FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

CARLOS RAMIREZ MOLINARES

MILTON GARCIA BARBOZA

CRISTO PANTOJA ALGARIN

ARIEL ZAMBRANO MEZA

UNIVERSIDAD LIBRE SEDE CARTAGENA
CENTRO DE INVESTIGACIONES

Producto del Grupo de Investigación GNÓSIS

CARLOS VICENTE RAMIREZ MOLINARES
Ingeniero Industrial. Universidad Tecnológica de Bolívar
Contador Público de la Universidad de Cartagena
Magister en Administración. ISTEM (México- UNAB- UTB)
Especialista en Docencia Universitaria. Universidad del Bosque
Especialista en Finanzas y Negocios Internacionales. Universidad Autonóma del Caribe
Docente Asistente Universidad de Cartagena. Facultad de Ciencias Económicas
Docente Catedrático Universidad Libre Seccional Cartagena. Facultad de Ciencias Económicas.
Miembro del Grupo de Investigación GNOSIS de la Universidad Libre Seccional Cartagena.

MILTON GARCIA BARBOSA
Contador Público. Universidad de Cartagena
Especialista en Gestión Gerencial. Universidad de Cartagena
Docente Asociado Universidad de Cartagena.

CRISTO PANTOJA ALGARIN
Contador Público. Universidad de Cartagena
Especialista en Administración Financiera Universidad de Cartagena
Magister en Ciencias Financieras y de Sistemas de la Universidad Central
Docente Asistente Universidad de Cartagena

ARIEL ZAMBRANO MEZA
Contador Público de la Universidad Libre Seccional Cartagena
Monitor Matemáticas Financieras y Finanzas.
Universidad Libre

Universidad Libre
Pie de la Popa Calle. Real No. 20-177
Cartagena de Indias. Colombia
América del Sur
Teléfonos: 6661147- 6561379

ISBN: 978-958-8621-03-6

Editorial Universidad Libre Sede Cartagena

Correos electrónicos:
investigaciones.unilibre.gmail.com
Editora: tatianadiazr@gmail.com
Cartagena de Indias, Colombia
Año 2009

ACERCA DE LOS AUTORES

Carlos Vicente Ramírez Molinares. Es ingeniero Industrial de la Universidad Tecnológica de Bolívar, Contador Público de la Universidad de Cartagena, Magister en Administración en convenio con el Instituto Tecnológico de Monterrey (ISTEM – México), Universidad Autónoma de Bucaramanga y la Universidad Tecnológica de Bolívar, Especialista en Finanzas y Negocios Internacionales de la Universidad Autónoma del Caribe y Especialista en Docencia Universitaria de la Universidad del Bosque. Este trabajo es fruto de su experiencia como Docente Asistente de la Universidad de Cartagena, en las áreas de Matemáticas Financieras, Finanzas Privadas, Formulación y Evaluación de Proyectos en la Facultad de Ciencias Económicas, y en Proyectos de Desarrollo e Ingeniería Económica, en la Facultad de Ingenierías de la Universidad de Cartagena. Docente catedrático de la Universidad libre Seccional Cartagena, en las cátedras de Matemáticas Financieras y Administración Financiera y Docente Catedrático de la Universidad Tecnológica de Bolívar, en las áreas de Ingeniería Económica y Emprendimiento (Cátedras Empresariales I, II y III).

También, se ha desempeñado como docente en las especializaciones en Gestión Empresarial, Finanzas, Gerencia Financieras, Gerencia de Proyectos, en la Universidad de Cartagena, Universidad Jorge Tadeo Lozano Seccional Cartagena, Universidad de la Guajira en el campo de las Matemáticas Financieras, Desarrollo de modelos financieros empresariales y en Formulación y Evaluación de Proyectos.

Es miembro del grupo de investigación GNOSIS de la Universidad Libre Seccional Cartagena y del grupo de Investigación GRICOF de la Universidad de Cartagena.

Milton García Barbosa. Contador Público de la Universidad de Cartagena. Especialista en Gestión Gerencial de la Universidad de Cartagena. Docente Asociado de la Universidad de Cartagena. Se ha desempeñado como docente de pregrado en las áreas de Contabilidad de Activos, Contabilidad de Pasivos, Epistemología e Investigación Contable, en el Programa de Contaduría Pública de la Universidad de Cartagena. Además, ha sido docente en las especializaciones de Gestión Empresarial y Finanzas, en las áreas de Contabilidad. Actualmente, se desempeña como Director del Programa de Contaduría Pública de la Universidad de Cartagena. Es miembro del grupo de investigación GRICOF de la Universidad de Cartagena.

Cristo Pantoja Algarín. Contador Público. Universidad de Cartagena. Especialista en Administración Financiera Universidad De Cartagena. Magister en Ciencias Financieras y de Sistemas de la Universidad Central. Docente Asistente Universidad de Cartagena en el Programa de Contaduría Pública.

Ariel Zambrano Meza. Contador Público de la Universidad Libre Seccional Cartagena. Monitor de las cátedras de Matemáticas Financieras y de Finanzas. En la actualidad se encuentra adelantando estudios de pregrado en el Programa De Administración de la Universidad Libre Seccional Cartagena.

CONTENIDO

CAPITULO No 4. TASAS DE INTERES Y EQUIVALENCIA ENTRE TASAS

CAPITULO 5. SERIES UNIFORMES O ANUALIDADES

PRESENTACION

Desde su aparición el dinero es parte importante de la vida del hombre y ha tratado de utilizarlo de la manera más óptima y adecuada; pero hoy por la globalización de la economía ha adquirido una importancia relevante, ya que todas las transacciones se realiza a través del uso del dinero, por eso es conveniente que se sepa manejar para que genere los máximos beneficios y se aproveche a su máxima utilidad; por lo que es importante comprender de manera clara cómo el dinero puede ganar o perder o cambiar de valor en el tiempo, debido a fenómenos económicos como la inflación y devaluación, por lo cual es relevante usar y empleo con claridad y precisión los conceptos de las matemáticas financieras.

Además, es importante el manejo de las matemáticas financieras ya que la economía de un país, se basa en diferentes operaciones financieras y que para tomar una decisión acertada, es necesario e indispensable tener en cuenta que a través del tiempo el valor del dinero puede tener variaciones.

Se ha tratado de exponer cada una de las unidades de una manera clara y sencilla y usando un lenguaje simple para que el lector encuentre interesante el campo de las matemáticas financieras; pero es conveniente aclarar que esta disciplina, como todas las que tienen que ver con las matemáticas, exigen un trabajo práctico dedicado, por lo que se recomienda realizar los ejercicios resueltos y propuestos. EL libro contiene suficientes ejemplos resueltos paso a paso que le proporciona al lector la destreza necesaria para resolver los ejercicios propuestos con sus respectivas respuestas, los cuales servirán para afianzar los conocimientos adquiridos a través de los capítulos.

Teniendo en cuenta que la intención u objetivo del presente libro, es que el lector conozca los conceptos fundamentales de las matemáticas financieras para que pueda aplicarlos en el mundo financiero, para lo cual se han estructurado los siguientes capítulos:

Capitulo1. Se trata lo concerniente a la definición e importancia de las matemáticas financieras, qué es un proyecto y una breve descripción de las etapas que se tienen en cuentan para estudiarlos, se detalla el proceso de toma de decisiones, como elemento de planeación para el análisis de los proyectos e inversiones, a éstas últimas se les presenta las clasificaciones más importantes, de la misma manera se explica el concepto del valor del dinero en el tiempo, así como el principio de equivalencia, el interés y la tasa de interés, por último se explica de manera concreta el diagrama económico, como herramienta clave para la solución de los problemas de las matemáticas financieras.

Capitulo 2. Se analiza el interés simple, y se muestra como se calcula el valor presente, valor futuro, el tiempo y la tasa de interés bajo el concepto del interés simple, de la misma se explican y detallan ejercicios que tratan sobre el descuento comercial, real, el racional y las ecuaciones de valor.

Capitulo 3. Se desarrollan los aspectos más importantes del interés compuestos, en lo referente al cálculo del valor presente, valor futuro, el tiempo y la tasa de interés, se explica de manera detallada la interpolación lineal, como herramienta para determinar el número de períodos y la tasa de interés. Se trata el descuento bajo la modalidad del interés compuesto.

Capítulo 4. Se explican y analizan las tasas de interés periódica, nominal, interés efectivo e interés continuo. Respecto al concepto de tasas equivales, se realizan un número importante de ejemplos, para que el lector se familiarice con la conversión de las tasas de interés, ya que le experiencia ha demostrado que es un tema donde los estudiantes tienen bastante problemas cuando tratan de realizar las conversiones. De la misma manera, se detalla la metodología para el cálculo de la UVR (Unidad de valor real), y se explica detalladamente los conceptos sobre moneda extranjera y que difícilmente se pueden encontrar en otros textos de las matemáticas financieras. También se hacen aplicaciones de ecuaciones de valor bajo el concepto del interés compuesto.

Capítulo 5. Se estudian las anualidades vencidas, anticipadas, diferidas y perpetuas o indefinidas; además se hacen ejemplos para el cálculo del valor, valor futuro, el tiempo y la tasa de interés, en estos dos últimos temas, se explica detalladamente el método de tanteo o ensayo y error.

Capítulo 6. Se realiza un análisis detallado de las series gradientes aritméticas y geométricas, desde lo creciente y decrecientes, así como desde la óptica de lo vencido e indefinido. Además, se explica el manejo de series gradientes anticipadas y diferidas.

Capitulo 7. Se estudian los diferentes sistemas de amortización en moneda nacional, también se explican de manera detallada la amortización de deudas en moneda extranjera cancelando las cuotas en pesos.
En este texto no se utilizan las tablas financieras que se aplicaban anteriormente en los diferentes textos de las matemáticas financieras, sino que se procura que el lector analice y haga uso de las fórmulas matemáticas, con la seguridad que le van a permitir un mayor dominio de la disciplina.

Este texto puede servir de guía en las carreras de pregrado como: Contaduría Pública, Administración de Empresas, Economía, Ingeniería Industrial y carreras afines, así como en las especializaciones donde se traten temas relacionados con las Matemáticas Financieras.

Los Autores

CAPITULO No 1. CONCEPTOS GENERALES

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del capítulo, el lector será capaz de:

1) Explicar y definir las matemáticas financieras y conceptuar sobre su importancia
2) Explicar y definir proyecto e inversiones y los tipos de inversiones
3) Explicar el proceso de toma de decisiones
4) Distinguir y explicar los aspectos básicos para la realización de inversiones o de proyectos
5) Definir y conceptualizar sobre el interés y la tasa de interés
6) Explicar el concepto de equivalencia
7) Distinguir y explicar el diagrama económico o flujo de caja

TEMARIO

1.1 INTRODUCCION

Las matemáticas financieras son fundamentales para tomar la mejor decisión, cuando se invierte dinero en proyectos o en inversiones, por eso es conveniente que el lector defina y explique los conceptos básicos sobre proyectos y las diferentes inversiones que se pueden llevar a cabo en la vida cotidiana y empresarial. También, es importante, que se conozca la importancia del concepto del valor del dinero a través del tiempo, como elemento fundamental de las matemáticas financieras, así como del principio de equivalencia y el principio de visión económica, que se aplican en el diagrama económico, para efecto de trasladar los flujos de caja al presente o al futuro.

1.2 IMPORTANCIA DE LA MATEMATICAS FINANCIERAS.

Las organizaciones y la personas toman decisiones diariamente que afectan su futuro económico, por lo cual, deben analizar técnicamente los factores económicos y no económicos, así como también los factores tangibles e intangibles, inmersos en cada una de las decisiones que se toman para invertir el dinero en las diferentes opciones que se puedan presentar, de allí, la importancia de las técnicas y modelos de la matemáticas financieras en la toma de las decisiones, ya que cada una de ellas afectará lo que se realizará en un tiempo futuro, por eso, las cantidades usadas en la matemáticas financieras son las mejores predicciones de lo que se espera que suceda.

No hay que olvidar que en todo proceso de toma de decisión siempre aparece el interrogante de tipo económico, debido a lo que espera toda organización o persona es la optimización de los recursos con que se cuenta.

Cuando se busca la solución que optimice los recursos con que se cuentan generalmente hay que abordar las siguientes preguntas claves:

¿Se justifica la realización del proyecto o la inversión?
¿Se puede usar la actual infraestructura de producción para alcanzar el nuevo nivel de producción?
¿El tiempo estipulado para la realización del proyecto es el adecuado?
¿Es recomendable o favorable la inversión económica o socialmente?
¿Cuál de las alternativas planteadas es la mejor para la organización o inversionistas?.

Las respuestas a las preguntas señaladas ayudan a la organización o inversionista a eliminar proyectos que no son factibles de realizar por no contar con los recursos necesarios. De allí, la importancia de desarrollar todo el proceso de toma de decisiones para plantear soluciones o alternativas para el problema que se está enfrentando.

Lo expuesto anteriormente, muestra la dimensión e importancia de las MATEMATICAS FINANCIERAS como herramienta de análisis y evaluación en el proceso de toma de decisiones.

1.3 DEFINICIONES DE LAS MATEMATICAS FINANCIERAS

Las matemáticas financieras pueden tener varias definiciones, pero todas presentan el mismo objetivo final.

"Estudia el conjunto de conceptos y técnicas cuantitativas de análisis útiles para la evaluación y comparación económica de las diferentes alternativas que un inversionista, o una organización pueden llevar a cabo y que normalmente están relacionadas con proyectos o inversiones en: sistemas, productos, servicios, recursos, inversiones, equipos, etc., para tomar decisiones que permitan seleccionar la mejor o las mejores posibilidades entre las que se tienen en consideración".

"Es una herramienta de trabajo que permite el análisis de diferentes alternativas planteadas para la solución de un mismo problema".

"Es el estudio de todas las formas posibles para desarrollar nuevos productos (o resolver un problema), que ejecutarán funciones necesarias y definidas a un costo mínimo".

"Es un conjunto de conceptos y técnicas de análisis, útiles para la comparación y evaluación económica de alternativas".

En general el objetivo básico de las matemáticas financieras es seleccionar la alternativa más conveniente desde el punto de vista económico.

1.4 DEFINICIONES DE PROYECTO

Existen varias definiciones al término proyectos, entre las cuales se pueden enumerar las siguientes:

Las Naciones Unidas, en su Manual de Proyectos de Desarrollo Económico, expresa:

> "*Un proyecto es el conjunto de antecedentes que permite estimas las ventajas y desventajas económicas que se derivan de asignar ciertos recursos de un país para la producción de determinados bienes o servicios"*

La definición indica que si los resultados económicos esperados son favorables el proyecto debe llevarse hasta finalizarlo, dando especial consideración a las diferentes etapas que lo conforman.

El Banco Mundial define proyecto de la siguiente manera:

> *"El proyecto es, en un caso ideal, una serie óptima de actividades orientadas hacia la inversión fundadas en una planificación sectorial completa y coherente, mediante la cual se espera que un conjunto específico de recursos humanos y materiales produzca un grado determinado de desarrollo económico y social".*

El Instituto Latinoamericano y del Caribe de Planificación Económica y Social, Ilpes, en su documento Guía para la presentación de proyectos proporciona la siguiente definición:

> *"En su significado básico, el proyecto es el plan prospectivo de una unidad de acción capaz de materializar algún aspecto del desarrollo económico o social.*

Esto implica, desde el punto de vista económico. Proponer la producción de algún bien o la prestación de algún servicio, con el empleo de una cierta técnica y con miras a obtener u determinado resultado o ventaja, económico o social. Como plan de acción, el proyecto supone también la indicación de los medios necesarios para su realización y la adecuación de esos medios a los resultados que se persiguen. El análisis de estas cuestiones se hace en los proyectos no sólo del punto de vista económico sino también técnico y financiero, administrativo e institucional".

En la forma más simple un proyecto se puede definir como la búsqueda de una solución inteligente al planteamiento de un problema para resolver, entre muchas, una necesidad humana.

Un proyecto de inversión es un plan, que si se le asigna determinado monto de capital y se le proporciona insumos de diferentes tipos, podrá producir un bien o un servicio, útil al ser humano o a la sociedad en general.

1.5 INVERSIONES

Las inversiones son la asignación de recursos en los diferentes departamentos de una organización, con las cuales se logran los objetivos trazados en cada uno de ellos. Las inversiones deben ser evaluadas cuidadosamente a fin de determinar su aceptación o rechazo y establecer su grado de prioridad dentro de los planes estratégicos de la empresa. Los errores cometidos en las decisiones de inversión no sólo tienen consecuencias negativas en los resultados de las operaciones, sino que también impactan las estrategias de la empresa. Las inversiones pueden clasificarse de acuerdo con varios criterios y desde diferentes puntos de vista. En este libro en primera instancia, se clasificaran por el tipo de función que desempeñan dentro de la empresa:

a) ***Inversiones de renovación***: Se realizan cuando se van a sustituir equipos, instalaciones o edificaciones obsoletas o desgastadas físicamente por nuevos elementos productivos. Se invierte en renovar las operaciones existentes.
b) ***Inversiones de modernización***: Comprenden todas las inversiones que se efectúan para mejorar la eficiencia de la empresa tanto en la fase productiva como en la comercialización de los productos. Se invierte para mejorar la eficiencia operacional.
c) ***Inversiones de expansión***: Son las inversiones que se realizan para satisfacer una demanda creciente de los productos de la empresa.
d) ***Inversiones estratégicas***: Son las que afectan la esencia misma de la empresa, ya que tomadas en conjunto definen el sistema de actividades de la misma. Estas inversiones se derivan del análisis de la estrategia de la empresa y su impacto en el sistema de actividades es contundente. Los casos más típicos son las inversiones para diversificación, la cobertura de nuevos mercados, las inversiones asociadas con nuevos desarrollos tecnológicos y las derivadas de las decisiones de integración vertical u horizontal en la empresa.

Atendiendo a la relación de dependencia o independencia económica de las inversiones, éstas se pueden clasificar en mutuamente excluyentes, independientes y complementarias.

a) ***Mutuamente excluyentes***: Cuando por su naturaleza solo se puede ejecutar una de ellas, pues sería redundante o contraría la política de la organización, hay que tener en cuenta, que las inversiones mutuamente excluyentes están vinculadas a la solución de un mismo problema, por eso, hay que seleccionar la mejor de todas.

b) ***Inversiones Independientes***: Son aquellas que no guardan relación o dependencia económica entre sí, por tal motivo, la realización de una de ellas no impide la ejecución de otra u otras inversiones. La única limitante para la organización, es la disponibilidad de los recursos para cada una de las inversiones.
El proceso decisorio se orienta a identificar una combinación de inversiones, factibles de ejecutar en función de la disponibilidad de recursos, que es la que genera los mejores resultados.

c) ***Inversiones Complementarias***: Son las inversiones que tienen un alto grado de dependencia económica entre sí, que en algunos de los casos al realizarse simultáneamente, interactúan reforzando o atenuando las características de ellas. Esto da como resultado que, en algunas combinaciones se presente el fenómeno de sinergismo y que en tal sentido, haya que determinar el efecto sinergético de la combinación. El proceso decisorio está orientado a identificar una mezcla de combinaciones o alternativas individuales, factibles de realizar en función de la disponibilidad de recursos, y que es la que produce los mejores resultados.

Las inversiones también, se clasifican en función del sector de la economía en que se ejecutan, por lo tanto, habrán inversiones en empresas del sector privado y en el sector público.

a) ***Inversiones en el sector privado***: Son inversiones preparados y ejecutados por personas naturales y jurídicas, con recursos privados y de crédito, se deben aceptar cuando se esperan incrementos en los beneficios de las empresas (crean valor) y por consiguiente se espera que aumente el patrimonio de los accionistas. No obstante, en algunas ocasiones hay inversiones de carácter estratégico que no generan los rendimientos mínimos exigidos por la empresa, pero que se aceptan por completar el sistema de actividades escogido por la estrategia de la empresa.

b) ***Inversiones en el sector público***: Son inversiones desarrolladas por entidades del gobierno y con presupuestos de inversión pública. Generalmente apuntan al mejoramiento de la salud, la educación, la vivienda, el transporte, la seguridad, etc. Estas inversiones se realizan con base en los planes y programas de desarrollo económico y social que se preparan en los diferentes niveles de la administración pública
En las inversiones del sector público se deben valor aspectos cuantitativos y cualitativos de beneficio económico y social, y su objetivo primordial es aumentar el bienestar social.

1.6 PROCESO DE TOMA DE DECISIONES

La toma de decisiones es la selección de un curso de acción entre varias alternativas planteadas en una organización y el núcleo de la planeación, también, es una actividad cotidiana en las organizaciones, cada problema o situación se tiene que resolver, por lo cual surgirá la necesidad de tomar una decisión. Por lo tanto, es recomendable disponer de un procedimiento sistémico para la solución de los problemas, que se puede señalar de la siguiente manera:

1) ***Definir el problema***: Se trata de identificar en forma clara el problema y realizar su formulación de manera concreta y precisa, definiendo los objetivos buscados. La importancia de éste punto es vital en el proceso de toma de decisiones, y es recomendable dedicarle todo el tiempo que se necesite, para lograr una clara y adecuada definición del problema, porque de lo contrario se corre el riesgo de dar solución a un problema inexistente. Debe quedar claro que los problemas en la vida cotidiana o real, están enunciados de manera muy general, por lo cual, es indispensable identificarlos y definirlos exactamente, en relación con sus objetivos como en los métodos de análisis que se seguirán.

   La importancia de definir con claridad y precisión el problema radica en el hecho conocido de que es preferible no resolver el problema, antes que resolver el problema que no es, por eso, se dice que la definición del problema es la parte más crítica de todo proceso de toma de decisiones, debido a que una equivocada identificación traerá como consecuencia la toma de una decisión igualmente errada. De una premisa equivocada siempre la conclusión será equivocada.

   La importancia del proceso de identificación del problema, se traduce en el pensamiento de Albert Einstein: “Si se me concediese sólo una hora para resolver un problema del que dependiese mí propia vida, yo dedicaría 40 minutos a estudiarlo, 15 minutos a revisarlo y 5 minutos a solucionarlo”.

   En este sentido, se recomienda agotar los mejores esfuerzos y recursos de la organización en la identificación de la problemática. Deben realizarse reuniones, tormentas de ideas y trabajos de grupo para la consecución de una visión clara y precisa de la situación que se deberá enfrentar.

2) ***Analizar el problema***: Una vez se haya definido en forma concreta el problema, se procede a discriminar todos los hechos que lo han originado o tienen relación con él. Es indispensable que dentro del análisis, se realice una reseña de las decisiones tomadas en el pasado, en relación con el problema definido; porque muchas veces el problema surgido, tiene que ver con las decisiones que se han tomado con anterioridad en el tiempo. También, es conveniente y necesario analizar las restricciones que se presentan al momento de dar solución a los problemas, y ellas pueden ser reales y ficticias.

   Las restricciones reales son las que verdaderamente existen al momento de formular el problema, pueden ser: tecnológicas, de recursos, de tiempo, sociopolíticas, de seguridad, administrativas, etc. Estas restricciones, son necesarias tenerlas en cuenta al momento de seleccionar la solución al problema.

   Las restricciones ficticias son las que no están o no existen contenidas en el problema que se ha definido; generalmente surgen de manera inconscientemente por el criterio de la persona que está realizando el análisis, y pueden ser: hábitos, temores, inhibiciones, timidez. Hay que tener en cuenta, que hay personas que se restringen ficticiamente más que otras, afectando en forma negativa la creatividad y dificultad la solución de los problemas o los convierte en imposibles de solucionarlos.

3) ***Generación de alternativas de soluciones***: Una vez que el problema se ha definido y analizado, se debe proceder a generar posibles soluciones y/o alternativas para ser aplicadas. Un brainstorning (tormenta de ideas) , es un buen comienzo para la generación de soluciones. En el proceso de generación de soluciones, se recomienda reunir todas aquellas personas que tengan que ver o conozcan el problema e inducirlas al planteamiento de soluciones, no sin antes tener en cuenta los siguientes elementos:

   a) Evitar resaltar las diferencias jerárquicas de los asistentes.
   b) Buscar la participación del directivo más importante hasta el obrero más humilde de la organización.
   c) No subestimar ninguna solución sugerida.
   d) No permitir burlas a las soluciones planteadas.
   e) No hacer comentarios negativos sobre las soluciones sugeridas.
   f) Motivar e inducir permanentemente a las personas para que sugieran soluciones.

   En caso que la decisión competa a una sola persona y ésta no tenga los medios para consultar con otros, es indispensable que se presenten distintas alternativas para que cada una sea evaluada individualmente.

4) ***Evaluación de alternativas***: El proceso de generación de alternativas de soluciones tendría poca importancia si las mismas no son analizadas y comparadas entre sí, de manera tal que se pueda determinar cuál es la más conveniente. Mediante la evaluación de las alternativas se conocerá, cuál de ellas es la más rentable, cuál tendrá más posibilidad de realización, cuál apoyará los intereses generales de la compañía, así como también cuál de las posibles soluciones será más acorde con la visión y misión de la organización. Igualmente se considerarán las estrategias de la organización a corto, mediano y largo plazo.
   Cuando se estima la conveniencia de una solución debe tomarse en cuenta la rentabilidad que produce, asociada al riesgo que conlleva. Adicionalmente, debe considerarse que el beneficio económico a corto plazo puede quedar relegado en aras de una estrategia superior de la empresa.
   Es necesario que una vez se seleccione la alternativa que dará solución al problema, se le comunique a las personas de la organización encargadas de dar la aprobación final. De la presentación de la solución depende que se lleve a la práctica, por ello es importante estar seguros de los beneficios de dicha solución y llevar a cabo la sustentación con seguridad, demostrando clara y concretamente cuales son las ventajas de la solución propuesta. Es conveniente presentar soluciones a corto, mediano y largo plazo.

5) ***Implementar la solución***: La selección de la decisión no hace finalizar el proceso de toma de decisiones; por el contrario, una vez seleccionada la alternativa, se debe buscar su implementación, teniendo en factores tales como tiempo, recursos humanos, tecnológicos, financieros, etc. También es de suma importancia

considerar la capacidad de entendimiento de la decisión por parte de la persona responsable de ejecutarle, así como su grado de compromiso.

En muchas ocasiones una determinada decisión pasará por diferentes áreas de la organización y probablemente el compromiso no sea el mismo en cada una de ellas. Por otro lado, es probable que el entendimiento de la decisión no sea compartido por igual, por lo cual se deberán tomar en cuenta estas consideraciones al momento de implementar la decisión.

Implementar una decisión exige en muchos casos todo un proceso de planificación y de distribución de recursos que garanticen su éxito. Una decisión podría fracasar por no contar con los recursos adecuados o con el compromiso y entendimiento de los miembros de la organización.

6) ***Evaluar los resultados de la decisión***: A través de un análisis de los resultados obtenidos por la puesta en práctica de una decisión tomada, se podrán tomar medidas para asegurar la optimización de los resultados. Es así como mediante la evaluación de éstos se pueden tomar las acciones necesarias para corregir cualquier desviación en los resultados inicialmente planificados. Adicionalmente, se puede descubrir la necesidad de incluir nuevos recursos en el proceso: humanos, financiero o de otra clase. También, se puede llegar a la conclusión de que la decisión tomada no fue la correcta y así adoptar las medidas necesarias para enmendar esa equivocación.

1.7 ASPECTOS BASICOS DE UN ANALISIS DE INVERSIONES.

Para la correcta realización de un estudio de las matemáticas financieras, se requieren básicamente analizar las siguientes etapas:

a) Análisis técnico
b) Análisis económico
c) Análisis financiero
d) Análisis de intangibles
e) Análisis del mercado
f) Análisis Administrativo
g) Análisis Social
h) Análisis sensorial

Análisis técnico: Se refiere a la factibilidad operacional del proyecto o alternativa, es decir, se define la viabilidad técnica del proyecto. En este análisis, se definirá las especificaciones técnicas de los insumos necesarios para ejecutar el proyecto en relación con: tipo y cantidad de materia prima e insumos, nivel de calificación del recurso humano requerido, la maquinaria y los equipos necesarios para el proyecto y un programa de las inversiones iníciales y de reposición, así como también, los calendarios de mantenimiento.

Análisis económico: Se refiere a la factibilidad económica de la alternativa o proyecto (Si es rentable o no). Es importante, pues es la que al final permite decidir la implantación del proyecto.

Análisis financiero: Se refiere a la disponibilidad y origen de los fondos necesarios para realizar el proyecto. En otras palabras, se refiere a la identificación de las fuentes de financiación del proyecto internas y externas, permite adicionalmente establecer criterios para el manejo de excedentes e identificar las necesidades de liquidez, para construir y negociar el plan de financiamiento del proyecto.

Análisis de intangibles: Se refiere a considerar los efectos no cuantificables de un proyecto: Aspectos como: imagen corporativa, opinión pública, nombre, factores ecológicos y ambientales, leyes cambiantes, situación política, etc. El estudio de las leyes, debe llevarse a cabo en las etapas iníciales de la formulación y preparación, ya que un proyecto supremamente rentable, puede resultar no factible por una norma legal. En análisis de los factores ecológicos y ambientales, es necesario determinar el impacto del proyecto sobre el medio ambiente en el corto, mediano y largo plazo y el efecto del entorno sobre el proyecto.

Análisis del mercado: En el cual se determinan ventas y clientes potenciales para los bienes y servicios que van a producirse. Además, de estudiar la demanda, es necesario tener en cuenta la oferta y precios, tanto de los productos como de los insumos de un proyecto. En la demanda de los productos, se analiza el volumen presente y futuro y las variables relevantes para su proyección como: población objetivo o segmento de mercado, niveles de ingresos esperados, productos complementarios y sustitutos que ya estén o que en el futuro entraran al mercado. Es importante tener en cuenta el mercado local, regional, nacional y el internacional.

Análisis Administrativo: Es un diseño que muestra la estructura organizacional y define la necesidades de personal del proyecto, además; genera la información sobre las necesidades de infraestructura para el normal desarrollo de las actividades de las diferentes áreas que conforman el proyecto como son: planeación, personal, finanzas, cobranzas, etc. En este análisis, también se señala los equipos y dotación de insumos requeridos para el adecuado funcionamiento administrativo.

Análisis Social: Determina la incidencia que el proyecto tiene en la comunidad y la manera de evitar las incidencias negativas del proyecto. En concreto el análisis está dirigido a identificar y caracterizar con precisión los diferentes grupos de la población implicados por el proyecto, desde el punto de vista de los beneficios y los costos.

Análisis Sensorial: Trata de fijar la posición personal del empresario en aspectos legales, éticos, morales y de gusto personal, con relación a la actividad en sí misma o a las condiciones que el proyecto exige.

1.8 VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Es el concepto más importante en las matemáticas financieras. El dinero, como cualquier otro bien, tiene un valor intrínseco, es decir, su uso no es gratuito, hay que pagar para usarlo. El dinero cambia de valor con el tiempo por el fenómeno de la inflación y por el proceso de devaluación. El concepto del valor del dinero dio origen al interés. Además, el concepto del valor del dinero en el tiempo, significa que sumas iguales de dinero no tendrán el mismo valor si se encuentran ubicadas en diferentes tiempos, siempre y cuando la tasa de interés que las afecta sea diferente a cero

La inflación es el fenómeno económico que hace que el dinero todos los días pierda poder adquisitivo o que se desvalorice. Por ejemplo, dentro de un año se recibirá los mismo $ 1.000 pero con un poder de compra menor de bienes y servicios. Desde un punto de vista más sencillo, con los $ 1.000 que se recibirá dentro de un año se adquirirá una cantidad menor de bienes y servicios que la que se puede comprar hoy, porque la inflación le ha quitado poder de compra al dinero.

1.9 INTERES

Cuando una persona utiliza un bien que no es de su propiedad; generalmente deba pagar un dinero por el uso de ese bien; por ejemplo se paga un alquiler al habitar un apartamento o vivienda que no es de nuestra propiedad. De la misma manera cuando se pide prestado dinero se paga una renta por la utilización de eses dinero, En este caso la renta recibe el nombre de interés o intereses.

En otras palabras se podría definir el interés, como la renta o los réditos que hay que pagar por el uso del dinero prestado. También se puede decir que el interés es el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero, el interés tiene como símbolo **I**. En concreto, el interés se puede mirar desde dos puntos de vista.

- ✓ Como costo de capital: cuando se refiere al interés que se paga por el uso del dinero prestado.
- ✓ Como rentabilidad o tasa de retorno: cuando se refiere al interés obtenido en una inversión.

Usualmente el interés se mide por el incremento entre la suma original invertida o tomada en préstamo (**P**) y el monto o valor final acumulado o pagado.

De lo anterior se desprende que si hacemos un préstamo o una inversión de un capital de **$P,** después de un tiempo **n** se tendría una cantidad acumulada de **$F,** entonces se puede representar el interés pagado u obtenido, mediante la expresión siguiente:

$$I = F - P \qquad (1.1)$$

Pero también: $I = Pin \qquad (1.2)$

Analizando la anterior fórmula, se establece que el interés es una función directa de tres variables: El capital inicial (P), la tasa de interés (i) y el tiempo (n). Entre mayor sea alguno de los tres, mayor serán los intereses.

Las razones a la existencia del interés se deben a:

- ✓ El dueño del dinero (prestamista) al cederlo se descapitaliza perdiendo la oportunidad de realizar otras inversiones atractivas.

- ✓ Cuando se presta el dinero se corre el riesgo de no recuperarlo o perderlo, por lo tanto, el riesgo se toma si existe una compensación atractiva.
- ✓ El dinero está sujeto a procesos inflacionarios y devaluatorios en cualquier economía, implicando pérdida en el poder adquisitivo de compra.
- ✓ Quien recibe el dinero en préstamo (prestatario) normalmente obtiene beneficios, por lo cual, es lógico que el propietario del dinero, participe de esas utilidades.

Existen dos tipos de interés, simple y compuesto, los cuales se estudiarán posteriormente.

Ejemplo 1.1

Se depositan en una institución financiera la suma de $ 1.200.000 al cabo de 8 meses se tiene un acumulado de $ 200.000, calcular el valor de los intereses.

$$I = F - P = 1.400.000 - 1.200.000 = \$\ 200.000$$

La variación del dinero en $ 200.000 en los 8 meses, se llama valor del dinero en el tiempo y su medida, son los intereses producidos.

1.10 TASA DE INTERES

La tasa de interés mide el valor de los intereses en porcentaje para un período de tiempo determinado. Es el valor que se fija en la unidad de tiempo a cada cien unidades monetarias ($100) que se invierten o se toman en calidad de préstamo, por ejemplo, se dice.: 25% anual, 15% semestral, 9 % trimestral, 3% mensual.

Cuando se fija el 25% anual, significa que por cada cien pesos que se inviertan o se prestan se generaran de intereses $ 25 cada año, si tasa de interés es 15% semestral, entones por cada cien pesos se recibirán o se pagaran $ 15 cada seis meses, si la tasa es 9% trimestral se recibirán o se pagaran $ 9 de manera trimestral, y si la tasa es del 3% mensual, se recibirán o se pagaran $ 3 cada mes.

La tasa de interés puede depender de la oferta monetaria, las necesidades, la inflación, las políticas del gobierno, etc. Es un indicador muy importante en la economía de un país, porque le coloca valor al dinero en el tiempo.

Matemáticamente la tasa de interés, se puede expresar como la relación que se da entre lo que se recibe de interés (**I**) y la cantidad invertida o prestada, de la ecuación (1.1), se obtiene:

$$\mathbf{i = \frac{I}{P}} \qquad \mathbf{(1.3)}$$

La tasa de interés siempre se presenta en forma porcentual, así: 3% mensual, 15% semestral, 25% anual, pero cuando se usa en cualquier ecuación matemática se hace necesario convertirla en número decimal, por ejemplo: 0,03, 0,15 y 0,25

La unidad de tiempo generalmente usada para expresar las tasas de interés es el año. Sin embargo, las tasas de interés se expresan también en unidades de tiempo menores de un año. Si a la tasa de interés, no se le especifica la unidad de tiempo, se supone que se trata de una tasa anual.

Ejemplo 1.2

Una entidad le presta a una persona la suma de $ 2.000.000 y al cabo de un mes paga $ 2.050.000. Calcular el valor de los intereses y la tasa de interés pagada.

$$I = F - P = 2.050.000 - 2.000.000 = \$50.000$$
$$i = \frac{I}{P} = \frac{50.000}{2.000.000} = 0.025\ m = 2{,}5\%\ m$$

1.11 EQUIVALENCIA.

El concepto de equivalencia juega un papel importante en las matemáticas financieras, ya que en la totalidad de los problemas financieros, lo que se busca es la equivalencia financiera o equilibrio los ingresos y egresos, cuando éstos se dan en períodos diferentes de tiempo. El problema fundamental, se traduce en la realización de comparaciones significativas y valederas entre varias alternativas de inversión, con recursos económicos diferentes distribuidos en distintos períodos, y es necesario reducirlas a una misma ubicación en el tiempo, lo cual sólo se puede realizar correctamente con el buen uso del concepto de equivalencia, proveniente del valor del dinero en el tiempo.

El proceso de reducción a una misma ubicación en el tiempo, se denomina transformación del dinero en el tiempo. Además, la conjugación del valor de dinero en el tiempo y la tasa de interés permite desarrollar el concepto de equivalencia, el cual, significa que diferentes sumas de dinero en tiempos diferentes pueden tener igual valor económico, es decir, el mismo valor adquisitivo.

Ejemplo 1.3

Si la tasa de interés es del 15%, $ 1.000 hoy es equivalente a $1.150 dentro de un año, o a $ 869,56 un año antes (1000/1.15).

El concepto de equivalencia, también se puede definir, como el proceso mediante el cual los dineros ubicados en diferentes periodos se trasladan a una fecha o periodo común para poder compararlos.

Partiendo de la base que el dinero tiene valor en el tiempo, por consiguiente, es indispensable analizar la modalidad de interés aplicable y la ubicación de los flujos de caja en el tiempo, por lo tanto, sin importar que existen múltiples desarrollos referente a la ubicación, en este libro se tendrá en cuenta la ***ubicación puntual***, la cual considera el dinero ubicado en posiciones de tiempo especifica; tiene dos modalidades.

Convención de fin periodo: valora los flujos de caja (ingresos y/o egresos) como ocurridos al final del periodo. Por ejemplo: Si durante el año 2003, se obtuvieron $ 1.500 millones de ingresos y el periodo analizado es enero 1 de 2007 a diciembre 31 de 2007, entonces, los ingresos se considerarían obtenidos el 31 de diciembre de 2007.

Convención de inicio de periodo: valora los flujos de caja (ingresos y/o egresos) como ocurridos al principio del periodo. En el ejemplo anterior los $ 1.500 millones de ingresos se considerarían obtenidos el 1 de enero de 2007.

En este libro mientras no se indique lo contrario, siempre se trabajará con convención de fin de periodo.

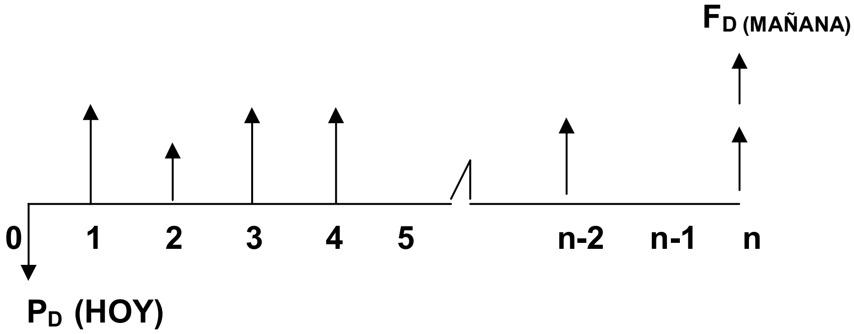
1.12 DIAGRAMA DE TIEMPO O FLUJO DE CAJA

El diagrama de tiempo, también es conocido con los nombres de diagrama económico o diagrama de flujo de caja. Es una de las herramientas más útiles para la definición, interpretación y análisis de los problemas financieros. Un diagrama de tiempo, es un eje horizontal que permite visualizar el comportamiento del dinero a medida que transcurren los periodos de tiempo, perpendicular al eje horizontal se colocan flechas que representan las cantidades monetarias, que se han recibido o desembolsado (FLUJO DE FONDOS O DE EFECTIVO). Por convención los ingresos se representan con flechas hacia arriba (↑) y los egresos con flechas hacia abajo (↓).

Al diagrama económico o de tiempo, hay que indicarle la tasa de interés (***efectiva o periódica***) que afecta los flujos de caja, la cual; debe ser concordante u homogénea con los periodos de tiempo que se están manejando, es decir; si los periodos de tiempos son mensuales, la tasa de interés debe ser mensual, si los periodos de tiempos son trimestrales, la tasa de interés que se maneja debe ser trimestral; si los periodos de tiempos son semestrales, la tasa de interés debe ser semestrales, y así sucesivamente.

Un diagrama de tiempo tiene un principio y un fin, el principio es conocido como el hoy (ubicado en el cero del diagrama), y allí se encontrará el presente del diagrama ($\mathbf{P_D}$), mientras que en el fin, se ubicará el futuro del diagrama económico ($\mathbf{F_D}$) y la terminación de la obligación financiera. Hay que tener en cuenta, que un diagrama económico, contempla presentes y futuros intermedios, es decir, un periodo de tiempo puede ser el presente de uno o varios flujos de caja, o un periodo de tiempo podrá ser un futuro de uno o varios flujos de caja, todo depende entonces de la ubicación del periodo de tiempo versus la ubicación de los flujos de caja.

Es importante anotar que en las matemáticas financieras: ***Sólo se permiten sumar, restar o comparar flujos de caja (ingresos y/o egresos) ubicados en los mismos periodos del diagrama económico.***

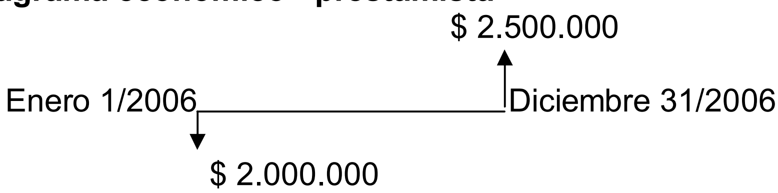


El diagrama de tiempo que se construya para un prestamista será inverso al que se construya para el prestatario.

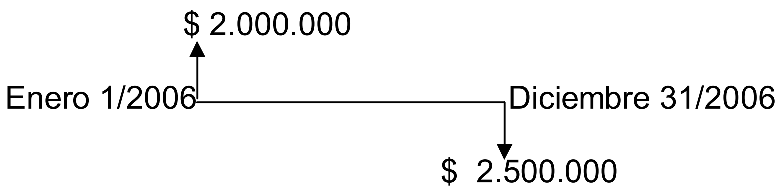
Ejemplo 1.4

Una persona recibe un préstamo el 1 de enero de 2006 de $ 2.000.000 y cancela el 31 de diciembre del mismo año la suma de $ 2.500.000. Construir el diagrama económico.

a) Diagrama económico - prestamista



***c)* Diagrama económico – prestatario**



Consideraciones

1) El momento en que el prestamista entrega el dinero, y el prestatario lo recibe se conoce con el nombre de presente o momento cero
2) El valor entregado inicialmente se denomina valor presente o simplemente P.
3) El segmento de recta representa el tiempo de la operación financiera (n)
4) La suma entregada al final recibe el nombre de valor futuro o simplemente F.

Cuando una persona ahorra o deposita dinero en una institución financiera que reconoce una tasa de interés, la relación entre las partes se asimila al escenario prestamista – prestatario. Para este caso, el ahorrador o depositante asume el papel de prestamista y la institución financiera será el prestatario.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Una inversión realizada hoy por $ 1.200.000 genera al final de un año la suma de $ 1.536.000. Se pide:
   a) La suma ganada por intereses. **R/. $ 336.000**
   b) La tasa de interés de la operación financiera. **R/. 28% anual**
2) Cuánto se debe invertir hoy para tener de un semestre la suma de $ 8.500.000 y se ganen unos intereses de $ 480.000. Cuál es la tasa de interés. **R/. $ 8.020.000, 5,985% semestral**
3) Calcular el valor de los intereses generado por una inversión hoy de $ 10.000.000 a las siguientes tasas:
   a) 1.2% quincenal. **R/. $ 120.000 quincenales**
   b) 2,5% mensual. **R/. $ 250.000 mensuales**
   c) 7% trimestral. **R/. $ 700.000 trimestrales**
   d) 10% cuatrimestral. **R/. $ 1.000.000 cuatrimestral**
   e) 15% semestral. **R/. $ 1.500.000 semestral**
4) Si usted invirtió $ 1.500.000 durante un año, al final del cual le entregaron $ 2.000.000. Cuál fue su rentabilidad?. **R/. 33,33% anual**
5) A usted le concedieron un préstamo por la suma de $ 5.000.000 durante un trimestre, al final del cual debe pagar $ 5.600.000. Cuál fue el costo del crédito?. **R/ 12% trimestral**
6) Una persona adquiere un equipo de sonido por la suma de $ 1.800.000 y lo cancela de la siguiente manera: 20% de cuota inicial y el resto en 4 cuotas trimestrales iguales de $ 420.000. Teniendo en cuenta el valor del dinero en el tiempo, se puede decir que se pagó por el equipo de sonido la suma de $ 2.040.000, si se cobra una tasa de interés del 6,5% trimestral?. **R/. No, hay que considerar la tasa de interés que se aplicó, elemento fundamental en el valor del dinero en el tiempo. Realmente el equipo de sonido a crédito sale por $ 2.174.400**.
7) Un apartamento por valor de $ 60.000.000 se adquiere a crédito, y se desea cancelar en un año con cuotas bimestrales iguales de $ 11.000.000. Construya el diagrama económico desde el punto de vista del comprador y del vendedor.
8) Se recibe un préstamo en una institución bancaria por valor de $ 25.000.000 para cancelar dentro de dos años, a una tasa de 10% cuatrimestral anticipada. Construya el diagrama económico.
9) Un préstamo por $ 15.000.000 se paga con 4 cuotas trimestrales iguales mas los intereses. Si la tasa de interés es del 7% trimestral. Construya el diagrama económico.
10) Construya el diagrama económico del ejercicio anterior, suponiendo que los intereses se cancelan de manera anticipada.
11) Roberto solicito prestado $ 6.300.000 para pagar en 4 meses. Si la tasa de interés es del 30% anual simple, ¿Qué cantidad debe pagar por concepto de intereses?. **R/. $ 630.000**
12) Pedro posee un capital de $ 3.200.000. Invierte 70% de su capital al 6,3% trimestral y el resto al 11,6% semestral. ¿Cuánto recibe cada mes de interés total?. **R/. $ 65.600**.
13) El señor Ricaurte compro un televisor en el almacén muebles para el hogar. El televisor tenía un valor de contado de $ 2.650.000, se dio una cuota inicial de $ 530.000 y firmó un pagaré a 31 días por la suma $ 2.247.800. Calcule la tasa de

interés anual aplicada (Tome el año de 360 días). **R/. 0,19446% diario y 70,01% anual.**

14) Una inversión de $ 14.400.000 gana $ 2.092.800 de interés en 8 meses. Calcule: a) La tasa de interés simple anual, b) La tasa efectiva del periodo. **R/. 21,8 % anual, 14,533% en 8 meses**.

15) ¿Cuánto tiempo tardará un préstamo de $ 4.500.000 para producir $ 253.130 de interés simple, si la tasa de interés es de 45%?. **R/. 0,1250025 años**.

16) En cuánto tiempo se duplicará una cierta cantidad de dinero si se invierte al 40% de interés simple. **R/. 2,5 años**.

17) Abigail invirtió un total de $ 65.000.000 en dos bancos diferentes, En el Banco Popular invirtió una parte de los $ 65.000.000 en una cuenta de ahorros que paga rendimientos liquidables al vencimiento a plazo de 91 días y a una tasa de interés del 19,35%. En Davivienda invirtió el resto con rendimientos liquidables al vencimiento de 91 días y una tasa de interés del 21,8%. Si al final del plazo, el interés total fue de $ 3.458.000, ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada uno de los bancos?. Tome año de 360 días. **R/. $ 20.000.000 en el Banco Popular y $ 45.000.000 en Davivienda**.

18) ¿Cuánto pagará un comerciante por un crédito que le concedió una fábrica de dulces y chocolates, al comprar por $ 3.500.000 a 25 días de plazo, si le cargan una tasa de interés del 3% mensual?. **R/. $3.587.500**

19) Un empleado obtiene un préstamo de su empresa por $ 4.200.000 para comprar electrodomésticos y aceptar liquidar el préstamo dos años después. Existe el acuerdo que mientras exista la deuda, pagará intereses mensuales de 2,5% mensual. ¿Cuánto deberá pagar de intereses cada mes?. **R/. $ 105.000**

20) Una persona compra a crédito una estufa que tiene un precio de contado de $ 1.765.000. Queda de acuerdo en dar una cuota inicial de $ 500.000 y pago final 3 meses más tarde. Si acepta pagar una tasa de interés del 42% sobre el saldo, ¿Cuánto deberá pagar dentro de 3 meses?. R/. **$ 1.397.825**.

