ANTOLOGIA

MAESTRIA EN ADMINISTRACION DE LOS SISTEMAS DE SALUD

MATERIA:

TENDENCIAS Y SISTEMAS DE SALUD EN MEXICO

SEPTIEMBRE 2021

María Cecilia Zamorano Rodríguez.

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1978 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra universidad inició sus actividades el 19 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a las instalaciones de carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de educación que promueva el espíritu emprendedor, basados en Altos Estándares de calidad Académica, que propicie el desarrollo de estudiantes, profesores, colaboradores y la sociedad.

Visión

Ser la mejor Universidad en cada región de influencia, generando crecimiento sostenible y ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Lealtad
- Responsabilidad
- Respeto

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

"Pasión por Educar"

Balam

Es nuestra mascota, su nombre proviene de la lengua maya cuyo significado es jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen a los integrantes de la comunidad UDS.

TENDENCIAS Y SISTEMAS DE SALUD EN MEXICO

OBJETIVO DE LA MATERIA.

Al finalizar el curso, el estudiante será capaz de aplicar los diversos tópicos matemáticos en el planteamiento y resolución de problemas del ámbito empresarial, a través del uso e interpretación de modelos que le permitirán sustentar y apoyar el proceso de la toma de decisiones.

TEMAS

SEMANA UNO

ENCUADRE (ORGANIZACIÓN DE LA MATERIA Y NORMATIVA SOBRE EL PROCESO DE EVALUACION)

UNIDAD I ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

1.1.- Procesamiento estadístico de datos (recolección, organización, presentación, análisis e interpretación de datos).

1.2.- Distribuciones de frecuencias.

1.3.- Presentación gráfica.

1.4.- Medidas de tendencia central.

1.5.- Medidas de dispersión.

1.6.- Teorema de Tchebyshev.

1.7.- Regla empírica.

UNIDAD II TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

2.1.- Introducción.

2.1.1.- Enfoques de probabilidad.

2.1.2.- Espacio muestral.

2.1.3.- Eventos simples y compuestos.

2.1.4.- Leyes de probabilidad.

2.1.5.- Tablas de contingencia.

2.1.6.- Teorema de Bayes.

SEMANA DOS

2.2.- Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad.

2.2.1.- Variable aleatoria.

2.2.2.- Clasificación de las variables aleatorias.

2.2.3.- Distribuciones de probabilidad discretas.

2.2.4.- Distribuciones de probabilidad continúas.

2.2.5.- Esperanza matemática.

2.2.6.- Momentos con respecto al origen y a la media.

2.2.7 La varianza de una variable aleatoria

UNIDAD III ESTADÍSTICA INFERENCIAL

3.1.- Pruebas de hipótesis.

3.1.1.- Introducción.

3.1.2.- Prueba de hipótesis para la media de la población y las proporciones.

3.1.3.- Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias o dos proporciones.

3.2.- Regresión lineal y correlación.

3.2.1.- Análisis de regresión lineal simple.

3.2.2.- Regresión múltiple.

SEMANA TRES

3.3.- Métodos no paramétricos.

3.3.1.- Aplicaciones de ji cuadrada.

3.3.2.- Otras pruebas no paramétricas.

3.4.- Análisis de varianza.

3.5.- Control estadístico de la calidad.

3.6.- Matemáticas financieras.

UNIDAD IV INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

4.1.- Origen y desarrollo.

4.2.- Enfoque de modelado en la investigación de operaciones.

4.3.- Programación lineal.

4.4.- Administración de proyectos.

4.5.- Introducción a la teoría de decisiones.

4.6.- Introducción a la teoría de juegos.

BIBLIOGRAFIA SUGERIDA

- **Enrique y Guijarro, Evolución y Reforma del sistema de salud en México, Editorial Cepal, 2000**

- **GIEDION, Manuela Villar, Ávila Adriana, Los sistema de salud en Latinoamérica y el papel del seguro Privado, Editorial Fundación Mapre, 2010.**

- **SANCHES, León Gregorio, Editorial Cárdenas, 2006.**

CRITERIOS, PROCEDIMIENTOS DE EVALUACION Y ACREDITACION

Trabajos 50%

Foros 30%

Exámen 20% Total 100%

Escala de calificación 08- 10

Mínima aprobatoria 8

SEMANA 1
UNIDAD 1
ESTADISTICA DESCRIPTIVA

1.1 PROCESAMIENTO ESTADISTICO DE DATOS

El proceso estadístico es el conjunto de etapas o fases que deben completarse para realizar una investigación basada en información cuantitativa y obtener unos resultados fieles a la realidad estudiada.

Cuando hablamos de proceso estadístico, estamos hablando de una serie de pasos que es recomendable realizar para obtener unos resultados fieles a la realidad que estudiamos en el estudio estadístico que se pretenda realizar. Esto es necesario, ya que si no realizamos estos pasos podemos obtener conclusiones erróneas y, por ende, tomar malas decisiones.

Por ejemplo, imaginemos que tenemos una heladería. Necesitamos saber, en forma aproximada, qué cantidad de helado debemos comprar en función de la cantidad de demanda que tendremos. Así pues, si nos quedamos cortos podrían llegar clientes a los que tendríamos que decirles que en esta heladería no queda helado. Al contrario, si tenemos demasiada cantidad, podría echarse a perder. Por tanto, se hace necesario intentar estimar qué cantidad debemos comprar, o al menos un rango aproximado. Si para calcular ese rango, recolectamos datos que no son representativos (por ejemplo, una heladería situada en otra ciudad con menos afluencia) podríamos equivocarnos.

Así pues, teniendo esto claro, debemos conocer la serie de pasos y detalles que debemos seguir para que los resultados se adecuen a la realidad y tomemos mejores decisiones.

Etapas del proceso estadístico

Dependiendo del manual visitado o del autor, podríamos ver diferentes etapas con diferentes nombres. En esencia, casi todos los documentos sobre el tema recogen los mismos apartados, solo que unos engloban varias fases en una y otros fragmentan más el proceso.

En nuestro caso, consideramos que el proceso estadístico está formado por:

a) Planteamiento del problema
b) Recolección de datos
c) Organización de datos
d) Análisis de datos
e) Interpretación de datos

→Planteamiento del problema

En el planteamiento del problema se sitúa el eje central sobre el que articular todo lo demás. Esta fase responde a la siguiente pregunta: ¿Qué necesito estudiar y por qué? En ocasiones, por increíble que parezca plantear el problema puede hacernos llegar a la conclusión de que en realidad no necesitamos realizar un estudio estadístico.

Empieza por contextualizar el área o disciplina de estudio donde se enmarca la problemática. Ir de lo general a lo particular. Lo lograrás teniendo en cuenta tres aspectos:

1. El espacio de ese contexto, ¿Dónde?: puede ser un espacio real, es decir, un lugar determinado (un país, ciudad, poblado, urbanización, calle, empresa, organización, instituto, etc.) También puede tratarse de un espacio figurado (ciencia, disciplina, corriente de pensamiento, campo de estudio, movimiento literario, etc.)
2. El tiempo ¿Cuándo?: si es una problemática reciente o de larga data.
3. El modo ¿Cómo?: resalta como se presenta la problemática y como se ha estudiado o considerado previamente.

Luego de contextualizar es necesario colocar tu propuesta de análisis, esto incluye la modalidad y las características del estudio que propones en tu trabajo y, si es posible, las soluciones para la resolución de la problemática establecida. Dependiendo de la modalidad del trabajo de grado que escojas, el planteamiento del problema puede contener hipótesis o las interrogantes de la investigación.

Para cerrar el planteamiento del problema expone la necesidad, modalidad y fines de su estudio.

El planteamiento del problema, como has podido notar, es una reflexión ordenada que va dando cuenta de una transición lógica del pensamiento edsde el punto de vista metodológico.

→Recolección de datos

Una vez hemos planteado el problema debemos recoger los datos. Aquí es importante la metodología. De tal modo que existen diferentes consideraciones. Así pues, debemos establecer el tipo de muestreo, el tamaño de la muestra, el tipo de recolección de datos (por ejemplo, a través de bases de datos o de encuestas personalizadas), en persona, por internet o por teléfono, etc.

Los analistas utilizan una variedad de métodos a fin de recopilar los datos sobre una situación existente, como entrevistas, cuestionarios, inspección de registros (revisión en el sitio) y observación. Cada uno tiene ventajas y desventajas. Generalmente, se utilizan dos o tres para complementar el trabajode cada una y ayudar a asegurar una investigación completa.

La entrevista

Las entrevistas se utilizan para recabar información en forma verbal, a través de preguntas que propone el analista. Quienes responden pueden ser gerentes o empleados, los cuales son usuarios actuales del sistema existente, usuarios potenciales del sistema propuesto o aquellos que proporcionarán datos o serán afectados por la aplicación propuesta. El analista puede entrevistar al personal en forma individual o en grupos algunos analistas prefieren este método a las otras técnicas que se estudiarán más adelante. Sin embargo, las entrevistas no siempre son la mejor fuente de datos de aplicación.

Dentro de una organización, la entrevistas es la técnica más significativa y productiva de que dispone el analista para recabar datos. En otras palabras, la entrevistas es un intercambio de información que se efectúa cara a cara. Es un canal de comunicación entre el analista y la organización; sirve para obtener información acerca de las necesidades y la manera de satisfacerlas, así como concejo y comprensión por parte del usuario para toda idea o método nuevos. Por otra parte, la entrevista ofrece al analista una excelente oportunidad para establecer una corriente de simpatía con el personal usuario, lo cual es fundamental en transcurso del estudio.

Preparación de la Entrevista

1. Determinar la posición que ocupa de la organización el futuro entrevistado, sus responsabilidades básicas, actividades, etc. (Investigación).
2. Preparar las preguntas que van a plantearse, y los documentos necesarios (Organización).
3. Fijar un límite de tiempo y preparar la agenda para la entrevista. (Sicología).
4. Elegir un lugar donde se puede conducir la entrevista con la mayor comodidad (Sicología).
5. Hacer la cita con la debida anticipación (Planeación).

Conducción de la Entrevista

1. Explicar con toda amplitud el propósito y alcance del estudio (Honestidad).
2. Explicar la función propietaria como analista y la función que se espera conferir al entrevistado. (Imparcialidad).
3. Hacer preguntas específicas para obtener respuestas cuantitativas (Hechos).
4. Evitar las preguntas que exijan opiniones interesadas, subjetividad y actitudes similares (habilidad).
5. Evitar el cuchicheo y las frases carentes de sentido (Claridad).
6. Ser cortés y comedio, absteniéndose de emitir juicios de valores. (Objetividad).

7. Conservar el control de la entrevista, evitando las divagaciones y los comentarios al margen de la cuestión.
8. Escuchar atentamente lo que se dice, guardándose de anticiparse a las respuestas (Comunicación).

Secuela de la Entrevista

1. Escribir los resultados (Documentación).
2. Entregar una copia al entrevistado, solicitando su conformación, correcciones o adiciones. (Profesionalismo).
3. Archivar los resultados de la entrevista para referencia y análisis posteriores (Documentación).

Recabar datos mediante la Entrevista

La entrevista es una forma de conversación, no de interrogación, al analizar las características de los sistemas con personal seleccionado cuidadosamente por sus conocimientos sobre el sistema, los analistas pueden conocer datos que no están disponibles en ningún otra forma.

En las investigaciones de sistema, las formas cualitativas y cuantitativas de la información importantes. La información cualitativa está relacionada con opinión, política y descripciones narrativas de actividades o problemas, mientras que las descripciones cuantitativas tratan con números frecuencia, o cantidades. A menudo las entrevistas pueden ser la mejor fuente de información cualitativas, los otros métodos tiende a ser más útiles en la recabación de datos cuantitativos.

Son valiosas las opiniones, comentarios, ideas o sugerencia en relación a como se podría hacer el trabajo; las entrevistas a veces es la mejor forma para conocer las actividades de las empresas. La entrevista pueden descubrir rápidamente malos entendidos, falsa expectativa o incluso resistenciapotencial para las aplicaciones de desarrollo; más aún, a menudo es más fácil calendarizar una entrevista con los gerentes de alto nivel, que pedirle que llenen cuestionario.

Determinación del tipo de Entrevista

La estructura de la entrevista varia. Si el objetivo de la entrevista radica en adquirir información general, es conveniente elaborar una serie de pregunta sin estructura, con una sesión de preguntas y respuesta libres

Las entrevistas estructuradas utilizan pregunta estandarizada. El formato de respuestas para las preguntas pueden ser abierto o cerrado; las preguntas para respuestas abierta permiten a los entrevistados dar cualquier respuesta que parezca apropiado. Pueden contestar por completo con sus propias palabras. Con las preguntas para respuesta cerradas se proporcionan al usuario un conjunto de respuesta que se pueda seleccionar. Todas las personas que respondes se basan en un mismo conjunto de posible respuestas.

Los analistas también deben dividir el tiempo entre desarrollar preguntas para entrevistas y analizar respuesta. La entrevista no estructurada no requiere menos tiempos de preparación, porque no necesita tener por anticipado las palabras precisas de las preguntas. Analizar las respuestas después de la entrevista lleva más tiempo que con la entrevista estructuradas. El mayor costo radica en la preparación, administración y análisis de las entrevistas estructuradas para pregunta cerradas.

Selección de Entrevistados

Realizar entrevistas toma tiempo; por lo tanto no es posible utilizar este método para recopilar toda la información que se necesite en la investigación; incluso el analista debe verificar los datos recopilados utilizando unos de los otros métodos de recabación de datos. La entrevista se aplican en todos los niveles gerencial y de empleados y dependa de quien pueda proporcionar la mayor parte de la información útil para el estudio los analistas que estudian la administración de inventarios pueden entrevistar a los trabajadores del embarque y de recepción, al personal de almacén y a los supervisores de los diferentes turnos, es decir. Aquellas personas que realmente trabajan en el almacén, también entrevistarán a los gerentes más importante.

Realización de Entrevista

La habilidad del entrevistador es vital para el éxito en la búsqueda de hecho por medio de la entrevista. Las buenas entrevista depende del conocimientodel analista tanto de la preparación del objetivo de una entrevista específica como de las preguntas por realizar a una persona determinada.

El tacto, la imparcialidad e incluso la vestimenta apropiada ayudan a asegurar una entrevista exitosa. La falta de estos factores puede reducir cualquier oportunidad de éxito. Por ejemplo, analista que trabaja en la aplicación enfocada a la reducción de errores (captado por la gerencia de alto nivel) probablemente no tendría éxito si llegara a una oficina de gerencia de nivel medio con la presentación equivocada, ejemplo "Estamos aquí para resolver su problema".

A través de la entrevista, los analistas deben preguntarse a sí mismo las siguientes preguntas:

- ¿Qué es lo que me está diciendo la persona?
- ¿Por qué me lo está diciendo a mí ?
- ¿Qué está olvidando?
- ¿Qué espera está persona que haga yo?

¿Qué es una encuesta?

Se ha dicho que Estados Unidos ya no es una "sociedad industrial", sino una "sociedad de información". Esto es, nuestros mayores problemas y tareas ya no giran principalmente en la producción de bienes y servicios necesarios para nuestra supervivencia y comodidad.

Nuestra "sociedad", requiere un rápido y preciso flujo de información sobre las preferencias, necesidades y comportamiento de sus miembros. Es en respuesta a esta necesidad crítica de información por el gobierno, el comercio y las instituciones sociales que tanta confianza se pone en las encuestas.

Hoy en día la palabra "encuesta" se usa más frecuentemente para describir un método de obtener información de una muestra de individuos. Esta "muestra" es usualmente sólo una fracción de la población bajo estudio.

Por ejemplo, antes de una elección, una muestra de electores es interrogada para determinar cómo los candidatos y los asuntos son percibidos por el público… un fabricante hace una encuesta al mercado potencial antes de introducir un nuevo producto… una entidad del gobierno comisiona una encuesta para obtener información para evaluar legislación existente o para preparar y proponer nueva legislación.

No tan sólo las encuestas tienen una gran variedad de propósitos, sino que también pueden conducirse de muchas maneras, incluyendo por teléfono, por correo o en persona.

Aún así, todas las encuestas tienen algunas características en común.

A diferencia de un censo, donde todos los miembros de la población son estudiados, las encuestas recogen información de una porción de la población de interés, dependiendo el tamaño de la muestra en el propósito del estudio. En una encuesta bona fide, la muestra no es seleccionada caprichosamente o sólo de personas que se ofrecen como voluntarios para participar. La muestra es seleccionada científicamente de manera que cada persona en la población tenga una oportunidad medible de ser seleccionada. De esta manera los resultados pueden ser proyectados con seguridad de la muestra a la población mayor. La información es recogida usando procedimientos estandarizados de manera que a cada individuo se le hacen las mismas preguntas en mas o menos la misma manera. La intención de la encuesta no es describir los individuos particulares quienes, por azar, son parte de la muestra sino obtener un perfil compuesto de la población.

Una "encuesta" recoge información de una "muestra." Una "muestra" es usualmente sólo una porción de la población bajo estudio.

El estándar de la industria para todas las organizaciones respetables que hacen encuestas es que los participantes individuales nunca puedan ser identificados al reportar los hallazgos. Todos los resultados de la encuesta deben presentarse en resúmenes completamente anónimos, tal como tablas y gráficas estadísticas.

¿Cuán grande debe ser la muestra?

El tamaño de muestra requerido en una encuesta depende en parte de la calidad estadística necesaria para los establecer los hallazgos; esto a su vez, está relacionado en cómo esos hallazgos serán usados.

Aún así, no hay una regla simple para el tamaño de muestra que pueda ser usada en todas las encuestas. Mucho de esto depende de los recursos profesionales y fiscales disponibles. Los analistas frecuentemente encuentran que una muestra de tamaño moderado es suficiente estadística y operacionalmente. Por *ejemplo*, las muy conocidas encuestas nacionales frecuentemente usan cerca de 1,000 personas para obtener información razonable sobre actitudes y opiniones nacionales.

Cuando nos damos cuenta que una muestra apropiadamente seleccionada de sólo 1,000 individuos puede reflejar varias características de la población total, es fácil apreciar el valor de usar encuestas para tomar decisiones informadas en una sociedad compleja como la nuestra. Las encuestas proveen medios rápidos y económicos de determinar la realidad de nuestra economía y sobre los conocimientos, actitudes, creencias, expectativas y comportamientos de las personas.

¿Quién lleva a cabo las Encuestas?

Todos conocemos sobre las encuestas de opinión pública que son reportadas por los medios informativos. Por *ejemplo*, la Encuesta Gallup y la Encuesta Harris emiten informes periódicos describiendo la opinión pública nacional sobre una amplia gama de asuntos corrientes. Encuestas estatales y en las áreas metropolitanas, frecuentemente con el apoyo económico de algún periódico o estación de televisión local, se reportan regularmente en muchos lugares. Las cadenas mayores de radio y televisión, así como revistas nacionales de noticias también llevan a cabo encuestas e informan sus resultados A pesar de esto, la gran mayoría de las encuestas no son de opinión pública. La mayoría están dirigidas a un propósito administrativo, comercial o científico. La gran variedad de asuntos con los que tratan las encuestas se puede ilustrar con la siguiente lista de usos reales:

- Las cadenas mayores de televisión confían en encuestas que le dicen cuántas y qué tipo de personas ven sus programas.

- Statistics Canadá lleva a cabo encuestas continuas de panel sobre niños (y sus familias) para estudiar sus necesidades educativas y otras.
- Es una buena práctica nunca identificar los participantes individuales. El tamaño de la muestra depende de las metas estadísticas y de los recursos disponibles para la encuesta.
- Los fabricantes de automóviles usan encuestas para determinar cuán satisfechos están las personas con sus autos.
- El Negociado del Censo de los Estados Unidos lleva a cabo encuestas cada mes para obtener información sobre empleo y desempleo en la nación.
- La Agencia para la Política e Investigación sobre Cuidado de Salud de los Estados Unidos auspicia una encuesta periódica para determinar cuanto dinero está gastando la gente en los distintos tipos de cuidado médico.
- Las autoridades de transportación local conducen encuestas para obtener información
- sobre los hábitos de viaje y transportación de las personas.
- Las revistas y revistas profesionales usan encuestas para conocer qué leen sus suscriptores.
- Se llevan a cabo encuestas para conocer quien usa nuestros parques nacionales y
- otras facilidades recreativas.

Las encuestas proveen una fuente importante de conocimiento científico básico. Economistas, sicólogos, profesionales de la salud y sociólogos llevan a cabo encuestas para estudiar materias tales como los patrones de ingreso y gastos en los hogares, las raíces del prejuicio étnico o racial, las implicaciones de los problemas de salud en la vida de las personas, comparando el comportamiento electoral y los efectos sobre la vida familiar de mujeres que trabajan fuera del hogar.

→Organización de los datos

Una vez tenemos todos los datos queda unificarlos y organizarlos. Como en todo, necesitamos introducir los datos en programa o plataforma que luego nos permita calcular determinadas métricas y analizar correctamente. Para ello, siempre es conveniente organizar los datos. Es más, a veces necesitaremos recoger datos de diferentes bases de datos que ofrecen formatos de archivos diferentes y será necesario unificarlo todo en el mismo formato.

Vamos a considerar por separado los caso de datos cualitativos y cuantitativos.

Organización de los datos cualitativos:

En este caso la agrupación de los datos es muy sencilla y se hace de acuerdo a las modalidades que presente las variable en estudio. mediante un conteo se determina el número de datos (también llamado frecuencia) correspondiente a las diferentes categorías de la variable. este procedimiento es valido para cualquier cantidad de datos.

Ejemplo de Organizacion de los datos cualitativos.

1) En un estudio sobre las personas que ejercen cargos directivos en una empresa, se realizaron 15 entrevistas y en relación al Genero se obtuvo la siguiente información:

f,f,m,m,f,m,m,m,f,f,m,f,f,m,f

Agrupando los datos de acuerdo a su categoría se obtiene.

Genero	Personas
Masculino	7
Femenino	8
Total	15

El procedimiento utilizado es intuitivo y una vez resumida la información de esta manera se facilita la interpretación.

Organización de los datos cuantitativos:

para organizar y agrupar datos de tipo cuantitativo discretos o continuos, se utiliza un procedimiento similar, pero más laborioso, al utilizado con los datos cualitativos.

vamos a utilizar la información correspondiente a la edad de 15 estudiantes. 12,14,10,15,16,12,14,18,20,19,19,18,12,15,17

un primer intento de organizar esos datos puede consistir en ordenarlos de menor a mayor tal como se presenta a continuación 10,12,12,12,14,14,15,15,16,17,18,18, 19,19,20

este ordenamiento de los datos nos permite saber que la edad mínima es 10 y la máxima es 20.

otra cosa que podemos hacer, dado que algunos datos se repiten, es agruparlos formando una columna donde aparezcan los valores diferentes de la edad, ordenados de menor a mayor y al lado de cada edad el numero de niños que tienen esa edad.

Edad	estudiantes
10	1
12	3
14	2
15	2
16	1
17	1
18	2
19	2
20	1

total	15

→Análisis de los datos

Una vez planteado el problema, recolectados los datos y organizados podemos analizarlos de forma eficaz. Dependiendo del planteamiento del problema, se realizará un tipo de análisis u otro. Por ejemplo, si queremos saber si dos variables son dependientes, podríamos utilizar un análisis de cointegración. Mientras que si lo que queremos estudiar es la dispersión total de un activo financiero, calcularemos el rango estadístico.
El análisis de datos es la ciencia que se encarga de examinar un conjunto de datos con el propósito de sacar conclusiones sobre la información para poder tomar decisiones, o simplemente ampliar los conocimientos sobre diversos temas.

El análisis de datos consiste en someter los datos a la realización de operaciones, esto se hace con la finalidad de obtener conclusiones precisas que nos ayudarán a alcanzar nuestros objetivos, dichas operaciones no pueden definirse previamente ya que la recolección de datos puede revelar ciertas dificultades.

Actualmente, muchas industrias usan el análisis de datos para sacar conclusiones y decidir acciones a implementar. Cabe mencionar que la ciencia también usa el análisis de datos para comprobar o descartar teorías o modelos existentes.

Daniel Burrus, asesor de negocios y orador de temas empresariales y de innovación dice en referencia al análisis de datos: "Mucho de esto ayudará a los humanos a trabajar más, de forma inteligente y rápido, porque tenemos datos sobre todo lo que ocurre".

Usos del análisis de datos:

El análisis de datos se utiliza en muchas industrias, independientemente del ramo, nos da las bases para tomar o no una decisión o cerciorarnos si una hipótesis es cierta o no.

1. **Mercadotecnia:** el análisis de datos se ha usado principalmente para predecir el comportamiento de los consumidores, incluso para poder calificarlo. Conoce cómo hacer un análisis de datos para tu campaña de marketing.
2. **Recursos Humanos:** el análisis de datos también es muy útil dentro de las empresas para mantener un buen clima laboral , y fuera de ella, calificando empleados potenciales.
3. **Académicos:** Al igual que las empresas el análisis de datos también está presente en la educación, sirve para seleccionar a los alumnos de nuevo ingreso y para medir el rendimiento de los estudiantes.

Técnicas de análisis de datos:

Si queremos datos útiles, debemos analizarlos. Para ello debemos recurrir a diversas técnicas que dependen del tipo de información que se esté recopilando, por lo que es importante tener definida la técnica a utilizar antes de implementarla.

- **Análisis de datos cualitativo:** Los datos cualitativos se presentan de manera verbal (en ocasiones en gráficas). Se basa en la interpretación. Las formas más comunes de obtener esta información es a través de entrevistas abiertas, grupos de discusión y grupos de observación, donde los investigadores generalmente analizan patrones en las observaciones durante toda la fase de recolección de datos.
- **Análisis de datos cuantitativos:** Los datos cuantitativos se presentan en forma numérica. Se basa en resultados tangibles.
  El análisis de datos se centra en llegar a una conclusión basada únicamente en lo que ya es conocido por el investigador. La forma en que recopila sus datos debe relacionarse con la forma en que está planeando analizarla y utilizarla, también hay que asegurarse de recopilar información precisa en la que puedas confiar, para ello existen muchas técnicas de recolección de datos.

  La técnica más usada por los expertos son las encuestas online, ya que puede traer grandes beneficios como la reducción de tiempo y dinero.

En QuestionPro contamos con una herramienta de análisis de datos precisa que te ayudará a tomar mejores decisiones de forma profesional.

Ventajas del análisis de datos

- Capacidad para tomar decisiones de negocios más rápidas e informadas, respaldadas por hechos.
- Ayuda a las empresas a identificar problemas de rendimiento que requieren algún tipo de acción.
- Comprensión más profunda de los requisitos de los clientes, lo que, a su vez, crea mejores relaciones comerciales.
- Mayor conciencia del riesgo, permitiendo la implementación de medidas preventivas.
- Puede verse de forma visual, lo que permite tomar decisiones más rápidas y mejores.
- Puede proporcionar a una empresa una ventaja sobre sus competidores.
- Mejor conocimiento del desempeño financiero del negocio.
- Se ha demostrado que reduce los costos y, por lo tanto, aumenta los beneficios.

Tipos de análisis de datos

	Tipos de datos	Análisis	Ejemplos
Cualitativo	Se centra en las opiniones, actitudes y creencias.	Preguntas y respuestas a preguntas como: ¿Por qué?¿Cómo?	Paneles en donde se da una discusión y se entrevista a consumidores sobre lo que les agrada o no

			del lugar.
Cuantitativo	Se centra en los datos duros e información que pueda contabilizarse.	Se obtiene mediante preguntas similares a: ¿Cuántos?¿Quién?¿Con qué frecuencia?¿Dónde?	Encuestas enfocadas a medir las ventas, tendencias, reportes o percepciones.

Pasos para hacer un análisis de datos

Paso 1: Define tus preguntas

Comienza seleccionando las preguntas correctas. Las preguntas deben ser medibles, claras y concisas. Diseñe sus preguntas para calificar o descalificar posibles soluciones a su problema u oportunidad específicos.

Paso 2: Establece prioridades de medición

Este paso se divide en dos sub-pasos:

A) Decide qué medir: Analiza qué tipo de datos necesitas.

B) Decidir cómo medirlo: Pensar en cómo medir sus datos es igual de importante, especialmente antes de la fase de recolección de datos, porque su proceso de medición respalda o desacredita su análisis más adelante.

Paso 3: Recolecta datos

Con la pregunta claramente definida y sus prioridades de medición establecidas, ahora es el momento de recopilar sus datos. A medida que recopiles y organices los datos, recuerda tener en cuenta estos puntos importantes:

Antes de recopilar nuevos datos, determina qué información podría recopilarse de las bases de datos o fuentes existentes.

Determina de antemano un sistema de almacenamiento y asignación de nombres de archivos para ayudar a todos los miembros del equipo a colaborar. Este proceso ahorra tiempo y evita que los miembros del equipo recopilen la misma información dos veces.

Si necesita recopilar datos mediante encuestas, observación o entrevistas, desarrolla con anticipación un cuestionario para asegurar la consistencia y ahorrar tiempo.

Mantén los datos recopilados organizados en un registro con las fechas de recopilación y agrega cualquier nota de origen a medida que avanza.

Quizá te interese leer: ¿Qué es la investigación primaria y secundaria?

