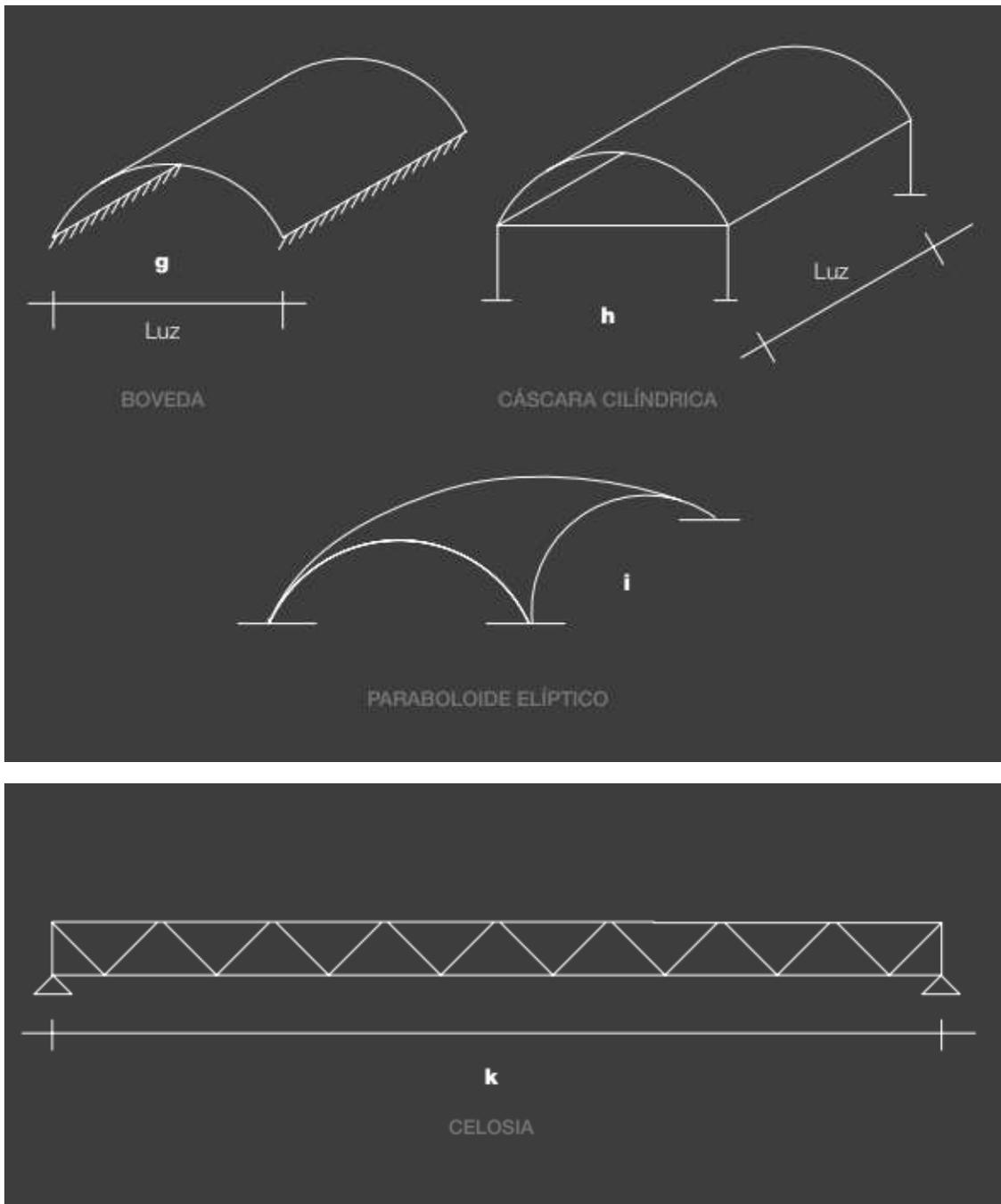
CADENA: Es un elemento lineal, generalmente de hormigón, armado con apoyo continuo.

CÁSCARAS: Las hay de simple y doble curvatura, son elementos superficiales curvos que por su diseño están solicitados fundamentalmente por esfuerzos directos de compresión, tracción y corte. Los esfuerzos de flexión, si existen, no tienen mayor importancia. (figuras 1h ; 1i)

LÁMINAS PLEGADAS: Son elementos superficiales de directriz quebrada, por su diseño están sometidos al mismo régimen de esfuerzos que las cáscaras. (fig. 1)

CELOSÍAS: Son estructuras compuestas de elementos lineales dispuestos en forma de triángulos y, como tales, indeformables. Dada su forma, sus diferentes elementos están sometidos a esfuerzos directos de compresión o de tracción. Las celosías pueden ser planas o espaciales. (fig. 1k)





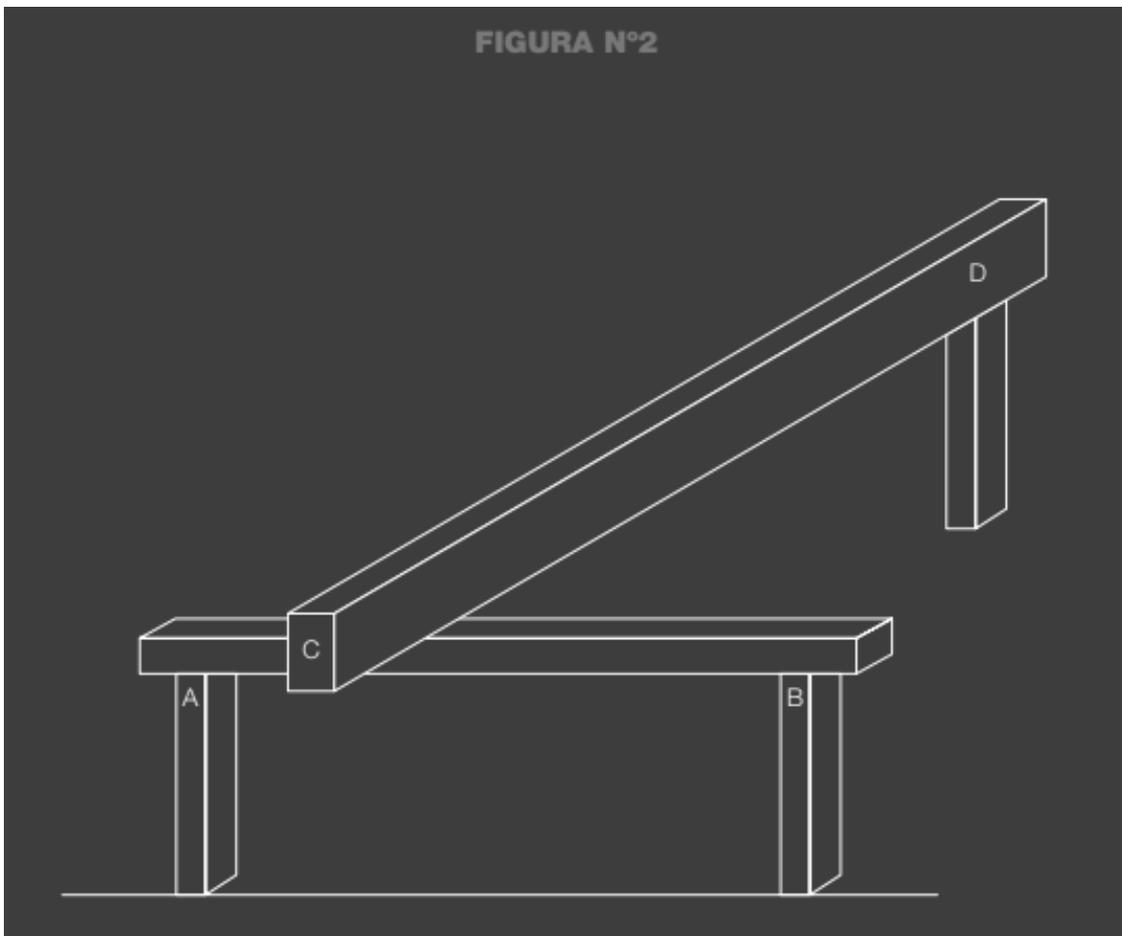
CARGAS

CARGAS PUNTUALES: Llamadas también cargas concentradas, son aquellas que actúan sobre un área muy pequeña en comparación con la del elemento que las recibe, se las representa como si actuaran sobre un punto. Se expresan en kilogramos, toneladas, libras,

etc. con omisión de su área de actuación. En la figura 2, la viga AB recibe en C una carga puntual (concentrada); es la reacción de la viga CD

CARGAS LINEALES: Llamadas también distribuidas, son aquellas que actúan sobre una superficie en la que una de sus dimensiones es despreciable. Se las expresa en kilogramos/ml; toneladas/ml; libras/pie, etc. En la figura 3, el pórtico ABCD recibe en AB una pared que se asocia a una carga lineal. En la figura 4, las vigas AB y CD reciben también cargas lineales provenientes de la losa apoyada sobre aquellas.

CARGAS SUPERFICIALES: Actúan sobre una superficie cuyas dimensiones son comparables entre sí, se las expresa en kilogramos/m² ; toneladas/m² ; libras/pie² , etc. (Figura 5) Para efectos de diseño, la carga superficial puede idealizarse, aislando una franja de un metro de ancho, en cuyo caso la franja recibe una carga que también puede expresarse en kg/m.l. (para un elemento de un metro de ancho). (Figura 6l)



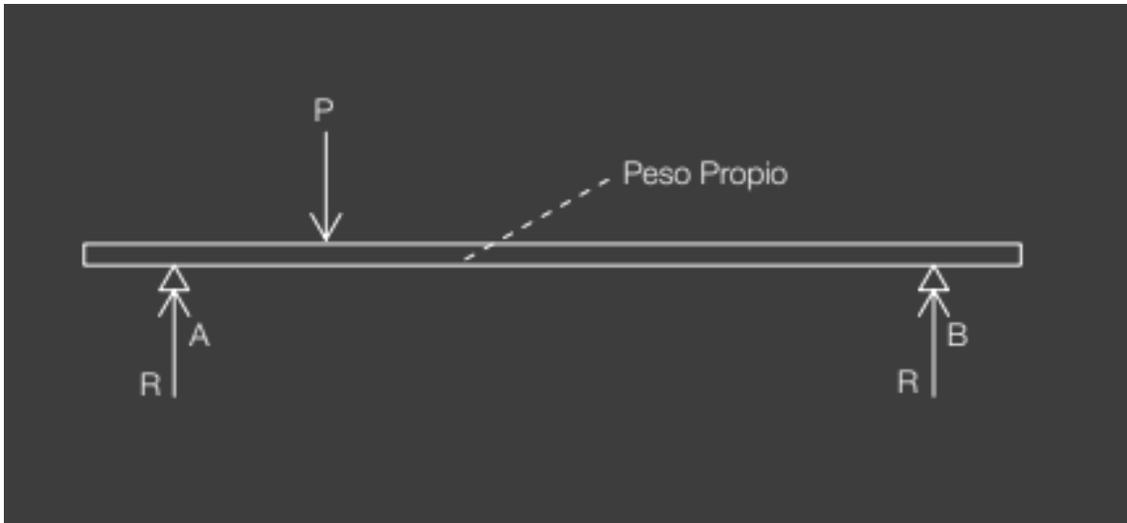


FIGURA N°3

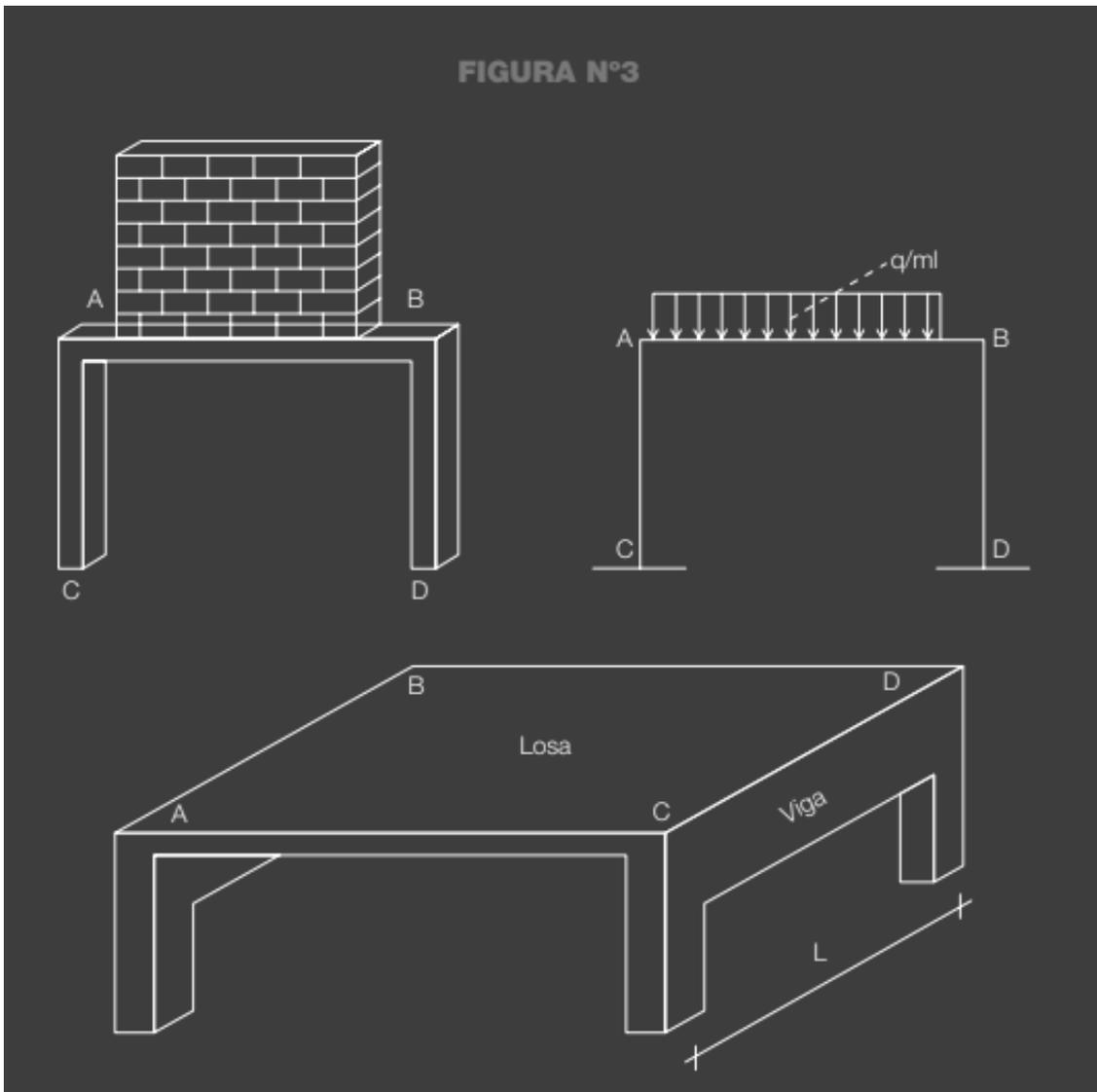


FIGURA N°4

PÓRTICOS AB Y CD

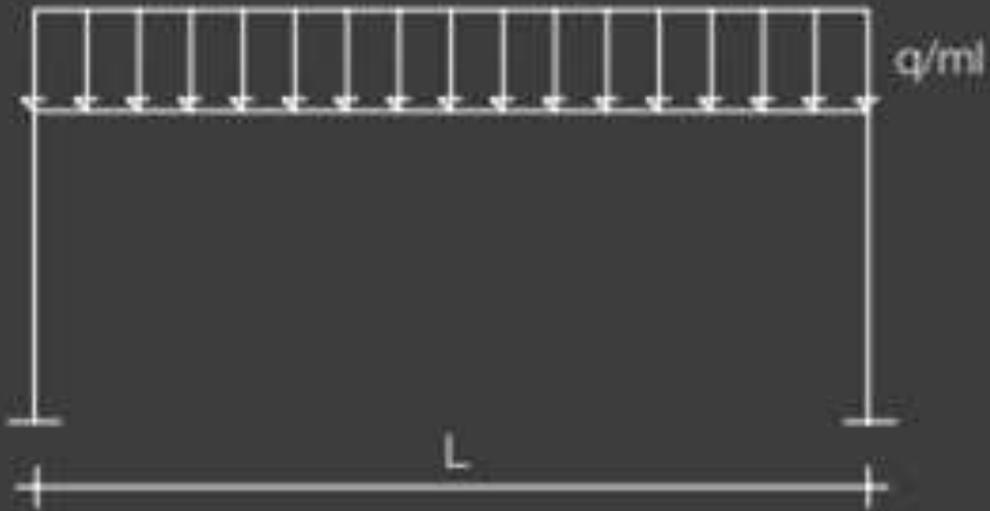
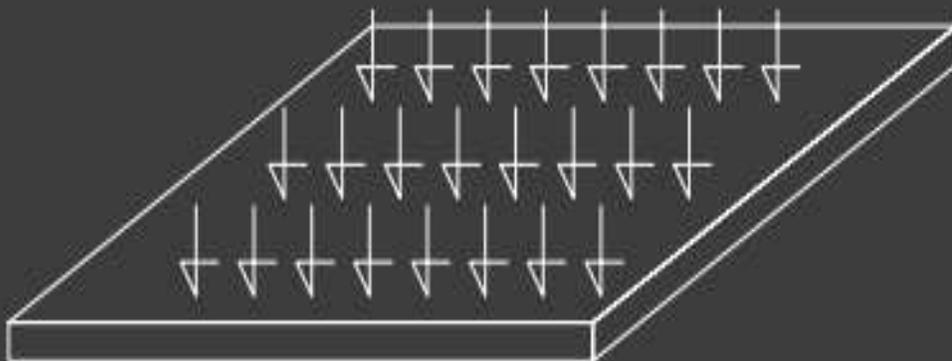
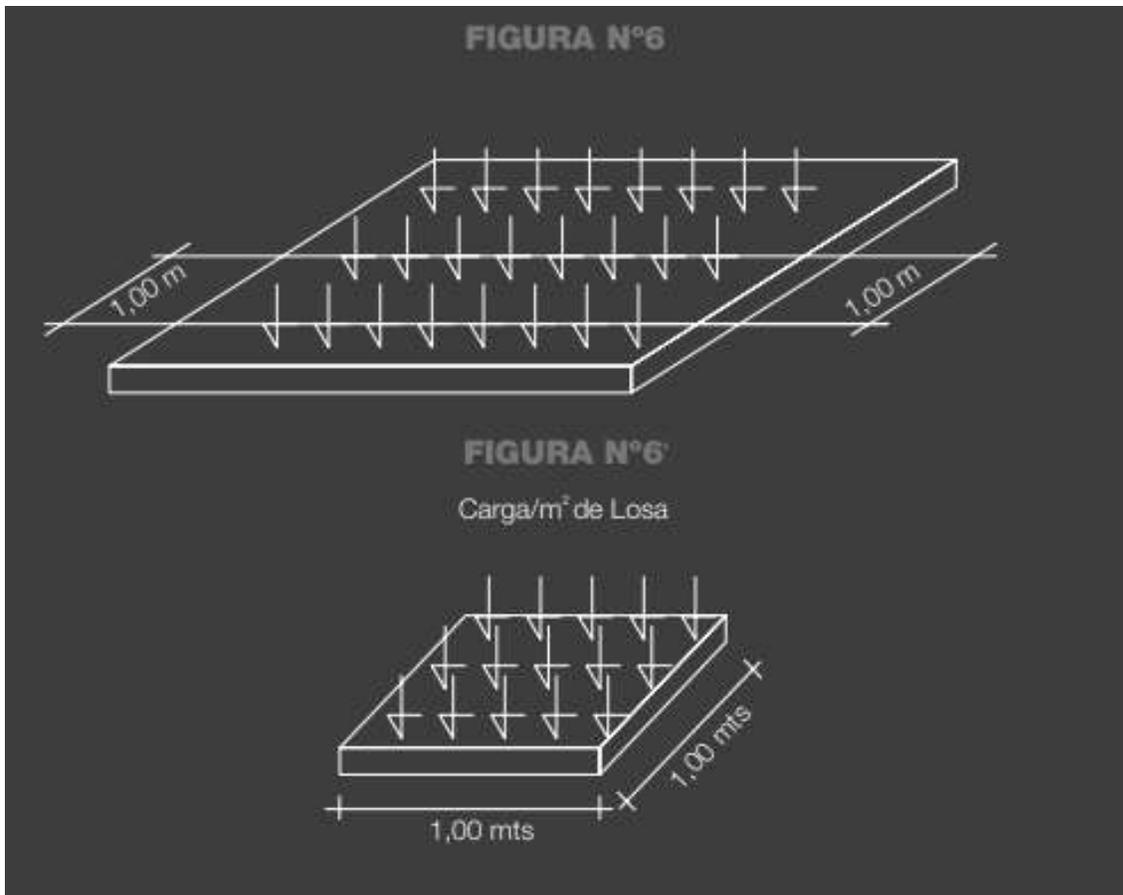


FIGURA N°5

Carga en kg/m^2





Especial mención merece el caso del peso propio de elementos superficiales como las losas. Tomemos como ejemplo la determinación del peso propio de una losa maciza de hormigón armado, cuyo peso unitario es de 2.400 kg/m³ y cuyo espesor es de 15 centímetros. El peso propio se calcularía así:

$$\text{Peso propio} = (1,00 \times 1,00 \times 0,15) \times 2400 = 360 \text{ kg/m}^2$$

Lo expresado significa que un bloque de losa de 0,15 m³ tiene un peso de 360 kg, repartidos en la superficie de un metro cuadrado. (Figura 6).

CLASIFICACIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO DE PERMANENCIA

CARGA MUERTA: Es aquella que permanece indefinidamente en el elemento estructural de que se trate, por ejemplo, los pesos propios, los pisos, las decoraciones, los revestimientos, etc.

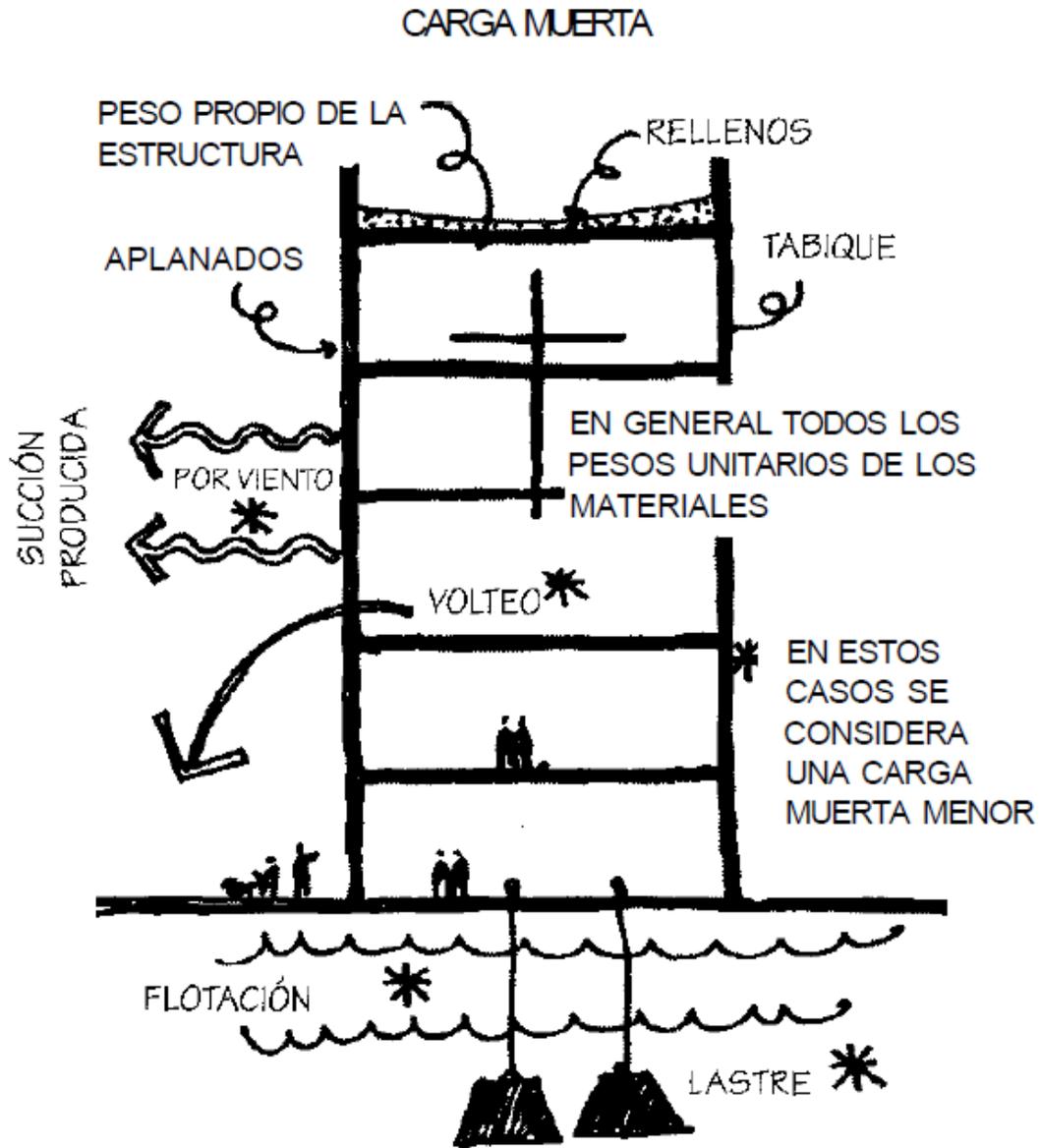
CARGA VIVA: Es aquella que, con certeza, se presentará periódicamente durante la vida útil de la estructura; son ejemplos de ésta: las personas y mobiliario en un edificio, los vehículos en un puente carretero o el empuje de aguas en una piscina.

CARGA ACCIDENTAL: Es aquella que eventualmente puede presentarse durante la vida útil de la estructura que debe estar diseñada para soportarla en función del riesgo de su ocurrencia. En nuestro caso, habrán de considerarse las cargas accidentales de sismo o granizo, no necesariamente las de viento, ceniza volcánica o nieve, ya que dependen de la situación geográfica de la estructura.

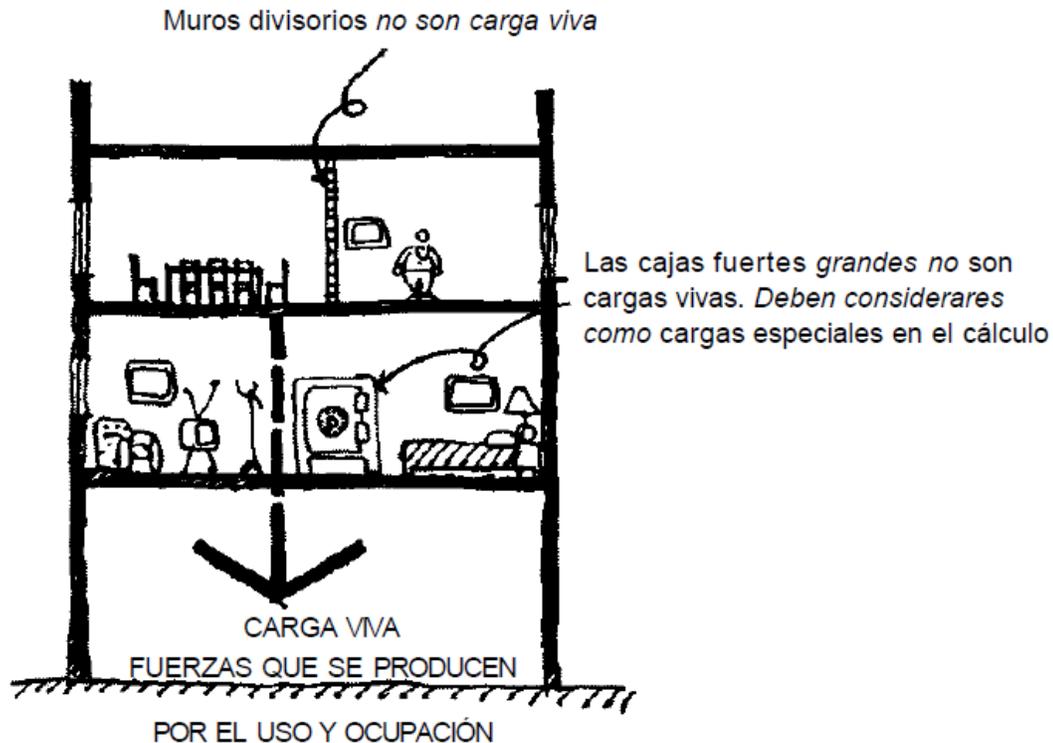
OTRAS SOLICITACIONES. Nos referimos aquí a los esfuerzos que responden a cambios de temperatura o retracción de fraguado. Es frecuente que a estas se las contrarreste mediante juntas de dilatación o de rotura para minimizarlas a través del fraccionamiento de la estructura. Existen otras como choques, vibraciones o explosiones que deberán considerarse coyunturalmente.

PRECISIÓN EN LA DETERMINACIÓN DE CARGAS

A) **LA CARGA MUERTA:** El peso de cualquier elemento constructivo o estructural aparentemente puede ser determinado con precisión, pues este depende solo de sus dimensiones y peso unitario, pero difícilmente las dimensiones de proyecto serán iguales a las de obra, sea esta de hormigón, mampostería o madera. Igual sucederá con el peso unitario para el cual contamos solo con cifras referenciales, piénsese si no en la relatividad de pesos unitarios de hormigones, mamposterías o maderas. Quizá podríamos hacer excepción con elementos estructurales de acero que responden a procesos industriales. Estudios han demostrado que tratándose de cargas muertas, su determinación teórica puede diferir hasta en un 20% con la realidad.



- B) **LA CARGA VIVA:** Sus valores están consignados en los reglamentos de construcción y dependen del destino de los locales que pueden ser vivienda, oficinas, auditorios, etc. Su determinación es probabilística y, por supuesto, no necesariamente son coincidentes con uno u otro Reglamento.



C) LAS CARGAS ACCIDENTALES: Si la imprecisión es notable para la carga muerta, así como para la carga viva, mayor lo será para las cargas accidentales, piénsese si no en la determinación de solicitaciones sísmicas o de presiones de viento y esta aseveración ya nos estará alertando acerca de la inutilidad de precisiones numéricas cuando las premisas carecen de esa cualidad. Recordemos que ningún resultado puede tener mayor precisión que la de las hipótesis de partida.

2.4.- EL FACTOR DE SEGURIDAD: En los procesos de análisis y diseño estructural, es necesario partir de ciertas hipótesis de resistencia y comportamiento que, como tales, están llenas de incertidumbres. Examinémoslas:

Incetidumbres de análisis El análisis estructural parte de una serie de hipótesis basadas en la teoría de la elasticidad, la Ley de Hooke y las hipótesis de Navier, entre otras, que son herramientas de trabajo que nos permiten acercar a la realidad, pero que no son la realidad. Al respecto, Félix Candela (1962) en su obra *Hacia una nueva filosofía de las Estructuras*, refiriéndose a la Teoría de la Elasticidad, decía que es una teoría matemáticamente impecable,

aplicada a materiales inexistentes; aseveraciones de este tipo deben permitirnos poner los pies en la tierra y tomar el análisis estructural como lo que es: una herramienta que nos permite aproximarnos a la realidad. Este pensamiento debe guiarnos para no desechar otros caminos creativos como la intuición, la experiencia y la experimentación.

Incertidumbre en el valor de las solicitaciones De estas hablamos en el numeral 2.3. Cuando nos referimos a la relatividad de su cuantificación.

2Incertidumbres de resistencia de los materiales Para abordar el proceso de diseño estructural, partimos de las resistencias de los materiales y los datos de los que disponemos, generalmente no son más que referenciales. La resistencia de la madera, por ejemplo, depende de la especie y dentro de esta, de su época de siembra, procedencia dentro del tronco, defectos, etc. De este modo, en la práctica estructural, no nos queda más que apoyarnos en los datos que nos proporcionan los diferentes reglamentos. Por otro lado, si hablamos de mamposterías, las incertidumbres son aún mayores pues la resistencia de las piezas individuales dependerá de la materia prima utilizada, de su grado de cocción y de los mismos equipos de fabricación, sobre todo cuando el proceso es artesanal. En la fabricación del hormigón, aun si existe un excelente control de calidad, siempre habrá muchas incertidumbres. Quizá en la calidad del acero las incertidumbres disminuyen debido a su proceso industrial de elaboración.

Incertidumbre en las dimensiones de las piezas También en este caso, dependiendo del tipo de material y sistema constructivo, las dimensiones de proyecto difícilmente coinciden con las de obra. Sugerimos hacer la siguiente experiencia: compare, en el caso de una viga de hormigón armado, el recubrimiento para las varillas de acero especificado en los planos, con el que se encuentra en obra o las dimensiones de esos mismos elementos. Las diferencias en muchos casos serán sorprendentes.

Incertidumbre en las hipótesis de Diseño Estructural Basta citar el siguiente ejemplo para el caso del hormigón armado. En este caso, el análisis estructural se hace normalmente sobre la base de hipótesis elásticas, mientras el diseño está basado en su real comportamiento, más bien plástico Cabe, en este punto, recordar el caso del diseño de columnas de hormigón armado de la década del 50, cuyo diseño por esfuerzos admisibles y basado en hipótesis

elásticas, llegaba a la conclusión de que nada importaba la resistencia del acero empleado, sino únicamente su módulo de elasticidad y su cuantía. Esto demuestra la relatividad de los conocimientos de cada época, así, lo que ayer fue científicamente cierto, hoy puede dejar de serlo. Con lo dicho, no se pretende fomentar el escepticismo o un irresponsable empirismo, sino incentivar la creatividad y la experimentación pues, a pesar de las incertidumbres anotadas, no podemos dejar de utilizar las herramientas científicas y las fórmulas matemáticas de las que disponemos en cada época, ya que son las únicas que nos permiten aproximarnos a la realidad, como afirma Félix Candela (1969): «Lo funesto no es el empleo de tales fórmulas sino la creencia en su absoluta infalibilidad y la anulación consiguiente de toda iniciativa». Las incertidumbres anotadas han hecho indispensable la utilización de los llamados factores de seguridad.

Concepto Clásico: El factor de seguridad para determinado material es la relación entre el esfuerzo máximo al que puede llegar una pieza y su esfuerzo de trabajo:

$$FS = f_u / f_{adm}$$

En esta ecuación:

FS = Factor de seguridad

f_u = Esfuerzo resistente máximo

$f_{adm.}$ = Esfuerzo de diseño

El factor de seguridad es función de las incertidumbres inherentes a los diferentes materiales, por ejemplo, para el hormigón es del orden de 3, para el acero es del orden de 2 y para las mamposterías es del orden de 6.

El proceso de diseño, en este caso, se basa en las cargas actantes reales y los esfuerzos admisibles. Los esfuerzos admisibles para cada material vienen especificados en los diferentes códigos o reglamentos de construcción.

El concepto anotado todavía es utilizado para el diseño de maderas, acero, mamposterías y con hormigón armado en el diseño de reservorios para retención de líquidos.

Concepto Moderno: Este ha sido utilizado primeramente para el diseño de elementos de hormigón armado, aunque la tendencia actual es utilizarlo también para el acero y otros

materiales. En este caso se define como factor de seguridad a la relación entre la capacidad de carga de determinado elemento y su carga de servicio, entendida como la carga que se presume existirá en obra:

$$FS = Pu/P.$$

En esta ecuación 'Pu' es la capacidad de carga y 'P' es la llamada carga de servicio. El procedimiento a seguirse será el de mayorar las cargas mediante determinados factores dependientes de la clase de sollicitación o combinación de sollicitaciones: carga muerta, carga viva, carga de sismo, etc., y utilizar las mismas resistencias de los materiales, afectadas por muy pequeños factores de reducción.

Como ejemplo transcribimos un factor de mayoración que establece la Norma Ecuatoriana de Construcción NEC II para cargas de gravedad:

UNIDAD II

MÉTODOS ENERGÉTICOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección se presenta un enfoque diferente al cálculo de deformaciones basado en consideraciones energéticas: en la energía que se requiere para deformar un miembro estructural y en la energía interna que desarrolla dentro de un miembro al deformarse.

Los métodos energéticos se basan en el Principio de la Conservación de la Energía. Para el caso de cuerpos sólidos constituidos por un material elástico, este principio establece que el trabajo externo desarrollado por fuerzas que actúan sobre un cuerpo se transforma en trabajo interno o energía de deformación elástica. Esta transformación puede expresarse matemáticamente con la ecuación:

$$U_e = U_i \quad (2.1)$$

Donde U_e representa el trabajo externo realizado por las fuerzas aplicadas y U_i , la energía interna de deformación elástica.

2.2. TRABAJO REAL.

Trabajo externo realizado por una carga axial.

Supóngase que a una barra recta de longitud l , como la mostrada en la figura 2.2.1-a, se le aplica una carga axial F que aumenta uniformemente su valor desde 0 hasta P_0 , la cual produce un alargamiento en la barra de magnitud Δ . Se puede trazar una gráfica como la mostrada en la figura 2.2.1-b que muestre el valor de la carga en cualquier momento contra el alargamiento de la barra, x . Recordando de los cursos de Física que el trabajo realizado por una fuerza que se desplaza a lo largo de un eje es igual a la magnitud de la fuerza por la distancia recorrida, el trabajo realizado para producir un alargamiento diferencial dx es igual Fdx , que es el área del rectángulo diferencial mostrado en la figura 3.2.2-b. El trabajo total realizado por las fuerzas hasta alcanzar el valor P_0 es $\int Fdx$ que viene siendo el área del triángulo oab. Por lo tanto, el trabajo externo realizado por la fuerza P_0 será igual a:

$$U_e = \frac{1}{2} P_o \Delta \quad (2.2)$$

Si después de haber alcanzado la deformación Δ , se aplica otra fuerza P_I que aumente su valor también uniformemente desde 0, y manteniendo aplicada la fuerza P_o , de tal manera que se produzca una deformación adicional ΔI , la fuerza P_o realizará un trabajo externo igual al área del rectángulo $adeb$, y la nueva fuerza aplicada P_I , un trabajo igual al área del triángulo acd ; véanse las figuras 3.2.2- c y -d. Esto explica porque la primera fuerza mantiene un valor constante mientras la barra sufre el alargamiento ΔI , en tanto que la segunda fuerza aumenta su valor desde 0 hasta P_I . El trabajo realizado en esta segunda etapa por P_o será entonces:

$$U'_e = P_o \Delta I \quad (2.3)$$

y el realizado por P_I será:

$$U''_e = \frac{1}{2} P_I \Delta I \quad (2.4)$$

Si en vez de una barra aislada, como la de la figura 2.2.1, se tiene una estructura con varias cargas aplicadas, cada una de ellas desarrollará un trabajo externo igual a la magnitud de la carga por la mitad de su desplazamiento, si las cargas se aplican conforme se deforma la estructura; o igual a la magnitud de la carga por todo el desplazamiento, si las cargas se aplican previamente al desplazamiento.

TRABAJO EXTERNO REALIZADO POR UN MOMENTO.

Supóngase ahora que una recta oa , figura 2.2.2, se hace girar por la acción de un momento M hasta la posición ob , de tal manera que M aumenta uniformemente desde 0 hasta M_o . Siguiendo el razonamiento de la sección anterior, el trabajo realizado por el momento será igual a:

$$U_e = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} M_o \theta \quad (2.5)$$

Si después se aplica otro momento M_I que produzca una rotación adicional I , manteniendo constante el valor de M_o , el trabajo realizado por M_o será:

$$U^e = M_o \theta_1 \quad (2.6)$$

y el realizado por M_1 será:

$$U''^e = \frac{1}{2} M_1 \theta_1 \quad (2.7)$$

Si en una estructura existen varios momentos aplicados, el trabajo externo total será la suma de los trabajos desarrollados por cada uno de ellos.

TRABAJO INTERNO EN UNA BARRA BAJO CARGA AXIAL.