21) Una persona firma un pagaré por una deuda que tiene por $ 7.498.000 a 4 meses de plazo. Si la tasa de interés normal es de 2,8% mensual y la tasa de interés moratorio es del 65%, calcule la cantidad total a pagar si el documento se cancelo 25 días del vencimiento. R/. **$ 8.676.227,39**.

22) El señor Milton García firma un pagaré por un préstamo de $ 7.000.000 a una tasa de 45% a 90 días de plazo. Queda de acuerdo en pagar una tasa de interés moratorio igual a 25% más de la tasa normal. Calcule el interés moratorio y la cantidad total por pagar si el documento es liquidado 12 días después de la fecha de vencimiento. **R/ $ 131.250 y $ 7.918.750**.

23) Isabel invirtió $ 5.500.000 en una institución financiera a plazo de 28 días. Si al vencimiento recibió $ 5.620.000, a) ¿qué rendimiento obtuvo?, b)¿qué tasa de interés anual ganó?. **R/ $ 120.000 y 31.42%**.

24) Una computadora cuesta $ 3.250.000 de contado. Un estudiante está de acuerdo de dar una cuota inicial del 25% del precio de contado y el resto a 90 días, con un recargo del 15% sobre el precio de contado. ¿Qué tasa de interés simple anual paga el estudiante?. **R/. 80% anual**.

25) Luis consigue un préstamo por la suma de $ 7.500.000 a dos años y medio de plazo y una tasa de interés simple de 2,6% mensual. ¿Cuánto pagará por concepto de intereses?¿Cuánto pagará al final del plazo por el préstamo recibido?. **R/. $ 5.850.000 y $ 13.350.000**.

26) Se solicita un préstamo por $ 7.000.000 al 9,5% trimestral de interés simple, ¿cuánto debe pagar por concepto de intereses al termino de 9 meses?¿Cuál es el valor del monto?. **R/ $ 1.995.000 y $ 8.995.000**.

27) Una persona obtiene un préstamo por $ 2.890.000 el 3 de febrero de 2007 y cancela el capital principal más los intereses el 3 de julio de 2007. Obtenga los intereses y el monto, si la tasa de interés fue del 3% mensual. **R/ $ 433.500 y $ 3.323.500**

28) El interés ganado por un préstamo de $ 8.000.000, en un plazo de 7 meses, fue de $ 350.000. Calcule la tasa efectiva del periodo y la tasa de interés anual. **R/. 4.38% y 7.5%**.

29) Cristina solicita un préstamo por $ 6.000.000 para la compra de una impresora. Acuerda pagar $ 210.000 de intereses al cabo de 36 días. ¿Qué tasa efectiva por periodo paga por el préstamo?. **R/. 3.5%**.

30) Se puede comprar un computador portátil en $ 1.475.000 de contado o bien, en $ 1.567.187,5 a crédito con 5 meses de plazo. Si el dinero se puede invertir al 15% anual, ¿Qué alternativa de pago resulta más ventajosa para el comprador?. **R/. Es indiferente comprar de comprado o a crédito**.

31) Un horno de microondas cuesta $ 520.000 si se paga de contado y $ 560.000 si se paga a los 4 meses. Si la persona un préstamo de $ 520.000 por 4 meses al 9% anual para comprar el horno y pagar de contado, le conviene?. **R/. Si le conviene solicitar el préstamo**.

32) Gloria desea invertir $ 20.000.000 en dos bancos, de manera que sus ingresos totales por concepto de intereses sean de $ 120.000 al mes. Un banco paga 7,32% y el otro ofrece 2,32% cuatrimestral. ¿Cuánto debe invertir en cada banco? **R/. $ 13.333.333 y $ 6.666.667**.

33) Un empresario tomo prestados a $ 20.000.000 a cuatro meses con un interés del 2,5% mensual, pagaderos al vencimiento. En el contrato se estipula que en caso de mora debe pagar el 3,2% mensual, sobre el saldo ya vencido. Qué suma tendrá que pagar si cancela a los cuatro meses y 25 días?. **R/. $ 22.586.666,67**.

34) Un préstamo de $ 6.700.000 a un año tiene un interés del 2,3% mensual los 6 primeros meses y el 2,8% mensual los últimos 6 meses; todos estos intereses serán cancelados al vencimiento de la obligación principal y no habrá interés sobre intereses. Cuál será el total a pagar al año. **R/. $ 8.750.200**.

35) Una persona tomó prestados $ X al 25% anual y luego los invirtió al 30% anual. Si las ganancias que obtuvo, en esta operación fueron de $ 650.000 anuales, cuánto había recibido en préstamo?. **R/. $ 13.000.000**.

36) Dos capitales, uno de $ 5.000.000 y otro de $ 2.500.000 rentan anualmente $ 1.500.000. Hallar los intereses anuales y las tasas de interés sabiendo que estas se encuentran en relación de 2/4?. **R/ $ 600.000, 12% anual y 24% anual**.

37) Carmen y Roberto tienen entre los dos $ 22.000.000; Carmen tiene su capital invertido al 20% anual simple y Roberto lo tiene al 2,5% mensual simple. Si al término de cuatro años, Roberto tiene $ 2.600.000 más que Carmen, cuál era el capital inicial de cada uno. **R/. Carmen: $ 11.450.000 y Roberto: $ 10.550.000**.

CAPITULO No 2. INTERES SIMPLE

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

1) Explicar los conceptos de interés simple, monto o valor futuro, valor presente o valor actual, tiempo.
2) Explicar y distinguir la diferencia entre descuento comercial o bancario, descuento racional o matemático.
3) Plantear y resolver ejercicios relacionados con el cálculo del valor futuro, valor presente, tiempo tasa de interés y los diferentes tipos de descuento.
4) Plantear y resolver ejercicios relacionados con las ecuaciones de valor a interés simple.

TEMARIO

2.1	Introducción
2.2	Definición del interés simple
2.3	Clases de intereses Simple
2.4	Desventajas del interés simple
2.5	Tablas de Días
2.6	Monto o valor futuro a interés simple
2.7	Valor presente o actual a interés simple
2.8	Cálculo de la tasa de interés simple
2.9	Cálculo del tiempo
2.10	Descuentos
2.10.1	Descuento comercial o bancario
2.10.2	Descuento real o justo
2.10.3	Descuento racional o matemático
2.11	Ecuaciones de valor

2.1 INTRODUCCION

Es importante anotar que en realidad, desde el punto de vista teórico existen dos tipos de interés el Simple y el compuesto. Pero dentro del contexto práctico el interés compuesto, es el que se usa en todas las actividades económicas, comerciales y financieras. El interés simple, por no capitalizar intereses resulta siempre menor al interés compuesto, puesto que la base para su cálculo permanece constante en el tiempo, a diferencia del interés compuesto. El interés simple es utilizado por el sistema financiero informal, por los prestamistas particulares y prendarios. En este capítulo, se desarrollaran los conceptos básicos del interés simple.

2.2 DEFINICION DEL INTERES SIMPLE

Es aquel que se paga al final de cada periodo y por consiguiente el capital prestado o invertido no varía y por la misma razón la cantidad recibida por interés siempre va a ser la misma, es decir, no hay capitalización de los intereses.

La falta de capitalización de los intereses implica que con el tiempo se perdería poder adquisitivo y al final de la operación financiera se obtendría una suma total no equivalente a la original, por lo tanto, el valor acumulado no será representativo del capital principal o inicial. El interés a pagar por una deuda, o el que se va a cobrar de una inversión, depende de la cantidad tomada en préstamo o invertida y del tiempo que dure el préstamo o la inversión, el interés simple varía en forma proporcional al capital (**P**) y al tiempo (**n**). El interés simple, se puede calcular con la siguiente relación:

$$I = P*i*n \qquad (2.1)$$

En concreto, de la expresión se deduce que el interés depende de tres elementos básicos: El capital inicial (**P**), la tasa de interés (**i**) y el tiempo (**n**).

En la ecuación (2.1) se deben tener en cuenta dos aspectos básicos:

a) La tasa de interés se debe usar en tanto por uno y/o en forma decimal; es decir, sin el símbolo de porcentaje.
b) La tasa de interés y el tiempo se deben expresar en las mismas unidades de tiempo. Si la unidad de tiempo de la tasa de interés no coincide con la unidad de tiempo del plazo, entonces la tasa de interés, o el plazo, tiene que ser convertido para que su unidad de tiempo coincida con la del otro. Por ejemplo, si en un problema específico el tiempo se expresa en trimestres, la tasa de interés deberá usarse en forma trimestral. Recuerde que si en la tasa de interés no se específica la unidad de tiempo, entonces se trata de una tasa de interés anual.

Ejemplo 2.1

Si se depositan en una cuenta de ahorros $ 5.000.000 y la corporación paga el 3% mensual. ¿Cuál es el pago mensual por interés?

P = $ 5.000.000
n = 1 mes

i = 3%/mes

$$I = P*i*n \; ; \qquad I = 5.000.000 * 1 * 0.03 = \$\ 150.000/\ mes$$

El depositante recibirá cada mes $ 150.000 por interés.

2.3 CLASES DE INTERES SIMPLE

El interés se llama ordinario cuando se usa para su cálculo 360 días al año, mientras que será exacto si se emplean 365 o 366 días. En realidad, se puede afirmar que existen cuatro clases de interés simple, dependiendo si para el cálculo se usen 30 días al mes, o los días que señale el calendario. Con el siguiente ejemplo, se da claridad a lo expuesto con anterioridad.

Ejemplo 2.2

Una persona recibe un préstamo por la suma de $ 200.000 para el mes de marzo, se cobra una tasa de interés de 20% anual simple. Calcular el interés (I), para cada una de las clases de interés simple.

<u>Solución</u>:

a) **Interés ordinario con tiempo exacto**. En este caso se supone un año de 360 días y se toman los días que realmente tiene el mes según el calendario. Este interés, se conoce con el nombre de interés bancario; es un interés más costoso y el que más se utiliza.

$$I = pin = 200.000 x 0.20 x \frac{31}{360} = \$3.444.44$$

b) **Interés ordinario con tiempo aproximado**. En este caso se supone un año de 360 días y 30 días al mes. Se conoce con el nombre de interés comercial, se usa con frecuencia por facilitarse los cálculos manuales por la posibilidad de hacer simplificaciones

$$I = pin = 200.000 x 0.20 x \frac{30}{360} = \$3.333,33$$

c) **Interés exacto con tiempo exacto**. En este caso se utilizan 365 o 366 días al año y mes según calendario. Este interés, se conoce comúnmente con el nombre de interés racional, exacto o real, mientras que las otras clases de interés producen un error debido a las aproximaciones; el interés racional arroja un resultado exacto, lo cual es importante, cuando se hacen cálculos sobre capitales grandes, porque las diferencias serán significativas cuando se usa otra clase de interés diferente al racional. Lo importante, es realizar cálculos de intereses que no perjudiquen al prestamista o al prestatario.

$$I = pin = 200.000 x 0.20 x \frac{31}{365} = \$3.397,26$$

d) **Interés exacto con tiempo aproximado**. Para el cálculo de éste interés se usa 365 o 366 días al año y 30 días al mes. No se le conoce nombre, existe teóricamente, no tiene utilización y es el más barato de todos.

$$I = pin = 200.000 \text{ x } 0.20 \text{ x } \frac{30}{365} = \$3.287,71$$

Ejemplo 2.3

Calcular el interés comercial y real de un préstamo por $ 150.000 al 30% por 70 días

Solución

a) Interés comercial.

$$I = pin = 150.000 \text{ x } 0.30 \text{ x } \frac{70}{360} = \$8.750$$

b) Interés real o exacto

$$I = pin = 150.000 \text{ x } 0.30 \text{ x } \frac{70}{365} = \$8.630,14$$

Se observa que el interés comercial resulta más elevado que el interés real para el mismo capital, tasa de interés y tiempo. Esta ganancia adicional hace que el año comercial sea muy utilizado en el sector financiero y en el sector comercial que vende a crédito. Hay que recordar y dejar claro, que cuando el tiempo en un préstamo esta dado en días, es indispensable convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés por día. Cuando la tasa anual se convierte a tasa diaria usando el año de 365 días o 366 si es bisiesto como divisor en la fórmula del interés simple o del monto, el interés obtenido se llama **interés real** o **interés exacto**. El año de 365 días o 366 se conoce como **año natural**.

Cuando se lleva a cabo la conversión usando como divisor 360 días, se dice que se está usando el **año comercial**. En este caso, el interés obtenido se llama **interés comercial** o **interés ordinario**.

Si un problema no menciona de forma explícita cuál tipo de interés debe calcularse, entonces se supone que se trata del cálculo de un **interés comercial**.

2.4 DESVENTAJAS DEL INTERES SIMPLE

Se puede señalar tres desventajas básicas del interés simple:

a) Su aplicación en el mundo de las finanzas es limitado
b) No tiene o no considera el valor del dinero en el tiempo, por consiguiente el valor final no es representativo del valor inicial.
c) No capitaliza los intereses no pagados en los períodos anteriores y, por consiguiente, pierden poder adquisitivo.

2.5 TABLA DE DIAS

Para realizar los cálculos de manera correcta, es necesario conocer el manejo de la tabla de días, para determinar en forma exacta los días que transcurren entre una fecha y otra, lo cual, es importante para el interés bancario y el racional La construcción de la tabla consiste en asignarle a cada día del año un número en forma consecutiva; esta asignación va desde el número 1, que corresponde al primero de enero, hasta el número 365, que corresponde al 31 de diciembre. Cuando el año es bisiesto, hay que adicionar un día, a partir del primero de marzo, por lo cual, el 31 de diciembre sería el día 366. Para facilitar la identificación de las fechas, se seguirá el siguiente formato: los primeros dos dígitos indicaran los días, y variaran entre 01 y 31, los dos dígitos siguientes indicaran el mes, y variaran entre 01 y 12, y los últimos cuatros dígitos indicaran el año. Por ejemplo, el 14 de abril de 2004, se podrá expresar de la siguiente manera: 14-04-2004. La tabla de días se muestra a continuación:

DIA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	DIA
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

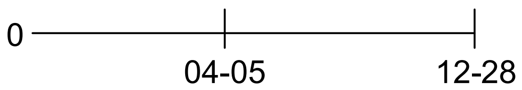
Nota: Cuando el año es bisiesto, a partir del primero de marzo se adiciona un día.

Ejemplo 2.4

Calcule los días transcurridos entre el 5 de abril de 2003 y 28 de diciembre del mismo año.

Solución

Según la tabla, los días transcurridos entre el inicio del año y el 5 de abril son 95, mientras; los días entre el inicio del año y el 28 de diciembre son 362, por lo tanto, por diferencia 362 – 95 = 267 días.



El cálculo realizado anteriormente, se refiere al año real o exacto, si desea calcular los días con base al año comercial (360 días, es decir, meses de 30 días), siga el siguiente procedimiento.

		Año	Mes	Día
	Fecha actual:	2003	12	28
(-)	Fecha inicial :	2003	04	05
		0	8	23

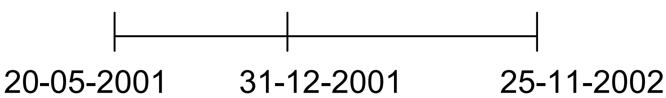
Son 8 meses y 23 días: 8x30 + 23 = 263 días

Ejemplo 2.5

Hallar los días transcurridos, entre el 20 mayo de 2001 y 25 de noviembre de 2002.

Solución

Teniendo en cuenta que la tabla está diseñada para un año, se debe calcular, por separado los días que hay en cada año y luego sumarlos. Los días transcurridos entre el inicio del año 2001 y el 20 de mayo de 2001, son 140, por lo tanto, los días que hay entre el 20 de mayo de 2001 y el 31 de diciembre del mismo son: 365-140 = 225, mientras los días transcurridos entre el inicio del año 2002 y el 25 de noviembre de 2002, según la tabla son 329. Entonces, los días transcurridos entre el 20 mayo de 2001 y 25 de noviembre de 2002, son: 225 + 329 = 554 días



Ahora si el año se toma de 360 días, se obtendrá como respuesta 545 días.

		Año	Mes	Día
	Fecha actual:	2002	11	25
(-)	Fecha inicial:	2001	05	20
		1	6	5

Son 1 año, 6 meses y 5 días: 1x360 + 6x30 + 5 = 545 días

2.6 MONTO O VALOR FUTURO A INTERES SIMPLE

A la suma del capital inicial, más el interés simple ganado se le llama monto o valor futuro simple, y se simboliza mediante la letra **F**. Por consiguiente,

$$\mathbf{F = P + I} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Al reemplazar la ecuación (2.1) en la (2.2), se tiene, $\mathbf{F = P + Pin = P(1 + in)}$ **(2.3)**

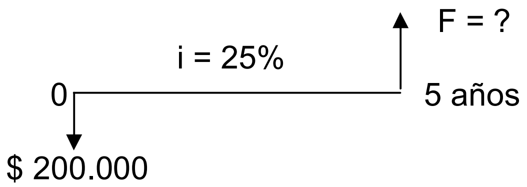
Las ecuaciones (2.2) y (2.3) indican que si un capital se presta o invierte durante un tiempo **n**, a una tasa de simple **i%** por unidad de tiempo, entonces el capital ***P*** se transforma en una cantidad ***F*** al final del tiempo **n**. Debido a esto, se dice que el dinero tiene un valor que depende del tiempo.

El uso de la ecuación (2.3), requiere que la tasa de interés (**i**) y el número de períodos (**n**) se expresen en la misma unidad de tiempo, es decir; que al plantearse el problema

Ejemplo 2.6

Hallar el monto de una inversión de $ 200.000, en 5 años, al 25% EA.

<u>Solución</u>



$$F = P(1 + in) = 200.000(1 + 0,25x5) = \$450.000$$

2.7 VALOR PRESENTE O ACTUAL A INTERES SIMPLE

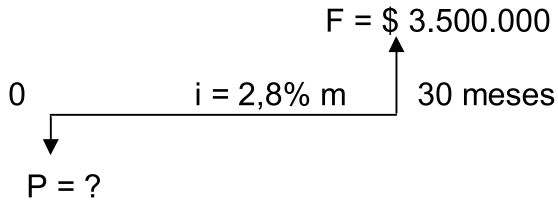
Se sabe que: $F = P(1 + in)$, y multiplicando a ambos lados por el inverso de (1 + in), se tiene que

$$\mathbf{P = \frac{F}{(1 + in)}} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Ejemplo 2.7

Dentro de dos años y medio se desean acumular la suma de $ 3.500.000 a una tasa del 2.8% mensual, ¿Cuál es el valor inicial de la inversión?

Solución:



$$P = \frac{F}{(1+in)} = \frac{3.500.000}{(1+0{,}028\,x\,30)} = \$\ 1.902.173{,}91$$

De acuerdo al cálculo anterior, el valor presente, simbolizado por **P**, de un monto o valor futuro **F** que vence en una fecha futura, es la cantidad de dinero que, invertida hoy a una tasa de interés dada producirá el monto **F**. Encontrar el valor presente equivale a responder la pregunta: ¿Qué capital, invertido hoy a una tasa dada, por un período determinado, producirá un monto dado?. En caso de una obligación el contexto, es exactamente el mismo, la pregunta sería: ¿Qué capital, prestado hoy a una tasa dada, por un período determinado, producirá un monto futuro a pagar?

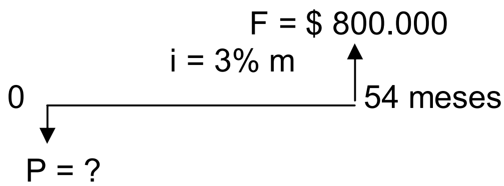
Ejemplo 2.8

Hallar el valor presente de $ 800.000 en 4 años y medio, al 3% mensual.

Solución:

a) De forma mensual

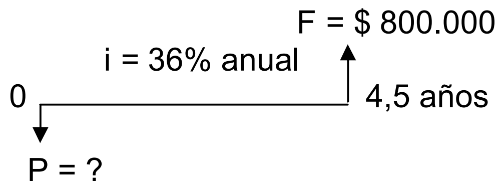
n = 4.5x12 = 54 meses



$$P = \frac{F}{(1+in)} = \frac{800.000}{(1+0{,}03x54)} = 305.343.51$$

b) De forma anual

i = 0,03 x 12 = 36% anual



$$P=\frac{F}{(1+in)}=\frac{800.000}{(1+0,36x4,5)}=305.343.51$$

2.8 CALCULO DE LA TASA DE INTERES SIMPLE

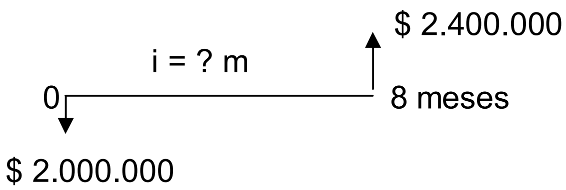
Partiendo que: $F=P(1+in)$, multiplicando a ambos lados por el inverso de **P** y restando uno a ambos lado de la ecuación se obtiene: $\frac{F}{P}-1=in$, si luego se multiplica los dos términos de la ecuación por el inverso de **n**, resulta:

$$\mathbf{i}=\frac{\left(\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{P}}-\mathbf{1}\right)}{\mathbf{n}} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Ejemplo 2.9

Una persona le prestó a un amigo la suma de $ 2.000.000 y paga después de 8 meses la suma de $ 2.400.000 ¿Qué tasa de interés mensual simple le cobraron?.

Solución



$$i=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{n}=\frac{\left(\frac{2.400.000}{2.000.000}-1\right)}{8}=0.025\,m=2,5\%\,m$$

2.9 CALCULO DEL TIEMPO (n)

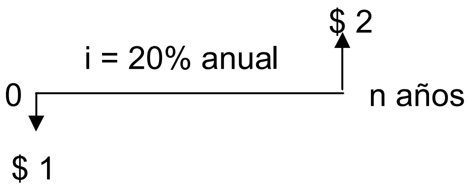
Partiendo que: $F=P(1+in)$, multiplicando a ambos lados por el inverso de **P** y restando uno a ambos lado de la ecuación se obtiene: $\frac{F}{P}-1=in$, si luego se multiplica los dos términos de la ecuación por el inverso de **i**, resulta:

$$n = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{i} \quad \textbf{(2.6)}$$

Ejemplo 2.10

¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido al 20% de interés anual simple?.

Solución:

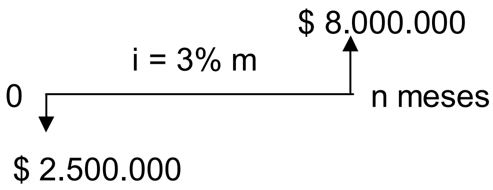


$$n = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{i} = \frac{\left(\frac{2}{1} - 1\right)}{0{,}20} = 5 \text{ años}$$

Ejemplo 2.11

¿ En cuánto tiempo se acumularían $ 8.000.000 si se depositan hoy $ 2.500.000 en un fondo que paga al 3% simple mensual?.

Solución:



$$n = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{i} = \frac{\left(\frac{8.000.000}{2.500.000} - 1\right)}{0{,}03} = 73{,}3 \text{ meses}$$

2.10 DESCUENTO

El descuento es una operación de crédito que se realiza normalmente en el sector bancario, y consiste en que los bancos reciben documentos negociables como cheques, letras de cambio, pagares, de cuyo valor nominal descuentan una cantidad equivalente a los intereses que devengaría el documento entre la fecha en que se recibe y la fecha del vencimiento. Con este procedimiento se anticipa el valor actual del documento. Existen dos tipos de descuento en el interés simple:

a) El descuento comercial o bancario
b) El descuento real o justo
c) El descuento racional o matemático

En el interés compuesto, existe el descuento compuesto

2.10.1 Descuento comercial o bancario

Es el que se aplica sobre el valor nominal del documento (F). Puede decirse que es el interés simple del valor nominal. En el descuento comercial o bancario, el interés se cobra por adelantado, en lugar de cobrarlo hasta la fecha de vencimiento. Los intereses cobrados anticipadamente se llaman descuento. Por definición se tiene:

$$\mathbf{D = V_n in = V_n dn} \qquad \mathbf{(2.7)}$$

D = Descuento comercial o intereses cobrados anticipadamente (Es la cantidad desconocida)

$\mathbf{V_n}$ = Es el valor que se encuentra escrito en el documento (valor nominal) y que sólo es exigible al vencimiento; si el documento gana intereses, el valor nominal será el monto o valor futuro.

d = Es el tipo de interés que se aplica para descontar un documento (tasa de descuento).

n = Es el número de períodos que aún le falta al documento para vencer, es decir, el tiempo que transcurre, entre la fecha de negociación (venta) y la fecha de vencimiento.

El valor presente o valor de la transacción, siempre será igual a la diferencia del valor nominal ($\mathbf{V_n}$) y el descuento (D), y es la cantidad de dinero que recibe realmente la persona que negocia el documento.

$$\mathbf{V_T = V_n - D = V_n - V_n dn = V_n(1 - dn)} \qquad \mathbf{(2.8)}$$

$\mathbf{V_T}$, se conoce como valor efectivo del documento

Ejemplo 2.12

El descuento comercial simple al 7% anual durante 6 meses alcanza la suma de $ 350.000. Calcular el valor efectivo y nominal de la operación.

Solución:

Tenga en cuenta que seis (6) meses, equivalen a 0,5 años.

El valor nominal se determina así: $V_n = \frac{D}{dn} = \frac{350.000}{(0,07 * 0,5)} = \$10.000.000$

El valor efectivo se calcula de la siguiente manera:

$$V_T = V_n(1 - dn) = 10.000.000\ (1 - 0,07 * 0,5) = \$\ 9.650.000$$

Ejemplo 2.13

Calcular el valor presente o de la transacción de un documento de \$ 80.000 que es fechado el 25 de noviembre de 2002, con un plazo de 90 días e intereses del 20% y que va ser descontado el 6 de enero del siguiente año, al 30%.

Solución:

Mediante la fórmula $F = P(1 + in)$, se calculará el valor final del documento

$$F = V_n = 80.000(1 + 0.20x\frac{90}{360}) = \$84.000$$

Enseguida se procede al cálculo del descuento:

$$D = V_n dn = 84.000x0.30x\frac{48}{360} = \$3.360$$

Finalmente el valor de la transacción o presente será:

$$V_T = V_n - D = 84.000 - 3.360 = \$\ 80.640$$

Ejemplo 2.14

Una letra de \$ 500.000 es cancelada 4 meses antes de vencerse. Si el descuento es del 2,5% mensual, en forma comercial, con cuánto se paga?

Solución:

$$V_T = V_n(1 - dn) = 500.000(1 - 0,025x4) = \$\ 450.000$$

Ejemplo 2.15

Una letra de \$ 250.000 se descontó al 3% mensual, en forma comercial, arrojando un valor efectivo de \$ 190.000, cuánto le faltaba para vencerse?.

Solución:

$$V_T = V_n(1-dn) \;; \qquad 190.000 = 250.000\,(1-0{,}03n)$$

$$\frac{190.000}{250.000} = 1-0{,}03n\,; \qquad 0{,}76 = 1-0{,}03n\,; \quad n = 8\,\text{meses}$$

Ejemplo 2.16

Una letra de \$ 250.000 ganaba una tasa de interés **i** mensual simple por un año; seis meses antes de vencerse fue descontada en una institución financiera a una **d** mensual, en forma comercial, y se recibió por ella \$ 247.210, habiendo cobrado el banco \$ 47.790 por el descuento. Se pide: ¿Qué tasa de interés ganaba la letra y a qué tasa fue descontada por el banco?.

Solución:

a) Determinación del valor de vencimiento o nominal del documento

$V_T = V_n - D$; Por consiguiente:

$$V_n = V_T + D = 247.210 + 47.790 = \$295.000$$

Entonces \$ 295.000 es el monto de \$ 250.000 a una tasa **i** mensual por 12 meses

b) Cálculo de la tasa de interés que ganaba la letra

$$F = P(1+in) \;; \quad 295.000 = 250.000\,(1+12i)\,; \quad \frac{295.000}{250.000} = 1+12i$$

Donde: $i = 1{,}5\%$ mensual simple

c) La tasa de descuento, aplicada por la institución financiera se calcula así:

$$D = V_n dn\,; \quad \text{Entonces:} \quad 47.790 = 295.000\,(6d)\,; \quad \text{donde:} \quad d = \frac{47.790}{295000\text{x}6}$$

Por consiguiente: $d = 2{,}7\%$ mensual simple

Es importante anotar que este tipo de descuento se puede aplicar en operaciones comerciales a corto plazo, porque si éste es muy extenso el descuento puede alcanzar todo el valor del documento y entones no tendría sentido la operación de descuento

2.10.2 Descuento real o justo

A diferencia del descuento comercial, el descuento real o justo se calcula sobre el valor real que se anticipa, y no sobre el valor nominal. Se simboliza con **Dr**.

El descuento real, se puede determinar con la siguiente expresión: $D_r = V_n - P$ **(2.9)** ; donde: $P = \frac{F}{(1+in)}$

Ejemplo 2.17

El valor nominal de un documento es \$ 2.185.000, si se descuenta 2 meses antes de su vencimiento a una tasa del 20%, encontrar el descuento comercial y el real.

Solución:

El descuento comercial seria:

$$D = V_n dn = 2.185.000 * 0,20 * (2/12) = \$ 72.833,33$$

El valor comercial del documento es:

$$V_T = V_n - D = 2.185.000 - 72.833,33 = \$2.112.177,67$$

Para determinar el descuento real, se calcula el valor que se anticipa, es decir, se encuentra el valor presente a partir del valor nominal del documento, por lo cual, se utiliza la siguiente fórmula:

$$P = \frac{F}{(1+in)} = \frac{2.185.000}{(1+0,2x\frac{2}{12})} = \$\ 2.114.516,13$$

El descuento real seria: $D_r = V_n - P = 2.185.000 - 2.114.516,13 = \$70.483,87$, es inferior al descuento comercial.

2.10. 3 Descuento Racional o matemático

El descuento racional, es aquel que se determina sobre el valor efectivo de un documento.

$$\mathbf{D_r = Descuento\ racional = V_T dn} \quad \textbf{(2.10)}$$

Se tiene que: $V_T = V_n - D_r = V_n - V_T dn$; por consiguiente : $V_n = V_T + V_T dn = V_T(1+dn)$; de donde

$$\mathbf{V_T = \frac{V_n}{(1+dn)}}$$ **(2.11) ;** al reemplazar (2.11) en (2.10) se tendrá:

$$\mathbf{D_r} = \left[\frac{\mathbf{V_n}}{\mathbf{(1+dn)}}\right]\mathbf{dn} \quad \mathbf{(2.12)}$$

Como $D = V_n dn$; se obtiene : $\mathbf{D_r} = \left[\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{(1+dn)}}\right]$ **(2.13)**

Ejemplo 2.18

El descuento racional al 7% anual durante 6 meses alcanza la suma de $ 350.000. Calcular el valor efectivo y nominal de la operación.

Solución:

Se debe tener en cuenta que seis (6) meses, equivalen a 0,5 años.

$D_r = \text{Descuento racional} = V_T dn$, por consiguiente:

$$V_T = \frac{D_r}{dn} = \frac{350.000}{(0,07 * 0,5)} = 10.000.000$$

El valor efectivo de la operación es $ 10.000.000

El valor nominal se determina así:

$$V_n = V_T(1+dn) = 10.000.000(1+0,07 * 0,5) = \$10.350.000$$

Ejemplo 2.19

Si el descuento racional alcanza la suma de $ 350.000 y la diferencia con el descuento comercial es de 12.500, calcular la duración de la operación, si el descuento es del 7%.

Solución:

Se tiene que: $D_r = \left[\frac{D}{(1+dn)}\right]$: por consiguiente : $D_r(1+dn) = D$; de donde :

$$n = \frac{D - D_r}{D_r d} = \frac{362.250 - 350.000}{350.000 * 0,07} = 0,5 \text{ años}$$

Ejemplo 2.20

Encontrar el descuento comercial que corresponde a un descuento racional 350.000, con una duración de seis (6) meses y un descuento de 7%.

Solución:

Hay que tener en cuenta que seis (6) meses, equivalen a 0,5 años, por lo tanto, se tiene:

$$D = D_r(1+dn) = 350.000(1+0,07*0,5) = \$362.250$$

2.11 ECUACIONES DE VALOR

En el contexto financiero, frecuentemente una obligación financiera que se pactó inicialmente cancelar de una manera específica o determinada, se procede mediante acuerdo entre las partes (prestamistas y prestatarios), a cambiar la forma de cancelación mediante el pago de una o varias cuotas, operación que recibe el nombre de refinanciación de deudas, pero teniendo en cuenta que en una economía en donde el poder adquisitivo de la moneda cambia a través del tiempo, es necesario para dar solución a éste problema, utilizar las ecuaciones de valor.

Las ecuaciones de valor son también conocidas con el nombre de teorema fundamental de las matemáticas financieras, por lo cual, permiten resolver de manera fácil cualquier problema de las matemáticas financieras.

Las ecuaciones de valor, no son más que igualdades de valor referenciadas a una fecha determinada o específica, denominada fecha focal y se simboliza por **ff** y en el diagrama económico se representa a través de una línea de trazos. En la fecha focal se igualan los flujos de caja para hacer la comparación y en ella, se comparan los ingresos con los egresos, las deudas con los pagos, los activos con los pasivos y el patrimonio, los flujos de caja que están arriba del diagrama con los que están abajo. Por lo tanto, se podría expresar de la siguiente manera:

(1) Σ Ingresos = Σ Egresos [en la ff]
(2) Σ Deudas = Σ Pagos [en la ff]
(3) Σ Activos = Σ (Pasivo + capital) [en la ff]
(4) Σ Arriba = Σ Abajo [en la ff]

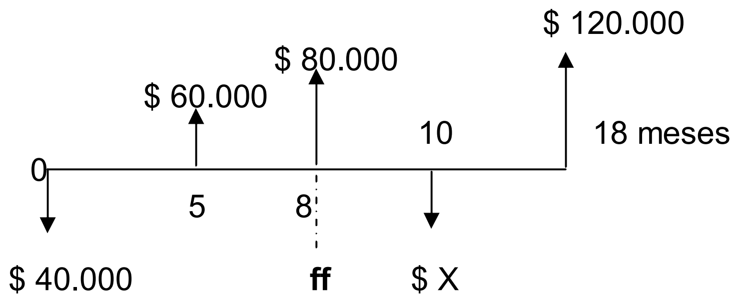
Hay que anotar que la convención que se adopta para llevar al diagrama económico los ingresos, deudas y activos son flechas hacia arriba (↑), mientras; mientras que los egresos, pagos, pasivos y capital, se representan con flechas hacia abajo (↓). La anterior convención, es importante porque le permite al lector leer y comprender más fácilmente el diagrama económico.
Para resolver los problemas lo primero que debe hacerse es determinar la fecha focal en la cual se van a comparar los flujos de caja, y además, hay que tener en cuenta que en el caso del interés compuesto, dos flujos de caja equivalente en una fecha lo serán en cualquier otra y, por lo tanto, se puede seleccionar cualquier fecha para llevar a cabo la comparación y encontrar lo que se está preguntando.

El traslado de los flujos de caja (ingresos o desembolsos) a la fecha focal, se hará usando las fórmulas del valor presente o valor futuro a la tasa de interés especificada de común acuerdo entre las partes. Los flujos de caja que se encuentren en la fecha focal, no sufrirán ningún cambio.

Ejemplo 2.21

Una persona debe cancelar tres pagarés así: $ 60.000 dentro de 5 meses, $ 80.000 dentro de 8 meses y $ 120.000 dentro de 18 meses. Si pacta pagar hoy $ 40.000 y el resto en el mes 10. Determinar el valor del pago, para que las deudas queden saldadas. Tenga en cuenta una tasa de interés del 25% y la fecha focal en el mes 8.

<u>Solución</u>



El periodo 0 representa el día de hoy, los restantes números en el diagrama económico representan las fechas de vencimientos de las deudas y de los pagos. Se observa que las deudas se han colocado a un lado del diagrama económico y los pagos en el otro lado. Para plantear la ecuación de valor, se trasladan todas las deudas y los pagos a la fecha focal utilizando la tasa del 25%. Se usa el siguiente principio:

$$\sum \text{Deudas} = \sum \text{Pagos}\,(ff \rightarrow 8)$$

$$60.000\,(1+3\times\frac{0.25}{12})+80.000+\frac{120.000}{(1+10\times\frac{0.25}{12})}=40.000\,(1+8\times\frac{0.25}{12})+\frac{X}{(1+2\times\frac{0.25}{12})}$$

$$63.750+80.000+99.310{,}3448=46.666{,}6667+0{,}96X$$

$$196.393{,}6781=0{,}96X\ ;\quad \text{donde}$$
$$X=204.576{,}748$$

En el mes 10 debe pagarse exactamente $ 204.576,748, para garantizar el pago de la obligación financiera, si se paga antes o después la cantidad varía.

Ejemplo 2.22

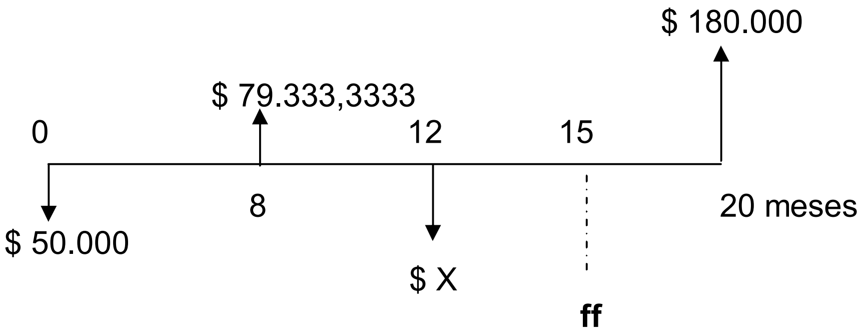
Se tienen dos deudas determinadas así. $ 70.000 con vencimiento en 8 meses e intereses del 20%, y $ 120.000 con vencimiento en 20 meses e intereses del 30%. Si se van a cancelar con un pago de $ 50.000 hoy y $X en el mes 12. Determinar el valor del pago, si la tasa de interés para éste caso es del 28%. Colocar la fecha focal en el mes 15.

Solución:

Como cada unas de las deudas están afectadas con una tasa de interés, hay que encontrar el monto adeudado en cada uno de los pagarés y, éste es el que se coloca en el diagrama económico. Los traslados de los montos a la fecha focal, se harán a la tasa de interés especificada para el proceso de refinanciación.

$$F = P(1+i\times n) = 70.000(1+8\times\frac{0,20}{12}) = \$79.333,3333$$

$$F = P(1+i\times n) = 120.000(1+20\times\frac{0,30}{12}) = \$180.000$$



$$\sum Deudas = \sum Pagos$$

$$79.333,3333(1+7\times\frac{0,28}{12}) + \frac{180.000}{(1+5\times\frac{0.28}{12})} = 50.000(1+15\times\frac{0.28}{12}) + X(1+3\times\frac{0,28}{12})$$

$$92.291,1111 + 161.194,0299 = 67.500 + 1,07X$$

$$185.985,141 = 1,07X \;;\quad \text{donde } X = \$173.817,89$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Qué interés generan $ 850.000 en 6 meses al 2,8% mensual? **R/. $ 142.800**
2) Un CDT de $ 1.500.000 paga el 15% semestral; cuánto produce de intereses al cabo de un año? **R/. $ 450.000**
3) En cuánto tiempo una inversión de $ 2.000.000 produce intereses de $ 700.000, si el capital se invirtió al 2,5% mensual. **R/. 14 meses**
4) Un inversionista adquirió 1.000 acciones a $ 3.200 cada una, a los 8 meses recibió $ 896.000 de dividendos. ¿Cuál es la rentabilidad mensual y anual de la inversión? **R/. 3,5% mensual, 42% anual**
5) En un préstamo de $ 8.000.000 a 3 años se pacta un interés del 7,5% trimestral para el primer año y del 12% semestral para los dos años siguientes. ¿Cuánto se espera de intereses en todo el plazo?. **R/. $ 7.392.000**
6) Hallar el interés racional y el comercial de $ 450.000 en el mes de Junio, al 20%. **R/. $ 7.397,26 y $ 7.500**
7) Calcule el interés comercial y exacto de un préstamo de $ 5.000.000 al 28%, del 15 de abril del 2007 al 13 de agosto del mismo año. **R/. $ 466.666,67 y $ 460.273,97**
8) Obtenga el interés simple ordinario y real de 25.000 dólares, del 2 de enero de 2008 (año bisiesto) al 1 de agosto del mismo año. La tasa de interés es de 6,5%. **R/. $ 956,94 y $ 941,26**
9) ¿Cuánto dinero debo depositar hoy 25 de abril en una cuenta que paga el 23% simple real para que el 28 de julio pueda retirar $ 60.000. **R/. 56.644,77**
10) Una letra por valor de $ 600.000 va a ser descontada por un banco 35 días antes del vencimiento al 38%. Calcular la tasa bancaria que realmente está cobrando el banco? **R/. $ 577.833,33 y 39,46%.**
11) Una empresa desea depositar $ 4.350.000 a un plazo de 200 días, y deberá decidir si deposita el dinero en el Banco X, que paga el 20% de interés comercial, o en el Banco Y, que paga el 21% de interés real. ¿En qué Banco le conviene depositar?. **R/. Conviene depositar en el Banco Y**
12) Calcule el monto o valor futuro de un préstamo de $2.000.000 al 30% de interés simple y 10 meses de plazo. **R/. $ 2.500.000**
13) ¿Cuánto pagará un comerciante por un crédito que le concedió una fabrica por la suma de $ 918.300 a 25 días, si le aplican una tasa de interés de 3% mensual? **R/. $ 941.257,5**
14) Encuentre el valor presente de $ 3.800.000 que vence dentro de 7 meses, si la tasa de interés es del 25%. **R/. $ 3.316.363,64**
15) Una persona compró un automóvil por el cual pagó $ 15.700.000 el primero de enero, y lo vendió el primero de julio del año siguiente en $ 21.500.000. ¿Fue conveniente como inversión la operación realizada si la tasa de interés del mercado era de 30%?. **R/. No fue conveniente la inversión**
16) ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual equivalente a una tasa del 48% anual?. **R/. 4% mensual**
17) ¿Cuál es el tipo de interés mensual simple equivalente a una tasa del 18% semestral? **R/. 3% mensual**
18) ¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido al 25% de interés anual simple. **R/. 4 años**
19) ¿En cuánto tiempo se tendrían $ 540.000 si se depositaran hoy $ 300.000 en un fondo que paga el 3,2% simple mensual?. **R/. 25 meses**

20) ¿Cuál es el precio de contado de un teléfono celular que se paga dando de cuota inicial el 25% del precio de contado y se firma un pagaré a 3 meses por $ 120.000 que incluye una tasa del 24% anual?. **R/. $ 150.943,4**

21) Cuál es el valor nominal de un documento que va a ser descontado por una institución financiera al 32% nominal anual anticipado entre el 7 de noviembre de 2001 y 15 de enero de 2002, su valor de transacción es 825.000?. **R/ $ 878.906,25**

22) ¿Cuál es el descuento comercial de un documento que vence dentro de 8 meses, y que y que tiene un valor nominal de $ 4.850.000, si cuatro meses antes de su vencimiento se descuenta al 20%. **R/. $ 323.333,33**

23) Una empresa descuenta un documento por el cual recibe $ 965.500. Si el tipo de descuento es de 22% y el valor nominal del documento era de $ 1.200.000, ¿Cuánto tiempo faltaba para el vencimiento de su obligación?. **R/. 2 meses y 20 días.**

24) Una empresa descontó en un banco un pagaré, recibió la suma de $ 180.000. Si el tipo de descuento es del 28% y el vencimiento del pagaré era 4 meses después de su descuento. ¿Cuál era el valor nominal del documento en la fecha de su vencimiento? **R/. $ 198.529,41**

25) Una empresa recibe el 20 de noviembre de 2001 un pagaré por $ 2.800.000 a un plazo de 120 días al 20% nominal anual vencido de interés comercial simple. El 10 de febrero lo negocia con una institución financiera que lo adquiere a una tasa de descuento del 25% nominal anual anticipado. Cuánto recibirá la empresa por el pagaré y cuanto ganará la institución financiera por la operación?. **R/. $ 2.907.851,86 y $ 78.814,81**

26) Una persona adeuda $ 5.000.000 que debe liquidar dentro de 8 meses, y que ya incluye los intereses, $ 4.500.000 contratado hoy al 20% para pagar dentro de seis meses. Si decide saldar sus deudas con 2 pagos iguales, uno dentro de 10 meses y el otro dentro de un año, y la operación se calcula al 28%. ¿Cuál será el valor de los dos pagos iguales si se usa como fecha focal:
    a) El mes 10. **R/. $ 5.560.082,17**
    b) El mes 12. **R/. $ 5.428.087,49**

27) Una deuda de $ 250.000 con vencimiento en 12 meses, sin intereses, y otra de $ 150.000 y con vencimiento en 20 meses e intereses del 24%, van a cancelarse mediante dos pagos iguales de $ X c/u con vencimiento en 10 y 15 meses respectivamente. Con una tasa de interés del 20% hallar el valor de los pagos. Coloque la fecha focal en el mes 15. **R/. $ 219.049,66**

28) Una deuda de $ 350.000, con vencimiento en 15 meses y otra de $X con vencimiento en 24 meses e intereses del 28%, van a cancelarse mediante dos pagos iguales de $ 250.000 c/u con vencimiento en los meses 12 y 18 respectivamente. Determinar el valor de $X, si la tasa de interés es del 30% y colocando la fecha focal en el mes 20. **R/. $ 111.937,67**

29) Una persona contrajo una deuda hace 8 meses por $ 2.000.000 con 30% de interés simple, y que vence dentro de 4 meses. Además, debe pagar otra deuda de $ 1.500.000 contraída hace 2 meses, con 35% de interés simple y que vence dentro de dos meses. Si la tasa de interés es del 32%. ¿Qué pago deberá hacerse hoy para saldar sus deudas, si se compromete a pagar $ 1.000.000 dentro de seis meses?. Coloque la fecha focal en el día de hoy. **R/. $ 3.077.518,49**

30) Calcule el interés simple comercial y real de $ 5.800.000 al 28% del 7 de Julio de 2006 a 1 de Septiembre de 2006. **R/. $ 252.622,22 y $ 249.161,64**.

31) El señor García firmó un pagaré el 4 de mayo de 1997 con vencimiento el 4 de mayo del mismo año. Si el capital prestado fue de $ 63.400.000, calcule el valor de vencimiento si la tasa de interés fue del 9.3% trimestral. **R/. $ 71.261.600**.
32) Utilizando un año natural, obtenga el valor de vencimiento de un pagaré que tiene las siguientes características: fecha firma del pagaré: noviembre 3 de 1997, fecha de vencimiento: marzo 18 de 1998, valor presente $ 66.454.000, tasa anual simple 32%. **R/ $ 74.319.240,55**.
33) Si el pagaré del problema anterior se liquido 25 días después de la fecha de vencimiento, calcule el interés moratorio así como la cantidad total por pagar, si la tasa de intereses moratorios es de 53,7%. **R/ $ 2.444.232,74 y $ 76.763.473,29**.
34) Un pagaré por $ 1.534.000 se liquidó después de 47 días por la suma de $ 1.603.980. ¿Cuál es la tasa anual de interés?. Use el año natural. **R/. 35,4278%**.
35) Hallar la verdadera tasa bancaria que cobra un banco cuando descuenta un documento con valor de maduración de $ 400.000 si es descontado 25 días antes del vencimiento al 41% nominal anual anticipado. R/. 42,2% nominal anual vencido
36) El señor Ruiz firmó un pagaré el 14 de febrero de 2007 por un capital de $ 17.800.000 a 45% de interés simple. ¿En qué fecha los intereses serán $ 890.000?. **R/. $ 26 de marzo de 2007**.
37) En una deuda de $ 16.000.000 se cobran intereses moratorios de $ 453.334. Si la tasa de interés de mora es de 5%, ¿Cuántos días se retrasó el pago de la deuda?. **R/. 17 días**.
38) Una persona firmó el 6 de octubre de 2006 un pagaré con valor de vencimiento por $ 8.375.000. La tasa de interés es del 32% y la fecha de vencimiento es 14 de noviembre de 2006. Si el pagaré se descuenta (descuento racional) el 31 de octubre de 2006, obtenga la cantidad a pagar. **R/. $ 8.272.058,82**.
39) Resuelva el problema anterior, si la tasa a la cual de descuenta el documento es del 28%. **R/. $ 8.284.787,87**.
40) Obtenga el interés simple ordinario y exacto de $ 1.400.000 del 2 de enero de 2008 (año bisiesto) al 1 de mayo del mismo año. La tasa de interés es del 20.5 % anual. **R/. $ 95.666,67 y 94.098,36**.
41) Karla desea vender una pulsera de oro y recibe, el 18 de abril de 2007, las siguientes ofertas: a) $ 1.789.000 de contado, b) $ 500.000 de cuota inicial y se firma un pagaré de $ 1.480.000 con vencimiento el 16 de agosto de 2007 y c) $ 300.000 de cuota inicial y se firman dos pagarés: uno por $ 630.000 a 30 días de plazo y otro por $ 980.000 con fecha de vencimiento el 17 de julio de 2007. ¿Cuál oferta le conviene más si el rendimiento normal del dinero es de 2,5% mensual?. **R/. La opción B es la mejor**.
42) La señora González debe al señor López $ 4.250.000 que deberá pagar dentro de 3 meses y $ 3.680.000 a pagar dentro de 5 meses. Si la señora González desea liquidar su deuda en este momento, ¿Qué cantidad deberá pagar si la tasa de interés es de 2,3% mensual?. Use el periodo cero como fecha focal. **R/. $ 7.276.126,63**.
43) El señor Ruiz solicitó un préstamo por $ 2.500.000 a 8 meses y una tasa del interés del 36%. Si realiza un pago de $ 900.000 a los 4 meses, ¿Cuánto deberá pagar al final de los 8 meses?. Use como fecha focal dentro de 8 meses. **R/. $ 2.092.000**.
44) El señor Ruiz firmó dos pagarés: Uno con valor de vencimiento por $ 2.750.000 a pagar en 3 meses y otro con valor de vencimiento por $ 4.100.000 a pagar en 6 meses. En un nuevo arreglo con su acreedor convino en pagar $ 2.050.000 el día de hoy y el resto dentro 9 meses. ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final de mes 9,

si la tasa de interés es del 3,5% mensual, y se toma como fecha focal el mes 9?. **R/. $ 5.032.659,56**.