Paso 4: Analiza los datos

Una vez que haya recopilado los datos correctos para responder a su pregunta del Paso 1, es el momento de realizar un análisis más profundo de la información. Encuentra relaciones, tendencias, ordena y filtra tu información de acuerdo a las variables. A medida que haces un análisis de los datos encontrarás que tienes los datos exactos que necesitas.

Te recomendamos leer: ¿Cómo analizar los datos de una investigación?

Paso 5: Interpretar los resultados

Después de analizar los datos y posiblemente realizar más investigaciones, finalmente es tiempo de interpretar los resultados. Hazte estas preguntas clave:

- ¿Responden los datos a tu pregunta original? ¿Cómo?
- ¿Los datos te ayudan a defender cualquier objeción? ¿Cómo?
- ¿Hay alguna limitación en las conclusiones, algún ángulo que no hayas considerado?

Si tu interpretación de los datos se sostiene bajo todas estas preguntas y consideraciones, entonces es probable que hayas llegado a una conclusión productiva. El único paso restante es utilizar los resultados del proceso de análisis de datos para decidir cómo vas a actuar.

Con estos cinco pasos en tu proceso de análisis de datos, tomarás mejores decisiones para tu negocio ya que tus elecciones están respaldadas por datos que han sido robustamente recopilados y analizados.

→Interpretación de los datos

Por último, pero no por ello menos importante, tenemos la interpretación de los datos. De nada sirve realizar todas las fases del proceso estadístico correctamente si al final la interpretación es errónea. Esto es debido a que si la interpretación es errónea, entonces las decisiones tendrá un efecto no deseado. Por ejemplo, imaginemos que realizamos un estudio sobre la variabilidad de las ventas de una empresa. Si una vez obtenemos los resultados resulta que hay mucha dispersión, conviene reducirla y nosotros interpretamos que no, esto podría afectar negativamente a la empresa.
Una vez que se ha concluido con la recolección, codificación y tabulación de los datos, sigue la etapa de análisis y luego de interpretación de los datos.

Interpretación cuantitativa de datos

Si la interpretación de los datos cuantitativos se pudiera resumir en una palabra (y realmente no puede) esa palabra sería "numérica".

Hay pocas certezas en lo que respecta al análisis de datos, pero puede estar seguro de que si la investigación es interesante no tiene números involucrados, no es una investigación cuantitativa.

El análisis cuantitativo se refiere a un conjunto de procesos mediante los cuales se analizan los datos numéricos. En la mayoría de los casos, implica el uso de modelos estadísticos como la desviación estándar, la media y la mediana.

Beneficios de la Interpretación de datos

¿Cuáles son los beneficios de la interpretación de datos? ¿Por qué todas las industrias participan en la investigación y análisis de datos? Es una pregunta básica, pero que a menudo no recibe la atención adecuada.

El objetivo de la recopilación e interpretación es adquirir información útil y utilizable y tomar las decisiones más informadas posibles.

Desde empresas, hasta educación superior, hasta recién casados que investigan su primer hogar, la recopilación e interpretación de datos puede proporcionar beneficios ilimitados para una amplia gama de instituciones y particulares.

El análisis e interpretación de los datos, independientemente del método y del estado cualitativo / cuantitativo, pueden incluir las siguientes características:

- Identificación de datos y explicación
- Comparación y contraste de datos
- Identificación de datos atípicos
- Predicciones futuras

El análisis e interpretación de datos, al final, ayuda a mejorar los procesos e identificar problemas.

Beneficios Comerciales de la interpretación de datos

Toma de decisiones informada: una decisión es tan buena como el conocimiento que la formó.
La toma de decisiones informadas sobre los datos tiene el potencial de diferenciar a los líderes de la industria del resto del mercado.

Los estudios han demostrado que las empresas en el tercio superior de sus industrias son, en promedio, un 5% más productivas y un 6% más rentables cuando implementan procesos informados de toma de decisiones.

Las acciones más decisivas surgirán solo después de que se haya identificado un problema o se haya definido un objetivo.

El análisis de los datos debe incluir la identificación, el desarrollo y la recopilación de datos seguidos de la comunicación de datos.

Identificación de tendencias: los conocimientos de datos proporcionan conocimiento y el conocimiento es poder.
Los conocimientos obtenidos de los análisis de datos del mercado y del consumidor tienen la capacidad de servir para inferir información de segmentos de mercado similares.

Eficiencia en costos: la implementación adecuada de los procesos de análisis de datos puede proporcionar a las empresas profundas ventajas de costos dentro de sus industrias.
Un reciente estudio de datos realizado por Deloitte demuestra vívidamente esto al encontrar que el ROI del análisis de datos se basa en reducciones de costos eficientes.

A menudo, este beneficio se pasa por alto porque, en general, se considera que ganar dinero es más "sexy" que ahorrar dinero.

Sin embargo, los análisis de datos sólidos tienen la capacidad de alertar a la gerencia de las oportunidades de reducción de costos sin ningún esfuerzo significativo por parte del capital humano.

→BIBLIOGRAFIA:

1.-ALEA, V. et al. (2006) *Estadística Aplicada a les Ciències Econòmiques i Socials.* Barcelona: Edicions McGraw-Hill EUB.

2.-CANAVOS, G. (2008) *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México: McGraw-Hill.

3.-DURA PEIRó, J. M. y LóPEZ CUñAT, J.M. (2006) *Fundamentos de Estadística. Estadística Descriptiva y Modelos Probabilísticos para la Inferencia*. Madrid: Ariel Editorial.

4.-ESCUDER, R. y SANTIAGO, J. (2010) *Estadística aplicada. Economía y Ciencias Sociales.* Valencia: Tirant lo Blanch.

5.-FERNáNDEZ CUESTA, C., y FUENTES GARCíA, F. (2015) *Curso de Estadística Descriptiva. Teoría y Práctica.* Madrid: Ariel.

6.http://paginas.facmed.unam.mx/deptos/sp/wpcontent/uploads/2015/11/03REYNAGA1.pdf

1.2 DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

Las tablas de distribución de frecuencias se utilizan cuando se recolectan datos, con ellas se pueden representar los datos de manera que es más fácil analizarlos.

Se pueden elaborar tablas de distribución de frecuencias para datos no agrupados y para datos agrupados. Estas últimas se utiliza cuando se tienen muchos datos.

Para elaborar tablas de distribuciones de frecuencia se debe tener en cuenta lo siguiente: Cuando hay muchos datos se agrupan en clases. Esto consiste en agrupar los datos en una distribución de frecuencias, que puede definirse como una ordenación o arreglo de datos en clases o categorías que muestran para cada una de ellas, el número de elementos que contiene, denominada frecuencia.

Clase es cada uno de los grupos en que se dividen los datos. Para determinar cuántas clases crear, se puede utilizar la siguiente fórmula (fórmula de Sturges)

Número de clases = 1 + 3,322 log n   donde n es el número total de datos.

Si al aplicar la fórmula se obtiene un número decimal, se aproxima al siguiente entero.

El intervalo de clase o el ancho de la clase (tamaño de la clase) es el espacio que hay entre el límite superior y el límite inferior de la clase, los cuales corresponden a los valores extremos de la clase. Para obtener el ancho de clase se utiliza la siguiente fórmula:

Ancho de clase = (dato superior – dato inferior)/ número de clases

La frecuencia absoluta es el número de veces que se repite cada dato. Cuando se agrupan los datos, es el número de datos que tiene cada clase. Se simboliza con f_j.

La marca de clase es el punto medio de la clase. Se obtiene dividiendo entre dos la suma de los valores extremos de cada clase.

El rango es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor en estudio de una distribución de datos.

La frecuencia absoluta acumulada es la frecuencia total hasta el límite superior de cada clase. Se simboliza con *F i*.

La frecuencia relativa de un dato da información sobre qué parte de la población o de la muestra en estudio corresponde a la característica analizada. Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de datos y se puede expresar como una fracción, como un decimal o como un porcentaje. Se simboliza con *f i / n* donde n es el número de datos.

La frecuencia acumulada relativa es la frecuencia relativa total hasta el límite superior de cada clase. Se simboliza con F j / n donde n es el número total de datos.

Límites de clase

Los límites de clase son los valores que separan a una clase en particular de la anterior y de la siguiente.

Las clases de la distribución pueden escribirse en forma de límites indicados o de límites reales. Así por ejemplo si se tiene la siguiente tabla referente a la estatura de 50 obreros en pulgadas:

Clases	Frecuencias
50,5 - 53,5	1

53,5 - 56,5	2
56,5 – 59,5	6
59,5 – 62,5	11
62,5 – 65,5	16
65,5 – 68,5	9
68,5 – 71,5	4
71,5 – 74,5	1
TOTAL	50

En el ejemplo anterior los límites indicados son 51 – 53, 54 – 56, etc. y los límites reales son: 50,5 – 53,5; 53,5 – 56,5; etc.

Es importante saber establecer los límites reales, pues con base en ellos se calcula el punto medio, magnitud que se usará para cálculos posteriores.

No hay ningún problema en establecer límites reales en variables discretas, pues en este caso los límites dados y los reales coinciden, pero si lo hay cuando se trata de una variable continua. Por ejemplo, las observaciones que están entre dos límites indicados, ¿dónde se clasifican?, ¿cómo interfiere el modo de redondeo de los datos?

Para ilustrar considérese una distribución de frecuencias de personas según edad, en años, con los siguientes límites indicados: 10 – 14, 15 – 19, 20 – 24, etc. ¿Cuáles son los límites reales de esta distribución?

Límites reales para cada tipo de redondeo

LÍMITES INDICADOS	MÉTODO USUAL (Cumpleaños más cercano)	HACIA ABAJO (Edad cumplida)	HACIA ARRIBA (Próximo cumpleaños)
10 – 14	9,5 – 14,5	10 a menos de 15	más de 9 a 14
15 – 19	14,5 – 19,5	15 a menos de 20	más de 14 a 19
20 – 24	19,5 – 24,5	20 a menos de 25	más de 19 a 24
etc.	etc.	etc.	etc.

Ejemplo:

Suponga que un investigador desea determinar cómo varía el peso de un grupo de estudiantes de primer semestre de una universidad. Selecciona una muestra de 50 estudiantes y registra sus pesos en kilogramos. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

65	63	65	63	69	67	53	58	60	61
64	65	64	72	68	66	55	57	60	62
64	65	64	71	68	66	56	59	61	62
63	65	63	70	67	66	57	59	61	62
64	64	63	69	67	66	58	60	61	62

Este diagrama facilita determinar la cantidad de veces que se repite un dato y los valores de los datos con el fin de escribirlos de manera ordenada en la tabla.

Para construir la tabla de datos no agrupados se debe calcular primero lo siguiente:

Número de clases

$k=1+3,322\log(n)=1+3,322\log(50)=6,64\approx 7k=1+3,322\log(n)=1+3,322\log(50)=6,64\approx 7$

Rango

$R=xn-x1=72-53=19R=xn-x1=72-53=19$

Amplitud de clase

$I=Rk=197=2,71\approx 3I=Rk=197=2,71\approx 3$

Punto medio: mi es el valor central de la clase. Se obtiene calculando el promedio de los límites reales, sumando al límite real inferior el límite real superior y dividiendo por dos.

Frecuencia absoluta. Se define como el número de elementos u observaciones pertenecientes a una misma clase.

Frecuencia relativa: Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de observaciones. Indica la importancia relativa de la clase.

Frecuencias acumuladas: Es la suma de las frecuencias absolutas o relativas en sentido ascendente o descendente según se quieran acumular "hacia arriba" o "hacia abajo"

Al construir la tabla de datos agrupados con la información del ejemplo, se tiene:

Tabla de datos agrupados

	Punto medio	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Pesos	m_i	f_i	F_i	fr_i	Fr_i

(Kg)					
53 - 55	54	2	2	4,00%	4,00%
56 - 58	57	5	7	10,00%	14,00%
59 - 61	60	9	16	18,00%	32,00%
62 - 64	63	15	31	30,00%	62,00%
65 - 67	66	12	43	24,00%	86,00%
68 - 70	69	5	48	10,00%	96,00%
71 - 73	72	2	50	4,00%	100,00%
		50		100,00%	

→BIBLIOGRAFIA:

1. FREEDMAN, D., et al. (2001) *Estadística.* Barcelona: A.Bosch Ed.
2. FREEDMAN, D., et al. (2015) *Estadística.* Barcelona: A.Bosch Ed.
3. FREIXA, M., et al. (2012) *Análisis exploratorio de datos: Nuevas técnicas estadísticas*. Barcelona: PPU.
4. GUJARATI, D. (2007) *Econometría Básica.* Bogotá: McGraw-Hill.
5. KMENTA, J (2011) *Elementos de Econometría.* Barcelona: Vicens Universidad.

1.3 PRESENTACION GRAFICA

Toda investigación de índole científico se apoya y base en un conjunto de datos debidamente analizado e interpretado. Para llegar a un punto en que podamos extraer relaciones de causalidad o de correlación es necesario observar múltiples observaciones de manera que se pueda falsear y comprobar la existencia de la misma relación en diferentes casos o en el mismo sujeto a través del tiempo. Y una vez hechas dichas observaciones hace falta tener en cuenta aspectos como la frecuencia, la media, la moda o la dispersión de los datos obtenidos.

Con la finalidad de facilitar la comprensión y el análisis tanto por parte de los mismos investigadores como de cara a mostrar la variabilidad de los datos y de donde salen las conclusiones al resto del mundo, es de gran utilidad emplear elementos visuales de fácil interpretación: las gráficas o gráficos.

En función de lo que queramos mostrar, podemos emplear diversos tipos de gráficas. En este artículo veremos diferentes tipos de gráficas que se emplean en investigación a partir del uso de la estadística.

El gráfico

A un nivel estadístico y matemático, denominados gráfica a **aquella representación visual a partir de la cual pueden representarse e interpretarse** valores generalmente numéricos. De entre las múltiples informaciones extraíbles de la observación de la gráfica podemos encontrar la existencia de relación entre variables y el grado en que se da, las frecuencias o la proporción de aparición de determinadas valores.

Esta representación visual sirve de apoyo a la hora de mostrar y comprender de manera sintetizada los datos recabados durante la investigación, de manera que puede tanto los investigadores que llevan a cabo el análisis como otros **puedan comprender los resultados y resulte sencillo utilizarlo como referencia**, como información a tener en cuenta o como punto de contraste ante la realización de nuevas investigaciones y metaanálisis.

Tipos de gráficas

Existen muy diversos tipos de gráficas, generalmente aplicándose unas u otras en función de lo que se pretenda representar o simplemente de las preferencias del autor. A continuación indicamos algunas de las más conocidas y comunes.

Gráfico de barras

El más conocido y utilizado de todos los tipos de gráficos es el gráfico o diagrama de barras. En éste, se presentan los datos en forma de barras contenidas en dos ejes cartesianos (coordenada y abscisa) que indican los diferentes valores. **El aspecto visual que nos indica los datos es la longitud de dichas barras**, no siendo importante su grosor.

Generalmente se emplea para representar la frecuencia de diferentes condiciones o variables discretas (por ejemplo la frecuencia de los diferentes colores del iris en una muestra determinada, que solo pueden ser unos valores concretos). Únicamente se observa una variable en las abscisas, y las frecuencias en las coordenadas.

Gráfico circular o por sectores

El también muy habitual gráfico en forma de "quesito", en este caso la representación de los datos se lleva a cabo mediante la división de un círculo en tantas partes como valores de la variable investigada y teniendo cada parte **un tamaño proporcional a su frecuencia dentro del total de los datos**. Cada sector va a representar un valor de la variable con la que se trabaja.

Este tipo de gráfico o diagrama es habitual cuando se está mostrando la proporción de casos dentro del total, utilizando para representarlo valores percentuales (el porcentaje de cada valor).

Histograma

Aunque a simple vista muy semejante al gráfico de barras, el histograma es uno de los tipos de gráfica que a nivel estadístico resulta más importante y fiable. En esta ocasión, también se utilizan barras para indicar a través de ejes cartesianos la frecuencia de determinados valores, pero en vez de limitarse a establecer la frecuencia de un valor concreto de la variable evaluada refleja todo un intérvalo. Se observa pues un rango de valores, que además **podrían llegar a reflejar intervalos de diferentes longitudes**.

Ello permite observar no solo la frecuencia sino también la dispersión de un continuo de valores, lo que a su vez puede ayudar a inferir la probabilidad. Generalmente se utiliza ante variables continuas, como el tiempo.

Gráfico de líneas

En este tipo de gráfico se emplean líneas para **delimitar el valor de una variable dependiente respecto a otra independiente**. También puede usarse para comparar los valores de una misma variable o de diferentes investigaciones utilizando el mismo gráfico (usando diferentes líneas). Es usual que se emplee para observar la evolución de una variable a través del tiempo

Gráfico de dispersión

El gráfico de dispersión o gráfico xy es un tipo de gráfico en el cual mediante los ejes cartesianos se representa en forma de puntos todos los datos obtenidos mediante la observación. **Los ejes x e y muestran cada uno los valores de una variable dependiente y otra independiente** o dos variables de la que se esté observando si presentan algún tipo de relación.

Los puntos representados el valor reflejado en cada observación, lo que a nivel visual dejará ver una nube de puntos a través de los cuales podemos observar el nivel de dispersión de los datos.

Se puede observar si existe o no una relación entre las variables mediante el cálculo. Es el procedimiento que se suele usar, por ejemplo, para establecer la existencia de rectas de regresión lineal que permita determinar si hay relación entre variables e incluso el tipo de relación existente.

Gráfico de caja y bigotes

Los gráficos de caja son uno de los tipos de gráficas que tienden a utilizarse de cara a observar la dispersión de los datos y cómo éstos agrupan sus valores. Se parte del cálculo de los cuartiles, los cuales son los valores que p**ermiten dividir los datos en cuatro partes iguales**. Así, podemos encontrar un total de tres cuartiles (el segundo de los cuales se corresponderían con la mediana de los datos) que van a configurar la "caja " en cuestión. Los llamados bigotes serían la representación gráfica de los valores extremos.

Este gráfico **es útil a la hora de evaluar intervalos**, así como de observar el nivel de dispersión de los datos a partir de los valores de los cuartiles y los valores extremos.

Gráfico de áreas

En este tipo de gráfico se observa, de manera semejante lo que ocurre con los gráficos de líneas, la relación entre variable dependiente e independiente. Inicialmente **se hace una línea que une los puntos que marcan los diferentes valores de la variable** medida, pero también se incluye todo lo situado por debajo: este tipo de gráfica nos permite ver la acumulación (un punto determinado incluye a los situados por debajo).
A través de él se pueden medir y comparar los valores de diferentes muestras (por ejemplo, comparar los resultados obtenidos por dos personas, compañías, países, por dos registros de un mismo valor….). Los diferentes resultados pueden apilarse, observándose fácilmente las diferencias entre las diversas muestras.

Pictograma

Se entiende por pictograma a un gráfico en el que, en vez de representar los datos a partir de elementos abstractos como barras o círculos, **se emplean elementos propios del tema que se está investigando**. De este modo se hace más visual. Sin embargo, su funcionamiento es semejante al del gráfico de barras, representando frecuencias de la misma manera

Cartograma

Este gráfico resulta de utilidad en el terreno de la epidemiología, indicando las zonas o áreas geográficas en las que aparece con mayor o menor frecuencia un determinado valor de una variable. Las frecuencias o rangos de frecuencias se indican mediante el uso del color (requiriéndose una leyenda para comprenderse) o el tamaño

→ BIBLIOGRAFIA:

Martínez-González, M.A.; Faulin, F.J. y Sánchez, A. (2006). Bioestadística amigable, 2ª ed. Diaz de Santos, Madrid.

1.4 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las características globales de un conjunto de datos estadísticos pueden resumirse mediante una serie de cantidades numéricas representativas llamadas parámetros estadísticos. Entre ellas, las medidas de tendencia central, como la media aritmética, la moda o la mediana, ayudan a conocer de forma aproximada el comportamiento de una distribución estadística.

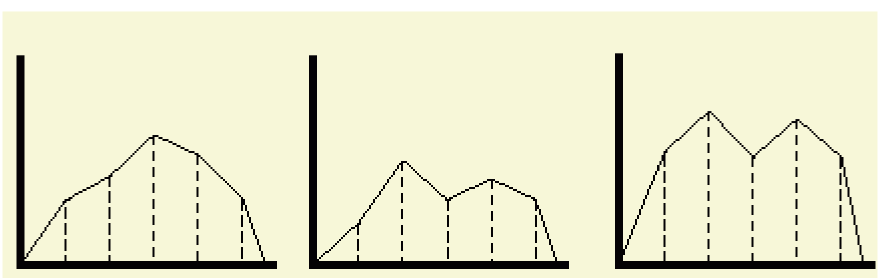
Medidas de centralización

Se llama medidas de posición, tendencia central o centralización a unos valores numéricos en torno a los cuales se agrupan, en mayor o menor medida, los valores de una variable estadística. Estas medidas se conocen también como promedios.

Para que un valor pueda ser considerado promedio, debe cumplirse que esté situado entre el menor y el mayor de la serie y que su cálculo y utilización resulten sencillos en términos matemáticos.

Se distinguen dos clases principales de valores promedio:

- Las medidas de posición centrales: medias (aritmética, geométrica, cuadrática, ponderada), mediana y moda.
  ñLas medidas de posición no centrales: entre las que destacan especialmente los cuantiles.



Las medidas de centralización son parámetros representativos de distribuciones de frecuencia como las que ilustra la imagen.

Media aritmética

Se define media aritmética de una serie de valores como el resultado producido al sumar todos ellos y dividir la suma por el número total de valores. La media aritmética se expresada como $\bar{x}$.

Dada una variable x que toma los valores x_1, x_2, ..., x_n, con frecuencias absolutas simbolizadas por f_1, f_2, ..., f_n, la media aritmética de todos estos valores vendrá dada por:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n$$

Media ponderada

En algunas series estadísticas, no todos los valores tienen la misma importancia. Entonces, para calcular la media se ponderan dichos valores según su peso, con lo que se obtiene una media ponderada.

Si se tiene una variable con valores x_1, x_2, ..., x_n, a los que se asigna un peso mediante valores numéricos p_1, p_2, ..., p_n, la media ponderada se calculará como sigue:

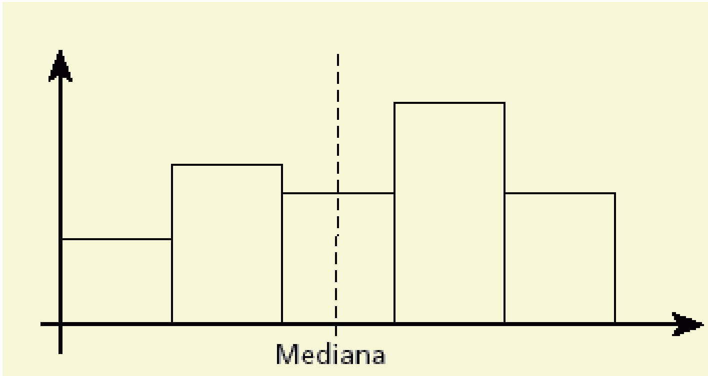
$$\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n$$

Mediana

La media aritmética no siempre es representativa de una serie estadística. Para complementarla, se utiliza un valor numérico conocido como mediana o valor central.

Dado un conjunto de valores ordenados, su mediana se define como un valor numérico tal que se encuentra en el centro de la serie, con igual número de valores superiores a él que inferiores. Normalmente, la mediana se expresa como Me.

La mediana es única para cada grupo de valores. Cuando el número de valores ordenados (de mayor a menor, o de menor a mayor) de la serie es impar, la mediana corresponderá al valor que ocupe la posición (n + 1)/2 de la serie. Si el número de valores es par, ninguno de ellos ocupará la posición central. Entonces, se tomará como mediana la media aritmética entre los dos valores centrales.



Determinación de la mediana de una serie de valores.

Moda

En una serie de valores a los que se asocia una frecuencia, se define moda como el valor de la variable que posee una frecuencia mayor que los restantes. La moda se simboliza normalmente por Mo.

Un grupo de valores puede tener varias modas. Una serie de valores con sólo una moda se denomina unimodal; si tiene dos modas, es bimodal, y así sucesivamente.

→BIBLIOGRAFIA:

1.-MARTíN PLIEGO, F. (1994) *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*. (Teoría y Práctica) Madrid: AC.

2.-MARTíN PLIEGO, F. y RUIZ-MAYA, L. (1995) *Estadística I: Probabilidad*. Madrid: AC.

3.-MARTíN PLIEGO, F. y RUIZ-MAYA, L. (1995) *Estadística II: Inferencia*. Madrid: AC.

1.5- MEDIDAS DE DISPERCION

Las medidas de tendencia central ofrecen una idea aproximada del comportamiento de una serie estadística. No obstante, no resultan suficientes para expresar sus características: una misma media puede provenir de valores cercanos a la misma o resultar de la confluencia de datos estadísticos enormemente dispares. Para conocer en que grado las medidas de tendencia central son representativas de la serie, se han de complementar con medidas de dispersión como la varianza o la desviación típica.

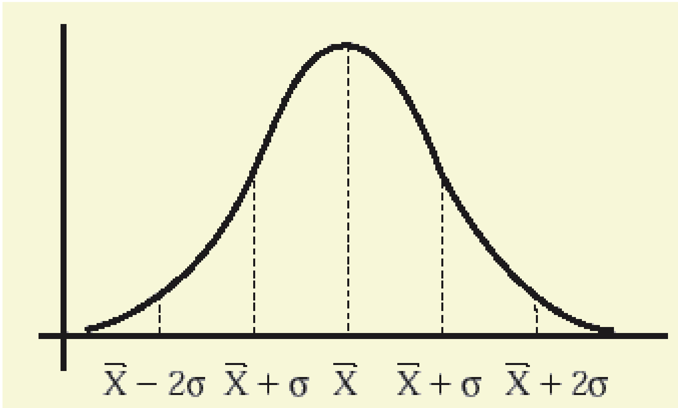
Concentración y dispersión

Las medidas de centralización ayudan a determinar el «centro de gravedad» de una distribución estadística. Para describir el comportamiento general de la serie se necesita, sin embargo, una información complementaria para saber si los datos están dispersos o agrupados.

Así, las medidas de dispersión pueden definirse como los valores numéricos cuyo objeto es analizar el grado de separación de los valores de una serie estadística con respecto a las medidas de tendencia central consideradas.

Las medidas de dispersión son de dos tipos:

- Medidas de dispersión absoluta: como recorrido, desviación media, varianza y desviación típica, que se usan en los análisis estadísticos generales.
- Medidas de dispersión relativa: que determinan la dispersión de la distribución estadística independientemente de las unidades en que se exprese la variable. Se trata de parámetros más técnicos y utilizados en estudios específicos, y entre ellas se encuentran los coeficientes de apertura, el recorrido relativo, el coeficiente de variación (índice de dispersión de Pearson) y el índice de dispersión mediana.



La distribución normal, o campana de Gauss, es una función simétrica (con la media aritmética en el centro de la serie) con un grado de dispersión bajo (la mayoría de los valores están comprendidos dentro del valor de la desviación típica).

Recorrido

La medida de dispersión más inmediata es el recorrido de la distribución estadística, también llamado rango o amplitud. Dada una serie de valores x_1, x_2, ..., x_n, su recorrido es la diferencia aritmética entre el máximo y el mínimo de estos valores:

$$Re = x_i\ (\text{máx}) - x_i\ (\text{mín}),\ \text{siendo}\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Desviación media

Como medida de dispersión más frecuentemente utilizada, la desviación media se define como la media aritmética de los valores absolutos de la desviación de cada valor de la variable con respecto a la media. Su formulación matemática es la siguiente:

$$DM = \frac{f_1\left|x_1 - \overline{x}\right| + f_2\left|x_2 - \overline{x}\right| + \ldots + f_n\left|x_n - \overline{x}\right|}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = $$
$$= \frac{\sum f_i \left|x_i - \overline{x}\right|}{\sum f_i}\ \text{con}\ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Varianza y desviación típica

La desviación media no siempre suministra una idea clara del grado de separación entre los valores de una variable estadística. Para estudios científicos, se prefiere utilizar una pareja de parámetros relacionados que se conocen como varianza y desviación típica.

La varianza se define como el cociente entre la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable y el número de datos del estudio. Matemáticamente, se expresa como:

$$V = \frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n(x_n - \overline{x})^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} =$$
$$= \frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i} \text{ con } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Por su parte, la desviación típica, simbolizada por s, se define sencillamente como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}}$$

La varianza y la desviación típica, cada una con su respectivo valor, se usan indistintamente en los estudios estadísticos.

→BIBLIOGRAFIA

1.-MARTíN-GUZMáN, P. y MARTíN PLIEGO, F. (1985) *Curso Básico de Estadística Económica*. Madrid: AC.

2.-MENDENHALL, W., et al. (1994) *Estadística Matemática con Aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

3.-MONTIEL, A.M., RIUS, F. y BARóN, F.J. (1997) *Elementos Básicos de Estadística Económica y Empresarial*. Madrid: Prentice Hall.