En las dos secciones anteriores se han establecido ecuaciones para calcular el trabajo externo. En ésta y en la siguiente se establecerán ecuaciones para calcular el trabajo interno U_i . Si la barra de la figura 2.2.1-a tiene una sección transversal de área A , la fuerza axial P_o producirá esfuerzos axiales de magnitud $\sigma = P_o/A$. Si el material es elástico, como se ha venido suponiendo, estos esfuerzos causarán deformaciones unitarias $\varepsilon = \sigma/E$. Sustituyendo el valor de ε , se obtiene, multiplicada por la longitud inicial, l . Sustituyendo el valor de Δ ya calculado se obtiene:

$$\Delta = \frac{P_o l}{AE} \quad (2.8)$$

Sustituyendo este valor de Δ en la ecuación 2.4 y tomando en cuenta que según la ecuación 2.1 el trabajo interno es igual al externo, se llega a la siguiente expresión para calcular el trabajo interno o energía elástica de deformación en una barra sometida a carga axial.

$$U_i = \frac{P_o^2 l}{2AE} \quad (2.9)$$

Si una estructura está constituida por varias barras sujetas a carga axial, como una armadura, el trabajo interno total será la suma de los trabajos internos de cada barra, lo cual puede expresarse como:

$$U_i = \sum \frac{P_o^2 l}{2AE} \quad (2.10)$$

TRABAJO INTERNO EN UN ELEMENTO SUJETO A FLEXIÓN.

Partiendo de la ecuación $\theta = \frac{M}{EI} dx$ sustituyendo ese valor de en la ecuación 2.5, considerando que el momento aplicado es M (función de x), que la integración debe hacerse a todo lo largo de la viga y que el trabajo interno es igual al externo:

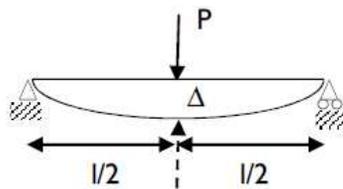
$$U_i = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (2.11)$$

Esta ecuación permite calcular la energía elástica de deformación de una viga o una columna sujetas a flexión. Si una estructura tiene varias vigas o varias columnas, el trabajo interno total será la suma de los trabajos internos de todos los miembros.

MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA.

En este método se plantea una ecuación que exprese el trabajo realizado por una carga, que es el trabajo externo, y otra que exprese el trabajo desarrollado internamente. La primera queda en función de la deflexión en el punto de aplicación de la carga, y la segunda, en función del momento flexionante o de las cargas axiales producidas por la fuerza aplicada. Al igualar ambos trabajos, queda una ecuación cuya incógnita es la deflexión buscada.

Ejemplo 2.2.1. Cálculo de la deflexión en el centro de una viga libremente apoyada por el método del principio del trabajo y la energía.



El = constante

Trabajo Externo

2.3. MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.

Supóngase un cuerpo de forma cualquiera, como el mostrado con línea llena en la figura 2.3.1-a, al que se le aplican gradualmente cargas concentradas P , en varios puntos A, B, C , de tal manera que lo deforma hasta adquirir la silueta mostrada con línea punteada en la misma figura. Estas fuerzas externas producen fuerzas internas en el cuerpo, que se denominarán fuerzas S , que se muestran en la figura actuando sobre un elemento de longitud l , el cual se deforma por la acción de estas fuerzas. Supóngase también que se desea calcular la deflexión en otro punto cualquiera D , del cuerpo mostrado.

Se calcularán primero el trabajo externo de las fuerzas P y el trabajo interno de las fuerzas S en el cuerpo de la figura 2.3.1-a. El primero, será:

$$U_{ea} = \frac{1}{2}P_A\Delta_A + \frac{1}{2}P_B\Delta_B + \frac{1}{2}P_C\Delta_C \quad (2.12)$$

y el trabajo interno será:

$$U_{ia} = \sum \frac{1}{2}S(dl) \quad (2.13)$$

Igualando los trabajos externo e interno:

$$\frac{1}{2}P_A\Delta_A + \frac{1}{2}P_B\Delta_B + \frac{1}{2}P_C\Delta_C = \frac{1}{2}\sum S(dl) \quad (2.14)$$

Supóngase ahora que al mismo cuerpo se le aplica, también gradualmente, una carga virtual en el punto en el que se desea calcular la deflexión, en este caso, en el punto D . Esta carga puede tener cualquier valor, pero por conveniencia se hace unitaria. Su dirección debe ser la misma que la dirección en que se desea conocer la deflexión del punto. Así, si se desea conocer la deflexión en D , señalada como Δ en la figura 2.3.1-a, la carga virtual unitaria se aplica en dirección vertical, como se muestra en la figura 2.3.1-b. La carga virtual produce fuerzas virtuales en el interior del cuerpo que se han denominado fuerzas μ en la figura mencionada. De la misma manera que se hizo para el caso de la figura 2.3.1-a, se pueden igualar el trabajo externo de la carga virtual unitaria y el trabajo interno de las fuerzas μ . Se obtiene:

$$\frac{1}{2}(1)(\Delta_{1v}) = \frac{1}{2}\sum \mu(dl) \quad (2.15)$$

Sumando los trabajos externos correspondientes a las figuras 2.3.1-a y -b, e igualando la suma a la de los trabajos internos, es decir, sumando los primeros miembros de las ecuaciones 2.14 y 2.15, e igualando la suma a la de los segundos miembros, se obtiene:

$$\frac{1}{2} P_A \Delta_A + P_B \Delta_B + P_C \Delta_C + \frac{1}{2} 1 \Delta_{1v} = \frac{1}{2} \sum S dl + \frac{1}{2} \sum \mu (dl_1) \quad (2.16)$$

Ahora, aplíquese primero la carga virtual unitaria, como en la figura 2.3.1-b, y manteniendo constante esta carga, aplíquese gradualmente las cargas P de la figura 2.3.1-a. Calculando los trabajos externos e internos para estas dos etapas e igualándolos se obtiene:

$$\frac{1}{2} 1 \Delta_{1v} + \frac{1}{2} P_A \Delta_A + P_B \Delta_B + P_C \Delta_C + 1 \Delta_{Dv} = \frac{1}{2} \sum \mu (dl_1) + \frac{1}{2} \sum S dl + \sum \mu (dl) \quad (2.17)$$

Obsérvese que el término $(1)(\Delta_{Dv})$ que aparece al final del primer miembro de esta ecuación expresa el trabajo realizado por la carga virtual unitaria mientras se aplican las cargas P . Restando el primer miembro y el segundo miembro de la ecuación 2.16 de los correspondientes miembros de la ecuación 2.17, se obtiene la siguiente ecuación fundamental del método del trabajo virtual:

$$(1)(\Delta_{Dv}) = \sum \mu (dl) \quad (2.18)$$

Esta ecuación permite calcular la deflexión buscada Δ_{Dv} como la suma de los productos de las fuerzas μ , producidas por la carga virtual unitaria, y las deformaciones axiales dl producidas por las fuerzas externas P .

La carga virtual puede sustituirse por un momento virtual, y entonces se obtendrán las rotaciones en cualquier punto del cuerpo en que se coloque el momento. La ecuación correspondiente queda en la forma:

$$(1)(\theta_{Dv}) = \sum \mu (dl) \quad (2.19)$$

donde θ_D representa la rotación en un punto cualquiera D .

DEFLEXIONES EN ARMADURAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL.

Supóngase que en la armadura de la figura 2.3.2-a, sujeta a cargas cualesquiera P_1 , P_2 y P_3 , se desea calcular la deflexión vertical en el nudo L_1 y la deflexión o desplazamiento horizontal del nudo U_1 . Para el primer caso, siguiendo el procedimiento general planteado en la sección anterior, se aplica una carga virtual unitaria vertical en el nudo L_1 , como se indica en la figura 2.3.2-b, y se utiliza la ecuación 2.18 para calcular la deflexión buscada. Con relación a esta

ecuación, ΔD_v será la deflexión en LI ya que en este punto se colocó la carga virtual; μ serán los esfuerzos unitarios en los miembros de la armadura, equivalentes a los de la figura 2.3.1-b; d_l serán las deformaciones axiales en cada miembro de la armadura, ya que dichos miembros son equivalente a los elementos de longitud l de la figura 3.2.1; y la sumatoria Σ se lleva a través de todos los miembros de la armadura. Los esfuerzos μ se puede calcular resolviendo la armadura de la figura 2.3.2-b por el método de los nudos o el de las secciones, sin que sea necesario asignarle una unidad específica a la carga virtual, como kilogramos o toneladas. Y las deformaciones d_l en cada miembro se pueden calcular con la ecuación 2.8, observando que el término Δ de dicha ecuación equivale al término d_l de la figura 2.3.1; que la carga P_o equivale a las fuerzas S producidas por las cargas en cada miembro de la armadura, las cuales pueden calcularse, por lo tanto, resolviendo la armadura de la figura 2.3.2-a; que el término A viene

siendo el área de la sección transversal de cada miembro de la armadura; y el termino E , el módulo de elasticidad correspondiente. Haciendo las equivalencias mencionadas, la ecuación general 2.18 se transforma en la siguiente ecuación para calcular deflexiones en armaduras producidas por cargas:

$$\Delta = \sum \frac{\mu S l}{AE} \quad (2.20)$$

Donde, resumiendo lo explicado anteriormente:

Δ , deflexión en el punto de aplicación de la carga virtual unitaria, en la dirección de la carga;

μ , fuerzas producidas por la carga virtual unitaria en los miembros de la armadura (fig. 2.3.2-);

S , fuerzas producidas por las cargas reales en los miembros de la armadura (fig. 2.3.2-a);

l , longitud de cada miembro;

A , área de la sección transversal de cada miembro; y

E , módulo de elasticidad de cada miembro, que suele ser constante.

La sumatoria se hace para todos los miembros de la armadura.

La deflexión horizontal en el nudo UI se determina de manera semejante. En este caso, las fuerzas μ serán las producidas en los miembros de la armadura por la carga virtual mostrada en la figura 2.3.2-c. Las fuerzas S siguen siendo las producidas por las cargas reales de la figura 2.3.2-a. En ambos casos, el sentido de la carga virtual puede ser cualquiera. Si la sumatoria resulta positiva, el sentido escogido fue correcto y la deflexión tendrá también ese sentido.

En caso contrario, la deflexión tendrá el sentido opuesto al asignado a la carga virtual. Si en un nudo dado se determinan la deflexión vertical y la horizontal, la resultante de ambas será la deflexión total en magnitud y dirección.

Ejemplo 2.3.1. Calcular la deflexión vertical y la deflexión horizontal en el nudo L4 de la armadura mostrada.

DEFLEXIONES Y ROTACIONES EN VIGAS POR EL MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL.

Supóngase que se tiene una viga libremente apoyada, figura 2.3.3-a, con un sistema de cargas cualquiera P_1 , P_2 , P_3 y se desea calcular la deflexión vertical en el punto C. Se debe colocar una carga unitaria en el punto del cual se desea conocer la deflexión, como se muestra en la figura 2.3.3-b, y aplicar la ecuación general 2.18. Respecto a esta ecuación, μ serán los esfuerzos producidos en las fibras de la viga por la carga unitaria, figura 2.3.3-b, y dl serán las deformaciones axiales producidas en las fibras por el sistema de cargas externas, figura 2.3.3-a. A continuación se verá cómo calcular estos valores.

Respecto a las deformaciones dl , se pueden calcular como el producto de la deformación unitaria por la longitud inicial del elemento dx , figura 2.3.3-a, de tal manera que

$$dl = \varepsilon(dx) \quad (2.21)$$

Las deformaciones son iguales al esfuerzo entre el módulo de elasticidad, por lo que $\varepsilon = f / E$. el esfuerzo en un elemento diferencial dA como el mostrado en la figura 3.2.3-a se puede calcular con la ecuación de flexión:

$$f = \frac{M}{I}y \quad (2.22)$$

Donde M son los momentos flexionantes producidos por las cargas reales P .

Sustituyendo este valor del esfuerzo en el valor de ε , y el de ε en la ecuación 2.21, se obtiene:

$$dl = \frac{My}{EI} dx \quad (2.23)$$

Las fuerzas internas μ de la figura 2.3.3-b son iguales a los esfuerzos producidos por la carga virtual unitaria multiplicados por el área diferencial dA . Los esfuerzos se pueden calcular con la ecuación de flexión 2.22, por lo que:

$$\mu = \frac{my}{I} dA \quad (2.24)$$

Donde m son los momentos producidos por la carga virtual unitaria.

Sustituyendo los valores de dl y de μ proporcionados por las ecuaciones 2.23 y 2.24, respectivamente, en la ecuación general 2.18:

$$1\Delta = \sum \frac{my}{I} dA \frac{My}{EI} dx \quad (2.25)$$

Al deducir la ecuación 2.18 se mencionó que la sumatoria indicaba que se debían considerar todos los elementos del cuerpo de la figura 2.3.1. En el caso de la viga de la figura 2.3.3, la sumatoria se debe sustituir por una integral que abarque toda longitud de la viga y otra que abarque toda el área de la sección transversal. Haciendo esta sustitución se obtiene:

$$1\Delta = \int_0^l \frac{Mm(dx)}{EI^2} \int_A y^2 dA \quad (2.26)$$

Finalmente, eliminando las unidades de la carga virtual en ambos miembros de la ecuación 2.26 y observado que la segunda integral es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, se obtiene la ecuación utilizada para fines prácticos:

$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm(dx)}{EI} \quad (2.27)$$

Recuérdese que en esta ecuación el término M representa la ecuación del momento flexionante producido por las cargas reales P , mientras que el término m , la ecuación del momento flexionante producido por la carga virtual unitaria colocada en el punto en que se desea conocer la deflexión Δ , en la dirección de la deflexión buscada.

El mismo razonamiento seguido para obtener la ecuación 2.27 puede aplicarse para calcular la rotación o giro en un punto de una viga. Por ejemplo, si se desea conocer la rotación en el extremo A de la viga de la figura 2.3.4-a, se aplica un momento virtual unitario en ese extremo, como se muestra en la figura 2.3.4-b, y los esfuerzos μ producidos por este momento se sustituyen en la ecuación 2.19. La ecuación equivalente a la 2.27 queda de la forma:

$$\theta = \int_0^l \frac{Mm(dx)}{EI} \quad (2.28)$$

En este caso m, representa la ecuación del diagrama de momento flexionante producido por el momento virtual unitario aplicado a la viga en el punto donde se desea conocer la rotación. Ejemplo 2.3.2. Cálculo de la deflexión vertical y la rotación en el extremo de un voladizo por el método del trabajo virtual.

2.4. MÉTODO DE CASTIGLIANO

El primer teorema, establece lo siguiente:

“La primera derivada parcial de la energía total de deformación de una estructura con respecto a un desplazamiento de los puntos en los que actúan las acciones exteriores es igual a la componente de la acción que sobre dicho punto actúan en dirección de este desplazamiento”

$$P = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta}$$

El segundo teorema, que es el más usado, establece lo siguiente:

“La primera derivada parcial de la energía total de deformación de una estructura con respecto a una de las acciones aplicadas es igual al desplazamiento a lo largo de esa sección”

El desplazamiento a que se hace referencia puede ser lineal o angular, es decir, puede ser una deflexión o una rotación. Si se denomina Δ a este desplazamiento, P a la acción aplicada, que puede ser una fuerza o un momento, y U_i a la energía de deformación o trabajo interno, el segundo teorema de Castigliano puede escribirse:

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P} \quad (2.29)$$

Haciendo sustituciones, llegamos a la demostración de que esta última ecuación la puede expresar como:

$$\Delta_1 = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_1} dx \quad (2.30)$$

De manera semejante, se obtiene que la deflexión en el punto de aplicación de esta carga es:

$$\Delta_2 = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_2} dx \quad (2.31)$$

Se puede ver que estas ecuaciones son muy semejantes a la ecuación 2.27 usada en el método del trabajo virtual, pero en vez de la función de momento m producida por el momento virtual unitarios, se usa la derivada parcial del momento producido por las cargas externas.

Puede suceder que en el punto en el que se desea calcular la deflexión no haya ninguna carga aplicada. En este caso, se introduce una carga ficticia, P' , en ese punto, se deriva respecto a esta carga, y al final se le asigna un valor nulo. También pueden calcularse rotaciones, en vez de deflexiones. Para esto, se deriva respecto a un momento aplicado en el punto en que se desea calcular la rotación; este momento puede ser real o ficticio, al final se le asigna un valor de cero.

El teorema de Castigliano puede usarse también para calcular las deflexiones en armaduras. La obtención de las ecuaciones correspondientes es similar a la presentada para el caso de vigas. Dichas ecuaciones quedan en la forma:

$$\Delta_1 = \sum S \frac{\partial S}{\partial P_1} \frac{L}{AE} \quad (2.32)$$

y

$$\Delta_2 = \sum S \frac{\partial S}{\partial P_2} \frac{L}{AE} \quad (2.33)$$

En las cuales Δ_1 y Δ_2 son las deflexiones en los puntos de aplicación de las cargas P_1 y P_2 , S son las fuerzas en las barras de la armadura producidas por las cargas aplicadas, L es la longitud de cada barra, A es su área transversal y E su módulo de elasticidad.

Ejemplo 2.4.1. Cálculo de la deflexión y la rotación en el extremo de una viga con dos apoyos y un voladizo aplicando el teorema de Castigliano.

La primera integral sobre el miembro del lado derecho es el momento de inercia I_{xc} con respecto al eje X_c ; la segunda integral es cero, ya que el eje X_c pasa a través del centroide; y la tercera integral es el área A de la figura. Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a:

$$I_x = I_{xc} + Ad_1^2$$

Procediendo de igual manera para el eje y , obtenemos

$$I_y = I_{yc} + Ad_2^2$$

El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje alojado en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

Momentos polares de inercia.

Los momentos de inercia considerados en las secciones anteriores se calculan con respecto a ejes alojados en el plano del área misma, tales como los ejes x y y en la Fig. 4.1. Consideremos ahora un eje perpendicular al plano del área y que corta al plano en el origen O . El momento de inercia con respecto a este eje se llama momento polar de inercia I_p ; y se define como la integral:

$$I_p = \int \rho^2 dA$$

en la cual ρ es la distancia desde el punto O hasta el elemento de área dA . Puesto que $\rho^2 = x^2 + y^2$, donde x y y son las coordenadas rectangulares del elemento dA , obtenemos la siguiente expresión para I_p :

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA$$

Por lo tanto, obtenemos

$$I_p = I_x + I_y$$

El cálculo de momentos polares de inercia con respecto a diversos puntos se facilita enormemente mediante el teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia. Podemos deducir este teorema refiriéndose nuevamente a la Fig. 4.4. Denotemos los momentos polares de inercia respecto al origen O y al centroide C por I_{po} e I_{pc} , respectivamente; entonces podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$I_{p_o} = I_x + I_y \qquad I_{p_c} = I_{x_c} + I_{y_c}$$

En seguida, introduzcamos los teoremas de los ejes paralelos:

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \qquad I_y = I_{y_c} + Ad_2^2$$

Sumando las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones y observando también que $d^2 = d_1^2 + d_2^2$, obtenemos

$$I_{p_o} = I_{p_c} + Ad^2$$

El momento polar de inercia con respecto a cualquier punto O en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al centroide C más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los puntos O y C.

4.3. PRODUCTOS DE INERCIA Y ROTACIÓN DE EJES.

El producto de inercia de un área plana es una propiedad que se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares alojados en el plano del área. Luego, refirámonos nuevamente al área A mostrada en la Fig. 4.1, y definamos el producto de inercia con respecto a los ejes x y y como sigue:

$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes es cero si alguno de los ejes es un eje de simetría. Por ejemplo la Fig. 4.5.

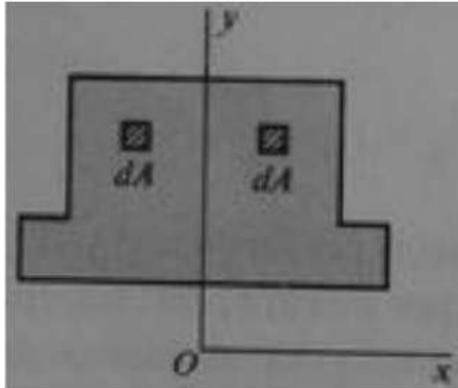


Fig. 4.5 El producto de inercia es igual a cero cuando un eje es un eje de simetría.