45) Una persona firmó un pagaré por $ 3.870.000 a 90 días de plazo y una tasa de interés del 30% anual. Desea reestructurar su deuda firmando dos pagarés de igual cuantía con vencimiento a 90 y a150 días. ¿Cuál será el valor de los nuevos documentos si la tasa de interés para la reestructuración es de 28.5% y se toma como fecha focal la fecha dentro de 150 días?. **R/. $ 2.128.381,87**.

46) Una persona adeuda $ 820.000 que debe cancelar dentro de 5 meses a 20% de interés simple, y $ 1.670.000 con vencimiento a 12 meses e intereses al 24%. ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final de 8 meses para saldar la totalidad de la deuda suponiendo una tasa de interés del 18%. Tomar la fecha focal en el mes 8. **R/. $ 2.881.893,24**.

47) El dueño de una empresa industrial como equipos y herramientas por la suma de $ 20.000.000, dio una cuota inicial de $ 5.000.000 y el resto por pagar a un año, a 38% de interés simple. Cuatro meses más tarde dio un abono de $ 4.000.000 y seis más tarde dio otro abono de $ 6.000.000. Encuentre la cantidad a pagar en la fecha de vencimiento, use esta fecha como focal. **R/. $ 9.306.666,67**.

48) En el día de hoy se cumple 3 meses de que una persona consiguió un préstamo por $ 30.000.000 con tasa de interés del 25% y vencimiento a 7 meses. Seis meses antes de aquella fecha, había firmado un pagaré con valor de vencimiento por $ 16.500.000 a un plazo de 9 meses. Hoy da un abono de $ 12.000.000 y acuerda cancelar su deuda con otro pago dentro de 9 meses. ¿De cuánto será este pago si la tasa de interés se convino en 28%?. Use la fecha de hoy como fecha focal. **R/. $ 44.317.663,55**.

49) En determinada fecha, una persona firmó un pagaré por un préstamo de $ 7.200.000 a 90 días de plazo e intereses a la tasa del 3,2% mensual. 30 días después firmó otro pagaré con valor de vencimiento de $ 6.600.000 a 90 días de plazo. 60 días después de haber firmado el primer documento, conviene con su acreedor pagar $ 8.000.000 en ese momento y reemplazar los dos pagarés por uno solo a 90 días, contados a partir de ese momento, a la tasa del 3.5% mensual. Determine el pago único convenido, tomando como fecha focal el momento en que se firmó el primer pagaré?. **R/. $ 6.408.679,87**.

50) Milton debe pagar $ 9.000.000 dentro de 5 meses y $ 17.000.000 dentro de 10 meses. Llega a un acuerdo con su acreedor para pagar de la siguiente forma: Cierta cantidad X dentro de 3 meses y el 300% de X dentro de ocho meses. Si la tasa de interés es de 32%, encuentre el valor de los pagos usando como fecha focal el mes 8. **R/. $ 6.256.267,86 en el mes 3 y $ 18.768.803,59 en el mes 8**.

CAPITULO No 3. INTERES COMPUESTO.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del capítulo, el lector será capaz de:

1) Explicar y definir el interés compuesto y su subdivisión
2) Comparar y diferenciar el interés simple del interés compuesto
3) Plantear y resolver ejercicios referentes al cálculo del valor futuro, valor presente, tasa de interés compuesto y el tiempo
4) Comprender el concepto de interpolación lineal
5) Definir y resolver ejercicios sobre el descuento compuesto

TEMARIO

3.1 Introducción
3.2 Definición del interés compuesto
3.3 Subdivisión del interés compuesto
3.4 Comparación entre el interés simple y compuesto
3.5 Periodo
3.6 Valor futuro equivalente a un presente dado
3.7 Cálculo del valor presente equivalente de un valor futuro
3.8 Cálculo del número de períodos
3.9 Calculo de la tasa de interés (i)
3.10 Interpolación lineal
3.11 Descuento compuesto

3.1 INTRODUCCION

El interés compuesto, es un sistema que capitaliza los intereses, por lo tanto, hace que el valor que se paga por concepto de intereses se incremente mes a mes, puesto que la base para el cálculo del interés se incrementa cada vez que se liquidan los respectivos intereses. El interés compuesto es aplicado en el sistema financiero; se utiliza en todos los créditos que hacen los bancos sin importar su modalidad. La razón de la existencia de este sistema, se debe al supuesto de la reinversión de los intereses por parte del prestamista.

3.2 DEFINICION DE INTERES COMPUESTO

Es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a calcular intereses, es decir, hay capitalización de los intereses. En otras palabras se podría definir como la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada periodo por la suma de los intereses vencidos. La suma total obtenida al final se conoce con el nombre de ***monto compuesto o valor futuro***. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina **interés compuesto** y para su cálculo se puede usar sin ningún problema la igualdad **(2.1)** del capítulo anterior.

El interés compuesto es más flexible y real, ya que valora periodo a periodo el dinero realmente comprometido en la operación financiera y por tal motivo es el tipo de interés más utilizado en las actividades económicas.

Lo anterior, hace necesario una correcta elaboración del diagrama de tiempo y lo importante que es ubicar en forma correcta y exacta el dinero en el tiempo.

Por último, es conveniente afirmar que el interés compuesto se utiliza en la Ingeniería Económica, Matemática Financieras, Evaluación de Proyectos y en general por todo el sistema financiero colombiano.

Ejemplo 3.1

Una persona invierte hoy la suma de $ 100.000 en un CDT que paga el 7% cuatrimestral, se solicita mostrar la operación de capitalización durante dos años

Periodo	Cap. Inicial (P)	Interés	Monto (F)
0	100,000.0000		100,000.0000
1	100,000.0000	7,000.0000	107,000.0000
2	107,000.0000	7,490.0000	114,490.0000
3	114,490.0000	8,014.3000	122,504.3000
4	122,504.3000	8,575.3010	131,079.6010
5	131,079.6010	9,175.5721	140,255.1731
6	140,255.1731	9,817.8621	150,073.0352

En la tabla anterior, se aprecia que los intereses cuatrimestrales se calculan sobre el monto acumulado en cada periodo y los intereses se suman al nuevo capital para formar un nuevo capital para el periodo siguiente, es decir, se presenta capitalización de intereses, con el objeto de conservar el poder adquisitivo del dinero a través del tiempo.

Para el cálculo del interés se uso la fórmula: $I = Pin$, mientras que para el monto se utilizó: $F = P + I$; ecuaciones que fueron definidas con anterioridad

3.3 SUBDIVISION DEL INTERES COMPUESTO.

El interés compuesto se puede subdividir de la siguiente manera:

a) **Interés compuesto discreto**: Se aplica con intervalos de tiempos finitos.
b) **Interés compuesto continuo:** Se aplica en una forma continua, o sea que los intervalos de tiempo son infinitesimales.

Sin importar el hecho de que el interés sea discreto o continuo y para dar una definición precisa del interés compuesto, es conveniente indicar los siguientes aspectos.

TASA DE INTERES: Es el valor del interés que se expresa como un porcentaje. Ej. 5%. 10%, 20%.

PERIODO DE APLICACIÓN: Es la forma como se aplicará el interés. Ej. 2% mensual, 20% anual compuesto trimestralmente, 18% anual compuesto continuamente.

BASE DE APLICACIÓN: Es la cantidad de dinero sobre la cual se aplicará el interés para cada periodo. Ej. 20% anual compuesto trimestralmente sobre el saldo mínimo trimestral.

FORMA DE APLICACIÓN: Es el momento en el cual se causa el interés. Ej. 2% mensual por adelantado, 18% anual por trimestre vencido.

3.4 COMPARACION ENTRE EL INTERES SIMPLE Y COMPUESTO

La comparación entre el interés simple e interés compuesto, se hará a partir del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2

Suponga que se una persona invierte $ 1.000 a un interés del 2.5% mensual durante 12 meses, al final de los cuales espera obtener el capital principal y los intereses obtenidos. Suponer que no existen retiros intermedios. Calcular la suma final recuperada.

Periodo	Capital Inicial o Presente		Intereses		Monto final o Futuro	
	Simple	Compuesto	Simple	Compuesto	Simple	Compuesto
1	1.000	1.000,00	25	25,00	1.025	1.025,00

2	1.000	1.025,00	25	25,63	1.050	1.050,63
3	1.000	1.050,63	25	26,27	1.075	1.076,90
4	1.000	1.076,90	25	26,92	1.100	1.103,82
5	1.000	1.103,82	25	27,59	1.125	1.131,41
6	1.000	1.131,41	25	28,29	1.150	1.159,70
7	1.000	1.159,70	25	28,99	1.175	1.188,69
8	1.000	1.188,69	25	29,72	1.200	1.218,41
9	1.000	1.218,41	25	30,46	1.225	1.248,87
10	1.000	1.248,87	25	31,22	1.250	1280,09
11	1.000	1.280,09	25	32,00	1.275	1312,09
12	1.000	1.312,09	25	32,80	1.300	1.344,89

En la tabla se observa que el monto a interés simple crece en forma aritmética y su gráfica es una línea recta. Sus incrementos son constantes y el interés es igual en cada periodo de tiempo. El monto a interés compuesto, en cambio, crece en forma geométrica y su gráfica corresponde a la de una función exponencial. Sus incrementos son variables. Cada periodo presenta un incremento mayor al del periodo anterior. Su ecuación es la de una línea curva que asciende a velocidad cada vez mayor.

En el diagrama anterior se puede observar que los flujos ubicados en el periodo **3**, **5** y **n-2**, son valores futuros con respecto al periodo **1** o **2**, pero serán presente con respecto a los periodos **n-1** o **n**

3.5 PERIODO

El tiempo que transcurre entre un pago de interés y otro se denomina periodo y se simboliza por **n**, mientras que el número de periodos que hay en un año se representa por **m** y representa el número de veces que el interés se capitaliza durante un año y se le denomina ***frecuencia de conversión o frecuencia de capitalización***.

A continuación se presenta una tabla que muestra las frecuencias de capitalización más utilizadas o comunes.

Capitalización intereses	***Frecuencia conversión***
Diaria	365
Semanal	52
Quincenal o Bimensua	24
Mensual	12
Bimestral	6
Trimestral	4
Cuatrimestral	3
Semestral	2
Anual	1

En un ejercicio o problema de interés compuesto al especificar la tasa de interés se menciona inmediatamente el periodo de capitalización. Por ejemplo:

30% Anual capitalizable o convertible diariamente.
28% Liquidable o capitalizable semanalmente.
24% Capitalizable Quincenalmente.
36% Anual convertible mensualmente.
32% Anual liquidable bimestralmente.
40% Anual capitalizable Trimestralmente.
20% Anual compuesto cuatrimestralmente.
35% Anual convertible semestralmente.
18% Anual liquidable anualmente.

Si no se especifica el periodo de referencia, éste se debe entender de forma anual. Es decir, 28% Liquidable o capitalizable semanalmente, es lo mismo, que si se manifestara 28% Anual Liquidable o capitalizable semanalmente.

El periodo de capitalización es un dato indispensable en la solución de problemas de interés compuesto. Al realizar un cálculo de interés compuesto es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el periodo de capitalización.

Ejemplo 3.3

Si un documento ofrece pagos semestrales y tiene una duración de 3 años. ¿Cuánto vale m y n?

Solución:

Un año tiene 2 semestre, por lo tanto, **m = 2**.

Teniendo que la obligación financiera dura 3 años, el número de veces que el documento paga interés por año será 2, por consiguiente en 3 años, pagará 6 veces, lo que indica que **n = 6**

3.6 VALOR FUTURO EQUIVALENTE A UN PRESENTE DADO.

El valor futuro, se puede encontrar a partir de un valor presente dado, para lo cual, se debe especificar la tasa de interés y el número de períodos, y a partir de la siguiente demostración, se determina la fórmula que permite calcular el valor futuro.

PERIODO	CAPITAL INICIAL	INTERES	CAPITAL FINAL
1	P	Pi	$F_1 = P + Pi = P(1+i)$
2	$P(1+i)$	$P(1+i)i$	$F_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2i$	$F3 = P(1+i)^2 + P(1+i)^2i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$
4	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^3i$	$F4 = P(1+i)^3 + P(1+i)^3i = P(1+i)^3(1+i) = P(1+i)^4$
:	:	:	:
:	:	:	:
N	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}$	$Fn = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1}i = P(1+i)^{n-1}(1+i) = P(1+i)^n$

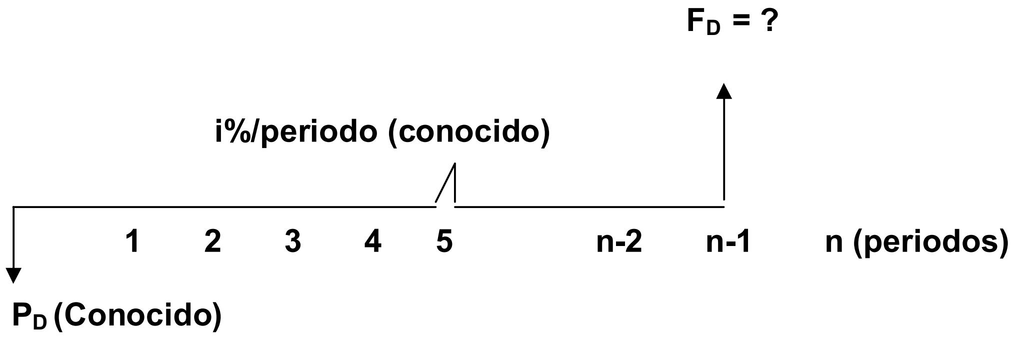
Se concluye entonces que: $\mathbf{F = P(1+i)^n}$ **(3.1)** ; donde :

F = Monto o valor futuro.
P = Valor presente o valor actual.
I = tasa de interés por periodo de capitalización.
n = Número de periodos ó número de periodos de capitalización.

La anterior fórmula se puede expresar mnemotécnicamente de la siguiente manera: **F = P(F/P, i, n)**; que se lee así: hallar F dado P, una tasa i y n periodos. La forma nemotécnica se emplea cuando se usan las tablas financieras que normalmente se encuentran al final de los libros de ingeniería económica o de matemáticas financieras.

El término **(F/P, i, n)** se conoce con el nombre de factor y es un valor que se encuentra en las tablas financieras. El factor corresponde al elemento $\mathbf{(1+i)^n}$ de la fórmula, que se conoce con el nombre de ***factor de acumulación en pago único***.

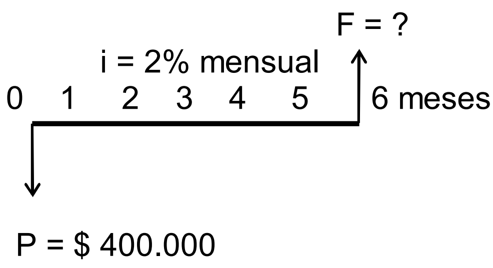
En las matemáticas financieras toda fórmula tiene asociada un diagrama económico, para la expresada anteriormente seria:



Ejemplo 3.4

¿Cuánto dinero se tiene dentro de seis meses en una cuenta de ahorros que reconoce el 2% mensual si hoy se invierte en una corporación $400.000?.

Solución:



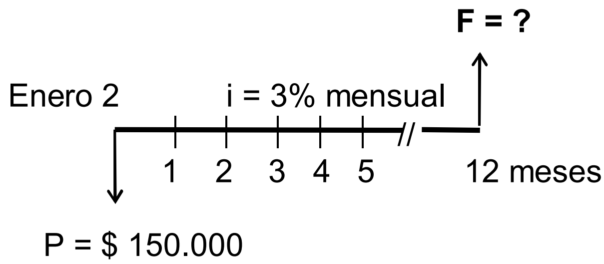
$\mathbf{F = P(1+i)^n}$; por consiguiente: $F = 400.000(1+0.02)^6 = \$\ 450.465$,

El valor de **Va** se toma negativo ya que se trata de una inversión, para encontrar la respuesta se debe estar ubicado en la celda **B4**, siempre se debe hacer un clic sobre la opción aceptar de la venta de argumentos de función de **VF**. Introduzca los otros valores en las celdas tal como se señala en la hoja de Excel.

Ejemplo 3.5

El 2 de enero se consignó $150.000 en una cuenta de ahorros y deseo saber cuánto puedo retirar al finalizar el año, si me reconocen una tasa de interés mensual igual a 3% ?

Solución:

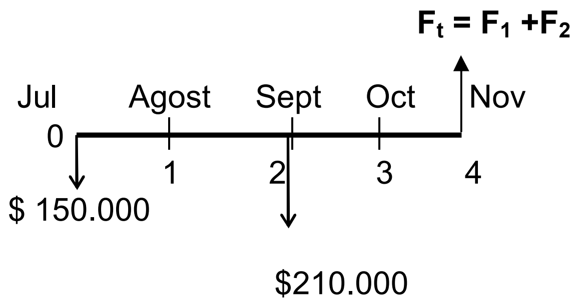


$F = P(1+i)^n$; por lo tanto: $F = 150.000(1+0.03)^{12} =$ \$ 213.864

Ejemplo 3.6

Al iniciar los meses de julio y septiembre me propongo ahorrar $150.000 y $210.000 respectivamente y deseo consignarlos en una corporación que me reconoce el 4% mensual. ¿Cuánto dinero tengo el primero de noviembre?.

Solución:



$P_1 =$ \$ 150.000 $P_2 =$ \$ 210.000 $i = 0.04$ mensual.

$F_1 = P_1(1+i)^n$; $F_1 = 150.000(1+0.04)^4$; $F_1 = 150.000\ (1.04)^4 =$ \$ 175.479
$F_2 = P_2(1+i)^n$; $F_2 = 210.000(1+0.04)^4$; $F_2 = 210.000(1.04)^2 =$ \$ 227.136

$F_t = F_1 + F_2 = 175.479 + 227.136 =$ \$ 402.615;

3.7 CALCULO DEL VALOR PRESENTE EQUIVALENTE DE UN FUTURO DADO.

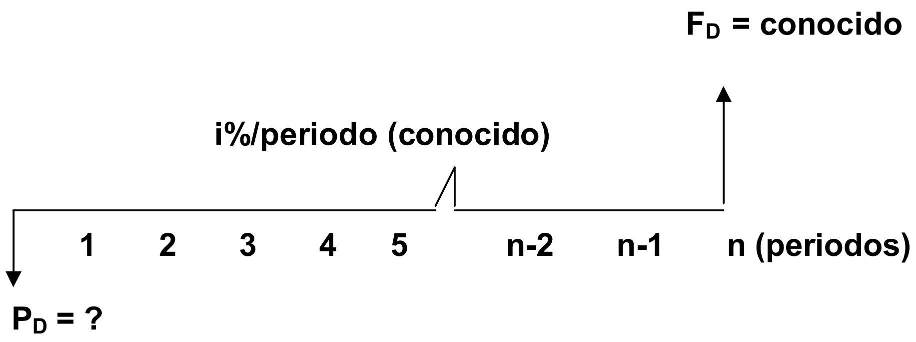
Sabemos que **$F = P(1+i)^n$** ; por lo tanto, **$P = F(1+i)^{-n}$** **(3.2)**

El valor presente se puede definir, como el capital que prestado o invertido ahora, a una tasa de interés dada, alcanzará un monto específico después de un cierto número de periodos de capitalización.

La anterior fórmula se puede expresar mnemotécnicamente de la siguiente manera: **P = F(P/F, i, n)** ; que se lee así : hallar **P** dado **F**, una tasa **i** y **n** periodos. La forma mnemotécnica se emplea cuando se usan las tablas financieras que normalmente se encuentran al final de los libros de ingeniería económica o de las matemáticas financieras.

El término **(P/F, i, n)** se conoce como el nombre de factor y es un valor que se encuentra en las tablas financieras. El factor corresponde al elemento $\mathbf{(1+i)^{-n}}$ de la fórmula, se conoce con el nombre de ***factor de descuento o factor de valor presente para pago único***.

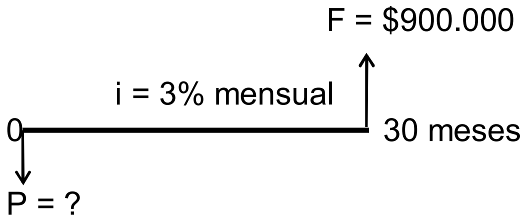
El diagrama económico para la fórmula expresada anteriormente seria:



Ejemplo 3.7

Dentro de dos años y medio deseo cambiar mi actual maquinaria empacadora por una de mayor capacidad. En esa fecha, estimo que puedo venderla por $ 300.000 y la de mayor capacidad estará costando $1.200.000 ¿Cuánto capital debo consignar en una entidad financiera que paga el 3% mensual, si deseo adquirir la nueva maquinaria?
Solución:

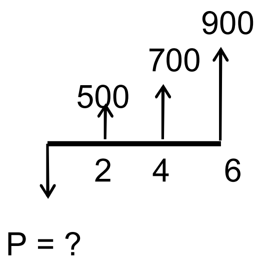
Como la actual maquinaria la vendería por $ 300.000 dentro de dos años y medio y la nueva tendría un costo de $ 1.200.000, realmente debo tener consignado en la entidad financiera en esa fecha $ 900.000.



Se tiene que: $P = F(1+i)^{-n} = 900.000(1+0.03)^{-30} = \$370.788,08$;

Ejemplo 3.8

Calcule **P** en el siguiente diagrama de flujo si i = 10%.



Solución:

Hay que considerar que cada valor que está a la derecha de **P**, es un valor futuro (**F**). Según el diagrama se tendrá:

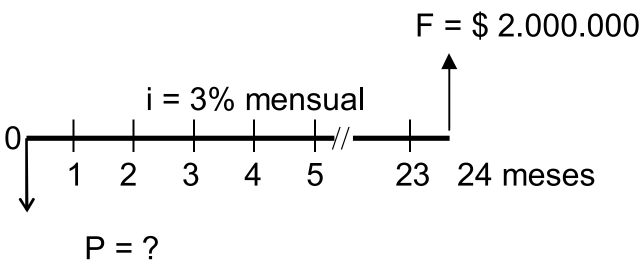
$P = F(1+i)^{-n} = 500(1+0.10)^{-2} + 700(1+0.10)^{-4} + 900(1+0.10)^{-6} = 413{,}22 + 478{,}10 + 508{,}02$

P = $ 1.399,36

Ejemplo 3.9

¿Qué capital es necesario invertir hoy en una institución que capitaliza el 3% mensual a fin de obtener en dos años $ 2.000.000?

Solución:



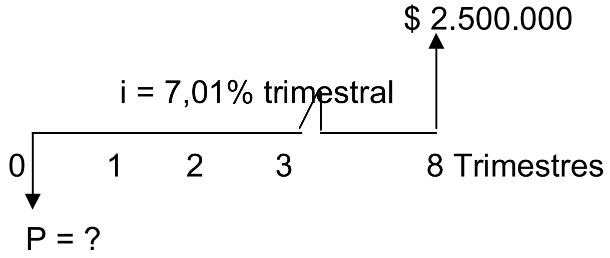
$$P = F(1+i)^{-n} = 2.000.000(1+0{,}003)^{-24} = \$983.867{,}47;$$

Ejemplo 3.10

Una persona desea invertir hoy una suma de dinero en una institución financiera para retirar $ 2.500.000 dentro de 2 años ¿Cuál será la suma a depositar si el rendimiento reconocido es de 7,01 trimestral?

Solución:

Como el interés que se da en el ejercicio es trimestral, y teniendo en cuenta que debe haber una relación de homogeneidad entre i y n, los dos años se hacen equivalentes a 8 trimestres.



$$P = F(1+i)^{-n} = 2.500.000(0,0701)^{-8} = \$1.453.935,35 \;;$$

3.8 CALCULO DEL NÚMERO DE PERIODOS.

Sabemos que: $F = P(1+i)^n$; despegando se tiene: $\left(\frac{F}{P}\right) = (1+i)^n$; aplicando logaritmos tenemos: $Ln\left(\frac{F}{P}\right) = nLn(1+i)$; de donde: $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{Ln}\left(\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{P}}\right)}{\mathbf{Ln(1+i)}}$ **(3.3)**

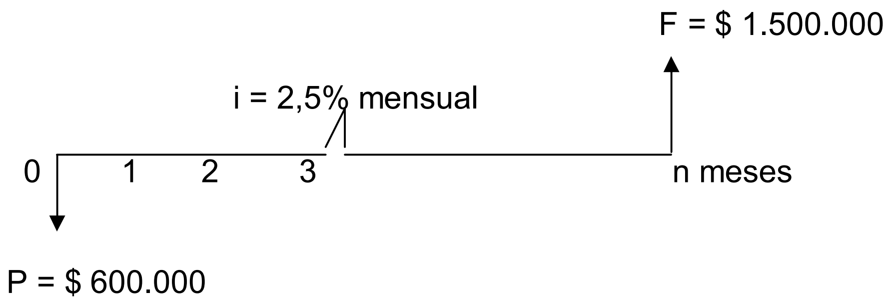
Se puede hallar **n** por medio del uso de la mnemotecnia; **F = P(F/P, i, n) ó P= F(P/F, i, n)**.

Ejemplo 3.11

¿A cuánto tiempo $ 1.500.000 es equivalente a $ 700.000 hoy, sabiendo que el interés que gana el dinero es del 2.5% mensual?.

Solución:

Como la tasa de interés está dada en término mensual, entonces el número de periodos será también en meses.



Se sabe que: $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{F}{p}\right)}{\ln(1+i)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1.500.000}{600.000}\right)}{\ln(1+0.025)} = \dfrac{\ln(2,5)}{\ln(1,025)} = 37,10$ meses

3.9 CALCULO DE LA TASA DE INTERES (i).

Se sabe que: $F = P(1+i)^n$, despejando se obtiene: $\left(\dfrac{F}{P}\right) = (1+i)^n$, aplicando raíz e-enésima a ambos lado de la ecuación se tiene: $\left(\dfrac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)^{\frac{n}{n}}$, por lo tanto;

$$\mathbf{i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} \quad \textbf{(3.4)}$$

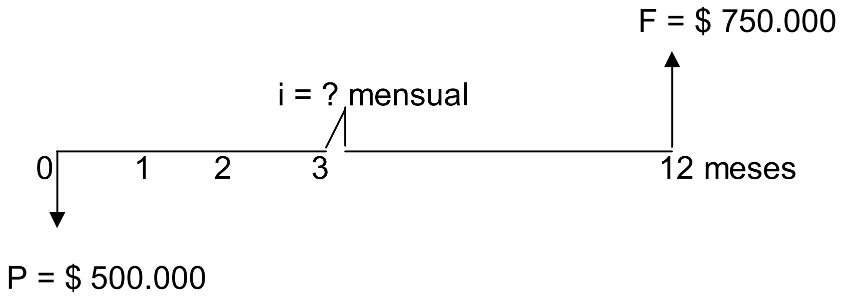
Se puede hallar **i** por medio del uso de las mnemotecnia **F = P(F/P, i, n) ó P= F(P/F, i, n)**.

Ejemplo 3.12

Hace un año se hizo un depósito de $500.000 en una corporación y hoy el saldo en dicha cuenta es de $750.000. ¿Cuál es la tasa de interés mensual que reconoce la corporación. ?

Solución:

Como la tasa de interés que se pide es mensual, entonces, el número de periodos deberá ser expresado en meses, por lo cual, un año equivale a 12 meses.



Se sabe que: **i = (F/P)$^{1/n}$ – 1** ; por consiguiente: i = (750.000/500.000)$^{1/12}$ - 1 ;

Entonces i = (1,5)$^{1/12}$ – 1 = 0,03466 mensual; de donde: **i = 3,4366 % mensual**

3.10 INTERPOLACION LINEAL

En las matemáticas financieras es común utilizar el concepto matemático de interpolación lineal, que consiste fundamentalmente en que dados dos puntos en una curva, se busca encontrar otro intermedio utilizando la función lineal, es decir, bajo el supuesto que los tres puntos estén sobre la misma línea recta. Lo que se pretende es aproximar o ajustar puntos que se encuentran sobre una curva a puntos que se ubiquen en una línea recta y de esta forma hallar una solución aproximada a un conjunto de problemas.

Para facilitar el proceso de interpolación se presenta la siguiente expresión:

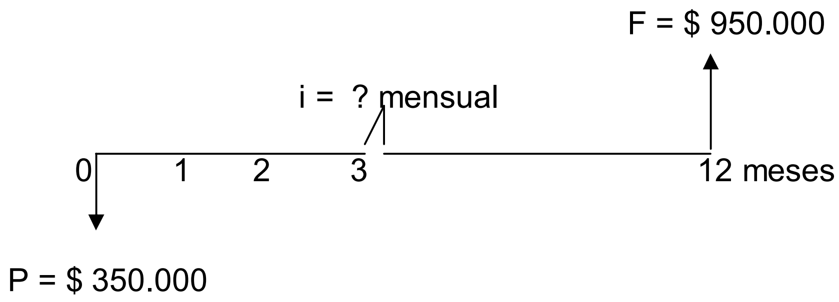
$$? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) \quad \textbf{(3.5)}$$

Con algunos ejemplos se puede entender fácilmente la expresión anterior.

Ejemplo 3.13

Una persona invierte hoy la suma de $ 350.000 y espera acumular al finalizar el año $ 950.000. ¿Cuál es la tasa de interés mensual que reconoce la corporación. ?

Solución:



Para aplicar el concepto de interpolación lineal, se resolverá el ejemplo mediante la expresión nemotécnica **F = P(F/P, i, n)**, por consiguiente:

950.000 = 350.000(F/P, i, 12) , entonces: 2,71429 = (F/P,i,12)

Usando cualquier tabla financiera para interés compuesto discreto, se encuentra que para un i = 8%, el factor (F/P, 8%,12) es igual a 2,51817, y para un i= 10% el factor (F/P,10%,12) equivale a 3,13843, por lo tanto, el i que nos interesa encontrar esta entre esos dos valores, por lo cual, se hace uso de la siguiente tabla :

	i%	**(F/P,i,n)**	
$\Re_1$ →	8	2,51817	→ X1
	?	2,71429	→ X
$\Re_2$ →	10	3,13843	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión:

? = $\Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

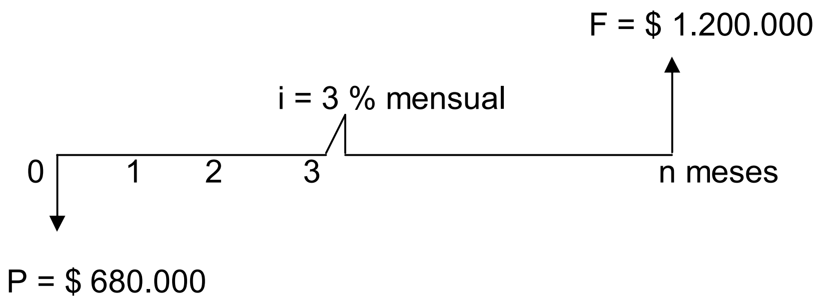
$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 0.08 + \frac{0.10 - 0.08}{3{,}13843 - 2{,}51817}(2{,}71429 - 2{,}51817)$$

$$i = 0{,}08 + \frac{0.02}{0{,}62026}(0{,}19611) = 0{,}08632, \quad \text{luego} \quad i = 8{,}6771\% \text{ mensual}$$

Ejemplo 3.14

¿ En cuánto tiempo se logra acumular la suma $ 1.200.000 si hoy deposito a $ 680.000, sabiendo que el interés que gana el dinero es del 3% mensual?.

Solución:



Para aplicar el concepto de interpolación lineal, se resolverá el ejemplo mediante la expresión nemotécnica **P = F(P/F, i, n)**, por consiguiente:

680.000 = 1.200.000(P/F, 3%, n) , entonces 0.566666 = (P/F,3%,n)

Usando cualquier tabla financiera para interés compuesto discreto, se encuentra que para un i = 3%, el factor (P/F, 3%,19) es igual a 0,570286, y el factor (P/F,3%,20) equivale a 0,5536757, por lo tanto, el n que nos interesa encontrar está entre 19 y 20 meses, por lo cual, se hace uso de la siguiente tabla :

	n	**(P/F,i,n)**	
$\Re_1$ →	19	0,5702860	→ X1
	?	0,5666666	→ X
$\Re_2$ →	20	0,5536757	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión ? = $\Re 1+\frac{\Re 2-\Re 1}{X2-X1}(X-X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

$$n=\Re 1+\frac{\Re 2-\Re 1}{X2-X1}(X-X1)=19+\frac{0{,}5536757-0{,}570286}{20-19}(0{,}5666666-0{,}5702860)$$

$n = 19+\frac{-0{,}0166103}{1}(-0.0036194)=19{,}22$ meses, luego **n = 19,22 meses**

3.11 DESCUENTO COMPUESTO

Es la operación financiera que tiene por objeto el cambio de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente, mediante la fórmula de descuento compuesto. Es un descuento que opera con base en el interés compuesto. Si el proceso de capitalización es la suma periódica de los intereses, el descuento compuesto debe ser todo lo contrario. Se simboliza con **Dc**.

Teniendo en cuenta que: $F = P(1+i)^n$ y que $V_n = V_T(1+d)^n$; de donde: $V_n = V_T(1+d)^n$, por consiguiente: $V_T = \frac{V_n}{(1+d)^n}$; ahora si: $D_c = V_n - V_T$; por lo cual se obtiene: $D_c = V_n - \frac{V_n}{(1+d)^n}$; al factorizar se obtiene: $D_c = V_n\left(1-\frac{1}{(1+d)^n}\right)$; la cual, se podría expresar:

$$\mathbf{D_c = V_n\left[\left(1-(1+d)^{-n}\right)\right]} \quad \mathbf{(3.6)}$$

Ejemplo 3.15

Calcular los intereses de descuento por anticipar un capital de $ 4.500.000 por 5 meses a un tipo de descuento del 15%.

Solución:

Se tiene que:

$$D_c = V_n\left[\left(1-(1+d)^{-n}\right)\right]=4.500.000\left[1-(1+0{,}15)^{-5/12}\right]=254.569{,}38$$

Ejemplo 3.16

Los intereses de descontar \$ 3.500.000 a un tipo del 12% ascienden a 420.000. Calcular el plazo de descuento si se ha aplicado el descuento compuesto.

Solución:

Se tiene que: $D_c = V_n\left[\left(1 - (1+d)^{-n}\right)\right]$; por consiguiente: $420.000 = 3.500.000\left[\left(1-(1+0,12)^{-n}\right)\right]$; de donde: $\dfrac{420.000}{3.500.000} = 1-(1,12)^{-n}$; entonces se tiene: $(1,12)^{-n} = 1-0,12$: por lo tanto:

$$n = \frac{-Ln(0,88)}{Ln(1,12)} = 1,128 \text{ años} = 1,1280 * 12 = 13,54 \text{ meses}$$

Ejemplo 3.17

El señor Díaz tiene en su poder una letra de \$ 2.500.000 que vence dentro de seis meses y reconoce intereses al, 8% mensual, y quiere negociar con banco que le acepta la letra pero con un descuento del 3,5%. ¿Cuál es el precio de la letra y el descuento aplicado?.

Solución:

Se debe encontrar el valor de la letra al final del mes seis, por tanto: $V_n = F = P(1+i)^n$; de donde: $Vn = 2.500.000(1+0,028)^6 = \$2.950.520,9$, luego se encuentra el precio de la venta: $V_T = \dfrac{V_n}{(1+d)^n}$;

$V_T = \dfrac{2.950.520,9}{(1+0,035)^6} = 2.400.250,65$; el descuento sería:

$$D_c = V_n\left[\left(1 - (1+d)^{-n}\right)\right] = 2.950.520,9\left[1-(1+0,035)^{-6}\right] = \$550.270,25$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar el monto compuesto después de 4 años si se invierten $ 100.000 a una tasa del 8% T. **R/. $ 342.594,26**
2) Se invierten $ 2.000.000 al 1,5% mensual por 3 años. ¿Cuál es la cantidad acumulada al término de ese tiempo?. ¿A cuánto asciende el interés ganado?. **R/. $ 3.418.279,08 y $ 1.418.279,08**.
3) ¿Qué cantidad de dinero se habrá acumulado al cabo de 5 años si se invierten $ 800.000 al 2.1% mensual. **R/. $ 2.783.777,45**.
4) Se invirtieron $ 20.000.000 en un banco por 5 años. Cuando se realizó el depósito, el banco estaba pagando el 6% T. Tres años después, la tasa cambio al 1,5% mensual. Calcule el monto al finalizar los cinco años. **R/. $ 71.997.625,26**
5) Un trabajador empieza a laborar con un sueldo mensual de $ 450.000 si los aumentos esperados se promedian en un 10% anual, ¿Cuál será su sueldo al llegar a la edad de jubilación dentro de 20 años?. **R/ $ 2.752.159,07**.
6) Una persona debe pagar en 18 meses la suma de $ 2.000.000. ¿Cuál debe ser el valor del depósito que se haga hoy en una cuenta que paga el 8% efectivo trimestral para poder retirar esa suma?. **R/ $ 1.260.339,25.**
7) Una inversión de $ 200.000 USD se efectúa a 15 años. Durante los primeros 8 años la tasa de interés es del 12% S. Posteriormente, la tasa desciende al 15% S, durante 4,5 años. El resto del tiempo la tasa aumenta 1,25% M. ¿Cuál es el monto final de la inversión?. **R/. 6.261.089,01 USD**.
8) Si un apartamento se adquiere hoy por $ 40.000.000 y por efectos de la inflación y otros factores su valor aumenta a razón de un 20% anual, ¿cuánto podrá valer dentro de 15 años?. **R/$ 616.280.862,98**.
9) Una persona abrió un CDT con $ 4.500.000, los tres primeros bimestres le reconocieron el 4,5% bimestral y luego los renovó por dos trimestres más por 7% T. ¿Cuánto tenia al finalizar el año?. **R/. $ 5.879.344,93**.
10) ¿Cuál es el valor presente de $ 1.800.000 que vencen dentro de 3 años, si la tasa de interés es del 5% bimestral?. **R/. $ 4.331.914.62**.
11) Si depositamos hoy $ 100.000, dentro de 6 meses $ 50.000 y 4 meses después de realizado el anterior depósito, $ 200.000, ¿Cuánto se tendrá acumulado 19 meses después de efectuado el primer depósito si se reconoce el 3% mensual?. **R/ $ 509.731,19.**
12) Hace 11 meses deposité $ 500.000 y, 4 meses después retire $ 250.000. ¿Cuánto tendré acumulado hoy si hace tres meses deposité $ 300.000 y el interés que reconoce es del 4,7% bimestral?. R/. $ 671.488,38
13) Una persona recibió una herencia de $ 1.500.000 y quiere invertir una parte de este dinero en un fondo de jubilación. Piensa jubilarse dentro de 15 años y para entonces desea tener $ 30.000.000 en el fondo. ¿Qué parte de la herencia deberá invertir ahora si el dinero estará invertido a una tasa del 2% mensual?. **R/. $ 849.357,13**.
14) Un capital estuvo invertido 4 años a una tasa del 7,5% T, si se hubiera invertido al 2,5% mensual, habría producido $ 634.872 más de intereses. ¿Cuál es el capital que se invirtió?. **R/. $ 6.999.968,63**.
15) Una persona debe $ 500.000, con vencimiento en 6 meses e intereses del 7.5% T. Si el documento es vendido 2 meses antes del vencimiento y el comprador desea ganar un interés del 3,5% mensual sobre el monto de su inversión, calcular el precio de compra. **R/. $ 539.394,15**.

16) Las dos quintas partes de un capital están invertidos al 2,35% mensual y el resto al 15% semestral; si los intereses anuales son $ 1.159.503. ¿Cuál es el capital?. **R/. $ 877.026,61**.
17) Un padre de familia promete a cada uno de sus dos hijos, que al terminar la carrera le entregará a cada uno $ 4.000.000 para que realicen un viaje. Si al primero le faltan 2 años para terminar y al segundo 3 años. ¿Cuánto debe invertir hoy en un fondo que paga el 2,5% mensual a fin de poderles cumplir la promesa?. **R/. $ 3.855.876,31**.
18) Dos personas se asociaron para montar un negocio; cada uno aportó $ 40.000.000 y $ 30.000.000 respectivamente y acordaron las siguientes cláusulas: 1) La sociedad reconocerá a cada uno el 2.5% sobre el capital aportado, 2) El primero participará de las utilidades, después del reconocimiento de los intereses, con el 55% y el 45% respectivamente y, 3) Ningún socio podrá retirar utilidades o intereses antes de 5 años. Por inconvenientes entre los socios, el negocio se liquida a los 2,5 años y el total realizado $ 160.000.000, determinar cuánto recibió cada uno de los socios y cuál fue la tasa de rendimiento anual producida en el negocio. **R/. Socio 1: $ 91.146.351,37, Socio 2: $ 68.853.648,63. 39,19% EA.**
19) Un fondo tiene un valor hoy de $ 3.500.000 y hace año el valor del fondo era de $ 2.800.000. Suponiendo una tasa de inflación del 20%. ¿Qué es más aconsejable entre dejar el dinero en el fondo ó cancelar el fondo y buscar otra alternativa de inversión. **R/. La rentabilidad anual es del 25%, como es mayor que la tasa de inflación, es recomendable dejar el dinero en el fondo.**
20) Se dispone hoy de una suma de dinero para invertir. Y se presentan dos alternativas: la primera es invertir al 2, 42% mensual y la segunda es invertir al 15,25% semestral. ¿Cuál debe aceptarse?. **R/ La primera**.
21) Si el costo de la energía eléctrica va a estar aumentando a un ritmo de 3.5% mensual durante los próximos 12 meses, ¿De cuánto será el aumento total expresado en porcentaje?. Suponga que el costo de Kw/hora actualmente es de $ 15. **R/. 51,11%**.
22) La señora carolina, deposita $ 100.00 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 7% trimestral; dentro de 3 años retira la tercera parte del total acumulado en su cuenta, dos años más tarde hace un depósito igual a la mitad del saldo existente en ese momento y dos años después retira la totalidad del dinero existente en esa fecha. Hallar el valor de este último retiro. **R/ $ 664.884**
23) Se desea duplicar un capital en un año. Si la capitalización se lleva a cabo cada quincena, ¿A qué tasa de interés debe invertirse?. **R/. 2,93% quincenal**.
24) Una letra que vence en 45 días con un valor de $ 3.000.000 se descuenta, hoy por $ 2.861.168,43. Encontrar la tasa de interés del negocio? **R/. 10,53% diario**.
25) Una bicicleta tiene un valor de contado de $ 2.500.000. A plazos exigen una cuota inicial de $ 1.000.000 y el resto financiado para ser cancelado con tres cuotas de $ 1.000.000; $ 500.000 y $ 198.305,30, dos, cinco y nueve meses después de recibida la bicicleta. Encontrar el interés de financiación. **R/. 3,5% mensual.**
26) Un socio de una empresa aportó $ 25.000.000, al finalizar el quinto año se retiró de la sociedad; llegando a un acuerdo con los demás socios le entregaron $ 72.000.000. ¿Qué rendimiento anual obtuvo de su inversión en esa empresa?. **R/. 23,56% anual**.
27) Se adquiere una máquina financiada y se pacta cubrir en tres pagos de $ 60.000, $ 80.000 y $ 100.000 en los meses 6, 8 y 12 meses, respectivamente. Hallar el valor de contado sabiendo que la financiación contempla una tasa de interés sobre saldo

del 2,5% mensual para los 6 primeros meses y del 9% trimestral de allí en adelante. R/. $ 189.471.

28) Cuanto tiempo hay que esperar para que después de depositar hoy $150.000 en una cuenta de ahorros que reconoce el 5% trimestral, podamos retirar $ 588.000?. **R/. 27,99 trimestres**.

29) En cuántos años se cuadruplicará una inversión hecha hoy con un interés compuesto del 24% anual pagadero en su totalidad al vencimiento? **R/. 6,44 años**.

30) Una persona deposita hoy $ 450.000 en una corporación de ahorro que paga el 7% trimestral. Tres años después deposita $ 620.000, un año más tarde deposita $ 500.000, y dos años después decide retirar la cuarta parte del total acumulado hasta ese momento. Hallar el saldo en la cuenta de ahorros cinco meses después del retiro. **R/ $ $ 3.807.850**.

31) Una empresa adquiere un préstamo por $ 20.000.000 al 2.5% mensual y firmó un pagaré por $ 48.650.706,31. ¿Qué plazo le concedieron para cancelar la deuda y los intereses?. **R/. 36 meses**.

32) La población de una ciudad ha venido creciendo al 2,5% anual, actualmente es de 4.500.000, en cuánto tiempo se duplicará si sigue creciendo al mismo ritmo?. **R/. 28,07 meses**

33) Un abogado aceptó un pagaré de un cliente que no pudo cubrir sus honorarios. Al vencimiento del pagaré, el abogado recibirá $ 85.650.720. ¿Cuál era el importe de sus honorarios, si la duración del préstamo fue de 5 meses y la tasa del interés de 2,8% mensual?. **R/. $ 53.182.358,38**.

34) Karla desea vender una pulsera de oro y recibe, el 18 de abril de 2007, las siguientes ofertas: a) $ 1.789.000 de contado, b) $ 500.000 de cuota inicial y se firma un pagaré de $ 1.480.000 con vencimiento el 16 de agosto de 2007 y c) $ 300.000 de cuota inicial y se firman dos pagarés: uno por $ 630.000 a 30 días de plazo y otro por $ 980.000 con fecha de vencimiento el 17 de julio de 2007. ¿Cuál oferta le conviene más si el rendimiento normal del dinero es de 2,5% mensual?. **R/. La mejor es la opción B.**

35) Trece millones de pesos fueron invertidos al 2% mensual de interés compuesto mensualmente por un dos años y medio, a) Obtenga el valor futuro al final de ese tiempo y b) Cuánto más se ganó con el interés compuesto que lo que se hubiera ganado con el interés simple?. **R/. $ 23.547.700,59 y $ 2.747.700,59**.

36) Al comprar una moto quedé debiendo $ 1.000.000 los cuales debo cancelar con cualquiera de las siguientes dos opciones: a) A los 4 meses $ 500.000 y a los 7, $ 667.119,46. b) Pagar a los 7 meses $ 1.246.688,29. ¿Qué forma de pago es más conveniente a un interés del 2,5% mensual?. **R/. La opción A, es la mejor**.

37) Isabel le presta a su hermano $ 3.500.000 por 8 meses, cobrándole una tasa de intereses simple del 1,8% mensual. Al final de este tiempo, deposita el monto obtenido en una cuenta de ahorros que le paga un 0.456% cada semana. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 2 años?. **R/. $ 6.426.665,83**.

38) Compro una máquina por valor de $ 900.000, vida útil de 3 años y un valor de salvamento de $ 100.000. Debo repararla dos años después de comprada por un valor de $ 80.000. Si la máquina produce ingresos de $ 400.000 al final de cada año. La tasa de interés es del 24% anual ¿Debo comprarla?. **R/. No se debe comprar**.