1.6- TEOREMA DE CHEBYSHEV

El **teorema de Chebyshov** (o desigualdad de Chebyshov) es uno de los resultados clásicos más importantes de la teoría de la probabilidad. Permite estimar la probabilidad de un evento descrito en términos de una variable aleatoria X, al proveernos de una cota que no depende de la distribución de la variable aleatoria sino de la varianza de X.
El teorema recibe el nombre en honor al matemático ruso Pafnuty Chebyshov (también escrito como Chebychev o Tchebycheff) quien, a pesar de no ser el primero en enunciar dicho teorema, fue el primero en dar una demostración en el año 1867.
En el estudio de la teoría de la probabilidad ocurre que si se conoce la función de distribución de una variable aleatoria X, se puede calcular su valor esperado —o esperanza matemática E(X)— y su varianza Var(X), siempre y cuando dichas cantidades existan. Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

Es decir, conociendo E(X) y Var(X) no necesariamente se puede obtener la función de distribución de X, por lo cual cantidades como $P(|X|>k)$ para algún $k>0$, son muy difíciles de obtener. Pero gracias a la desigualdad de Chebyshov es posible hacer una estimación de la probabilidad de la variable aleatoria.

El teorema de Chebyshov nos dice que si tenemos una variable aleatoria X sobre un espacio muestral S con una función de probabilidad p, y si $k>0$, entonces:

$$P(|X(s) - E(X)| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$$

Aplicaciones y ejemplos

Dentro de las muchas aplicaciones que posee el teorema de Chebyshov se pueden mencionar las siguientes:

Acotamiento de probabilidades

Esta es la aplicación más común y se utiliza para dar una cota superior para $P(|X-E(X)|\geq k)$ donde $k>0$, solo con la varianza y la esperanza de la variable aleatoria X, sin conocer la función de probabilidad.

Ejemplo 1

Supongamos que el número de productos fabricados en una empresa durante una semana es una variable aleatoria con promedio de 50.

Si se sabe que la varianza de una semana de producción es igual a 25, entonces ¿qué podemos decir acerca de la probabilidad de que en esta semana la producción difiera en más de 10 a la media?

Solución

Aplicando la desigualdad de Chebyshov tenemos que:

$$P(|X(s)-50|\geq 10)\leq \frac{Var(X)}{10^2}=\frac{1}{4}$$

De esto podemos obtener que la probabilidad de que en la semana de producción el número de artículos exceda en más de 10 a la media es a lo más 1/4.

Demostración de los teoremas límites

La desigualdad de Chebyshov juega un papel importante en la demostración de los teoremas límites más importantes. Como ejemplo tenemos los siguientes:

Ley débil de los grandes números

Esta ley establece que dada una sucesión X1, X2,…,Xn,… de variables aleatorias independientes con la misma distribución promedio E(Xi)=μ y varianza Var(X)=σ^2, y una muestra media conocida de:

$$S_n=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$$

Entonces para k>0 se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| \geq k) = 0$$

O, de manera equivalente:

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| < k) = 1$$

Demostración

Primero notemos lo siguiente:

$$E(S_n) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Como X1, X2,…, Xn son independientes, se deduce que:

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

Por lo tanto, es posible afirmar lo siguiente:

$$Var(S_n) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n^2}$$

$$\frac{Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Luego, usando el teorema de Chebyshov se tiene que:

$$P(|S_n - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{nk^2}$$

Finalmente, el teorema resulta del hecho de que el límite a la derecha es cero cuando n tiende a infinito.

Cabe resaltar que esta prueba se hizo solo para el caso en el que exista la varianza de Xi; es decir, que no diverge. Así observamos que el teorema siempre es verdadero si E(Xi) existe.

Teorema límite de Chebyshov

Si X1, X2,…, Xn,… es una sucesión de variables aleatorias independientes tal que existe algún C< infinito, tal que Var(Xn) ≤ C para todo n natural, entonces para cualquier k>0:

$$\lim_{n \to \infty} P(|S_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < k) = 1$$

Demostración

Como la sucesión de varianzas es uniformemente acotada, tenemos que Var(Sn)≤ C/n, para todo n natural. Pero sabemos que:

$$P(|S_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < k) \geq 1 - \frac{\frac{C}{n}}{k^2}$$

Haciendo tender n hacia infinito, resulta lo siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} P(|S_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < k) \geq 1$$

Como una probabilidad no puede exceder el valor de 1, se obtiene el resultado deseado. Como consecuencia de este teorema podríamos mencionar el caso particular de Bernoulli.

Si un experimento se repite n veces de forma independiente con dos resultados posibles (fracaso y éxito), donde p es la probabilidad de éxito en cada experimento y X es la variable aleatoria que representa el número de éxitos obtenidos, entonces para cada k>0 se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < k\right) = 1$$

Tamaño de muestra

En términos de la varianza, la desigualdad de Chebyshov nos permite encontrar un tamaño de muestra n que es suficiente para garantizar que la probabilidad de que |Sn-μ|>=k ocurra sea tan pequeña como se desee, lo cual permite tener una aproximación a la media.

De manera precisa, sea X1,X2,…Xn una muestra de variables aleatorias independientes de tamaño n y supongamos que E(Xi)=

μ y su varianza σ^2. Entonces, por la desigualdad de Chebyshov se tiene que:

$$P(|S_n - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{nk^2}$$

$$P(|S_n - \mu| \geq k) \leq \delta \qquad si \qquad n \geq \frac{\sigma^2}{\delta k^2}$$

Ejemplo

Supóngase que X1,X2,…Xn son una muestra de variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli, de tal forma que toman el valor 1 con probabilidad p=0.5.

¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para poder garantizar que la probabilidad de que la diferencia entre la media aritmética Sn y su valor esperado (que exceda en más de 0,1), sea menor o igual que 0.,01?

Solución

Tenemos que E(X)=μ=p=0,5 y que Var(X)=σ^2=p(1-p)=0,25. Por la desigualdad de Chebyshov, para cualquier k>0 tenemos que:

$$P(|S_n - \mu| \geq k) \leq \frac{p(1-p)}{nk^2}$$

Ahora, tomando k=0,1 y δ=0,01, se tiene que:

$$P(|S_n - 0.5| \geq 0.1) \leq 0.01 \quad cuando \quad n \geq \frac{0.5^2}{0.01^2} = 2500$$

De esta manera se concluye que se necesita un tamaño de muestra de al menos 2500 para garantizar que la probabilidad del evento |Sn – 0,5|>= 0,1 sea menor que 0,01.

Desigualdades tipo Chebyshov

Existen diversas desigualdades relacionadas con la desigualdad de Chebyshov. Una de las más conocidas es la desigualdad de Markov:

$$P(X \geq k) \leq \frac{E(X^r)}{k^r}$$

En esta expresión X es una variable aleatoria no negativa con k,r>0.

La desigualdad de Markov puede tomar distintas formas. Por ejemplo, sea Y una variable aleatoria no negativa (por lo que P(Y>=0)=1) y supongamos que E(Y)=μ existe. Supongamos también que $(E(Y))^r=\mu_r$ existe para algún entero r>1. Entonces:

$$P(Y \geq A\mu) \leq \frac{1}{A} \qquad con\ A > 0$$

$$P(Y \geq a) \leq \frac{\mu}{a} \qquad con\ a > 0$$

$$P(Y \geq A\mu^r) \leq \frac{1}{A^r} \qquad con\ A > 0$$

$$P(Y \geq a) \leq \frac{\mu_r}{a^r} \qquad con\ a > 0$$

$$P(Y - \mu \geq h) \leq \frac{\mu}{\mu + h} \qquad con\ h > 0$$

→BIBLIOGAFIA:

1.-Kai Lai Chung. Elementary Proability Theory with Stochastic Processes. Springer-Verlag New York Inc

2.-Kenneth.H. Rosen .Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones . S.A.MCGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA.

3.-Paul L. Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadisticas. S.A. ALHAMBRA MEXICANA.

4.-Seymour Lipschutz Ph.D. 2000 Problemas Resueltos de Matemática Discretas. McGRAW-HILL.

1.7 REGLA EMPIRIDCA

La regla empírica, a la que también se le conoce como la regla 68,5-95-99,7, constituye una manera útil de analizar datos estadísticos. Sin embargo, solo funciona para una distribución normal (la campana de Gauss) y solo es posible producir estimaciones. Será necesario que conozcas la media y la desviación estándar de los datos, pero, en caso de que vayas a emplear la regla empírica para una clase o un examen, se te deberá brindar esta información. Luego podrás usar esta regla para fines como estimar cuántos de los datos se encuentran dentro de un rango determinado.

Traza y divide una distribución normal. Haz un bosquejo de una curva normal cuyo punto más alto se encuentre en el centro y cuyos extremos se inclinen hacia abajo y vayan estrechándose de manera simétrica a la izquierda y la derecha. Luego traza varias líneas verticales que se intersequen con la curva de la siguiente manera:[1]

- Una línea debe dividir la curva por la mitad.
- Traza 3 líneas a la derecha de esta línea central y otras 3 a la izquierda. Estas líneas deben dividir cada una de las mitades de la curva en tres secciones espaciadas de manera uniforme y una sección pequeña en el extremo.

Escribe los valores de la distribución normal en las líneas divisorias. Marca la línea que esté en el centro con la media de tus datos y luego suma las desviaciones estándar para obtener los valores correspondientes a las 3 líneas a la derecha. Resta las desviaciones estándar a la media y obtendrás los valores correspondientes a las 3 líneas a la izquierda. Por ejemplo:[2]

- Imagina que la media de los datos es 16 y la desviación estándar es 2. Marca la línea central con el número 16.
- Suma las desviaciones estándar para marcar la primera línea a la derecha del centro con el número 18, la siguiente de la derecha con el número 20 y la línea en el extremo derecho con el número 22.

- Resta las desviaciones estándar para marcar la primera línea a la izquierda del centro con el número 14, la siguiente de la izquierda con el número 12 y la línea en el extremo izquierdo con el número 10.

Marca los porcentajes de cada sección. La regla empírica del punto base es fácil de comprender: el 68 % de los puntos de datos para una distribución normal se encontrarán dentro de una desviación estándar de la media, el 95 % dentro de dos desviaciones estándar y el 99,7 % dentro de tres desviaciones estándar. Puedes recordártelo marcando cada sección con un porcentaje de la siguiente forma:[3]

- Cada sección que se encuentre inmediatamente a la derecha y a la izquierda de la línea central contendrá el 34 %, sumando un total de 68.
- Las secciones siguientes a la derecha y la izquierda contendrán cada una el 13,5 %. Súmalas al 68 % y obtendrás el 95 % de los datos.
- Las secciones siguientes a cada lado contendrán cada una 2,35 % de los datos. Súmalos al 95 % y obtendrás el 99,7 % de los datos.
- Las puntas diminutas restantes de los datos a la izquierda y la derecha contienen cada una 0,15 % de los datos restantes, lo cual suma un total de 100 %.

Encuentra las distribuciones de tus datos. Utiliza la media y la regla empírica para encontrar las distribuciones de los datos a 1, 2 y 3 desviaciones estándar de la media. Toma nota de ellos en la curva como referencia. Por ejemplo, imagina que vas a analizar el peso de una población de gatos, siendo la media del peso 4 kg y la desviación estándar 0,5 kg. Ten en cuenta lo siguiente:[4]

- 1 desviación estándar por encima de la media sería 4,5 kg y una desviación estándar por debajo de la media sería 3,5 kg.
- 2 desviaciones estándar por encima de la media sería 5 kg y 2 desviaciones estándar por debajo de la media sería 3 kg.
- 3 desviaciones estándar por encima de la media sería 5,5 kg y 3 desviaciones estándar por debajo de la media sería 2,5 kg.

Determina la sección de la curva que la pregunta te pida que analices. Cuando hayas dispuesto la curva, puedes resolver preguntas de análisis de datos mediante la regla empírica y la aritmética simple. Para empezar, lee con cuidado la pregunta para así determinar cuáles son las secciones con las que debas trabajar. Por ejemplo:[5]

- Imagina que se te pide que encuentres el peso superior y el inferior para el 68 % de una población de gatos. Será necesario que trabajes con las dos secciones más cercanas al centro, en donde se encontrará el 68 % de los datos.
- De forma similar, imagina que la media del peso es 4 kg y la desviación estándar es 0,5 kg. En caso de que se te pida encontrar la proporción de gatos cuyo peso supere los 5 kg, deberás trabajar con la sección en el extremo derecho (a 2 desviaciones estándar de la media).

Encuentra el porcentaje de los datos que estén dentro de un rango determinado. En caso de que se te pida encontrar el porcentaje de la población dentro de un rango determinado, lo único que debes hacer es sumar los porcentajes dentro de un conjunto dado de desviaciones estándar. Por ejemplo, si lo que se te pide es encontrar el porcentaje de gatos cuyo peso sea de entre 3,5 y 5 kg, siendo la media de 4 kg y la desviación estándar de 0,5 kg, deberás tener en cuenta lo siguiente:[6]

- 2 desviaciones estándar por encima de la media equivaldrán a 5 kg, mientras que 1 desviación estándar por debajo de la media equivaldrá a 3,5 kg.
- Esto quiere decir el 81,5 % (68 % + 13,5 %) de los gatos pesa entre 3,5 y 5 kg.

Encuentra puntos y rangos de datos empleando los porcentajes de las secciones. Utiliza la información que te brinden las distribuciones de porcentajes y las desviaciones estándar para encontrar los límites superiores e inferiores para secciones de tus datos. Por ejemplo, una pregunta acerca de tus datos sobre el peso de los gatos podría ser "¿Cuál es el límite superior de peso del 2,5 % más bajo de los gatos?".[7]

- El 2,5 % más bajo de los datos se encontraría 2 desviaciones estándar por debajo de la media.
- Si es que la media es 4 kg y la desviación estándar es 0,5 kg, el peso del 2,5 % más bajo de los gatos será 3 kg o menos (4 - 0,5 x 2).

→**BIBLIOGRAFIA:**

https://es.wikihow.com/usar-la-regla-emp%C3%ADrica

1. ↑ http://www.stat119review.com/more-material/normal-distribution/empirical-rule/solving-empirical-rule-questions
2. ↑ https://www.khanacademy.org/math/probability/normal-distributions-a2/normal-distributions-a2ii/v/ck12-org-normal-distribution-problems-empirical-rule
3. ↑ http://www.stat119review.com/more-material/normal-distribution/empirical-rule/solving-empirical-rule-questions
4. ↑ https://www.youtube.com/watch?v=T7-eeg6rhjY
5. ↑ http://www.stat119review.com/more-material/normal-distribution/empirical-rule/solving-empirical-rule-questions
6. ↑ https://www.khanacademy.org/math/probability/normal-distributions-a2/normal-distributions-a2ii/v/ck12-org-normal-distribution-problems-empirical-rule
7. ↑ https://www.nku.edu/~statistics/212_Using_the_Empirical_Rule.htm

UNIDAD II

2.1 TEORIA DE LA PROBABILIDAD

El concepto de probabilidad nace con el deseo del hombre de conocer con certeza los eventos futuros. Es por ello que el estudio de probabilidades surge como una herramienta utilizada por los nobles para ganar en los juegos y pasatiempos de la época. El desarrollo de estas herramientas fue asignado a los matemáticos de la corte.

Con el tiempo estas técnicas matemáticas se perfeccionaron y encontraron otros usos muy diferentes para la que fueron creadas. Actualmente se continúo con el estudio de nuevas metodologías que permitan maximizar el uso de la computación en el estudio de las probabilidades disminuyendo, de este modo, los márgenes de error en los cálculos.

A través de la historia se han desarrollado tres enfoques conceptuales diferentes para definir la probabilidad y determinar los valores de probabilidad:

El enfoque clásico

Dice que si hay x posibles resultados favorables a la ocurrencia de un evento A y z posibles resultados desfavorables a la ocurrencia de A, y todos los resultados son igualmente posibles y mutuamente excluyente (no pueden ocurrir los dos al mismo tiempo), entonces la probabilidad de que ocurra A es:

$$P(A) = \frac{x}{(x+z)}$$

El enfoque clásico de la probabilidad se basa en la suposición de que cada resultado sea igualmente posible.

Este enfoque es llamado enfoque a priori porque permite, (en caso de que pueda aplicarse) calcular el valor de probabilidad antes de observar cualquier evento de muestra.

Ejemplo:

Si tenemos en una caja 15 piedras verdes y 9 piedras rojas. La probabilidad de sacar una piedra roja en un intento es:

$$P(A) = \frac{9}{9+15} = 0.375 \text{ o } 37.5\%$$

El enfoque de frecuencia relativa

También llamado Enfoque Empírico, determina la probabilidad sobre la base de la proporción de veces que ocurre un evento favorable en un numero de observaciones. En este enfoque no ese utiliza la suposición previa de aleatoriedad. Porque la determinación de los valores de probabilidad se basa en la observación y recopilación de datos.

Ejemplo:

Se ha observado que 9 de cada 50 vehículos que pasan por una esquina no tienen cinturón de seguridad. Si un vigilante de transito se para en esa misma esquina un ida cualquiera ¿Cuál será la probabilidad de que detenga un vehículo sin cinturón de seguridad?

$$P(A) = \frac{9}{50} = 0.18 \text{ o } 18\%$$

Tanto el enfoque clásico como el enfoque empírico conducen a valores objetivos de probabilidad, en el sentido de que los valores de probabilidad indican al largo plazo la tasa relativa de ocurrencia del evento.

El enfoque subjetivo

Dice que la probabilidad de ocurrencia de un evento es el grado de creencia por parte de un individuo de que un evento ocurra, basado en toda la evidencia a su disposición. Bajo esta premisa se puede decir que este enfoque es adecuado cuando solo hay una oportunidad de ocurrencia del evento. Es decir, que el evento ocurrirá o no ocurrirá esa sola vez. El valor de probabilidad bajo este enfoque es un juicio personal.

Concepto de Probabilidad

Se define como cálculo de probabilidad al conjunto de reglas que permiten determinar si un fenómeno ha de producirse, fundando la suposición en el cálculo, las estadísticas o la teoría.

El objetivo de esta práctica es realizar varios experimentos de probabilidad, anotar los resultados y posteriormente compararlos con los resultados teóricos.

Objetivos de las Probabilidades

El objetivo fundamental de la probabilidad, es la de mostrar al alumno la importancia y utilidad del Método Estadístico en el ámbito económico-empresarial. Con tal fin, el alumno deberá aprender a manejar los métodos y técnicas más adecuadas para el correcto tratamiento y análisis de la información proporcionada por los datos que genera la actividad económica.

Para ello se comienza afianzando los conocimientos que el alumno ya posee de Estadística Descriptiva, además de algunos conceptos nuevos relacionados con este tema.

El valor de la probabilidad

El valor más pequeño que puede tener la probabilidad de ocurrencia de un evento es igual a 0, el cual indica que el evento es imposible, y el valor mayor es 1, que indica que el evento ciertamente ocurrirá. Entonces si decimos que P(A) es la probabilidad de ocurrencia de un evento A y P(A´) la probabilidad de no-ocurrencia de A, tenemos que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A) + P(A') = 1$$

Eventos mutuamente excluyentes y eventos no excluyentes

Dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos).

Ejemplo:

Al lanzar una moneda solo puede ocurrir que salga cara o sello pero no los dos a la vez, esto quiere decir que estos eventos son excluyentes.

Dos o más eventos son no excluyentes, o conjuntos, cuando es posible que ocurran ambos. Esto no indica que necesariamente deban ocurrir estos eventos en forma simultánea.

Ejemplo:

Si consideramos en un juego de domino sacar al menos un blanco y un seis, estos eventos son no excluyentes porque puede ocurrir que salga el seis blanco.

Reglas de la Adición

La Regla de la Adición expresa que: la probabilidad de ocurrencia de al menos dos sucesos A y B es igual a:

P(A o B) = P(A) U P(B) = P(A) + P(B) **si A y B son mutuamente excluyente**

P(A o B) = P(A) + P(B) – P(A y B) **si A y B son no excluyentes**

Siendo: P(A) = probabilidad de ocurrencia del evento A

P(B) = probabilidad de ocurrencia del evento B

P(A y B) = probabilidad de ocurrencia simultanea de los eventos A y B

Eventos Independientes

Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento (o eventos). Un caso típico de eventos independiente es el muestreo con reposición, es decir, una vez tomada la muestra se regresa de nuevo a la población donde se obtuvo.

Ejemplo:

lanzar al aire dos veces una moneda son eventos independientes por que el resultado del primer evento no afecta sobre las probabilidades efectivas de que ocurra cara o sello, en el segundo lanzamiento.

Eventos dependientes

Dos o más eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro (o otros). Cuando tenemos este caso, empleamos entonces, el concepto de probabilidad condicional para denominar la probabilidad del evento relacionado. La expresión P(A|B) indica la probabilidad de ocurrencia del evento A sí el evento B ya ocurrió.

Se debe tener claro que A|B no es una fracción.

P(A|B) = P(A y B)/P(B) o P(B|A) = P(A y B)/P(A)

Reglas de Multiplicación

Se relacionan con la determinación de la ocurrencia de conjunta de dos o más eventos. Es decir la intersección entre los conjuntos de los posibles valores de A y los valores de B, esto quiere decir que la probabilidad de que ocurran conjuntamente los eventos A y B es:

P(A y B) = P(A B) = P(A)P(B) si A y B **son independientes**

P(A y B) = P(A B) = P(A)P(B|A) si A y B **son dependientes**

P(A y B) = P(A B) = P(B)P(A|B) si A y B **son dependientes**

Distribución de probabilidad normal

Es una distribución de probabilidad continua que es tanto simétrica como mesocurtica. La curva que representa la distribución de probabilidad normal se describe generalmente como en forma de campana. Esta distribución es importante en inferencia estadística por tres razones diferentes:

1. Se sabe que las medidas producidas en muchos procesos aleatorios siguen esta distribución.
2. Las probabilidades normales pueden utilizarse generalmente para aproximar otras distribuciones de probabilidad, tales como las distribuciones binomial y de Poisson.
3. Las distribuciones estadísticas tales como la media de la muestra y la proporción de la muestra, siguen a menudo la distribución normal, sin tener en cuenta la distribución de la población

Los valores de los parámetros de la distribución de probabilidad normal son $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Cualquier conjunto de valores X normalmente distribuido pueden convertirse en valores normales estándar z por medio de la formula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Haciendo posible el uso de la tabla de proporciones de área y hace innecesario el uso de la ecuación de la función de densidad de cualquier distribución normal dada.

Para aproximar las distribuciones discretas binomial y de Poisson se debe hacer:

Binomial	$\mu = np$	$\sigma =$ np(1-p)	Si n > 30 .np > 5 n(1-p) > 5
Poisson	$\mu = \lambda$	$\sigma = \lambda$	$\lambda > 10$

Distribución de probabilidad exponencial

Si en el contexto de un proceso de Poisson ocurren eventos o éxitos en un espectro continuo de tiempo y espacio. Entonces la longitud del espacio o tiempo entre eventos sucesivos sigue una distribución de probabilidad exponencial. Puesto que el tiempo y el espacio son un espectro continuo, esta es una distribución continua.

En caso de este tipo de distribución no vale la pena preguntarse ¿cuál es la probabilidad de que el primer pedido de servicio se haga exactamente de aquí a un minuto?. Mas bien debemos asignar un intervalo dentro del cual el evento puede ocurrir, preguntándonos, ¿cuál es la probabilidad de que el primer pedido se produzca en el próximo minuto?.

Dado que el proceso de Poisson es estacionario, la distribución exponencial se aplica ya sea cuando estamos interesados en el tiempo (o espacio) hasta el primer evento, el tiempo entre dos eventos sucesivos, o el tiempo hasta que ocurra el primer evento después de cualquier punto aleatoriamente seleccionado.

Donde λ es la cifra media de ocurrencias para el intervalo de interés, la probabilidad exponencial de que el primer evento ocurra dentro del intervalo designado de tiempo o espacio es.

$P(T < t) = 1 - e -\lambda$

De manera que la probabilidad exponencial de que el primer evento no ocurra dentro del intervalo designado de tiempo o espacio es:

$P(T > t) = e -\lambda$

Ejemplo:

Un departamento de mantenimiento recibe un promedio de 5 llamadas por hora. Comenzando en un momento aleatoriamente seleccionado, la probabilidad de que una llamada llegue dentro de media hora es:

Promedio 5 por hora, como el intervalo es media hora tenemos que λ = 2,5/media hora.

$P (T < 30 \text{ min.}) = 1- e -5 = 1 - 0{,}08208 = 0{,}91792$

→BIBLIOGRAFIA:

1.-éREZ, C. (1995) *Análisis Estadístico con Statgraphics. Técnicas Básicas*. Madrid: Ra-Ma.

2.-TANUR, J. (1992) *La Estadística, una Guía de lo Desconocido*. Madrid: Alianza Editorial.

2.1.1 ENFOQUES DE PROBABILIDAD

La probabilidad es la posibilidad que existe entre varias posibilidades, que un hecho o condición se produzcan. La probabilidad, entonces, mide la frecuencia con la cual se obtiene un resultado en oportunidad de la realización de un experimento sobre el cual se conocen todos los resultados posibles gracias a las condiciones de estabilidad que el contexto supone de antemano.

Expresado matemáticamente, es igual al número de formas que un evento específico puede ocurrir, dividido por el número total de posibles eventos. Por ejemplo, si tienes una bolsa con tres canicas, una azul y dos verdes, la probabilidad de tomar una canica azul sin mirar es de 1/3. Hay sólo un resultado posible de que se seleccione la canica azul, pero hay tres posibles resultados en total, azul, verde, verde. Usando el mismo razonamiento, la probabilidad de tomar una canica verde es de 2/3.

La gran aliada de la probabilidad es la llamada teoría de la probabilidad, ya que gracias a lo que esta postula y sostiene, es que los seres humanos podemos anticiparnos a que algunos sucesos potenciales ocurran finalmente. La mencionada teoría es muy utilizada y consultada por disciplinas como ser la estadística, la filosofía, las matemáticas y la ciencia, para sacar conclusiones respecto de los sucesos potenciales que las ocupan.

La teoría de la probabilidad es un modelo matemático que se ocupa de analizar los fenómenos aleatorios; esto implica la contraposición respecto de los fenómenos ya determinados, que son aquellos en los cuales el resultado del experimento que se realiza, atendiendo a determinadas condiciones, produce un resultado único y previsible, que se repetirá la cantidad de veces que éste vuelva a hacerse, siempre y cuando se respeten las mismas condiciones.

Entonces, dentro de la teoría de la probabilidad se intenta determinar la cantidad de veces que puede un determinado resultado acontecer, con el fin de conocer que suceso es el más probable.

Por ejemplo, el agua que se calienta a 100 grados Celsius a nivel del mar se convierte en vapor: éste es un fenómeno ya determinado. En tanto, los aleatorios, que son de los que se ocupa la teoría de la probabilidad, podrán realizarse miles de veces bajo las mismas circunstancias pero siempre tendrán como resultado un variado conjunto de alternativas. Un clarísimo ejemplo resulta ser las diversas posibilidades y combinaciones que permite el lanzamiento de dados cuando se está jugando a la generala.

La probabilidad está absolutamente inmersa en nuestro día a día como parte integrante de una sociedad y comunidad determinada, ya que en el análisis de riesgos y en el comercio de materias primas, la probabilidad, tiene una incidencia y una importancia vital.

Existen tres tipos de enfoques de Probabilidad:

- Clásico
- Relativo
- Subjetivo

Clásico:

Los resultados de un experimento son igualmente viables, es decir, tienen teóricamente las mismas posibilidades de ocurrir.

En este caso la probabilidad de ocurrencia de un evento será:

Número de resultados en los que se presenta el evento / número total de resultados posibles

Por ejemplo, la probabilidad de que en una baraja francesa de 52 cartas salga el cinco de trébol es de 1/52.

De Frecuencia Relativa:

La probabilidad de que un evento suceda se determina observando eventos similares en el pasado. Este método utiliza la frecuencia relativa de las presentaciones pasadas de un evento como una probabilidad. Determinamos qué tan frecuente ha sucedido algo en el pasado y usamos esa cifra para predecir la probabilidad de que suceda de nuevo en el futuro.

En este caso la probabilidad de ocurrencia de un evento será:

Número de resultados esperados ocurridos en el pasado / número total de experimentos adelantados

Por ejemplo, la probabilidad de que Brasil gané el mundial de Rusia 2018 es de 5 mundiales ganados anteriormente / 20 mundiales que se han celebrado en total.

De Frecuencia Subjetiva:

Se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible. Esa evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

→BIBLIOGRAFIA:

1.-URIEL, E. y MUñIZ, M. (1988) *Estadística Económica y Empresarial. Teoría y ejercicios*. Madrid: AC.

2.-URIEL, E. y PEIRó, A. (2000) *Introducción al análisis de series temporales*. Madrid: AC.

3.-http://soy-staff.blogspot.com/2015/10/aspectos-generales-de-la-probabilidad.html

2.1.2 ESPACIO MUESTRAL

En cualquier experimento aleatorio la primera cosa que nos preguntamos es sobre lo que puede pasar. ¿Qué resultados puede ofrecer y cuáles no? Sería muy interesante disponer de todo el abanico de posibles resultados. En este sentido, al conjunto formado por todos los posibles resultados elementales de un experimento aleatorio se le denomina espacio muestral de dicho experimento. Dependiendo de como sea este conjunto, los espacios muestrales pueden ser:

- Espacio muestral discreto finito. Consta de un número finito de elementos, por ejemplo lanzar un dado.
- Espacio muestral discreto infinito. Consta de un número infinito numerable de elementos, por ejemplo lanzar un dado hasta que salga un cinco.
- Espacio muestral continuo. Consta de un número infinito no numerable de elementos, por ejemplo todas las medidas posibles de espárragos extraidos aleatoriamente de una población.