Los productos de inercia de un área con respecto a conjuntos de ejes paralelos se relacionan mediante un teorema de ejes paralelos análogos a los teoremas correspondientes para momentos de inercia y para momentos polares de inercia. Para obtener este teorema consideremos nuevamente el área mostrada en la Fig. 4.4 y denotemos por I_{xcyc} con respecto a cualquier conjunto de ejes, paralelo a los ejes x_c y_c , es:

$$I_{xy} = \int (x + d_2)(y + d_1) \, dA$$

$$I_{xy} = \int xy \, dA + d_1 \int x \, dA + d_2 \int y \, dA + d_1 d_2 \int dA$$

En donde d_1 y d_2 son las coordenadas del centroide C con respecto a los ejes x y y . La primera integral en la última expresión es el producto de inercia I_{xcyc} , con respecto a los ejes centroidales; la segunda y tercera integrales se vuelven cero, ya que son los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; y la última integral es el área A . De modo que la ecuación anterior se reduce a:

$$I_{xy} = I_{xcyc} + A d_1 d_2$$

El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes alojados en su plano, es igual al producto de inercia con respecto a los ejes centroidales paralelos más el producto del área y las coordenadas del centroide con respecto al par de ejes.

ROTACIÓN DE EJES.

Los momentos de inercia de un área plana dependen de la posición de los ejes de referencia. Además, para un origen dado, los momentos y productos de inercia varían según se giran los ejes respecto al origen.

Consideremos el área plana mostrada en la Fig. 4.6, y supongamos que los ejes x y y son un par de ejes de referencia localizados arbitrariamente. Los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes x y y son:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA$$

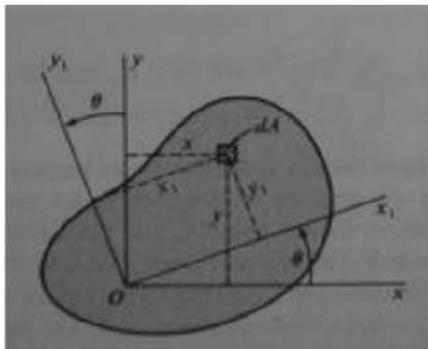


Fig. 4.6 Rotación de ejes

Donde x y y son las coordenadas de un elemento de área dA . Los ejes x_1 y y_1 tienen el mismo origen pero están girados un ángulo θ en un sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a los ejes x y y . Los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes x_1 y y_1 se denotan por I_{x_1} , I_{y_1} e $I_{x_1 y_1}$, respectivamente. Para obtener esas cantidades, necesitamos las coordenadas x_1 y y_1 del elemento dA ; estas coordenadas pueden expresarse en términos de las coordenadas x y y y el ángulo θ , como sigue:

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y_1 = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Entonces el momento de inercia con respecto al eje x_1 es

$$I_{x_1} = \int y_1^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$I_{x_1} = \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA$$

O bien,

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Ahora introducimos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

Entonces la ecuación resulta

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

En forma similar y usando nuevamente la identidades trigonométricas, podemos obtener el producto de inercia con respecto a los ejes x_1 y_1 :

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Luego, las dos ecuaciones anteriores proporcionan el momento de inercia I_{x_1} y el producto de inercia $I_{x_1 y_1}$ con respecto a los ejes girados en términos de los momentos y el producto de inercia para los ejes originales. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia.

El momento de inercia I_{y_1} se obtiene mediante el mismo procedimiento utilizado para I_{x_1} e $I_{x_1y_1}$; luego,

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

Tomando la suma de I_{x_1} e I_{y_1} , encontramos

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$$

Esta ecuación muestra que la suma de los momentos de inercia con respecto a un par de ejes permanece constante según se giran los ejes respecto al origen. Esta suma es el momento polar de inercia del área con respecto al origen.

4.4. ANÁLISIS VECTORIAL

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su punto de aplicación, magnitud o módulo y dirección. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación.

La magnitud o módulo de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilo newton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. La dirección de una fuerza se define por la línea de acción y el sentido de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo.

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha.

4.5. ADICIÓN

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y no una de 7 lb. Las fuerzas no son las únicas

cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y momentos son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por vectores, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como volumen, masa o energía se representan por números ordinarios o escalares.

Los vectores se definen como expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas (**P**). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo o subrayando la letra (**P**). El último método es preferible puesto que el subrayado también puede usarse en una máquina de escribir o computadora. La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán le tras cursi vas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector **P** se representa como **P**.

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector fijo o ligado, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares, se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como libres. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido, que están representadas por vectores que pueden moverse o resbalar a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores deslizante. Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son iguales, tengan o no el mismo punto de aplicación; los vectores iguales pueden representarse por la misma letra. El vector negativo de un vector **P** se define como aquel que tiene la misma magnitud que **P** y una dirección opuesta a la de **P**; el negativo del vector **P** se representa por **-P**. A los vectores **P** y **-P** se les llama vectores iguales y opuestos. Se tiene:

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

Por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores P y Q se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a P y a Q .

La diagonal que pasa por A representa la suma vectorial de P y Q , y se representa por $P + Q$. El hecho de que el signo $+$ se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado.

De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector $P + Q$ no es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores P y Q .

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores P y Q no depende del orden en que P y Q se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es conmutativa, y se escribe:

$$\mathbf{P + Q = Q + P}$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado regla del triángulo se obtiene como sigue: considérese la suma de los vectores P y Q ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a Q es igual a Q en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo. De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse colocando P y Q de punta a cola y uniendo la cola de P con la punta de Q . Se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector $P - Q$ que representa la diferencia de los vectores P y Q se obtiene agregándole a P el vector negativo $-Q$. Se escribe:

$$\mathbf{P - Q = P + (-Q)}$$

Aquí se debe observar otra vez que aun que se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la suma de tres o más vectores. La suma de tres vectores P, Q y S se obtendrá por definición, sumando primero los vectores P y Q y agregando el vector S al vector P + Q. De manera que:

$$\mathbf{P + Q + S = (P + Q) + S}$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo. Si los vectores dados son coplanares, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. La suma de los tres vectores P, Q y S se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma P + Q de los vectores P y Q; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores P + Q y S.

Sin embargo, la determinación del vector P + Q pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último.

Ésta se conoce como la regla del polígono para la adición de vectores. Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, los vectores Q y S se hubieran reemplazado por la suma de Q + S. Entonces se puede escribir:

$$\mathbf{P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S)}$$

Esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es asociativa. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe:

$$\mathbf{P + Q + S = (P + Q) + S = S + (P + Q) = S + (Q + P) = S + Q + P}$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa.

4.6. PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de dos vectores P y Q se define como el producto de las magnitudes de P y Q y el coseno del ángulo θ formado por P y Q (figura 4.6.1). El producto escalar de P y Q se denota mediante $P \cdot Q$. Entonces, se escribe:

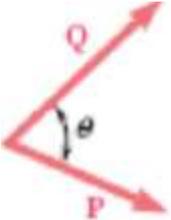
$$P \cdot Q = PQ \cos \theta \quad (4.1)$$


Figura 4.6.1

Advierta que la expresión recién definida no es un vector sino un escalar, lo cual explica el nombre de producto escalar; en virtud de la notación utilizada, $P \cdot Q$ también se conoce como el producto punto de los vectores P y Q .

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de dos vectores es conmutativo, esto es, que:

$$P \cdot Q = Q \cdot P \quad (4.2)$$

Para demostrar que el producto escalar también es distributivo, se debe probar la relación.

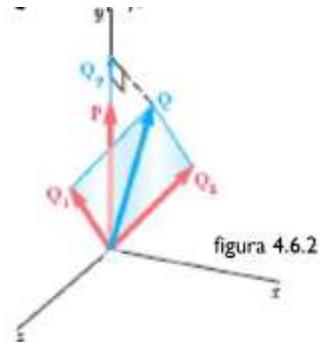
$$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2 \quad (4.3)$$

Sin perder la generalidad, se puede suponer que P está dirigido a lo largo del eje y y (figura 4.6.2). Al denotar por Q la suma de Q_1 y Q_2 y por θ_y el ángulo que forma Q con el eje y , el término del lado izquierdo de (4.3) se expresa de la siguiente forma:

$$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (4.4)$$

donde Q_y es la componente y de Q . De manera similar, el término del lado derecho de (4.3) se puede expresar como

$$P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (4.5)$$



Debido a que Q es la suma de Q_1 y Q_2 , su componente y debe ser igual a la suma de las componentes en y de Q_1 y Q_2 . Por tanto, las expresiones obtenidas en (4.4) y (4.5) son iguales, con lo que queda demostrada la relación (4.3).

En lo concerniente a la tercera propiedad —la propiedad asociativa— se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho $(P \cdot Q) \cdot S$ no tiene ningún significado puesto que $P \cdot Q$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores P y Q puede expresarse en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Descomponiendo a P y a Q en sus componentes se escribe primero.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $P \cdot Q$ se expresa como la suma de productos escalares, como $P_x \cdot Q_x$ y $P_x \cdot Q_y$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array} \quad (4.6)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $P \cdot Q$ se reduce a:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (4.7)$$

En el caso particular, cuando P y Q son iguales

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (4.8)$$

APLICACIONES

Ángulo formado por dos vectores dados. Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en (4.1) y (4.7) y se escribe:

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Despejando $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (4.9)$$

Proyección de un vector sobre un eje dado. Considérese un vector \mathbf{P} que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 4.6.3). La *proyección de \mathbf{P} sobre el eje OL* se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (4.10)$$

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto al valor de la longitud del segmento OA ; ésta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL , es toes, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si \mathbf{P} y OL forman un ángulo recto, la proyección de \mathbf{P} sobre OL es cero.

Considere ahora un vector \mathbf{Q} dirigido a lo largo de OL con el mismo sentido que OL (figura 4.6.4). El producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} puede expresarse como:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL} Q \quad (4.11)$$

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q}$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario (figura 4.6.5), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \quad (4.12)$$

Al descomponer P en sus componentes rectangulares y recordar, que las componentes de a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL , la proyección de P sobre OL se expresa como:

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (4.13)$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

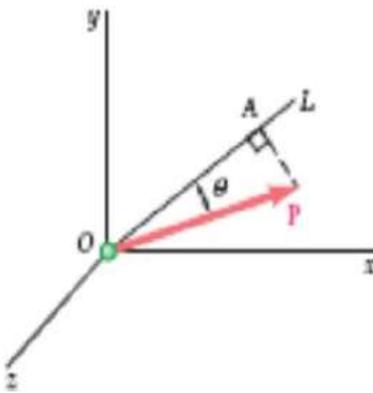


Figura 4.6.3

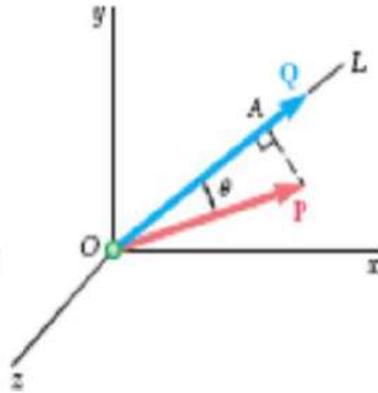


Figura 4.6.4

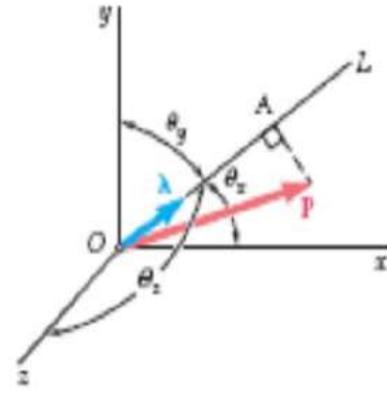


Figura 4.6.5

Ejemplos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{u} = (3, 0) \quad \vec{v} = (5, 5) \quad \widehat{uv} = 45^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

$$\vec{u} = (3, 0) \quad \vec{v} = (5, 5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$$

Expresión analítica del módulo de un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\vec{u} = (3, 0) \quad \vec{v} = (5, 5)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{3 \cdot 3 + 0 \cdot 0} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{5 \cdot 5 + 5 \cdot 5} = 5\sqrt{2}$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

$$\cos \alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\vec{u} = (3, 0) \quad \vec{v} = (5, 5)$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 5 + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Condición analítica de la ortogonalidad de dos vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

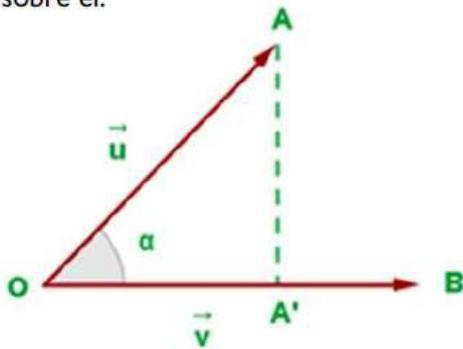
$$\vec{u} = (3, 0) \quad \vec{v} = (5, 5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 \neq 0$$

No son perpendiculares

Interpretación geométrica del producto escalar.

El producto de dos vectores no nulo, es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$\cos \alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \quad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA' \quad OA' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Hallar la proyección del vector $u = (2, 1)$ sobre el vector $v = (-3, 4)$

$$P(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{2}{5}$$

Propiedades del producto escalar

1.- Conmutativa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2.- Asociativa

$$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

3.- Distributiva

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

4.- El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$$

4.7. PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores P y Q se define como el vector V que satisface las siguientes condiciones.

1. La línea de acción de V es perpendicular al plano que contiene a P y Q (figura 4.7.1a).
2. La magnitud de V es el producto de las magnitudes de P y Q por el seno del ángulo θ formado por P y Q (cuya medida siempre deberá ser menor o igual a 180°); por tanto, se tiene

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \quad (4.14)$$

2. La dirección de V se obtiene a partir de la regla de la mano derecha. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido que la rotación a través del ángulo θ que haría al vector P colineal con el vector Q; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector V (figura 4.7.1b). Obsérvese que si P y Q no tienen un punto de aplicación común, estos primeros se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores P, Q y V —tomados en ese orden— forman una tríada a mano derecha.

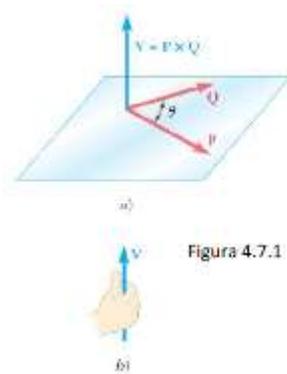


Figura 4.7.1

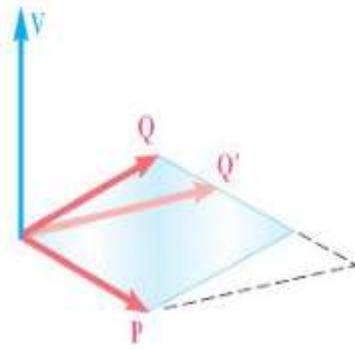
Como se mencionó anteriormente, el vector V que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el producto vectorial de P y Q y se representa por la expresión matemática:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (4.15)$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores P y Q también se conoce como el producto cruz de P y Q .

A partir de la ecuación (4.14) se concluye que cuando dos vectores P y Q tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180° , a la ecuación (4.14) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de P y Q es igual al área del paralelogramo que tiene como la dos a P y Q (figura 4.7.2). Por tanto, el

producto vectorial $P \times Q$ permanece inalterado si Q se reemplaza por un vector Q' que sea coplanar a P y Q y tal que la línea que une a las partes terminales de Q y Q' sea paralelo a P . Así, se escribe:



$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \quad (4.16)$$

Figura 4.7.2

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial V de P y Q , esto es, la condición que establece que P , Q y V deben formar una tríada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales no son conmutativos, es decir, $Q \times P$ no es igual a $P \times Q$. De hecho, se puede verificar fácilmente que $Q \times P$ está representado por el vector $-V$, que es igual y opuesto a V , entonces se escribe:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (4.17)$$

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Ahora se puede preguntar si la propiedad distributiva se cumple, esto es, si la relación:

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \quad (4.18)$$

Es válida. La respuesta es sí. Sin perder la generalidad se puede suponer que P está dirigida a lo largo del eje y (figura 4.7.3a). Representando con Q la suma de Q_1 y Q_2 , se trazan perpendiculares a partir de los extremos terminales de Q , Q_1 y Q_2 hacia el plano xz , quedando definidos de esta Figura 4.7.2

Forma los vectores Q' , Q'_1 , Q'_2 . Se hará referencia a estos vectores, respectivamente, como las proyecciones de la ecuación (4.16), se observa que el término del lado izquierdo de la ecuación (4.18) puede ser reemplazado por $P \times Q'$ y que, en forma similar, los productos vectoriales $P \times Q_1$ y $P \times Q_2$ del lado derecho pueden ser reemplazados, respectivamente, por $P \times Q'_1$ y $P \times Q'_2$. De esta forma, la relación que debe ser demostrada puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \quad (4.18')$$

Ahora se observa que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ se puede obtener a partir de \mathbf{Q}' multiplicando a este vector por el escalar \mathbf{P} y rotándolo 90° en el plano xz en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 4.7.3b); los otros dos productos vectoriales en (4.18') se pueden obtener en forma similar a partir de \mathbf{Q}'_1 y \mathbf{Q}'_2 , respectivamente. Ahora, en virtud de que la proyección de un paralelogramo sobre cualquier plano arbitrario es otro paralelogramo, la proyección \mathbf{Q}' de la suma \mathbf{Q} de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 debe ser la suma de las proyecciones \mathbf{Q}'_1 y \mathbf{Q}'_2 de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 sobre el mismo plano (figura 4.7.3a). Esta relación entre los tres vectores \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}'_1 y \mathbf{Q}'_2 seguirá siendo válida después de que los tres vectores hayan sido multiplicados por el escalar \mathbf{P} y hayan sido rotados a través de un ángulo de 90° (figura 4.7.3b). Por tanto, se ha demostrado la relación (4.18') y se puede tener la certeza de que la propiedad distributiva es válida para los productos vectoriales.

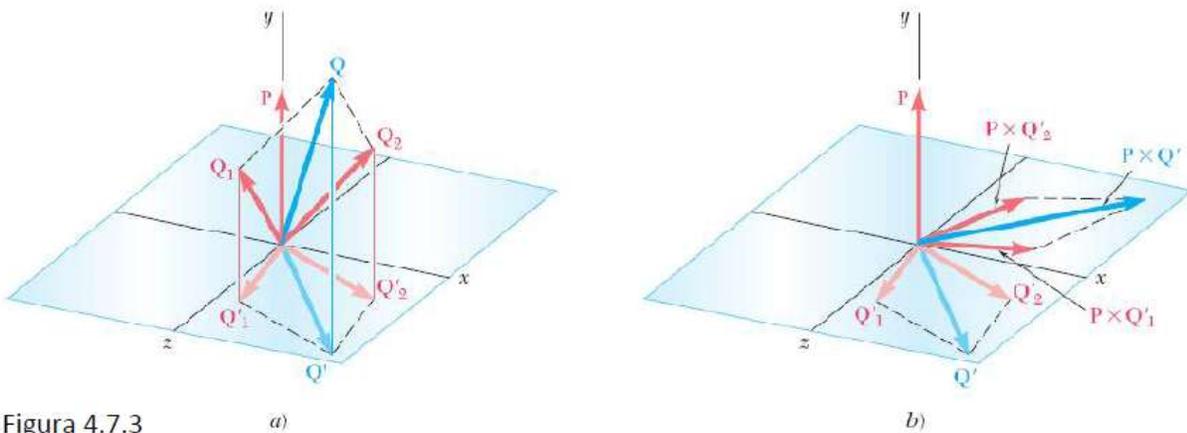
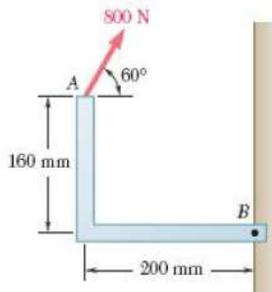


Figura 4.7.3

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que:

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \quad (4.19)$$

EJEMPLO



PROBLEMA RESUELTO 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B .