39) Dentro de cuántos trimestres se tendrá en una cuenta de ahorros un saldo de $ 910.660 sabiendo que hoy se hace un depósito de $ 400.000 y luego retiros así:

$80.000 dentro de 9 meses, $ 120.000 dentro de 12 meses, si la cuenta de ahorros abona un interés del 9,5% trimestral. **R/. 14 trimestres.**

40) Qué tiempo es necesario para que $ 3.600.000 se conviertan en $ 8.921.650, a una tasa semestral del 9.5%. **R/. 10 semestres**.

41) Una persona deposita $ 3.270.000 en una cuenta de ahorros que paga el 0,137% semanal. ¿En qué tiempo se tendrá un monto de $ 4.300.940. **R/. 200 semanas**.

42) Luis es el beneficiario de un fideicomiso establecido para él por sus padres, cuando nació. Si la cantidad original ahorrada fue de $ 1.200.000 y actualmente el monto es de $ 30.710.000, ¿Qué edad tiene actualmente Luis. El dinero gana un interés del 2.1% mensual?. **R/. 13 años**.

43) Obtenga el precio de contado de un equipo de sonido por el que se da una cuota inicial del 25% del valor de contado y se firma un pagaré, con vencimiento a 8 meses, por $ 1.420.000, el cual incluyen intereses al 2.8% mensual. **R/. $ 1.518.036,32**.

44) El saldo de una cuenta en el banco era $ 32.286.820 el 10 de agosto de 1997. La cuenta fue abierta el 10 de julio de 1994 y el 10 de septiembre de 1996, se realizo un depósito de $ 13.000.000. ¿Cuál fue el capital originalmente depositado, sabiendo que la tasa de interés fue 3,2% mensual?. **R/. $ 4.334.914.44**.

45) Carmen deposita cierta cantidad de dinero en un banco que le paga un 4,6% bimestral. ¿En cuánto tiempo los intereses generados serán iguales al 125% del capital invertido?. **R/. 18 Bimestres**.

46) Roberto es el gerente de una distribuidora de productos químicos y un cliente le compró hace un mes la suma de $ 4.800.000. Como Roberto le concedió un crédito por 4 meses, el cliente firmó un pagaré en donde se establece una tasa de interés del 2.8% mensual. El día de hoy se le presentó una emergencia a Roberto y necesita dinero, pero como no tiene, piensa solicitar un crédito a una institución financiera y como garantía de pago, endosará el pagaré que tiene en su poder. El gerente de la institución financiera acepta el trato, cobrándole una tasa de interés del 3,2% mensual. La institución financiera tiene la política de prestar en una proporción de tres a uno, es decir, se presta un peso por cada tres que se tenga en garantía. Diga cuánto se le puede prestar como máximo a Roberto. **R/. $ 2.303.143,64**.

47) Cristina, gerente financiera de una empresa, solicita un préstamo por $ 15.000.000 al banco que le lleve la mayor parte de sus cuentas, y de acuerdo a los flujos de efectivo esperados, puede pagarlo dentro de 10 meses. Ella tiene como objetivo pagar como máximo una tasa de interés del 3,4% mensual. El gerente del banco que la atiende, acepta prestar el dinero a 5 meses de plazo y una tasa de interés del 2,9% mensual. A los cinco meses se renueva, por otros 5 meses, pero la tasa de interés puede cambiar. Cristina acepta la operación. ¿Qué tasa de interés mensual debe aplicarse en la segunda parte del préstamo, para lograr el objetivo de pagar el 3,4% mensual en cada uno de los 10 meses?. **R/. 3,9024% mensual**.

48) Una deuda de $ 2.000.000 que vence en 2 años y otra de 3.500.000 que vence en 4 años se van a pagar mediante un abono de $ 1.000.000 realizado en este momento y dos pagos iguales que se harán dentro de un año y dentro de tres años, respectivamente. Si el rendimiento del dinero es 8% trimestral, ¿De cuánto debe ser cada uno de los dos pagos? **R/. $ 973.511,13**.

49) Luis le debe a Pedro dos sumas de dinero: $ 1.000.000 más intereses al 1,5% mensual, que vence en 5 meses y $ 3.000.000 más intereses al 4% Bimestral con vencimiento a 8 meses, si se va a pagar ambas deudas mediante un solo pago al

final del mes 11, obtener la cantidad que debe pagarse si la tasa de interés de la operación es 2,083% mensual. **R/. $ 4.952.621,16**.

50) Víctor tiene la siguiente deuda con Andrés: $ 6.000.000 que debe pagar dentro de 6 meses $ 11.500.000 que debe pagar dentro de 10 meses. Andrés aceptó recibir un abono, el día de hoy, de $ 5.000.000 que Víctor tiene disponible. Sí Víctor desea liquidar su deuda mediante un segundo pago de $ 10.000.000, ¿En qué tiempo deberá realizarlo?. La tasa de interés acordada es del 1,125% bimensual?. **R/. 5,1445 periodos bimensuales o 10,2889 meses**.

51) Un capital de $ 5.306.122,45 estuvo invertido dos años a una tasa i anual simple; si esa tasa hubiese sido en forma compuesta hubiera producido $ 650.000 más de intereses. Cuál es la tasa. **R/. 35% anual**.

52) Al prestar $ 300.000 se deben pagar así: $ 200.000 en 2 meses y, 3 meses después $ 122.004. Hallar la tasa de interés con el cual se hizo el préstamo. **R/. 2,3% mensual**.

53) Una cuenta de ahorros se abrió con $ X y a los 18 meses se retiraron $ 2.450.000, año y medio más tarde el saldo era $ 8.246.662. Si la tasa de interés fue el 8,5% trimestral, con cuánto se inició la cuenta. **R/. $ 4.600.000**.

54) Al quedar debiendo el 70% del valor, de contado, de un artículo ofrecen los siguientes planes para cancelar: Plan A: En dos mes pagar $ 800.000; en 5 meses, $ 90.000 y en 7 meses, $ 60.000. Plan B: $ 250.000, dentro de 3 meses y 4, meses más tarde, $ 700.000, la tasa de interés es del 2,4 mensual, ¿Qué plan se escoge?. **R/. Escoger la opción B**.

55) Un capital de $ X estuvo invertido 5 años al 25% anual simple. Si la tasa hubiese sido en forma compuesta, habría producido $ 1.355.773 más de intereses; cuál es el capital. **R/. $ 1.691.000,67**.

56) Dos personas se asociaron para invertir en un negocio y en total aportaron $ 54.000.000. A los 5 años lo liquidaron y cada uno recibió $ 122.605.560 y $ 142.700.000 respectivamente. Se desea saber cuál es la rentabilidad anual, producida por el capital invertido y cuánto aportó cada uno. **R/. 37,49%, Socio 1: $ 24.955.000 y Socio 2: $ 29.045.000**.

CAPITULO No 4. TASAS DE INTERES Y EQUIVALENCIA ENTRE TASAS

OBJETIVOS

1) Distinguir y explicar las diferencias entre interés periódico, nominal y efectivo.
2) Comprender y explicar los conceptos de: período de capitalización, frecuencia de conversión, tasas equivalentes.
3) Plantear y resolver ejercicios sobre tasas equivalentes.
4) Plantear y resolver ejercicios de cálculo de valor futuro, valor presente, tasa de interés y período.
5) Comprender y definir el concepto de tasas combinadas.
6) Comprender y explicar las tasas de cambios
7) Plantear y resolver ejercicios relacionados con la devaluación, revaluación y la unidad de valor real (UVR)
8) Aplicar las ecuaciones de valor en el interés compuesto.

TEMARIO

4.1 Introducción
4.2 Tasa de interés periódica
4.3 Tasa de interés nominal
4.4 Tasa de interés efectivo
4.5 Tasa de interés anticipada
4.6 Tasas equivalentes
4.7 Tasa de interés continuo
4.8 Cálculo del valor futuro dado un valor presente
4.9 Cálculo del valor presente dado un valor futuro
4.10 Cálculo del tiempo (n)
4.11 Tasas combinadas o compuesta
4.11.1 Préstamo e inversión en moneda extranjera
4.11.1.1 Devaluación
4.11.1.2 Tasa de cambio
4.11.1.2.1 Tasa de cambio fija
4.11.1.2.2 Tasa de cambio variable (flotante)
4.11.1.3 Tasa de devaluación
4.11.1.4 Revaluación
4.11.1.4.1 Tasa de revaluación
4.11.2 Inflación
4.11.3 Unidad de valor real (UVR)
4.11.3.1 Metodología para el cálculo de la UVR
4.12 Aplicación de las ecuaciones de valor con interés compuesto

4.1 INTRODUCCION

Existen diferentes modalidades en el cobro de intereses, por ejemplo se cobran por período anticipado; es decir, intereses que se descuentan al inicio de cada período, y otros por período vencido, que son los que se cobran al final de cada periodo. Por lo anterior, es común escuchar expresiones como 20% nominal anual capitalizable trimestralmente, 7% trimestral, 7% trimestral anticipado, 24% nominal trimestre anticipado y 25% efectivo anual. Los intereses se clasifican en: Interés periódico (vencido y anticipado), interés nominal (vencido y anticipado) e interés efectivo.

4.2 TASA DE INTERES PERIODICA

La tasa de interés periódica se simboliza como **i**, y se aplica siempre al final de cada periodo. Es aquella tasa en la cual se indica dos elementos básicos: La tasa y el periodo de aplicación, mientras; no se indique lo contrario se maneja como vencida, lo cual indica que también habrá tasa de interés anticipada. Es una tasa que puede ser incluida en las fórmulas que se desarrollan en las matemáticas financieras. Ejemplos: 2% mensual, 4% bimestral, 6% trimestral, 18% semestral y 30% anual.

4.3 TASA DE INTERES NOMINAL

Es una tasa de interés de referencia y se denomina como **r**, por ser de referencia no mide el valor real de dinero, por lo tanto, no puede ser incluido en las fórmulas de las matemáticas financieras. Es una tasa de interés que necesita de tres elementos básicos: La tasa, el periodo de referencia y el periodo de composición. El periodo de referencia mientras no se diga lo contrario, siempre será el año, y se dice que está implícito y por tanto, no es necesario señalarlo. El periodo de composición puede recibir el nombre de: periodo de capitalización, periodo de liquidación o periodo de conversión. El interés nominal, también puede ser anticipado, pero en este caso el período de aplicación se señala de manera anticipada.

Como ejemplos de interés nominales vencidos se pueden señalar: 4% bimestral compuesto mensualmente, 18% semestral capitalizable trimestralmente, 28% anual liquidable cuatrimestralmente, 32% convertible mensualmente.

Se pueden mencionar como ejemplos de interés nominal anticipado los siguientes: 4% bimestral compuesto mensualmente anticipado, 18% semestral capitalizable trimestralmente anticipado, 28% anual liquidable cuatrimestralmente anticipado, 32% convertible mensualmente anticipado. En los ejemplos anteriores el período de aplicación de define o se señala de manera anticipada.

Se puede plantear la siguiente relación entre la tasa de interés periódica y la tasa de interés nominal:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} \times \mathbf{m} \quad \textbf{(4.1)} \quad ; \text{ por lo tanto: } \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{m}} \quad \textbf{(4.2)}$$

donde : **i** = tasa de interés periódico

r = tasa nominal

m= frecuencia de conversión= número de períodos o de subperíodos que se encuentran en el periodo de referencia, que generalmente es el año. Simplemente se podría definir como el número de capitalizaciones dentro del periodo de referencia.

Ejemplo 4.1

Defina el valor de **m** e **i** en las siguientes tasas de intereses nominales: a) 28% convertible bimensualmente, b) 4% bimestral compuesto mensualmente, c) 24% anual compuesto bimestralmente, d) 12% semestral compuesto trimestralmente, e) 32% anual compuesto cuatrimestralmente, f) 30% liquidable semestralmente, y g) 36 % anual compuesto anualmente.

Solución:

Para resolver este tipo de ejercicios, es necesario asociar el período de capitalización con el período de referencia, y por lo cual, es conveniente preguntar ¿Cuántos períodos de capitalización, composición, liquidación ó conversión hay en el período de referencia?

a) r = 28% convertible bimensualmente.

La pregunta sería: ¿Cuántos períodos bimensuales hay en un período anual?. La respuesta seria 24 períodos bimensuales hay en un año, por lo tanto, **m = 24**. Un período bimensual se refiere a dos veces en el mes.

$$i=\frac{r}{m}=\frac{0,28}{24}=1,17\%\ \text{bimensual}$$

b) r = 4% bimestral CM.

La pregunta sería: ¿ Cuántos períodos mensuales hay en un bimestre?. La respuesta seria 2 meses hay en un bimestre, por lo tanto, **m = 2.**

$$i=\frac{r}{m}=\frac{0,04}{2}=2\%\ \text{mensual}$$

c) 24% anual Compuesto bimestralmente.

La pregunta sería: ¿ Cuántos períodos bimestrales hay en un período anual?. La respuesta seria 6 períodos bimestrales hay en un bimestre, por lo tanto, **m = 6.** Un periodo bimestral corresponde a un período de 2 meses.

$$i=\frac{r}{m}=\frac{0,24}{6}=4\%\ \text{bimestral}$$

d) r = 12% semestral CT.

La pregunta sería: ¿Cuántos períodos trimestrales hay en un período semestral?. La respuesta seria 2 trimestres hay en un semestre, por lo tanto, **m = 2**

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,12}{2} = 6\% \text{ trimestral}$$

e) r = 32% Compuesto cuatrimestralmente

La pregunta sería : ¿Cuántos periodos cuatrimestrales hay en un período anual?. La respuesta seria 3 cuatrimestres hay en un año, por lo tanto, **m = 3**. Un período cuatrimestral corresponde a un período de cuatro meses.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,32}{3} = 10,67\% \text{ cuatrimestral}$$

f) r = 30% liquidable semestralmente.

La pregunta sería: ¿Cuántos períodos semestrales hay en un período anual?. La respuesta seria 2 semestres hay en un año, por lo tanto, **m = 2**.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,30}{2} = 15\% \text{ semestral}$$

g) r = 36% Anual Compuesto anualmente.

La pregunta sería: ¿Cuántos períodos anuales hay en un año?. La respuesta seria 1 año hay en un año, por lo tanto, **m = 1**.

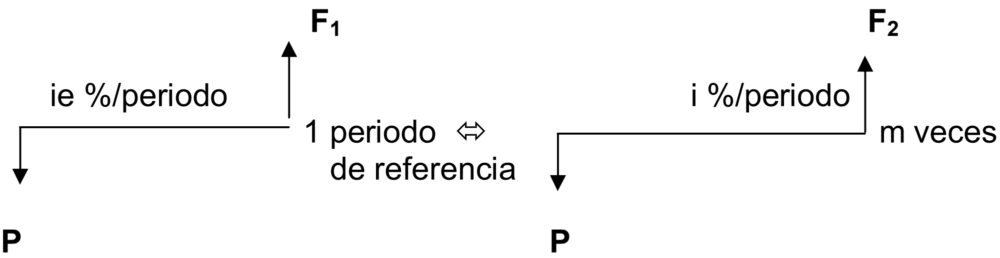
$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,36}{1} = 36\% \text{ Anual}$$

En el anterior cálculo se puede apreciar que el interés nominal es igual al interés periódico o efectivo, por lo cual se puede concluir, que solamente cuando el periodo de pago es igual al período de capitalización, el interés nominal será igual al interés efectivo.

4.4 TASA DE INTERES EFECTIVO

Se denomina por $\mathbf{i_e}$. Es un interés periódico especial, debido a que un interés para un período especifico, es el interés efectivo para ese período, por ejemplo: el interés del 3% mensual, es el interés periódico para el mes y al mismo tiempo, es su interés efectivo. Lo que indica que para denotar el interés efectivo, sólo se necesita indicar la tasa y el periodo de aplicación. El interés efectivo, mide el costo o la rentabilidad real del dinero.

La tasa de interés efectivo, se puede definir también, como la tasa de interés que en términos anuales (en un tiempo más extenso), que es equivalente a una tasa de interés periódico (en un tiempo menos extenso). La tasa de intereses efectivo, es aquella que al aplicarla una vez sobre un periodo de referencia, genera el mismo ingreso total (valor futuro), que cuando se aplica una tasa de interés periódico m veces sobre el mismo periodo de referencia.



Teniendo en cuenta que: $F=(1+i)^{n}$, por lo tanto, $F_1=P(1+i_e)$ y $F_2=P(1+i)^{m}$, por definición $F_1=F_2$; por lo cual se tiene: $P(1+i_e)=P(1+i)^{m}$, entonces: $(1+i_e)=(1+i)^{m}$; obteniendo que: $\mathbf{i_e=(1+i)^{m}-1}$ **(4.3)**

De la anterior expresión se desprende que: $\mathbf{i=(1+ie)^{1/m}-1}$ **(4.4)**

Teniendo en cuenta que $i=\frac{r}{m}$; se obtendrá: $\mathbf{i_e=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1}$ **(4.5)**, de la cual se puede deducir que: $\mathbf{r=\left[(1+i_e)^{1/m}-1\right]\times m}$ **(4.6)**

Ejemplo 4.2

¿Cuál es la tasa efectiva que una persona por un préstamo bancario que se pactó al 20% de interés anual convertible bimestralmente?

Solución:

Aplicando en forma directa la fórmula: $i_e=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1$; se tiene,

$$i_e=\left(1+\frac{0.20}{6}\right)^{6}-1=(1{,}033333)^{6}-1=21{,}74\%\ \text{anual}$$

Ejemplo 4.3

Determinar la tasa nominal convertible trimestralmente, que produce una rentabilidad de 35% EA.

Solución:

Aplicando en forma directa la fórmula: $r = \left[(1+ie)^{1/m} - 1\right] \times m$, se tiene:

$$r = \left[(1+0{,}35)^{1/4} - 1\right] \times 4 = \left[(1{,}0779)^{1/4} - 1\right] \times 4 = 31{,}16\%NT$$

Ejemplo 4.4

¿A qué tasa nominal liquidable mensualmente, una obligación financiera de $ 50.000 aumentará a $ 120.000 en tres años?.

Solución:

Aplicando la fórmula: $F = P(1+i)^n$, se tendrá que: $120.000 = 50.000(1+i)^{36}$, de la igualdad se obtiene: $\frac{120.000}{50.000} = (1+i)^{36}$; donde $2{,}4 = (1+i)^{36}$; aplicando una propiedad de radicación se tendrá: $(2{,}4)^{1/36} = (1+i)^{36/36}$; por consiguiente: $1{,}02461 = 1+i$, entonces:

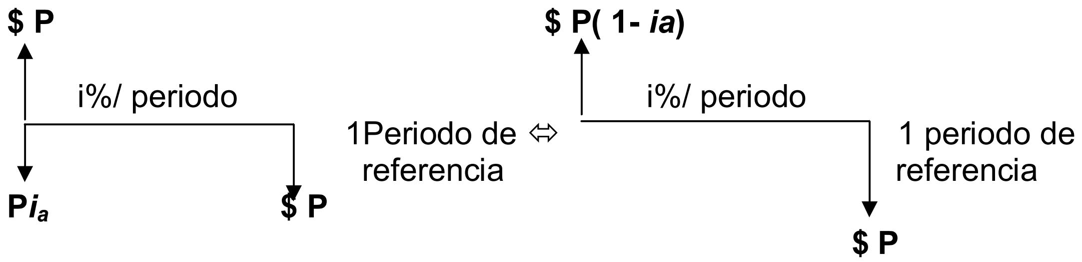
$$i = 1{,}02461 - 1 = 0{,}02461 = 2{,}416\% \text{ mensual}$$

Si $r = i \times m$, entonces, $r = 0{,}02416 \times 12 = 0{,}2954\,NM = 29{,}54\%\ NM$

4.5 TASA DE INTERES ANTICIPADA

El interés anticipado es el que se cobra al inicio del periodo y se denomina por i_a, y se expresa mediante la tasa y el periodo de aplicación, éste será de carácter anticipado. El interés anticipado, es el más caro, debido a que se cobra de manera inmediata, perdiéndose un costo de oportunidad, por no disponer de todo el dinero que se recibe en préstamo. Ejemplo: 2% mensual anticipado, 4,2% bimestre anticipado, 7% trimestre anticipado, 18% semestre anticipado, 28 anual anticipado.

Si una persona obtiene un préstamo de **$ P** hoy, de manera anticipada pagaría de interese **$ P**i_a, por lo cual, le entregarían **$ P - $P**$i_a$, equivalente a **$ P (1 –** i_a**)** y al final pagará a la institución financiera **$ P**, para un periodo se tendría:



Se sabe que $F = P(1 + i)^n$, entonces $P = P(1- ia)(1 + i)$, por consiguiente $1 = (1 – ia)(1 + i)$, por lo cual **i** se podría expresar en función de ***ia*** o viceversa.

$$(1+ i) = \frac{1}{1-ia} \quad \text{donde} \quad i = \frac{1}{1-ia} - 1 \quad \textbf{(4.7)}$$

$$(1 - i_a) = \frac{1}{1+i} \quad \text{donde} \quad i_a = 1 - \frac{1}{1+i} \quad \text{por lo cual} \quad i_a = \frac{i}{1+i} \quad \textbf{(4.8)}$$

Anteriormente, se manifestó que también existe el interés nominal anticipado, el cual se representara por r_a, a éste interés se le definen tres elementos básicos: la tasa, el periodo de referencia, y el periodo de composición, el cual debe ser anticipado. El periodo de referencia generalmente es el año. Por similitud con las tasas de interés vencidos se tendrá:

$$r_a = i_a * m \ \textbf{(4.9)} \quad , \quad \text{donde} \quad i_a = \frac{r_a}{m} \ \textbf{(4.10)}$$

En la anterior fórmula se tiene : r_a = interés nominal anticipado
i_a = interés periódico anticipado
m = frecuencia de conversión = Numero de periodos o de subperiodos en el periodo de referencia, que generalmente es el año.

Se puede apreciar que el concepto de **m**, no varía si el interés nominal es vencido o anticipado

Como ejemplos de interés nominales anticipados se pueden señalar: 4% bimestral compuesto mes anticipado, 18% semestral capitalizable trimestre anticipado, 28% anual liquidable cuatrimestre anticipado, 32% convertible mes anticipado.

Ejemplo 4.5

Defina el valor de **m e i_a** en las siguientes tasas de intereses nominales anticipados: a) 28% convertible bimensual anticipado, b) 4% bimestral mes anticipado, c) 24% anual compuesto bimestral anticipado, d) 12% semestral trimestre anticipado, e) 32% anual cuatrimestre anticipado, f) 30% anual semestre anticipado, y g) 36% anual compuesto anual anticipado.

Solución:

Para resolver este tipo de ejercicios, es necesario asociar el periodo de capitalización con el periodo de referencia, y por lo cual, es conveniente preguntar ¿Cuántos periodos de capitalización, composición o conversión hay en el periodo de referencia?

a) r = 28% anual bimensual anticipado.

La pregunta sería: ¿Cuántos periodos bimensuales hay en un periodo anual?. La respuesta seria 24 periodos bimensuales hay en un año, por lo tanto, **m = 24**. Un periodo bimensual se refiere a dos veces en el mes.

$$i_a = \frac{r_a}{m} = \frac{0.28}{24} = 1{,}17\% \text{ Bimensual Anticipado}$$

b) r = 4% bimestral MA.

La pregunta sería: ¿ Cuántos periodos mensuales hay en un periodo bimestral?. La respuesta seria 2 meses hay en un bimestre, por lo tanto, **m = 2.**

$$i_a = \frac{r_a}{m} = \frac{0{,}04}{2} = 2\% \text{ mensual anticipado}$$

c) r = 24% anual bimestre anticipado.

La pregunta sería: ¿Cuántos periodos bimestrales hay en un periodo anual?. La respuesta seria 6 bimestres hay en un año, por lo tanto, **m = 6**. Un periodo bimestral corresponde a un periodo de 2 meses.

$$i_a = \frac{r_a}{m} = \frac{0{,}24}{6} = 4\% \text{ bimestre anticipado}$$

d) r = 12% semestral TA.

La pregunta sería: ¿Cuántos periodos trimestrales hay en un periodo semestral?. La respuesta seria 2 trimestres hay en un semestre, por lo tanto, **m = 2.**

$$i_a = \frac{r_a}{m} = \frac{0{,}12}{2} = 6\% \text{ trimestre anticipado}$$

e) r = 32% anual Cuatrimestre anticipado.

La pregunta sería: ¿Cuántos periodos cuatrimestrales hay en un periodo anual?. La respuesta seria 3 cuatrimestres hay en un año, por lo tanto, **m = 3**. Un periodo cuatrimestral corresponde a un periodo de cuatro meses.

$$i_a = \frac{r_a}{m} = \frac{0{,}32}{3} = 10{,}67\% \text{ Cuatrimestre anticipado}$$

f) r = 30% Anual Compuesto semestral anticipado.

La pregunta sería: ¿Cuántos períodos semestrales hay en un período anual?. La respuesta seria 2 semestres hay en un año, por lo tanto, **m = 2**.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}30}{2} = 15\% \text{ Semestral Anticipado}$$

g) r = 36% Anual Compuesto anual anticipado.

La pregunta sería: ¿Cuántos períodos anuales hay en un año?. La respuesta seria 1 año hay en un año, por lo tanto, **m = 1**.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}36}{1} = 36\% \text{ Anual Anticipado}$$

Cuando se trabaja con intereses anticipados, también es necesario encontrar el interés efectivo, por tanto, si se sabe que:

$i_e = (1+i)^m - 1$; y teniendo en cuenta que: $i = \frac{i_a}{1-i_a}$, entonces: $i_e = \left(1+\frac{i_a}{1-i_a}\right)^m - 1$, y $i_e = \left(1+\frac{\frac{r_a}{m}}{1-\frac{r_a}{m}}\right)^m - 1$; por consiguiente: $i_e = \left(\frac{1}{1-\frac{r_a}{m}}\right)^m - 1$; por lo cual,

$i_e = \left(\frac{1}{\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^m}\right) - 1$, Donde se obtiene; $\mathbf{i_e = \left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} - 1}$ **(4.11)** ó

$\mathbf{i_e = (1-i_a)^{-m} - 1}$ **(4.12)**

De la misma manera se puede plantear que $\mathbf{r_a = (1+i_e)^{-1/m} - 1}$ **(4.13)** y $\mathbf{i_a = (1+i_e)^{-1/m} - 1}$ **(4.14)**

4.6 TASAS EQUIVALENTES

Dos tasas son equivalentes cuando operando de manera diferente arrojan el mismo resultado. Una tasa puede operar en forma vencida y otra en forma anticipada, o una puede capitalizar en forma mensual y la otra semestral, o una en forma trimestral y la otra en forma anual, etc.

Los escenarios que se presentan desde lo vencido, cuando se da una tasa y se pretende hallar otra tasa equivalente son los siguientes:

	Escenario para ha	Escenario dad
(1)	*Nominal*	*Nominal*
(2)	*Nominal*	*Efectivo*
(3)	*Efectivo*	*Efectivo*
(4)	*Efectivo*	*Nominal*

A partir de cada uno de los escenarios señalados anteriormente, se podrían generar igualdades que permitirán de una manera fácil y sencilla, encontrar las equivalencias entre diferentes tasas de interés; por ejemplo, desde el punto de vista de interés vencido se pueden señalar las siguientes igualdades:

(1) $$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{r}{t}\right)^{t} \quad \textbf{(4.15)}$$

(2) $$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}=(1+ie)^{t} \quad \textbf{(4.16)}$$

(3) $$(1+ie)^{m}=(1+ie)^{t} \quad \textbf{(4.17)}$$

(4) $$(1+ie)^{m}=\left(1+\frac{r}{t}\right)^{t} \quad \textbf{(4.18)}$$

En la igualdad No 1, hay que tener en cuenta que: las $\mathbf{r}$ son tasas nominales vencidas y capitalizan **m** y **t** veces/año, por lo tanto, $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{m}}$ y $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{t}}$ son tasas efectivas para cada período **m** y **t**, además, en las igualdades planteadas **m** y **t**, mientras no se manifieste lo contrario se referencian al año.

Para los intereses anticipados también se pueden plantear igualdades, que faciliten el proceso de equivalencias entre tasas de interés, teniendo en cuenta los siguientes escenarios:

	Escenario para hallar	Escenario dado
(5)	*Nominal anticipado*	*Nominal anticipado*
(6)	*Nominal anticipado*	*Interés periódico anticipado*
(7)	*Interés periódico anticipado*	*Interés periódico anticipado*
(8)	*Interés periódico anticipado*	*Nominal anticipado*

(5) $$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m}=\left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t} \quad \textbf{(4.19)}$$

(6) $$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m}=\left(1-i_a\right)^{-t} \quad \textbf{(4.20)}$$

(7) $$\left(1-i_a\right)^{-m}=\left(1-i_a\right)^{-t} \quad \textbf{(4.21)}$$

(8) $$\left(1-ia\right)^{-m}=\left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t} \quad \textbf{(4.22)}$$

Teniendo en cuenta que existe la posibilidad de buscar equivalencias entres tasas de interés de carácter vencido y anticipado, se podrían plantear combinaciones entre las igualdades que se han presentado anteriormente y se pueden destacar las que se enumeran a continuación, según los siguientes escenarios:

	Escenario para hallar	Escenario dado
(9)	*Nominal vencido*	*Nominal anticipado*
(10	*Nominal vencido*	*Interés periódico anticipado*
(11	*Efectivo*	*Interés periódico anticipado*
(12	*Interés periódico anticipado*	*Efectivo*
(13	*Nominal anticipado*	*Nominal vencido*
(14	*Nominal anticipado*	*Efectivo*
(15	*Efectivo*	*Nominal anticipado*
(16	*Interés periódico anticipado*	*Nominal vencido*

(9) $$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t} \quad \textbf{(4.23)}$$

(10) $$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}=\left(1-i_a\right)^{-t} \quad \textbf{(4.24)}$$

(11) $$\left(1+i_e\right)^{m}=\left(1-i_a\right)^{-t} \quad \textbf{(4.25)}$$

(12) $$\left(1-i_a\right)^{-m}=\left(1+i_e\right)^{t} \quad \textbf{(4.26)}$$

(13) $\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^{t}$ **(4.27)**

(14) $\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = \left(1+i_e\right)^{t}$ **(4.28)**

(15) $\left(1+i_e\right)^{m} = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$ **(4.29)**

(16) $\left(1-i_a\right)^{-m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^{t}$ **(4.30)**

A continuación se presentarán ejercicios donde se aplican las igualdades señaladas anteriormente:

Ejemplo 4.6 Escenario Nominal – Nominal

Hallar una tasa nominal bimestral, equivalente a una tasa del 36% CT.

Solución:

$r = ?\ \text{Nbimestral}$, por consiguiente **m= 6,** en un año hay seis (6) bimestres.
$r = 36\%\ \text{CT}$, en este caso **t = 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres**.**

$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^{t}$; $\left(1+\frac{r}{6}\right)^{6} = \left(1+\frac{0,36}{4}\right)^{4}$, para encontrar la tasa nominal pedida $(\mathbf{r})$, el exponente que afecta la variable debe ser uno, y por tanto; se procede de la siguiente manera: $\left(1+\frac{r}{6}\right)^{6/6} = \left(1+0,09\right)^{4/6}$, de donde se obtiene: $\left(1+\frac{r}{6}\right) = \left(1,09\right)^{4/6}$, por lo tanto:

$r = \left[\left(1,09\right)^{4/6} - 1\right] \times 6$, por lo que: $r = 0,3548\ \text{NBimestral} = 35,48\%\ \text{Nbimestral}$

Ejemplo 4.7 Escenario Efectivo - Nominal

Hallar una tasa compuesta trimestralmente, equivalente al 2,5% mensual.
Solución:

$r = ?\ \text{CT}$, por consiguiente **m= 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres.

$i = i_e = 2{,}5\%EM$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) semestres.

$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = (1+i_e)^{t}$; $\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4} = (1+0{,}025)^{12}$, para encontrar la tasa nominal pedida (r), el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede, de la siguiente manera: $\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4/4} = (1+0{,}025)^{12/4}$,

de donde se obtiene: $\left(1+\frac{r}{4}\right) = (1{,}025)^{3}$, por lo tanto: $r = \left[(1{,}025)^{3} - 1\right] \times 4$, por lo que:

$$r = 0{,}3075\ CT = 30{,}75\%\ CT$$

Ejemplo 4.8 Escenario Efectivo – Efectivo

Hallar una tasa bimensual, equivalente a una tasa del 18% semestral

Solución:

$i = ie = ?\ \text{bimensual}$, por consiguiente **m= 24,** en un año hay veinticuatro (24) períodos bimensuales.

$i = i_e = 18\%\ S$, en este caso **t = 2,** en un año hay dos (2) semestres.

$(1+i_e)^{m} = (1+i_e)^{t}$; $(1+i_e)^{24} = (1+0{,}18)^{2}$, para encontrar la tasa efectiva pedida (i_e), el exponente que afecta esta variable se debe volver uno, por lo tanto, se procede, de la siguiente manera: $(1+i_e)^{24/24} = (1+0{,}18)^{2/24}$, de donde se obtiene: $(1+i_e) = (1{,}18)^{1/12}$, por lo tanto: $i = (1{,}18)^{1/12} - 1$, por lo que:

$$i = 0{,}01389\ \text{Bimensual} = 1{,}389\,\%\ \text{Bimensual}$$

Ejemplo 4.9 Escenario Nominal -Efectivo

Hallar una tasa cuatrimestral, equivalente a una tasa del 32 % CM

Solución:

$i = ie = ?\ \text{cuatrimestral}$, por consiguiente **m= 3 ,** en un año hay tres (3) períodos cuatrimestrales.
$r = 32\%\ CM$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) meses.

$(1+i_e)^m = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t$; $(1+i_e)^3 = \left(1+\frac{0,32}{12}\right)^{12}$, para encontrar la tasa efectiva pedida $(\mathbf{i_e})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $(1+i_e)^{3/3} = \left(1+\frac{0,32}{12}\right)^{12/3}$, de donde se obtiene:

$(1+i_e) = (1,0.32)^4$, por lo tanto: $i = \left(1+\frac{0,32}{12}\right)^4 - 1$, por lo que:

$$i = 0,1110\ \text{cuatrimestral} = 11,10\%\ \text{cuatrimestral}$$

Desde el punto de vista de intereses anticipados se presentan los siguientes ejercicios, con el objeto de aplicar las igualdades de la 5ª a la 8ª.

Ejemplo 4.10 Escenario Nominal Anticipado – Nominal Anticipado

Hallar una tasa nominal bimestral anticipada, equivalente a una tasa del 36% compuesta trimestre anticipada.

Solución:

$r_a = ?\ \text{NbimestralAnticipada}$, por consiguiente **m= 6,** en un año hay seis (6) bimestres.
$r_a = 36\%\ CTA$, en este caso **t = 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres**.**

$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$; $\left(1-\frac{r_a}{6}\right)^{-6} = \left(1-\frac{0,36}{4}\right)^{-4}$, para encontrar la tasa nominal anticipada pedida $(\mathbf{r_a})$, exponente de esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $\left(1-\frac{r_a}{6}\right)^{-6/-6} = (1-0,09)^{-4/-6}$, de donde se obtiene: $\left(1-\frac{r_a}{6}\right)=(0,91)^{4/6}$, por lo tanto: $r_a=\left[1-(0,91)^{4/6}\right]\times 6$, por lo que: $r_a=0,3656\ \text{NBimestralAnticipado}$; ó

$$r_a=36,56\%\ \text{NbimestralAnticipado}$$

Ejemplo 4.11 Escenario Periódico Anticipado – Nominal Anticipado

Hallar una tasa compuesta trimestre anticipado, equivalente al 2,5% mensual anticipada.

Solución:

$r_a=?\ CTA$, por consiguiente **m= 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres.
$i_a=2,5\%MA$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) semestres.

$\left(1\text{-}\frac{r_a}{m}\right)^{-m}=(1-i_a)^{-t}$; $\left(1-\frac{r_a}{4}\right)^{-4}=(1-0,025)^{-12}$, para encontrar la tasa nominal pedida (r_a), el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $\left(1\text{-}\frac{r_a}{4}\right)^{-4/-4}=(1-0,025)^{-12/-4}$, de donde se obtiene: $\left(1\text{-}\frac{r_a}{4}\right)=(0,975)^{3}$, por lo tanto:

$$r_a=\left[1-(0,975)^{3}\right]\times 4 \text{ , por lo que: } r_a=0,2926\ CTA=29,26\%\ ACTA$$

Ejemplo 4.12 Escenario Periódico Anticipado – Periódico Anticipado

Hallar una tasa bimensual anticipada equivalente a una tasa del 18% semestral anticipada.

Solución:

$i_a=?\ \text{bimensualAnticipada}$, por consiguiente **m= 24,** en un año hay veinticuatro (24) períodos bimensuales.

$i_a=18\%SA$, en este caso **t = 2,** en un año hay dos (2) semestres.

$(1-i_a)^{-m} = (1-i_a)^{-t}$; $(1-i_a)^{-24} = (1-0,18)^{-2}$, para encontrar la tasa periódica semestral anticipada pedida $(\mathbf{i_a})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $(1\text{-}i_a)^{-24/-24} = (1\text{-}0,18)^{-2/-24}$, de donde se obtiene: $(1\text{-}i_a) = (0,82)^{1/12}$, por lo tanto: $\mathbf{i_a = 1 - (0,82)^{1/12}}$, por lo que: $i_a = 0,0164\ \text{Bimensual Anticipado}$ ó se puede expresar así:

$$i_a = 1,64\%\ \text{Bimensual Anticipado}$$

Ejemplo 4.13 Escenario Nominal Anticipado – Interés periódico anticipado

Hallar una tasa cuatrimestral anticipada, equivalente a una tasa del 32 % CMA

Solución:

$i_a = ?\ \text{cuatrimestral Anticipado}$, por consiguiente **m= 3 ,** en un año hay tres (3) períodos cuatrimestrales.

$r_a = 32\%\ \text{CMA}$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) meses.

$(1-i_a)^{-m} = \left(1\text{-}\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$; $(1\text{-}i_a)^{-3} = \left(1\text{-}\frac{0,32}{12}\right)^{-12}$, para encontrar la tasa periódica cuatrimestral anticipada pedida $(\mathbf{i_a})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $(1-i_a)^{-3/-3} = \left(1-\frac{0,32}{12}\right)^{-12/-3}$, de donde se obtiene: $(1-i_a) = (0,9733)^4$, por lo tanto: $\mathbf{i_a = 1 - (0,9733)^4}$, por lo que: $i_a = 0,1025\ \text{Cuatrimestral Anticipado}$, se puede expresar de la siguiente manera:

$$i_a = 10,25\%\ \text{Cuatrimestral Anticipado}$$

Si se presenta combinaciones entre intereses vencidos con intereses anticipados, se presentan ejercicios para aplicar las igualdades 9ª a la 16ª.

Ejemplo 4.14 Escenario: Nominal Anticipado - Nominal Vencido

Hallar una tasa nominal bimestral, equivalente a una tasa del 36% compuesta trimestre anticipada.

Solución:

$r = ?\ \text{Nbimestral}$, por consiguiente **m= 6,** en un año hay seis (6) bimestres.
$r_a = 36\%\ \text{CTA}$, en este caso **t = 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres**.**

$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$; $\left(1+\frac{r}{6}\right)^{6} = \left(1-\frac{0{,}36}{4}\right)^{-4}$, para encontrar la tasa nominal pedida $(\mathbf{r})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $\left(1+\frac{r}{6}\right)^{6/6} = (1-0{,}09)^{4/-6}$, de donde se obtiene: $\left(1+\frac{r}{6}\right) = (0{,}91)^{4/-6}$, por lo tanto: $r = \left[\ (0{,}91)^{4/-6} - 1\right] \times 6$, por lo que:

$$r = 0{,}3893\ \text{NBimestral} \qquad \text{ó} \qquad r = 38{,}93\%\ \text{Nbimestral}$$

Ejemplo 4.15 Escenario: Periódico anticipado - Nominal Vencido

Hallar una tasa compuesta trimestralmente, equivalente al 2,5% mensual anticipada.

Solución:

$r = ?\ \text{CT}$, por consiguiente **m= 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres.
$i_a = 2{,}5\%\ \text{MA}$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) semestres.

$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = (1-i_a)^{-t}$; $\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4} = (1-0{,}025)^{-12}$, para encontrar la tasa nominal pedida $(\mathbf{r})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de siguiente manera: $\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4/4} = (1-0{,}025)^{-12/4}$, de donde se obtiene: $\left(1+\frac{r}{4}\right) = (0{,}975)^{-3}$, por lo tanto: $r = \left[\ (0{,}975)^{-3} - 1\right] \times 4$, por lo que:

$$r = 0{,}3156\ \text{CT} = 31{,}56\%\ \text{CT}$$

Ejemplo 4.16 Escenario: Periódico Anticipado - Efectivo

Hallar una tasa bimensual, equivalente a una tasa del 18% semestral anticipada.

Solución:

$i = i_e = ?\ \text{bimensual}$, por consiguiente **m= 24,** en un año hay veinticuatro (24) períodos bimensuales.

$i_a = 18\%\ SA$, en este caso **t = 2,** en un año hay dos (2) semestres.

$(1+i_e)^m = (1-i_a)^{-t}$; $(1+i_e)^{24} = (1-0,18)^{-2}$, para encontrar la tasa efectiva bimensual pedida $(\mathbf{i_e})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $(1+i_e)^{24/24} = (1-0,18)^{-2/24}$, de donde se obtiene: $(1+i_e) = (0,82)^{-1/12}$, por lo tanto: $i_e = (0,82)^{-1/12} - 1$, por lo que: $i_e = 0,0166\ \text{Bimensual}$ ó se puede expresar así:

$$i_e = 1,66\%\ \text{Bimensual}$$

Ejemplo 4.17 Escenario: Efectivo - Periódico Anticipado

Hallar una tasa trimestral anticipada, equivalente a una tasa del 15% semestral.

Solución:

$i_a = ?\ \text{TrimestralAnticipada}$, por consiguiente **m= 4,** en un año hay cuatro (4) períodos trimestrales.

$i_a = 15\%\ S$, en este caso **t = 2,** en un año hay dos (2) semestres.

$(1-i_a)^{-m} = (1+i_e)^t$; $(1-i_a)^{-4} = (1+0,15)^2$, para encontrar la tasa efectiva trimestral anticipada $(\mathbf{i_a})$, el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $(1-i_a)^{-4/-4} = (1+0,15)^{2/-4}$, de donde se obtiene: $(1-i_a) = (1,15)^{-1/2}$, por lo tanto: $\mathbf{i_a} = 1-(1,15)^{-1/2}$, por lo que: $i_a = 0,0675\ \text{TrimestralAnticipada}$ ó se puede expresar así:

$$i_a = 6,75\%\ \text{TrimestralAnticipada}$$

Ejemplo 4.18 Escenario Nominal Vencido – Nominal Anticipado

Hallar una tasa nominal bimestral anticipada, equivalente a una tasa del 30% nominal trimestral.

Solución:

$r_a = ?\ \text{NbimestralAnticipada}$, por consiguiente **m= 6,** en un año hay seis (6) bimestres.

$r = 30\%\ \text{CT}$, en este caso **t = 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres.

$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^{t}$; $\left(1-\frac{r_a}{6}\right)^{-6} = \left(1+\frac{0{,}30}{4}\right)^{-4}$, para encontrar la tasa nominal anticipada pedida (r_a), exponente de esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $\left(1-\frac{r_a}{6}\right)^{-6/-6} = (1-0{,}075)^{-4/-6}$, de donde se obtiene: $\left(1-\frac{r_a}{6}\right) = (0{,}925)^{4/6}$, por lo tanto: $r_a = \left[1-(0{,}925)^{4/6}\right]\times 6$, por lo que:

$r_a = 0{,}3039\ \text{NBimestralAnticipado}$; ó

$$r_a = 30{,}39\%\ \text{NbimestralAnticipado}$$

Ejemplo 4.19 Escenario: Efectivo - Nominal Anticipado

Hallar una tasa nominal cuatrimestral anticipada, equivalente a una tasa del 36 % anual

Solución:

$r_a = ?\ \text{A cuatrimestral Anticipada}$, por consiguiente **m= 3 ,** en un año hay tres (3) períodos cuatrimestrales.

$i_e = 36\%\ \text{Anual}$, en este caso **t = 1**

$\left(1-\frac{r_a}{3}\right)^{-m} = (1+i_e)^{-t}$; $\left(1-\frac{r_a}{3}\right)^{-3} = (1+0{,}36)^{-1/3}$, para encontrar la tasa nominal anticipada (r_a), el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede, de la siguiente manera: $\left(1-\frac{r_a}{3}\right)^{-3/3}=(1+0{,}36)^{-1/3}$, de donde se obtiene:

$\left(1-\frac{r_a}{3}\right)=(1{,}36)^{-1/3}$, por lo tanto: $r_a=\left[1-(1{,}36)^{-1/3}\right]\times 3$, por lo que:

$r_a=0{,}2923\ \text{Cuatrimestral Anticipada}$, se puede expresar si:

$$r_a=29{,}23\%\ \text{Cuatrimestral Anticipada}$$

Ejemplo 4.20 Escenario: Nominal Anticipado - Efectivo

Hallar una tasa cuatrimestral, equivalente a una tasa del 32 % CMA

Solución:

$i_e=?\ \text{cuatrimestral}$, por consiguiente **m= 3 ,** en un año hay tres (3) períodos cuatrimestrales.

$r_a=32\%\ \text{CMA}$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) meses.

$(1+i_e)^m=\left(1\text{-}\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$; $(1+i_e)^3=\left(1\text{-}\frac{0{,}32}{12}\right)^{-12}$, para encontrar la tasa efectiva pedida (i_e), el exponente que afecta esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede, de la siguiente manera: $(1+i_e)^{3/3}=\left(1-\frac{0{,}32}{12}\right)^{-12/3}$, de donde se obtiene:

$(1+i_e)=(0{,}9733)^{-4}$, por lo tanto: $i_e=(0{,}9733)^{-4}-1$, por lo que:

$i_e=0{,}1143\ \text{Cuatrimestral}$, se puede expresar si: $i_e=11{,}43\%\ \text{Cuatrimestral}$

Ejemplo 4.21 Escenario Nominal Vencido – Interés periódico anticipado

Hallar una tasa bimestral anticipada, equivalente a una tasa del 32% anual compuesta trimestralmente.

Solución:

$i_a=?\ \text{bimestral Anticipada}$, por consiguiente **m= 6,** en un año hay seis (6) bimestres.

$r_a=32\%\ \text{CT}$, en este caso **t = 4,** en un año hay cuatro (4) trimestres.

$(1-i_a)^{-m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^{t}$; $(1-i_a)^{-6} = \left(1+\frac{0,32}{4}\right)^{-4}$, para encontrar la tasa periódica anticipada $(\mathbf{i}_a)$, exponente de esta variable debe ser uno, por lo tanto; se procede de la siguiente manera: $(1-i_a)^{-6/-6} = (1+0,08)^{-4/-6}$, de donde se obtiene: $(1-i_a) = (1,08)^{4/6}$, por lo tanto: $i_a = \left[1-(1,08)^{4/6}\right]$, por lo que:

$$i_a = 0,526 \text{ Bimestral Anticipado} \;;\; \text{ó} \quad i_a = 5,26\% \text{ bimestral Anticipado}$$

4.7 TASA DE INTERES CONTINUO

Es importante tener en cuenta que cuando la tasa de interés nominal permanece constante, pero la capitalización es más frecuente, el monto o valor futuro también crece; pero no puede pensarse que el monto o valor futuro al final de un cierto tiempo crece sin límite, cuando el número de periodos de capitalización tiende a infinito, en la siguiente tabla, se puede ver que el monto o valor futuro no tiende a infinito cuando la frecuencia con la que el interés se capitaliza crece sin límite, sino que se acerca paulatinamente a un valor determinado, es decir, a un límite.

Valor futuro para un capital de $ 1000 al 32% de interés anual por un			
Frecuencia capitalización	*Periodo por año*	*Tasa de interés por periodo*	*Valor futuro en un año*
Anual	*1*	*32,000%*	*1.320,00000*
Semestral	*2*	*16,000%*	*1.345,60000*
Cuatrimestral	*3*	*10,667%*	*1.355,34696*
Trimestral	*4*	*8,0000%*	*1.360,48896*
Mensual	*12*	*2,6667%*	*1.371,36652*
Quincenal	*24*	*1,3333%*	*1.374,21882*
Semanal	*52*	*0,6154%*	*1.375,77802*
Diaria	*365*	*0,0877%*	*1.376,93472*
Por hora	*8760*	*0,0037%*	*1.377,11972*
Por minuto	*525600*	*0,00006088%*	*1.377,12763*

Una tasa de interés continuo r%, se define como aquella cuyo período de capitalización es lo más pequeño posible, es decir, se aplica en intervalos de tiempo infinitesimales. En el interés continuo la tasa se presenta siempre en forma nominal.