Consideremos por ejemplo:

1. El experimento consistente en el lanzamiento de un dado y anotar el resultado de la cara superior. El espacio muestral sería:

   E = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

2. El experimento consistente en el lanzamiento de dos monedas al aire. El espacio muestral o conjunto de todos los resultados elementales posibles sería:

   E = { CCC , CCF , CFC , FCC , CFF , FCF , FFC , FFF}

3. El experimento consistente en elegir aleatoriamente cualquier número de tres cifras mediante la extracción con reemplazamiento de bolas de una urna en la que aparecen las diez cifras significativas. En este caso el espacio muestral sería:

   E = { 000 , 001 ,................... , 999 }

4. El experimento consistente en el lanzamiento de dos dados de los que después se escogera la mejor de las puntuaciones. El espacio muestral sería:

   E = [1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6]

5. El experimento consistente en abrir aleatoriamente un libro y anotar después la primera letra de la página de la izquierda. El espacio muestral en este caso sería:

   E = { A , B , ... , Z}

Los ejemplos que podrían exponerse son innumerables y seguro que ya estás pensando en diversas situaciones. No obstante, de partida, queremos que te fijes ey pienses en lo que te vamos a exponer. Observa el ejemplo (1) y el (4), el espacio muestral es el mismo, pero ¿puede considerarse el mismo?, esto es, los sucesos que aparecen sí son los mismos pero la ocurrencia de cada suceso en el experimento (1) no tiene el mismo comportamiento que la ocurrencia de cada suceso en el experimento (4)

→**BIBLIOGRAFIA:**

https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/EstadisticaProbabilidadInferencia/Probabilidad/2_1ExperimentosAleatorios/index.html

2.1.3 EXPERIMENTOS SIMPLES Y COMPLEJOS

Primero necesitamos introducir algunos términos. Cuando trabajamos con probabilidad, una acción aleatoria o serie de acciones se llama experimento. Un resultado es la consecuencia de un experimento, y un evento es una colección particular de resultados. Los eventos usualmente son descritos usando una característica común de los resultados.

Apliquemos este lenguaje para ver cómo funcionan los términos en la práctica. Algunos juegos requieren lanzar un dado de seis lados, numerado del 1 al 6. La tabla siguiente ilustra el uso de experimento, resultado, y evento en ese juego:

Experimento	Resultados	Eventos
Lanzar un dado	Existen 6 resultados posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}	Sacar un número par: {2, 4, 6} Sacar un 3: {3} Sacar un 1 *o* un 3: {1, 3} Sacar un 1 *y* un 3: { } (Sólo puede salir un número, por lo que esto es imposible. El evento no contiene resultados.)

Nota que una colección de resultados se pone en corchetes y separado por comas.

Un evento simple es un evento con *un* solo resultado. Sacar un 1 sería un evento simple, porque existe sólo un resultado que funciona: 1. Sacar más que 5 también sería un evento simple, porque el evento incluye sólo al 6 como un resultado válido. Un evento compuesto es un evento con más de un resultado. Por ejemplo, lanzar un dado de 6 lados y sacar un número par: 2, 4, y 6.

Cuando lanzamos muchas veces un dado de 6 lados, no debemos esperar que un resultado ocurra más frecuentemente que otro. Los resultados en esta situación se dice que son igualmente probables. Es muy importante reconocer cuándo los resultados son igualmente probables cuando calculamos probabilidades. Como cada resultado en el experimento de lanzar los dados es igualmente probable, esperaríamos obtener cada resultado $\frac{1}{6}$ de los lanzamientos. Eso es, esperaríamos que salga 1 en $\frac{1}{6}$ de los lanzamientos, 2 en $\frac{1}{6}$ de los lanzamientos, 3 en $\frac{1}{6}$ de los lanzamientos y así sucesivamente.

Ejemplo	
Problema	Tori está lanzando un par de monedas y observando cuantas caras le salen. ¿Cuáles son los resultados en este experimento? ¿Son igualmente probables?
	Una moneda puede caer en cara (o Heads) o cruz (o Tails). Tori puede sacar dos caras, dos cruces, o una de cada una. Existen 3 resultados: 0 caras, 1 cara, o 2 caras. Estos resultados *no* son igualmente probables. Puede sorprendente, pero piensa de esta forma: Imagina que una moneda es de 5 centavos y la otra es de 10 centavos. Las maneras posibles de lanzar las monedas son:

Moneda de 5 centavos	Moneda de 10 centavos	Número de Caras
H	H	2
H	T	1
T	H	1

T	T	0

Nota que hay dos formas de sacar una cara, pero sólo una forma de sacar 2 caras y una forma de sacar 0 caras. Tori debe esperar obtener 1 cara ½ de las veces, 0 caras ¼ de las veces, y 2 caras ¼ de las veces.

Solución

Existen 3 resultados, pero no son igualmente probables.

La probabilidad de un evento es la frecuencia con que se espera que ocurra. Cuando todos los resultados posibles de un experimento son igualmente probables, la probabilidad es la relación entre el tamaño del espacio de eventos (los resultados en el evento) y el espacio muestral (todos los posibles resultados del experimento). La probabilidad de un evento *E* normalmente se escribe *P(E)*.

$$P(E) = \frac{\text{tamaño del espacio de los eventos}}{\text{tamaño del espacio muestral}} = \frac{\text{número de resultados en el evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

Nota que un evento es normalmente descrito usando características comunes de los resultados, si es posible — como lanzar un dado un número par de veces. El *espacio* de eventos, sin embargo, es una lista de todos los resultados en un evento — como {2, 4, 6}. El espacio muestral consiste de todos los resultados posibles, no sólo aquellos del evento.

Ejemplo		
Problema	Un juego requiere lanzar un dado de 6 lados numerado del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?	
	Espacio muestral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	Primero, encontrar el espacio muestral y el espacio de

	Espacio de eventos = {2, 4, 6}	eventos. El espacio muestral son todos los posibles resultados, y el espacio de eventos son los resultados de un evento. En este caso, el evento es "sacar un número par"
	$P(\text{ Número Par }) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	Como los resultados son igualmente probables, la probabilidad del evento es la razón del espacio de eventos y el espacio muestral
Solución	$P(\text{número par}) = \frac{1}{2}$	

Algunas veces los resultados no son igualmente probables. En este caso, necesitamos encontrar la manera de representar los resultados para que *sean* igualmente probables.

Ejemplo		
Problema	Tori está lanzando un par de monedas y observando cuantas caras le salen. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 caras? ¿Cuál es la probabilidad de sacar 1 cara?	
		Primero, encontramos el espacio muestral y el espacio de eventos Recuerda que queremos que

los resultados sean igualmente probables. En este caso, ya que existen más formas de sacar 1 cara, no podemos sólo listar 0, 1, y 2 como resultados. Debemos representar los resultados de tal forma que sean igualmente probables

Resultados:

Primera moneda	Segunda moneda	resultado
H	H	HH
H	T	HT
T	H	TH
T	T	TT

espacio muestral: {HH, HT, TH, TT}

espacio de eventos para 2 caras: {HH}
espacio de eventos para 1 cara: {HT, TH}

$$P(\text{2 caras}) = P(\{HH\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{1 cara}) = P(\{HT, TH\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Podemos hacer esto si tratamos cada moneda de manera diferente. Por ejemplo, si siempre lanzamos primero una moneda, y luego la otra, podemos escribir el resultado de cada lanzamiento

Como los resultados son igualmente probables, la probabilidad del evento es la razón entre el espacio de eventos y el espacio muestral

Solución

$$P(\text{ 2 caras }) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{1 cara }) = \frac{1}{2}$$

Es una práctica común en probabilidad, como en las fracciones en general, simplificar una probabilidad en sus términos más bajos para que sea más fácil tener ida de qué tan grande es. A menos que exista una razón para no hacerlo, expresaremos todas las probabilidades en sus términos más bajos.

→BIBLIOGRAFIA:

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L2_T1_text_final_es.html

2.1.4 LEYES DE PROBABILIDAD

La probabilidad es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables. La teoria de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadistica, la fisica, la matematicas, las ciencias y la filosofia para sacar conclusiones sobre la probabilidad discreta de sucesos potenciales y la mecánica subyacente discreta de sistemas complejos.

La probabilidad constituye un importante parámetro en la determinación de las diversas casualidades obtenidas tras una serie de eventos esperados dentro de un rango estadístico.

Existen diversas formas como método abstracto, como la teoria de dempster y la teoria de la relatividad numerica, esta última con un alto grado de aceptación si se toma en cuenta que disminuye considerablemente las posibilidades hasta un nivel mínimo ya que somete a todas las antiguas reglas a una simple ley de relatividad.
La probabilidad de un evento se denota con la letra *p* y se expresa en términos de una fracción y no en porcentajes, por lo que el valor de *p* cae entre 0 y 1. Por otra parte, la probabilidad de que un evento "no ocurra" equivale a 1 menos el valor de *p* y se denota con la letra *q*

$$P(Q) = 1 - P(E)$$

Los tres métodos para calcular las probabilidades son la regla de la adición, la regla de la multiplicación.

Regla de la adició

La regla de la adición o regla de la suma establece que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento en particular es igual a la suma de las probabilidades individuales, si es que los eventos son mutuamente excluyentes, es decir, que dos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

P(A o B) = P(A) U P(B) = P(A) + P(B) si A y B son mutuamente excluyente. P(A o B) = P(A) + P(B) − P(A y B) si A y B son no excluyentes.

Siendo: P(A) = probabilidad de ocurrencia del evento A. P(B) = probabilidad de ocurrencia del evento B. P(A y B) = probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos A y B.

Regla de la multiplicación

La regla de la multiplicación establece que la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos estadísticamente independientes es igual al producto de sus probabilidades individuales.

P(A y B) = P(A B) = P(A)P(B) si A y B son independientes. P(A y B) = P(A B) = P(A)P(B|A) si A y B son dependientes

La regla de Laplace establece que:

- La probabilidad de ocurrencia de un suceso *imposible* es 0.
- La probabilidad de ocurrencia de un suceso *seguro* es 1, es decir, P(A) = 1.

Para aplicar la regla de Laplace es necesario que los experimentos den lugar a sucesos equiprobables, es decir, que todos tengan o posean la misma probabilidad.

- La probabilidad de que ocurra un suceso se calcula así:

P(A) = Nº de casos favorables / Nº de resultados posibles

Esto significa que: la probabilidad del evento A es igual al cocientedel número de casos favorables (los casos dónde sucede A) sobre el total de casos posibles.-

-Aplicacion:

Dos aplicaciones principales de la teoría de la probabilidad en el día a día son en el análisis de riesgo y en el comercio de los mercados de materias. Los gobiernos normalmente aplican métodos probabilísticos en regulacion ambiental donde se les llama "analisis de vias de dispercion", y a menudo miden el bienestar usando métodos que son estocásticos por naturaleza, y escogen qué proyectos emprender basándose en análisis estadísticos de su probable efecto en la población como un conjunto. No es correcto decir que la estadistica está incluida en el propio modelado, ya que típicamente los análisis de riesgo son para una única vez y por lo tanto requieren más modelos de probabilidad fundamentales, por ej. "la probabilidad de otro 11-S". Una ley de numeros pequeños tiende a aplicarse a todas aquellas elecciones y percepciones del efecto de estas elecciones, lo que hace de las medidas probabilísticas un tema político.

Un buen ejemplo es el efecto de la probabilidad percibida de cualquier conflicto generalizado sobre los precios del petróleo en Oriente Medio – que producen un efecto dominó en la economía en conjunto. Un cálculo por un mercado de materias primas en que la guerra es más probable en contra de menos probable probablemente envía los precios hacia arriba o hacia abajo e indica a otros comerciantes esa opinión. Por consiguiente, las probabilidades no se calculan independientemente y tampoco son necesariamente muy racionales. La teoría de las fiansas conducyuales surgió para describir el efecto de este pensamiento de grupo en el precio, en la política, y en la paz y en los conflictos.

Se puede decir razonablemente que el descubrimiento de métodos rigurosos para calcular y combinar los cálculos de probabilidad ha tenido un profundo efecto en la sociedad moderna. Por consiguiente, puede ser de alguna importancia para la mayoría de los ciudadanos entender cómo se calculan los pronósticos y las probabilidades, y cómo contribuyen a la reputación y a las decisiones, especialmente en una democracia.

Otra aplicación significativa de la teoría de la probabilidad en el día a día es en la fiabilidad. Muchos bienes de consumo, como los automoviles y la electrónica de consumo, utilizan la teoria de la fiabilidad en el diseño del producto para reducir la probabilidad de avería. La probabilidad de avería también está estrechamente relacionada con la garantia del producto.

Se puede decir que no existe una cosa llamada probabilidad. También se puede decir que la probabilidad es la medida de nuestro grado de incertidumbre, o esto es, el grado de nuestra ignorancia dada una situación. Por consiguiente, puede haber una probabilidad de 1 entre 52 de que la primera carta en un baraja sea la *J* de diamantes. Sin embargo, si uno mira la primera carta y la reemplaza, entonces la probabilidad es o bien 100% ó 0%, y la elección correcta puede ser hecha con precisión por el que ve la carta. La física moderna proporciona ejemplos importantes de situaciones determinísticas donde sólo la descripción probabilística es factible debido a información incompleta y la complejidad de un sistema así como ejemplos de fenómenos realmente aleatorios.

→BIBLIOGRAFIA:

1.-Anderson D., Sweeney D., Williams T. Estadística para la administración y economía. Décima edición. Cengage Learning. 2008

2.-Berenson M., Levine D., Krehbiel T. Estadística para administración. Segunda edición. Prentice Hall. 2000

2.1.5 TABLAS DE CONTINGENCIA

Una tabla de contingencia es una tabla que cuenta las observaciones por múltiples variables categóricas. Las filas y columnas de las tablas corresponden a estas variables categóricas.

Por ejemplo, después de una elección reciente entre dos candidatos, una encuesta de salida registró el sexo y el voto de 100 electores seleccionados de manera aleatoria y los datos se tabularon de la siguiente manera:

	Candidato A	Candidato B	Todo
Hombre	28	20	48
Mujer	39	13	52
Todo	67	33	100

Esta tabla de contingencia cuenta las respuestas según sexo y voto. El conteo en la intersección de la fila i y la columna j se denota como n_{ij}, y representa el número de observaciones que muestra esa combinación de niveles. Por ejemplo, $n_{1,2}$ muestra el número de encuestados masculinos que votaron por el Candidato B.

La tabla también incluye los totales marginales para cada nivel de las variables. Los totales marginales para las filas muestran que 52 de los encuestados fueron mujeres. Los totales marginales para las columnas muestran que 67 encuestados votaron por el Candidato A. Además, el total general muestra que el tamaño de la muestra es 100.

Las tablas de contingencia también pueden revelar asociaciones entre las dos variables. Utilice una prueba de chi-cuadrada o una prueba exacta de Fisher para determinar si los conteos observados difieren significativamente de los conteos esperados bajo la hipótesis nula de que no existe asociación. Por ejemplo, usted podría probar si existe una asociación entre sexo y voto.

Las tablas de contingencia más simples son tablas de dos factores que cuentan las respuestas según dos variables. Usted puede categorizar las observaciones según tres o más variables al "cruzarlas". En el ejemplo de votación anterior, las respuestas también podrían clasificarse según el estatus de empleo de la manera siguiente:

	Candidato A	Candidato B	Total
Hombre / empleado	18	19	37
Hombre / desempleado	10	1	11
Mujer / empleada	33	10	43
Mujer / desempleada	6	3	9
Total	67	33	100

Un análisis de correspondencia simple puede detectar asociaciones en las tablas de contingencia que categorizan los datos por más de dos variables. Para realizar un análisis de correspondencia simple en Minitab, elija Estadísticas > Análisis multivariado > Análisis de correspondencia simple.

Calcular la relación de probabilidades y el intervalo de confianza para una tabla de contingencia 2 X 2

Usted puede usar Estadísticas > Regresión > Regresión logística binaria > Ajustar modelo logístico binario para calcular la relación de probabilidades y el intervalo de confianza.

Por ejemplo, usted está investigando la relación entre el uso de aspirina y ataques al corazón, y desea calcular la relación de probabilidades y el intervalo de confianza de la relación de probabilidades para la siguiente tabla de contingencia 2 X 2:

	Ataque al corazón	Sin ataque al corazón
Placebo	189	10845
Aspirina	104	10933

1. Ingrese los siguientes datos en Minitab:

C1	C2	C3
Grupo	Ataque al corazón	Conteo
Placebo	Sí	189
Placebo	No	10845
Aspirina	Sí	104
Aspirina	No	10933

2. Elija Estadísticas > Regresión > Regresión logística binaria > Ajustar modelo logístico binario.
3. En Respuesta, ingrese *C2* y en Frecuencia, ingrese *C3*.
4. En Predictores categóricos, ingrese *C1*. Haga clic en Aceptar.

Regresión logística binaria: Ataque al corazón vs. Grupo

Relaciones de probabilidades para predictores categóricos

		Relación de probabilidades	IC de 95%
Nivel A	Nivel B		
Grupo			
Placebo	Asprina	1.8321	(1.4400, 2.3308)

Relación de probabilidades para nivel A relativo a nivel B

La relación de probabilidades es 1,8321. Esto significa que una persona que tome el placebo tiene una probabilidad 1,8321 veces mayor de sufrir un ataque al corazón que una persona que tome aspirina. Usted puede estar 95% seguro de que el valor real de la relación de probabilidades está entre 1,44 y 2,3308.

→BIBLIOGRAFIA:

1. Blair C., Taylor R. Bioestadística. Peason. Prentice Hall. 2008
2. Daniel W. Bioestadística. Cuarta edición. Limusa Wiley. 2006

2.1.6 TEOREMA DE BAYES

El teorema de Bayes es utilizado para calcular la probabilidad de un suceso, teniendo información de antemano sobre ese suceso.

Podemos calcular la probabilidad de un suceso A, sabiendo además que ese A cumple cierta característica que condiciona su probabilidad. El teorema de Bayes entiende la probabilidad de forma inversa al teorema de la probabilidad total. El teorema de la probabilidad total hace inferencia sobre un suceso B, a partir de los resultados de los sucesos A. Por su parte, Bayes calcula la probabilidad de A condicionado a B.

El teorema de Bayes ha sido muy cuestionado. Lo cual se ha debido, principalmente, a su mala aplicación. Ya que, mientras se cumplan los supuestos de sucesos disjuntos y exhaustivos, el teorema es totalmente válido.

Fórmula del teorema de Bayes

Para calcular la probabilidad tal como la definió Bayes en este tipo de sucesos, necesitamos una fórmula. La fórmula se define matemáticamente como:

$$P[A_n/B] = \frac{P[B/A_n] \cdot P[A_n]}{\sum P[B/A_i] \cdot P[A_i]}$$

Donde B es el suceso sobre el que tenemos información previa y A(n) son los distintos sucesos condicionados. En la parte del numerador tenemos la probabilidad condicionada, y en la parte de abajo la probabilidad total. En cualquier caso, aunque la fórmula parezca un poco abstracta, es muy sencilla. Para demostrarlo, utilizaremos un ejemplo en el que en lugar de A(1), A(2) y A(3), utilizaremos directamente A, B y C.

Ejemplo del teorema de Bayes

Una empresa tiene una fábrica en Estados Unidos que dispone de tres máquinas A, B y C, que producen envases para botellas de agua. Se sabe que la máquina A produce un 40% de la cantidad total, la máquina B un 30% , y la máquina C un 30%. También se sabe que cada máquina produce envases defectuosos. De tal manera que la máquina A produce un 2% de envases defectuosos sobre el total de su producción, la máquina B un 3%, y la máquina C un 5%. Dicho esto, se plantean dos cuestiones:

P(A) = 0,40   P(D/A) = 0,02

P(B) = 0,30   P(D/B) = 0,03

P(C) = 0,30   P(D/C) = 0,05

1.Si un envase ha sido fabricado por la fábrica de esta empresa en Estados Unidos ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Se calcula la probabilidad total. Ya que, a partir los diferentes sucesos, calculamos la probabilidad de que sea defectuoso.

P(D) =[P(A) x P(D/A)] + [P(B) x P(D/B)] + [P(C) x P(D/C)] = [0,4 x 0,02] + [0,3 x 0,03] + [0,3 x 0,05] = 0,032

Expresado en porcentaje, diríamos que la probabilidad de que un envase fabricado por la fábrica de esta empresa en Estados Unidos sea defectuoso es del 3,2%.

2. Siguiendo con la pregunta anterior, si se adquiere un envase y este es defectuoso ¿Cuáles es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A?¿Y por la máquina B?¿Y por la máquina C?

Aquí se utiliza el teorema de Bayes. Tenemos información previa, es decir, sabemos que el envase es defectuoso. Claro que, sabiendo que es defectuoso, queremos saber cual es la probabilidad de que se haya producido por una de las máquinas.

P(A/D) = [P(A) x P(D/A)] / P(D) = [0,40 x 0,02] / 0,032 = 0,25

P(B/D) = [P(B) x P(D/B)] / P(D) = [0,30 x 0,03] / 0,032 = 0,28

P(C/D) = [P(C) x P(D/C)] / P(D) = [0,30 x 0,05] / 0,032 = 0,47

Sabiendo que un envase es defectuoso, la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A es del 25%, de que haya sido producido por la máquina B es del 28% y de que haya sido producido por la máquina C es del 47%.

→BIBLIOGRAFIA:

1. Meyer P. Probabilidad y Aplicaciones estadísticas. Edición revisada. Addison Wesley Logman. 1998

2. Montgomery D., Diseño y análisis de experimentos. Segunda edición. Limusa Wiley. 2006

SEMANA 2

2.2.1 VARIABLE ALEATORIA

Una variable aleatoria es la función matemática de un experimento aleatorio.

A priori, la definición de variable aleatoria no reviste mucha complejidad. Se trata de un concepto que se puede definir en una frase. Sin embargo, es más complejo de lo que las apariencias puedan indicar.

Ahora bien, en economipedia, como siempre hacemos, lo explicaremos de una manera francamente sencilla. Así pues, iremos por partes. ¿De qué partes se compone la frase?

¿Qué es una variable aleatoria?

Cómo podemos comprobar la frase se compone básicamente de dos conceptos: función matemática y experimento aleatorio. De manera que por aquí es por dónde debemos empezar. Es decir, por entender primero qué es una función matemática y, más tarde, por definir qué entendemos por experimento aleatorio.

- Función matemática: Dicho de manera sencilla, es una ecuación que asigna valores a una variable (variable dependiente) en función de otras variables (variables independientes).
- Experimento aleatorio: Es un fenómeno de la vida real cuyos resultados se deben completamente al azar. Es decir, bajo las mismas condiciones iniciales arroja resultados diferentes.

En otras palabras, es una ecuación que describe o intenta describir los resultados (con un número) de un evento cuyos resultados se deben al azar.

¿Qué sentido tiene diferenciar variable aleatoria de experimento aleatorio?

Pensemos en el siguiente caso. Queremos estudiar si una moneda es perfecta o se aproxima mucho a serlo. Para ello, vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en lanzar la moneda al aire y apuntar el resultado.

Se denomina variable aleatoria (o *estocástica*) a la función que adjudica eventos posibles a números reales (cifras), cuyos valores se miden en experimentos de tipo aleatorio. Estos valores posibles representan los resultados de experimentos que todavía no se llevaron a cabo o cantidades inciertas.

Cabe destacar que los experimentos aleatorios son aquellos que, desarrollados bajo las mismas condiciones, pueden ofrecer resultados diferentes. Arrojar una moneda al aire para ver si sale cara o ceca es un experimento de este tipo.

La variable aleatoria, en definitiva, permite ofrecer una descripción de la probabilidad de que se adoptan ciertos valores. No se sabe de manera precisa qué valor adoptará la variable cuando sea determinada o medida, pero sí se puede conocer cómo se distribuyen las probabilidades vinculadas a los valores posibles. En dicha distribución incide el azar.

Una variable aleatoria es un número que representa un resultado de una circunstancia o un experimento aleatorio. Una variable aleatoria puede ser discreta o continua. Una variable aleatoria discreta solo puede tener valores contables distintos, tales como 0, 1, 2, 3, …. Los ejemplos incluyen el número de estudiantes en un aula, el número de aviones en un aeropuerto o el número de defectos en un lote. Una variable aleatoria continua puede tener cualquier valor, por ejemplo una medición. Los ejemplos incluyen la estatura de los sujetos de un estudio, el peso de cajas de cereal o la longitud de destornilladores.

→BIBLIOGRAFIA:

Steel R., Torrie J. Bioestadística. Segunda edición. Mc Graw Hill. 1988

Walpole R., Myers R., Myers S., Ye K. Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias. Octava Edición. Pearson, Prentice Hall. 2007

2.2.2 CLASIFICACION DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

Para su estudio, las variables aleatorias se clasifican en:

- Variables aleatorias discretas

Diremos que una variable aleatoria es discreta si su recorrido es finito o infinito numerable.

Generalmente, este tipo de variables van asociadas a experimentos en los cuales se cuenta el número de veces que se ha presentado un suceso o donde el resultado es una puntuación concreta.

Los puntos del recorrido se corresponden con saltos en la gráfica de la función de distribución, que correspondería al segundo tipo de gráfica visto anteriormente.

- Variables aleatorias continuas

Son aquellas en las que la función de distribución es una función continua. Se corresponde con el primer tipo de gráfica visto.

Generalmente, se corresponden con variables asociadas a experimentos en los cuales la variable medida puede tomar cualquier valor en un intervalo; mediciones biométricas, por ejemplo.

Un caso particular dentro de las variables aleatorias continuas y al cual pertenecen todos los ejemplos usualmente utilizados, son las denominadas *variables aleatorias absolutamente continuas*.

- *Variables aleatorias absolutamente continuas*

Diremos que una variable aleatoria *X* continua tiene una distribución absolutamente continua si existe una función real *f*, positiva e integrable en el conjunto de números reales, tal que la función de distribución *F* de *X* se puede expresar como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Una variable aleatoria con distribución absolutamente continua, por extensión, se la clasifica como variable aleatoria absolutamente continua.

A la función *f* se la denomina *función de densidad de probabilidad* de la variable *X*.

Hay que hacer notar que no toda variable continua es absolutamente continua, pero los ejemplos son complicados, algunos utilizan para su construcción el conjunto de Cantor, y quedan fuera del nivel y del objetivo.

→BIBLIOGRAFIA:
http://www.ub.edu/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/Temas/Capitulo2/B0C2m1t5.htm

2.2.3 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

2.2.4 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUA

→BIBLOIGRAFIA:
https://www.sergas.es/Saude-publica/Documents/1899/Ayuda_Epidat_4_Distribuciones_de_probabilidad_Octubre2014.pdf

2.2.5 ESPERANZA MATEMATICA

La esperanza matemática de una variable aleatoria X es el número que expresa el valor medio del fenómeno que representa dicha variable.

La esperanza matemática, también llamada valor esperado, es igual al sumatorio de las probabilidades de que exista un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio. O, dicho de otra forma, el valor medio de un conjunto de datos. Teniendo en cuenta, eso sí, que el término esperanza matemática está acuñado por la teoría de la probabilidad. Mientras que en matemáticas, se denomina media matemática al valor promedio de un suceso que ha ocurrido. En distribuciones discretas con la misma probabilidad en cada suceso la media aritmética es igual que la esperanza matemática.

Ejemplo de esperanza matemática

Vamos a ver un ejemplo sencillo para entenderlo. Imaginemos una moneda. Dos caras, cara y cruz. ¿Cual sería la esperanza matemática (valor esperado) de que salga cara? La esperanza matemática se calcularía como la probabilidad de que, tirando la moneda un número muy muy grande de veces, salga cara.

Dado que la moneda solo puede caer en una de esas dos posiciones y ambas tienen la misma probabilidad de salir, diremos que la esperanza matemática de que salga cara es una de cada dos, o lo que es lo mismo, el 50% de las veces.

Vamos a hacer una prueba y vamos a tirar una moneda 10 veces. Supongamos que la moneda es perfecta:

- Tirada 1: C
- Tirada 2: X
- Tirada 3: X
- Tirada 4: C
- Tirada 5: X
- Tirada 6: C
- Tirada 7: C
- Tirada 8: C
- Tirada 9: X
- Tirada 10: X

¿Cuantas veces ha salido cara (contamos las C)? 5 veces ¿Cuantas veces ha salido cruz (contamos las X)? 5 veces. La probabilidad de que salga cara será de 5/10=0,5 o en porcentaje del 50%.

Una vez ha ocurrido ese suceso podemos calcular la media matemática del número de veces que ha ocurrido cada suceso. El lado cara ha salido una de cada dos veces, es decir, un 50% de las veces. La media coincide con la esperanza matemática.

Cálculo de la esperanza matemática

La esperanza matemática se calcula utilizando la probabilidad de cada suceso. La fórmula que formaliza este cálculo se enuncia como sigue:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + x_3 P(x_3) \ldots . + x_n P(x_n)$$

Dónde x es el valor del suceso, P la probabilidad de que ocurra, i el periodo en el que se da dicho suceso y N el número total de periodos u observaciones.