SOLUCIÓN

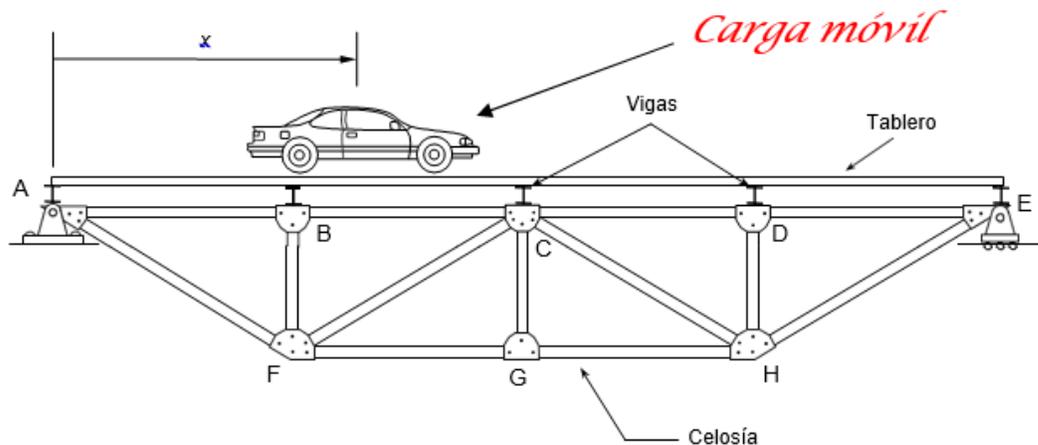
El momento M_B de la fuerza F con respecto a B se obtiene a través del producto vectorial

UNIDAD III

LÍNEAS DE INFLUENCIA

3.1 INTRODUCCION

En algunos casos las cargas no son fijas sino móviles a lo largo de la estructura, como es el caso de un puente recorrido por un vehículo, o una viga carril sobre la que se desplaza un puente grúa, o la pluma de una grúa de construcción a lo largo de la cual se desplaza el carro que sustenta la carga: en estos casos varía el punto de aplicación de la carga (carga móvil), y por tanto, los esfuerzos y deformaciones que se originan en la estructura, ya que estos valores dependen de la posición que ocupa la carga.



El valor máximo de la respuesta de la estructura, sea valorada en esfuerzos (y por tanto tensiones), y/o deformaciones, se producirá para una posición particular y determinada de la carga, que por lo general será desconocida y que se deberá determinar.

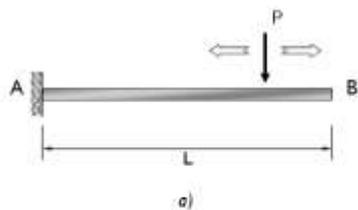
Para cada una de las barras de la celosía de la figura, la posición del coche para la cual el esfuerzo en esa barra alcanza el valor máximo puede ser diferente. Se debe calcular la posición más desfavorable de la carga para cada esfuerzo y/o deformación que se esté analizando.

Supuestos básicos empleados en el estudio de las líneas de influencia:

Bajo la acción de las cargas, la estructura mantiene un comportamiento elástico lineal y experimenta pequeñas deformaciones, siendo aplicable, por consiguiente, el principio de superposición.

Se considerará una única fuerza móvil de módulo unidad. Es un supuesto que se introduce para facilitar el estudio inicial, pero que se puede generalizar sin dificultad a otro tipo de cargas.

Se prescinde del posible efecto dinámico en cargas móviles (principalmente de posibles vibraciones).

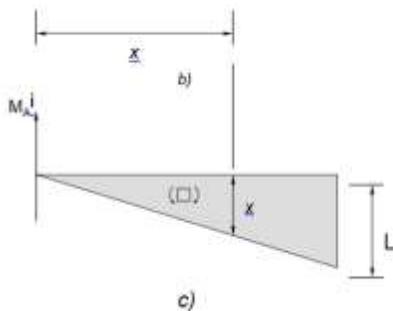


En la figura se ilustra esta definición aplicándolo a la determinación de la línea de influencia del momento flector del empotramiento A de la viga de la figura. La figura b) muestra el parámetro x utilizado para definir la posición de la carga unitaria móvil, y en la figura c) se representa la línea de influencia de dicha reacción, definida como M_A^i , cuya expresión analítica se obtiene

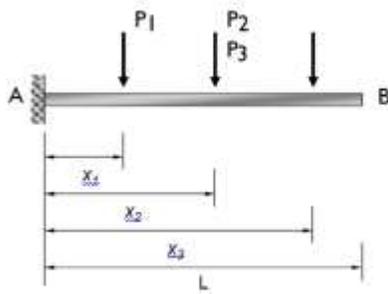
Aplicando las ecuaciones de equilibrio:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A^i = 1 \cdot x \quad (0 \leq x \leq l)$$



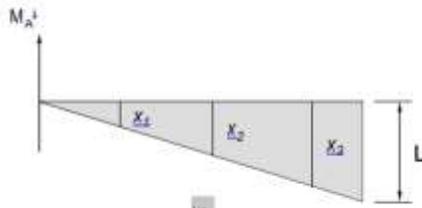
La línea de influencia buscada tiene un valor único, y no debe confundirse esa representación gráfica del momento de empotramiento en A con el diagrama de momentos flectores de la viga: son cosas diferentes.



En virtud del Principio de Superposición, si $M^i = \frac{x}{L}$ es el valor del momento en A debido a la acción de una carga unidad en la posición x, el valor de este momento debido a una carga P situada en la misma posición será: $M_A = P \frac{x}{L}$, y su valor debido a la acción simultánea de tres cargas P_1 , P_2 y P_3 aplicadas a distancias x_1 , x_2 y x_3 , respectivamente de A (ver figura), será:

$$M_A = P_1 \frac{x_1}{L} + P_2 \frac{x_2}{L} + P_3 \frac{x_3}{L}$$

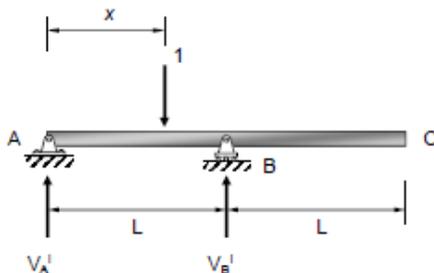
a)



Para el caso de una carga P actuando sobre la viga de la figura, el valor máximo del momento en A es $P L$ y corresponde a la posición de la carga P en el extremo libre, como fácilmente puede deducirse a partir de la línea de influencia.

b)

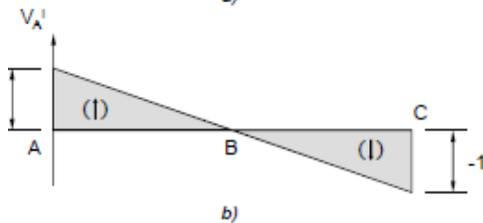
Cargas concentradas: En las figuras se representan las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos A y B de la viga biapoyada representada. Sus expresiones se obtienen mediante la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio:



a)

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A^i \cdot \ell = 1 \cdot (\ell - x) \Rightarrow V_A^i = \frac{\ell - x}{\ell}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B^i = \frac{x}{\ell}$$



b)

$$\text{Sección A } (x = 0) \quad V_A^i = 1 \quad V_B^i = 0$$

$$\text{Sección B } (x = \ell) \quad V_A^i = 0 \quad V_B^i = 1$$

$$\text{Sección C } (x = 2\ell) \quad V_A^i = -1 \quad V_B^i = 2$$

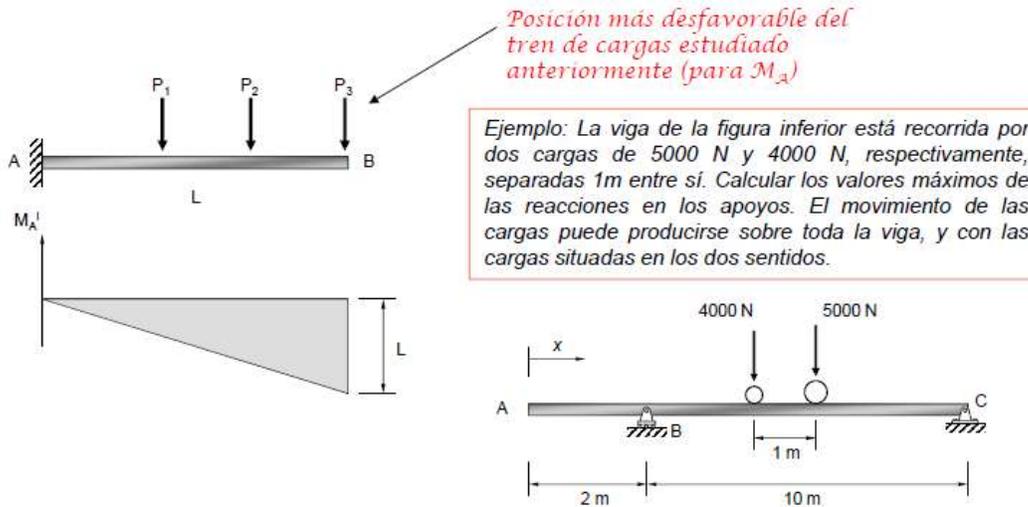


c)

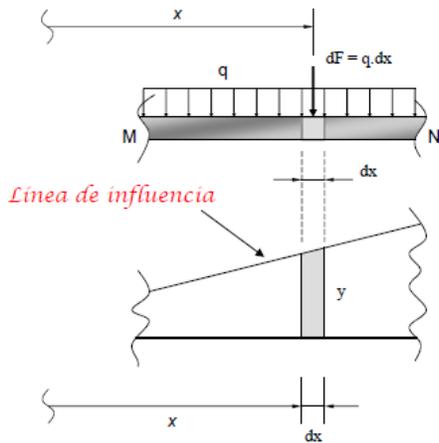
El valor de una respuesta (reacción, esfuerzo deformación) debido a una carga aislada, es igual al producto de la magnitud de la carga por la ordenada de la línea de influencia de esa respuesta, medida en el punto de aplicación de la carga.

TRENES DE CARGAS PUNUALES:

Para calcular el valor de la respuesta (reacción, esfuerzo de sección,...) debida a un tren de carga puntuales P_i , se calcula en primer lugar la línea de influencia de esa respuesta, a la que se denomina línea de influencia básica. A continuación se suma el valor que tiene la línea de influencia básica en la posición de cada carga, multiplicada por el valor de la carga correspondiente con su signo.



Cargas distribuidas: El caso de una carga distribuida móvil es similar al de un tren de cargas puntuales, pero considerando que las cargas están infinitamente próximas. Sobre cada segmento infinitamente pequeño de la viga actúa una fuerza concentrada $dF = q \cdot dx$. Si dF se sitúa en x , donde la ordenada de la línea de influencia de la respuesta que se esté estudiando (reacción, esfuerzo,...) es K , entonces el valor de esa respuesta es:



$$(dF) \cdot y = (q \cdot dx) \cdot y$$

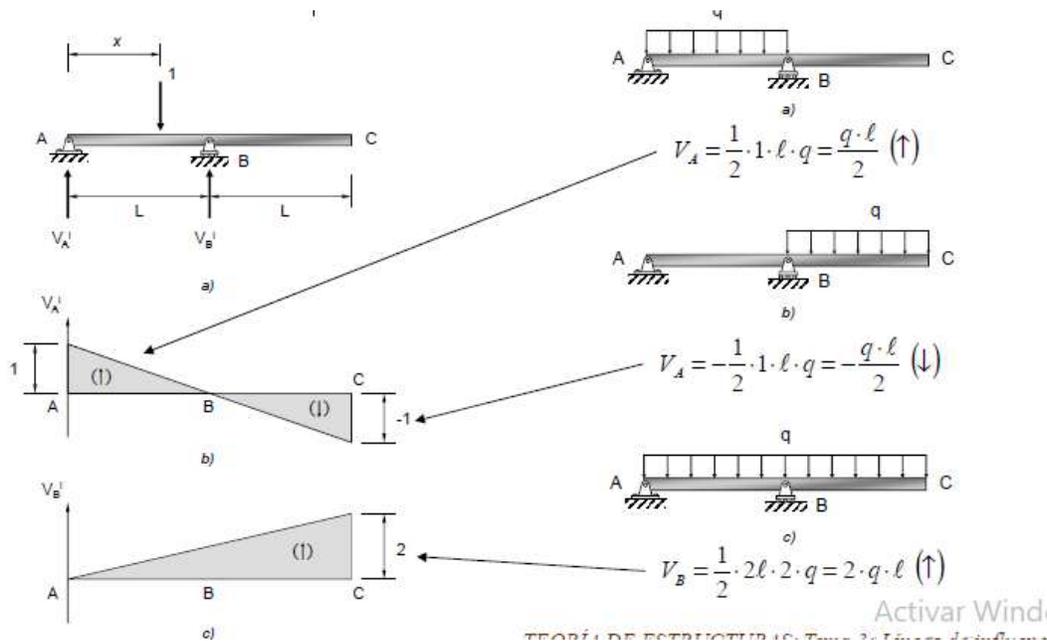
El efecto simultáneo de todas las fuerzas concentradas se obtiene integrando a lo largo de la longitud de la viga:

$$\int_{\ell} q \cdot y \cdot dx = q \cdot \int_{\ell} y \cdot dx$$

Esta segunda integral representa precisamente el área bajo la línea de influencia. Por consiguiente, puede afirmarse que el valor de la respuesta producida por una carga uniformemente distribuida móvil es igual al producto de la intensidad de la carga por el área total del diagrama de la línea de influencia básica de la respuesta considerada, correspondiente a la zona de estructura cargada.

Ejemplo: Para la viga biapoyada de la figura, determinar la longitud que debe ocupar una carga uniformemente distribuida q , para que las reacciones en los apoyos alcancen los valores máximos posibles, y calcular asimismo estos valores máximos.

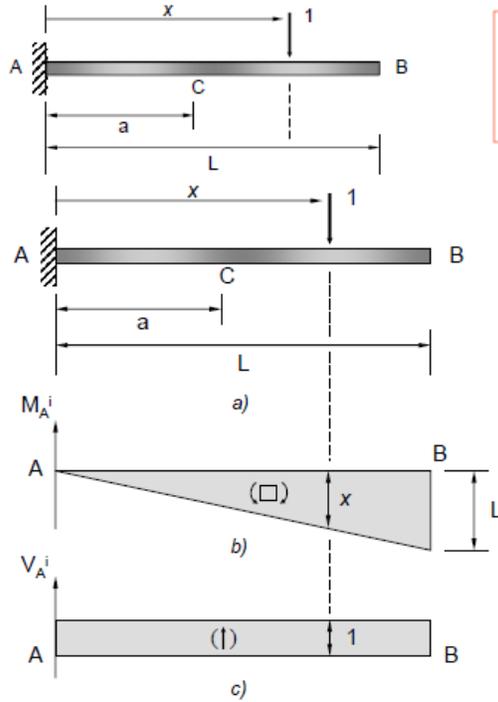
Existen dos grandes



Procedimientos para la determinación de líneas de influencia en estructuras isostáticas: el primero de ellos basado en la simple aplicación de las ecuaciones de la estática, y el segundo fundamentado en el Principio de los Trabajos Virtuales.

Aplicación de ecuaciones de equilibrio estático: En vigas isostáticas es posible calcular cualquier esfuerzo interno y reacciones en los apoyos utilizando exclusivamente ecuaciones de la estática, y de igual forma también éstas son suficientes para calcular las líneas de influencia.

Habitualmente el cálculo de las líneas de influencia de los esfuerzos internos se facilita cuando se conocen las líneas de influencia de las reacciones, por lo que la obtención de éstas suele constituir el primer paso en el proceso de cálculo.



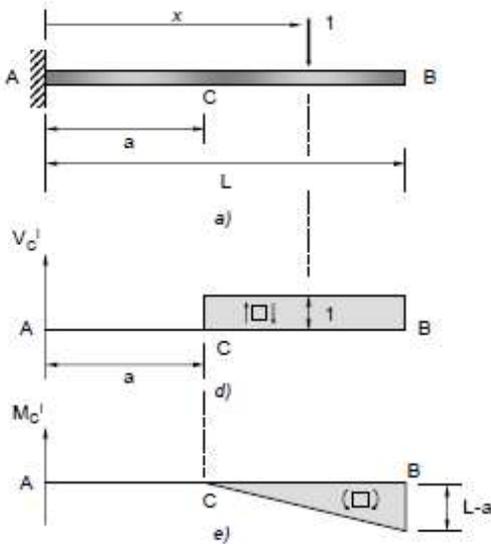
Ejemplo: Para la viga en voladizo de la figura, calcular las líneas de influencia de las reacciones en el empotramiento A, así como las del momento flector y del esfuerzo cortante en la sección C.

La línea de influencia del momento en el empotramiento A se obtiene aplicando la ecuación de equilibrio de momentos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A^i = 1 \cdot x = x \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

Planteando la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales, puede obtenerse la línea de influencia de la reacción vertical en el empotramiento. Supuesta positiva hacia arriba, su valor será:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A^i = 1 \quad (0 \leq x \leq \ell)$$



Para hallar la línea de influencia del esfuerzo cortante en C se aísla el tramo izquierdo o derecho de la viga, según interese. Y así, si la carga está a la izquierda de C, se aísla el tramo derecho de la viga y se estudia su equilibrio:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C^i = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

Si la carga está a la derecha de C, se aísla y estudia el equilibrio del tramo izquierdo:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C^i = V_A^i = 1 \quad (a \leq x \leq \ell)$$

Para obtener la línea de influencia del momento flector en C se aplica el mismo procedimiento. Por lo tanto, si la carga está a la izquierda de C, se aísla el tramo derecho:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C^i = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

Y si la carga está a la derecha de C, se aísla el tramo izquierdo:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C^i = V_A^i \cdot a - M_A^i = 1 \cdot a - x \Rightarrow M_C^i = a - x \quad (a \leq x \leq \ell)$$

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Si en una estructura isostática en equilibrio se elimina la ligadura que da lugar a la reacción (o el esfuerzo) cuya línea de influencia se desea hallar, la estructura se convierte en un mecanismo, con lo cual puede tener movimientos de sólido rígido que se producen sin que la estructura se deforme y, por tanto, sin acumulación de energía elástica. De acuerdo con el P.T.V., al aplicar ahora un desplazamiento virtual y puesto que la estructura está en equilibrio, se cumple que el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura es nulo, al no acumularse energía elástica:

$$\delta W = \delta U = 0$$

Las fuerzas que actúan sobre la estructura transformada por ese procedimiento en mecanismo, son las siguientes:

- La fuerza unitaria móvil,
- Las reacciones en los apoyos, que no producen trabajo virtual,
- El esfuerzo (o reacción) cuya línea de influencia se desea hallar, y que llamaremos genéricamente LI.

Si se aplica sobre la estructura un desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo o reacción LI cuya línea de influencia se busca, la estructura adopta una configuración deformada como sólido rígido. En esta configuración deformada se denomina δ_{LI} al desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo buscado y δ_1 al desplazamiento en la dirección de la fuerza unitaria móvil. El trabajo virtual producido por ambas fuerzas es:

$$\delta W = \delta_{LI} \cdot LI + \delta_1 \cdot 1 = 0$$

Despejando el valor de la línea de influencia:

$$LI = -\frac{\delta_1}{\delta_{LI}}$$

Si se elige el desplazamiento virtual de tal manera que valga la unidad ($\delta_{LI} = 1$), se obtiene:

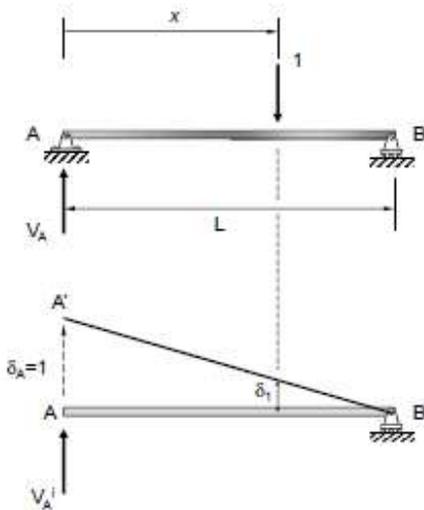
$$LI = -\delta_1$$

Esta expresión indica que la línea de influencia de un esfuerzo (o reacción) cualquiera en una estructura isostática es igual a la deformada - cambiada de signo - que adopta la estructura

considerada como rígida, cuando se aplica un desplazamiento unitario en la dirección de ese esfuerzo (o reacción).