La tasa de interés efectivo a partir de un interés continuo r%, se determina así: $i_e = \ell^{r} - 1$, a continuación se presentan fórmulas que permitirán calcular el valor futuro y el valor presente para obliga operaciones financieras realizadas bajo interés continuo.

4.8 CALCULO DEL VALOR FUTURO DADO UN VALOR PRESENTE

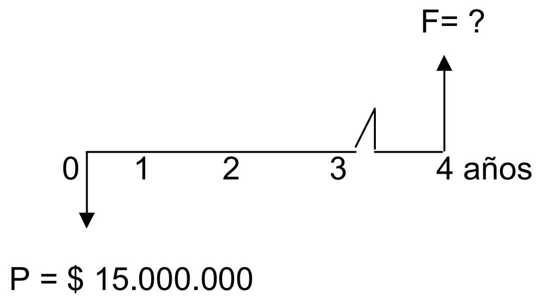
Teniendo en cuenta que: $F = P(1+i)^n$, se puede plantear que el valor futuro a partir de un interés continuo se puede expresar de la siguiente manera: $F = P\left[1+\left(\ell^r - 1\right)\right]^n$, por lo que: $\mathbf{F = P\ell^{rn}}$ **(4.27)**

El valor de aproximado de ℓ equivale a 2,718281828459.

Ejemplo 4.22

Se invierten $ 15.000.000 a una tasa de interés del 30%. Calcule el monto compuesto después de 4 años si el monto se capitaliza continuamente.

Solución:



$F = P\ell^{rn} = 15.000.000 \times \ell^{(0,30 \times 4)}$, por lo tanto: $F = 15.000.000 \times \ell^{1,2}$; de donde: $\text{Ln}\,F = \text{Ln } 15.000.000 + 1,2\,\text{Ln}\,\ell$; Como $\text{Ln}\,\ell$ es igual a 1, entonces:

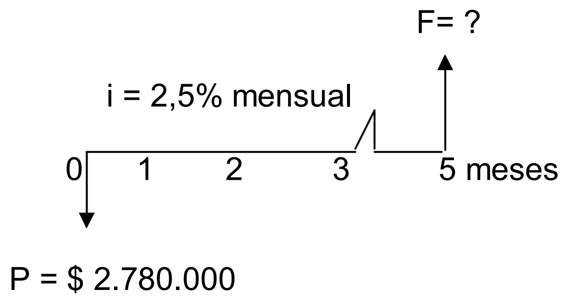
$$\text{Ln}\,F = \text{Ln } 15.000.000 + 1,2; \quad \text{Donde: } \text{Ln}\,F = 17,72356075;$$

$$\text{Por lo tanto: } F = \text{antiln } 17,72356075; \quad \text{donde: } F = \$\ 49.801.753,84$$

Ejemplo 4.23

Determine el valor futuro y el interés compuesto de $ 2.780.000 invertidos durante 5 meses al 30% capitalizable continuamente.

Solución:



$$r = 28\%\ \text{anual}\ ; \quad i = \frac{r}{m} = \frac{0.30}{12} = 0{,}025\ \text{mensual}$$

$F = P\ell^{rn} = 2.780.000 \times \ell^{(0{,}025 \times 5)}$, por lo tanto: $F = 2.780.000 \times \ell^{0{,}125}$; de donde: $\text{Ln}\, F = \text{Ln}\, 2.780.000 + 0{,}125\, \text{Ln}\, \ell$; Como $\text{Ln}\, \ell$ es igual a 1, entonces:

$\text{Ln}\, F = \text{Ln}\ 2.780.000 + 0{,}125$; Donde: $\text{Ln}\, F = 14{,}96296148$,

Entonces: $F = \text{antiln}\ 14{,}96296148$; donde: $F = \$\ 3.150.152{,}70$

$$I = F - P = 3.150.152{,}7 - 2.780.000 = \$\ 370.152{,}7$$

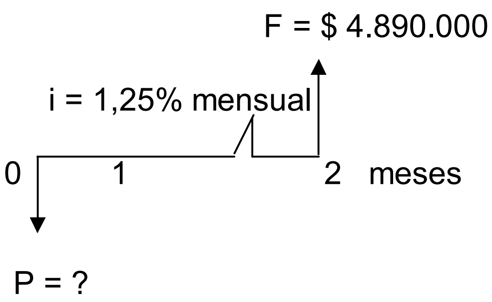
4.9 CALCULO DEL VALOR PRESENTE DADO UN VALOR FUTURO

Se demostró que: $F = P\ell^{rn}$, por lo tanto: $P = F\ell^{-rn}$ **(4.28)**

Ejemplo 4.24

Un pagaré por $ 4.890.000 vence dentro de 2 meses. Calcular su valor presente al 15% compuesto continuamente.

Solución:



$$r = 15\%\ \text{anual}\ ; \quad i = \frac{r}{m} = \frac{0.15}{12} = 0{,}0125\ \text{mensual}$$

$P = F\ell^{-rn} = 4.890.000 \times \ell^{-(0{,}0125 \times 2)}$, por lo tanto: $P = 4.890.000 \times \ell^{-0{,}025}$; de donde: $\text{Ln}\, P = \text{Ln}\, 4.890.000 - 0{,}025\, \text{Ln}\, \ell$; Como $\text{Ln}\, \ell$ es igual a 1, entonces:

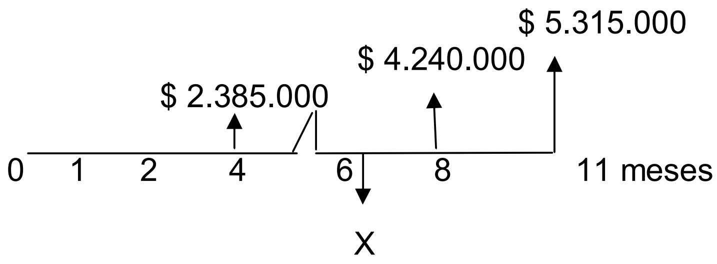
$\text{Ln}\, P = \text{Ln}\ 4.890.000 - 0{,}025$; Donde: $\text{Ln}\, P = 15{,}37770286$

Entonces: $P = \text{antiln}\ 15{,}37770286$; donde: $P = \$\ 4.769.265{,}47$

Ejemplo 4.25

Una persona tiene los siguientes pagarés: \$ 2,385.000 para dentro de 4 meses, \$ 4.240.000 para dentro de 8 meses y \$ 5.315.000 para dentro de 11 meses. Cuál es el pago único que debe hacerse dentro de 6 meses que sustituye los anteriores pagarés si la tasa de interés es del 3% mensual capitalizable continuamente.

Solución:



$$\sum \text{ARRIBA} = \sum \text{ABAJO} \ (ff \Rightarrow 6)$$

$X = 2.385.000\ell^{(0,03\times 2)} + 4.240.000\ell^{-(0,03\times 2)} + 5.315.000\ell^{-(0,03\times 5)}$, por lo tanto:

$$X = 2.385.000\ (2{,}7182)^{0,06} + 4.240.000\ (2{,}7182)^{-0,06} + 5.315.000\ (2{,}7182)^{-0,15}$$

$$X = \$\ 11.100.224{,}68$$

4.10 CÁLCULO DEL TIEMPO (n)

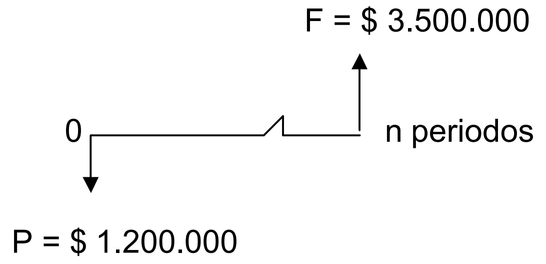
Partiendo de que: $F = P\ell^{rn}$, entonces se puede plantear: $\frac{F}{P} = \ell^{rn}$, aplicando logaritmo a ambos lado de la igualdad, se tiene: $Ln\left(\frac{F}{P}\right) = Ln\left(\ell^{rn}\right)$, por lo que: $r * n * Ln(\ell) = Ln\left(\frac{F}{P}\right)$, de donde:

$$\mathbf{n = \frac{Ln\left(\frac{F}{P}\right)}{r}} \quad \textbf{(4.29)}$$

Ejemplo 4.26

En cuánto tiempo una inversión de \$ 1.200.000, se convertirá en \$ 3.500.000, si la tasa de interés es del 32% convertible continuamente?.

Solución:



Usando la expresión: $n = \frac{Ln\left(\frac{F}{P}\right)}{r}$, se tiene: $n = \frac{Ln\left(\frac{3.500.000}{1.200.000}\right)}{0{,}32}$, por lo tanto: $n = \frac{Ln(2{,}9166)}{0{,}32} = 3{,}35 \text{ años}$; entonces: $n = 3{,}35 \text{ años}$

4.11 TASAS COMBINADAS O COMPUESTA

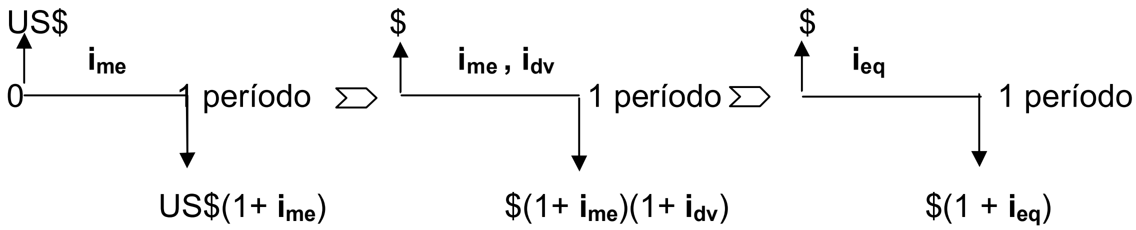
Una tasa es compuesta o combinada, cuando resulta de la aplicación de otras dos tasas así, estas operen diferentes; lo que se busca es encontrar una tasa equivalente (**i_r**) que mida el costo o la rentabilidad de la operación que se está llevando a cabo. La tasa **i_r**, recibe el nombre de tasa real.

Su aplicación se da en las siguientes operaciones financieras: a) Préstamos con interés y comisión, b) Préstamos e inversión en moneda extranjera, c) Inflación, y d) UVR (Unidad de Valor Real).

4.11.1 Préstamo e inversión en moneda extranjera

Cuando se presta en moneda extranjera y luego se hace la conversión a la moneda nacional, entran en operación dos tasas de interés, la primera es la tasa interés que se le carga al préstamo en moneda extranjera (**i_{me}**), y la otra tasa de interés es el reconocimiento de la devaluación de la moneda nacional frente a la moneda extranjera (**i_{dv}**); lo que se pretende, es encontrar una tasa que sea equivalente (**i_{eq}**) a la operación de las otras dos tasas (**i_{me} y i_{dv}**), que mida el costo del crédito (préstamo) ó la rentabilidad de la inversión; las tasas **i_{me} , i_{dv}**, se expresan generalmente en términos anuales.

Para encontrar la tasa equivalente **(i_{eq})**, se supone que un empresario colombiano realiza hoy, un préstamo en dólares (**US$**) en una institución financiera que cobra una tasa de interés **(i_{me})**, para ser cancelado al final de un periodo, se plantea los siguientes diagramas económicos.



En el primer diagrama al final del periodo 1, se deben cancelar a la institución financiera **US$(1+ i_{me})** dólares, y en el segundo se deben tener **$(1+ i_{me})(1+ i_{dv})** pesos que garanticen el pago de los **US$(1+ i_{me})** dólares que se adeudan, pero si para el tercer diagrama económico se determina la tasa equivalente a la operación de i_{em} , i_{dv}, se tendrá también los $(1 + i_{eq}) pesos, que garanticen la cancelación de los **US$(1+ i_{me})** dólares, por lo tanto, se puede afirmar que **$(1+ i_{me})(1+ i_{dv})** y $(1 + i_{eq}) son iguales; por consiguiente:

$\$(1 + i_{eq}) = \$(1+ i_{me})(1+ i_{dv})$; $(1 + i_{eq}) = (1+ i_{me})(1+ i_{dv})$; $i_{eq} = (1+ i_{me})(1+ i_{dv}) - 1$

De donde: $$i_{eq} = i_{me} + i_{dv} + i_{me} * i_{dv} \quad \textbf{(4.30)}$$

La anterior expresión, permite determinar el costo total anual de un crédito o préstamo.

Para encontrar la rentabilidad total anual de una inversión, se parte de la ecuación $F = P(1 + i_{eq})^n$; por lo cual, se plantea la siguiente expresión:

$$i_{eq} = \left(\frac{F_{moneda}}{P_{moneda}}\right)^{1/n} - 1 \quad \textbf{(4.31)}$$

El término moneda, se refiere a la unidad monetaria del país en el cual reside el inversionista.

4.11.1.1 Devaluación

La devaluación es la pérdida de valor de la moneda de un país frente en relación a otra moneda cotizada en los mercados internacionales, como son el dólar estadounidense, el euro o el yen. Por ejemplo, si analizamos el comportamiento del peso colombiano versus el dólar y la devaluación aumenta en Colombia, entonces; se tendrá que dar más pesos por dólar.

La devaluación como fenómeno afecta el sector externo de un país en diversos frente de la economía, un sector que se beneficia por la devaluación, es el de la exportaciones debido a que los exportadores recibirán más pesos por la venta de sus productos (bienes y servicios) en el extranjero e incentiva a muchos empresarios a vender sus bienes y servicios en otros países aumentando así las reservas internacionales. La devaluación aumenta la deuda del país en términos de pesos; las importaciones aumentan de valor provocando una mayor inflación y reduce la inversión extranjera debido a que los efectos de la devaluación disminuyen la rentabilidad de los inversionistas extranjeros.

4.11.1.2 Tasa de Cambio

La tasa de cambio (**TC**) muestra la relación que existe entre dos monedas. Expresa, por ejemplo, la cantidad de pesos que se deben pagar o recibir por una unidad monetaria extranjera. En el caso de Colombia, se toma como base el dólar, por ser la divisa más usada para las transacciones en el exterior, razón por la cual, sería la cantidad de pesos que se necesitan para comprar un dólar. Al igual que con el precio de cualquier bien o servicio, la tasa de cambio aumenta o disminuye dependiendo de la oferta y la demanda, pues cuando la oferta es mayor que la demanda (hay abundancia de dólares en el mercado y pocos compradores) la tasa de cambio baja; mientras que, por el contrario cuando hay menos oferta que demanda (hay escasez de dólares y muchos compradores), la tasa de cambio sube.

Se pueden adoptar sistemas cambiarios que permitan que se lleve a cambio una determinada política de tasa de cambio. Fundamentalmente, el sistema cambiario puede ser un sistema de tipo de cambio fijo y variable (flotante).

4.11.1.2.1 Tasa de cambio fija

Este sistema tiene como objetivo mantener constante, a través del tiempo, la relación de las dos monedas; es decir, que la cantidad de pesos que se necesiten para comprar un dólar (u otra moneda extranjera) sea la misma siempre. En este caso, el Banco Central, que en el caso de Colombia es el Banco de la República, se compromete a mantener esta relación y tomar las acciones necesarias para cumplir con este objetivo. Por lo tanto, cuando en el mercado existe mucha demanda por dólares o cualquier otra divisa (moneda extranjera), el Banco pone en el mercado la cantidad de dólares necesaria para mantener la tasa de cambio en el valor que se determinó. Igualmente, cuando se presentan excesos de oferta (cuando hay más dólares en el mercado de los que se están pidiendo o demandando), el Banco compra dólares para evitar que la tasa de cambio disminuya.

4.11.1.2.2 Tasa de cambio variable (flotante)

Este régimen permite que el mercado, por medio de la oferta y la demanda de divisas (monedas extranjeras), sea el que determine el comportamiento de la relación entre las monedas. El banco central no interviene para controlar el precio, por lo cual la cantidad de pesos que se necesitan para comprar una unidad de moneda extranjera (dólar, por ejemplo) puede variar a lo largo del tiempo.

En Colombia, desde agosto de 2002, existe una categoría particular de tasa de cambio flotante que se denomina tasa de cambio flotante sucia. Ésta tiene como fundamento un sistema cambiario de tasa de cambio flotante, sin embargo, esta tasa no es completamente libre, porque en un punto determinado, buscando evitar cambios repentinos y bruscos en el precio de la moneda, las autoridades pueden intervenir en el mercado. La diferencia de una tasa de cambio flotante sucia con una tasa de cambio fija es que, en este sistema de tasa de cambio, no se establecen unas metas fijas por encima o por debajo de las cuales el valor de la moneda no puede estar.

Durante varios años, existió en Colombia un sistema cambiario denominado *banda cambiaria*. Este sistema de control establece unos límites (máximos y mínimos) dentro de los cuales se debe encontrar la tasa de cambio. El límite máximo se llama el “techo” de la banda cambiaria y el límite mínimo se llama el “piso” de la banda cambiaria. Detrás de esta banda cambiaria existe una teoría de oferta y demanda de dinero: cuando la tasa de cambio alcanza el techo de la banda, lo que significa que los dólares son escasos y el precio está subiendo, el Banco de la República, entonces, vende dólares que tiene en reservas. Al hacerse esto, en el mercado ya no hay escasez de la moneda extranjera y, como ya no es difícil comprarla, el precio de ésta baja y la tasa de cambio vuelve a estar dentro de los límites establecidos. Lo contrario sucede cuando la tasa de cambio se encuentra en el piso de la banda cambiaria, lo que quiere decir que hay abundancia de dólares en el mercado, siendo en este momento cuando El Banco de la República compra dólares, haciendo que los dólares ya no sean tan abundantes en el mercado, por lo cual el precio de éstos sube, ubicando a la tasa de cambio de nuevo en la banda. Este sistema se eliminó el 27 de septiembre de 1999 para dar paso al sistema de tasa de cambio flexible, en éste la tasa de cambio sube y baja libremente de acuerdo con la oferta y la demanda de divisas; sin embargo, aunque las autoridades permiten que la tasa de cambio se mueva libremente, en algunos momentos se pueden generar desequilibrios en la economía nacional; por este motivo el Banco de la República tiene la capacidad de intervenir en el mercado de divisas cuando lo considere indispensable.

4.11.1.3 Tasa de Devaluación

Es la pérdida porcentual del valor de la moneda de un país frente a la moneda de otro país. Una tasa de devaluación (**i_{dv}**), se puede determinar a través de la siguiente igualdad:

$$i_{dv} = \frac{TC_1 - TC_0}{TC_0} \times 100$$ **(4.31)**; de donde se deduce que $TC_1 \rangle TC_0$

$TC_1 =$ Son las unidades monetarias que se darán o recibirán por otra unidad monetaria en el mañana (futuro).

$TC_0 =$ Son las unidades monetarias que se darán o recibirán por otra unidad monetaria en el hoy (Presente).

Si se tiene que $F = P(1+i)^n$; se podría expresar la igualdad $TC_1 = TC_0\left(1+i_{dv}\right)^n$ **(4.32)**; por lo que una tasa de devaluación promedio, se determinaría con la siguiente expresión:

$$i_{dv} = \left(\frac{TC_1}{TC_0}\right)^{1/n} - 1 \quad \textbf{(4.33)}$$

4.11.1.4 Revaluación

La revaluación es la ganancia de valor de la moneda de un país frente a la moneda de otro país, lo que significa que habrá que pagar menos pesos por el mismo dólar.

Una caída del precio de la divisa se llama revaluación de la moneda en un régimen de tipo de cambio fijo, y apreciación en uno de tasa flotante. Cuando la moneda local se revalúa o se aprecia, se produce un aumento del poder de compra, pues cuesta menos una unidad de moneda extranjera; en este caso, la tasa de cambio baja y la moneda local se fortalece. Por ejemplo, si una economía con esquema de tasa fija, recibe una avalancha de dólares por las exportaciones de un producto que tiene altos precios en el mercado mundial, como ha sucedido con el petróleo en los últimos años; en ese caso el precio de las divisas tenderá a bajar porque hay una gran oferta de ellas, es decir, hay una tendencia hacia la revaluación de la moneda local. En este caso el Banco Central tendrá que intervenir en el mercado comprando divisas para que su precio no caiga, pagando por ellas con moneda local; compra de divisas que aumentará la cantidad de dinero que circula en la economía.

Si lo expuesto anteriormente, se registra en un régimen de tasa de cambio flexible, el Banco Central no tiene que intervenir en el mercado cambiario, y por lo tanto no se altera la cantidad de dinero de la economía. El precio de la divisa bajará porque su oferta es mayor que su demanda, lo que significa que la tasa de cambio se reducirá. En la medida en que cuesta menos una unidad de moneda extranjera, el precio en moneda local de los bienes importados disminuirá, lo cual puede además reducir el precio de los bienes producidos localmente.

4.11.1.4. 1 Tasa de revaluación

Es la medida porcentual de la ganancia de valor de la moneda de un país frente a la moneda de otro país, y se simboliza con $\mathbf{i_{rv}}$, en un instante de tiempo cualquiera se puede determinar con la siguiente expresión:

$$i_{rv} = \frac{TC_1 - TC_0}{TC_0} \times 100 \quad \textbf{(4.34)}$$, de donde se deduce que $TC_1 \langle TC_0$

Si se tiene que $F = P(1+i)^n$; se podría expresar la igualdad $TC_1 = TC_0(1 - i_{rv})^n$ **(4.35)**

Si la moneda de un país se devalúa en un porcentaje frente a la moneda de otro país, no se puede decir que ésta se revalúa en el mismo porcentaje, por lo cual se podría plantear que : $i_{rv} = \frac{i_{dv}}{1+i_{dv}}$ **(4.36)** , de la misma manera se podría establecer que : $i_{dv} = \frac{i_{rv}}{1-i_{rv}}$ **(4.37)**

Ejemplo 4.27

Si el peso colombiano se devalúa frente al dólar en un 25%, entonces el dólar se revalúa en el mismo porcentaje.

Solución:

Si se supone que por un dólar se pagan \$ 1.000 hoy, entonces por efecto de la devaluación del peso frente al dólar en un 25%, se pagaran \$ 1.250 por un dólar.

Si la TC_0(\$/US\$) = 1.000; entonces TC_0(US\$/\$) = 1/ 1.000

Si la TC_1(\$/US\$) = 1.250; entonces TC1(US\$/\$) = 1/1.250

Por lo tanto se tiene que: $i_{rv} = \frac{TC_1 - TC_0}{TC_0} \times 100$;

$i_{rv} = \frac{\frac{1}{1.250} - \frac{1}{1.000}}{\frac{1}{1.000}} \times 100 = \frac{0,0008 - 0,0010}{0,0010} \times 100 = -0,20$; el signo negativo indica que el dólar se revalúa frente al peso colombiano en un 20%.

Otra manera de calcular la revaluación del dólar frente al peso colombiano; sería la siguiente:

$i_{rv} = \frac{i_{dv}}{1+i_{dv}}$; por lo cual $i_{rv} = \frac{0,25}{1+0,25} = 0,20 = 20\%$

Ejemplo 4.28

Un inversionista residente en Colombia adquiere un titulo que tiene un valor de 5.000 US\$, gana un interés del 4% y tiene un plazo de un año, la tasa de cambio actual es de \$ 1.500/US\$ y se estima una devaluación en ese año del 15%. Calcular la rentabilidad que obtendrá el inversionista.

Solución:

$$P_{\$} = (P_{US\$})(T_{C0}) = 5.000 \text{ US\$} * \$1.500/\text{US\$} = \$7.500.000$$

$$F_{US\$} = P_{US\$}(1+i_{co})^{n} = 5.000\text{US\$}*(1+0,04)^{1} = 5.200 \text{ US\$}$$

$$TC_1 = TC_0(1+i_{dv})^{n} = \$1.500/\text{US\$} * (1+0,15)^{1} = \$\ 1.725/\text{US\$}$$

$$F_{\$} = F_{US\$} * TC_1 = 5.200\text{US\$} * \$\ 1.725/\text{US\$} = \$\ 8.970.000$$

$$i = \left(\frac{F\$}{P\$}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{8.970.000}{7.500.000}\right)^{1/1} - 1 = 0,1960 = 19,6\% \text{ Anual}$$

Ejemplo 4.29

Un empresario colombiano importa maquinaria a crédito por un valor de 20.000 US$ para cancelar al final del año 5, la tasa que le cobran es del 3,5% EA. Calcular el costo del crédito, si para los dos primeros años se estima una devaluación promedio del peso frente al dólar del 12%, en el año tres el dólar se revalúa frente al peso en un 3,8% y en los dos últimos años la devaluación promedio anual del peso frente al dólar se estima en un 10%. La tasa de cambio actual es de $ 1.600/US$. Calcule adicionalmente el valor de la obligación en pesos el día que se contrae y determine el valor de la obligación al final del año cinco en dólares como en pesos.

Solución:

Como la tasa de cambio TC_0 está expresada en $/US$, la TC_1 para el año 5, se expresará en $/US$, por lo tanto la forma a utilizar seria: $TC_1 = TC_0\left(1+i_{dv1-2}\right)^{n}\left(1+i_{dv3}\right)^{n}\left(1+i_{dv4-5}\right)^{n}$, para lo cual, se tendría que calcular para el año 3 la devaluación del peso frente al dólar con la siguiente expresión:

$i_{dv(\$/US\$)} = \dfrac{i_{rv(US\$/\$)}}{1-i_{rv(US\$/\$)}} = \dfrac{0,038}{1-0,038} = 0,0395 = 3,95\%\,EA$; por consiguiente:

$$TC_1 = \$1.600/\text{US\$}(1+0,12)^{2}(1+0,0395)^{1}(1+0,10)^{2} = \$2.524,44/\text{US\$}$$

Para encontrar el costo del crédito, se usa la expresión: $i_{eq} = i_{co} + i_{dv} + (i_{co} * i_{dv})$, lo que implicaría encontrar la tasa de devaluación promedio, la cual se calcularía de la siguiente forma:

$$idv=\left(\frac{TC1}{TC0}\right)^{1/n}-1=\left(\frac{2.524,44}{1.600}\right)^{1/5}-1=0,0955=9,55\%EA$$; por lo cual:

$$i_{eq}=i_{co}+i_{dv}+(i_{co}*i_{dv})=0,035+0,0955+(0,035*0,0955)=0,1338=13,38\%EA$$

El valor de la obligación el día que se contrae, se calcula así:

$$P_{\$}=P_{US\$}*T_{C0}=20.000\,US\$*\$1.600/US\$=\$32.000.000$$

Para calcular el valor de la obligación en pesos al final del año 5, es necesario determinar el valor en dólares en ese mismo año, por lo tanto:

$$F_{US\$}=P_{US\$}*(1+i_{co})^{n}=20.000US\$*(1+0,035)^{5}=23.753,73US\$$$

Ahora el futuro en \$ seria:

$$F\$=FUS\$*TC1=23.753,73US\$*\$2.524,44/US\$=\$\,59.964.866,16$$

El futuro en \$, también se podría determinar de las siguientes dos formas:

1) $$\mathbf{F_{\$}=P_{\$}*(1+i_{co})^{n}*(1+i_{dv})^{n}=\$32.000.000*(1+0,035)^{5}*(1+0,0955)^{5}=\$59.964.866,16}$$

2) $$F_{\$}=P_{\$}*(1+i_{eq})^{n}=\$32.000.000*(1+0,1338)^{5}=\$59.964.866,16$$

El costo del crédito, se podría calcular también de la manera:

$$i_{eq}=\left(\frac{F_{\$}}{P_{\$}}\right)^{1/n}-1=\left(\frac{59.964.866,16}{32.000.000}\right)^{1/5}-1=0,1338=13,38\%EA$$

Las diferencias que se puedan presentar en los diferentes métodos, obedecen a los decimales, por lo cual se recomienda trabajar con el mayor número de decimales o hacer uso del Excel, con el fin de darle precisión a los valores calculados.

Ejemplo 4.30

En Colombia un par de zapatos vale \$ 95.000 y existe una inflación del 18% y el cambio actual es de \$ 1.500/US\$. En Estados Unidos se prevé una inflación promedio de 4,8% anual. Al final de un año ¿Cuál debe ser la tasa de devaluación en Colombia con respecto al dólar a fin de no perder competitividad en el mercado de los Estados Unidos?.

Solución:

El precio al final del año en Colombia se determina así:

$$F_{\$} = P_{\$} * (1 + i_{di})^{n} = \$95.000 * (1 + 0,18)^{1} = \$112.100$$

Ahora se podría calcular el valor del artículo en dólares hoy, así:

$$P_{US\$} = \frac{P_{\$}}{TC_{0}(\$/US\$)} = \frac{\$\,95.000}{\$1.500/US\$} = 63,33\ US\$$$

Entonces el precio del artículo al final del año en los EE.UU, se determina de la siguiente manera:

$$F_{US\$} = P_{US\$} * (1 + i_{di})^{n} = 63,33US\$ * (1 + 0,048)^{1} = 66,37US\$$$

También, el precio del artículo en Colombia al final del año, se puede determina de la siguiente manera: $F_{\$} = F_{US\$} * TC_{1}$; por lo cual es necesario determinar la tasa de devaluación, por consiguiente se procede así:

$$i_{dv} = \frac{i_{diinterna} - i_{diexterna}}{1 + i_{diexterna}} = \frac{0,18 - 0,048}{1 + 0,048} = 0,1260 = 12,60\%EA$$

Entonces:

$TC_{1} = TC_{0} * (1 + i_{dv})^{n} = \$1.500/US\$ * (1 + 0,1260)^{1} = \$1.688,93/US\$$; por consiguiente

$$F_{\$} = F_{US\$} * TC_{1} = 66,37US\$ * \$1.688,93/US\$ = \$112.100$$

Ejemplo 4.31

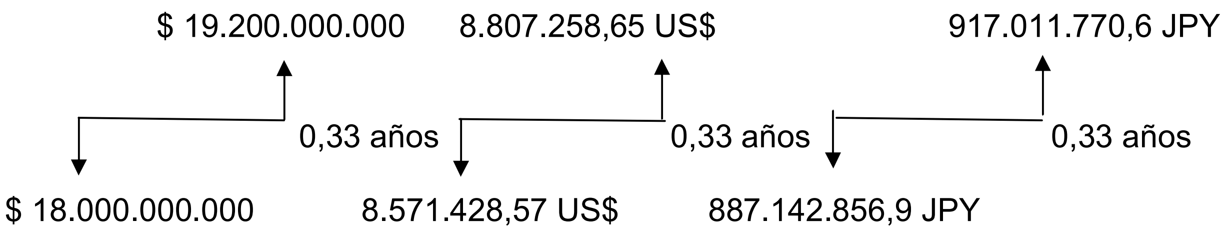
Dos inversionistas uno residente en el Japón y otro residente en Alemania se asocian para comprar una fábrica en Colombia por la suma de cuarenta y cinco mil millones de pesos y cada uno participa con el 40% y el 60% respectivamente y esperan venderla al final de 4 meses por la suma de cuarenta y ocho mil doscientos millones de pesos. a) Calcular la rentabilidad anual total y la rentabilidad real anual de cada uno de los socios. b) Cuánto tendrá cada uno en su respectiva moneda al de los 4 meses?. Tenga en cuenta la siguiente información: Inflación en Japón 3,5%, en Alemania 2,3%. Tasa de devaluación del peso frente al dólar de 12%, el dólar se revalúa frente al yen en un 1,8% y el euro se devalúa frente al dólar en un 3,2%. Las tasas de cambios actuales son: $ 2100/US$, 103,5 JPY/US$ y 0,975€/US$.

Solución:

<u>Residente en el Japón</u>

$$\text{Inversión} = P = 45.000.000.000 * 0{,}40 = 18.000.000.000$$

$$\text{Retorno de la inversión} = F = 48.000.000.000 * 0{,}40 = 19.200.000.000$$



$$TC_0(\$/US\$) = \$2.100/US\$$$

$$\mathbf{TC_1(\$/US\$) = TC_0(\$/US\$) * \left[1 + i_{dv(\$/US\$)}\right] = \$2.100/US\$ * (1 + 0{,}12)^{0,33} = \$2.180{,}02/US\$}$$

Ahora que se tienen las TC_0($/US$) y TC_1($/US$), se procederá a convertir los pesos a dólares, así:

$$P_{US\$} = \frac{P_{\$}}{TC_0(\$/US\$)} = \frac{\$18.000.000.000}{\$2.100/US\$} = 8.571.428{,}57\,US\$$$

$$F_{US\$} = \frac{F_{\$}}{TC_1(\$/US\$)} = \frac{\$19.200.000.000}{\$2.180{,}02/US\$} = 8{,}807.258{,}65\ US\$$$

Ahora, se deben pasar los dólares a yenes, por lo cual, es necesario, determinar la TC_1(JPY/US$) a partir de la TC_0(JPY/US$).

$$TC_0(JPY/US\$) = 103{,}5\ JPY/US\$$$

Pero como el dólar se revalúa frente al yen, es indispensable calcular la devaluación del yen frente a dólar, por lo tanto, se tiene:

$$i_{dv}(JPY/US\$) = \frac{i_{rv}(US\$/JPY)}{1 - i_{rv}(US\$/JPY)} = \frac{0{,}018}{1 - 0{,}018} = 0{,}0183 = 1{,}83\%\ EA$$

$$TC_1(JPY/US\$) = TC_0 * \left[1 + i_{dv(JPY/US\$)}\right]^n = 103{,}5 * (1 + 0{,}0183)^{0{,}33} = 104{,}12 JPY/US\$$$

Entonces:

$$\mathbf{P_{JPY} = P_{US\$} * TC_0(JPY/US\$) = 8.571.428{,}57\ US\$ * 103{,}5\ JPY/US\$ = 887.142.856{,}9\ JPY}$$

$$\mathbf{F_{JPY} = F_{US\$} * TC_1(JPY/US\$) = 8.807.258{,}65\ US\$ * 104{,}12\ JPY/US\$ = 917.011.770{,}6\ JPY}$$

Ahora, teniendo los valores en yenes, se procede a encontrar la rentabilidad total, así:

$$ieq = \left(\frac{F_{JPY}}{P_{JPY}}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{917.011.770{,}6}{887.142.856{,}9}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} - 1 = 0{,}1044 = 10{,}44\% EA$$

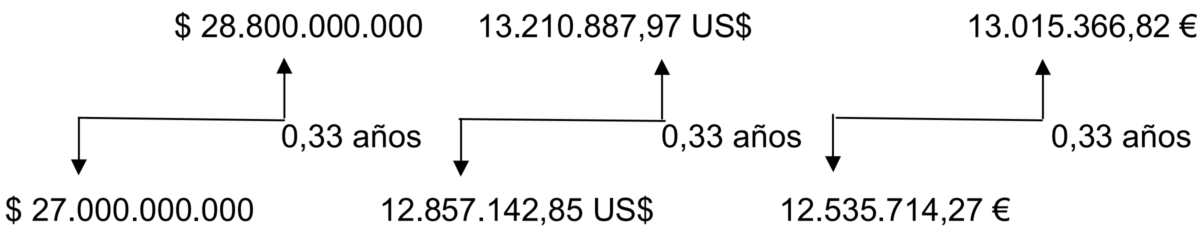
Luego se procede al cálculo de la rentabilidad real anual, de la siguiente manera:

$$i_{de} = \frac{i_{eq} - i_{di}}{1 + i_{di}} = \frac{0{,}1044 - 0{,}035}{1 + 0{,}035} = 0{,}0671 = 6{,}71\%\ EA$$

<u>Residente en Alemania</u>

$$\text{Inversión} = P = 45.000.000.000 * 0{,}60 = 27.000.000.000$$

$$\text{Retorno de la inversión} = F = 48.000.000.000 * 0{,}60 = 28.800.000.000$$



$$TC_0(\$/US\$) = \$2.100/US\$$$

$$\mathbf{TC_1(\$/US\$) = TC_0(\$/US\$) * \left[1 + i_{dv(\$/US\$)}\right] = \$2.100/US\$ * (1 + 0{,}12)^{0{,}33} = \$2.180{,}02/US\$}$$

Ahora que se tienen las TC_0($/US$) y TC_1($/US$), se procederá a convertir los pesos a dólares, así:

$$P_{US\$} = \frac{P_{\$}}{TC_0(\$/US\$)} = \frac{\$27.000.000.000}{\$2.100/US\$} = 12.857.142,85\ US\$$$

$$F_{US\$} = \frac{F_{\$}}{TC_1(\$/US\$)} = \frac{\$28.800.000.000}{\$2.180,02/US\$} = 13.210.887,97\ US\$$$

Ahora, se deben pasar los dólares a euros, por lo cual, es necesario, determinar la TC_1(€/US\$) a partir de la TC_0(€/US\$).

$$TC_0(€/US\$) = 0,975\ €/US\$$$

Pero como el euro se devalúa frente al dólar, la TC1, se puede calcular de la siguiente forma:

$$TC_1(€/US\$) = TC_0 * \left[1 + i_{dv(€/US\$)}\right]^n = 0,975 * (1 + 0,032)^{0,33} = 0,9852\ €/US\$$$

Entonces:

$$\mathbf{P_{€} = P_{US\$} * TC_0(€/US\$) = 12.857.142,85\ US\$ * 0,975\ €/US\$ = 12.535.714,27\ €}$$

$$F_{€} = F_{US\$} * TC_1(€/US\$) = 13.210.887,97\ US\$ * 0,9852\ €/US\$ = 13.015.366,82\ €$$

Ahora, teniendo los valores en yenes, se procede a encontrar la rentabilidad total, así:

$$i_{eq} = \left(\frac{F_{€}}{P_{€}}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{13.015.366,82}{12.535.714,27}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} - 1 = 0,1192 = 11,92\%EA$$

Luego se procede al cálculo de la rentabilidad real anual, de la siguiente manera:

$$i_{de} = \frac{i_{eq} - i_{di}}{1 + i_{di}} = \frac{0,1192 - 0,023}{1 + 0,023} = 0,0940 = 9,4\%\ EA$$

4.11.2 Inflación

Sobre la inflación se han elaborado definiciones desde las diversas perspectivas en que ha sido estudiada, entre las cuales se pueden señalar las siguientes:

a) Es la disminución del poder adquisitivo de compra de una unidad monetaria, lo cual se manifiesta cuando un individuo obtiene significativamente menos bienes y servicios con la misma cantidad de dinero a través del tiempo.

b) Aumento generalizado del nivel de precios de bienes y servicios. La caída en el valor de mercado o en el poder adquisitivo de una moneda en una economía particular.

c) Inflación se define como el incremento continuo de los bienes y servicios a través del tiempo en un país.

d) Milton Friedman de la escuela monetarista, manifiesta que "La inflación se produce cuando la cantidad de dinero aumenta más rápidamente que la de los bienes y servicios.

La tasa de inflación ($\mathbf{i_{di}}$) se define como la medida porcentual del incremento continuo de los precios de los bienes y servicios en un país, o simplemente, representa la pérdida porcentual del poder adquisitivo del dinero. La tasa de inflación se calcula o se determina sobre un precio inmediatamente anterior, por tal motivo, opera como una tasa de interés compuesto, lo que permite calcular el costo futuro de un artículo mediante la formula: $F = \left(1 + i_{di}\right)^{n}$, si el único factor que incide en su aumento es la inflación. Por ejemplo, si se parte de la base que la inflación promedio anual es del 25% para los tres años siguientes, un artículo que cuesta hoy $ 1.000 dentro de tres años se adquirirá por $1.000(1.25)^3$ = $ 1.953,13. El valor calculado se conoce con el nombre de ***pesos corrientes o inflados***. A la operación inversa, que consiste en quitar el proceso inflacionario al cabo de los tres años, se conoce con el nombre de deflactación, es decir, que los $ 1.953,13 puestos en el futuro pero medidos en pesos de hoy, son equivalentes a: $P = F\left(1 + i_{di}\right)^{-n}$, por lo cual, $1.953{,}13(1+0.25)^{-3}$ = $ 1.000. A este valor se le denomina como el valor artículo al cabo de tres años medido en ***pesos constantes o en pesos de hoy***.

Es importante anotar que cuando un flujo de caja de una inversión se da en pesos corrientes, su evaluación debe realizarse con una tasa que contenga la inflación, tasa que se conoce con el nombre de inflada ($\mathbf{i_f}$); pero si el flujo de caja se expresa en pesos constantes, la evaluación se debe hacer con una tasa que no contenga la inflación, y que se conoce con el nombre de tasa deflactada ($\mathbf{i_{de}}$).
Teniendo en cuenta que se presentan tres tasas: la tasa de inflación ($\mathbf{i_{di}}$), la tasa inflada ($\mathbf{i_f}$), y la tasa deflactada ($\mathbf{i_{de}}$), es necesario establecer una relación entre ellas. Si hoy se invierte un $ 1 a una tasa comercial o inflada ($\mathbf{i_f}$) anual, al cabo del año se tendrá $ ($\mathbf{1+ i_f}$), pero si el dinero perdió poder adquisitivo durante el año, entonces con los $ ($\mathbf{1 + i_f}$) que se tienen al final del año se adquirirán o compraran lo mismo que

$\dfrac{\$\left(1+i_f\right)}{\left(1+i_{di}\right)}$ de hoy, por lo tanto, un $ 1 de hoy a una tasa deflactada (**i_{de}**) anual tendrá dentro de un año un poder adquisitivo de compra equivalente a $ (**1 + i_{de}**) pesos de hoy, por lo que se tiene que:

$$\$(1+i_{de})=\frac{\$\left(1+i_f\right)}{\left(1+i_{di}\right)}\text{; por consiguiente:} \qquad i_{de}=\frac{i_f-i_{di}}{1+i_{di}} \qquad \textbf{(4.38)}$$

Ejemplo 4.32

Un inversionista desea obtener una rentabilidad real del 12% ¿ A qué tasa debe invertir suponiendo que la inflación va a ser del 25%.

Solución:

Para resolver el ejercicio se parte de la expresión $i_{de}=\dfrac{i_f-i_{di}}{1+i_{di}}$

Donde: **i_{de}** = 12% y **i_{di}** = 25%, por lo tanto;

$$0{,}12=\frac{i_f-0{,}25}{1+0{,}25} \ ; \ i_f=(0{,}12*1{,}25)+0{,}25; i_f=0{,}40$$

$$i_f=40\%\ \text{EA}$$

Ejemplo 4.33

Un artículo es fabricado en Nueva York y se vende en Cartagena en $ 70.000 ¿Cuánto valdrá el artículo en Cartagena y en Nueva York al final del año, suponiendo que la tasa de cambio actual es de $ 2.200/US$, la inflación en Nueva York es 3,5%, y la devaluación del peso es 20%.

Solución:

El precio hoy del artículo en Nueva York, se determina así:

$$P_{US\$}=\frac{P_{\$}}{TC_0(\$/US\$)}=\frac{\$70.000}{\$2.200/US\$}=31{,}82\ \text{US\$}$$

Una vez conocido el precio del artículo hoy en Nueva York, se calcula el precio en dólares al final del año, así:

$$F_{US\$} = P_{US\$} * (1 + i_{di})^n = 31{,}82\ US\$ * (1 + 0{,}035)^1 = 32{,}93\ US\$$$

Para encontrar el valor del artículo al final del año1 en Cartagena, debe calcularse la TC_1($/US$):

$$TC_1(\$/US\$) = TC_0(\$/US\$) * (1 + 0{,}20)^n = \$2.200/US\$ * (1 + 0{,}20)^1 = \$2.640/US\$$$

Por consiguiente el precio del articulo al final del año 1 en Cartagena, será:

$$F_{\$} = F_{US\$} * TC_1 = 32{,}93\ US\$ * \$2.640/US\$ = \$86.935{,}2$$

Ejemplo 4.34

Un artículo es fabricado en Colombia y cuesta $ 85.000, cuando el cambio es de $ 2.500/US$. Suponiendo que el IPP (Índice de precio al productor) de este sector en Colombia es del 20% y que el peso se devalúa frente al dólar en un 12%, hallar el precio del mismo artículo en Colombia y en EE.UU al final de un año.

Solución:

El precio hoy del artículo en EE.UU, se determina así:

$$P_{US\$} = \frac{P_{\$}}{TC_0(\$/US\$)} = \frac{\$85.000}{\$2.500/US\$} = 34\ US\$$$

Para encontrar el valor del artículo al final del año1 en Colombia, se procede así:

$$F_{\$} = P_{\$} * (1 + IPP)^n = \$85.000 * (1 + 0{,}20)^1 = \$102.000$$

Para determinar el precio del artículo en EE.UU, se debe calcular la TC_1($/US$), así:

$$TC_1(\$/US\$) = TC_0(\$/US\$) * (1 + 0{,}12)^n = \$2.500/US\$ * (1 + 0{,}12)^1 = \$2.800/US\$$$

Una vez conocido el precio del artículo al final del año 1 en Colombia, se calcula el precio en dólares al final del año, así:

$$F_{US\$} = \frac{F_{\$}}{TC_1(\$/US\$)} = \frac{\$102.000}{\$2.800/US\$} = 36{,}43\ US\$$$

4.11.3 Unidad de Valor Real (UVR)

El artículo 3º de la Ley 546 de 1999, creó la unidad de valor real (**UVR**) como una unidad de cuenta que refleja el poder adquisitivo de la moneda, con base exclusivamente en la variación del índice de precios al consumidor certificada por el DANE, cuyo valor se calcula de conformidad con la metodología adoptada por el Gobierno Nacional mediante Decreto 2703 del 30 de diciembre de 1999.

Para el cálculo de la UVR, se tiene en cuenta la variación mensual del índice de precios al consumidor (IPC), certificada por el DANE, para el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del período calculado.

Esta metodología significa que durante los meses en los cuales estacionalmente es alta la inflación, la UVR tendrá un reajuste mayor al que se presenta en meses de baja inflación.

El IPC, es el índice en que se cotejan los precios de un conjunto de productos (canasta familiar) determinado en base a la encuesta continua de presupuestos familiares (conocida con el nombre de Encuesta de gastos de los hogares), que una cantidad de consumidores adquieren de manera regular, y la variación con respecto del precio de cada uno, respecto de una muestra anterior. De esta manera se pretende medir, mensualmente, la evolución del nivel de precios de bienes y servicios de consumo en un país.

4.11.3.1 Metodología para el cálculo de la UVR

Se debe entender como periodo de cálculo según el decreto 2703 de diciembre 30 de 1999, el periodo comprendido entre el día 16 inclusive, de un mes hasta el día 15, inclusive, del mes siguiente.

El DANE publica en los cinco días del mes siguiente (fondo naranja del calendario) la variación del IPC del mes inmediatamente anterior, es decir, el incremento mensual del IPC del mes diciembre del año 2008 (0,44%) tuvo que conocerse a más tardar el 5 de enero de 2009, por esta razón cuando se va a calcular la UVR para un mes determinado, se tiene que utilizar la variación mensual del IPC del mes inmediatamente anterior, ya que la del mes siguiente es desconocida.

El Banco de la República calcula y publica el nuevo valor de la UVR para el tiempo transcurrido entre el 16 de enero y el 15 de febrero de 2009 (fondo azul oscuro del calendario).

ENERO DE 2009						
D	L	M	M	J	V	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	25	27	28	29	30	31

FEBRERO DE 2009						
D	L	M	M	J	V	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

Se establece un plazo prudencial para que el sistema financiero reciba y actualice sus bases de datos con los nuevos valores de la UVR que se calcularon en el mes vigente (fondo verde oliva en el calendario). Dicho plazo debe contemplar un posible atraso en la publicación del IPC, por tal razón, la metodología de cálculo del UVR indica que sus nuevos valores deben aplicar del día 16 del mes vigente hasta el día 15 del siguiente mes (fondo amarillo en el calendario).

El fondo rojo establecido en el calendario para el día 15 de enero, indica que el valor de la UVR para ese día ya fue calculado en el período anterior.

Debido a que el sector financiero realiza desembolsos de créditos hipotecarios para vivienda y a la vez recibe pagos por el mismo concepto, la UVR debe tener valores diarios.

La fórmula para el cálculo de la UVR es:

$$UVR_t = UVR_{15}(1+IPC)^{t/d} \quad \textbf{(4.39)}$$

UVR_t = Valor en moneda legal colombiana de la UVR el día t del período de cálculo.

UVR15 = Valor en moneda legal colombiana de la UVR el día 15 de cada mes (último día del período de cálculo anterior).

IPC = Variación mensual del IPC durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del periodo de cálculo.

t = Número de días calendario transcurridos desde el inicio de un período de cálculo hasta el día de cálculo de la UVR. Por lo tanto t tendrá valores entre 1 y 31, de acuerdo con el número de días calendario del respectivo período de cálculo.

d = Número de días calendario del respectivo período de cálculo y tendrá valores entre 28 y 31.

Es importante anotar que la metodología aplicada por el Banco de la República, requiere para el cálculo de la UVR cuatro decimales.