No siempre la probabilidad de que ocurra un suceso es la misma, como con las monedas. Existen infinidad de casos en que un suceso tiene más probabilidad de salir que otro. Por eso utilizamos en la fórmula la P. Además, al calcular número matemáticos debemos multiplicar por el valor del suceso. Abajo vemos un ejemplo.

¿Para qué se utiliza la esperanza matemática?

La esperanza matemática se utiliza en todas aquellas disciplinas en las que la presencia de sucesos probabilísticos es inherente a las mismas. Disciplinas tales como, la estadística teórica, la física cuántica, la econometría, la biología o los mercados financieros. Una gran cantidad de procesos y sucesos que ocurren en el mundo son inexactos. Un ejemplo claro y fácil de entender, es el de la bolsa de valores.

En la bolsa de valores, todo se calcula en base a valores esperados. ¿Por qué valores esperados? Porque es lo que esperamos que suceda, pero no podemos confirmarlo. Todo se basa en probabilidades, no en certezas. Si el valor esperado o esperanza matemática de la rentabilidad de un activo es de un 10% anual, querrá decir que según la información que tenemos del pasado, lo más probable es que la rentabilidad vuelva a ser de un 10%. Si solo tenemos en cuenta, claro está, la esperanza matemática como método para tomar nuestras decisiones de inversión.

Dentro de las teorías sobre mercados financieros, muchas utilizan este concepto de esperanza matemática. Entre esas teorías se encuentra la que desarrolló Markowitz sobre las carteras eficientes. En números, simplificando mucho, supongamos que las rentabilidades de un activo financiero son las siguientes:

Año 1 12%

Año 2 6%

Año 3 15%

Año 4 12%

El valor esperado sería el sumatorio de las rentabilidades multiplicadas por su probabilidad de suceder. La probabilidad de que «suceda» cada rentabilidad es de 0,25. Tenemos cuatro observaciones, cuatro años. Todos los años tienen la misma probabilidad de repetirse.

Esperanza = (12 x 0,25) + (6 x 0,25) + (15 x 0,25) + (12 x 0,25) = 3 + 1,5 + 3,75 + 3 = 11,25%

Teniendo en cuenta esta información, diremos que la esperanza de la rentabilidad del activo, es del 11,25%.

→BIBLIOGRAFIA:

ANDERSON, D. SWEENEY D. y Williams, T. (1982, 2005). Estadística para administración y economía. México: Thomson editores.

CHISTENSEN, H. (1990). Estadística paso a paso. México: trillas 3era edición.

2.2.6 MOMENTOS CON RESPECTO AL ORIGEN Y A LA MEDIA.

→BIBLIOGRAFIA:
http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/mwiper/docencia/Spanish/Teoria_Est_El/tema5_orig.pdf

2.2.7 LA VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

La varianza de una variable aleatoria es una característica numérica que proporciona una idea de la dispersión de la variable aleatoria respecto de su esperanza. Decimos que es un parámetro de dispersión.

La definición es la siguiente:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

Es, por tanto, el promedio teórico de las desviaciones cuadráticas de los diferentes valores que puede tomar la variable respecto de su valor medio teórico o esperanza.

En el caso de las variables discretas, la expresión se convierte en:

$$Var(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 f(x_i)$$

mientras que para las variables continuas tenemos:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

En ambos casos existe una expresión equivalente alternativa y generalmente de cálculo más fácil:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Una de las características de la varianza es que viene expresada en unidades cuadráticas respecto de las unidades originales de la variable. Un parámetro de dispersión derivado de la varianza y que tiene las mismas unidades de la variable aleatoria es la desviación típica, que se define como la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E((X - E(X))^2)}$$

Propiedades de la varianza

1. $Var(X) \geq 0$
2. $Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$ para todo numero real k.
3. $Var(k) = 0$ para todo numero real k.
4. $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$ para todo par de números reales a i b.

5. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ únicamente en el caso que X y Y sean independientes.

BIBLIOGRAFIA: https://www.ugr.es/~bioestad/_private/Tema_3.pdf

GARZO, F. Y GARCIA, F. (1988) Estadística. España: Mc Graw Hill Interamericana.

GIMENEZ, J. (S.F). Matemática V. Caracas: Ediciones Eneva.

UNIDAD III

ETADISTICA INFERENCIAL

3.1 PRUEBAS DE HIPOTESIS

3.1.1 INTRODUCCION

3.1.2 PRIEBA DE HIPOTESIS PARA LA MEDIA DE LA POBLACION Y LAS PROPORCIONES

3.1.3 PROEBA DE HIPOTESIS PARA LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS O DOS PROPORCIONES

→BIBLIOGRAFIA:
http://www.iuma.ulpgc.es/~nunez/mastertecnologiastelecomunicacion/Tema2InferenciaEstadistica/estadistica-y-R/2-hipotesis.pdf

3.2 REGRECION LINEAL Y CORRELACION

3.2.1 ANALISIS DE REGRESION LINEAL SIMPLE

→BIBLIOGRAFIA:

http://asesorias.cuautitlan2.unam.mx/Laboratoriovirtualdeestadistica/CARPETA%203%20INFERENCIA_ESTADISTICA/DOC_%20INFERENCIA/TEMA%204/09%20REGRESION%20Y%20CORRELACION%20LINEAL%20SIMPLE.pdf

3.2.2 REGRESION MULTIPLE

http://eio.usc.es/eipc1/BASE/BASEMASTER/FORMULARIOS-PHP-DPTO/MATERIALES/Mat_50140128_RegresionMultiple.pdf

SEMANA 3

3.3 METODOS NO PARAMETRICOS

Las técnicas estadísticas de estimación de parámetros, intervalos de confianza y prueba de hipótesis son, en conjunto, denominadas ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA y son aplicadas básicamente a variables contínuas. Estas técnicas se basan en especificar una forma de distribución de la variable aleatoria y de los estadísticos derivados de los datos.

En ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA se asume que la población de la cual la muestra es extraída es NORMAL o aproximadamente normal. Esta propiedad es necesaria para que la prueba de hipótesis sea válida.

Sin embargo, en un gran numero de casos no se puede determinar la distribución original ni la distribución de los estadísticos por lo que en realidad no tenemos parámetros a estimar. Tenemos solo distribuciones que comparar. Esto se llama Estadística No Paramétrica.

Las principales pruebas no paramétricas son las siguientes:

- Prueba χ^2 de Pearson
- Prueba binomial
- Prueba de Anderson-Darling
- Prueba de Cochran
- Prueba de Cohen kappa
- Prueba de Fisher
- Prueba de Friedman
- Prueba de Kendall
- Prueba de Kolmogórov-Smirnov
- Prueba de Kruskal-Wallis
- Prueba de Kuiper
- Prueba de Mann-Whitney o prueba de Wilcoxon
- Prueba de McNemar

- Prueba de la mediana
- Prueba de Siegel-Tukey
- Prueba de los signos
- Coeficiente de correlación de Spearman
- Tablas de contingencia
- Prueba de Wald-Wolfowitz
- Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

La mayoría de estos test estadísticos están programados en los paquetes estadísticos más frecuentes, quedando para el investigador, simplemente, la tarea de decidir por cuál de todos ellos guiarse o qué hacer en caso de que dos test nos den resultados opuestos. Hay que decir que, para poder aplicar cada uno existen diversas hipótesis nulas y condiciones que deben cumplir nuestros datos para que los resultados de aplicar el test sean fiables. Esto es, no se puede aplicar todos los test y quedarse con el que mejor convenga para la investigación sin verificar si se cumplen las hipótesis y condiciones necesarias pues, si se violan, invalidan cualquier resultado posterior y son una de las causas más frecuentes de que un estudio sea estadísticamente incorrecto. Esto ocurre sobre todo cuando el investigador desconoce la naturaleza interna de los test y se limita a aplicarlos sistemáticamente.

Es importante mencionar que si la distribución de los datos se ajusta a un tipo de distribución conocida, existen otras [pruebas] que, en la práctica, son más aconsejables pero que así mismo requieren otros supuestos. En este caso, la estadística a emplear es la estadística paramétrica, dentro de la cual muchas veces podemos encontrar equivalencias entre pruebas pero con diferencias en la potencia entre ambas siendo siempre la potencia de las pruebas no paramétricas menor que la potencia de las pruebas paramétricas equivalentes. Aun así, el uso adecuado de los tamaños muestrales disminuye la posibilidad de cometer un [error tipo II], puesto que aumenta al mismo tiempo la eficacia de la prueba . Es decir, a medida que se aumenta el tamaño de la muestra, disminuye la posibilidad de cometer un error tipo II (un falso negativo: No rechazar la hipótesis nula cuando ésta en realidad es falsa).

La estadística no paramétrica es una rama de la estadística que estudia las pruebas y modelos estadísticos cuya distribución subyacente no se ajusta a los llamados criterios paramétricos. Su distribución no puede ser definida a priori, pues son los datos observados los que la determinan. La utilización de estos métodos se hace recomendable cuando no se puede asumir que los datos se ajusten a una distribución conocida, cuando el nivel de medida empleado no sea, como mínimo, de intervalo.

La prueba de los signos es quizá la prueba no paramétrica mas antigua. En ella está, basadas muchas otras. Se utiliza para contrastar hipótesis sobre el parámetro de centralización y es usado fundamentalmente en el análisis de comparación de datos pareados. Consideremos una muestra aleatoria de tamaño n tal que sus observaciones estén o puedan estar clasificadas en dos categorías: 0 y 1, + y -, ... etc.

Podemos establecer hipótesis acerca de la mediana, los centiles, cuartiles, etc. Sabemos que la mediana deja por encima de sí tantos valores como por debajo; Considerando que $Xi - Mdn > 0$, darán signos positivos (+) y $Xi - Mdn < 0$ signos negativos (-) , en la población original tendremos tantos (+) como (-). Se tratara de ver hasta que punto el numero de signos (+) esta dentro de lo que cabe esperar que ocurra por azar si el valor propuesto como mediana es verdadero. Lo mismo se puede decir respecto a los cuartiles, centiles, o deciles.

Teniendo en cuenta que se trabaja con dos clases de valores, los que están por encima y los que están por debajo, es decir, los (+) y los (-) , los estadísiticos de contraste seguirán la distribución binomial, si se supone independencia y constancia de probabilidad en el muestreo.

La mejor forma de entender este apartado es mediante un ejemplo práctico; De modo que en la tabla que pondremos a continuación se pueden ver los resultados de un experimento sobre comparación de sabores. Un fabricante de alubias está considerando una nueva receta para la salsa utilizada en su producto. Eligio una muestra aleatoria de ocho individuos y a cada uno de ellos le pedio que valorara en una escala de 1 a 10 el sabor del producto original y el nuevo producto. Los resultados se muestran en la tabla, donde también aparecen las diferencias en las valoraciones para cada sabor y los signos de estas diferencias. Es decir, tendremos un signo + cuando el producto preferido sea el original, un signo - cuando el preferido sea el nuevo producto y un 0 si los dos productos son valorados por igual. En particular en este experimento, dos individuos han preferido el producto original y cinco el nuevo; Uno los valoro con la misma puntuación.

La hipótesis nula es que ninguno de los dos productos es preferido sobre el otro. Comparamos las valoraciones que indican la preferencia por cada producto, descartando aquellos casos en los que los dos productos fueron valorados con la misma puntuación. Así el tamaño muestral efectivo se reduce a siete, y la única información muestral en que se basara nuestro contraste será la de los dos individuos de los siete que prefirieron el producto original.

→BIBLIOGRAFIA:

https://sites.google.com/site/tecnicasdeinvestigaciond38/estadisticas-no-parametricas/3-1-estadistica-no-parametrica

Katherine (2008) Estadística Inferencial. Texto completo en: http://www.mitecnologico.com/iem/Main/EstadisticaInferencial

3.3.1 APLICACIONES DE LA CHI CUADRADA

→BIBLIOGRAFIA:

http://www.fuenterrebollo.com/Aeronautica2016/contingencia.pdf

3.3.2 ANALISIS DE LA VARIANZA

El análisis de la varianza (o Anova: Analysis of variance) es un método para comparar dos o más medias, que es necesario porque cuando se quiere comparar más de dos medias es incorrecto utilizar repetidamente el contraste basado en la *t de Student*. por dos motivos:

En primer lugar, y como se realizarían simultánea e independientemente varios contrastes de hipótesis, la probabilidad de encontrar alguno significativo por azar aumentaría. En cada contraste se rechaza la H_0 si la *t* supera el nivel crítico, para lo que, en la hipótesis nula, hay una probabilidad a. Si se realizan *m* contrastes independientes, la probabilidad de que, en la hipótesis nula, ningún estadístico supere el valor crítico es $(1 - a)^m$, por lo tanto, la probabilidad de que alguno lo supere es $1 - (1 - a)^m$, que para valores de a próximos a 0 es aproximadamente igual a a m. Una primera solución, denominada *método de Bonferroni*, consiste en bajar el valor de a, usando en su lugar a/*m*, aunque resulta un método muy conservador.

Por otro lado, en cada comparación la hipótesis nula es que las dos muestras provienen de la misma población, por lo tanto, cuando se hayan realizado todas las comparaciones, la hipótesis nula es que todas las muestras provienen de la misma población y, sin embargo, para cada comparación, la estimación de la varianza necesaria para el contraste es distinta, pues se ha hecho en base a muestras distintas.

El método que resuelve ambos problemas es el *anova*, aunque es algo más que esto: es un método que permite comparar varias medias en diversas situaciones; muy ligado, por tanto, al diseño de experimentos y, de alguna manera, es la base del análisis multivariante.

Supónganse *k* muestras aleatorias independientes, de tamaño *n*, extraídas de una única población normal. A partir de ellas existen dos maneras independientes de estimar la varianza de la población s^2

1) Una llamada *varianza dentro de los grupos* (ya que sólo contribuye a ella la varianza dentro de las muestras), o *varianza de error*, o *cuadrados medios del error*, y habitualmente representada por *MSE* (Mean Square Error) o *MSW* (Mean Square Within) que se calcula como la media de las *k* varianzas muestrales (cada varianza muestral es un estimador centrado de s^2 y la media de *k* estimadores centrados es también un estimador centrado y más eficiente que todos ellos). *MSE* es un cociente: al numerador se le llama *suma de cuadrados del error* y se representa por *SSE* y al denominador *grados de libertad* por ser los términos independientes de la suma de cuadrados.

2) Otra llamada *varianza entre grupos* (sólo contribuye a ella la varianza entre las distintas muestras), o *varianza de los tratamientos*, o *cuadrados medios de los tratamientos* y representada por *MSA* o *MSB* (Mean Square Between). Se calcula a partir de la varianza de las medias muestrales y es también un cociente; al numerador se le llama *suma de cuadrados de los tratamientos* (se le representa por *SSA)* y al denominador (*k*-1) grados de libertad.

MSA y *MSE*, estiman la varianza poblacional en la hipótesis de que las *k* muestras provengan de la misma población. La distribución muestral del cociente de dos estimaciones independientes de la varianza de una población normal es una *F* con los grados de libertad correspondientes al numerador y denominador respectivamente, por lo tanto se puede contrastar dicha hipótesis usando esa distribución.

Si en base a este contraste se rechaza la hipótesis de que *MSE* y *MSA* estimen la misma varianza, se puede rechazar la hipótesis de que las *k* medias provengan de una misma población. Aceptando que las muestras provengan de poblaciones con la misma varianza, este rechazo implica que las medias poblacionales son distintas, de modo que con un único contraste se contrasta la igualdad de *k* medias.

Existe una tercera manera de estimar la varianza de la población, aunque no es independiente de las anteriores. Si se consideran las *kn* observaciones como una única muestra, su varianza muestral también es un estimador centrado de s^2:

Se suele representar por *MST*, se le denomina *varianza total* o *cuadrados medios totales*, es también un cociente y al numerador se le llama *suma de cuadrados total* y se representa por *SST*, y el denominador (*kn* -1) grados de libertad.

Los resultados de un anova se suelen representar en una tabla como la siguiente:

Fuente de variación	G.L.	SS	MS	F
Entre grupos Tratamientos	*k*-1	*SSA*	*SSA* /(*k*-1)	*MSA* /*MSE*
Dentro Error	(*n*-1)*k*	*SSE*	*SSE* /*k*(*n*-1)	
Total	*kn*-1	*SST*		

F se usa para realizar el contraste de la hipótesis de medias iguales. La región crítica para dicho contraste es *F* > *F*

Es fácil ver en la tabla anterior que

$GL_{error} + GL_{trata} = (n - 1)\ k + k - 1 = k + k - 1 = nk - 1 = GL$

No es tan inmediato, pero las sumas de cuadrados cumplen la misma propiedad, llamada *identidad* o *propiedad aditiva* de la suma de cuadrados:

SST = SSA + SSE

El análisis de la varianza se puede realizar con tamaños muestrales iguales o distintos, sin embargo es recomendable iguales tamaños por dos motivos:

1) La *F* es insensible a pequeñas variaciones en la asunción de igual varianza, si el tamaño es igual.

2) Igual tamaño minimiza la probabilidad de error tipo II.

Ejemplo 1

Se quiere evaluar la eficacia de distintas dosis de un fármaco contra la hipertensión arterial, comparándola con la de una dieta sin sal. Para ello se seleccionan al azar 25 hipertensos y se distribuyen aleatoriamente en 5 grupos. Al primero de ellos no se le suministra ningún tratamiento, al segundo una dieta con un contenido pobre en sal, al tercero una dieta sin sal, al cuarto el fármaco a una dosis determinada y al quinto el mismo fármaco a otra dosis. Las presiones arteriales sistólicas de los 25 sujetos al finalizar los tratamientos son:

Grupo				
1	2	3	4	5
180	172	163	158	147
173	158	170	146	152
175	167	158	160	143
182	160	162	171	155
181	175	170	155	160

La tabla de anova es:

Fuente de variación	GL	*SS*	*MS*	*F*
Tratamiento	4	2010,64	502,66	11,24
Error	20	894,4	44,72	
Total	24	2905,04		

Como *F* =2,87 y 11,24>2,87 rechazamos la hipótesis nula y concluimos que los resultados de los tratamientos son diferentes.

→BIBLIOGRAFIA:

ANDERSON, D. SWEENEY D. y Williams, T. (1982, 2005). Estadística para administración y economía. México: Thomson editores.

3.5 CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

→BIBLIOGRAFIA:

https://cdigital.uv.mx/bitstream/handle/123456789/47685/CamposRoblesEmmanuel.pdf?sequence=1&isAllowed=y

3.6 MATEMATICAS FINANCIERAS

http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/20172/contaduria/1/apunte/LC_1154_14116_A_MatematicasFinancieras.pdf

UNIDAD IV

INVESTIGACION DE OPERACIONES

4.1.- ORIGEN Y DESARROLLO.

Introducción

La investigación de operaciones se entiende que es la aplicación de un método científico para resolver problemas dentro de una organización que permita a la misma, tomar las decisiones correctas o acertadas para tener las soluciones que más convengan o favorezcan a la organización, además de mejorar la coordinación entre las múltiples áreas de la organización y mejorar el control de sistemas, hoy por hoy es indispensable que una organización cuente con esta área.

Las primeras actividades formales en la historia de la investigación de operaciones se dieron en Inglaterra en la Segunda Guerra Mundial, cuando se encarga a un grupo de científicos ingleses el diseño de herramientas cuantitativas para el apoyo a la toma de decisiones acerca de la mejor utilización de materiales bélicos. Se presume que el nombre de Investigación de Operaciones fue dado aparentemente porque el equipo de científicos estaba llevando a cabo la actividad de Investigar Operaciones (militares).

Una vez terminada la guerra las ideas utilizadas con fines bélicos fueron adaptadas para mejorar la eficiencia y la productividad del sector civil.

Historia de la investigación de operaciones

La búsqueda de la mejor solución (máxima, mínima, o también la óptima) para una variedad de problemas ha divertido e intrigado al hombre a través de las épocas. Euclides en su libro III, describió formas de encontrar las líneas rectas de mayor y menor longitud, desde un punto hasta la circunferencia de un círculo; y en el libro IV, el paralelogramo de mayor área para un perímetro dado. Los grandes matemáticos de los siglos XVI a XVIII desarrollaron la teoría y proceso de optimización que resuelven difíciles problemas geométricos, dinámicos y físicos, tales como las curvas de revolución mínima o la curva de descenso más rápido.

En general, la historia no se escribe con exactitud, pero si se pueden recopilar hechos que describan de alguna manera la evolución conocida de acuerdo con escritos, estudios e investigaciones encontradas. Las técnicas utilizadas en la aplicación de la IO conducen al pasado siglo XX, pero también al pasado remoto de siglos como antecedentes. Para ello es conveniente fijarse en la idea fundamental de la IO que es el método científico cuyo origen exacto se desconoce. En escritos hechos hace milenios como es el Antiguo Testamento se menciona a Jetro, suegro de Moisés, como autor de un tratado de principios de organización y más recientemente, en el antepasado siglo XIX, Charles Babbage es autor del trabajo On the Economy of Machinery and Manufactures. Al ingeniero Frederick Winslow Taylor, norteamericano de origen, se le reconoce la paternidad de la Administración Científica debido a sus investigaciones sobre las obligaciones y tareas de los jefes de taller, así como también de la producción diaria individual según la capacidad del obrero para tareas específicas, definiendo así la división del trabajo mediante capacitación, selección y adiestramiento de los trabajadores. Además, Taylor aplicó el análisis científico a los problemas de manufactura, estableciendo normas de trabajo y la especialización. Por su parte Henry L. Gant, planeó las tareas de las máquinas para evitar demoras de producción. Así es posible fijar fechas de entrega con más seguridad. También contribuyó al enfoque científico incluyendo el aspecto humano como integrante.

Con el inicio del siglo XX, los investigadores también utilizaron procedimientos científicos para analizar problemas localizados fuera de las ciencias puras como son la Física, la Química, la Biología, entre otras más, pero en la década que se inicia en 1910, Taylor se dedicó a buscar la eficiencia para las tareas haciendo valer los estudios de tiempos y movimientos de Frank y Lillian Gilbreth eliminando movimientos innecesarios y desperdicios en cada tarea. En la misma década durante la 1ª. Guerra Mundial, se le confió a Thomas A. Edison el averiguar las maniobras más eficaces de los barcos mercantes para disminuir los embarques perdidos por ataques de los submarinos enemigos. Edison empleó un «tablero táctico» como modelo para simular las operaciones reales.

Un ingeniero danés A. K. Erlang hizo experimentos relacionados con las fluctuaciones de la demanda telefónica en equipo automático quedando estos trabajos como fundamento de muchos modelos matemáticos que se usan actualmente en los estudios de Teoría de Colas o Líneas de Espera. En 1937, a punto de empezar la Segunda Guerra Mundial, se juntó en el Reino Unido a un equipo de matemáticos, ingenieros y científicos en áreas básicas, para estudiar los problemas estratégicos y tácticos asociados con la defensa del país. Se formó un equipo cuyo objetivo era determinar la utilización más efectiva de los limitados recursos militares. En consecuencia, a las actividades de este grupo se le llamó Investigación Operacional, que es terminología común en el medio militar. Primero se les pidió ayuda para los militares en la utilización eficiente del radar para localizar aviones enemigos; después en 1940 se reunió otro grupo, el circo de Blackett encabezado por el distinguido físico inglés P. Blackett para estudiar la actuación del equipo de control de cañones en el campo; había tres fisiólogos, cuatro matemáticos, un físico, un astrofísico, un oficial militar y un agrimensor.

En los Estados Unidos de Norteamérica se motivaron por los éxitos alcanzados por los grupos británicos, en Abril de 1942 se decidió introducir la IO a nivel superior, emprendiendo también estudios tales como: problemas logísticos complejos, el desarrollo de patrones de vuelo para aviones y la planeación de maniobras navales. En la Fuerza Aérea se le dio el nombre de Análisis de Operaciones y en el Ejército y la Marina los de Investigación de Operaciones y Evaluación de Operaciones, respectivamente. Cuando terminó la guerra, la necesidad de reconstruir en la Gran Bretaña, dio lugar al surgimiento de otros problemas de administración en sectores de gobierno e industria los cuales demandaron la actuación de los mismos científicos especializados en la IO.

También en los Estados Unidos de Norteamérica, en la década de 1950 con el desarrollo y comercialización de las computadoras, los investigadores de operaciones y la gente asociada con las operaciones de la última guerra, se percataron que los estudios realizados en la misma eran de gran utilidad, aplicados a los problemas industriales. La computadora y el desarrollo de la IO motivaron a los ejecutivos industriales y a los especialistas de esta disciplina para reunirse y provocar su rápido crecimiento.

La Programación Lineal (PL) tuvo un gran impulso para la investigación industrial dando entrada las empresas a muchos especialistas; las técnicas Pert, control de inventarios, y la simulación, empezaron a emplearse con éxito; en vez de los simples promedios, se incluyeron la probabilidad y la estadística tan útiles en cualquier estudio moderno.

Actualmente el uso de la IO es extenso en áreas de: contabilidad, compras, planeación financiera, mercadotecnia, planeación de producción, transporte y muchas otras más, convirtiéndose en importante instrumento de competencia para los presupuestos y contratos.

La siguiente tabla esboza parte de los estudios y técnicas en que se apoyaron los grupos de IO en el desarrollo de esta disciplina.

Antecedente histórico de Investigación de Operaciones.- Desde el siglo XVI:

$$\textit{Cálculo Diferencial} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Newton} \\ \textit{Lagrange} \\ \textit{Leibinitz} \\ \textit{Stiegles} \\ \textit{Laplace} \end{array} \right. \qquad \textit{Probabilidad y Estadística} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Bernoulli} \\ \textit{Poisson} \\ \textit{Gauss} \\ \textit{Bayes} \\ \textit{Snedecor} \end{array} \right.$$

Año	Autor	Tecnica Desarrollada
1759	Quesnay	Modelos primarios de programación matemática
1873	Jordan	Modelos lineales
1874	Warlas	Modelos primarios de programación matemática
1896	Minkousky	Modelos lineales
1897	Markov	Modelos dinámicos probabilísticos
1903	Farkas	Modelos dinámicos probabilísticos
1905	Erlang	Líneas de espera
1920-1930	Konig - Egervary	Asignación
1937	Morgestern	Lógica estadística
1937	Von Neuman	Teoría de juegos
1939	Kantorovich	Planeación en producción y distribución
1941	Hitchcock	Transporte
1947	Dantzig George	Método Simplex
1958	Bellman Richard	Programación dinámica
1950-1956	Kun-Tucker	P. no lineal, m. húngaro, sistemas desigualdades
1958	Gomory	Programación entera
1956-1962	Ford - Fulkerson	Redes de flujo
1957	Markowitz	Simulación y programación discreta
	Raifa	Análisis de decisiones
1958	Arrow-Karlin	Inventarios
1963	Karmarkar Narend	Algoritmo de punto interior

Se puede observar que la IO fue desarrollada en el siglo XX con el apoyo, siglos atrás, de importantes aportaciones de científicos que con su talento y dedicación, dejaron sólidos cimientos para los estudios de solución en los sistemas actuales.

Conclusión

La IO es el procedimiento científico que está auxiliado por modelos y técnicas matemáticas, servible para diseñar y operar a los problemas complejos de la dirección y administración de grandes sistemas que forman una organización compleja en las cuales las decisiones son muy importantes y difíciles de elegir, ya que la eficacia de una decisión sobre guardará la supervivencia y desarrollo de ésta, al contrario estaría en camino hacia el fracaso.

Desde la primera guerra mundial se dio a Édison la tarea de averiguar maniobras de los barcos mercantes que fueran más eficaces para disminuir las pérdidas de embarques causadas por los submarinos enemigos. En vez de arriesgar los barcos en condiciones bélicas reales, se empleó un tablero táctico para encontrar la solución, a fines de la década de 1910, erlang, un ingeniero danés llevo a cabo experimentos relacionados con las fluctuaciones de la demanda de instalaciones telefónicas en relación con el equipo automático, sus trabajos constituyen la base de muchos de los modelos matemáticos que actualmente se usan en líneas de espera, A través del tiempo el hombre siempre ha buscado la mejor solución a la gran variedad de problemas las técnicas de investigación de operaciones.

La investigación de operaciones representa un apoyo para la toma de decisiones, es un apoyo para la asignación óptima de los recursos para una actividad, evalúa el rendimiento de un sistema con objeto de mejorarlo, obtiene información cuantitativa y ayuda a mejorar procesos tradicionales así como conocer algunas de las limitaciones en los modelos.

Bibliografía

ACK68.- Ackoff Rusell L. & Sasieni Maurice W.

Fundamentals of Operations Research. Wiley. New York. 1968.

DAN63.- Dantzig George B.

Linear Programming and Extensions. Princenton University Press. Princenton N.J. 1963.

GAS74.- Gass Saul I.

Linear Programming. Methods and Applications. McGraw Hill, New York.1974

HIL95.- Hillier-Lieberman.

4.2.- ENFOQUE DE MODELADO EN LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Y EL USO DE MODELOS

Un poco de Historia

Se inicia desde la revolución industrial, en los libros se dice que fue a partir de la segunda Guerra Mundial. La investigación de operaciones se aplica a casi todos los problemas. En 1947, en E.U., George Datzing encuentra el método SIMPLEX para el problema de programación lineal. En la investigación de operaciones, las computadoras son la herramienta fundamental en la investigación de operaciones.