Esta deducción es totalmente general, válida tanto para reacciones como esfuerzos de sección. Se expondrán a continuación varios ejemplos sencillos para ilustrar la aplicación de este Principio a la determinación de diversas líneas de influencia.

Ejemplo: Línea de influencia de la reacción en el apoyo A en la viga biapoyada de la figura



Para aplicar el método se quita el apoyo A colocando la reacción V_A' , y se permite en A un desplazamiento virtual δ_A en la dirección de la reacción. La viga gira alrededor de B como un mecanismo hasta la posición A'B. En la figura δ_1 indica el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga unitaria. Aplicando el P.T.V.:

$$\delta W = 0 \Rightarrow V_A' \cdot \delta_A - 1 \cdot \delta_1 = 0 \Rightarrow V_A' = \frac{\delta_1}{\delta_A}$$

$$\text{Si: } \delta_A = 1 \Rightarrow V_A' = \delta_1$$

Por definición de línea de influencia, se concluye que la línea A'B es la línea de influencia para V_A , siempre que $\delta_A = 1$.

Este procedimiento para construir líneas de influencia fue desarrollado por Heinrich Müller-Breslau en 1886, y se conoce con el nombre de Principio de Müller-Breslau, el cual podría enunciarse de la siguiente forma:

La línea de influencia de una reacción (o de un esfuerzo de sección) es igual a la configuración deformada que adopta la estructura (considerada como rígida) cuando se elimina de la estructura original la ligadura correspondiente a esa reacción o esfuerzo, y se comunica a la estructura liberada un desplazamiento (o rotación) unidad en el lugar y dirección de esa reacción o esfuerzo, de tal forma que únicamente esta respuesta estructural y la carga unidad realicen trabajo exterior”.

Si además se desean calcular también valores numéricos de las ordenadas de las líneas de influencia puede aplicarse para ello el método del equilibrio previamente visto. La combinación de ambos constituye un procedimiento muy eficaz para la construcción de líneas de influencia. El procedimiento conjunto podría resumirse en los siguientes pasos:

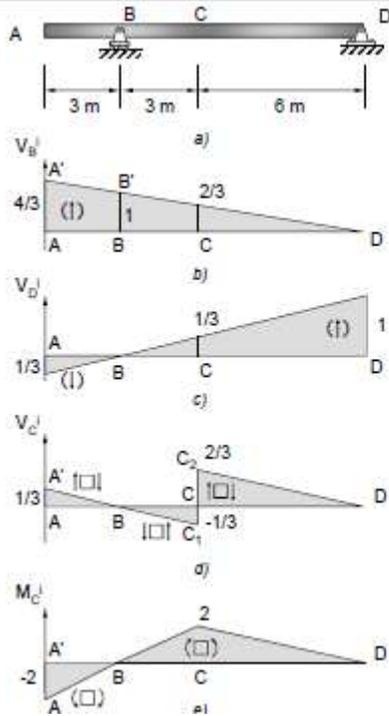
I. Dibujar la forma general de la línea de influencia aplicando el Principio de **Müller-Breslau**.

- Para ello se comienza eliminando de la estructura dada la ligadura correspondiente a la respuesta estructural cuya línea de influencia se pretende calcular. Se obtiene un mecanismo.
- A continuación se aplica a este mecanismo un pequeño desplazamiento (o rotación) en el lugar y en la dirección positiva de esa respuesta (reacción o esfuerzo de sección). Se dibuja la correspondiente configuración deformada del mecanismo que sea compatible con las condiciones de apoyo y de continuidad de la estructura. Esta configuración corresponde a la forma general de la línea de influencia buscada.

I. Determinar los valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia utilizando el método del equilibrio y la propia geometría de la línea.

- Colóquese una carga unidad en la posición correspondiente a la respuesta estructural en la estructura original (no liberada), y mediante la aplicación de las condiciones de equilibrio determínese el valor de la ordenada de la línea de influencia correspondiente a esa posición. Si la respuesta estructural buscada es un esfuerzo cortante, entonces la carga unidad debe colocarse sucesivamente en dos lugares, inmediatamente a la izquierda y a la derecha, de la sección correspondiente, y para ambas posiciones deben calcularse los valores de las ordenadas de la línea de influencia. Si la ordenada de la sección correspondiente a la respuesta estructural que se está estudiando es cero, entonces colóquese la carga unidad en la posición de ordenada máxima o mínima, y determínese el valor numérico de la ordenada aplicando condiciones de equilibrio.
- Utilizando la geometría de la línea de influencia, determínense los valores numéricos de las restantes ordenadas en todas aquellas posiciones correspondientes a cambios de pendiente en la línea de influencia.

Este principio es únicamente válido para líneas de influencia correspondientes a respuestas estructurales que son reacciones o esfuerzos de sección, pero no puede aplicarse al cálculo de líneas de influencia de deformaciones. Y puede aplicarse indistintamente en estructuras isostáticas o hiperestáticas.



Ejemplo: En la figura se representan, debidamente acotadas, las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos así como las del esfuerzo cortante y del momento flector en la sección C.

Se pueden determinar las líneas de influencia correspondientes a los esfuerzos axiales en las barras de una celosía mediante procedimientos similares a los estudiados para el caso de vigas.

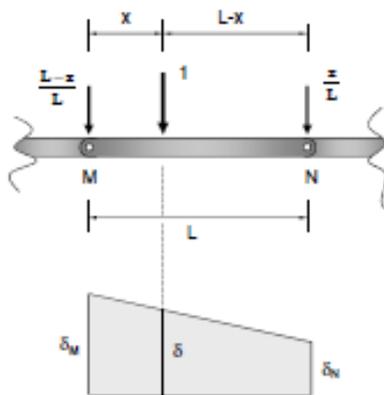
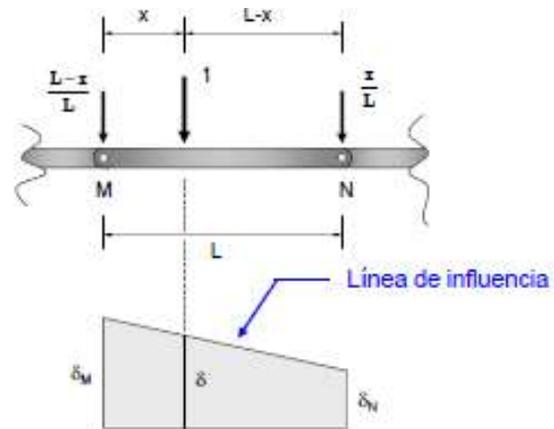
La principal diferencia es que en el caso de celosías las cargas únicamente pueden estar aplicadas en los nudos, y no a lo largo de todo el vano, por lo que en principio, las líneas de influencia no serían rectas de uno al otro lado del vano.

Pero dado que las diversas barras están desconectadas a flexión unas de otras y su comportamiento es lineal, ocurre que la línea de influencia cuando la carga móvil está entre dos nudos es también lineal. Por tanto, es suficiente con hallar la línea de influencia para la carga aplicada en los distintos nudos de la trayectoria, y unir los valores discretos obtenidos mediante líneas rectas.

Cuando la carga unidad ocupa una posición intermedia entre M y N, por ejemplo, a una distancia x de M, esta carga se transmitirá a los nudos M y N con los valores $(L-x)/L$ y x/L respectivamente. Para verificarlo basta estudiar el equilibrio tomando momentos respecto de ambos nudos:

$$\sum M_N = 0 \Rightarrow R_M \cdot \ell = 1 \cdot (\ell - x) \Rightarrow R_M = \frac{\ell - x}{\ell}$$

$$\sum M_M = 0 \Rightarrow R_N \cdot \ell = 1 \cdot x \Rightarrow R_N = \frac{x}{\ell}$$



Por consiguiente, el efecto de esa carga equivale a la superposición de esas otras dos cargas de valores $(L-x)/L$ y x/L actuando en los nudos M y N, respectivamente.

Fácilmente puede demostrarse que si δ es la ordenada de la línea de influencia cuando la carga unidad está colocada en la posición de la figura, se verifica, por pura equivalencia estática:

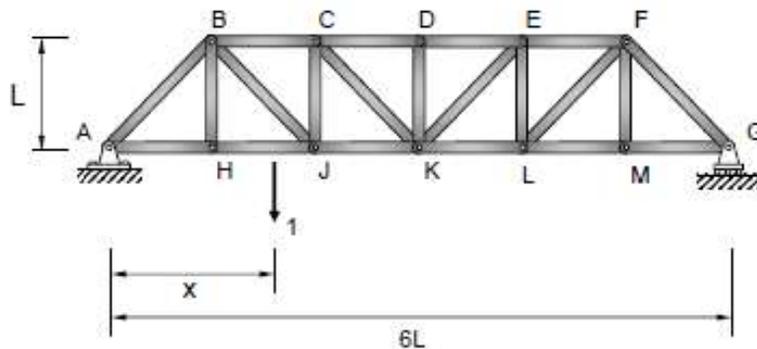
Ecuación de una recta \rightarrow

$$1 \cdot \delta = \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right) \cdot \delta_M + \frac{x}{\ell} \cdot \delta_N \Rightarrow \begin{aligned} \text{Para } x = 0: & \delta = \delta_M \\ \text{Para } x = \ell: & \delta = \delta_N \end{aligned}$$

4.1. APLICACIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Un procedimiento sencillo y rápido para determinar la línea de influencia de cualquier barra de una celosía utilizando exclusivamente consideraciones de equilibrio estático, consiste en aplicar los ya conocidos métodos de los nudos o de las secciones de Ritter (con sus simplificaciones), calculando previamente, cuando sean necesarios, los valores de las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos, y tener en cuenta la propiedad que acaba de demostrarse, es decir, que la línea de influencia varía linealmente cuando la carga se mueve entre dos nudos.

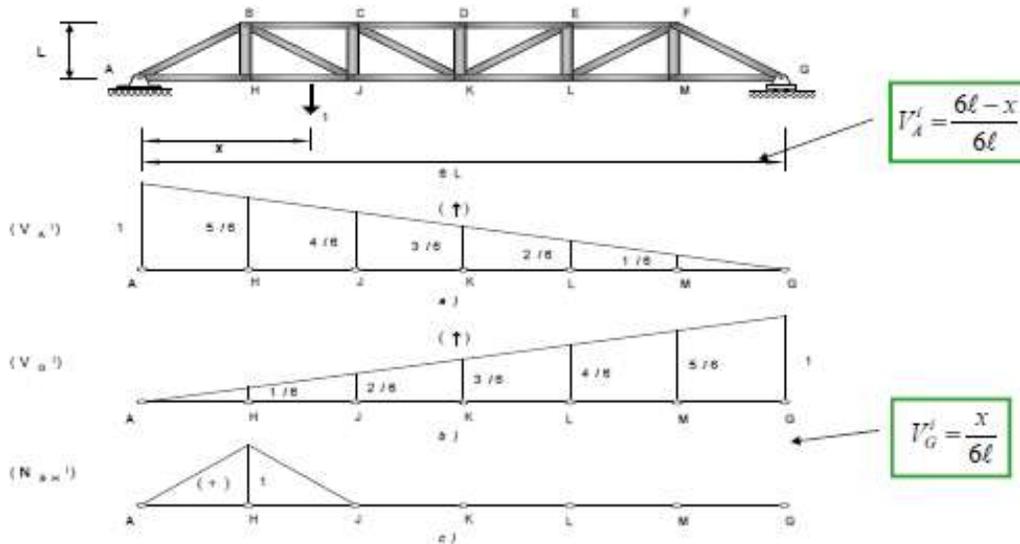
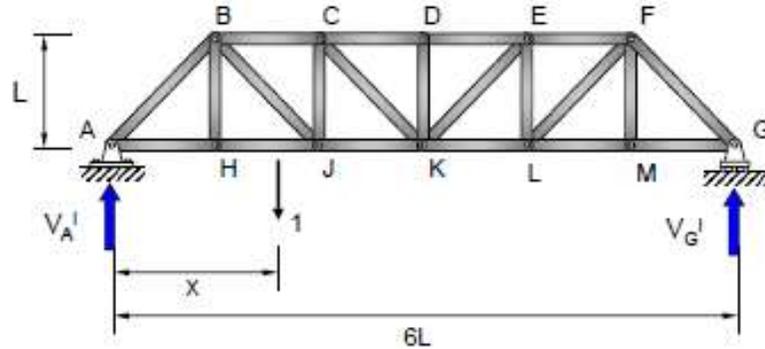
Ejemplo: Para la celosía de la figura 3.19 se representan las líneas de influencia de las reacciones y de los esfuerzos en diversas barras. La carga unitaria se mueve a lo largo del cordón inferior.



Las líneas de influencia de las reacciones se calculan aplicando el equilibrio de todo el conjunto:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow V'_A \cdot 6l = 1 \cdot (6l - x) \Rightarrow V'_A = \frac{6l - x}{6l}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V'_G \cdot 6l = 1 \cdot x \Rightarrow V'_G = \frac{x}{6l}$$



4.2. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

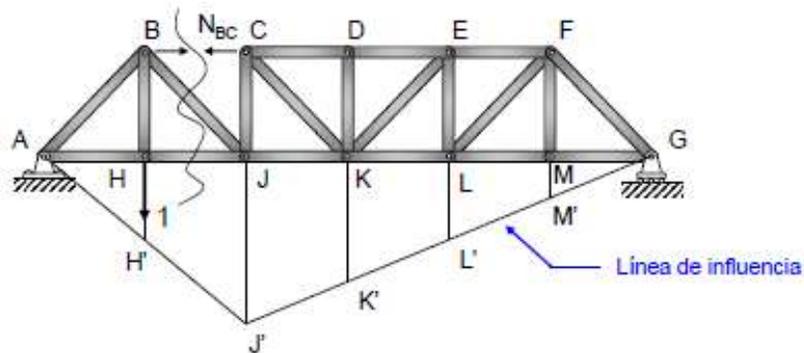
Al igual que se hizo para el caso de vigas, también en el caso de estructuras en celosía resulta especialmente adecuado la aplicación del Principio de Müller-Breslau para la determinación de la forma general de la línea de influencia. Si además se quieren calcular valores numéricos de las ordenadas de la línea de influencia, el procedimiento más rápido para acotarla numéricamente es colocar una carga unidad en un nudo cualquiera de la celosía para obtener el valor de la ordenada de la línea de influencia en ese punto de una forma analítica, al mismo tiempo que se determina si la barra trabaja a tracción o compresión.

Proceso:

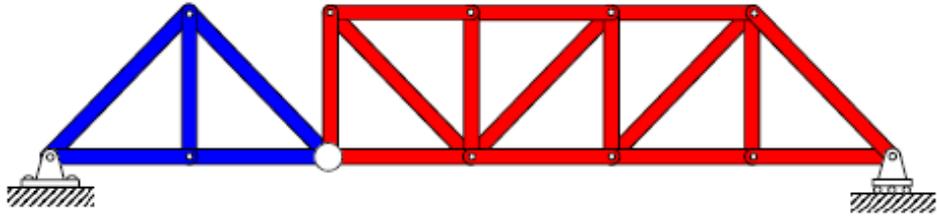
- 1) Se suprime la barra y se sustituye por dos fuerzas de la misma dirección, iguales y de sentido contrario, que representan las acciones sobre la estructura.
- 2) Se obtiene un mecanismo con un grado de libertad.
- 3) La línea de influencia del esfuerzo axial de la barra suprimida coincide con la deformada del cordón inferior (considerado rígido) cuando se da a la estructura un pequeño desplazamiento compatible con ese grado de libertad introducido en la estructura.

Ejemplo: Determinar la línea de influencia de la barra BC de la celosía del apartado anterior.

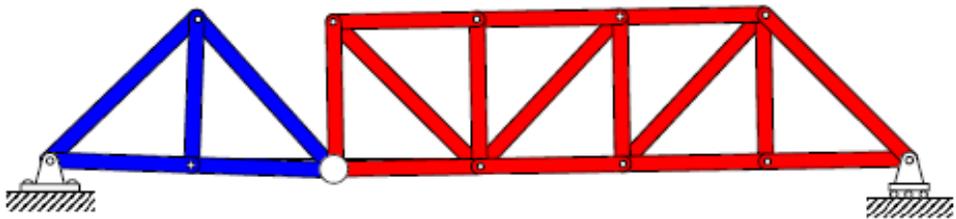
Por lo que respecta al cordón superior BC, la figura inferior muestra el mecanismo resultante de suprimir la barra BC, así como la deformada del cordón inferior al proporcionar un pequeño desplazamiento posible a este mecanismo (giro alrededor de las articulaciones A, G y J). De acuerdo con lo dicho anteriormente, la línea de influencia de BC es la línea AH'J'K'L'M'G.



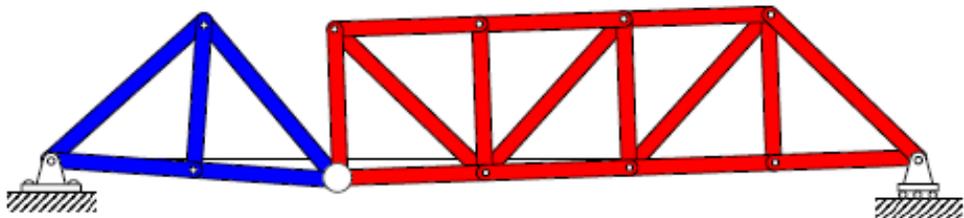
Movimiento del mecanismo:



Movimiento del mecanismo:



Movimiento del mecanismo:

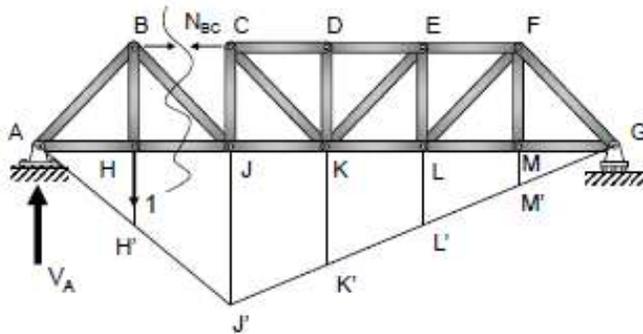


Para acotarla numéricamente basta con calcular un único valor, pues el resto se deduce por puras consideraciones geométricas. Y así, colocando una carga unidad en H, y suponiendo que la barra trabaja a tracción:

Cálculo de la reacción en A: $\rightarrow \sum M_G = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6\ell = 1 \cdot 5\ell \Rightarrow V_A = \frac{5}{6}$

Cálculo del esfuerzo en BC. Aplicando el método de las secciones con el corte indicado, aislando la parte izquierda AJ y tomando momentos respecto de J, resulta:

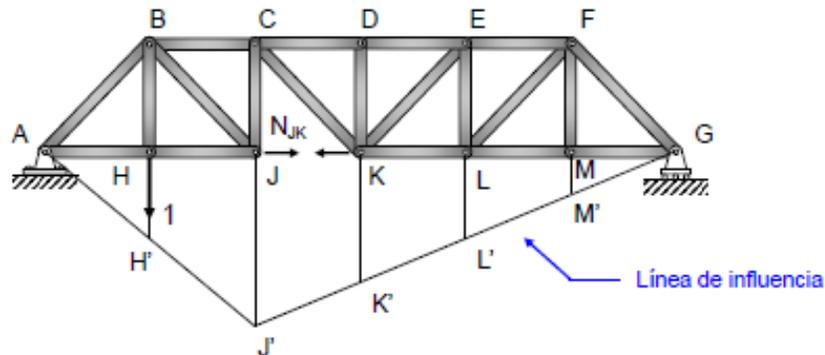
$$\sum M_J = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2\ell + N_{BC} \cdot \ell - 1 \cdot \ell = 0 \Rightarrow N_{BC} = 1 - 2V_A = \boxed{-\frac{2}{3}}$$



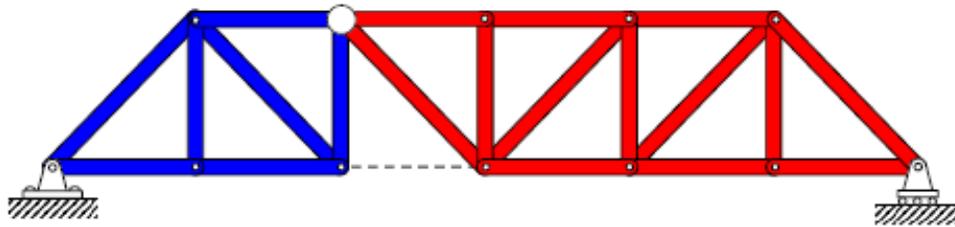
Luego la ordenada de la línea de influencia en H es 2/3, y como se había supuesto que la barra trabajaba a tracción, realmente lo hace a compresión.