Ejemplo 4.35

Calcular la UVR el día 31 de enero de 2009

Solución:

$$UVR_t = UVR_{15}(1+IPC)^{t/d}$$

Se calcula el número de días calendario (**d**), entre el día 16 (inclusive) del mes vigente (enero) hasta el día 15 (inclusive) del siguiente mes (febrero). Para el ejemplo el número de días calendario es igual a 31.

Se determina el número de días (**t**), que transcurren entre el 16 (inclusive) y el 31 de enero (inclusive), para el caso del ejemplo son 16 días.

$$UVR_t = UVR_{15}(1+IPC)^{t/d}$$

El valor de la UVR el día 15 de enero de 2009, fue de 181,9367

$$UVR_t = 181{,}9367 * (1+0{,}0044)^{16/31} = 182{,}3494$$

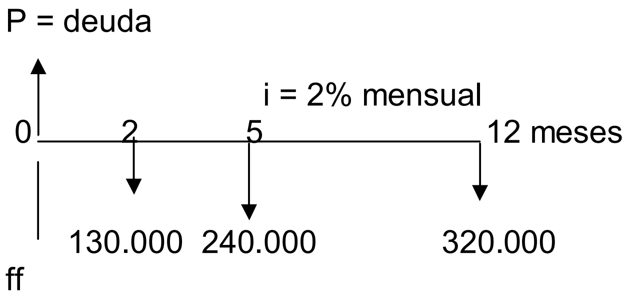
4. 12 APLICACIONES DE ECUACIONES DE VALOR CON INTERES COMPUESTO

Ejemplo 4.36

Una institución financiera otorga un préstamo a una empresa con la obligación de pagar $ 130.000 dentro de 2 meses, $ 240.000 dentro de 5 meses y $ 320.000 en 12. Ante la imposibilidad de pagar la institución financiera le refinancia la deuda así: $ 80.000 en 3 meses, $ 350.000 en 10 meses y el resto en 16 meses. Suponiendo que le cobra el 2% mensual, determinar el valor del saldo.

Solución:

1) Para la solución del ejercicio es más conveniente realizar dos diagramas económicos, con el primero se encontrará el valor de la deuda de la obligación original hoy. Con el segundo y a partir de la deuda calculada anteriormente, se determinará el valor del saldo.



2) Establecer la fecha focal (**ff**) en el periodo cero significa que todos los flujos de caja hay que ubicarlos en ese periodo, por lo tanto, como se encuentran a la derecha de **ff** se utilizará la fórmula para encontrar el valor presente., es decir, $\mathbf{P = F(1 + i)^{-n}}$ **.** Como la deuda esta ubicada en la fecha focal, no se modifica, por lo cual, se deja como está.

3) Se enuncia el principio que se utilizara para la solución del ejercicio, que este caso será :

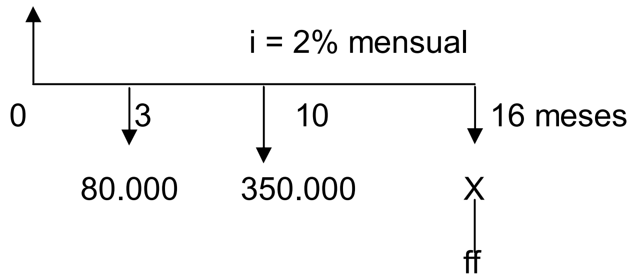
$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 0)$$

$$P = 130.000(1+0.02)^{-2} + 240.000(1+0.02)^{-5} + 320.000(1+0.02)^{-12}$$

$$P = \$\ 594.645,\ 15 \quad ; \quad \text{La deuda es igual a } \$\ 594.645,\ 15$$

4) Una vez encontrado el valor de la deuda hoy, se procede a la realización de un diagrama que contenga el proceso de refinanciación para encontrar el valor del saldo.

P = deuda = $ 594.645,15



5) Establecer la fecha focal (**ff**) en el periodo 16 significa que todos los flujos de caja hay que ubicarlos en ese periodo, por lo tanto, como se encuentran a la izquierda de **ff** se utilizará la fórmula para encontrar el valor futuro, es decir, $\mathbf{F = P(1 + i)^{n}}$ **.** Como el saldo esta ubicado en la fecha focal, no se modifica, por lo cual, se deja como está.

6) Se enuncia el principio que se utilizará para la solución del ejercicio, que este caso será :

$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 16)$$

$$594.645,15(1+0.02)^{16} = 80.000(1+0.02)^{13} + 350.000(1+0.02)^{6} + X$$

$$X = 594.645,15(1+0.02)^{16} - 80.000(1+0.02)^{13} - 350.000(1+0.02)^{6}$$

$$X = \$\ 318.674,98 \quad ; \quad \text{R/. El valor del pago es } \$\ 318.674,98$$

Ejemplo 4.37

Una persona contrae tres obligaciones, así: \$ 200.000, con vencimiento en 6 meses e intereses del 30% CS; \$ 150.000, con vencimiento en 16 meses e intereses del 28% CT; \$ 220.000, con vencimiento en 20 meses e intereses del 36% CM; y van a cancelarse de la siguiente manera: \$ 300.000, el día de hoy y \$ X en 14 meses. A una tasa de rendimiento del 24% CM, ¿Cuánto vale \$X)?.

Solución:

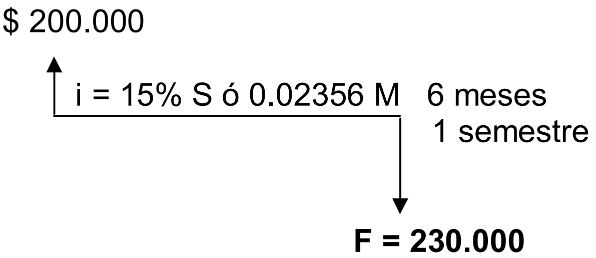
1) Cuando se resuelve este tipo de problema, hay que tener cuidado en no llevar al diagrama económico los valores originales de la obligación, sino encontrar el valor futuro o monto de cada deuda que tenia que pagar la persona, a la tasa de interés establecida y en el tiempo señalado. Para el calculo se utiliza entonces la fórmula: $\mathbf{F = P(1+i)^n}$.

2) Monto para la deuda de \$ 200.000 a un r = 30% CS. Por lo tanto hay que encontrar el valor de i, que puede ser de tipo semestral o mensual.

   a) i = r/m = 0.30/2 = 15% Efectivo Semestral

   b) A partir de la formula: $\mathbf{i = (1 + i_e)^{1/m} - 1}$, se puede hallar el interés mensual

   $i = (1+0.15)^{1/6} - 1 = 0.02356$ mensual



Usando i = 15% S, se tiene que: $F = 200.000(1+0.15)^1 = \$ 230.000$

Usando i = 0.02356 M, se tiene que: $F = 200.000(1+0.02356)^6 = \$ 230.000$

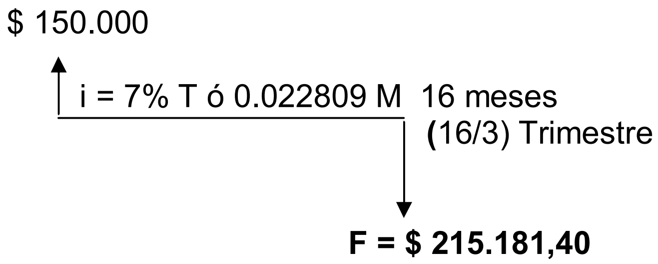
Los \$ 230.000 significan la suma que la persona debía pagar si hubiera cumplido con la obligación contraída. Este valor es el que va en el diagrama que muestra la refinanciación para encontrar el valor de \$ X

3) Monto para la deuda de \$ 150.000 a un r = 28% CT. Por lo tanto hay que encontrar el valor de i, que puede ser de tipo trimestral o mensual.

   a) i = r/m = 0.28/4 = 7% Efectivo Trimestral

   b) A partir de la formula: $\mathbf{i = (1 + i_e)^{1/m} - 1}$, se puede hallar el interés mensual

   $i = (1+0.07)^{1/3} - 1 = 0.022809$ mensual



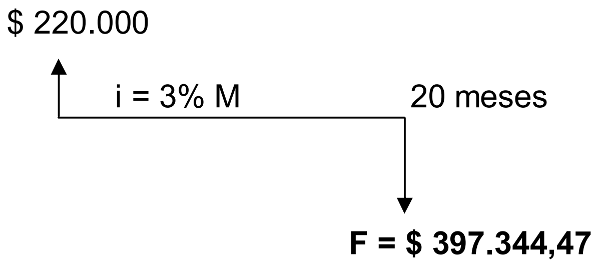
Usando i = 7% T, se tiene que : $F = 150.000(1+0.07)^{16/3}$ = $ 215.181,40

Usando i = 0.022809 M, se tiene que: $F = 150.000(1+0.022809)^{16}$ = $ 215.181,40

Los $ 215.181,40 significa la suma que la persona debía pagar si hubiera cumplido con la obligación contraída, y es el valor que va en el diagrama que muestra la refinanciación para encontrar el valor de $ X.

4) Monto para la deuda de $ 220.000 a un r = 36% CM. Por lo tanto hay que encontrar el valor de i en forma mensual

   i = r/m = 0.36/12 = 3% Efectivo mensual

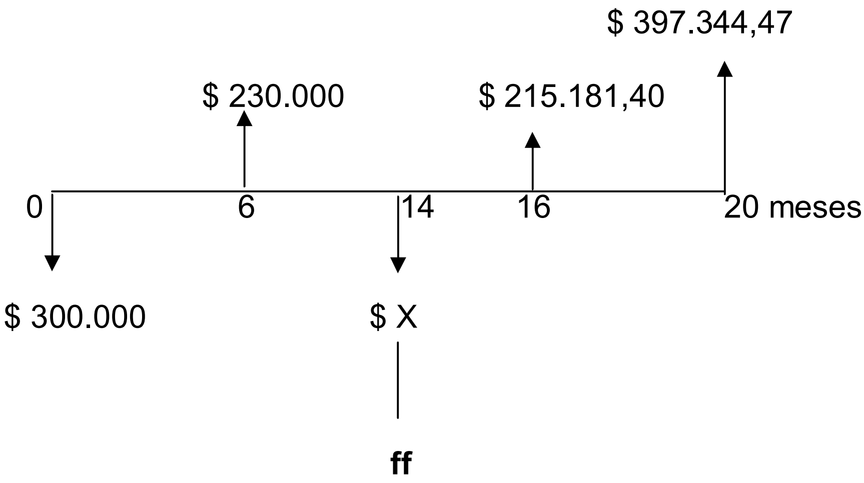


Usando i = 3% M, se tiene que: $F = 220.000(1+0.03)^{20}$ = $ 397.344,47

Los $ 397.344,47 significan la suma que la persona debía pagar si hubiera cumplido con la obligación contraída, y es el valor que va en el diagrama que muestra la refinanciación para encontrar el valor de $ X.

5) Una vez encontrados los montos o valores que la persona debía pagar si cumplía con la obligación financiera, se procede a la realización del diagrama económico que representa la refinanciación, en el cual, se colocan los montos o deudas calculados y los nuevos pagos a la tasa r = 24% CM, por lo tanto i mensual será :

   i = r/m = 0.24/12 = 2% mensual



6) Establecer la fecha focal (**ff**) en el periodo **14** significa que todos los flujos de caja hay que ubicarlos en ese periodo, por lo tanto, los que se encuentren a la izquierda de **ff** se utilizará la fórmula para encontrar el valor futuro, es decir, $\mathbf{F = P(1 + i)^n}$, mientras; que para los que se encuentren a la derecha de la **ff**, se usará la fórmula $\mathbf{P = F(1+i)^{-n}}$, para encontrar el valor presente. Como el valor de \$ X, esta ubicado en la fecha focal no se modifica, por lo cual, se deja como está.

7) Se enuncia el principio que se utilizará para la solución del ejercicio, que este caso será :

$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 14)$$

$$230.000(1+0.02)^{8} + 215.181,40(1+0.02)^{-2} + 397.344,47(1+0.02)^{-6} = 300.000(1+0.02)^{14} + X$$

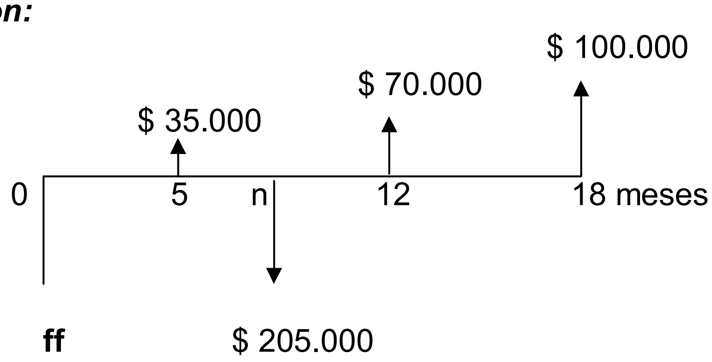
$$X = 230.000(1+0.02)^{8} + 215.181,40(1+0.02)^{-2} + 397.344,47(1+0.02)^{-6} - 300.000(1+0.02)^{14}$$

X = \$ 433.294.19 ; El valor de \$ X es igual a \$ 433.294,19

Ejemplo 4.38

Una persona debe cancelar \$ 35.000 con vencimiento en 5 meses; \$ 70.000 a 12 meses y \$ 100.000, con vencimiento en un año y medio. Si hace un pago único de \$ 205.000, hallar la fecha en que debe hacerse, suponiendo un interés del 24% CM.

Solución:



$i = r/m = 0.24/12 = 2\%$ mensual

El principio que se utilizará para la solución del ejercicio, que este caso será:

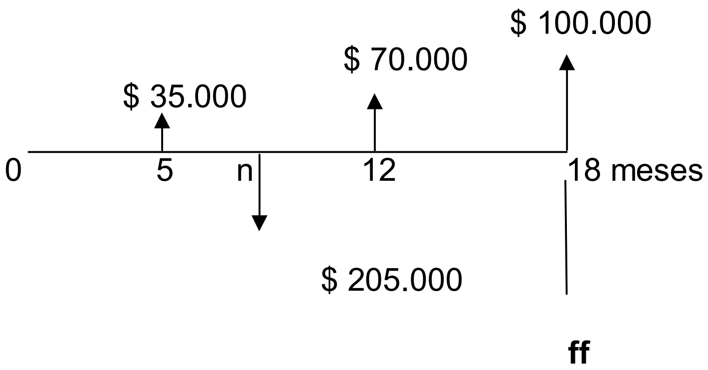
$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos} \quad (\text{en la ff} \rightarrow 0)$$

$$35.000(1+0.02)^{-5} + 70.000(1+0.02)^{-12} + 100.000(1+0.02)^{-18} = 205.000(1+0.02)^{-n}$$

$156.911{,}04 = 205.000(1.02)^{-n}$; de donde $(1.02)^{-n} = 156.911{,}04/205.000$

$-n\ln(1.02) = \ln(0.765419)$, entonces $-n = \dfrac{\ln(0.765419)}{\ln(1.02)}$, de donde $-n = -13{,}5$ meses ; $n = 13{,}5$ meses

Ahora se resolverá el ejercicio estableciendo la fecha focal en 18



El principio que se utilizará para la solución del ejercicio, que este caso será:

$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos} \quad (\text{en la ff} \rightarrow 18)$$

$$35.000(1+0.02)^{13} + 70.000(1+0.02)^{6} + 100.000 = 205.000(1+0.02)^{18-n}$$

$224.107{,}60 = 205.000(1.02)^{18-n}$; de donde $(1.02)^{18-n} = 224.107{,}60/205.000$; entonces

$(1.02)^{18-n} = 1{,}093207$; $(18 - n)\ln(1.02) = \ln(1{,}093207)$; $(18 - n) = \dfrac{\ln(1{,}093207)}{\ln(1.02)}$

Donde: $n = 18 - \dfrac{\ln(1{,}093207)}{\ln(1.02)} = 18 - 4.5 = 13.5$ meses ; $n = 13.5$ meses

Se concluye que independientemente de la fecha focal que se establezca, el resultado siempre será el mismo.

EJERCICIOS PRPOPUESTOS

1) Utilizando las siguientes tasas nominales, encuentre la tasa efectiva por periodo. a) 28% ACS y b) 32% capitalizable cada 110 días. R/. **a) 14% semestral y b) 9,1667% para periodo de 110 días (año de 360 días) y 9,0411% para periodo de 110 días (año de 365 días).**
2) ¿Cuál es la tasa efectiva anual de un dinero invertido al 26% ACT? **R/. 27,44% EA**.
3) Convertir una tasa del 24% AMV en efectivo anual. **R/. 26,82% EA**
4) Convertir el 31,08% Efectivo anual en ATV. **R/. 28% ATV**
5) Convertir el 25% EA en efectivo bimestral. **R/. 3,79% bimestral**
6) Convertir el 22,73% AMV a efectiva mensual. **R/. 1,89% M**
7) Hallar la tasa efectiva anual equivalente al 18% A.B.V. (B = Bimensual). **R/.19,64% A**
8) Convertir el 16% A. Bimensual .V en efectiva periódica bimestral. **R/. 2,69% bimestral**.
9) Convertir el 2% mensual en efectiva periódica semestral. **R/. 12,62% Semestral**.
10) Convertir el 3% bimestral en efectiva periódica trimestral. **R/. 4,53% Trim.**
11) Convertir el 20% A. Bimensual .V. en efectiva anual. **R/. 22,04%**
12) Convertir el 28% EA en efectiva periódico trimestral. **R/. 6,37 Trim.**
13) Hallar una tasa nominal semestral vencido equivalente al 24% ATV. **R/. 24,72% ACSemestral**.
14) Hallar una tasa nominal trimestre anticipado equivalente al 2,5% periódica mensual. **R/. 28,56% NTA**.
15) Determine la tasa efectiva anual correspondiente a una tasa del 20% SCM. **R/. 48,2126% EA**.
16) ¿En cuál banco invertiría usted su dinero: en el banco X que paga una tasa de interés de 30% con capitalización diaria; o en el banco Y que ofrece un 30% ACM?. **R/. Escoger el banco Y**.
17) Determine la tasa nominal que produce un rendimiento del 42% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada mes. **R/. 35,583% ACM**.
18) El señor Vásquez presto $ 13.915.000 al 36% ACM por dos años. Determine el valor futuro al final del periodo y la tasa efectiva anual. **R/. $ 28.286.329,99 y 42,576% EA**.
19) Para un interés del 30% nominal capitalizable continuamente, encontrar el interés efectivo anual. R/. 34,98% anual.
20) Al comprar un artículo, se quedaron debiendo $ 900.000 los cuales se deben cancelar con dos pagos de $ 480.000 y $ 547.136,8 cuatro y siete meses después de entregado el artículo. ¿Qué interés nominal con capitalización continua aplicaron en la financiación. **R/. 28,46% nominal anual capitalizable continuamente.**
21) Un almacén financia sus artículos al 36,45% nominal anual capitalizable continuamente. ¿Qué interés nominal convertible semanalmente le es equivalente?. **R/. 36,58 Anual capitalizable semanalmente**.
22) ¿Cuál es la tasa nominal que produce un rendimiento del 32% EA si el interés se capitaliza cada bimestre?. **R/. 28,416% ACBimestralmente**.
23) Una institución financiera anuncia que otorga una tasa efectiva anual del 36%. Encuentre la tasa de interés nominal sabiendo que la capitalización es diaria. Utilice año comercial. **R/. 30,762% ACDiaria**.

24) Jairo Pérez tiene dinero invertido en un fondo del mercado de dinero que paga intereses diariamente. Durante un periodo de tres años en que no realizó depósitos ni retiros, su cuenta de \$ 18.000.000 a \$ 302.440.170. Calcule la tasa efectiva anual. Utilice el año comercial. **R/. 18,602 % EA**.
25) Una persona invirtió \$ 14.600.000 en un certificado de depósito a 6 meses de plazo. Si la tasa de interés es 20% ACM, encuentre: a) La tasa efectiva anual, y b) La tasa efectiva para el periodo de 6 meses. **R/. 21,9391% EA y 10,426% semestral**.
26) Un CDT que compro hoy por valor de \$ 3.000.000 ofrece el 11,2% semestral. Si el CDT es a un año y retienen en la fuente el 10% de los intereses ganados, en el momento de redimir el CDT, encontrar la rentabilidad obtenida. **R/. 21,29% anual**.
27) Se tiene una tasa nominal del 6% bimestral capitalizable mes. Calcule la tasa bimestral efectiva. **R/. 6,09% Bimestral**.
28) Isabel le prestó a un amigo \$ 2.000.000 a 10 meses de plazo y cobrándole una tasa de interés del 21% capitalizable cada quincena. ¿Qué tasa efectiva ganó Isabel en el periodo de los 10 meses?. **R/. 19,03% para el periodo de 10 meses**.
29) Compro una aspiradora de contado por \$ 600.00 dando una cuota inicial de \$ 50.000 y el resto financiado al 3,4% mensual. Si 4 meses después de recibida la aspiradora pago \$ 180.000, ¿A los cuántos meses, de realizado el anterior abono, cancelo la deuda si pago \$ 648.162,52?. **R/ 15 meses**.
30) Al comprar una maquinaria quedó un saldo de \$ 700.000 que debe cancelarse al 2,5% mensual en tres cuotas de \$ 200.000, \$ 300.000, y \$ 296.130. ¿Cuándo debe cancelarse la primera cuota si la segunda se cancelo dos meses después de la primera y la tercera dos meses después de la segunda. **R/. en el mes 3**.
31) Si un dólar vale \$ 2.300 y un bolívar vale \$ 1,2. ¿Cuántos bolívares vale un dólar?. **R/. 1.916,66 BL\$/USD**
32) ¿Cuánto se debe devaluar el peso al año siguiente, si se espera que la inflación interna sea del 18% anual y se estima que la inflación en los EE.UU sea del 4%?. **R/. 13,46%**.
33) Un inversionista desea obtener una rentabilidad real del 8%. ¿A qué tasa debe invertir suponiendo que la inflación va a ser del 18%?. **R/. 27,44%**
34) Un artículo es fabricado en los EE.UU y se vende en Colombia en \$ 50.000. ¿Cuánto valdrá el artículo en COLOMBIA y en EE.UU al final de un año, suponiendo los siguientes índices económicos: Cambio actual: 1 USD = \$ 2.000, inflación en EE.UU 3%, devaluación del peso 18%. **R/. \$ 60.770, 25,75 USD.**
35) Un artículo es fabricado en Colombia y cuesta \$ 68.000, cuando el cambio es de 1 USD= \$ 2.000. Suponiendo un IPP de este sector en Colombia es del 22%, y que la devaluación del peso frente al dólar sea del 18%, hallar el precio del mismo artículo en cada país al final de un año. **R/. \$ 82.960, 35,15 USD.**
36) Una empresa importa maquinaria por 80.000 USD con un año de plazo y un interés del 6% anual. Si la devaluación es el 25% anual, ¿Cuál será el total a pagar en dólares y en pesos. Suponga que al contraer la obligación, con el exterior, el USD se cotiza a \$ 1.900. **R/. 84.800 USD, \$ 201.400.000**.
37) Calcular la inflación promedio anual, si las inflaciones fueron: primer año del 20%, segundo año 30% y el tercer año 35%. **R/. 28,18%**
38) Se invierten \$ 3.000.000 y después de 3 meses se reciben \$ 3.100.000. Si la inflación del primer mes fue del 1.8%, segundo mes del 1,2% y tercer mes del

2%, calcular si el dinero inicial invertido aumentó o disminuyó en términos reales. **R/. $ 3.152.460,96**

39) Una persona vende hoy a un amigo un vehículo por $ 7.500.000 y acepta que le pague después de 5 meses sin intereses. ¿Cuánto debe entregarle su amigo para que reciba el mismo dinero que le prestó, si la inflación promedio mensual es del 1,5%?. **R/. $ 8.079.630,02.**

40) Una máquina que actualmente está en uso llegará al final de su vida útil al final de 3 años, para esa época será necesario adquirir una nueva máquina y se estima costará uno 20.000 US$, la máquina actual para esa época podrá ser vendida en 5.000 US$. Determinar el valor que se debe depositar hoy en un depósito a término fijo de 3 años que garantiza el 7,5% EA.

41) Una persona tiene dos deudas una de $ 25.000 pagadera en 3 meses y otra de $ 40.000 pagadero en 7 meses. Si desea cambiar la forma de cancelarlas mediante dos pagos iguales de $ X cada uno con vencimiento en 5 meses y 12 meses respectivamente, determinar el valor de los pagos suponiendo una tasa del 36% NM. **R/. $ 35.423,66**

42) Al abrir una cuenta en una corporación con $ 1.800.000 entregan una libreta, cuyo costo es de $ 4.000 y lo descuentan del depósito realizado. Se sabe que cobran $ 3.000 por trimestre anticipado por el manejo de la cuenta, y que existe una retención sobre los intereses ganados del 1% trimestral. ¿Cuál será el saldo después de un año si reconocen un interés del 5,6% trimestral?. **R/. $ 2.211.885,3**.

43) Una empresa tiene dos deudas con un banco, la primera deuda es de $ 100.000 con un interés del 30% NM, se adquirió hace 6 meses y hoy se vence, la segunda por $ 200.000 al 32% NM se contrató hace 2 meses y vence en 4 meses, debido a la incapacidad de cancelar la deuda, la empresa propone al banco refinanciar su deuda, llegándose a un acuerdo entre las partes de la siguiente forma: hacer 3 pagos iguales con vencimiento en 6, 9, y 12 meses, con una tasa de interés del 33% nominal mensual. ¿Cuál es el valor de cada pago?. **R/. $ 138.452,64**.

44) Hoy se contrae una deuda por $ 50.000 con intereses al 30% NT y vencimiento en 6 meses y hay una deuda por $ 80.000 contraída hace 3 meses con intereses al 32% NS y vencimiento en un año. ¿En qué fecha deberá hacer un pago de $ 170.000 para cancelar las deudas suponiendo que el rendimiento normal del dinero es del 2,5% mensual? . **R/. 9,027 meses.**

45) Dos inversionistas uno residente en Italia y el otro residente en Colombia, han decidido realizar un negocio en Italia y cada uno aportará el 50%. El negocio exige una inversión inicial de 300.00 euros y al final de 3 años devolverá la suma de 400.000 euros. Hallar las tasas totales y reales de cada uno de los socios suponiendo que los siguientes indicadores económicos se mantuvieron constantes durante los 3 años. A) Tasa promedio de inflación en Colombia 22% anual y en Italia 2% anual, B) Tasa de devaluación del peso frente al dólar: primer año 18%, segundo año 20% y tercer año 17%, devaluación del euro frente al dólar: años 1 y 2 el 2%, para el tercer año hay una revaluación del 3%. C) Cambio actual: 1 US$ = $ 1.300, 1 US$ = 2,23 euros. **R/. En euros: 10,06% y 7,9%; en pesos: 29,85% y 6,43%**.

46) Una obligación que consta de tres pagarés así: $ 1.200.000 para hoy, $ 2.000.000 para dentro de ocho meses y $ 2.350.000 para dentro de un año y con una tasa de interés del 33% TV, debe sustituirse por su equivalente en

cuatro pagos iguales para los meses 7, 10, 15 y 20 a partir de hoy, sabiendo que para este caso la tasa de interés será del 38% SV. **R/. $ 1.634.088**.

47) Financiar $ 5.000.000 de hoy a dos años en cuotas así: $ 1.300.000 dentro de 4 meses, $ 2.000.000 dentro de ocho meses y el resto de allí en adelante con cuatro cuotas iguales en los meses, 12, 15,18 y 24. La tasa de interés para la financiación es del 30% anual para el primer año y del 33% anual de allí en adelante. Hallar el valor de las cuotas iguales. **R/. $ 779.635**.

48) Cuando usted adquirió una obligación se comprometió a pagarla mediante el siguiente plan: cuota inicial de $ 860.00, tres pagos de $ 950.000, $ 730.000 y $ 1.250.000 a 6, 10 y 15 meses, respectivamente, y un interés del 33% ATV. Transcurridos ocho meses, usted paga la mitad del saldo en ese momento, y el resto lo paga cuatro meses más tarde. Hallar el valor de cada uno de esos dos pagos. **R/. $ 865.567 y $ 962.153**.

49) Sustituir una obligación que consta de tres pagos de $ 1.230.000 cada uno en los meses 6, 10, y 12, por su equivalente en cuatro pagos así: $ 850.000 dentro de cuatro meses, $ 350.000 dentro de ocho meses, $ 1.000.000 dentro de un año y el resto dentro de 15 meses. La tasa de interés para ambas obligaciones, es del 3,2% mensual. **R/. Ultimo pago de $ 1.693.000**

50) Un ahorrador deposita hoy $ 350.000 en una institución que paga un interés del 29% capitalizable continuamente. Si retira $ 135.900 al cabo de un año y $ 181.600 un año más tarde, ¿Qué saldo tendrá en la cuenta de ahorros un año después del último retiro. **R/. $ 350.000**.

51) Un almacén de repuestos vende un motor para carro en $ 2.500.000. A plazos exigen $ 1.000.000 de cuota inicial y el resto en dos cuotas 4 y 7 meses después, de tal manera que el último pago sea de $ 200.000 más que el primero. ¿Si cobran el 1,5% mensual sobre saldos que pagos debe realizar?. **R $ 716.030,14 y 916.030,14**.

52) Un equipo de contado vale $ 2.000.000. Se pagan $ 800.000 de cuota inicial para un saldo de $ 1.200.000 que financiaron al 3,5% mensual y que se deben cancelar con 3 cuotas en los meses 3, 7 y 12 de tal manera que cada pago sea de $ 30.000 menos que el anterior. Encontrar el valor de cada una de las cuotas. **R/. $ 537.633,5 ; $ 507.633,5 y $ 477.633,5**.

53) Se compra hoy un lote de repuestos así: 30% de su valor de contado como cuota inicial, dentro de 4 meses la mitad de su valor de contado y, 5 meses más tarde, se cancela el saldo de la deuda con $ 730.000. Si el interés de financiación es del 1,8% mensual. Hallar el valor de compra del lote. **R/. $ 2.651.963,64**.

54) Un equipo de sonido que vale de contado, $ 700.000, es comprado a plazos entregando $ 200.000 de cuota inicial y el resto en 4 cuotas en los meses 2, 5, 7 y 8, de tal manera cada cuota sea el 5% más que la anterior. Para un interés de financiación del 3% mensual, hallar el valor de las cuotas. **R/. Primera cuota $ 136.663,98**.

55) Supongamos que un inversionista colombiano va a realizar un proyecto en USA que consiste en invertir US$10.000, para recibir al cabo de un año US $11.200. Si al momento de realizar la inversión la tasa de cambio es $700 por cada dólar y al final del año será un 25% mayor por efecto de la devaluación. Cuál será la rentabilidad lograda en pesos colombianos? **R/. 40%.**

56) Un inversionista Colombiano piensa invertir $20'000.000 en un proyecto mexicano, el cual requiere exactamente esa cantidad a la tasa de cambio actual.

Este dinero rentará en México un equivalente al 2,5% mensual, obteniéndose al cabo de 2 años NPMEX$180.872,60. Si el peso colombiano, a un ritmo de devaluación del 20% anual respecto al nuevo peso mexicano (NPMEX$) tiene al cabo de 2 años una tasa de $288 pesos colombianos por cada nuevo peso mexicano ($288/NPMEX$). Cuál será la rentabilidad anual obtenida por el inversionista colombiano y cuál será el flujo tanto en pesos colombianos como en nuevos pesos mexicanos? **R/. 61,386% , $ 52.090.523,78 y 180.872,50 NPMEX$**

57) Un inversionista estadounidense está realizando un proyecto de inversión en Colombia que ofrece una rentabilidad en pesos colombianos de 35% anual. Si él en su país logra una rentabilidad del 10% anual, cuál será la tasa de devaluación del peso respecto al dólar, por encima o por debajo de la cual se hará atractivo el proyecto? **R/. 22,72%**

58) Si la rentabilidad del 35% en Colombia está acompañada de una inflación del 25%, cuál sería la tasa de inflación en Estados Unidos que generaría un interés libre de inflación equivalente al obtenido en Colombia, si la rentabilidad de dicho país es del 10%?. **R/. 1,851%**

59) La tasa de cambio del peso colombiano respecto al dólar es $1000/US$, y la tasa de cambio del Bolívar respecto al dólar es Bs$200/US$; durante el próximo año se espera una inflación en Colombia del 25% y en Venezuela del 35%.Suponiendo que se parte del equilibrio cambiario y con una inflación en Estados Unidos del 4%, cuál será dentro de un año la tasa de cambio del peso respecto al Bolívar que genera equilibrio cambiario? **R/. $ 4,63/Bs$.**

60) Un inversionista estadounidense está acostumbrado a obtener una tasa en dólares constante del 10%. Durante el próximo año espera una inflación en su país del 5%. Está pensando en invertir en Colombia y sabe que dicho país actualmente tiene una tasa de cambio en equilibrio, y piensa mantenerla devaluando mensualmente un 2%. ¿Cuál será la tasa de interés en pesos que hace equivalente para dicho inversionista invertir en Colombia? **R/. 46,47%**

61) Un profesor ganó una beca para estudiar en Estados Unidos y tiene un año para ahorrar el dinero que le cuesta el curso de inglés por valor de 3.000 US$ (no incluido en la beca). Para esto va a una Corporación de Ahorro y Vivienda la cual paga un interés del 24% anual con un interés adicional del 8% anual capitalizable mensualmente vencido. Si se conoce que la inflación en Colombia el año anterior fue del 28%,y en USA fue del 5,35% y la tasa de cambio en ese momento es $700/ US$. ¿Qué cantidad en pesos colombianos debe ahorrar mensualmente el profesor para tener al cabo de un año el equivalente a los 3.000 US$? **R/. $ 185.081,80**.

62) Una empresa colombiana va a comprar una máquina a un proveedor de Estados Unidos y este ofrece dos sistemas de pago que para él son equivalentes. El primero, consiste en 8 pagos trimestrales de 2.849,13US$ y el segundo en 4 pagos semestrales de 5.783,73 US$. El interés trimestral es del 3%. El valor de la máquina es de 20.000 US$. Si la tasa de cambio en el momento de la compra es de $1.055/US$ y dos años después será de $1559/US$ con una devaluación constante, determinar: a) a. Interés a pagar si se toma el sistema de cuotas semestrales. b). Interés efectivo anual de financiación. c). Saldo en pesos de la deuda transcurrido un año. **R/. i= 6,09% semestral, 36,8% EA y $ 13.587.165,91**

63) Una empresa requiere tecnificar su sistema productivo para enfrentar la apertura económica y para ello va a importar una nueva máquina fabricada en Estados Unidos y con un valor de adquisición de 20.000 US$. El proveedor está dispuesto a financiar la máquina con un interés del 9% M.V. y un plazo de 2 años con pagos uniformes (incluyendo capital e intereses) cada uno al final de cada mes. Si la tasa de cambio hoy es de $725 por dólar y se espera una devaluación anual de 19,5618%. Determine el saldo de la deuda en dólares y pesos al cabo de 6 meses. **R/. 15.331 US$ y $ 12.153.594,54**.

CAPITULO 5. SERIES UNIFORMES O ANUALIDADES

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz:

1) Explicar y definir los diferentes tipos de anualidades: Vencidas, anticipadas, diferidas, indefinidas o perpetuas y las generales
2) Definir con exactitud valor presente y futuro de las anualidades vencidas y anticipadas
3) Resolver ejercicios relacionados con el cálculo del valor presente, futuro de las anualidades vencidas y anticipadas.
4) Resolver ejercicios relacionados con el cálculo del tiempo y la tasa de interés de las anualidades vencidas y anticipadas, mediante el uso de la interpolación lineal.
5) Resolver ejercicios relacionados con las anualidades diferidas, perpetuas y generales

TEMARIO

5.1 INTRODUCCION

Los flujos de caja (pagos) de los créditos comerciales y financieros, normalmente tienen las características de ser iguales y periódicos, estos se denominan anualidades, series uniformes, por ejemplo; son anualidades las cuotas periódicas para pagar período a período un electrodoméstico, de un vehículo, los salarios mensuales, las cuotas de los seguros, los pagos de arrendamientos, entre otros, siempre y cuando, no varíen de valor durante algún tiempo.

En este capítulo, se trataran las anualidades más comunes y de mayor aplicación en la vida cotidiana. Por lo cual, se calculará el valor presente de una anualidad y su valor futuro, de la misma manera se determinará el valor de la cuota igual y periódica y el número de períodos de la negociación. De la misma manera, se realizará el estudio el estudio de la anualidad conocida como impropia, es decir, aquella en que no todos los pagos son iguales.

5.2 DEFINICIÓN DE ANUALIDAD

Una anualidad es una serie de flujos de cajas iguales o constantes que se realizan a intervalos iguales de tiempo, que no necesariamente son anuales, sino que pueden ser diarios, quincenales o bimensuales, mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, anuales. Las anualidades se simbolizan con la letra **A**.

El concepto de anualidad, es importante en el área de las finanzas, entre otras consideraciones, porque es el sistema de amortización más utilizado en las instituciones financieras en sus diferentes modalidades de créditos. Además, es muy frecuente que las transacciones comerciales se realicen mediante una serie de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo, en vez de un pago único realizado al final del plazo establecido en la negociación.

Es conveniente, antes de seguir con el estudio de las anualidades, tener en cuenta las definiciones de los siguientes términos:

5.2.1 Renta o Pago

Es un pago periódico que se efectúa de manera igual o constante. A la renta también se le conoce con el nombre: cuota, depósito. Cualquier de estos términos pueden ser utilizados en lugar de anualidad.

5.2.2 Periodo de Renta

Es el tiempo que transcurre entre dos pagos periódicos consecutivos o sucesivos. El periodo de renta puede ser anual, semestral, mensual, etc.

5.2.3 Plazo de una anualidad.

Es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer período de pago y el final del último período de pago.

5.3 REQUISITOS PARA QUE EXISTA UNA ANUALIDAD

Para que exista una anualidad se debe cumplir con las siguientes condiciones:

- ✓ Todos los flujos de caja deben ser iguales o constantes.
- ✓ La totalidad de los flujos de caja en un lapso de tiempo determinado deben ser periódicos.
- ✓ Todos los flujos de caja son llevados al principio o al final de la serie, a la misma tasa de interés, a un valor equivalente, es decir, a la anualidad debe tener un valor presente y un valor futuro equivalente.
- ✓ El número de períodos debe ser igual necesariamente al número de pagos.

5.4 CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES SEGÚN EL TIEMPO

Las anualidades según el uso del tiempo se clasifican en ciertas y contingentes.

5.4.1 Anualidades Ciertas

Son aquellas en las cuales los flujos de caja (ingresos o desembolsos) inician y terminan en periodos de tiempos definidos. Por ejemplo, cuando una persona compra en un almacén un electrodoméstico a crédito, se establecen en forma inmediata las fechas de iniciación y terminación de la obligación financiera.
Las anualidades perpetuas o indefinidas, son una variante de las anualidades ciertas. Los flujos de caja de las anualidades indefinidas comienzan en un periodo específico o determinado y la duración es por tiempo ilimitado.

5.4.2 Anualidades contingentes

Son aquellas en las cuales la fecha del primer flujo de caja, la fecha del último flujo de caja, o ambas dependen de algún evento o suceso que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuando. El ejemplo más clásico, es el contrato de un seguro de vida, se sabe que hay un beneficiario, al cual hay que realizarle una serie de pagos en un tiempo plenamente definido, pero no se sabe cuándo empezarán, por desconocerse fecha en que morirá el asegurado. Por el alcance que tienen las anualidades contingentes, no serán estudiadas en este libro.

5.4.3 Clasificación de las anualidades según los intereses

Según el uso de los intereses las anualidades se clasifican en anualidades simples y generales.

5.4.3.1 Anualidades simples

Son aquellas en que el periodo de capitalización de los intereses coincide con el periodo de pago. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos trimestrales en una cuenta de cuenta de ahorros intereses capitalizables cada trimestre.

5.4.3.2 Anualidades Generales

Son aquellas en que el periodo de capitalización de los intereses no coincide con el periodo de pago. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos mensuales en una cuenta de ahorro pero los intereses se capitalizan cada bimestre.

5.4.4 Clasificación de las anualidades según el momento de iniciación.

Las anualidades se clasifican según el momento de iniciación en diferidas e inmediatas.

5.4.4.1 Anualidades diferidas

Son aquellas en las cuales la serie de flujos de caja (Ingresos ó Desembolsos), se dan a partir de un período de gracia. Este se puede dar de dos maneras: a) Período de gracia muerto, b) Período de gracia con cuota reducida.

En el periodo de gracia muerto, no hay abonos a capital, ni pagos de interés, lo que implica que el valor de obligación financiera al final del período de gracia se acumula por efecto de los intereses, incrementándose el saldo de la obligación financiera, por lo tanto, a partir de este nuevo valor se determina el valor de la cuota ó de la anualidad (**A**).

En el periodo de gracia con cuota reducida, se hacen pagos de intereses, pero no abono al capital, por lo cual, el valor de la obligación financiera, no cambia por efecto de los intereses, ya que estos se han venido cancelando a través del tiempo, por lo tanto, el valor de la obligación financiera al final del periodo de gracia, es el inicial, y a partir de él, se calcula ó se determina el valor de la cuota ó de la anualidad (**A**)

Para el cálculo del valor presente y del valor futuro de una anualidad diferida, se pueden utilizar las expresiones que se demostraran para las anualidades vencidas y anticipadas, posteriormente; sé vera como se pueden adaptar las fórmulas para aplicarlas sobre las anualidades diferidas.

5.4.4.2 Anualidades inmediatas

Son aquellas en la que serie de flujos de caja (Ingresos ó Desembolsos) no tiene aplazamiento algunos de los flujos, es decir, los flujos se realizan en el periodo inmediato a la firma del contrato o del pagaré.

5.4.5 Clasificación de las anualidades según los pagos

Según los pagos las anualidades pueden ser vencidas u ordinarias y anticipadas.

5.4.5.1 Anualidades Vencidas

Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al final de cada periodo, por ejemplo, el salario mensual de un trabajador, en general las cuotas mensuales e iguales que se generan en todo tipo de transacciones comerciales, como la compra de vehículos, electrodomésticos, etc.

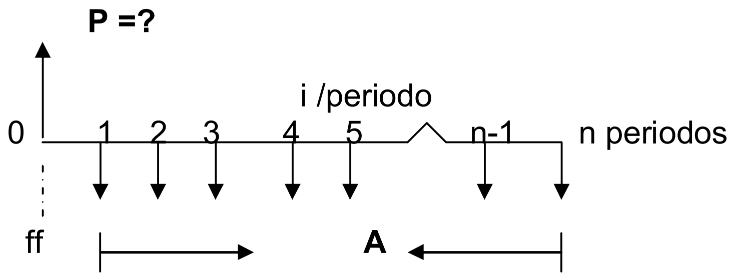
5.4.5.2 Anualidades anticipadas

Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al inicio de cada periodo, por ejemplo, el valor del canon de arrendamiento que se cancelan al comienzo de cada periodo.

5.5 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Es una cantidad o valor, localizado un periodo antes a la fecha del primer pago, equivalente a una serie de flujos de caja iguales y periódicos. Matemáticamente, se puede expresar como la suma de los valores presentes de todos los flujos que compone la serie.

Si se considera que una deuda (**P**) se va a cancelar mediante **n** pagos iguales de valor **A**, a una tasa de interés se tiene:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos} \text{ (en la ff } \rightarrow 0)$$

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{-n+1} + A(1+i)^{-n}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1+i)$, se tiene:

$$\mathbf{P(1+i) = \left[A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{-n+1} + A(1+i)^{-n}\right](1+i)}$$

De la ex`presión anterior, se tiene la ecuación 2

$$P(1+i) = \left[A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{-n+2} + A(1+i)^{-n+1}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$P(1+i) - P = A - A(1+i)^{-n}$$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene. $P(1+i-1)=A\left[1-(1+i)^{-n}\right]$; por lo que se tendrá:

$Pi = A\left[1-(1+i)^{-n}\right]$; por lo cual, se obtendrá. $$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad \textbf{(5.1)}$$

Con la expresión anterior se encuentra un valor presente equivalente (**P**) a una serie de flujos de cajas iguales y periódicos, conocidos el número de pagos (**n**), el valor de cada pago (**A**) y la tasa de interés (**i**). Para evitar errores en el cálculo del valor presente de una anualidad, es importante recordar que: ***el valor presente (P) estará ubicado al principio del periodo en que aparece el primer flujo de caja (A)***.

El valor entre llaves de la fórmula, se conoce con el nombre de **factor valor presente serie uniforme**. Usando la forma nemotécnica, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera: $P = A(P/A,i,n)$

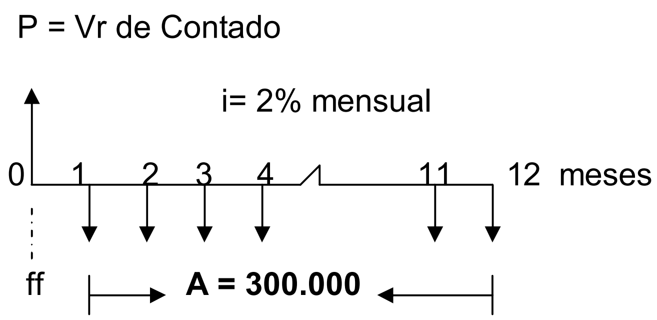
La expresión se lee: Hallar **P** dados **A**, **i**, **n**. Es importante anotar, que lo clave ó fundamental para resolver ejercicios relacionados con anualidades vencidas, es la determinación del cero (**0**), porque en él se encontrara el valor presente de la anualidad, teniéndose en cuenta que siempre se ubicará un periodo antes del primer flujo de caja ó pago de la anualidad, de la misma manera, es necesario determinar, el período donde termina la anualidad vencida, recordando siempre que éste periodo, es él que contiene el último flujo de caja o pago. Por lo tanto, el **n** de una anualidad vencida, se determina por la diferencia que existe entre el período donde termina la anualidad y el período donde se encuentra localizado su cero (**0**)

Ejemplo 5.1

Una persona adquiere a crédito un electrodoméstico que cancelará en 12 pagos mensuales iguales de $ 300.000, a una tasa de 2% mensual. Encontrar el valor de contado del electrodoméstico.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos} \quad (\text{en la ff} \rightarrow 0)$$

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = 300.000\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-12}}{0{,}02}\right] = \$\ 3.172.602{,}37$$

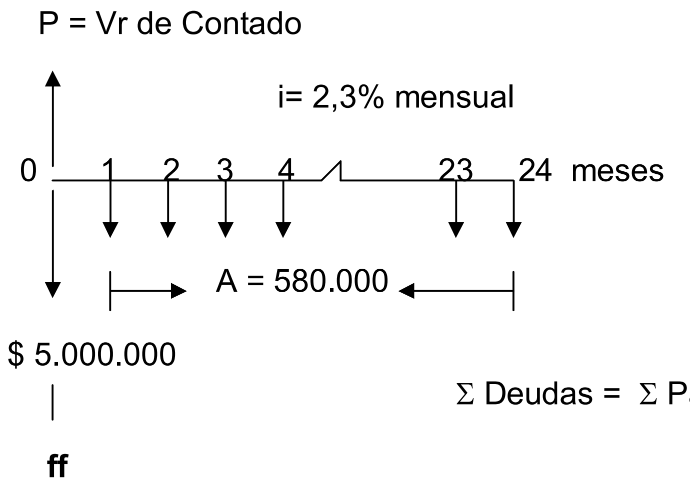
$P = \$\ 3.172.602{,}37$ Sería el valor de contado del electrodoméstico

Ejemplo 5.2

Una persona adquiere un vehículo a crédito con una cuota inicial de $ 5.000.000 y 24 cuotas mensuales iguales de $ 580.000. El concesionario le cobra un 2,3% mensual sobre saldo. Encontrar el valor del vehículo.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos} \quad (\text{en la ff} \rightarrow 0)$$

$$P = 5.000.000 + 580.000\left[\frac{1-(1+0{,}023)^{-24}}{0{,}023}\right] = \$\ 15.606.222{,}82$$

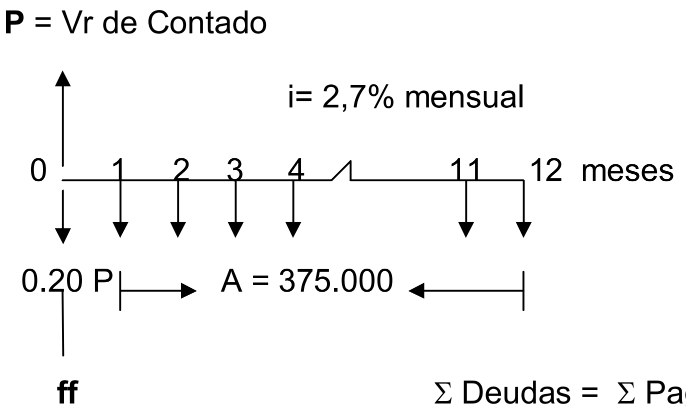
$P = \$\ 15.606.222{,}82$ **;** Sería el valor de contado del electrodoméstico

Ejemplo 5.3

En equipo de oficina se adquiere con una cuota inicial del 30% del valor de contado y 12 cuotas mensuales de $ 375.000, si la tasa de interés es del 2,7% mensual. Determinar el valor de contado del equipo de oficina.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$P = 0{,}2P + 375.000\left[\frac{1-(1+0{,}027)^{-12}}{0{,}027}\right] \;;\; 0.8P = 3.800.491{,}52 \;;\; \text{Donde}$$

$$P = \frac{3.800.491{,}52}{0.8} = 4.750.614{,}39 \quad \text{Valor de contado del equipo de oficina}$$

5.6 CALCULO DE LA ANUALIDAD EN FUNCION DEL VALOR PRESENTE.

Se demostró que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; por lo tanto despejando el valor de **A**, se obtendría:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad \textbf{(5.2)}$$

La anterior fórmula permite encontrar el valor de la anualidad o de la cuota, conocidos el valor presente (**P**), la tasa de interés (**i**) y el número de pagos (**n**). El valor entre llaves se denomina **factor de recuperación de capital**.