Definición

Investigación de operaciones, es la aplicación del método científico por un grupo multidisciplinario de personas a un problema, principalmente relacionado con la distribución eficaz de recursos limitados (dinero, materia prima, mano de obra, energía), que apoyados con el enfoque de sistemas (este enfoque, es aquel en el que un grupo de personas con distintas áreas de conocimiento, discuten sobre la manera de resolver un problema en grupo.). Puede considerarse tanto un arte como una ciencia. Como arte refleja los conceptos eficiente y limitado de un modelo matemático definido para una situación dada. Como ciencia comprende la deducción de métodos de cálculo para resolver los modelos.

Panorama del enfoque de modelado en investigación de operaciones

Una manera de resumir las etapas usuales (no secuenciales) de un estudio de IO es la siguiente:

1. Definición del problema de interés y recolección de los datos relevantes
2. Formulación de un modelo que represente el problema
3. Solución del modelo
4. Prueba del modelo
5. Preparación para la aplicación del modelo
6. Puesta en marcha

Definición del problema y recolección de datos

La primera actividad que se debe realizar es el estudio del sistema relevante, esto incluye determinar los objetivos, las restricciones sobre lo que se puede hacer, los diferentes cursos de acción posibles las interrelaciones del área bajo estudio con otras áreas de la organización, los límites de tiempo para tomar una decisión . Este proceso de definir el problema es muy importante ya que afectará en forma significativa las conclusiones en estudio, lo cual hace imposible extraer una respuesta correcta de un problema equivocado. Lo primero que hay que reconocer es que un equipo de IO, por lo general trabaja en un nivel de asesoría. A los miembros del equipo no se les presentan un problema y se les dice que lo resuelvan como puedan, sino que asesoran a la gerencia (casi siempre un tomador de decisiones). El equipo realiza un análisis técnico y después presentan un informe a los administradores. Con frecuencia, el informe a la gerencia identifica cierto número de opciones atractivas, en particular bajo diferentes suposiciones. El gerente evalúa el estudio y sus recomendaciones. Y toma una decisión final basándose en su mejor juicio. Entonces, es vital que el equipo de IO pueda observar desde el mismo nivel que la gerencia.

Es común que el equipo de IO pase mucho tiempo recolectando los datos relevantes sobre el problema.

Ejemplo: Un estudio de IO hecho para Citgo Petroleum Corporation optimizó tanto las operaciones de refinación como el abastecimiento, la distribución y la comercialización de sus productos, logrando un mejoramiento en las utilidades de alrededor de $70 millones de dólares al año. La recolección de datos también jugó un papel muy importante en este estudio.

Formulación del modelo

Una vez definido el problema la siguiente etapa consiste en reformularlo para su análisis, mediante la construcción de un modelo que represente la esencia del problema. Los modelos son representaciones idealizadas de la realidad. Los modelos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema, una ventaja obvia es que el modelo describe un problema en forma mucho más concisa. Al desarrollar el modelo, se recomienda empezar con una versión muy sencilla y moverse, en forma evolutiva, hacia modelos más elaborados que reflejen mejor la complejidad del problema real. Los modelos siempre deben ser menos complejos que el sistema real, de otra manera, no tiene sentido trabajar con modelos si se puede trabajar con el sistema real en sí.

Ejemplo: La oficina responsable del control del agua y los servicios públicos del gobierno de Holanda, el Rijkswaterstatt, contrató un importante estudio de IO para guiarlo en el desarrollo de una nueva política de administración del agua. La nueva política ahorró cientos de millones de dólares en gastos de inversión y redujo el daño agrícola en alrededor de $15 millones de dólares anuales, al mismo tiempo que disminuyó la contaminación térmica y debida a las algas. En lugar de formular modelo, éste estudio de IO desarrolló un sistema integrado y comprensible de 50 modelos, algunos de los modelos se desarrollaron en versiones sencillas y complejas. La versión sencilla se usó para adquirir una visión básica, en cambio la versión compleja se usó cuando se deseaba mayor exactitud o más detalles en los resultados.

Obtención de una solución a parir del modelo

Una vez formulado el modelo para el problema bajo estudio, la siguiente etapa de un estudio consiste en desarrollar un procedimiento para derivar en una solución al problema a partir de este modelo, según el tipo de modelo este puede hacerse en computadora. Puede pensarse que esta debe ser la parte principal de estudio, pero por lo general no lo es, encontrar la solución es la parte divertida del estudio, mientras que el verdadero trabajo se encuentra en las etapas anteriores y posteriores del estudio. Un tema común es la búsqueda de una solución óptima, es decir, la mejor, es necesario reconocer que estas soluciones son óptimas sólo respecto al modelo que se esta utilizando. Como el modelo necesariamente es una idealización y no una representación del problema real, no puede existir una garantía de que la solución óptima del modelo resulte ser la mejor solución posible que pueda llevarse a la práctica para el problema real. Esto, por supuesto, es de esperarse si se toma en cuenta los muchos imponderables e incertidumbre asociados a casi todos los problemas reales, pero si el modelo está bien formulado la solución debe tener una buena aproximación de curso de acción ideal para el problema real.

El eminente científico de la administración y premio Nobel de Economía, Herbert Simon, introdujo el concepto de que en la práctica es mucho más frecuente satisfazar que optimizar. Al inventar el término satisfazar como una combinación de satisfacer y optimizar. La distinción entre optimizar y satisfazar refleja la diferencia entre la teoría y la realidad.

Por lo tanto, la meta de un estudio de IO debe ser llevar a cabo el estudio de una manera óptima, independientemente de si implica o no encontrar una solución óptima para el modelo. Al reconocer este concepto, en ocasiones se utilizan solo procedimientos de diseño intuitivo para encontrar una buena solución subóptima.

Una solución óptima para el modelo original puede ser mucho menos que ideal para el problema real, de manera que es necesario hacer un análisis adicional. El análisis posóptimo, constituye una parte muy importante, éste determina qué parámetros del modelo son los más críticos, los parámetros críticos, del modelo son aquellos cuyos valores no se pueden cambiar sin que la solución óptima cambie.

Ejemplo: Considere de nuevo el estudio de IO para el Rijkswaterstatt sobre la política nacional de administración de agua en Holanda. Este estudio no concluyó con la recomendación de una solución. Más bien, se identificaron, analizaron y compararon varias alternativas atractivas. El análisis postóptimo jugó un papel importante en este estudio. Por ejemplo, ciertos parámetros de los modelos representaron estándares ecológicos. El análisis postóptimo incluyó la evaluación del impacto en los problemas de agua si los valores de los parámetros se cambiaran de los estándares ecológicos a otros valores razonables. Se usó también para evaluar el impacto de cambio de las suposiciones de los modelos, por ejemplo, la suposición sobre el efecto de tratados internacionales futuros sobre la contaminación que pudiera llegar, etc.

Prueba del modelo

Sin duda que la primera versión de un modelo grande tenga muchas fallas, por lo tanto antes de usar el modelo debe probarse para identificar y corregir todas las fallas que se pueda, este proceso de prueba y mejoramiento se conoce como validación del modelo. Un modelo es válido si, independientemente de sus inexactitudes, puede dar una predicción confiable del funcionamiento del sistema. Un método común para probar la validez de un modelo es comparar su funcionamiento con algunos datos pasados disponibles del sistema actual (se le llama también prueba retrospectiva). Debe notarse que tal método de validación no es apropiado para sistemas que no existen, ya que no habrá datos disponibles para poder comparar. Otro método podría ser incluir a una persona que no haya participado en la formulación del modelo, para poder encontrar errores que el equipo de IO no encontró.

Ejemplo: Considerando nuevamente el estudio de IO para el Rijkswaterstatt sobre la política de administración del agua. El proceso de prueba del modelo en este caso constó de tres grandes partes. Primero, el equipo de IO verificó el comportamiento general de los modelos viendo si los resultados de cada uno de ellos cambiaban en forma razonable al hacer cambios en los valores de los parámetros. Segundo, se hizo una prueba retrospectiva. Tercero, personas totalmente ajenas al proyecto, llevaron a cabo una revisión técnica de los modelos, la metodología y los resultados. Este proceso llevó al reconocimiento de varios aspectos importantes y a mejoras en los modelos.

Preparación para la aplicación del modelo

El siguiente paso es instalar un sistema bien documentado para aplicar el modelo. Este sistema incluirá el modelo y el procedimiento de solución (además del análisis postóptimo) y los procedimientos operativos para su implantación (este sistema casi siempre esta diseñado para computadora).

Parte de este esfuerzo incluye el desarrollo de un proceso de mantenimiento durante su uso futuro, por lo tanto si las condiciones cambian con el tiempo, este proceso debe modificar al sistema como al modelo.

Implantación del modelo

Una vez desarrollado el sistema para aplicar el modelo, la última etapa consiste en la implantación de los resultados probados del modelo. Esto básicamente implicaría la traducción de estos resultados en instrucciones de operación detallada, emitidas en una forma comprensible a los individuos que administrará y operarán al sistema. A la culminación del estudio, es apropiado que el equipo de IO documente su metodología utilizada con suficiente claridad para que el trabajo sea reproducible.

Ejemplo: Volviendo al caso de la política nacional de administración del agua del Rijkswaterstatt en Holanda. La administración deseaba documentación más extensa que lo normal, tanto para apoyar la nueva política como para utilizarla en la capacitación de nuevos analistas o al realizar nuevos estudios.

Pasos del Método científico en IO

Delimitación del problema

Modelación del problema

Resolución del modelo

Verificación con la realidad

Implantación

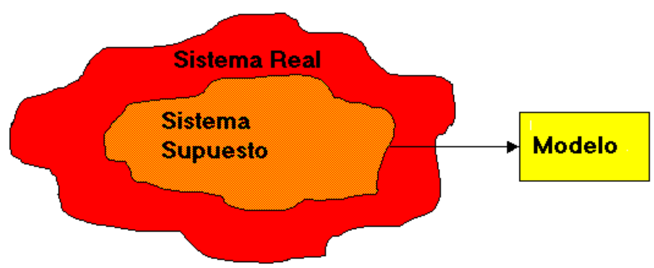
Conclusiones

TIPOS DE MODELOS Y SU SIGNIFICADO

Un modelo es una representación ideal de un sistema y la forma en que este opera. El objetivo es analizar el comportamiento del sistema o bien predecir su comportamiento futuro. Obviamente los modelos no son tan complejos como el sistema mismo, de tal manera que se hacen las suposiciones y restricciones necesarias para representar las porciones más relevantes del mismo. Claramente no habría ventaja alguna de utilizar modelos si estos no simplificaran la situación real. En muchos casos podemos utilizar modelos matemáticos que, mediante letras, números y operaciones, representan variables, magnitudes y sus relaciones.

Modelos Matemáticos

Un modelo es producto de una abstracción de un sistema real: eliminando las complejidades y haciendo suposiciones pertinentes, se aplica una técnica matemática y se obtiene una representación simbólica del mismo.



Un modelo matemático consta al menos de tres conjuntos básicos de elementos:

Variables de decisión y parámetros

Las variables de decisión son incógnitas que deben ser determinadas a partir de la solución del modelo. Los parámetros representan los valores conocidas del sistema o bien que se pueden controlar.

Restricciones

Las restricciones son relaciones entre las variables de decisión y magnitudes que dan sentido a la solución del problema y las acotan a valores factibles. Por ejemplo si una de las variables de decisión representa el número de empleados de un taller, es evidente que el valor de esa variable no puede ser negativa.

Función Objetivo

La función objetivo es una relación matemática entre las variables de decisión, parámetros y una magnitud que representa el objetivo o producto del sistema. Por ejemplo si el objetivo del sistema es minimizar los costos de operación, la función objetivo debe expresar la relación entre el costo y las variables de decisión. La solución OPTIMA se obtiene cuando el valor del costo sea mínimo para un conjunto de valores factibles de las variables. Es decir hay que determinar las variables $x1, x2, ..., xn$ que optimicen el valor de $Z = f(x1, x2, ..., xn)$ sujeto a restricciones de la forma $g(x1, x2, ..., xn) \leq b$. Donde $x1, x2, ..., xn$ son las variables de decisión Z es la función objetivo, f es una función matemática.

Ejemplo A1:

Sean x1 y x2 la cantidad a producirse de dos productos 1 y 2, los parámetros son los costos de producción de ambos productos, $3 para el producto 1 y $5 para el producto 2. Si el tiempo total de producción esta restringido a 500 horas y el tiempo de producción es de 8 horas por unidad para el producto 1 y de 7 horas por unidad para el producto 2, entonces podemos representar el modelo como:

$C = 3x1 + 5x2$ (Costo total de Producción)

Sujeto a:

$8x1 + 7x2 \leq 500$

$x1 \geq 0$ y $x2 \geq 0$.

Ejercicios A1:

Se pide construir un cilindro del máximo volumen posible utilizando a lo más 3m2 de material calcule el radio (r) y la altura (h) del mismo.

En una empresa se fabrican dos productos, cada producto debe pasar por una máquina de ensamblaje A y otra de terminado B, antes de salir a la venta, el producto 1 se vende a

$60 y el otro a $50 por unidad. La siguiente tabla muestra el tiempo requerido por cada producto:

Producto	Maquina A	Maquina B
1	2 H	3 H
2	4 H	2 H
Total disponible	48 H	36 H

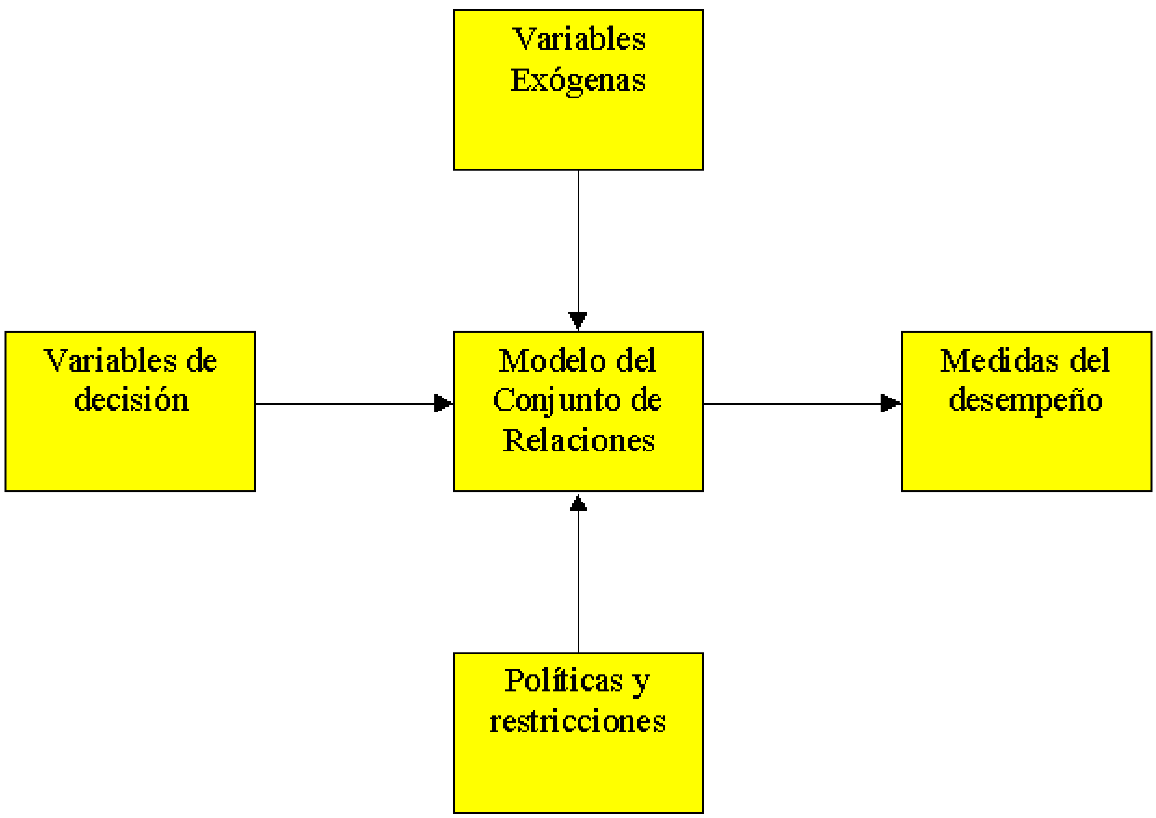
Clasificación de Modelos

Muchos problemas de decisión implican un gran número de factores o variables importantes o pueden tener muchas opciones a considerar por lo que se hace necesario la utilización de computadoras para su solución. Por ejemplo una empresa puede contar con varias fábricas donde produce bienes para enviar a cientos de clientes. Decidir la programación de las fábricas y determinar cuales de ellas deben atender a cuales clientes, para minimizar costos, implica cientos de variables y restricciones que pueden tener millones de posibles soluciones. Los modelos de programación lineal y programación entera son las técnicas más utilizadas para resolver problemas grandes y complejos de negocios de este tipo. En ellos se aplican técnicas matemáticas para hallar el valor máximo (o el mínimo) de un objetivo sujeto a un conjunto de restricciones.

La simulación es una técnica para crear modelos de sistemas grandes y complejos que incluyen incertidumbre. Se diseña un modelo para repetir el comportamiento del sistema. Este tipo de modelo se basa en la división del sistema en módulos básicos o elementales que se enlazan entre sí mediante relaciones lógicas bien definidas. El desarrollo de un modelo de simulación es muy costoso en tiempo y recursos.

Problemas dinámicos los problemas dinámicos de decisión implican un tipo particular de complejidad cuando hay una secuencia de decisiones interrelacionadas a través de varios períodos. Por ejemplo modelos de inventario, para determinar cuando pedir mercadería y cuanto debe mantenerse en existencia; los modelos PERT o de ruta Critica para la programación de proyectos y los modelos de colas para problemas que involucran congestión.

En los problemas complejos pueden aparecer variables exógenas o variables externas, importantes para el problema de decisión, pero que están condicionadas por factores que están fuera del control de la persona que decide, tales como condiciones económicas, acciones de los competidores, precios de las materias primas y otros factores similares. Las restricciones pueden considerar ciertas políticas definidas por la empresa tales como que los materiales tienen que adquirirse a determinados proveedores o que deben mantenerse ciertos niveles de calidad.



La investigación de operaciones, tiene métodos de optimización aplicables a los siguientes tipos de problemas:

METODOS DETERMINISTICOS: Ej, Programación lineal, programación entera, probabilidad de transporte, programación no lineal, teoría de localización o redes, probabilidad de asignación, programación por metas, teoría de inventarios, etc.

METODOS PROBABILISTICOS: Ej. Cadenas de Markov, teoría de juegos, líneas de espera, teoría de inventarios, etc.

METODOS HIBRIDOS: Tienen que ver con los métodos determínisticos y probabilísticos como la teoría de inventarios.

METODOS HEURISTICOS: Son las soluciones basadas en la experiencia, como la programación heurística.

Un Analista de investigación de Operaciones debe elegir el plan de acción más efectivo para lograr las metas de la organización, debe seleccionar un conjunto de medidas de desempeño, utilizar una unidad monetaria y tomar decisiones, debe seguir un proceso general de solución, en cualquier situación, durante la toma de decisiones. Deben establecerse los criterios de tomas de decisiones (Costos, Cantidades, Máximos, Mínimos etc), seleccionar las alternativas, determinar un modelo y evaluarlo, integrar la información cuantitativa obtenida para luego decidir. Muchas veces hay que incorporar factores cualitativos tales como el ánimo y el liderazgo en la organización, problemas de empleo, contaminación u otras de responsabilidad social.

Nota: el proceso de abstracción (idealización restricción y simplificación) siempre introduce algún grado de error en las soluciones obtenidas, por lo que el ejecutivo no debe volverse incondicional de un modelo cuantitativo y adoptar automáticamente sus conclusiones como la decisión correcta. La cuantificación es una ayuda para el juicio empresarial y no un sustituto de este.

Los modelos planteados se conocen como modelos determinísticos. En contraste, en algunos casos, quizá no se conozcan con certeza los datos, más bién se determinan a través de distribuciones de probabilidad, se da cabida a la naturaleza probabilistica de los fenómenos naturales. Esto da orígen a los así llamados modelos probabilísticos o estocásticos.

Las dificultades evidentes en los cálculos de los modelos matemáticos han obligado a los analistas a buscar otros métodos de cálculo que aunque no garantizan la optimalidad de la solución final, buscan una buena solución al problema. Tales métodos se denominan heuristicos. Suelen emplearse con dos fines: En el contexto de un algoritmo de optimización exacto, con el fin de aumentar la velocidad del proceso. En segundo lugar para obtener una solución al problema aunque no óptima, la que puede ser muy difícil encontrar.

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

En un problema de optimización se busca maximizar o minimizar una cantidad específica llamada objetivo, la cual depende de un número finito de variables, en un modelo de optimización restringida, éstas se encuentran relacionadas a través de una o más restricciones. El planteamiento de este modelo se conoce como programa matemático. Los programas matemáticos tienen la forma:

Optimizar $z = f(x1,x2,..,xn)$ (1)

Con las condiciones:

$g1(x1,x2,..,xn)$ ...b1

$g2(x1,x2,..,xn) \leq b2$

.... =

.... $\geq$

$gm(x1,x2,..,xn)$ ...bm

Cada una de las m relaciones emplea uno de los signos $\leq, \geq$, = respecto de las constantes bi , i = 1,..,m. Los programas matemáticos sin restricciones se producen cuando todas las gi y las bi son 0 i = 1,..,m.

Programación Lineal

Un programa matemático (1) es lineal si $f(x1,x2,..,xn)$ y cada $gi(x1,x2,..,xn)$ $j = 1,..,m$ son lineales en cada uno de sus argumentos, es decir

$$f(x1,x2,..,xn) = c1x1 + c2x2 + ... + cnxn$$

y

$$gi(x1,x2,..,xn) = ai1x1 + ai2x2 + ... + ainxn$$

donde las cj y las aij ($i = 1,..m$; $j = 1, .. n$) son constantes conocidas o parámetros del sistema. Cualquier otro programa que no cumpla la linealidad de f o de gi es no lineal.

El Ejemplo A.1 es un problema de programación lineal en dos variables.

Programación Entera

Un programa lineal que tiene la restricción adicional de que las variables de decisión son números enteros se conoce como programa entero. No es necesario que las cj y las aij y las bj sean enteros, pero, normalmente esto es así.

Ejemplo A2

Un fabricante de dos productos A y B dispone de 6 unidades de material y 28 Horas para su ensamblaje, el modelo A requiere 2 unidades de de material y 7 horas de ensamblaje, el modelo B requiere una unidad de material y 8 horas de ensamblaje, los precios de los productos son $120 y $80 respectivamente. ¿Cuantos productos de cada modelo debe fabricar para maximizar su ingreso?

Sea x1 y x2 la cantidad de productos a producir de A y B

El objetivo se Expresa Como:

Maximizar $z = 120x1 + 80x2$

El fabricante está sujeto a dos restricciones:

De Material : $2x1 + x2 \leq 6$

De Horas : $7x1 + 8x2 \leq 28$

De no negatividad $x1 \geq 0$ y $x2 \geq 0$

Además no se venden productos no terminados por lo tanto las variables x1 y x2 deben ser enteras.

Programación no lineal

En este caso se destaca el estudio de optimización en una variable sin restricciones de la forma:

Optimizar z = f(x)

donde f es función no lineal de x y la optimización se realiza en (-¥,¥). Si la busqueda se cisrcunscribe a un sub intervalo finito [a,b] el problema es de optimizacion no lineal restringida y se transforma a

Optimizar z = f(x)

con la condición $a \leq x \leq b$.

Optimización no lineal multivariable

Es el caso análogo al anterior, pero en el caso en que la función f es de más de una variable, es decir:

Optimizar z = f(X) donde X = [x1, x2, ..., xn]T

Si existen las restricciones

Gi(X) = 0

Es un problema no lineal multivariable restringido.

Ejemplo A3

Una Compañía desea construir una planta que recibirá suministros desde tres ciudades A, B, C, tomando como origen la ciudad A, B tiene coordenadas (300 Km. al Este,400 Km. al Norte), y C tiene coordenadas (700 Km. al Este, 300 Km. al Norte) respecto de A. La posición de la planta debe estar en un punto tal que la distancia a los puntos A, B y C sea la mínima.

Sean x1 y x2 las coordenadas desconocidas de la planta respecto de A.

Utilizando la fórmula de la distancia, debe minimizarse la suma de las distancias:

Ö (x12 + x22) + Ö ((x1 - 300)2 + (x2 - 400)2) + Ö ((x1 - 700)2 + (x2 - 300)2)

No hay restricciones en cuanto a las coordenadas de la planta ni condiciones de no negatividad, puesto que un valor negativo de x1 significa que la planta se localiza al Oeste del punto A. La ecuación es un programa matemático no lineal sin restricciones.

Programación Cuadrática

Es un caso particular de programación matemática no lineal. Un programa matemático en el cual cada restricción gi es lineal pero el objetivo es cuadrático se conoce como programa cuadrático, es decir

f(x1,x2,..,xn) = S i=1,nS j=1,n cijxixj + S i=1,ndixi

Ejemplo A4

Minimizar z = x12 + x22

Con las condiciones x1 - x2 = 3

X2 ≥ 3

Donde ambas restricciones son lineales, con n = 2 (dos variables) c11 = 1; c12 = c21 = 0; c22 = 1 y d1 = d2 = 0.

Programación Dinámica

El programa matemático :

☐ Optimizar z = f1(x1) + f2(x2) + ... + fn(xn)

☐ Con la condición $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq b$

☐ Con todas las variables enteras y no negativas.

En que las funciones $f_i(x_i)$ son funciones no lineales conocidas de una sola variable, b es un número entero conocido. Corresponde al modelo importante de decisión en etapas múltiples en que el número de etapas es n. La etapa 1 comprende la especificación de la variable x_1 con contribución $f_1(x_1)$ al rendimiento total; etc.

La programación dinámica es una forma de enfoque de los procesos de decisión de optimización de n etapas.

Ejemplo A5

Una persona dispone de $4000 para invertir y se le presentan tres opciones de inversión. Cada opción requiere de depósitos en cantidades de $1000, puede invertir lo que desee en las tres opciones.

Las ganancias esperadas son las siguientes

	Inversión				
Ganancias	0	1000	2000	3000	4000
Opción 1	0	2000	5000	6000	7000
Opción 2	0	1000	3000	6000	7000
Opción 3	0	1000	4000	5000	8000

¿Cuánto dinero deberá invertirse en cada opción para maximizar las ganancias?

Sea z la ganancia total, que es la suma de las ganancias de cada opción, las inversiones tienen la restricción de ser múltiplos de $1000, la tabla muestra las $f_i(x)$ = Etapa i, (i = 1,2,3), x es la cantidad de dinero invertida en cada opción.

El programa matemático es el siguiente:

Maximizar $z = f1(x1) + f2(x2) + f3(x3)$

La persona sólo posee $4000 para invertir:

Las condiciones son :

$X1 + x2 + x3 \leq 4000$

Con todas variables enteras y no negativas.

Programación Dinámica estocástica

Un proceso de decisión de n etapas es estocástico si el rendimiento asociado con al menos una de las variables decisión es aleatoria. Esta aleatoriedad puede presentarse o bien asociada a la variable de decisión o a la función de rendimiento.

→BIBLIOGRAFIA:

1. CAMACHO, J. (2000) *Estadística con SPSS versión 9 para Windows.* Madrid: Ra-Ma.
2. DIAZ de RADA, V. (1999) *Técnicas de análisis de datos para investigadores sociales: aplicaciones prácticas con SSPS para Windows.* Madrid: Ra-Ma

4.3.- PROGRAMACIÓN LINEAL.

Introducción

La programación lineal es un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas que tiene por objeto ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables.

El nombre de programación lineal no procede de la creación de programas de ordenador, sino de un término militar, programar, que significa “realizar planes o propuestas de tiempo para el entrenamiento, la logística o el despliegue de las unidades de combate”.

Aunque parece ser que la programación lineal fue utilizada por G. Monge en 1776, se considera a L. V. Kantoróvich uno de sus creadores. La presentó en su libro Métodos matemáticos para la organización y la producción (1939) y la desarrolló en su trabajo Sobre la transferencia de masas (1942). Kantoróvich recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos.

La investigación de operaciones en general y la programación lineal en particular recibieron un gran impulso gracias a los ordenadores. Uno de momentos más importantes fue la aparición del método del simplex.

Objetivos

Conocer la programación lineal y sus aplicaciones a la vida cotidiana.

Plantear y resolver situaciones con programación lineal.

Pasos para la construcción de un modelo.

Tipo de Soluciones

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser:

Factibles: Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones. Estas a su vez pueden ser: con solución única, consolución múltiple (si existe más de una solución) y con solución no acotada (cuando no existe límite para la función objetivo).

No factibles: Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, cuando las restricciones son inconsistentes.

Métodos de solución

Existen tres métodos de solución de problemas de programación lineal:

Método gráfico: Las rectas de nivel dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Método analítico: El siguiente resultado, denominado teorema fundamental de la programación lineal, nos permite conocer otro método de solucionar un programa con dos variables: "en un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, esta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región. Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan. En el caso de que la región factible no es acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor optimo concreto, pero, si lo hace este se encuentra en uno de los vértices de la región".

Esquema práctico: Los problemas de programación lineal puede presentarse en la forma estándar, dando la función, objetivos y las restricciones, o bien plantearlos mediante un enunciado.

Estructura básica:

Ejemplos de programación lineal tomados de:

Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas.