Ejemplo: Determinar la línea de influencia de la barra JK de la celosía del apartado anterior.

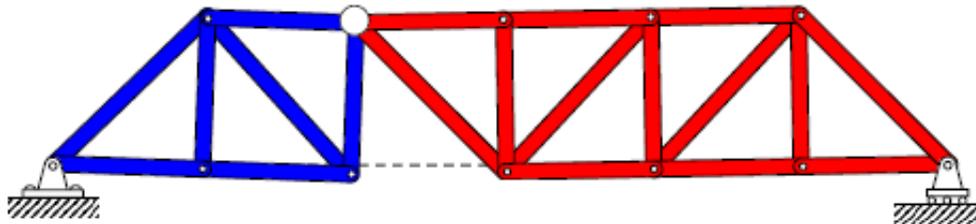
Por lo que respecta al cordón superior BC, la figura inferior muestra el mecanismo resultante de suprimir la barra BC, así como la deformada del cordón inferior al proporcionar un pequeño desplazamiento posible a este mecanismo (giro alrededor de las articulaciones A, G y J). De acuerdo con lo dicho anteriormente, la línea de influencia de BC es la línea AH'J'K'L'M'G.



Movimiento del mecanismo:



Movimiento del mecanismo:

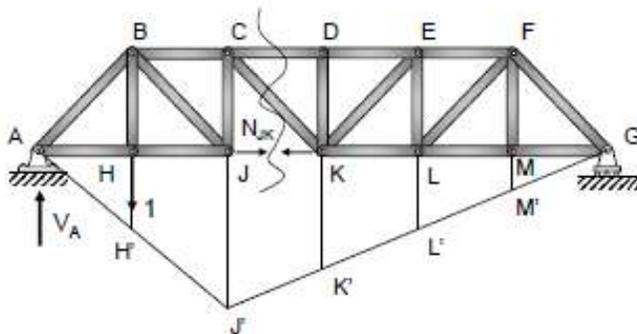


Para acotarla numéricamente se procede de la misma forma que en el caso anterior. Colocando una carga unidad en H, y suponiendo que la barra trabaja a tracción:

$$\text{Cálculo de la reacción en A: } \rightarrow \sum M_G = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6\ell = 1 \cdot 5\ell \Rightarrow V_A = \frac{5}{6}$$

Cálculo del esfuerzo en JK. Aplicando el método de las secciones con el corte indicado, aislando la parte izquierda AJ y tomando momentos respecto de C, resulta:

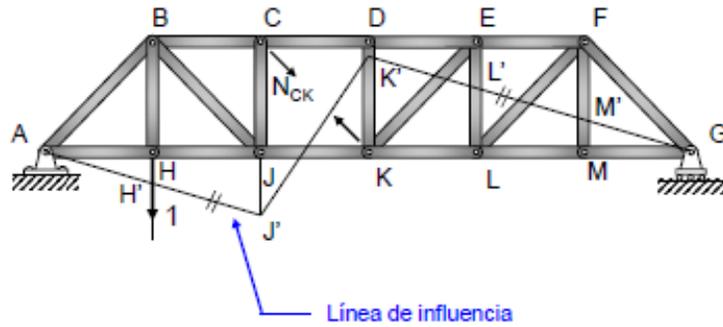
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2\ell - N_{BC} \cdot \ell - 1 \cdot \ell = 0 \Rightarrow N_{BC} = 2V_A - 1 = \frac{2}{3}$$



Luego la ordenada de la línea de influencia en H es $\frac{2}{3}$, y la barra trabaja a tracción.

Ejemplo: Determinar la línea de influencia de la barra CK de la celosía del apartado anterior.

En cuanto a la diagonal CK, la figura muestra el mecanismo resultante de suprimir esta diagonal, así como la deformada del cordón inferior al proporcionar un pequeño desplazamiento posible a este mecanismo (en este caso al suprimir la diagonal del cuadrilátero CDKJ, éste se distorsiona como un cuadrilátero articulado permaneciendo rígida la celosía a ambos lados, lo cual implica que debe girar alrededor de las articulaciones A y G exactamente el mismo ángulo). Consecuentemente, la línea de influencia de CK es la línea AH'J'K'L'M'G.



UNIDAD IV

INESTABILIDAD ELÁSTICA

4.1 INTRODUCCION

La inestabilidad elástica es un conjunto de fenómenos que carecen de linealidad geométrica. Estos se encuentran desplazados en algún elemento estructural. Se caracterizan por ser no proporcionales a las fuerzas aplicadas. La inestabilidad elástica cuenta a su vez con determinadas particularidades como lo son los fenómenos de inestabilidad elástica, dentro de los cuales se pueden mencionar:

- Pandeo flexional, este se encuentran presente en pilares y prismas.
- Inestabilidad lateral, se da en vigas.
- Inestabilidad de arcos, como su nombre lo indica se encuentra presente en arcos o piezas planas.
- Inestabilidad de cúpulas, se da en cúpulas poco apuntadas bajo cargas verticales.
- Abolladura local, que se da en elementos bidimensionales, en las cuales se encuentre presente la tensión y la compresión.

Por todos estos fenómenos antes mencionados se puede concluir en que la inestabilidad elástica proporciona la deformación lateral de algunas estructuras desde su eje, lo que produce una desproporción entre la fuerza de compresión y la esbeltez de la estructura, destacándose que esto se da de manera repentina

4.2 NATURALEZA DEL PROBLEMA VIGA-COLUMNA

El comportamiento de vigas columnas reales se puede entender mejor considerando primer un ejemplo idealizado, que se muestra en la Figura 1.a. Aquí, para simplificar, una barra perfectamente rígida de longitud L se mantiene inicialmente en posición vertical por medio de un resorte en A que tiene una rigidez a la torsión k . Luego una fuerza vertical P y una horizontal F se aplican en el extremo superior. A diferencia del procedimiento seguido en

todos los problemas anteriores, se deben escribir ahora las ecuaciones de equilibrio para la condición deformada. Teniendo presente que k es el momento resistente que desarrolla θ el resorte en A se obtiene:

$$\sum M_A = 0 \quad \circlearrowright +$$

$$PL \sin \theta + FL \cos \theta - k\theta = 0$$

$$P = \frac{k\theta - FL \cos \theta}{L \sin \theta}$$

El aspecto cualitativo de este resultado se muestra en la Figura 1.b y la curva correspondiente se ha marcado como la solución exacta. Es interesante observar que cuando $\theta \rightarrow \pi$, siempre que el resorte continúe funcionando, el sistema puede soportar una fuerza muy grande P .

Para una fuerza aplicada verticalmente hacia arriba, indicada con un sentido contrario en la figura, el ángulo θ disminuirá cuando P aumente. La solución expresada por la ecuación es para rotaciones arbitrariamente grandes.

En problemas complejos es muy difícil alcanzar soluciones de tal generalidad. Además en la mayoría de las aplicaciones no se pueden tolerar desplazamientos de gran magnitud. Por consiguiente de ordinario es posible limitar el estudio del comportamiento de sistemas al caso de desplazamientos pequeños y moderadamente grandes.

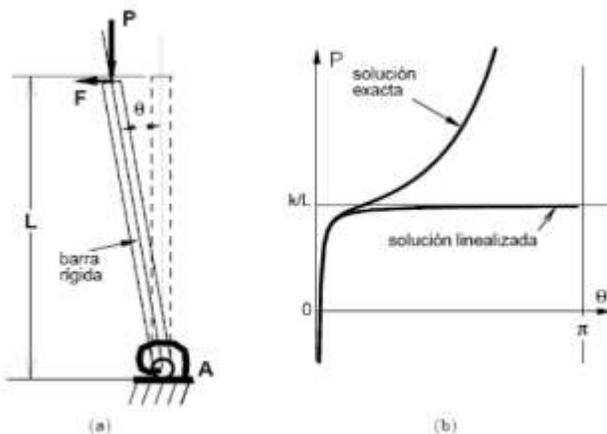


Figura 1 Respuesta fuerza-desplazamiento de un sistema con un grado de libertad

En este problema lo anterior se puede realizar poniendo $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$.
De esta forma la ecuación se simplifica a

$$P = \frac{k\theta - FL}{L\theta} \quad \circ \quad \theta = \frac{FL}{k - PL}$$

Para valores pequeños de θ esta solución es completamente aceptable. En cambio a θ medida que aumenta, la discrepancia entre esta solución linealizada y la solución exacta θ llega a ser muy grande. Para una combinación crítica de los parámetros k , P y L , el denominador ($k - PL$) en el último término de la ecuación sería cero y presumiblemente daría lugar a una rotación infinita θ .

Esto es completamente irreal y resulta de una formulación matemática impropia del problema. No obstante, tal solución proporciona una buena guía acerca del valor de la magnitud de la fuerza axial P a la que las deflexiones llegan a ser intolerablemente grandes.

La asíntota correspondiente a esta solución, obtenida de la igualdad $(k - PL) = 0$, define la

fuerza P_C como: $P_C = \frac{k}{L}$

Es significativo observar que en sistemas reales las grandes deformaciones asociadas a fuerzas del mismo orden de magnitud que P_C por lo general causan tensiones tan grandes que hacen inservible el sistema. Por otra parte, el análisis no lineal de sistemas estructurales debido al cambio de configuración geométrica y al comportamiento inelástico de los materiales es muy complejo y requiere de herramientas computacionales que no siempre están al alcance del analista. Por consiguiente, en el análisis de pandeo de miembros a compresión desempeña el papel más importante la determinación de P_C con una base simplificada, siguiendo las líneas del método utilizado en el ejemplo anterior.

4.3 ECUACIONES DIFERENCIALES PARA VIGA-COLUMNA.

Para una más completa comprensión del problema de la viga columna resulta instructivo deducir varias relaciones diferenciales entre las variables involucradas. Con ese objetivo consideremos un elemento diferencial de viga-columna. Notar especialmente que el elemento se muestra en su posición deformada. Para vigas ordinarias (comportamiento lineal) cargadas transversalmente esto no es necesario. Por otro lado los desplazamientos que se tratan en este análisis son pequeños en relación con la luz de la viga columna, lo cual permite las siguientes simplificaciones

$$dv/dx = \tan \theta \cong \theta \cong \text{sen} \theta, \quad \cos \theta = 1 \quad \text{y} \quad ds \cong dx$$

Con esta base, las dos ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \uparrow +, & \quad qdx - T + (T + dT) = 0 \\ \sum M_A = 0 \quad \odot +, & \quad -M + Pdv + Tdx + qdx \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0 \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones da

$$\frac{dT}{dx} = -q$$

que no cambia respecto a lo visto en el caso de plantear el equilibrio en la posición indeformada. La segunda, despreciando infinitesimales de orden superior, da

$$T = -\frac{dM}{dx} - P \frac{dv}{dx}$$

Por lo tanto, para vigas columnas, la fuerza cortante T, además de depender de la derivada del momento M como en la vigas, depende ahora de la magnitud de la fuerza axial y de la pendiente de la curva elástica.

El último término es la componente de P a lo largo de las secciones inclinadas

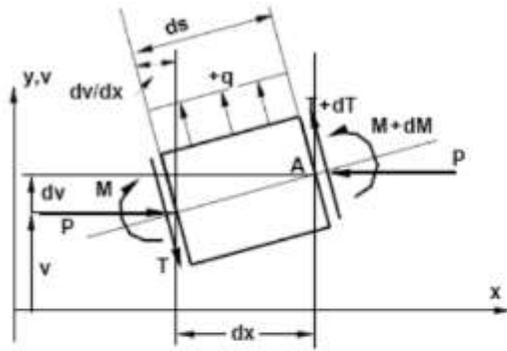


Figura 3 Elemento de una viga columna.

En este desarrollo se puede utilizar la relación usual de la teoría de flexión, $v'' = M / (EI)$. Substituyendo la ecuación y haciendo uso de la relación anterior, se obtienen dos ecuaciones diferenciales alternativas para vigas-columnas

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \alpha^2 M = q$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q}{EI}$$

Donde para simplificar se supuso que EI es constante y, como antes, $\alpha^2 = P / (EI)$. Si

$P = 0$, las ecuaciones resultan las mismas ecuaciones vistas para vigas con carga transversal. Para las nuevas ecuaciones, las condiciones de borde son las mismas vistas con anterioridad, excepto que la fuerza de corte se obtiene de la expresión.

$$\begin{aligned} v &= C_1 \text{sen}(\alpha x) + C_2 \text{cos}(\alpha x) + C_3 x + C_4 \\ v' &= C_1 \alpha \text{cos}(\alpha x) - C_2 \alpha \text{sen}(\alpha x) + C_3 \\ v'' &= -C_1 \alpha^2 \text{sen}(\alpha x) - C_2 \alpha^2 \text{cos}(\alpha x) \\ v''' &= -C_1 \alpha^2 \text{cos}(\alpha x) + C_2 \alpha^2 \text{sen}(\alpha x) \end{aligned}$$

Estas relaciones son necesarias en algunos ejemplos para expresar las condiciones de contorno, a fin de evaluar las constantes C1, C2, C3 y C4.

4.4 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Una aguja perfectamente recta sostenida sobre su punta puede considerarse en equilibrio. Sin embargo, la menor perturbación de éste o la imperfección más pequeña en su fabricación harían imposible tal estado. Se dice que esta clase de equilibrio es inestable, y es imperativo evitar situaciones análogas en sistemas estructurales.

Para aclarar más el problema, consideremos de nuevo una barra vertical rígida con un resorte de torsión, de rigidez k , en su base, como se muestra en la Figura 5.a. El comportamiento de tal barra sometida a una fuerza vertical P y una fuerza horizontal F se consideró en la sección.

La respuesta de este sistema a medida que aumenta la fuerza P se indica para una fuerza F grande y una fuerza F pequeña. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Cómo se comportará este sistema si $F = 0$? Este es el caso límite y corresponde al estudio del pandeo perfecto. La barra rígida de la Figura 5.a puede experimentar sólo rotación, ya que no se puede flexionar; es decir, el sistema tiene un grado de libertad. Para una rotación supuesta, θ , el momento en el resorte (restaurador) es $k\theta$, y con $F = 0$, el momento que produce P (perturbador) será $PL\sin\theta \approx PL\theta$, por lo tanto, si

$k\theta > PL\theta$, el sistema es estable

$k\theta < PL\theta$, el sistema es inestable.

Exactamente en el punto de transición $k = PL$, el equilibrio no es estable ni θ inestable sino neutro (o indiferente). La fuerza asociada a esta condición es la carga pandeo o crítica, que se designará por P_C . Para el sistema considerado Esta condición establece el comienzo del pandeo. Con esta fuerza dos posiciones de equilibrio son posibles, la forma vertical y una forma inclinada infinitesimalmente próxima a ella.

Por lo tanto, como es posible seguir dos ramas o caminos en la solución, a esta condición se la llama punto de bifurcación de la solución de equilibrio. Para $P > k/L$ el sistema es inestable. Como la solución ha sido linealizada no hay posibilidad de que θ sea arbitrariamente grande en P_C .

Considerando grandes desplazamientos, hay siempre un punto de equilibrio estable $e^{i\theta} \approx 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2}$.

$$P_C = \frac{k}{L}$$

El comportamiento de columnas elásticas, cargadas concéntricamente y perfectamente rectas, es decir columnas ideales

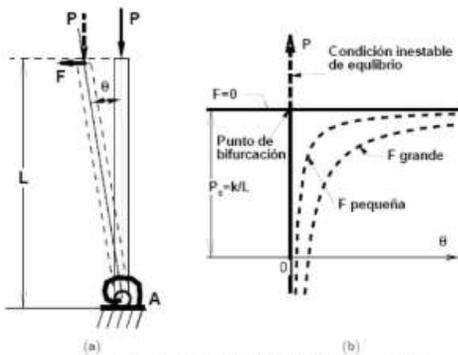


Figura 5 Comportamiento de pandeo de una barra rígida

A partir de una formulación linealizada del problema se puede determinar las cargas críticas de pandeo. Algunos ejemplos se darán en las siguientes secciones. Las cargas críticas no describen la acción del pandeo mismo. Utilizando una ecuación diferencial exacta de la curva elástica para deflexiones grandes, es posible hallar posiciones de equilibrio más altas que P_c , correspondiente a la fuerza aplicada P . Notar especialmente que aumentando P en sólo 1,5% P_c sobre P_c se produce un

desplazamiento lateral máximo del 22% de la longitud de la columna. Por razones prácticas, desplazamientos tan grandes rara vez pueden ser aceptados. Además, por lo general el material no puede resistir los esfuerzos de flexión inducidos. Por lo tanto, las columnas reales fallan inelásticamente.

En la gran mayoría de las aplicaciones de ingeniería P_c representa la capacidad última de una columna recta cargada axialmente en forma concéntrica.

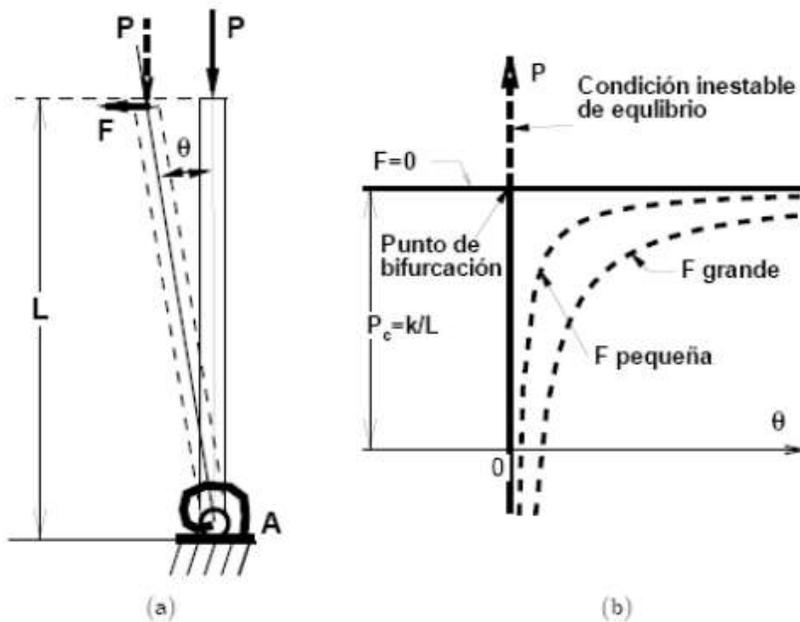


Figura 5 Comportamiento de pandeo de una barra rígida

INESTABILIDAD ELÁSTICA

A partir de una formulación línea lizada del problema se puede determinar las cargas críticas de pandeo. Algunos ejemplos se darán en las siguientes secciones. Las cargas críticas no describen la acción del pandeo mismo. Utilizando una ecuación diferencial exacta de la curva elástica para deflexiones grandes, es posible hallar posiciones de equilibrio más altas que P_c , correspondiente a la fuerza aplicada P . Notar

especialmente que aumentando P en sólo 1,5% PC sobre PC se produce un desplazamiento lateral máximo del 22% de la longitud de la columna. Por razones prácticas, desplazamientos tan grandes rara vez pueden ser aceptados. Además, por lo general el material no puede resistir los esfuerzos de flexión inducidos. Por lo tanto, las columnas reales fallan inelásticamente.

En la gran mayoría de las aplicaciones de ingeniería PC representa la capacidad última de una columna recta cargada axialmente en forma concéntrica.

4.5 CARGA DE PANDEO DE EULER (PARA DIFERENTES TIPOS DE APOYOS).

A fin de formular las ecuaciones diferenciales que permitan determinar la carga de pandeo de una columna ideal, se debe permitir que ocurra un pequeño desplazamiento lateral del eje de la columna. Para la columna con extremos articulados e inicialmente recta de la Figura 7.a, lo anterior se indica en la Figura 7.b.