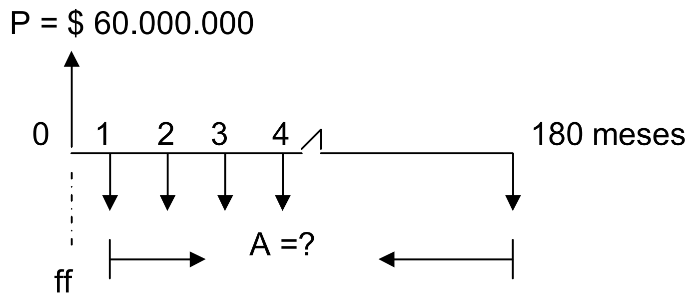
Usando la forma nemotécnica, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera: $A = P(A/P,i,n)$; La expresión se lee: Hallar A dados P, i, n

Ejemplo 5.4

Un apartamento se adquiere a crédito por la suma de \$ 60.000.000 en cuota mensuales iguales, la obligación se pacta a 15 años a una tasa de interés del 3% mensual. Determinar el valor de las cuotas.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 60.000.000\left[\frac{0.03}{1-(1+0.03)^{-180}}\right] = \$1.808.845{,}062$$

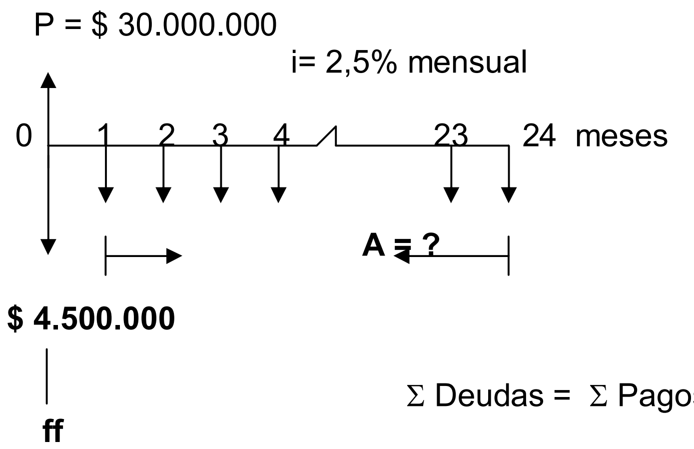
$A = \$1.808.845{,}062$; Seria el valor de las cuotas

Ejemplo 5.5

Un empresa desea construir una fábrica, por lo cual adquiere un terreno por la suma de $ 30.000.000 dando una cuota inicial del 15% y 24 cuota mensuales con una tasa de interés del 2.5%. Calcular el valor de las cuotas.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$30.000.000 = 4.500.000 + A\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-24}}{0{,}025}\right]$$; por consiguiente:

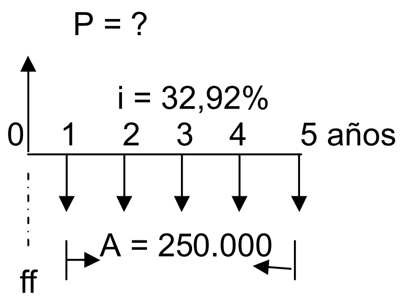
$$25.500.000 = 17{,}885\,A \; ; \text{ Donde: } \quad A = \frac{25.500.000}{17{,}885} = 1.425.776{,}92$$

Ejemplo 5.6

Sustituir una serie de flujos de cajas constantes de \$ 250.000 al final de cada año, durante 5 años, por el equivalente en cuotas mensuales vencidas, con un interés del 2.4% mensual.

Solución:

El diagrama económico de la operación financiera será:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 0)$$

Lo primero que se debe realizar es encontrar una tasa efectiva anual a partir de la tasa del 2,4% mensual, a continuación se muestra el procedimiento.

$i = ie = ?\ \text{anual}$, por consiguiente **m= 1**.

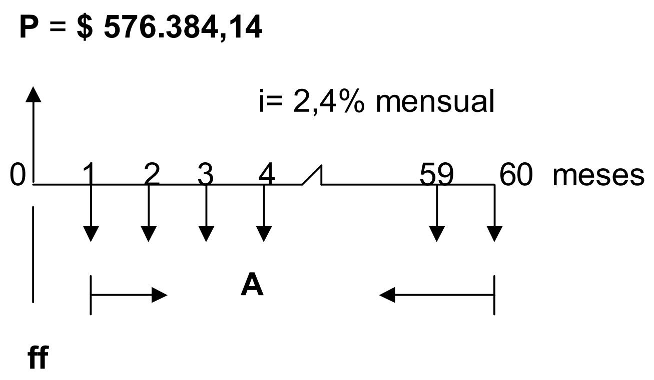
$i = i_e = 2{,}4\%\ \text{mensual}$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) meses.

$(1+i_e)^m = (1+i_e)^t$; $(1+i_e)^1 = (1+0{,}024)^{12}$, por lo tanto: $ie = (1{,}024)^{12} - 1$,

por lo que: $i = 0{,}3292\ \text{anual} = 32{,}92\%\ \text{anual}$

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = 250.000\left[\frac{1-(1+0{,}3292)^{-5}}{0{,}3292}\right] = \$\,576.384{,}14$$

Una vez calculado el valor presente, se procede al cálculo de las anualidades mensuales.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

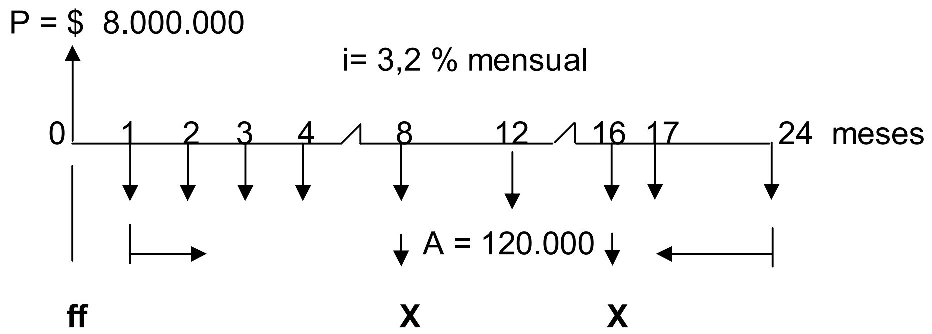
$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 576.384,14\left[\frac{0.024}{1-(1+0.024)^{-60}}\right] = \$\,18.234,88$$

$A = \$18.234,88$; Seria el valor de las cuotas

Ejemplo 5.7

Un crédito de $ 8.000.000 para cancelarlo en 24 cuotas mensuales de $ 120.000 con dos cuotas extras en pactadas en los meses 8 y 16, si la tasa de intereses es del 3,2% mensual; calcular el valor de las cuotas extras.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

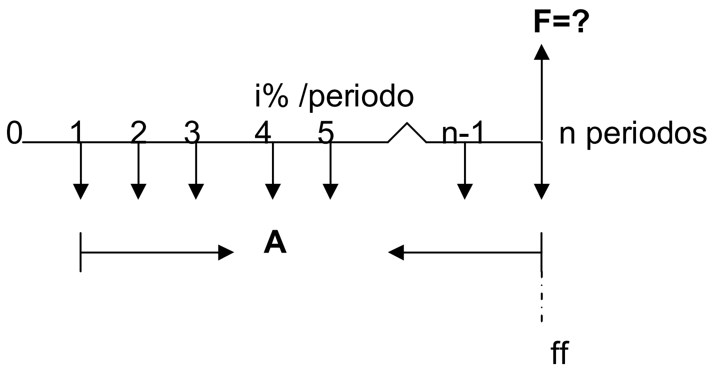
$$8.000.000 = 120.000\left[\frac{1-(1+0,032)^{-24}}{0,032}\right] + X(1+0,032)^{-8} + X(1+0,032)^{-16}$$

Por consiguiente: $6.010.834,475 = 1,3814X$; entonces:

$$X = \frac{6.010.834,475}{1,3814} = \$4.351.340,66$$

5.7 VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Es la cantidad o valor ubicado en el último flujo de caja, equivalente a todos los flujos de caja constantes y periódicos de la serie. Matemáticamente, es el valor final que se obtiene al sumar todos los valores llevados al futuro.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff $\rightarrow$ n)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{1} + A$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1+i)$, se tiene:

$$F(1+i) = \left[A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{1} + A\right](1+i)$$

Simplificando términos en el segundo miembro de la ecuación anterior, la ecuación No 2 quedaría:

$$F(1+i) = \left[A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{2} + A(1+i)^{1}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$F(1+i) - F = A(1+i)^{n} - A$$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene. $F(1+i-1)=A\left[(1+i)^{n}-1\right]$; por lo que se tendrá:

$Fi=A\left[(1+i)^{n}-1\right]$; por lo cual, se obtendrá: $F=A\left[\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$ **(5.3)**

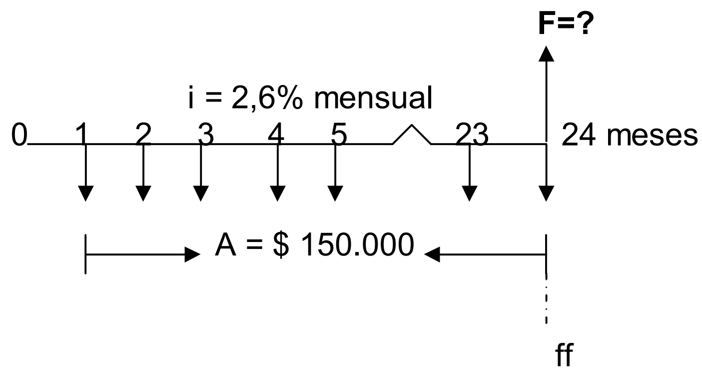
Con la expresión anterior se encuentra un valor futuro equivalente (**F**) a una serie de flujos de cajas iguales y periódicos, conocidos el número de pagos (**n**), el valor de cada pago (**A**) y la tasa de interés (**i**). Para evitar errores en el calculo del valor presente de una anualidad, es importante recordar que : ***el valor futuro (F) equivalente a una serie de flujos de caja iguales y periódicos estará ubicado en el periodo en que aparece el último flujo de caja (A)***.

El valor entre llaves de la fórmula, se conoce con el nombre de **factor cantidad compuesta serie uniforme**. Usando la forma nemotécnica, la formula se puede expresar de la siguiente manera:

$F=A(F/A,i,n)$; La expresión se lee: Hallar F dados A, i, n

Ejemplo 5.8

Se hacen depósitos mensuales de $ 150.000 en una institución financiera que paga el un interés del 2,6% mensual. ¿Qué suma se tendrá acumulada al final de dos años?
Solución:



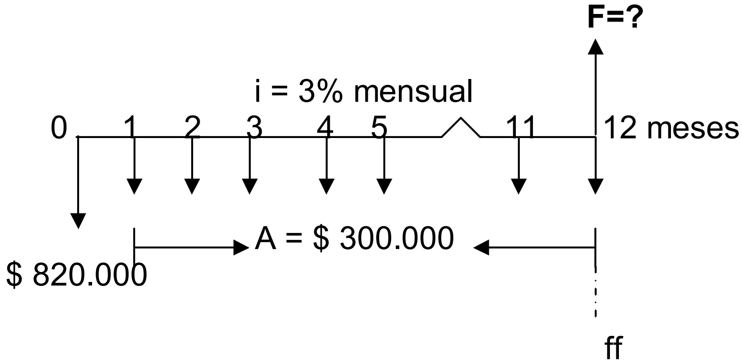
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 24)

$$F=A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]=150.000\left[\frac{(1+0,026)^{24}-1}{0,026}\right]=\$4.912.818,33$$

Ejemplo 5.9

Una persona deposita hoy en una institución financiera la suma de \$ 820.000 que le paga una tasa de interés del 3% mensual. Calcular el valor acumulado al final de año, si cada mes deposita \$ 300.000?

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 12)

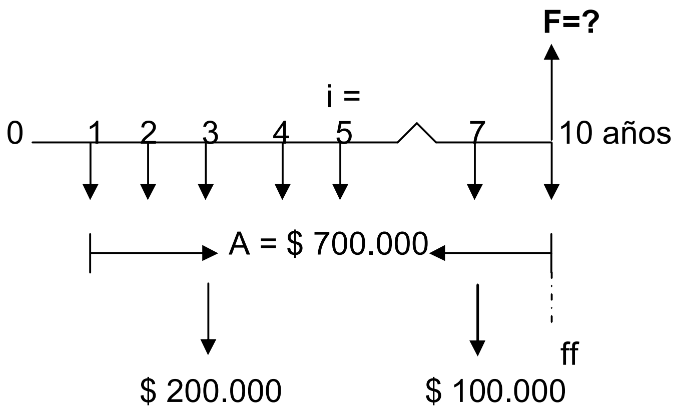
$$F = P(1+i)^n + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 820.000(1+0,03)^{12} + 300.000\left[\frac{(1+0,03)^{12} - 1}{0,03}\right]$$

$$F = \$\ 5.426.732,80$$

Ejemplo 5.10

Un padre de familia desea reunir para dentro de diez años la suma de \$X para garantizar los estudios universitarios de su hijo, por lo cual deposita en una institución financiera que reconoce un interés del 32% ACM, \$ 700.000 cada año, y en los años 3 y 7 deposita adicionalmente \$ 200.000 y \$ 100.000 respectivamente.

Solución:



$i = ie = ?$ Anual , por consiguiente **m= 1**.

$r = 32\%\ ACM$, en este caso **t = 12,** en un año hay doce (12) meses.

$(1+i_e)^m = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t$; $(1+i_e) = \left(1+\frac{0{,}32}{12}\right)^{12}$, de donde se obtiene:

$i_e = \left(1+\frac{0{,}32}{12}\right)^{12} - 1$, por lo que: $ie = 0{,}3714 Anual = 37{,}14\% Anual$

Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff → 10)

$$F = 700.000\left[\frac{(1+0{,}3714)^{10}-1}{0{,}3714}\right] + 200.000(1+0{,}3714)^7 + 100.000(1+0{,}3714)^3$$

$$F = \$\ 44.548.216{,}87$$

5.8 CALCULO DE LA ANUALIDAD EN FUNCION DEL VALOR FUTURO

Se demostró que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$; por lo tanto despejando el valor de **A**, se obtendría:

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \quad \textbf{(5.4)}$$

La anterior fórmula permite encontrar el valor de la anualidad o de la cuota, conocidos el valor futuro (**F**), la tasa de interés (**i**) y el número de pagos (**n**). El valor entre llaves se denomina **factor fondo de amortización.**

Usando la forma nemotécnica, la fórmula se puede expresar de la siguiente manera: $A = F(A/F, i, n)$

La expresión se lee: Hallar **A** dados **F, i, n**

Ejemplo 5.11

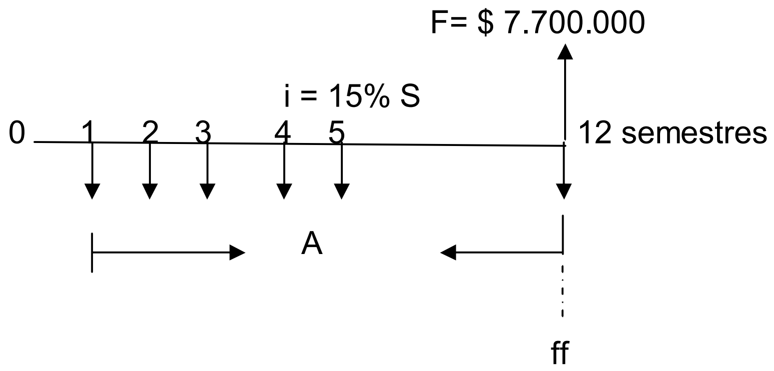
Una empresa necesitará reponer una máquina dentro de 6 años, la cual, en ese momento tendrá un valor de mercado de $ 1.800.000. De acuerdo a estudios de mercado realizados, se espera que la máquina cueste alrededor de $ 9,500.000 y se decide hacer un fondo para cubrir el costo. Si se puede obtener una tasa de interés del 30% ACS, ¿Cuánto se tiene que depositar cada semestre para tener el dinero para reponer la máquina al final de su vida útil?

Solución:

El monto al final del año 6 será igual a la diferencia entre el costo de la maquina y su valor de diseño

$$F = 9.500.000 - 1.800.000 = \$7.700.000$$

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,30}{2} = 0,15 \text{ Semestral}$$



Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff → 12)

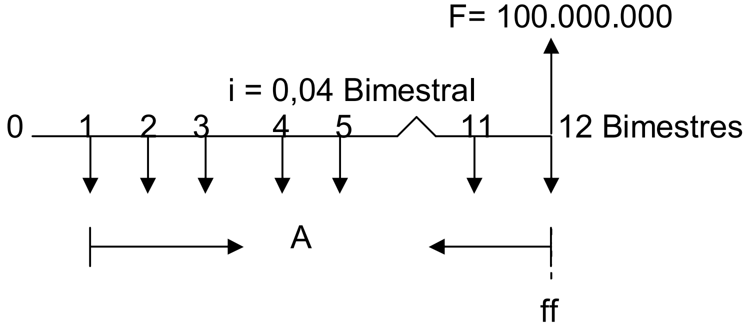
$$7.700.000 = A\left[\frac{(1+0,15)^{12} - 1}{0,15}\right]$$; Donde $7.700.000 = 29,001A$; por consiguiente;

$$A = \frac{7.700.000}{29,001} = \$\ 265.501,98$$

Ejemplo 5.12

El gerente de un hospital desea invertir en una institución financiera para comprar un equipo de Rx en un término de dos años. Para esto debe destinar cierta cantidad cada bimestre hasta completar la cantidad \$ 100.000.000. Si la institución financiera reconoce un 24% ACBimestralmente, determínese el valor del depósito bimestral.

Solución:



Se encuentra la tasa bimestral mediante la siguiente expresión:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}24}{6} = 0{,}04 \text{ Bimestral}$$

Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff $\rightarrow$12)

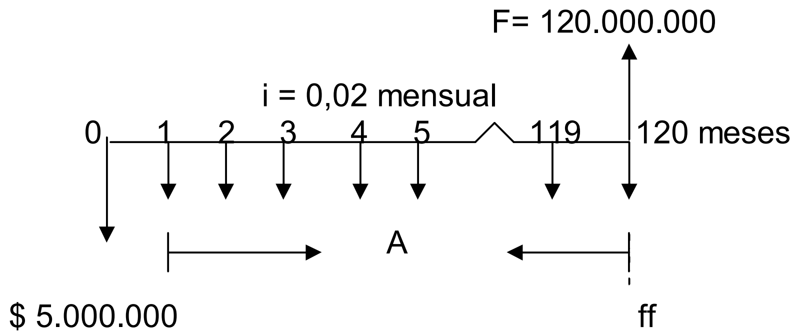
$100.000.000 = A\left[\frac{(1+0{,}04)^{12}-1}{0{,}04}\right]$; Donde $100.000.000 = 15{,}026A$; por consiguiente

$$A = \frac{100.000.000}{15{,}026} = \$6.655.217{,}27$$

Ejemplo 5.13

Una persona desea adquirir un apartamento que dentro de 10 años costará la suma de \$ 120.000.000. Por tal motivo hoy cancela una cuota inicial de \$ 15.000.000 y cada mes cancela cuotas mensuales iguales. La tasa de intereses que se le cobra es del 24% ACM. ¿Cuál es el cuota mensual requerida?.

Solución:



$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 \text{ mensual}$$

Σ Arriba = Σ Abajo (en la ff →120)

$$120.000.000 = 5.000.000(1+0{,}02)^{120} + A\left[\frac{(1+0{,}02)^{120}-1}{0{,}02}\right] \text{ ; donde:}$$

$$66.174.184{,}82 = 488{,}26A \text{ ; Por consiguiente } \quad A = \frac{66.174.184{,}82}{488{,}26} = 135.531{,}14$$

5.9 CALCULO DEL TIEMPO EN UNA ANUALIDAD VENCIDA

El número de cuotas para amortizar una obligación financiera, se puede determinar a partir del valor presente o valor futuro de una anualidad.

a) Cálculo del tiempo (n) en función del valor presente (P) de una anualidad (A)

Se tiene que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; despegando se obtiene: $\frac{Pi}{A} = 1-(1+i)^{-n}$;

sumando $(1+i)^{-n}$ y restando $\frac{Pi}{A}$; a ambos lados de la ecuación se tiene:

$(1+i)^{-n} = \left(1-\frac{Pi}{A}\right)$; aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad. Para el primer término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base; se tendría:

$-nLn(1+i) = Ln\left(1-\frac{Pi}{A}\right)$, donde: $n = \frac{-Ln\left(1-\frac{Pi}{A}\right)}{Ln(1+i)}$ **(5.5)** , en la anterior expresión, se

debe garantizar que: $0 \langle \left[1-\frac{Pi}{A}\right] \langle 1$, con el objeto que **n,** sea positivo y definido.

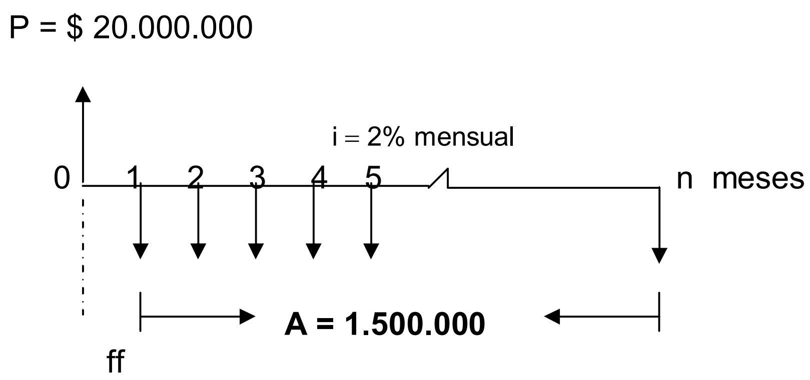
De manera general, el **n** de una anualidad se podrá determina por la diferencia entre en período donde termina la anualidad y el período donde se encuentra localizado su cero.

Ejemplo 5.14

Una deuda de $ 20.000.000 se debe cancelar con cuotas mensuales iguales de $ 1.500.000 cada una. Si la tasa de interés es del 2% mensual. Determine el número de cuotas para cancelar la obligación financiera:

Solución:

El diagrama económico será el siguiente:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se tiene que: $20.000.000 = 1.500.000\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-n}}{0{,}02}\right]$, entonces:

$\frac{20.000.000 * 0{,}02}{1.500.000} = 1-(1{,}02)^{-n}$, donde: $0{,}2666 = 1-(1{,}02)^{-n}$, por lo tanto: $(1{,}02)^{-n} = 0{,}7333$, por consiguiente:

$$n = \frac{-Ln(0{,}7333)}{Ln(1{,}02)} = 15{,}6623 \text{ meses}$$

b) Cálculo del tiempo (n) en función del valor futuro de una anualidad (A)

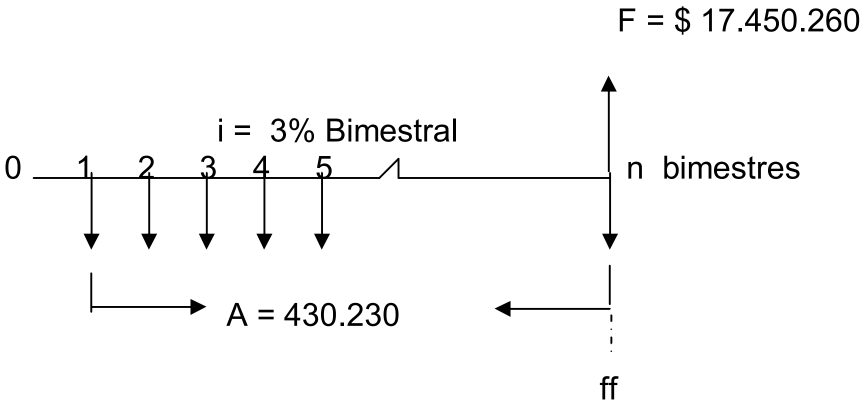
Se tiene que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$; despegando se obtiene: $\frac{Fi}{A} = (1+i)^n - 1$; sumando 1 a ambos lado de la igualdad, se obtendrá $\left(1+\frac{Fi}{A}\right) = (1+i)^n$; aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación. Para el segundo término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base, se tendría:

$$Ln\left(1+\frac{Fi}{A}\right) = nLn(1+i) \text{ ; Por consiguiente: } n = \frac{Ln\left(1+\frac{Fi}{A}\right)}{Ln(1+i)} \quad \textbf{(5.6)}$$

Ejemplo 5.15

Se desea tener un monto de \$ 17.450.260 mediante depósitos cada dos meses vencidos de \$ 430.230. Calcular cuántos depósitos se deben hacer si se ganan intereses del 18% Capitalizable cada bimestre.

Solución:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow \text{n)}$$

$i = \dfrac{0,18}{6} = 3\%$ Bimestral y se tiene que: $17.450.260 = 430.230\left[\dfrac{(1+0,03)^n - 1}{0,03}\right]$,

por lo tanto: $\dfrac{17.450.260 * 0.03}{430.230} = (1,03)^n - 1$, donde: $1,2168 = (1,03)^n - 1$, por consiguiente: $2,2168 = (1,03)^n$; y entonces:

$$n = \frac{Ln(2,2168)}{Ln(1,03)} = 26,9317 \text{ Bimestres}$$

Se observa que la solución del ejercicio, no arroja un número de pagos bimestrales entero, lo que da origen a las anualidades impropias; es decir, aquellas en las cuales los pagos no son iguales. Para lo cual, se puede plantear: las siguientes alternativas:

1) Redondear el número de períodos al entero anterior o al posterior.
2) Hacer 26 depósitos bimestrales iguales y un depósito menor en bimestre 27.
3) Hacer 26 depósitos bimestrales iguales y otro depósito extra en ese mismo período.

Alternativa 1.

a) Se hará redondeando al entero anterior, es decir, tomando un **n = 26** bimestres; y se procede al cálculo de la anualidad.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]; \qquad A = 17.450.260\left[\frac{0,03}{(1+0,03)^{26} - 1}\right] = \$452.629,91$$

Se deben realizar 26 depósitos bimestrales de $ 452.629,91

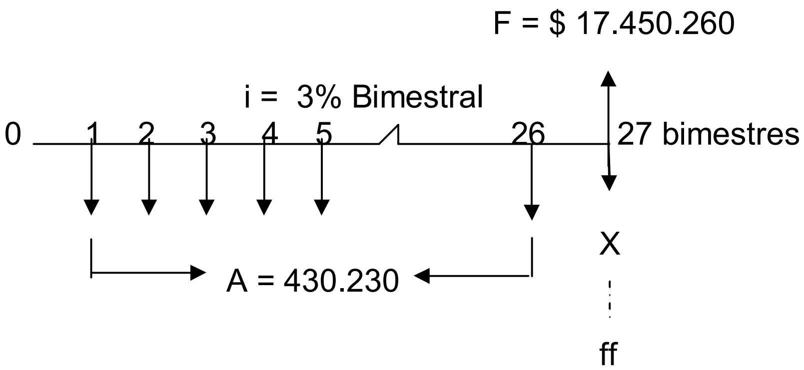
b) En este caso se hará redondeando al entero posterior, es decir, tomando un **n = 27** bimestres; y se procede al cálculo de la anualidad.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right];$$

$$A = 17.450.260\left[\frac{0,03}{(1+0,03)^{27} - 1}\right] = \$428.651,86$$

Se deben realizar 27 depósitos bimestrales de $ 428.651,86

Alternativa 2



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 27)

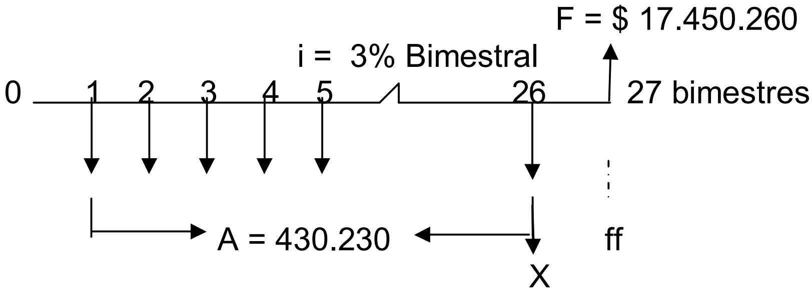
Se puede plantear la siguiente igualdad: $F = X + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^n$; por lo tanto:

$$17.450.260 = X + 430.230\left[\frac{(1+0,03)^{26} - 1}{0,03}\right](1+0,03);$$ de donde:

$$17.450.260 = X + 17.084.275,63$$; por consiguiente: $X = 365.984,37$

Se realizan 26 depósitos de $ 430.230 y un depósito de $ 365.984,37 en el bimestre 27.

Alternativa 3



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 27)

Se puede plantear la siguiente igualdad: $F = X(1+i)^n + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^n$; por lo consiguiente: $F = X(1+0{,}03)^1 + A\left[\frac{(1+0{,}03)^{26} - 1}{0{,}03}\right](1+0{,}03)^1$; por lo tanto: $17.450.260 = 17.084.275{,}63 + 1{,}03X$; de donde: $1{,}03X = 365.984{,}37$; entonces:

$$X = \frac{365.984{,}37}{1{,}03} = \$\ 355.324{,}63$$

Se deben realizar 26 depósitos bimestrales de \$ 430.230 y un depósito extra en el bimestre 26 por valor de \$ 355.324,63.

5.10 CALCULO DE LA TASA DE INTERES EN UNA ANUALIDAD VENCIDA

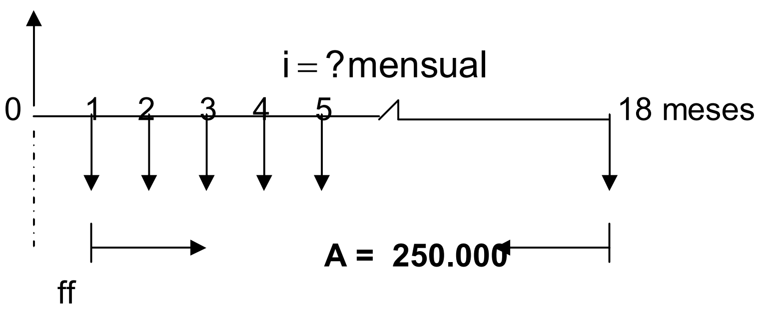
Cuando se recurre a créditos comerciales para adquirir electrodomésticos, vehículos y otros activos, por medio de cuotas uniformes periódicas, normalmente el comprador no conoce el costo, es decir, la tasa de interés que se le cobra, para hallarla es necesario utilizar el método de interpolación lineal, una calculadora financiera o el Excel, caso en el cual el resultado se obtiene más rápido y de forma exacta.

Ejemplo 5.16

Un activo que de contado tiene un valor de \$ 3.500.000, puede adquirirse financiado a 18 cuotas mensuales de \$ 120.000 cada una, ¿Cuál es la tasa de interés mensual que se cobra?.

Solución:

P = \$ 3.500.000



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se plantea la siguiente igualdad: $3.500.000 = 250.000\left[\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}\right]$; La tasa de interés solicitada, se encontrará por el método de tanteo, para lo cual, se le dará valores arbitrarios a **i,** de manera que se encuentre un valor a cero (0) muy cercano por la derecha y por la izquierda, es decir, se buscará un número positivo y negativo, y se procederá a una interpolación lineal, que permita encontrar la tasa de interés, que se está solicitando.

Para un i= 2,7% , se tiene: $3.500.000 = 250.000\left[\frac{1-(1+0,027)^{-18}}{0,027}\right]$

De donde: $3.500.000 = 3.527.231,83$

Se presenta una diferencia de: $3.500.000 - 3.527.231,83 = -27.231,83$

Para un i = 3%, se tendrá: $3.500.000 = 250.000\left[\frac{1-(1+0,03)^{-18}}{0,03}\right]$

Entonces: $3.500.000 = 3.438.378,27$

Se presenta una diferencia de: $3.500.000 - 3.438.378,27 = 61.621,73$

Ahora se tiene un valor por la izquierda de cero y uno por la derecha, y se asumirá que están cercanos a cero, por lo cual, ya se puede proceder a la interpolación lineal, por lo tanto, se tiene la siguiente tabla:

	i	**Valor**	
$\Re_1$ →	2,7	-27.231,83	→ X1
	?	0	→ X
$\Re_2$ →	3	61.621,73	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$**,** se localizaran los X. Por consiguiente:

$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 2,7 + \frac{3 - 2,7}{61.621,73 + 27.231,83}(0 + 27.231,83)$$

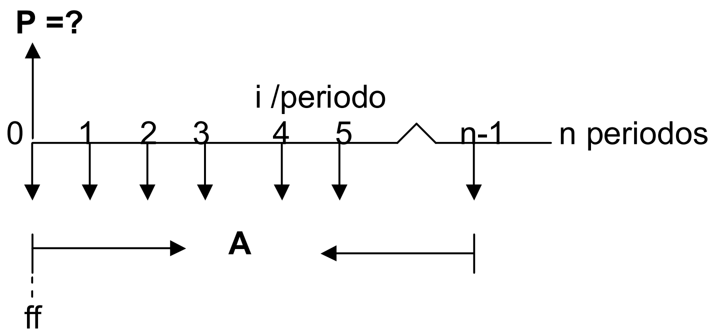
$$i = 2,7 + \frac{0,3}{88.853,56}(27.231,83) = 2,79\% \text{ mensual}$$

5.11 ANUALIDADES ANTICIPADAS

Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al inicio de cada periodo; por ejemplo el pago mensual del arriendo de una casa, ya que primero se paga y luego se habita en el inmueble.

5.11.1 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

El valor presente de los flujos de caja (ingresos y desembolsos) iguales anticipados será el valor, que en el momento de realizada la operación financiera, sea equivalente a todos los flujos de caja. Si se considera que una deuda (**P**) se va a cancelar mediante n pagos iguales de valor **A**, a una tasa de interés (**i**) se tiene:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1.

$$P = A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{-n+1}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1+i)$, se tiene:

$$P(1+i) = \left[A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + A(1+i)^{-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{-n+1}\right](1+i)$$

Simplificando términos en el segundo miembro de la ecuación anterior, la ecuación No 2 quedaría:

$$P(1+i) = \left[A(1+i) + A + A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} A(1+i)^{-3} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{-n+2}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$P(1+i) - P = A(1+i) - A(1+i)^{-n+1}$$

Factorizando la ecuación No 3, se obtiene. $P(1+i-1) = A(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]$; por lo que se tendrá:

$$Pi = A(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right] \quad ; \text{ por lo cual, se obtendrá.} \quad P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \qquad \textbf{(5.7)}$$

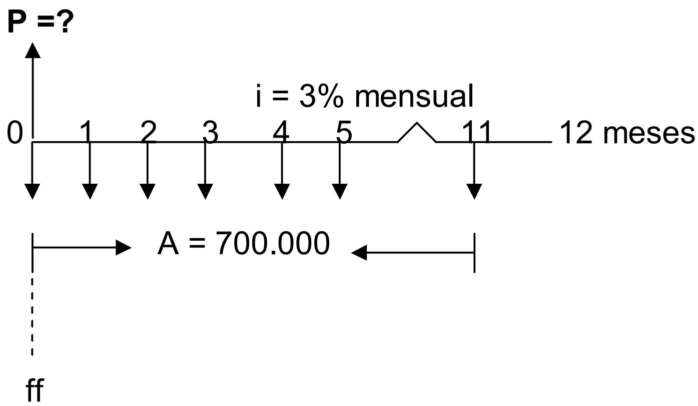
Se puede concluir que el valor presente de una anualidad anticipada, ubicado en el período que se da el primer flujo de caja, resulta de multiplicar el valor presente de una anualidad vencida por $(1+i)$.

Es importante anotar, que lo clave ó fundamental para resolver ejercicios relacionados con anualidades anticipadas, es la determinación del cero (**0**) de la anualidad, porque en él se encontrará el valor presente de la anualidad, teniéndose en cuenta que siempre se ubicará en el periodo, donde se da el primer flujo de caja ó pago de la anualidad, de la misma manera, es necesario determinar, el período donde termina la anualidad anticipada, recordando siempre que éste periodo, es él que se encuentra un período después del último flujo de caja o pago. Por lo tanto, el **n** de una anualidad anticipada, se determina por la diferencia que existe entre el período donde termina (un período después del último flujo) la anualidad y el período donde se encuentra localizado su cero (**0**)

Ejemplo 5.17

Supóngase el caso de un contrato de arrendamiento por un año, en el que los pagos del canon son mensuales por un valor de $700.000, si las partes del contrato acuerdan que se realice un solo pago al principio del contrato y la tasa estipulada es del 3% mensual, de cuanto sería el valor de ese pago único.

Solución:



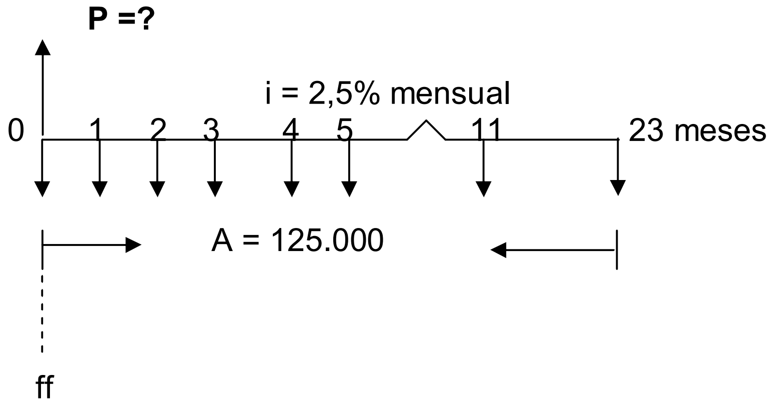
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) = 700.000\left[\frac{1-(1+0,03)^{-12}}{0,03}\right](1+0,03) = \$7.176.836,88$$

Ejemplo 5.18

Se ha pactado una obligación para cancelar en 24 cuotas iguales de \$ 125.000 cada una por mes anticipado, si se decide cancelarla de contado a un interés del 2,5% mensual, cuál es el valor.

Solución:



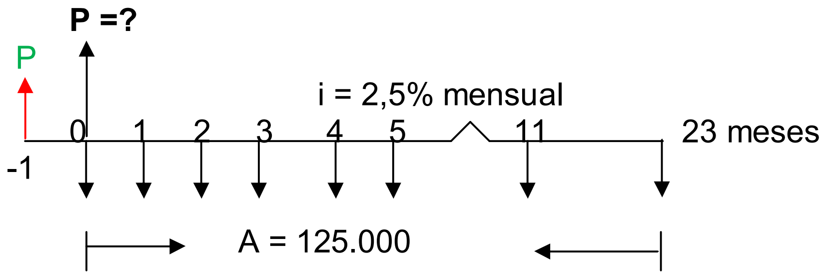
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

El flujo que está en el período cero, se puede manejar de manera independiente, y los flujos que están desde el período 1 hasta el período 23, se tratan como una anualidad vencida. Por lo tanto, se puede plantear la siguiente igualdad:

$$P = A + A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$; por consiguiente:

$$P = 125.000 + 125.000\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-23}}{0{,}025}\right]$$; por lo tanto: $P = \$\ 2.291.513{,}81$

El ejercicio se podría realizar calculando un valor presente en el período -1 y luego ese presente se traslada al período cero del diagrama económico. Lo anterior, se puede visualizar en el diagrama económico siguiente:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se puede plantear la siguiente igualdad: $P = A\left[\frac{1-(1+i)-n}{i}\right](1+i)$; por lo tanto:

$$P = 125.000\left[\frac{1-(1+0,025)^{-24}}{0,025}\right](1+0,025) = \$2.291.513,81$$

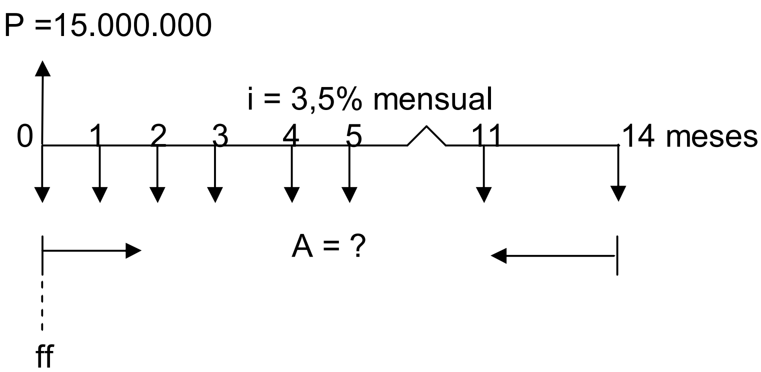
5.11.2 CALCULO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA EN FUNCION DEL VALOR PRESENTE

Teniendo en cuenta que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$; entonces realizando las transposiciones de términos se estable la fórmula que permite calcular la anualidad anticipada a partir de valor presente así: $A = \dfrac{P}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)}$ **(5.8)**

Ejemplo 5.19

Se recibe un préstamo de \$ 15.000.000 para cancelarlo en 15 cuotas mensuales iguales, pagaderas en forma anticipada, si la tasa de interés es del 3,5% mensual, hallar el valor de las cuotas.

Solución:



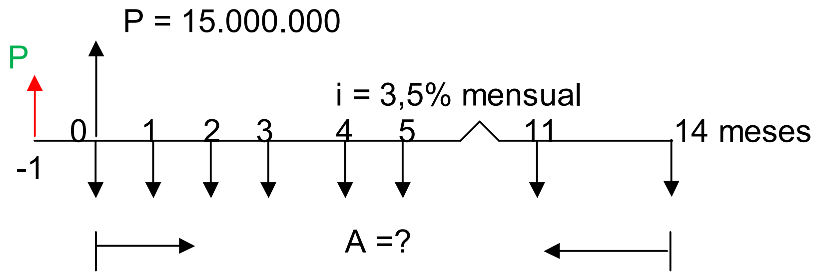
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

El flujo que está en el período cero, se puede manejar de manera independiente, y los flujos que están desde el período 1 hasta el período 23, se tratan como una anualidad vencida. Por lo tanto, se puede plantear la siguiente igualdad:

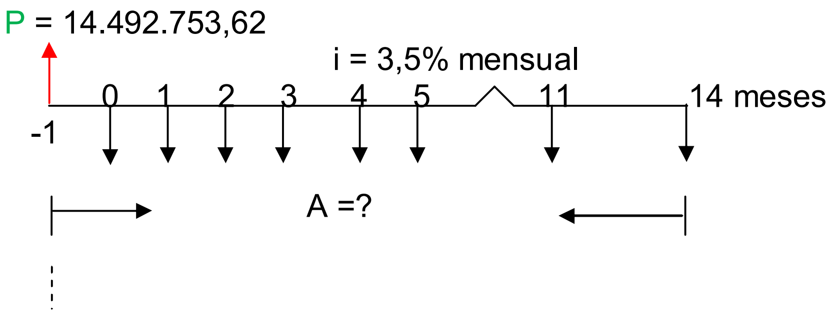
$P = A + A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; por consiguiente: $15.000.000 = A + A\left[\frac{1-(1+0,035)^{-14}}{0,035}\right]$;

por lo tanto: $15.000.000 = 11,9205A$; $A = \frac{15.000.000}{11,9205} = \$1.258.334,34$

El ejercicio se podría realizar calculando un valor presente en el período -1 a partir de los $ 10.000.000 y luego se calcula la anualidad a partir de ese valor presente. Lo anterior, se puede visualizar en el diagrama económico siguiente:



Se puede plantear la siguiente igualdad: $P=F(1+i)^{-n}$; por lo tanto: $P=15.000.000(1+0,035)^{-1}$; de donde: $P=14.492.753,62$. A partir de este presente que se encuentra en el período -1; se calcula la anualidad, se tiene el siguiente diagrama:



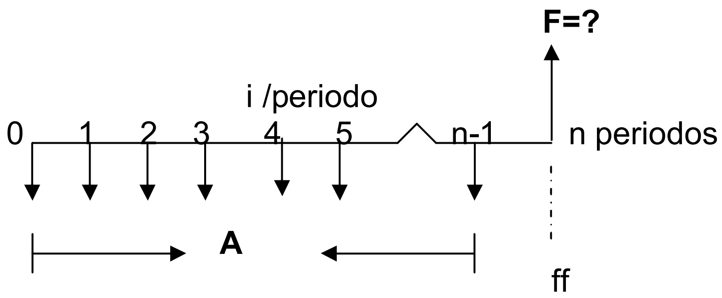
ff $\quad\Sigma$ Deudas = Σ Pagos (en la ff $\rightarrow$ 0)

$$14.492.753,62=A\left[\frac{1-(1+0,035)^{-15}}{0,035}\right]$$; de donde: $14.492.753,62=11.5174A$;

$$A=\frac{14.492.753,62}{11,5174}=\$\,1.258.334,34$$

5.11.3 VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

A partir del diagrama económico que se detalla a continuación se puede determinar la fórmula que permite calcular el valor futuro de una anualidad anticipada.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → n)

De la gráfica anterior se tiene la ecuación No 1

$$F = A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-4} + \ldots\ldots.. + A(1+i)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1+i)$, se tiene:

$$F(1+i) = \left[A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots.. + A(1+i)\right](1+i)$$

Simplificando términos en el segundo miembro de la ecuación anterior, la ecuación No 2 quedaría:

$$F(1+i) = \left[A(1+i)^{n+1} + A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots.. + A(1+i)^{2}\right]$$

Restando (1) de (2), se tendrá la ecuación No 3:

$$F(1+i) - F = A(1+i)^{n+1} - A(1+i)$$

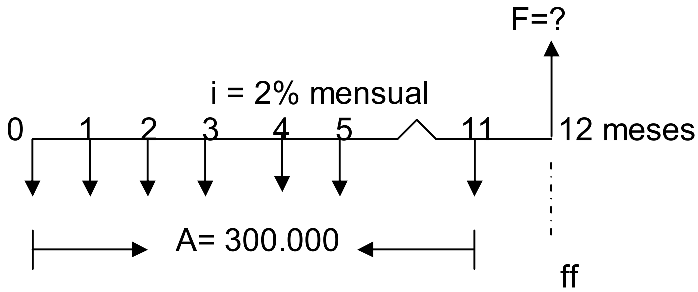
Factorizando la ecuación No 3, se obtiene. $F(1+i-1) = A(1+i)\left[(1+i)^{n} - 1\right]$; por lo que se tendrá: $Fi = A(1+i)\left[(1+i)^{n} - 1\right]$; por lo cual, se obtendrá.