El fabricante dispone para confección de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de poliéster. Para cada chaqueta se necesita 1.5 m de algodón y 1 m de poliéster.

El precio del pantalón se fija en $ 50 y de la chaqueta en $40.

¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que estos consignan una venta máxima?

1. Elección de las incógnitas.

X= número de pantalones

Y= número de chaquetas

2. Función objetivo

$F(x,y)=50x + 40y$

3. Restricciones

Para escribir las restricciones vamos a ayudarnos de una tabla:

	Pantalones	Chaquetas	Disponibles
Algodón	1	1.5	750
Poliéster	2	1	1000

$X + 1.5y < 750$ à $2x + 3y< 1500$

$2x + y < 1000$

Como el número de pantalones y chaquetas son números naturales, tendremos dos restricciones más:

$X>0$

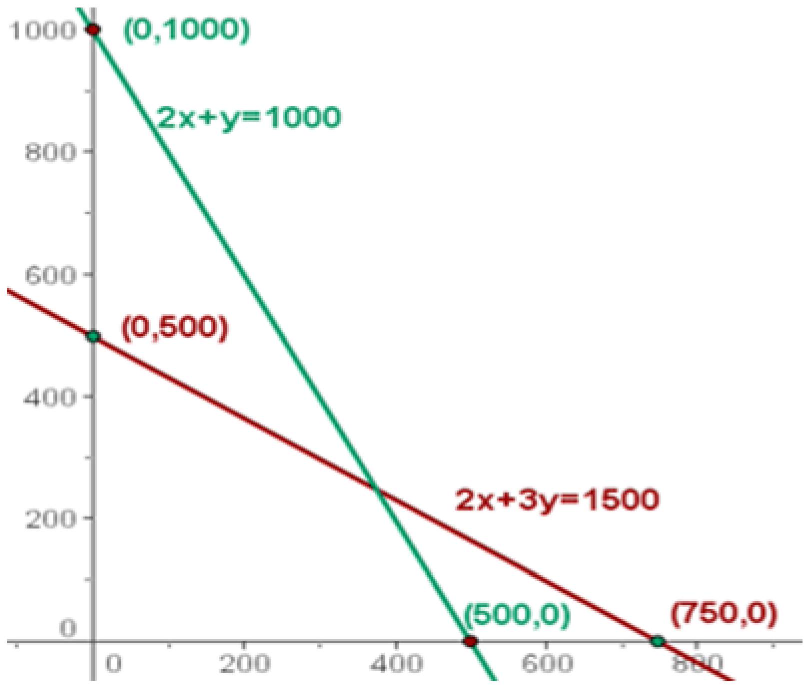
$Y>0$

4. Halla el conjunto de soluciones factibles

Tenemos que representar gráficamente las restricciones.

Al ser $x > 0$ e $y > 0$, trabajaremos en el primer cuadrante.

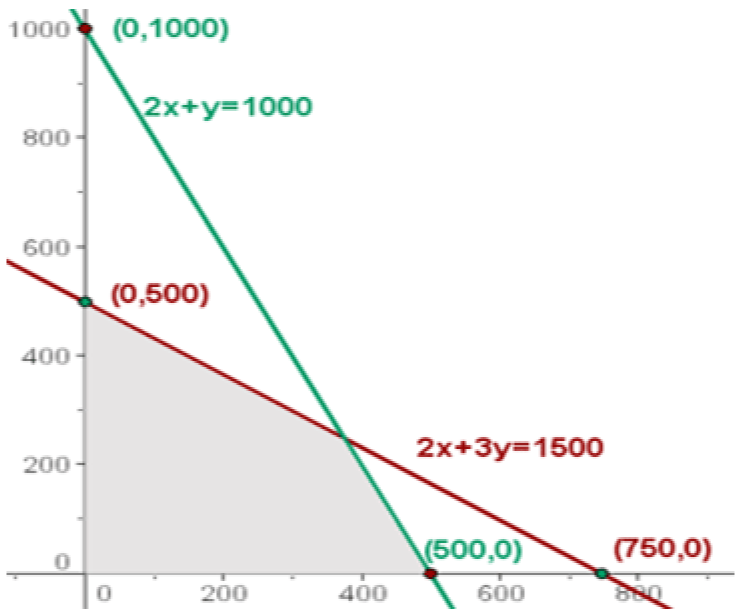
Representamos las rectas, a partir de sus puntos de corte con los ejes.



Resolvemos gráficamente la inecuación: 2x + 3y < 1500, para ello tomamos un punto del plano, por ejemplo el (0,0).

Como 0 < 1500 entonces el punto (0,0) se encuentra en el semiplano donde se cumple la desigualdad.

De modo análogo resolver 2x + y < 1000.



Programación lineal

La zona de intersección de las soluciones de las inecuaciones sería la solución al sistema de inecuaciones, que constituye el conjunto de las soluciones factibles.

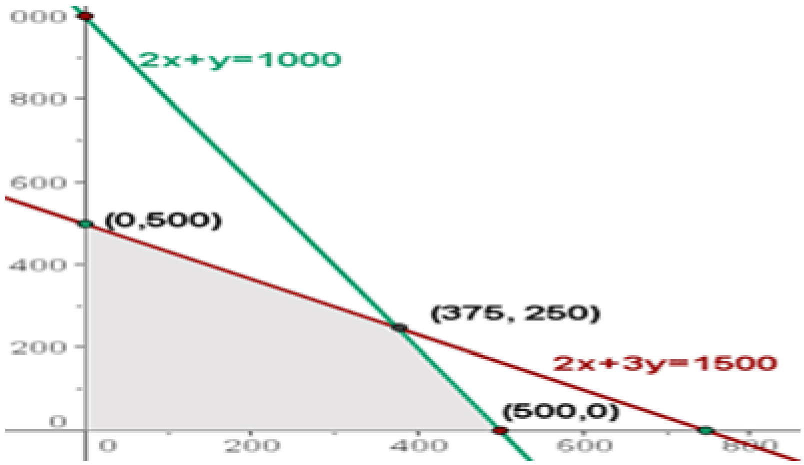
5. Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de las soluciones factibles.

La solución óptima, si es única, se encuentra en un vértice del recinto. Estos son las soluciones a los sistemas:

$2x + 3y = 1500$; $x= 0$ (0,500)

$2x + y = 1000$; $y= 0$ (500,0)

$2x + 3y = 1500$; $2x + y = 1000$ (375, 250)



Programación lineal

6. Calcular el valor de la función objetivo

En la función objetivo sustituimos cada uno de los vértices.

F(x,y) = 50x + 40y

F(0,500) = 50*0 + 40*500 = $20000

F(500,0) = 50*500 + 40*0 = $ 25000

F(375,250) = 50*375 + 40*250 = $28750

La solución óptima es fabricar 375 pantalones y 250 chaquetas para obtener un beneficio de $ 28750.

→BIBLIOGRAFÍA:

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/pl/ejemplos-de-programacion-lineal.html

4.4.- ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS.

La administración de proyectos es una metodología usada a nivel mundial, por empresas e instituciones para alcanzar objetivos en un tiempo determinado. También significa llevar una gestión equilibrando, separando las urgencias de las tareas que realmente son importantes para el cliente. El volumen de trabajo, las variables y los requisitos cada vez más complejos, han dado lugar a que cada vez más empresas e instituciones administren su trabajo por proyectos. De acuerdo al PMI (Project Management Institute) en todos los proyectos existen 5 fases, 10 áreas de conocimiento y 47 procesos.

Antecedentes

La administración de proyectos, en su forma moderna, comenzó a afianzarse hace solo apenas unas décadas. A partir de principios de los años sesenta, las empresas y otras organizaciones comenzaron a observar las ventajas de organizar el trabajo en forma de proyectos.

Fases, Áreas de conocimiento y Procesos

Dependiendo del tipo de proyecto, es posible utilizar menos procesos o áreas de conocimiento, sin embargo, deben de mantenerse siempre las cinco fases.

Las cinco fases consideradas para los proyectos son:

Inicio.

Planificación.

Ejecución.

Control.

Conclusión.

Las 10 áreas de conocimiento son:

Integración.

Alcance.

Tiempo.

Costo.

Calidad.

Recursos Humanos

Comunicaciones.

Riesgos.

Adquisiciones

Interesados.

Los 47 procesos están distribuidos en las fases del proyecto de la siguiente forma:

Fase de Inicio: dos procesos

Fase de Planificación: 24 procesos.

Fase de Ejecución: ocho procesos.

Fase de Monitoreo y Control: 11 procesos.

Fase de Conclusión: dos procesos.

Conceptos básicos

Administración es el proceso de alcanzar objetivos a través de las personas.

Proyecto es el conjunto de actividades a realizar para alcanzar un objetivo.

Estrategia es la ruta o camino que se sigue para alcanzar un objetivo.

Objetivo es aquello que se desea conseguir mediante un conjunto de actividades en el largo plazo.

Meta es lo que se desea lograr en términos cuantitativos en el corto o mediano plazo.

Objetivos claras

La definición clara de lo que se pretende lograr es, por supuesto, la primera tarea. Tanto para la institución dueña del proyecto, como para la empresa o persona que lo va a desarrollar. Aquel que no tiene claros sus objetivos muy pronto llegará a ninguna parte.

Para que los objetivos sean claros, se debe trabajar con expertos en el proyecto que se realizará, de otra forma será complicado definir tanto actividades eficientemente, así como calcular sus tiempos.

Selección del líder del proyecto

Responsable de diseñar las estrategias para poder lograr las metas que se trazaron previamente. Se recomienda que en la fase de Inicio sea asignado el líder de proyecto y no se cambie durante todo el ciclo de vida del mismo.

Definición de los recursos para el proyecto

Una vez que se tengan los objetivos a alcanzar y el líder del proyecto, se deben de definir los recursos humanos, económicos y materiales necesarios para alcanzar los fines establecidos. Esta planeación debe ser flexible, porque siempre se encontrarán imponderables que resolver.

Un elemento crucial dentro del proyecto es el cronograma de trabajo, el plan de comunicaciones, el plan de riesgos, el plan de adquisiciones (que son todos aquellos proveedores de servicios o de recursos humanos o materiales) y los planes de riesgo del proyecto.

Acciones con las persona

Es importante considerar a todos los involucrados en el proyecto, no importa si tiene o no poder de decisión. El líder del proyecto tiene que considerar a todos los involucrados o stakeholders para poder plantear el objetivo del proyecto, de tal forma que todos salgan beneficiados.

En todo proyecto las personas son muy importantes. Trate de identificar desde un principio las personas más adecuadas, y rechace a las que no convienen. Tome en cuenta el dicho que utiliza la gente del campo, que con mucha sabiduría señala que Gallina que no da huevos, al caldo. Una vez seleccionado el personal hay que poner manos a la obra.

Evaluación, seguimiento y reconocimiento

Para asegurar que se alcancen los objetivos no basta con tener objetivos claros, un buen líder del proyecto y recursos humanos, financieros y materiales adecuados; es necesario evaluar las etapas del proyecto periódicamente, con la finalidad de identificar desviaciones y poner en práctica las medidas correctivas. Es decir, hay que darle un cuidadoso seguimiento. Además, una vez terminado el proyecto se recomienda reconocer a las personas que se distinguieron por su trabajo en equipo y por su desempeño individual.

Administración de proyectos en México

La administración por proyectos la utilizan las empresas públicas, privadas y del sector social, cuando se tiene una tarea o proceso específico a realizar. En ocasiones se contrata a terceros para realizar tareas que las empresas por sus características propias no desean realizar. Por necesidades propias del servicio de una empresa asigna proyectos a otras, evitando así la contratación de más personal. En México, este proceso, denominado outsourcing, fue aprobado en la Ley Federal del Trabajo.

Esta ley faculta a las empresas a la subcontratación. Anteriormente ya existía el outsourcing en la práctica, no estaba expresamente autorizado por la ley.

La administración de proyectos es muy útil para las empresas porque pueden definir objetivos, asignar recursos y personal para lograr objetivos en un tiempo predeterminado.

En muchas ocasiones es preferible contratar personas o empresas externas a una institución para realizar un proyecto.

→BIBLIOGRAFÍA

1. ALEA, V. et al. (1999) *Estadística Aplicada a les Ciències Econòmiques i Socials.* Barcelona: Edicions McGraw-Hill EUB.
2. CANAVOS, G. (1988) *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México: McGraw-Hill.

4.5.- INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DECISIONES.

El problema de la Decisión, motivado por la existencia de ciertos estados de ambigüedad que constan de proposiciones verdaderas (conocidas o desconocidas), es tan antiguo como la vida misma. Podemos afirmar que todos los seres vivientes, aún los más simples, se enfrentan con problemas de decisión. Así, un organismo unicelular asimila partículas de su medio ambiente, unas nutritivas y otras nocivas para él. La composición biológica del organismo y las leyes físicas y químicas determinan qué partículas serán asimiladas y cuáles serán rechazadas.

Conforme aumenta la complejidad del ser vivo, aumenta también la complejidad de sus decisiones y la forma en que éstas se toman. Así, pasamos de una toma de decisiones guiada instintivamente, a procesos de toma de decisiones que deben estar guiados por un pensamiento racional en el ser humano. La Teoría de la Decisión tratará, por tanto, el estudio de los procesos de toma de decisiones desde una perspectiva racional.

CARACTERÍSTICAS Y FASES DEL PROCESO DE DECISIÓN

Un proceso de decisión presenta las siguientes características principales:

- Existen al menos dos posibles formas de actuar, que llamaremos alternativas o acciones, excluyentes entre sí, de manera que la actuación según una de ellas imposibilita cualquiera de las restantes.
- Mediante un proceso de decisión se elige una alternativa, que es la que se lleva a cabo.
- La elección de una alternativa ha de realizarse de modo que cumpla un fin determinado.

El proceso de decisión consta de las siguientes fases fundamentales:

- Predicción de las consecuencias de cada actuación. Esta predicción deberá basarse en la experiencia y se obtiene por inducción sobre un conjunto de datos. La recopilación de este conjunto de datos y su utilización entran dentro del campo de la Estadística.
- Valoración de las consecuencias de acuerdo con una escala de bondad o deseabilidad. Esta escala de valor dará lugar a un sistema de preferencias.
- Elección de la alternativa mediante un criterio de decisión adecuado. Este punto lleva a su vez asociado el problema de elección del criterio más adecuado para nuestra decisión, cuestión que no siempre es fácil de resolver de un modo totalmente satisfactorio.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROCESOS DE DECISIÓN

Los procesos de decisión se clasifican de acuerdo según el grado de conocimiento que se tenga sobre el conjunto de factores o variables no controladas por el decisor y que pueden tener influencia sobre el resultado final (esto es lo que se conoce como ambiente o contexto). Así, se dirá que:

- El ambiente es de certidumbre cuando se conoce con certeza su estado, es decir, cada acción conduce invariablemente a un resultado bien definido.
- El ambiente de riesgo cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que puede asignarse una distribución de probabilidad conocida.
- El ambiente es de incertidumbre cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que no puede asignarse una distribución de probabilidad, bien porque sea desconocida o porque no tenga sentido hablar de ella.

Según sea el contexto, diremos que el proceso de decisión (o la toma de decisiones) se realiza bajo certidumbre, bajo riesgo o bajo incertidumbre, respectivamente.

ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN

En todo problema de decisión pueden distinguirse una serie de elementos característicos:

- El decisor, encargado de realizar la elección de la mejor forma de actuar de acuerdo con sus intereses.
- Las alternativas o acciones, que son las diferentes formas de actuar posibles, de entre las cuales se seleccionará una. Deben ser excluyentes entre sí.
- Los posibles estados de la naturaleza, término mediante el cual se designan a todos aquellos eventos futuros que escapan al control del decisor y que influyen en el proceso.
- Las consecuencias o resultados que se obtienen al seleccionar las diferentes alternativas bajo cada uno de los posibles estados de la naturaleza.
- La regla de decisión o criterio, que es la especificación de un procedimiento para identificar la mejor alternativa en un problema de decisión.

CONCEPTO DE REGLA DE DECISIÓN

La tabla de decisión es un mero instrumento para dar respuesta a la cuestión fundamental en todo proceso de decisión:

¿ Cuál es la mejor alternativa ?

Para la elección de la alternativa más conveniente nos basaremos en el concepto de regla o criterio de decisión, que podemos definir de la siguiente forma:

> Una regla o criterio de decisión es una aplicación que asocia a cada alternativa un número, que expresa las preferencias del decisor por los resultados asociados a dicha alternativa.

Notaremos por S a esta aplicación y S(a) el valor numérico asociado por el criterio S a la alternativa a.

La descripción de los diferentes criterios de decisión que proporcionan la alternativa óptima será realizada de acuerdo con el conocimiento que posea el decisor acerca del estado de la naturaleza, es decir, atendiendo a la clasificación de los procesos de decisión. Según esto, distinguiremos:

- Tablas de decisión en ambiente de certidumbre
- Tablas de Decisión en ambiente de incertidumbre

→ BIBLIOGRAFIA:

1. FREEDMAN, D., et al. (1991) *Estadística.* Barcelona: A.Bosch Ed.
2. FREEDMAN, D., et al. (1991) *Estadística.* Barcelona: A.Bosch Ed.

4.6.- INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS.

Los psicólogos destacan la importancia del juego en la infancia como medio de formar la personalidad y de aprender de forma experimental a relacionarse en sociedad, a resolver problemas y situaciones conflictivas. Todos los juegos, de niños y de adultos, juegos de mesa o juegos deportivos, son modelos de situaciones conflictivas y cooperativas en las que podemos reconocer situaciones y pautas que se repiten con frecuencia en el mundo real.

El estudio de los juegos ha inspirado a científicos de todos los tiempos para el desarrollo de teorías y modelos matemáticos. La estadística es una rama de las matemáticas que surgió precisamente de los cálculos para diseñar estrategias vencedoras en juegos de azar. Conceptos tales como probabilidad, media ponderada y distribución o desviación estándar, son términos acuñados por la estadística matemática y que tienen aplicación en el análisis de juegos de azar o en las frecuentes situaciones sociales y económicas en las que hay que adoptar decisiones y asumir riesgos ante componentes aleatorios.

Pero la Teoría de Juegos tiene una relación muy lejana con la estadística. Su objetivo no es el análisis del azar o de los elementos aleatorios sino de los comportamientos estratégicos de los jugadores. En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes o jugadores. Se dice de un comportamiento que es estratégico cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas.

La técnica para el análisis de estas situaciones fue puesta a punto por un matemático, John von Neumann. A comienzos de la década de 1940, este trabajó con el economista Oskar Morgenstern en las aplicaciones económicas de esa teoría. El libro que publicaron en 1944, "Theory of Games and Economic Behavior", abrió un insospechadamente amplio campo de estudio en el que actualmente trabajan miles de especialistas de todo el mundo.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía (Equilibrio General, Distribución de Costos, etc.), se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de crecer. Y no son sólo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

Hay dos clases de juegos que plantean una problemática muy diferente y requieren una forma de análisis distinta:

Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar los resultados se tratará de juegos con transferencia de utilidad (también llamados juegos cooperativos), en los que la problemática se concentra en el análisis de las posibles coaliciones y su estabilidad.

En los juegos sin transferencia de utilidad, (también llamados juegos no cooperativos) los jugadores no pueden llegar a acuerdos previos; es el caso de los juegos conocidos como "la guerra de los sexos", el "dilema del prisionero" o el modelo "halcón-paloma".

Los modelos de juegos sin transferencia de utilidad suelen ser bipersonales, es decir, con sólo dos jugadores. Pueden ser simétricos o asimétricos según que los resultados sean idénticos desde el punto de vista de cada jugador. Pueden ser de suma cero, cuando el aumento en las ganancias de un jugador implica una disminución por igual cuantía en las del otro, o de suma no nula en caso contrario, es decir, cuando la suma de las ganancias de los jugadores puede aumentar o disminuir en función de sus decisiones. Cada jugador puede tener opción sólo a dos estrategias, en los juegos biestratégicos, o a muchas. Las estrategias pueden ser puras o mixtas; éstas consisten en asignar a cada estrategia pura una probabilidad dada. En el caso de los juegos con repetición, los que se juegan varias veces seguidas por los mismos jugadores, las estrategias pueden ser también simples o reactivas, si la decisión depende del comportamiento que haya manifestado el contrincante en jugadas anteriores.

ORIGEN

La Teoría de Juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en su libro clásico "The Theory of Games Behavior", publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo

XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos en el artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de Von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

Durante las dos décadas que siguieron a la Segunda Guerra Mundial, uno de los progresos más interesantes de la Teoría Económica fue la Teoría de los Juegos y el comportamiento económico, publicada en un libro de este título bajo la autoridad conjunta de Jhon Von Neumann y Oskar Morgenstern. Actualmente, el consenso parece ser que la Teoría de los Juegos es más relevante al estudio de problemas comerciales específicos que a la teoría económica general, porque representa un enfoque único al análisis de las decisiones comerciales en condiciones de intereses competitivos y conflictivos.

En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos términos.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan del primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El Ajedrez, el Backgamón y el Póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

La segunda parte del libro de Von Neumann y Morgenstern, se desarrolla el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaban papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente indeterminados.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosos el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se había auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de equilibrio, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría (de aquí que se restringieran a juegos de suma cero). Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de equilibrio de Nash, la cual no es otra cosa que cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fueron aconsejados, por su consultor especialista en Teoría de Juegos, que usaran un equilibrio de Nash. Es tal vez, el más importante de los instrumentos que los especialistas en Teoría de Juegos tienen a disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern.

Nash no aceptó la idea de que la Teoría de Juegos debe considerar indeterminados problemas de negociación entre dos personas y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la Teoría de Juegos paso en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativa de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron improductivas.

John Von Neumann, 1903-1957

John von Neumann es un matemático húngaro considerado por muchos como la mente más genial del siglo XX, comparable solo a la de Albert Einstein. A pesar de ser completamente desconocido para el "hombre de la calle", la trascendencia práctica de su actividad científica puede vislumbrarse al considerar que participó activamente en el Proyecto Manhattan, el grupo de científicos que creó la primera bomba atómica, que participó y dirigió la producción y puesta a punto de los primeros ordenadores o que, como científico asesor del Consejo de Seguridad de los Estados Unidos en los años cincuenta, tuvo un papel muy destacado (aunque secreto y no muy bien conocido) en el diseño de la estrategia de la guerra fría. Nicholas Kaldor dijo de él "Es sin duda alguna lo más parecido a un genio que me haya encontrado jamás".

Nació en Budapest, Hungría, hijo de un rico banquero judío. Tuvo una educación esmerada. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de Budapest y en químicas por la Universidad de Zurich. En 1927 empezó a trabajar en la Universidad de Berlín. En 1932 se traslada a los Estados Unidos donde trabajará en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Sus aportaciones a la ciencia económica se centran en dos campos:

Es el creador del campo de la Teoría de Juegos. En 1928 publica el primer artículo sobre este tema. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, publica la Theory of Games and Economic Behavior. La Teoría de Juegos es un campo en el que trabajan actualmente miles de economistas y se publican a diario cientos de páginas. Pero además, las formulaciones matemáticas descritas en este libro han influido en muchos otros campos de la economía. Por ejemplo, Kenneth Arrow y Gerard Debreu se basaron en su axiomatización de la teoría de la utilidad para resolver problemas del Equilibrio General.

En 1937 publica A Model of General Economic Equilibrium", del que E. Roy Weintraub dijo en 1983 ser "el más importante artículo sobre economía matemática que haya sido escrito jamás". En él relaciona el tipo de <u>interés</u> con el crecimiento económico dando base a los desarrollos sobre el "crecimiento óptimo" llevado a cabo por Maurice Allais, Tjalling C. Koopmans y otros.

Oskar Morgenstern, 1902-1976

Nacido en Gorlitz, Silesia, estudia en las universidades de Viena, Harvard y New York. Miembro de la Escuela Austriaca y avezado matemático, participa en los famosos "Coloquios de Viena" organizados por Karl Menger (hijo de Carl Menger) que pusieron en contacto científicos de diversas disciplinas, de cuya sinergia se sabe que surgieron multitud de nuevas ideas e incluso nuevos campos científicos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Emigra a Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial ejerciendo la docencia en Princeton. Publica en 1944, conjuntamente con John von Neuman, la "Theory of Games and Economic Behavior".

APLICACIONES

La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, sin embargo, la economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en Teoría de Juego. Entre las disciplinas donde hay aplicación de la Teoría de Juegos tenemos:

En la Economía:

No debería sorprender que la Teoría de Juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta triste ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la Teoría de Juegos.

Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en Teoría de Juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por Von Neumann y Morgenstern.

En consecuencia sólo se podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras a todas las demás variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón por que la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si el o ella actúa individualmente.

En la Ciencia Política:

La Teoría de Juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se deba a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de problemas más paradigmáticos.

En la Biología:

En Biología se ha utilizado ampliamente la teoría de juegos para comprender y predecir ciertos resultados de la evolución, como lo es el concepto de estrategia evolutiva estable introducido por John Maynard Smith en su ensayo "Teoría de Juegos y la Evolución de la Lucha", así como en su libro "Evolución y Teoría de Juegos".

En la Filosofía:

Los especialistas en Teoría de Juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado.

Con este fin estudian los equilibrios de juegos con repetición (juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez). Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios. Cuando estos progresos se den, sospecho que la filosofía social sin Teoría de Juegos será algo inconcebible – y que David Hume será universalmente considerado como su verdadero fundador.

PROPIEDADES PARA EL CONOCIMIENTO COMÚN DEL JUEGO

El Filósofo Hobbes dijo que un hombre se caracteriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón.

Fortaleza Física: esta determina lo que alguien puede o no puede hacer. Un atleta puede planear correr una milla en cuatro minutos, pero sería imposible para la mayoría ejecutar este plan. La Teoría de Juegos incorpora estas consideraciones en las reglas del juego. Esta determinan lo que es factible para un jugador. Más exactamente, un jugador queda limitado a escoger en el conjunto de sus estrategias en el juego.

Pasión y Experiencia: estas corresponden a las preferencias y creencias de un jugador. En la mayoría de los casos, ambas deben ser conocimiento común para que sea posible realizar un análisis en términos de la Teoría de Juegos.

Razón: en problemas de decisión unipersonales, los economistas simplemente suponen que los jugadores maximizan sus pagos esperados dadas sus creencias. En un juego las cosas son más complicadas, porque la idea de equilibrio da por supuesto que los jugadores saben algo acerca de cómo razona todo el mundo.

Conocimiento común de las reglas:

Como en muchos resultados de la Teoría de Juegos, no es inmediatamente evidente que esta conclusión dependa de que el valor de "n" debe ser conocimiento común. Sin embargo, si el valor "n" no es de conocimiento común existe equilibrio de Nash.

La noción de equilibrio es fundamental para la Teoría de Juegos. Pero por qué anticipamos que los jugadores usarán estrategias de equilibrio.

Dos tipos de respuestas hay, en primer lugar del tipo educativo, estos suponen que los jugadores tengan al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente.

Sin embargo, la respuesta educativa no es la única posible. También hay respuestas evolutivas. Según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos períodos de tiempo.

En un juego finito de dos jugadores, ningún jugador sabe con seguridad que estrategia pura, incluso si el oponente mezcla, el resultado final será que se juega alguna estrategia pura, la cual terminará por utilizar el oponente. Un jugador racional, por tanto, asigna una probabilidad subjetiva a cada una de las alternativas posibles. Entonces el jugador escoge una estrategia que maximiza su pago esperado con respecto a estas probabilidades subjetivas. Por tanto, el o ella se comportan como si estuviera escogiendo una respuesta óptima a una de las estrategias mixtas del oponente, si la estrategia mixta para la que se elige una respuesta óptima.

La Teoría de Juegos sostiene, que las creencias de un jugador sobre lo que un oponente hará depende de lo que el jugador sabe acerca del oponente. Sin embargo, no está ni mucho menos claro lo que debemos suponer acerca de lo que los jugadores saben de su oponente. La idea de racionabilidad se construye sobre la hipótesis de que por lo menos debería ser de conocimiento común que ambos jugadores son racionales.

OBJETIVOS DE LA TEORÍA DE JUEGOS

El principal objetivo de la teoría de los juegos es determinar los papeles de conducta racional en situaciones de "juego" en las que los resultados son condicionales a las acciones de jugadores interdependientes.

Un juego es cualquier situación en la cual compiten dos o más jugadores. El Ajedrez y el Póker son buenos ejemplos, pero también lo son el duopolio y el oligopolio en los negocios. La extensión con que un jugador alcanza sus objetivos en un juego depende del azar, de sus recursos físicos y mentales y de los de sus rivales, de las reglas del juego y de los cursos de acciones que siguen los jugadores individuales, es decir, sus estrategias. Una estrategia es una especificación de la acción que ha de emprender un jugador en cada contingencia posible del juego.

Se supone que, en un juego, todos los jugadores son racionales, inteligentes y están bien informados. En particular, se supone que cada jugador conoce todo el conjunto de estrategias existentes, no solo para él, sino también para sus rivales, y que cada jugador conoce los resultados de todas las combinaciones posibles de las estrategias.