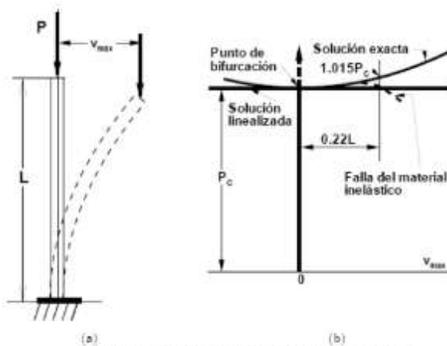


Figura 6 Comportamiento de una barra idealmente elástica

Para el caso de la columna ligeramente flexionada de la Figura 7.b., el momento flector M en una sección cualquiera es $-Pv(x)$, que si se substituye en la ecuación diferencial de la elástica da por resultado

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-P}{EI}v$$

Entonces, como se hiciera

en la ecuación, tomando $\alpha^2 = P/EI$, tenemos

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2v = 0$$

Es fácil ver que esta ecuación es la parte homogénea para una viga columna con extremos articulados. Su solución es

$$v = C_1 \text{sen}(\alpha x) + C_2 \text{cos}(\alpha x)$$

donde las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se deben determinar a partir de las condiciones de contorno, que son

$$v(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(L) = 0$$

En consecuencia

$$v(0) = 0 = C_1 \text{sen}(0) + C_2 \text{cos}(0)$$

es decir $C_2 = 0$, y

$$v(L) = 0 = C_1 \text{sen}(L)$$

La ecuación se puede satisfacer tomando $C_1 = 0$. Como esto corresponde a la condición sin pandeo, esta solución es trivial. Alternativamente la ecuación también se satisface si

$$\alpha L = \sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi$$

donde n es un entero. En esta ecuación los valores característicos o autovalores para tal ecuación diferencial, que hacen posible una forma de pandeo, requieren que:

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

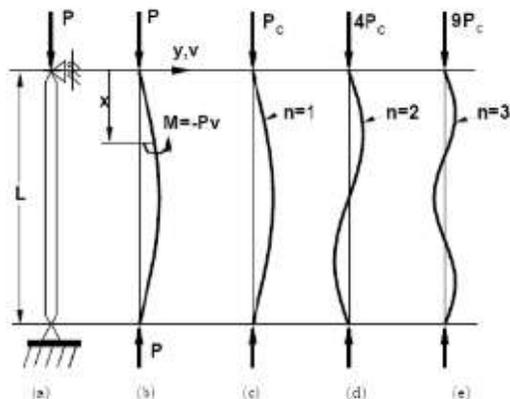


Figura 7. Columna con extremos articulados y sus tres primeros modos de pandeo.

Se supondrá en este caso que n puede ser cualquier número entero. Sin embargo, puesto que el interés se centra en el valor mínimo con que puede ocurrir el pandeo, n se debe tomar igual a la unidad. Por lo tanto, la carga crítica (o carga de pandeo de Euler) para una columna articulada en ambos extremos es

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Donde I debe ser el momento de inercia mínimo del área transversal de la columna y L la longitud de la misma. Este caso de una columna articulada en ambos extremos con frecuencia se lo denomina el caso fundamental.

Sustituyendo la ecuación, sabiendo que C2 es cero, se obtiene el modo o forma de pandeo de la columna

$$v = C_1 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Esta es la función característica o autofunción de este problema y puesto que n puede tomar cualquier valor entero, hay un número infinito de tales funciones. En esta solución linealizada la amplitud C1 del modo de pandeo permanece indeterminada. Para n= 1, la curva elástica es media onda de una senoide. Esta forma, junto con los modos correspondientes a n = 2 y n = 3. Los modos de orden superior no tienen significado físico en el problema de pandeo, puesto que la carga crítica mínima ocurre en n = 1.

Una solución alternativa del problema anterior se puede obtener utilizando la ecuación diferencial igualada a cero. De la ecuación tal ecuación es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

Para el caso considerado (articulado en ambos extremos), las condiciones de borde son:

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(0) = EIv''(0) = 0 \quad \text{y} \quad M(L) = EIv''(L) = 0$$

Utilizando estas condiciones con la solución homogénea de la ecuación (9.28), junto con su derivada segunda dadas por las ecuaciones (9.16.a y c), se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} +C_1 \text{sen}(\alpha L) & +C_2 & +C_4 = 0 \\ +C_1 \text{sen}(\alpha L) & +C_2 \cos(\alpha L) & +C_3 L + C_4 = 0 \\ & -C_3 \alpha^2 EI & = 0 \\ -C_1 EI \alpha^2 \text{sen}(\alpha L) & -C_2 EI \alpha^2 \cos(\alpha L) & = 0 \end{array}$$

Para este sistema de ecuaciones C1, C2, C3 y C4 podrían ser todos iguales a cero, lo cual daría una solución trivial. Alternativamente, para obtener una solución no trivial se debe anular el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones homogéneas.

Por lo tanto con $\alpha^2 EI = P$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{sen}(\alpha L) & \cos(\alpha L) & L & 1 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ -P\text{sen}(\alpha L) & -P\cos(\alpha L) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La evaluación de este determinante conduce a $\text{sen}(\alpha L) = 0$, que es precisamente la condición dada por la ecuación (9.23). Este método es ventajoso en problemas con diferentes condiciones de contorno en que la fuerza axial y el producto. El permanecen constantes en toda la longitud de la columna. El método no se puede aplicar si la fuerza axial se extiende sólo sobre una parte de un miembro.

4.6 LIMITACIÓN DE LA ECUACIÓN DE PANDEO ELÁSTICO

En las deducciones anteriores de las fórmulas de pandeo para columnas se supuso tácitamente que el material se comportaba de manera linealmente elástica. Para poner de manifiesto esta significativa limitación, la ecuación (9.26) puede escribirse en forma diferente. Por definición, $I = Ar^2$, donde A es el área de la sección transversal y r es su radio de giro.

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EAr^2}{L^2}$$

$$\sigma_C = \frac{P_C}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

Donde la tensión crítica, σ_C , para una columna se define como un promedio en el área transversal A de la misma, debido a la carga crítica P_C . La longitud de la columna es L y r el radio de giro mínimo del área de la sección, puesto que la fórmula original de Euler se da en términos del valor mínimo de I . La relación L y r de la longitud de la columna al radio de giro mínimo de un área transversal se llama relación de esbeltez (L/r) de la columna. De la ecuación se puede concluir el límite de la proporcionalidad del material es el límite superior de la tensión con la cual la columna pandeará elásticamente. La modificación necesaria de la fórmula para incluir la respuesta inelástica del material se estudiará en la siguiente sección.

4.7 MODIFICACIÓN EN LA ECUACIÓN DE LA CARGA CRÍTICA DE EULER

Un diagrama típico tensión-deformación a la compresión para una probeta en la que se impide el pandeo se puede representar como en la Figura 9.a. En el intervalo de tensiones desde O hasta A el material se comporta elásticamente. Si la tensión en una columna en pandeo no excede de este intervalo la columna pandeará elásticamente. La hipérbola correspondiente a la ecuación, $C = 2E / (L/r)^2$, es aplicable en este caso. Esta σ π porción de la curva se indica como ST.

Es importante reconocer que esta curva no representa el comportamiento de una columna sino más bien el de un número infinito de columnas ideales de diferente longitud.

La hipérbola que corresponde a la región situada más allá del intervalo útil se indica en la figura por medio de una línea punteada. Una columna con una relación L/r correspondiente al punto S de la Figura 9.b será la columna de más corta longitud hecha de material y tamaño dados, que se pandeará elásticamente.

Una columna más corta, con una relación L/r aún menor, no se pandeará en el límite de proporcionalidad del material. En el diagrama tensión-deformación, Figura 9.a, esto significa que el nivel de tensiones en la columna ha pasado del punto A y alcanzado quizá un cierto punto B. A este nivel de tensiones más alto se puede decir, en efecto, se ha creado una columna de material diferente puesto que la rigidez del mismo ya no está representada por el módulo de elasticidad. En este punto, la rigidez del material está dada por la tangente a la gráfica tensión-deformación, es decir, por el módulo elástico tangente (o instantáneo), E_t . La columna permanecerá estable si su nueva rigidez a la flexión $E_t I$ en B es suficientemente grande y podrá soportar una carga mayor. A medida que la carga aumenta, el nivel de tensiones se eleva también, en tanto que el módulo referido a la tangente disminuye. Una columna de “material aún menos rígido” actúa bajo una carga creciente.

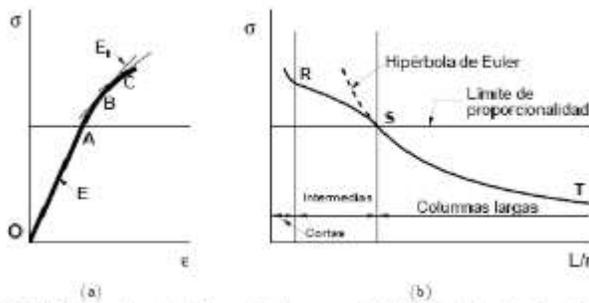


Figura 9 (a) Diagrama tensión-deformación de compresión (b) Gráfica de la tensión crítica en columnas en función de la relación de esbeltez

La sustitución del módulo elástico tangente, E_t , en vez del módulo elástico inicial,

E , es entonces la única modificación necesaria para obtener las fórmulas de pandeo elástico aplicables en el intervalo inelástico. En consecuencia, la fórmula generalizada de Euler, o bien la fórmula del módulo referido a la tangente⁵ será.

Como los esfuerzos correspondientes a los módulos referidos a la tangente se pueden obtener a partir del diagrama tensión-deformación a la compresión, la relación L/r a la cual se pandeará una columna con estos valores se puede obtener de la ecuación. Una gráfica que represente este comportamiento para valores intermedios y bajos de L/r está dada en la Figura 9.b por la curva desde S hasta R. Los ensayos en columnas individuales verifican esta gráfica con notable exactitud.

Las columnas que se pandean elásticamente se denominan a veces columnas largas.

Las columnas con bajas relaciones L/r no presentan esencialmente fenómenos de pandeo y reciben el nombre de columnas cortas. Con bajos valores de L/r , los materiales dúctiles “se aplastan” y pueden soportar cargas muy grandes.

Si la longitud L de la ecuación se considera como la longitud efectiva de una columna, se pueden analizar diferentes condiciones de extremo. De acuerdo con este procedimiento en la Figura 10 se grafica para fines de comparación, la tensión crítica C en σ función de la relación de esbeltez para columnas de extremos empotrados y articulados. Es importante notar que la capacidad de carga en los dos casos está en la relación 4 a 1 sólo para columnas que tengan la relación de esbeltez $(L/r) \geq 10$ o mayor. Para valores de L/r menores se obtienen progresivamente menos ventajas por la restricción al giro en los extremos. Con bajas

relaciones L/r , las gráficas se confunden. Hay poca diferencia si un “bloque corte” está articulado o empotrado en sus extremos, ya que entonces la resistencia determina su comportamiento y no el pandeo.

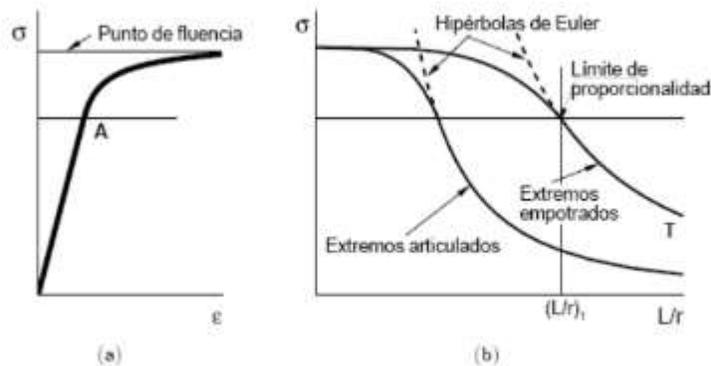


Figura 10 Comparación del comportamiento de columnas con diferentes condiciones de extremo

4.8 COLUMNAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE

En el estudio anterior del pandeo de columnas se supuso que tales elementos eran idealmente rectos. Puesto que en realidad todas las columnas tienen imperfecciones, las cargas de pandeo que se obtienen para columnas ideales son las mejores posibles. Tales análisis sólo proporcionan indicios acerca del mejor funcionamiento posible de columnas.

Por lo tanto, no es sorprendente que el funcionamiento de columnas haya sido explorado también con base en algunas imperfecciones determinadas estadísticamente o en posibles desalineamientos de las cargas aplicadas. Como una ilustración de este enfoque, se considerará una columna cargada excéntricamente que es un problema importante en sí mismo.

Una columna cargada excéntricamente se indica en la Figura 11.a. Esta fuerza es equivalente a una fuerza axial concéntrica P y a momentos de extremo $M_0 = Pe$. Tal viga columna ya ha sido analizada en el ejemplo 2, donde se encontró que debido a la flexibilidad del miembro, el máximo momento flexionante $M_{máx}$, es igual a $M_0 \sec(aL/2)$. Por lo tanto,

la tensión máxima de compresión, que ocurre a la mitad de la altura en el lado cóncavo de la columna, se puede calcular como:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M d}{I} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} d}{A r^2} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e d}{r^2} \sec \left(\frac{nL}{2} \right) \right]$$

A su vez $n = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{P}{2EI}}$ por lo cual

$$|\sigma|_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e d}{r^2} \sec \left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{P}{4EA}} \right) \right]$$

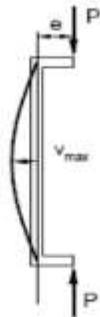
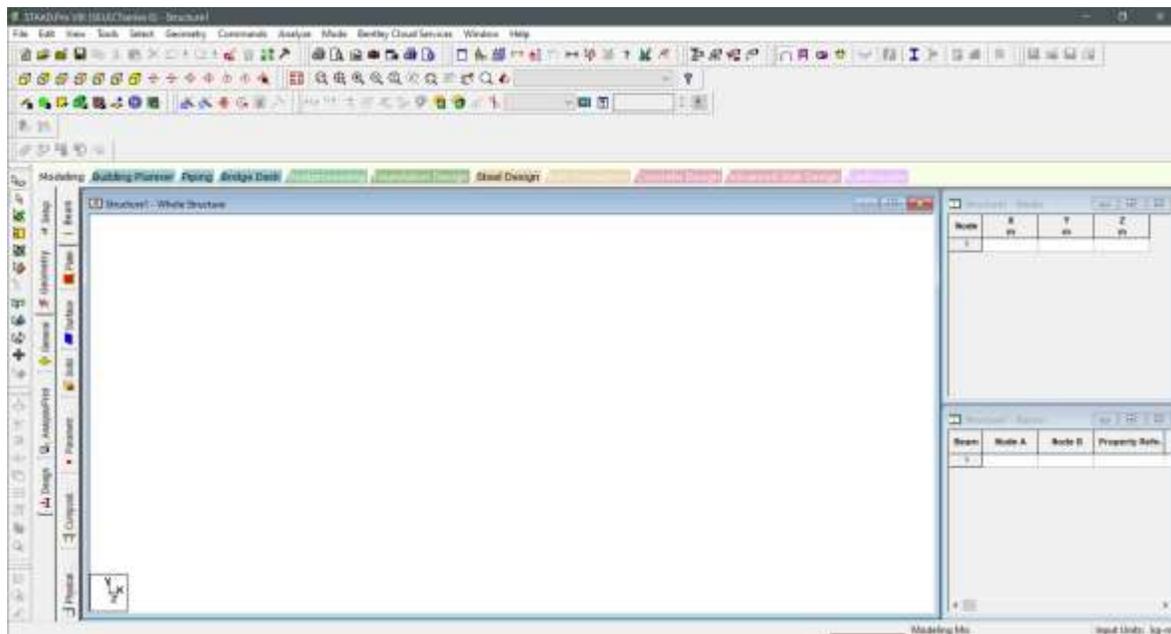
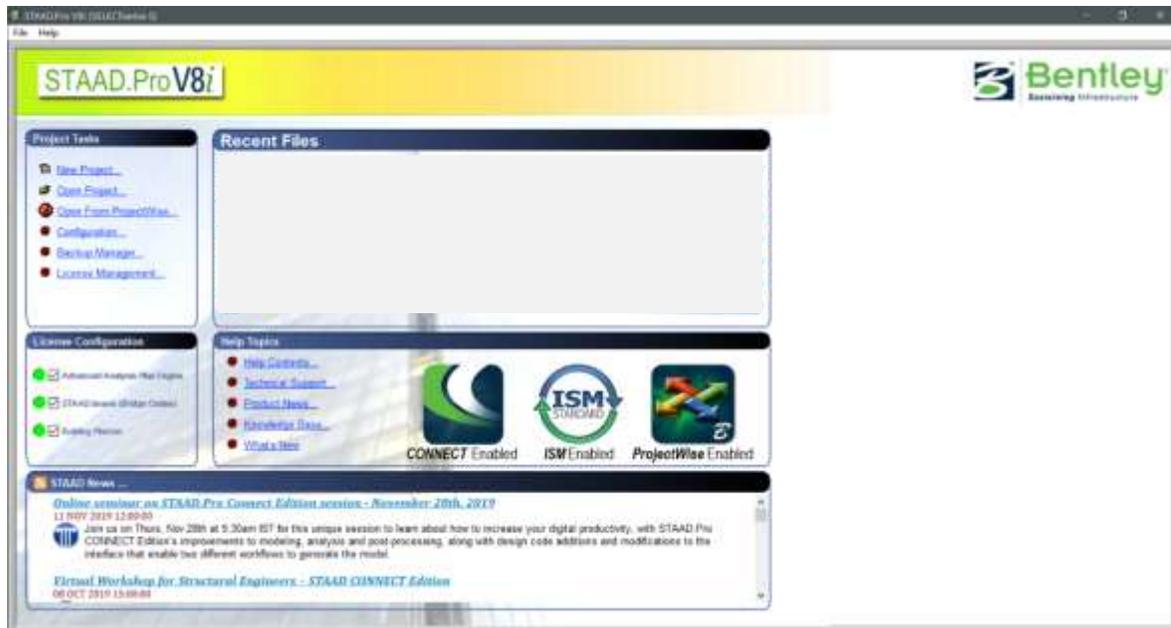


Figura 11 Columna cargada excéntricamente

4.9 APLICACIÓN DE PROGRAMAS COMPUTACIONALES PARA LA SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS (SOFTWARE).

4.9.1 UTILIZACIÓN DE SOFTWARE EDUCATIVO PARA RESOLVER VIGAS, ARMADURAS, MARCOS Y ARCOS.

Software Estructural, Staad.ProV8i - Bentley



CONCLUSION

En forma normal se piensa que las deflexiones dentro del límite elástico varían en forma lineal con la carga, sin embargo ocurren varias excepciones notables, como la falla por estabilidad o pandeo cuando se aplican cargas de compresión.

Se entiende por estabilidad la propiedad del sistema de mantener su estado durante las acciones exteriores. Si el sistema no tiene esta propiedad se dice que el sistema es inestable. En la misma medida se puede afirmar que su estado es inestable.

En las condiciones reales siempre existen causas que pueden conducir a la perturbación del estado original de equilibrio. Es decir, que siempre se realiza la posibilidad del paso del sistema inestable a un nuevo estado. En este caso se dice que no tiene lugar la pérdida de estabilidad.

Al perder la estabilidad, el sistema se puede comportar de diversas formas. Generalmente, tiene lugar el paso a un nuevo estado de equilibrio, lo que, en la mayoría de los casos va acompañado de grandes deformaciones, de deformaciones plásticas o de una rotura completa. En algunos casos, después de perder la estabilidad, la estructura sigue trabajando y cumple, como antes, sus funciones principales. Pueden ocurrir, por fin, casos cuando el sistema perdió estabilidad, al no tener una posición estable de equilibrio, pasa al régimen de las oscilaciones no amortiguadas.

Bibliografía básica y complementaria:

- Miguel Cervera Ruiz, Elena Blanco Díaz. Mecánica de estructuras, Libro 2. Métodos de análisis. (2002).
- Ing. Hernán Rodas Andrade. Estructuras I. (2014). México
- Jorge Eduardo Hurtado G. Introducción al Análisis de estructural por Elementos Finitos. (2002). Colombia.
- Lisborg, N. (1965). Principios fundamentales de diseños de estructuras. México D.F.: Continental.
- Departamento de Ingeniería mecánica. Teoría de estructuras.