Igualmente, en una gran variedad de juegos, el resultado es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades debe ser establecida para que pueda ser posible una solución para el juego. A este respecto, debe observarse que las decisiones de los jugadores interdependientes no se toman en un vacío y que los pagos resultantes de estas decisiones dependen de las acciones emprendidas por todos los jugadores. Esta interdependencia implica que puede ser inapropiado suponer que los pagos están siendo generados por un proceso probabilista invariante que no es afectado por el curso de acción que uno escoja. En otras palabras, la acción que emprende un jugador puede dictar los actos de otros jugadores o influir en la probabilidad de que se comporten en una forma particular. Esta potencialidad de posibles efectos en los resultados es la que distingue la toma de decisiones en conflictos y la toma de decisiones en un medio incierto. La clase más sencilla de modelo de juego rigurosamente adversario, en el que los resultados posibles son calificados en orden opuesto por los jugadores.

Entre esta clase, él más común es el juego de suma constante, en el que la suma de las ganancias de los jugadores es igual, cualesquiera que sea su distribución entre ellos. Un caso especial, y el único que consideraremos, de juegos de suma constante se llama juego de suma cero de dos personas.

ESTRATEGIAS REACTIVAS

Cuando un juego se repite varias veces, cada jugador puede adoptar su estrategia en función de las decisiones que haya adoptado antes su oponente. http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t_blank

Las estrategias reactivas son las que se adoptan en los juegos con repetición y se definen en función de las decisiones previas de otros jugadores.

El ejemplo más conocido es la estrategia OJO POR OJO (en inglés TIT FOR TAT). Supongamos que dos jugadores repiten de forma indefinida una situación con pagos de forma del Dilema del Prisionero:

Dilema del Prisionero Matriz de Pagos			
		Jugador columna	
		Cooperar	Traicionar
Jugador fila	Cooperar	2°,2°	4°,1°
	Traicionar	1°,4°	3°,3°*

En esta situación la estrategia OJO POR OJO puede quedar definida de la forma siguiente: "En la primera jugada elegiré la estrategia COOPERAR. En las jugadas siguientes elegiré la misma estrategia que haya elegido mi oponente en la jugada anterior". En otras palabras, si el otro coopera, yo cooperaré con él. Si el otro es un traidor, yo seré un traidor".

Otra posible estrategia reactiva es la TORITO (también llamada en inglés "BULLY"). Esta estrategia consiste en hacer lo contrario que haga el oponente: "Si el otro jugador es leal en una jugada, yo le traicionaré en la siguiente; si el otro jugador me ha traicionado, yo le seré leal a la siguiente oportunidad".

En el ambiente del Dilema del Prisionero, la estrategia OJO POR OJO ofrece muy buenos resultados mientras que la estrategia TORITO proporciona pagos medios muy bajos.

En cambio, en el ambiente del juego Halcón-Paloma sucede precisamente lo contrario: TORITO obtiene buenos resultados mientras que OJO POR OJO proporciona pagos medios inferiores.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En la vida real es fácil descubrir situaciones y personas (incluyéndonos a nosotros mismos) en las que se muestran comportamientos fácilmente identificables con las estrategias OJO POR OJO o TORITO.

En el primer caso son los comportamientos descritos por la Ley del Talión. En el despacho de un abogado, negociador profesional, había un letrero que decía "Por las buenas soy muy bueno, por las malas soy aún mejor". Al fin y al cabo, todos los humanos en alguna ocasión nos hemos comprometido con nosotros mismos a mantener esta estrategia en una situación difícil en la que un oponente podía elegir entre hacernos daño o respetarnos, y preveíamos oportunidades para "devolverle la jugada".

El segundo caso también es muy frecuente. Se trata de ese tipo de personas o comportamientos que en Latinoamérica llaman "ser un torito" y en España "ser un gallito"; es decir, alguien que se muestra muy agresivo pero al que "se le bajan los humos" si se le responde también con agresividad.

EL DUOPOLIO EN LA TEORÍA DE JUEGOS

En el oligopolio, los resultados que obtiene cada empresa dependen no sólo de su decisión sino de las decisiones de las competidoras. El problema para el empresario, por tanto, implica una elección estratégica que puede ser analizada con las técnicas de la Teoría de Juegos.

Supongamos que dos empresas, Hipermercados Xauen y Almacenes Yuste, constituyen un duopolio local en el sector de los grandes almacenes. Cuando llega la época de las tradicionales rebajas de enero, ambas empresas acostumbran a realizar inversiones en publicidad tan altas que suelen implicar la pérdida de todo el beneficio. Este año se han puesto de acuerdo y han decidido no hacer publicidad por lo que cada una, si cumple el acuerdo, puede obtener unos beneficios en la temporada de 50 millones. Sin embargo una de ellas puede preparar en secreto su campaña publicitaria y lanzarla en el último momento con lo que conseguiría atraer a todos los consumidores. Sus beneficios en ese caso serían de 75 millones mientras que empresa competidora perdería 25 millones.

Los posibles resultados se pueden ordenar en una Matriz de Pagos. Cada almacén tiene que elegir entre dos estrategias: respetar el acuerdo —Cooperar— o hacer publicidad —Traicionar—. Los beneficios o pérdidas mostrados a la izquierda de cada casilla son los que obtiene Xauen cuando elige la estrategia mostrada a la izquierda y Yuste la mostrada arriba. Los resultados a la derecha en las casillas son los correspondientes para Yuste.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

El que lo máximo que se puede obtener sea 75 M. o 85 M. no tiene mucha influencia sobre la decisión a adoptar, lo único que importa en realidad es la forma en que están ordenados los resultados. Si substituimos el valor concreto de los beneficios por el orden que ocupan en las preferencias de los jugadores, la matriz queda como la mostrada en el cuadro. Las situaciones como las descritas en esta matriz son muy frecuentes en la vida real y reciben el nombre de Dilema de los Presos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Veamos cuál debe ser la decisión a adoptar por esos almacenes. El director de la división de estrategia de Xauen pensará: "Si Yuste no hace publicidad, a nosotros lo que más nos conviene es traicionar el acuerdo, pero si ellos son los primeros en traicionar, a nosotros también nos convendrá hacerlo. Sea cual sea la estrategia adoptada por nuestros competidores, lo que más nos conviene es traicionarles". El director de la división de estrategia de Yuste hará un razonamiento similar.

Como consecuencia de ello ambos se traicionarán entre sí y obtendrán resultados peores que si hubieran mantenido el acuerdo. La casilla de la matriz de pagos marcada con un asterisco es la única solución estable: es un Punto de Equilibrio de Nash. Contrariamente a las argumentaciones de Adam Smith, en las situaciones caracterizadas por el Dilema de los Presos si los agentes actúan buscando de forma racional su propio interés, una "mano invisible" les conducirá a un resultado socialmente indeseable.

Supongamos ahora otra situación ligeramente diferente. Si ambas empresas se enredan en una guerra de precios, haciendo cada vez mayores rebajas, ambas sufrirán importantes pérdidas, 25 millones cada una. Han llegado al acuerdo de no hacer rebajas con lo que cada una podrá ganar 50 millones. Si una de ellas, incumpliendo el acuerdo, hace en solitario una pequeña rebaja, podrá obtener un beneficio de 75 millones mientras que la otra perdería muchos clientes quedándose sin beneficios ni pérdidas.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Si, como en el caso anterior, substituimos los valores concretos por su orden en la escala de preferencias obtenemos una matriz que es conocida en Teoría de Juegos como Gallina o Halcón-Paloma.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

El razonamiento de los estrategas será ahora diferente: "Si nuestros competidores cooperan, lo que más nos interesa es traicionarles, pero si ellos nos traicionan será preferible que nos mostremos cooperativos en vez de enredarnos en una guerra de precios. Hagan lo que hagan ellos, nos interesará hacer lo contrario".

En el juego "Gallina" el orden en que actúen los jugadores es muy importante. El primero en intervenir decidirá Traicionar, forzando al otro a Cooperar y obteniendo así el mejor resultado. La solución de equilibrio puede ser cualquiera de las dos marcadas con un asterisco en la matriz de pagos, dependiendo de cuál haya sido el primer jugador en decidirse. Ambas soluciones son puntos de equilibrio de Nash.

En casi todos los modelos, sea cual sea la forma de la matriz, el protocolo o reglas del juego influirá mucho en la solución. Además del orden de intervención de los jugadores, habrá que tener en cuenta si el juego se realiza una sola vez o si se repite cierto número de veces, la información de que disponen en cada momento, el número de jugadores que intervienen y la posibilidad de formar coaliciones, etc.

CLASES DE JUEGOS

El Dilema del Prisionero

Dos delincuentes son detenidos y encerrados en celdas de aislamiento de forma que no pueden comunicarse entre ellos. El alguacil sospecha que han participado en el robo del banco, delito cuya pena es diez años de cárcel, pero no tiene pruebas. Sólo tiene pruebas y puede culparles de un delito menor, tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. Promete a cada uno de ellos que reducirá su condena a la mitad si proporciona las pruebas para culpar al otro del robo del banco.

Las alternativas para cada prisionero pueden representarse en forma de matriz de pagos. La estrategia "lealtad" consiste en permanecer en silencio y no proporcionar pruebas para acusar al compañero. Llamaremos "traición" a la estrategia alternativa.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Los pagos a la izquierda o a la derecha de la barra indican los años de cárcel a los que es condenado el preso X o Y respectivamente según las estrategias que hayan elegido cada uno de ellos.

En vez de expresar los pagos en años de cárcel, podríamos indicar simplemente el orden de preferencia de cada preso de los correspondientes resultados, con lo que el modelo pasa a tener aplicación más general.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

La aplicación de la estrategia maximín conduce en este juego a un resultado subóptimo. Al no conocer la decisión del otro preso, la estrategia más segura es traicionar. Si ambos traicionan, el resultado para ambos es peor que si ambos hubieran elegido la lealtad. Este resultado es un punto de equilibrio de Nash y está señalado en la matriz mediante un asterisco.

El dilema del prisionero, tal como lo hemos descrito, es un juego de suma no nula, bipersonal, biestratégico y simétrico. Fue formalizado y analizado por primera vez por A. W. Tucker en 1950. Es posiblemente el juego más conocido y estudiado en la Teoría de Juegos. En base a él se han elaborado multitud de variaciones, muchas de ellas basadas en la repetición del juego y en el diseño de estrategias reactivas.

El modelo Halcón - Paloma

http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t_blank

En el lenguaje ordinario entendemos por "halcón" a los políticos partidarios de estrategias más agresivas mientras que identificamos como "paloma" a los más pacifistas. El modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras. Este modelo es conocido en la literatura anglosajona como el "hawk-dove" o el "chicken" y en español es conocido también como "gallina".

En la filmografía holywoodiense se han representado en varias ocasiones desafíos de vehículos enfrentados que siguen este modelo. Los dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvíe ha perdido. Pero si ninguno de los dos frena o se desvía...

También se ha utilizado este modelo abundantemente para representar una guerra fría entre dos superpotencias. La estrategia Halcón consiste en este caso en proceder a una escalada armamentística y bélica. Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde. Pero la situación peor para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón. El resultado puede modelizarse con la siguiente matriz de pagos.

Obsérvense las sutiles pero importantes diferencias de este modelo con el Dilema del Prisionero. En principio la matriz es muy parecida, simplemente se han trocado las posiciones de los pagos 3º y 4º, pero la solución y el análisis son ahora muy diferentes.

Hay aquí dos resultados que son equilibrios de Nash: cuando las estrategias elegidas por cada jugador son diferentes; en la matriz aquí representada esas soluciones están marcadas con un asterisco. Compruébese, por el contrario, que en el Dilema del Prisionero el equilibrio de Nash está en el punto en que ambos jugadores traicionan.

Otra notable diferencia de este juego con otros es la importancia que aquí adquiere el orden en que los jugadores eligen sus estrategias. Como tantas veces en la vida real, el primero que juega, gana. El primero elegirá y manifestará la estrategia Halcón con lo que el segundo en elegir se verá obligado a elegir la estrategia Paloma, la menos mala.

La guerra de los sexos

El modelo de "La guerra de los sexos" es un ejemplo muy sencillo de utilización de la teoría de juegos para analizar un problema frecuente en la vida cotidiana. Hay dos jugadores: "ÉL" y "ELLA". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos "Fútbol" y "Discoteca".

Supongamos que el orden de preferencias de ÉL es el siguiente:

(Lo más preferido) EL y ELLA eligen Fútbol.

EL y ELLA eligen Discoteca.

EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.

(Lo menos preferido) El elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

Supongamos que el orden de preferencias de ELLA es el siguiente:

(Lo más preferido) ÉL y ELLA eligen Discoteca.

EL y ELLA eligen Fútbol.

EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.

(Lo menos preferido) Él elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

La matriz de pagos es como sigue:

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Este juego, tal como lo hemos descrito, es un juego sin repetición y sin transferencia de utilidad. Sin repetición significa que sólo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. Sin transferencia de utilidad significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vienes al fútbol te pago la entrada").

El problema que se plantea es simplemente un problema de coordinación. Se trata de coincidir en la elección. Al no haber comunicación previa, es posible que el resultado no sea óptimo. Si cada uno de los jugadores elige su estrategia maximín el pago que recibirán (3\3) es subóptimo. Esa solución, marcada en la matriz con un asterisco, no es un punto de equilibrio de Nash ya que los jugadores están tentados de cambiar su elección: cuando ELLA llegue a la discoteca y observe que ÉL se ha ido al fútbol, sentirá el deseo de cambiar de estrategia para obtener un pago mayor.

El modelo que hemos visto es un juego simétrico ya que jugadores o estrategias son intercambiables sin que los resultados varíen. Podemos introducir una interesante modificación en el juego convirtiéndolo en asimétrico a la vez que nos aproximamos más al mundo real. Supongamos que las posiciones 2ª y 3ª en el orden de preferencias de ÉL se invierten. EL prefiere ir solo al Fútbol más que ir con ELLA a la Discoteca. La matriz de pagos queda como sigue:

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Si ELLA conoce la matriz de pagos, es decir, las preferencias de ÉL, el problema de coordinación desaparece. Está muy claro que ÉL elegirá siembre la estrategia Fútbol, sea cual sea la elección de ELLA. Sabiendo esto ELLA elegirá siempre la estrategia Fútbol también, ya que prefiere estar con ÉL aunque sea en el Fútbol que estar sola aunque sea en la Discoteca. La estrategia maximín de ambos jugadores coincide. El resultado, marcado con un asterisco, es un óptimo, un punto de silla, una solución estable, un punto de equilibrio de Nash. Obsérvese que esta solución conduce a una situación estable de dominación social del jugador que podríamos calificar como el más egoísta.

La Estrategia MAXIMIN

Consideremos un "juego de suma cero" en el que lo que yo gano lo pierde el otro jugador. Cada jugador dispone de tres estrategias posibles a las que designaremos como A, B, y C (supongamos que son tres tarjetas con dichas letras impresas).

Los premios o pagos consisten en la distribución de diez monedas que se repartirán según las estrategias elegidas por ambos jugadores y se muestran en la siguiente tabla llamada matriz de pagos. Mis ganancias, los pagos que puedo recibir, se muestran sobre fondo verde. Los pagos al otro jugador se muestran sobre fondo rosa. Para cualquier combinación de estrategias, los pagos de ambos jugadores suman diez.

Por ejemplo. Si yo juego la tarjeta C y el otro jugador elige su tarjeta B entonces yo recibiré ocho monedas y el otro jugador recibirá dos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Éste es por tanto un juego de suma cero. Se llama juego de suma cero aquél en el que lo que gana un jugador es exactamente igual a lo que pierde o deja de ganar el otro.

Para descubrir qué estrategia me conviene más vamos a analizar la matriz que indica mis pagos, la de fondo verde. Ignoro cuál es la estrategia (la tarjeta) que va a ser elegida por el otro jugador. Una forma de analizar el juego para tomar mi decisión consiste en mirar cuál es el mínimo resultado que puedo obtener con cada una de mis cartas. En la siguiente tabla se ha añadido una columna indicando mis resultados mínimos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En efecto,

Si yo elijo la tarjeta A, puedo obtener 9, 1 o 2, luego como mínimo obtendré un resultado de 1.

Si elijo la tarjeta B, puedo obtener 6, 5 o 4, luego como mínimo obtendré 4.

Si elijo la tarjeta C, puedo obtener 7, 8 o 3, luego como mínimo obtendré 3.

De todos esos posibles resultados mínimos, el que prefiero es 4 ya que es el máximo de los mínimos.

La estrategia MAXIMIN consiste en elegir la tarjeta B ya que esa estrategia me garantiza que, como mínimo, obtendré 4.

¿Podemos prever la estrategia del otro jugador? Supongamos que el otro jugador quiere elegir también su estrategia MAXIMIN. Mostramos ahora sólo los pagos asignados al otro jugador en los que destacamos el pago mínimo que puede obtener para cada una de sus estrategias. Subrayamos el máximo de los mínimos y su estrategia maximin.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En efecto,

Si él elige A, su peor resultado sería si yo elijo A con lo que yo obtendría 9 y él 1.

Si él elige B, su peor resultado sería si yo elijo C con lo que yo obtendría 8 y él 2.

Si él elige C, su peor resultado sería si yo elijo B con lo que yo obtendría 4 y él 6.

Su estrategia MAXIMIN consiste por tanto en jugar la carta C con lo que se garantiza que, al menos, obtendrá 6.

Éste es un juego con solución estable. Ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia. Supongamos que se empieza a repetir el juego una y otra vez. Yo jugaré siempre mi estrategia maximin (B) y el otro jugará siempre su estrategia maximin (C). Cada uno sabe lo que jugará el otro la siguiente vez. Ninguno estará tentado de cambiar su estrategia ya que el que decida cambiar su estrategia perderá.

Se llama "punto de silla" al resultado en el que coinciden las estrategias maximin de ambos jugadores.

No todos los juegos tienen un punto de silla, una solución estable. La estabilidad del juego anterior desaparece simplemente trastocando el orden de las casillas BB y BC:

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En esta nueva tabla mi estrategia maximin sigue siendo la B y la estrategia maximin del otro jugador sigue siendo la C. Pero la solución ahora ya no es estable. Si jugamos repetidas veces y yo repito mi estrategia maximín, B, el otro estará tentado de cambiar su estrategia, pasando de la C a la B con lo que obtendrá un pago mayor, 6 en vez de 5.

Claro que si el otro empieza a elegir sistemáticamente la estrategia B yo preferiré cambiar mi estrategia a la C para así obtener 8. Entonces el querrá volver a su estrategia C y así sucesivamente.

El Teorema del Maximin afirma que en todo juego bipersonal de suma cero en el que sea posible jugar estrategias mixtas además de las puras, las estrategias maximin de cada jugador coincidirán siempre en una solución estable, un punto de silla. Este teorema fue demostrado matemáticamente por John von Neumann en un artículo publicado en 1928

Juegos con Transferencia de Utilidad (Juegos Cooperativos)

http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t_blank

Si los jugadores pueden comunicarse entre sí y negociar un acuerdo ANTES de los pagos, la problemática que surge es completamente diferente. Se trata ahora de analizar la posibilidad de formar una coalición de parte de los jugadores, de que esa coalición sea estable y de cómo se deben repartir las ganancias entre los miembros de la coalición para que ninguno de ellos esté interesado en romper la coalición.

Juego 1.- Empecemos con el ejemplo más sencillo. Supongamos que tres jugadores, Ana, Benito y Carmen, tienen que repartirse entre sí cien euros. El sistema de reparto tiene que ser adoptado democráticamente, por mayoría simple, una persona un voto. Hay cuatro posibles coaliciones vencedoras: ABC, AB, BC y AC, pero hay infinitas formas de repartir los pagos entre los tres jugadores.

Supongamos que Ana propone un reparto de la forma A=34, B=33 y C=33. Benito puede proponer un reparto alternativo de la forma A=0, B=50 y C=50 Carmen estará más interesada en la propuesta de Benito que en la de Ana. Pero puede proponer una alternativa aún mejor para ella: A=34, B=0 y C=66. A Benito es posible que se le ocurra alguna propuesta mejor para atraer a Ana.

El juego puede continuar indefinidamente. No tiene solución. No hay ninguna coalición estable. Sea cual sea la propuesta que se haga siempre habrá una propuesta alternativa que mejore los pagos recibidos por cada jugador de una nueva mayoría.

Definición: En los juegos con transferencia de utilidad se llama solución a una propuesta de coalición y de reparto de los pagos que garantice estabilidad, es decir, en la que ninguno de los participantes de una coalición vencedora pueda estar interesado en romper el acuerdo.

Juego 2.- Modifiquemos ahora el ejemplo. En vez de "un hombre un voto" consideremos que hay voto ponderado. Ana tiene derecho a seis votos, Benito a tres y Carmen a uno. Las posibles mayorías son las siguientes: ABC, AB, AC, A.
En esta situación Ana propondrá un reparto de la siguiente forma: A=100, B=0 y C=0. Ese reparto se corresponde con una coalición estable en la que los seis votos de Ana estarán a favor. Es una solución única. Ana no aceptará ningún reparto en el que ella obtenga menos de 100 euros y sin la participación de Ana no hay ninguna coalición vencedora.

Definición: Se llama "valor del juego" al pago que un jugador tiene garantizado que puede recibir de un juego si toma una decisión racional, independientemente de las decisiones de los demás jugadores. Ningún jugador aceptará formar parte de una coalición si no recibe como pago al menos el valor del juego.

En el juego 1, el valor del juego es cero para los tres jugadores. En el juego 2 el valor del juego para Ana es cien y para Benito y Carmen es cero.

Juego 3.- Pongamos un ejemplo algo más realista y, por tanto, un poco más complejo. Supongamos un municipio en el que cinco partidos políticos se han presentado a las elecciones: el Partido Austero (PA), el Partido Benefactor (PB), el Partido Comunal (PC), el Partido Democrático (PD) y el Partido de la Esperanza (PE). En las elecciones, han obtenido el siguiente número de concejales:

PA=11

PB=8

PC=5

PD=2

PE=1

Como ningún partido ha conseguido la mayoría absoluta, es necesario que se forme una coalición para gobernar el municipio. El presupuesto anual del municipio es de 520 millones de euros. La coalición gobernante debe asignar los cargos y las responsabilidades del ayuntamiento a los diferentes partidos. En las negociaciones se debe acordar el reparto del presupuesto, cargos y responsabilidades entre los partidos. Suponemos que no hay simpatías ni antipatías ideológicas y que los cargos y responsabilidades son valorados exclusivamente según el presupuesto económico que controlan. Supondremos, para simplificar, que hay disciplina de voto y que no son posibles las traiciones internas

Análisis del juego 3. Como el número total de concejales es 27, la coalición vencedora debe disponer al menos de 14 votos. A diferencia del juego 2, no hay ningún jugador imprescindible para ganar. Si utilizamos la definición que dimos arriba, el valor del juego para todos los jugadores es cero ya que ninguno tiene garantizada su pertenencia a la coalición vencedora.

Definición: Se llama "valor de Shapley" a la asignación que recibe cada jugador en una propuesta de reparto según un criterio de arbitrajediseñado por Lloyd S. Shapley. El criterio consiste en asignar un pago a cada jugador en proporción al número de coaliciones potencialmente vencedoras en las que el jugador participa de forma no redundante.

Un jugador es redundante en una coalición si no es imprescindible para que esa coalición resulte vencedora.

Las especies en extinción y los recursos naturales.

Actualmente existe una inquietud generalizada ante la desaparición de extensas zonas de selva tropical y la posibilidad de extinción de especies animales por sobreexplotación. Este problema presenta características similares a los efectos externos y a los bienes públicos y tampoco es resuelto de forma satisfactoria por el mercado. A diferencia de los bienes públicos, los recursos naturales de propiedad común sí provocan o pueden llegar a provocar rivalidad en el consumo. A diferencia del problema de los efectos externos, que son efectos tecnológicos provocados por bienes privados sobre bienes privados, la sobreexplotación de recursos naturales comunes incluye efectos tecnológicos y pecuniarios provocados por el acto de privatización de una propiedad común.

En muchos países sudamericanos como Brasil o Costa Rica, la selva tropical está siendo quemada para roturar nuevas tierras que permitan la instalación de colonos. En las selvas tropicales de extremo oriente, especialmente en Indonesia y Filipinas, el ritmo de explotación de su riqueza maderera dobla a la tasa de reproducción agravándose la situación en las especies de maderas nobles, más demandadas, algunas de las cuales están ya en peligro de desaparición. Varias especies de mamíferos marinos tienen su supervivencia gravemente amenazada por exceso de capturas. Muchos bancos de peces, aunque no estén en peligro de extinción, han visto reducida su población hasta el punto de arruinar a muchas poblaciones pesqueras en Perú, Islas Británicas y Noruega.

Las razones son similares en todos esos casos. Las selvas, bosques, pastos comunales, cazaderos o pesquerías no están sometidos al régimen de propiedad privada. Cualquier individuo o empresa puede acceder a ellos por lo que cada uno intentará obtener el máximo rendimiento sin preocuparse por su preservación para el futuro. La ciencia económica estudió el problema por primera vez para el caso de las pesquerías que se han convertido así en el ejemplo tradicional.

Algunos ecologistas radicales, mal informados, proponen que consideremos las especies animales como un "capital heredado" del que podemos aprovechar sus rentas pero que debemos transmitir "íntegro" a las futuras generaciones. Eso no es posible en la realidad. Cualquier volumen de capturas de peces de un banco supone inevitablemente la disminución de su población. Con la expresión "capital heredado" esos ecologistas se están refiriendo al punto de equilibrio natural de la población, el tamaño que tendría la población de peces si no existiéramos los humanos. La única forma de mantener "íntegro" ese número de peces sería no pescar.

Supongamos en cambio que partimos de una situación intermedia, cualquier tamaño de la población de peces entre Pa y Pc, en la que la tasa de crecimiento es positiva, por ejemplo del 3% anual. Si limitásemos nuestras capturas anuales precisamente a esa tasa, al 3% de la población total, el tamaño del banco se mantendría estable indefinidamente. El problema puede plantearse por tanto en términos estrictamente biológicos: cuál es el volumen máximo de capturas que puede conseguirse de forma indefinida o, en otras palabras, cuál es el tamaño de la población en el que su tasa de crecimiento es máxima, el punto Pb en el gráfico.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Los biólogos son capaces de resolver perfectamente ese problema y lo consiguen con un alto grado de sofisticación, determinando la edad óptima de los peces capturados y la época del año en que debe realizarse la campaña. Se llama management o gestión de pesquerías al conjunto de estudios y técnicas que permiten una explotación óptima a largo plazo.

Pero, una vez que se tiene una solución óptima, se trata de ver si somos capaces de aplicarla. Cada individuo, cada barco pesquero, tiene que elegir entre dos alternativas en un ambiente que puede ser modelado según el Dilema de los Presos. Vamos a llamar "cooperar" a la estrategia consistente en respetar las cuotas y la reglamentación acordadas por una cooperativa o por un organismo supranacional y establecidas según criterios racionales de gestión de pesquerías. Vamos a llamar "traicionar" a la estrategia consistente en tratar de obtener el máximo beneficio individual a corto plazo aunque ello implique sobrepasar cuotas o usar artes de pesca prohibidas.

Especies y extinción			
		Los otros Barcos	
		Cooperar	Traicionar
Mi Barco	Cooperar	2,2	4,1
	Traicionar	1,4	3,3

El equilibrio de Nash se encuentra en la casilla en que todos traicionan. La tendencia, por tanto, es a que los recursos sean sobre explotados.

Si existiese una empresa que pudiera ejercer sobre la pesquería un control monopolista no habría ninguna dificultad para hacer una gestión eficiente. Es por ello que una primera solución consiste en que el estado monopolice el recurso y utilice su poder coactivo para impedir la sobreexplotación. La ampliación de las aguas jurisdiccionales de los países hasta las doscientas millas de su plataforma continental fue un primer paso para controlar la producción pesquera en la década de los setenta, generalizándose desde entonces el sistema de cuotas mediante el que se fija un volumen máximo de capturas a repartir entre todas las empresas autorizadas a pescar.

Para las especies como las ballenas y otros mamíferos marinos, que viven a más de doscientas millas de las costas o en costas no sometidas a jurisdicción alguna, la solución está aun lejana. No existe -aún- un estado global, unas instituciones con capacidad para gestionar todos los recursos del planeta Tierra y con legitimidad para castigar a los infractores.

CONCLUSIONES

Algunas teorías buscan encontrar las estrategias racionales, que se utilizan en situaciones donde el resultado depende no solamente de las estrategias propias y las condiciones del entorno, sino también en las estrategias utilizadas por otros jugadores que posiblemente tienen objetivos distintos.

La Teoría de Juegos consiste en razonamientos circulares, los cuales no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. La intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas, razón por la que se debe entrenar. La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, entre las disciplinas tenemos: la Economía, la Ciencias Políticas, la Biología y la Filosofía.

Hay dos tipos de respuesta, la del tipo educativo, en la cual los jugadores suponen que tienen al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente, y un segundo tipo de respuestas, las evolutivas, según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos períodos de tiempo.

Las estrategias maximin y minimax conducen a los dos jugadores del juego a situaciones en las que ningún jugador tiene razón o incentivo alguno para cambiar su posición. Así mismo, se dice que un jugador posee una estrategia dominante si una estrategia particular es preferida a cualquier otra estrategia a disposición de él.

BIBLIOGRAFÍA

Martínez Coll, Juan Carlos (2001): "La Teoría de Juegos" en La Economía de Mercado, virtudes e inconvenientes.