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right](1+i) \quad \textbf{(5.9)}$$

Ejemplo 5.20

Una persona recibe por concepto de arriendo (mes anticipado), la suma de $1.000.000 mensuales, y deposita el 30% en una cuenta de ahorros en una institución financiera, que le reconoce el 2% de interés mensual. El depósito lo realiza un vez recibe el valor de la renta. Si el in mueble estuvo arrendado por un año, ¿Cuanto tendrá acumulado en la cuenta al final de los 12 meses?
Solución:

$$\text{Depósito} = 1.000.000 * 0,30 = \$300.000$$



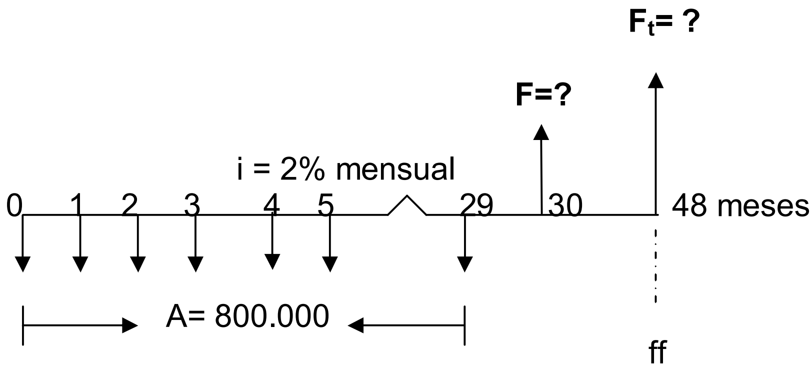
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 12)

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i) = 300.000\left[\frac{(1+0,02)^{12}-1}{0,02}\right](1+0,02) = \$4.023.626,92$$

Ejemplo 5.21

Una persona deposita \$ 800.000, al principio de cada mes, en un fondo que reconoce el 2% mensual. Después de 2,5 años no hizo más depósito, pero dejó el dinero acumulado hasta ese momento, 1,5 año más a la misma tasa de interés. Calcular el valor acumulado.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 48)

Primero se calcula el valor futuro de la anualidad anticipada aplicando la siguiente igualdad:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)$$

Por lo tanto: $F = 800.000\left[\frac{(1+0,02)^{30}-1}{0,02}\right](1+0,02) = \$33.103.552,63$

Ahora se calcula el valor acumulado en el mes 48:

$F_t = P(1+i)^n = 33.103.552,63 * (1+0,02)^{18}$; por consiguiente:

$$F_t = \$\ 47.280.024,82$$

5.12 CALCULO DEL TIEMPO EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

Es el número de flujos de caja (ingresos y egresos) que ocurren al inicio de cada período, que garantizan la amortización de una obligación financiera. Se puede determinar, en función del valor presente o del valor futuro.

a) Cálculo del tiempo (n) en función del valor presente (P) de una anualidad (A) anticipada

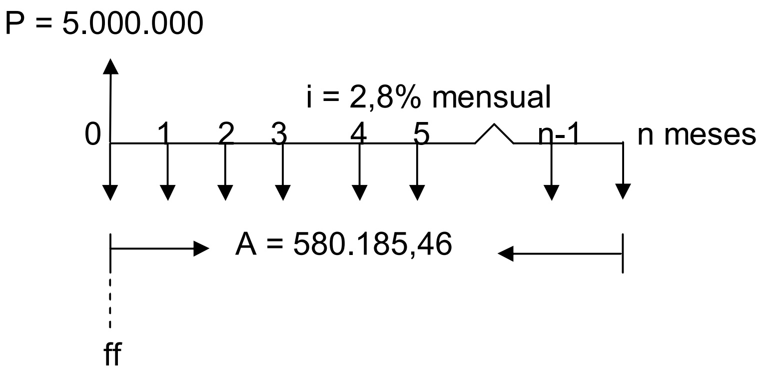
Se tiene que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$; despegando se obtiene: $\frac{Pi}{A(1+i)} = \left[1-(1+i)^{-n}\right]$; sumando $(1+i)^{-n}$ y restando $\frac{Pi}{A(1+i)}$; a ambos lados de la ecuación se tiene: $(1+i)^{-n} = \left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)$; aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad. Para el primer término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base; se tendría:

$-nLn(1+i) = Ln\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)$, donde: $n = \frac{-Ln\left(1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right)}{Ln(1+i)}$ **(5.10)** ; en la anterior expresión, se debe garantizar que: $0 \langle \left[1-\frac{Pi}{A(1+i)}\right] \langle 1$, con el objeto que **n,** sea positivo y definido.

Ejemplo 5.22

Una obligación de \$ 5.000.000 se va a cancelar con pagos mensuales iguales anticipados de 580.185,46. Si la tasa de interés es del 2,8% mensual, calcular el número de pagos que garanticen el pago de la obligación.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se plantea la siguiente igualdad: $5.000.000 = 580.185,46\left[\frac{1-(1+0,028)^{-n}}{0,028}\right]$;

donde: $1-(1,028)^{-n} = \frac{5.000.000 * 0,028}{580.185,46}$; por lo tanto: $(1,028)^{-n} = 1-0,2413$;

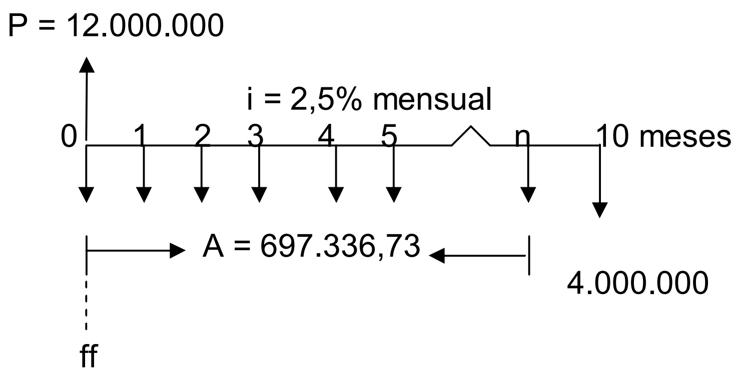
entonces:

$$n = \frac{-Ln(0,7587)}{Ln(1,028)} = 10 \text{ meses}$$

Ejemplo 5.23

Se quedan debiendo 12.000.000 que se pagarán con cuotas mensuales iguales, comenzando hoy, de $ 697.336,73 y una cuota extra pactada en el mes de 10 de $ 4.000.000. Si el acreedor cobra una tasa del 2,5% mensual, Con cuántas se cancela la deuda?.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

El primer flujo de caja, se maneja de manera independiente, por lo tanto, se puede plantear la siguiente igualdad:

$$12.000.000 = 697.336,73 + 697.336,73\left[\frac{1-(1+0,025)^{-n}}{0,025}\right] + 4.000.000(1+0,025)^{-10}$$

donde: $8.177.869,66 = 697.336,73\left[\frac{1-(1,025)^{-n}}{0,025}\right]$; por lo tanto:

$1-(1,025)^{-n} = \frac{8.177.869,69 * 0,025}{697.336,73}$; entonces: $1-(1,028)^{-n} = 0,2932$; por consiguiente: $(1,028)^{-n} = 1-0,2932$; donde: $n = \frac{-Ln(0,7068)}{Ln(1,025)} = 14,05 \text{ meses}$

b) Cálculo del tiempo (n) en función del valor futuro de una anualidad (A) anticipada

Se tiene que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$; despegando se obtiene: $\frac{Fi}{A(1+i)} = \left[(1+i)^n - 1\right]$;

sumando 1 a ambos lado de la igualdad, se obtendrá $\left(1+\frac{Fi}{A(1+i)}\right) = (1+i)^n$; aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación. Para el segundo término se tiene el logaritmo de una potencia, que es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base, se tendría:

$$Ln\left(1+\frac{Fi}{A(1+i)}\right) = nLn(1+i) \text{ ; por consiguiente: } n = \frac{Ln\left(1+\frac{Fi}{A}\right)}{Ln(1+i)} \quad \textbf{(5.11)}$$

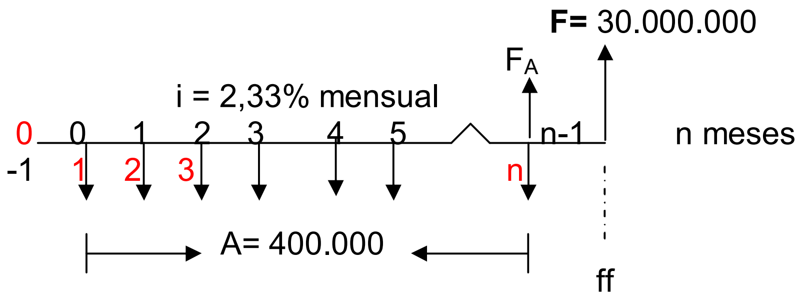
Ejemplo 5.24

Un empleado consigna $ 400.000 al principio de cada mes en una cuenta de ahorros que paga el 28%, convertible mensualmente. ¿En cuánto tiempo logrará ahorrar $30.000.000?

Solución:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0,28}{12} = 0,0233 \text{ mensual}$$

Para resolver el ejercicio, se manejará la anualidad de $ 400.000 como vencida, por tanto, se hace uno del período **-1**, y se encuentra un valor futuro en el período **n-1**, y luego se traslada al periodo n. Lo anterior, se visualiza en el siguiente diagrama económico.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 12)

El n de la anualidad vencida se determina como: n = n-1-(-1) = n ; Por lo cual se podría plantear la siguiente igualdad:

$$30.000.000 = 400.000\left[\frac{(1+0{,}233)^n - 1}{0{,}0233}\right](1+0{,}0233);$$

Haciendo las trasposiciones de los términos se tendrá:

$\dfrac{30.000.000 * 0{,}0233}{400.000 * (1{,}0233)} = (1{,}0233)^n - 1$; entonces: $1{,}7077 = (1{,}0233)^n - 1$; por lo tanto: $(1{,}0233)^n = 2{,}7077$; donde; $n = \dfrac{Ln(2{,}7077)}{Ln(1{,}0233)} = 43{,}22\,\text{meses}$

También, se podría resolver usando de manera directa, la siguiente igualdad:

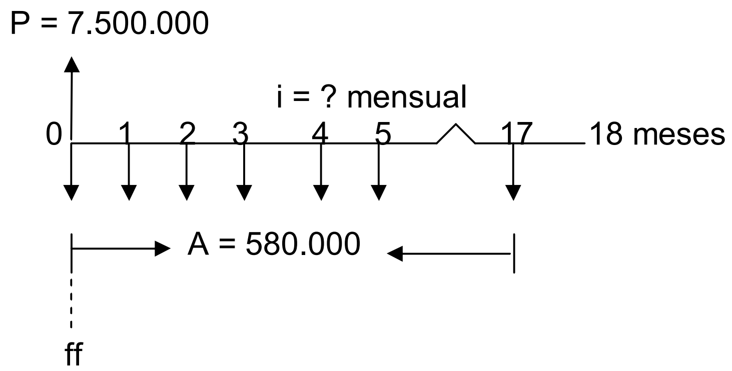
$$n = \frac{Ln\left(1 + \frac{Fi}{A}\right)}{Ln(1+i)} = \frac{Ln\left((1 + \frac{30.000.000 * 0{,}0233}{400.000}\right)}{Ln(1+0{,}0233)} = \frac{Ln((2{,}7475))}{Ln(1{,}0233))} = 43{,}22 \text{ meses}$$

5.13 CALCULO DE LA TASA DE INTERES EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

Ejemplo 5.25

Una maquina se adquiere a crédito por la suma de \$ 7.500.000 se va a financiar por medio de 18 cuotas mensuales anticipadas de \$ 580.000, determinar la tasa de interés:

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Se plantea la siguiente igualdad: $7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}\right](1+i)$; La tasa de interés solicitada, se encontrará por el método de tanteo, para lo cual, se le dará valores arbitrarios a **i,** de manera que se encuentre un valor a cero (0) muy cercano por la derecha y por la izquierda, es decir, se buscará un número positivo y negativo, y se procederá a una interpolación lineal, que permita encontrar la tasa de interés, que se está solicitando.

Para un i= 3,5% , se tiene: $7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-18}}{0{,}035}\right](1+0{,}035)$

De donde: $7.500.000 = 7.917{,}765{,}94$

Se presenta una diferencia de: $7.917{,}765{,}94 - 7.500.000 = -\,417.765{,}94$

Para un i = 4%, se tendrá: $7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+0{,}04)^{-18}}{0{,}04}\right](1+0{,}04)$

Entonces: $7.500.000 = 7.636.087{,}94$

Se presenta una diferencia de: $7.636.087{,}94 - 7.500.000 = -\,136.087{,}94$

Para un i = 4,5% , se tendrá:

$$7.500.000 = 580.000\left[\frac{1-(1+0{,}045)^{-18}}{0{,}045}\right](1+0{,}045)$$

Entonces: $7.500.000 = 7.370.171{,}03$

Se presenta una diferencia de: $7.500.000 - 7.370.171{,}03 = 129.828{,}97$

Ahora se tiene un valor por la izquierda de cero y uno por la derecha, y se asumirá que están cercanos a cero, por lo cual, ya se puede proceder a la interpolación lineal, por lo tanto, se tiene la siguiente tabla:

	i	Valor	
$\Re_1 \rightarrow$	4	-136.087,94	$\rightarrow$ X1
	?	0	$\rightarrow$ X
$\Re_2 \rightarrow$	4,5	129.828,97	$\rightarrow$ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$**,** se localizaran los X. Por consiguiente:

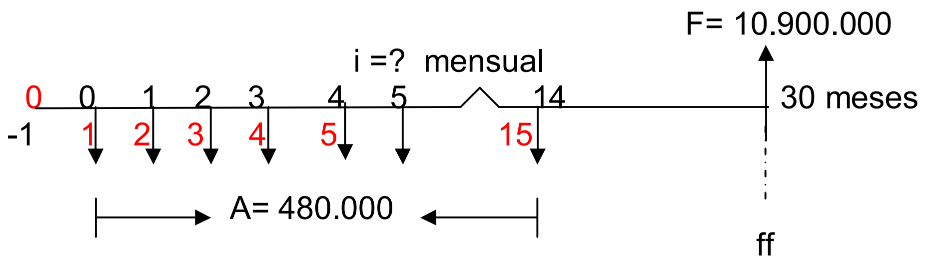
$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 4 + \frac{4{,}5 - 4}{129.828{,}97 + 136.087{,}94}(0 + 136.087{,}94)$$

$$i = 4 + \frac{0{,}5}{265.916{,}91}(136.087{,}94) = 4{,}25\%\ \text{mensual}$$

Ejemplo 5.26

Una persona hace 15 depósitos mensuales de \$ 480.000 al comienzo de cada mes, iniciando hoy, y después de 2,5 años tiene acumulada en su cuenta de \$ 10.900.000, ¿Qué tasa interés le aplicaron?.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff $\rightarrow$ 30)

Se plantea la siguiente igualdad: $10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+i)^{15} - 1}{i}\right](1+i)^{16}$; La tasa de interés solicitada, se encontrará por el método de tanteo, para lo cual, se le dará valores arbitrarios a **i,** de manera que se encuentre un valor a cero (0) muy cercano por la derecha y por la izquierda, es decir, se buscará un número positivo y negativo, y se procederá a una interpolación lineal, que permita encontrar la tasa de interés, que se está solicitando.

Para un i= 1,5% , se tiene: $10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+0,015)^{15}-1}{0,015}\right](1+0,015)^{16}$

De donde: $10.900.000 = 10.161.308,03$

Se presenta una diferencia de: $10.900.000 - 10.161.308,03 = 738.691,96$

Para un i = 1,7%, se tendrá: $10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+0,017)^{15}-1}{0,017}\right](1+0,017)^{16}$

Entonces: $10.900.000 = 10.638.138,15$

Se presenta una diferencia de: $10.900.000 - 10.638.138,15 = 261.861,85$

Para un i = 1,9% , se tendrá:

$$10.900.000 = 480.000\left[\frac{(1+0,019)^{15}-1}{0,019}\right](1+0,019)^{16}$$

Entonces: $10.900.000 = 11.137.141,26$

Se presenta una diferencia de: $10.900.000 - 11.137.141,26 = -237.141,26$

Ahora se tiene un valor por la izquierda de cero y uno por la derecha, y se asumirá que están cercanos a cero, por lo cual, ya se puede proceder a la interpolación lineal, por lo tanto, se tiene la siguiente tabla:

	i	**Valor**	
$\Re_1$ →	1,7	261.861,85	→ X1
	?	0	→ X
$\Re_2$ →	1,9	-237.141,26	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) \;=\; 1{,}7 + \frac{1{,}9 - 1{,}7}{-237.141{,}26 - 261.861{,}85}(0 - 261.861{,}85)$$

$$i = 1{,}7 + \frac{0{,}2}{-499.003{,}11}(-261.861{,}85) = 1{,}805\% \text{ mensual}$$

5.14 ANUALIDADES DIFERIDAS

Una anualidad diferida es aquella en que el primer pago se efectúa después de transcurrido cierto número de periodos. El tiempo transcurrido entre la fecha en la que se realiza la operación financiera y la fecha en que se da el primer pago, se conoce como período de gracia.

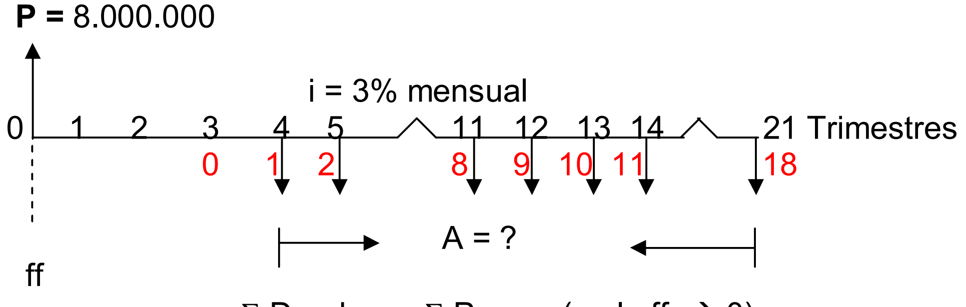
El periodo de gracia, puede ser muerto o de cuota reducida. En el primero, no se pagan intereses ni se abona a capital, por lo tanto, el capital inicial se va incrementando a través del tiempo de gracia por no pagarse los intereses; mientras que en el segundo se pagan los intereses, pero no se hacen abonos a capital, es decir, en este caso, el capital principal no se incrementa en el período de gracia, porque se están cancelando los intereses.

Ejemplo 5.27

Una deuda de \$8.000.000 se va a cancelar mediante 18 pagos trimestrales de \$A cada uno. Si el primer pago se efectúa exactamente al año de haberse prestado el dinero, calcular A con una tasa del 32% CT.

Solución:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}32}{4} = 0{,}08 \text{ Trimestral}$$



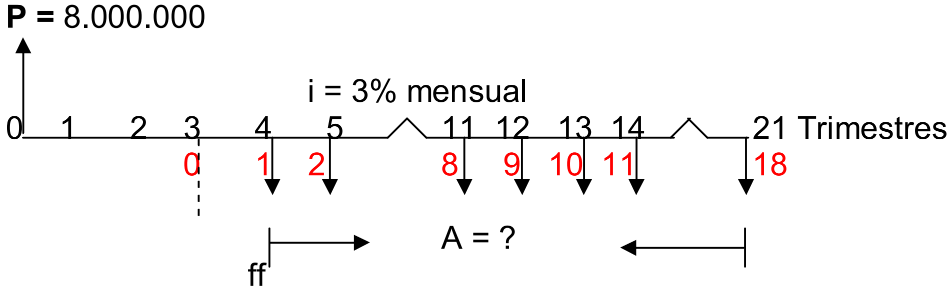
Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Lo primero que se debe hacer es definir el cero de la anualidad, como se va a manejar de manera vencida su cero estará en el período 3 del diagrama económico, y allí se encontrará el presente de la anualidad y después se trasladará a la fecha focal para determinar el valor de la A. Teniendo en cuenta que no se van a presentar formulas para las anualidades diferidas, debido a que se pueden usar las de las anualidades vencidas o anticipadas. Para el ejercicio en particular, se podría plantear la siguiente igualdad:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-n} \;;\; 8.000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-18}}{0{,}08}\right](1+0{,}08)^{-3}$$; por consiguiente:

$$8.000.000 = 7{,}4397A \text{ ; de donde: } A = \frac{8.000.000}{7{,}4397} = \$\,1.075.311{,}29$$

Otra manera de resolver el ejercicio, es colocando la fecha focal en el período 3.



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 3)

Se plantea la siguiente igualdad: $P(1+i)^{n} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; por consiguiente:

$$8.000.000(1+0{,}08)^{3} = A\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-18}}{0{,}08}\right]$$; de donde:

$$10.077.696 = 9{,}3719A \text{ ; entonces: } A = \frac{10.077.696}{9{,}3719} = \$\,1.075.311{,}29$$

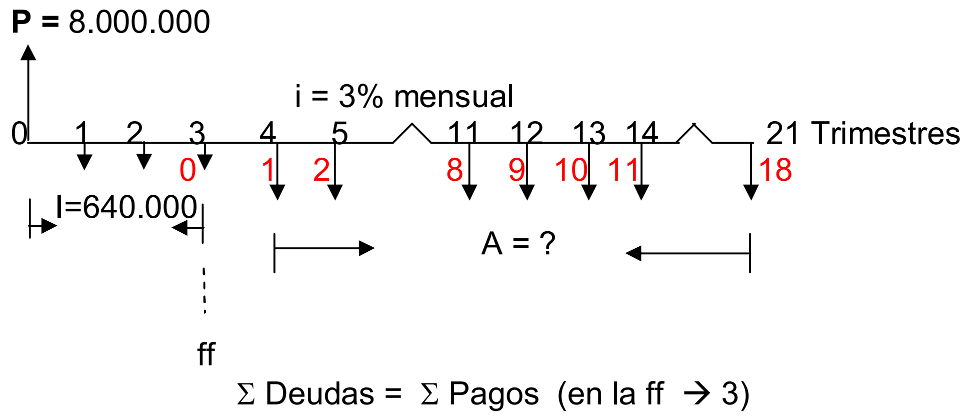
Ejemplo 5.28

Resolver el ejercicio anterior, si en el período de gracia, se pagan los intereses.

Solución:

Lo primero que se debe hacer es calcular el interés para un período, por lo tanto:

$$I = Pin = 8.000.000 * 0{,}08 * 1 = \$\,640.000$$



Tanto el valor presente como la anualidad que se refiere a los intereses, se les debe encontrar el valor futuro en el período 3, por lo que se podría plantear la siguiente igualdad:

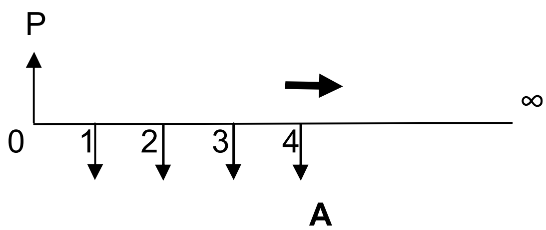
$$P(1+i)^n = I(1+i)^n + A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$; por consiguiente:

$$8.000.000(1+0{,}08)^3 = 640.000\left[\frac{(1+0{,}08)^3-1}{0{,}08}\right] + A\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-18}}{0{,}08}\right]$$; de donde:

$$8.000.000 = 9{,}3719A\ ;\ \text{entonces:}\quad A = \frac{8.000.000}{9{,}3719} = \$\ 853.616{,}77$$

5.15 ANUALIDADES PERPETUAS

Una anualidad perpetua es aquella en la que no existe el último pago, o aquella que tiene infinito números de pagos. Teniendo en cuenta que en este mundo todo tiene fin, se puede definir, que una anualidad indefinida o perpetuas, es aquella que tiene muchos flujos de caja (ingresos o desembolsos), como ejemplos, se podrían citar las cuotas de mantenimiento de una carretera o de un puente, o una inversión a muy largo plazo donde solo se retiran los intereses, claro, suponiendo que éstos son iguales en cada uno de los períodos. En esta anualidad, solo existe valor presente que viene a ser finito, porque el valor futuro o monto será infinito por suponerse que los flujos de caja son indefinidos. En realidad las anualidades perpetuas o indefinidas no existen. La anualidad perpetua vencida se representa en un diagrama económico de la siguiente manera:



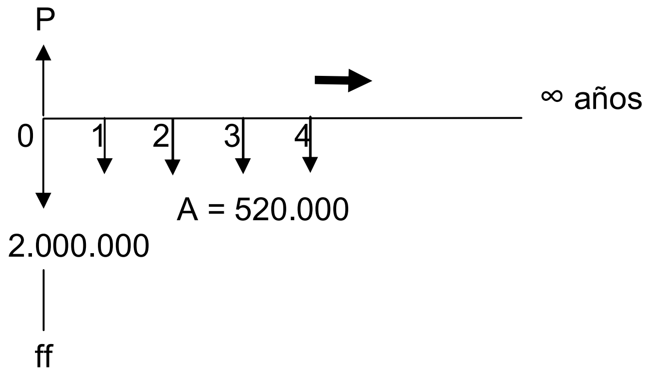
Se sabe que: $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$; si se aplica limite cuando $n \to \infty$; entonces:

$(1+i)^{-n}$ se vuelve cero (0); por lo tanto: $P = \frac{A}{i}$ **(5.12)**

Ejemplo 5.29

Los exalumnos de un universidad deciden donarle un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial es de $ 2.000.000 y el mantenimiento de estima en $ 520.000 anuales, hallar el valor de la donación, si la tasa efectiva es de 15% anual.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$P = 2.000.000 + \frac{520.000}{0,15} = \$5.466.666,67$$

Ejemplo 5.30

Para mantener en buen estado las carreteras municipales, la junta de gobierno decide establecer un fondo a fin de realizar las reparaciones futuras, que se estiman en $ 50.000.000 cada 5 años. Hallar el valor del fondo, con una tasa de interés del 18% EA.

Solución:

Lo primero que se establece, es la anualidad anual a partir de los $ 50.000.000,
es decir:

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right] = 50.000.000\left[\frac{0,18}{(1+0,18)^{5}-1}\right] = \$6.988.892,09$$

Una vez calculada la anualidad que se dará a perpetuidad, se halla el valor del fondo, por lo cual, se determina el valor presente.

$$P = \frac{6.988.892{,}09}{0{,}18} = \$38.827.178{,}28$$

5.16 ANUALIDADES GENERALES

Las anualidades generales, son aquellas en las cuales los períodos de pago no coinciden con los períodos de interés, por ejemplo; una serie de pagos semestrales con una tasa efectiva trimestral. Una anualidad puede ser reducida a una anualidad simple, si se hace que los períodos de tiempo y los períodos de interés coincidan, hay dos formas como se puede realizar:

1) Calcular pagos equivalentes, que deben hacerse en concordancia con los períodos de interés. Consiste en encontrar el valor de los pagos que, hechos al final de cada período de interés, sean equivalentes al pago único que se hace al final de un periodo de pago.
2) Modificar la tasa, haciendo uso del concepto de tasas equivalentes, para hacer que coincidan los periodos de pago con los del interés.

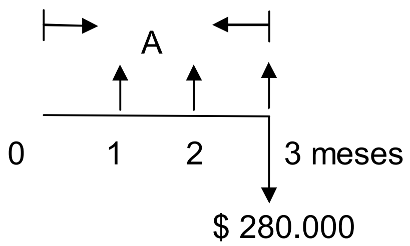
Ejemplo 5.31

Hallar el acumulado de 24 pagos trimestrales de $ 280.000 cada uno suponiendo una tasa de interés del 30% ACM. Realice el ejercicio por la dos formas enunciadas anteriormente

Solución: **FORMA 1**

Se tomará un flujo o pago trimestral de $ 280.000 y se convertirán a flujos o pagos mensuales, para que sea concordante con la aplicación de la tasa de interés, que para el caso es mensual.

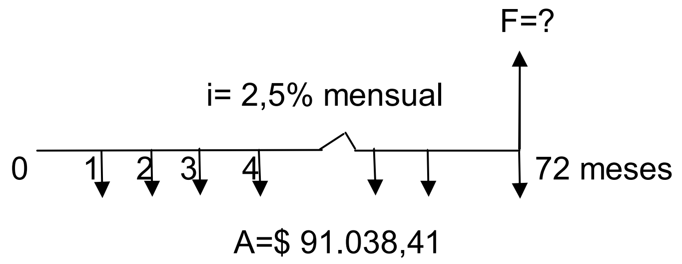
$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}30}{12} = 0{,}025 \text{ mensual}$$



Como los $ 280.000 se compartan como un futuro en cada uno de los períodos trimestrales, se procederá a partir de este valor a encontrar el flujo o pago mensual, para lo cual, se aplicará la siguiente igualdad.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \text{; por consiguiente: } A = 280.000\left[\frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^3 - 1}\right] = \$91.038{,}41$$

Ahora, teniendo los pagos mensuales, se procederá a determinar el valor futuro o acumulado, consideran que en 24 trimestres hay 72 meses (24 x 3).



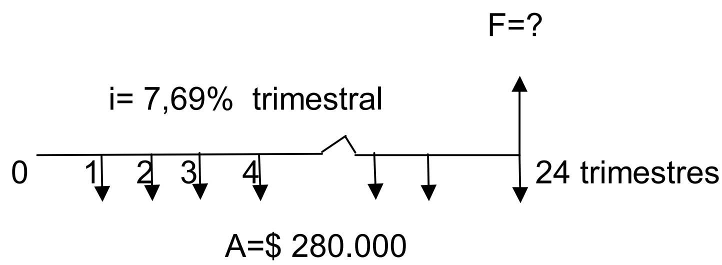
Se sabe que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 91.038{,}41\left[\frac{(1+0{,}025)^{72} - 1}{0{,}025}\right] = \$\,17.906.264{,}98$

FORMA 2

A partir de la tasa mensual de 2,5% se determina una tasa periódica o efectiva trimestral, así:

$(1+i_e)^m = (1+i_e)^t$; de donde: $(1+i_e)^1 = (1+0{,}025)^3$; entonces:

$i_e = (1+0{,}025)^3 - 1 = 0{,}0769$ trimestral



Se sabe que: $F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 280.000\left[\frac{(1+0{,}0769)^{24} - 1}{0{,}0769}\right] = \$\,17.906.264{,}98$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) El papa de un niño de 12 años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar $ 250.000 en una cuenta de ahorros al final de cada mes durante los próximos 5 años. Si la tasa de interés es del 27% ACM. ¿Cuál será el monto de la cuenta al cabo de 5 años?¿Cuanto recibe por concepto de intereses?. **R/. $ 31.112.608,73 y $ 16.112.608,73**.
2) ¿Cuál es el valor presente de $ 600.000 depositados en una cuenta al final de cada trimestre durante 4 años, si la tasa de interés es del 20% ACT?. **R/. $ 6.502.661,74**.
3) Un concesionario de automóviles ofreció a un cliente un auto nuevo mediante un pago inicial de $ 8.000.000 y 36 pagos mensuales de $ 680.000 cada uno. Si se cobra una tasa de interés del 30% CM, encuentre el valor de contado del auto. **R/. $ 24.018.250,73**.
4) El señor Juan Pérez recibió tres ofertas al querer vender un apartamento, ubicado en el Barrio de Crespo. La primera consistía en $ 90.000.000 de contado. La segunda consistía en $ 30.000.000 de contado y $ 230.000 al mes durante 36 meses. La tercera era de $ 650.000 al mes durante 3,5 años. Si la tasa de interés es del 2% mensual. ¿Cuál de estas ofertas es la más ventajosa para el señor Juan Pérez?.
5) Una persona es beneficiaria de un seguro de vida por $ 110.000.000. Ella escogió no tomar la cantidad de contado, sino recibir un ingreso mensual igual para los próximos 15 años. Si en dinero se encuentra invertido al 30% ACT, ¿Qué cantidad recibirá cada mes la persona?.
6) Cuantos pagos quincenales de $ 391.250 deberán hacerse para cancelar deuda de $ 8.500.000, con el 24% Convertible cada quincena?.
7) Pedro Fernández se ganó $ 60.000.000 en una lotería. Piensa depositar este dinero en una inversión en una institución financiera que le da el 28 % ACS e ir retirando $ 800.000 mensuales, con el fin un tiempo sin trabajar, hasta que el dinero se le agote. ¿Cuántos retiros podrá efectuar?.
8) Francisco ha depositado al final de cada mes $ 350.000 en una cuenta de ahorros. Al cabo de tres años recibe un monto de 1.800.000. ¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente, ha ganado?
9) Una familia desea empezar a ahorrar para realizar un viaje a San Andrés Isla. Se tiene realizarlo dentro de dos años. Con este fin depositan 260.000 cada mes en una en una cuenta que genera intereses a una tasa del 18%. Obtenga el monto y los intereses ganados.
10) Una persona depositó $ 300.000 al final de cada trimestre durante 3 años. Si no realizó ningún retiro en todo ese tiempo y su banco le abonaba el 2% mensualmente. ¿Cuál es el monto de la anualidad?¿Qué tanto de esa cantidad son intereses?.
11) Cada trimestre el señor García deposita $ 320.000 en su cuenta de ahorros, la cual gana un interés del 3,8% trimestral. Después de tres años, el señor García suspende los depósitos trimestrales y el monto obtenido en ese momento pasa a un fondo de inversión que da el 22% capitalizable cada mes. Si el dinero permaneció 2 años en el fondo de inversión, obtenga el monto final y el interés total ganado.
12) Cristina desea comprar un automóvil nuevo dentro de 4 años y pagarlo de contado. Para cumplir su deseo decide ahorrar $ 280.000 cada mes en una

cuenta que le paga un interés del 30% ACS. Justo después de realizado el depósito número 36, la tasa de interés baja al 28% ACS y, debido esto Cristina decide incrementar su mensualidad a $ 310.000. Obtenga el monto al cabo de 4 años.

13) El señor Pantoja queda incapacitado de por vida a consecuencia de un accidente laboral. La empresa donde labora le concede una indemnización de $ 450.000.000, con lo cual desea asegurarse una renta mensual para los próximos 20 años. Si el señor Pantoja puede invertir su dinero al 28%.
    a) ¿Cuál será su renta mensual si desea conservar intacto su capital?
    b) ¿Cuál será su renta mensual si el capital se agotará a los 20 años?
14) Una empresa deberá saldar una deuda con valor de vencimiento por $ 10.000.000, después de transcurridos 4 años. Para pagar esta deuda se decidió crear un fondo con depósitos mensuales iguales y una tasa de interés del 24% CM. ¿Qué cantidad se tiene acumulada al cabo de 2,5 años?.
15) Una deuda debe cancelarse en dos años mediantes pagos de $ 420.000 cada bimestre. El deudor acuerda con su acreedor en reestructurar la deuda, liquidándola en tres y medio años, con pagos mensuales iguales. Encuentre el valor de los nuevos pagos, si la tasa de interés es del 26% ACM.
16) Hace 10 meses una persona compró una lavadora a crédito, a un plazo de año y medio, dando abonos mensuales iguales y pagando un interés de del 32% ACM. El precio de contado de la lavadora era de $ 1.200.000. En este momento el comprador acaba de recibir cierta cantidad de dinero y desea saldar su deuda. ¿Qué cantidad deberá pagar?
17) Un aparato de rayos X se compró a crédito, sin cuota inicial, pagando $ 550.000 bimestrales durante los tres primeros años y $ 700.000 mensuales durante el cuarto año. Si la tasa de interés es del 28% ACBimestralmente en los tres primeros años y del 25% ACM para el cuarto año, encuentre el precio de contado del aparato de rayos X.
18) Pedro tiene actualmente 30 años y piensa jubilarse a los 62. La empresa donde labora acaba de establecer un fondo de jubilación para sus empleados. Pedro deberá depositar cantidades iguales cada quincena durante los próximos 32 años, de tal manera que al momento de jubilarse tenga un monto tal que le permita efectuar retiros mensuales de $ 1.000.000 durante 20 años. Depreciando el efecto inflacionario, ¿Qué cantidad debe abonar al fondo si este paga una tasa de interés del 2,5% mensual.
19) En una fábrica se necesitará reponer un equipo dentro de 10 años y la administración de la empresa decide establecer un fondo. El equipo cuesta actualmente $ 10.500.000. Tomando en cuenta una tasa de inflación del 5% anual, ¿Cuánto se tiene que depositar cada mes en una cuenta que paga un 1,5% mensual. ¿Cuánto interés ganará la cuenta?.
20) Un documento estipula pagos trimestrales de $ 120.000, durante 5 años. Si este documento se cancela con un solo pago al principio o con un solo pago al final determinar el valor del pago en cada caso suponiendo una tasa del 30% NT. **R/. VP = $ 1.223.338,96; VF= $ 5.196.561,76.**
21) Un documento ofrece pagos trimestrales de $ 30.000, iniciando el primer pago el 20 de abril de 1995 y terminando el 20 de abril de 2006. Si se desea cambiar este documento por otro que estipule pagos trimestrales de $X comenzando el 20 de abril de 1997 y terminando el 20 de octubre de 2001. Hallar el valor de la cuota, suponga una tasa del 24% NT. **R/. $ 66.232,28**

22) Una deuda de $ 1.500.000 va a ser cancelada en pagos trimestrales de $ 120.000 durante tanto tiempo como fuere necesario. Suponiendo una tasa del 24% NT. A) Cuántos pagos de $ 120.000 deben hacerse?. B) Con qué pago final hecho 3 meses después del último pago de $ 120.000 cancelará la deuda?. **R/. a) 23,79 pagos, b) $ 95.532,68.**

23) Si realizo 5 depósitos mensuales iguales de $ 90.000 cada uno empezando dentro de un mes y, un mes después de realizado el último deposito de $ 90.000 retiro $ 30.000 cada mes, durante 8 meses, encontrar el saldo después de realizado el último retiro, si el interés es del 2,2% mensual. **R/. $ 300.347**.

24) Un equipo de sonido oficina al contado $ 1.500.000, pero puede ser cancelado en 36 cuotas mensuales de $ 75.000 efectuándose la primera el día de la venta. ¿Qué tasa periódica mensual se está cobrando?. R/. 3,87% mensual.

25) Para la compra de un computador que vale $ 6.000.000; se exige una cuota inicial del 40% y el resto se cancela en 36 cuotas mensuales, ¿a cuánto ascenderá la cuota, si los intereses son el 3,5% efectivo mensual?. R/. $ 177.422,99

26) Un televisor con valor de contado de $ 900.000 se compra dando de cuota inicial el 40% y el resto en 12 cuotas mensuales iguales, pagándose la primera un mes después de cancelada la cuota inicial. Encontrar el valor de las cuotas mensuales si el interés de financiación es del 2,8% mensual. **R/. $ 53.603,88**.

27) Si en el problema 25, se ofrecen dos cuotas extraordinarias: la primera de $ 350.000 en el mes 5, y la segunda de $ 500.000, en el mes 18, ¿Cuál será el valor de la cuota ordinaria?. **R/. 149.633,07**

28) Los dineros de un contrato de arrendamiento por un año, que empieza hoy, con canon de $ 300.000 mensuales anticipados, los deposito en una corporación que ofrece el 2,5% mensual. A) Hallar el acumulado obtenido, seis meses después de vencido el contrato. B) Si el arrendatario quisiera pagar hoy el total de dicho contrato, y se le reconociera el 2,5% mensual por pronto pago. ¿Cuánto debe cancelar hoy? **R/ a) $ 4.919.574 y b) $ 3.154.262**.

29) Un artículo se compró a plazos pagando 7 cuotas mensuales iguales de $ 80.000 y un interés de financiación del 3% mensual, si la primera cuota se pagó cinco meses después de entregado el artículo, encontrar el valor de contado. **R/. $ 442.842**.

30) Una deuda de $ 100.000, en cuánto meses se cancela, si se realizan pagos mensuales iguales de $ 8.000 y el interés de financiación es del 2,6% mensual. ¿Cuál es el valor de el último pago, si la debe pagarse en períodos completos. **R/ 15,31 mese**s **y $ 2.523,7**.

31) Si depositamos hoy $ 365.062,86 en una corporación que ofrece el 3% mensual. ¿Durante cuántos meses, empezando dentro de 9 meses, se podrán hacer retiros mensuales de $ 30.000?. **R/. 21 meses**.

32) Una institución financiera presta $ 800.000 al 2,5% mensual para ser cancelados con 24 cuotas mensuales iguales. Si una vez cancelada la cuota 10 hago un abono de $ 202.215,44. A) Encontrar el valor de las cuotas sin tener en cuenta el abono. B) ¿En cuánto disminuye la cuota con el abono, si el plazo del préstamo sigue siendo igual. C) ¿En cuánto tiempo disminuye el plazo después del abono si el valor de la cuota sigue igual?. **R/. a) $ 44.730,26, b) $ 17.296,81 y c) 8 meses**.

33) Al comprar un computador, se quedaron debiendo $ 1.200.000, para ser cancelado en 4 cuotas trimestrales, empezando dentro de 6 meses. Hallar el

valor de las cuotas si el interés de financiación es del 0,75% quincenal. **R/. 350.527**.

34) Una deuda se debe cancelar con 24 cuotas trimestrales iguales y un interés del 36% NM. Si una vez cancelada la cuota 15 se solicita refinanciar el saldo existente en dicho momento para cancelarlo con 12 cuotas mensuales iguales y al mismo interés, si se sabe que el valor de las nuevas cuotas es de $ 20.000. Encontrar el valor del préstamo inicial. ¿Cuál fue el saldo a financiar?. **R/. $ 318.982,59 y $ 199.080**.

35) Una deuda de $ 1.000.000 se conviene en pagarla en 30 meses, con un interés del 32% anual compuesto continuamente de la siguiente forma: El 60% de la deuda es equivalente a cancelar 15 cuotas bimestrales iguales vencidas y el 40% restante es equivalente a pagar 5 cuotas semestrales iguales vencidas. Encontrar el valor de las dos clases de cuotas. **R/. $ 59.688 y $ 126.035,95**.

36) Ahorro $ 10.000 mensualmente empezando hoy y haciéndolo en 25 oportunidades en una institución financiera que reconoce el 2% mensual para los primeros 7 meses, el 2,1% mensual del mes 7 al 20 y de allí en adelante el 1,9% mensual. Encontrar el acumulado 5 meses después de realizado el último depósito. Encontrar también el valor presente hoy bajo esas condiciones de dichos depósitos. **R/. 353.402,2 y $ 198.228,3**.

37) Un préstamo de $ 2.000.000 se debe cancelar con 30 cuotas bimestrales iguales y un interés de financiación del 2,9% mensual. Si una vez cancelada la novena cuota se abonan $ 400.000. Encontrar el valor de la nueva cuota bimestral, si el plazo permanece constante. ¿En cuánto tiempo disminuye el plazo si el valor de la cuota permanece constante?. **R/. $ 109.829,37 y 7,6 bimestres**.

38) Si obtengo hoy un crédito de $ 4.000.000 al 24,48% NT para cancelarlo con 48 cuotas mensuales iguales y espero hacer abonos semestrales de $ 50.000 empezando un año y medio después de concedido el préstamo y durante 5 semestres, ¿En cuánto se rebaja la cuota a partir del mes 19 si lo abonado en cada semestre se utiliza para disminuir el valor de las cuotas mensuales durante el respectivo semestre?. **R/ $ 8.926,29**.

39) Tengo una deuda de $ 10.000.000 adquirida al 6% bimestral y la cual debo pagar con 24 cuotas trimestrales iguales y vencidas, pero poseo dos bienes A y B que puedo arrendar desde hoy. Si espero que el arriendo del bien A me dé el 60% del valor de la cuota y el bien B lo restante, ¿cuál debe ser el valor del arriendo mensual anticipado de cada bien, de tal manera que se paguen las cuotas, si los dineros obtenidos los deposito en una corporación que reconoce el 1,5% mensual?. **R/. A = $ 196.389,86 y B = $ 130.926,57.**

40) Una deuda de $ 17.000.000 se debe cancelar en 5 años con 60 cuotas mensuales iguales y además cada 6 meses se deben pagar cuotas extras iguales equivalentes al 120% de la correspondiente cuota mensual. Si para los primeros 3 años opera un interés del 27,54% NSA y de allí en adelante el 37,09% NTV, encontrar el valor de las cuotas mensuales y semestrales. **R/. $ 469.156,86 y $ 562.988,2**.

41) Al comprar un artículo se quedan debiendo $ 3.000.000, para cancelar en 5 años con cuotas mensuales iguales en el primer año; cuotas bimestrales iguales durante los 2 años siguientes y con cuotas trimestrales iguales para los dos últimos años. Si las cuotas bimestrales son el 10% más que las cuotas mensuales y las cuotas trimestrales son $ 700 más que las cuotas bimestrales, halle el valor de las cuotas a pagar para un interés de financiación del 9,52%

tetramensual?. **R. mensual: $ 143.851,6 ; bimestral = $ 158.236 y trimestral = $ 158.936.**

42) De un artículo financian el 60% del valor de contado que se debe pagar en 48 cuotas mensuales iguales. Si se sabe que una vez cancelada la cuota 20 se abonaron $ 300.000 y el saldo existente en dicho momento se canceló con 5 cuotas semestrales de $ 90.000, halle el valor de contado del artículo, si el interés de financiación es del 2% mensual. **R/. $ 1.488.252**.

43) El Banco Ganadero le concede un préstamo de $10.000.000 a una tasa del 36% trimestre vencido. Usted consigue un período de gracia de un año, durante el cual, el banco le cobra el 2.5% mensual de intereses y los intereses no se pagan, sino que se capitalizan. El préstamo tiene un plazo de 3 años, incluido el período de gracia, y se va a cancelar en cuotas trimestrales iguales. Calcule el valor de cada cuota. **R/. Cuota:** $ **2.429.869.52.**

44) Un electrodoméstico se financia de la siguiente forma: una cuota inicial de $400.000 y 12 cuotas mensuales iguales de $ 85.000, pagaderas en forma anticipada. Si la tasa de interés que le cobran es del 3.5% mensual, ¿cuál es el valor del electrodoméstico? **R/.** $ **1.250.131.83**

45) Un electrodoméstico que tiene un valor de contado de $ 3.000.000, lo compro financiado de la siguiente forma: cuota inicial de $ 250.000 y cuotas mensuales de $ 194.125,16 pagaderas en forma anticipada. Si le cobran una tasa de interés del 3% mensual, ¿En cuánto tiempo termina de cancelar el electrodoméstico, **R/. 18 meses**.

46) Financiar $ 10.000.000 a tres años en cuotas mensuales iguales debiendo cancelar la primera dentro de 8 meses y dos pagos adicionales por valor de $1.500.000 cada uno en los meses 15 y 26, sabiendo que la tasa de interés es del 30% anual durante el primer año y del 35% anual de ahí en adelante. **R/. Cuota: $457.682**.

47) Con el fin de reunir $15.000.000 para dentro de 5 años, se abre una cuenta de ahorros con un depósito inicial de $1.300.000 y luego depósitos mensuales iguales durante los cinco años. Si al cabo de dos años se debe retirar de la cuenta la suma de $2.000.000, hallar el valor de los depósitos mensuales para que a los cinco años se tenga la cantidad deseada, sabiendo que la cuenta de ahorros paga el 3% mensual durante los dos primeros años y el 3.8% mensual en lao tres años siguientes. **R/. Cuota = $ 60.788**.

48) Una industria vende toda su producción y si pudiera producir más vendería más, por tal motivo le ha solicitado al banco de donde él es cliente que le preste $8 millones para ser cancelado en 20 pagos trimestrales de $A c/u, pero también solicita que le permitan efectuar el primer pago exactamente al año de que se le conceda el préstamo, está solicitud la hace debido a que con el dinero del préstamo va a comprar en el exterior la maquinaria necesaria para la importación, nacionalización, transporte, período de montaje y pruebas hasta dejarla en su punto para la producción. Calcular $A con una tasa del 36% ACT. **R/. Cuota: $ 1.134.926.90**.

49) El testamento del señor Pérez, conocido filántropo, establece que deberá pagarse al asilo de ancianos María Auxiliadora, una renta perpetua de $250,000, pagaderos al final de cada año. ¿Cuál es el valor actual de ese legado, suponiendo que se encuentra invertido a 12.64% de interés efectivo anual? **R/. $ 1.977.848**.

50) Una entidad estatal puede usar el edificio A que requiere $5 millones cada año como costo de mantenimiento y $6 millones cada 5 años para reparaciones o, puede usar el edificio B que requiere $5.1 millones cada año como costo de funcionamiento y $1 millón cada 2 años para reparaciones. Suponiendo una tasa del 30% efectivo anual y que el edificio que se ocupe será por tiempo indefinido, ¿Cuál de los dos edificios le resulta más conveniente utilizar? **R/. Costo Edificio A = $18.878.297.64 ; Costo Edificio B = $18.449.275.36. Mejor edificio B**.

51) Una obligación se ha pactado cancelar de la siguiente forma: una cuota inicial equivalente al 20% y dos pagos en los meses 6 y 12 de $ 5.000.000 y $ 10.000.000 respectivamente, con una tasa de interés del 3% mensual. Transcurridos 8 meses se resuelve cancelar el saldo en 12 cuotas mensuales iguales a una tasa de interés del 3,2% mensual. Calcular los nuevos pagos. **R/. $ 903.370,34**.

52) Un terreno que de contado vale $ 25.000.000 se va a financiar de la siguiente forma: cuota inicial igual al 8%, 36 cuotas mensuales iguales anticipadas, y una cuota extraordinaria al final del mes 18 de $ 2.500.000. Si la tasa de interés que le cobran es del 26% capitalizable mensualmente, calcular el valor de las cuotas. **R/. $ 840.006,55**.

53) Determinar el valor de contado de un activo que financiado se puede adquirir así: cuota inicial del 20% del valor de contado y 24 cuotas mensuales de $ 800.000, más una cuota extraordinaria de $ 2.000.000 en el mes 6. La tasa de interés es del 30% capitalizable mensualmente. **R/. $ 5.707.493,27**.

54) El Banco Bogotá concede un préstamo de $ 10.000.000 a una tasa de 36% NTV. Otorga un período de gracia de un año y no cobra los intereses, durante el cual cobra el 2,5% mensual. El préstamo tiene un plazo de 3 años, incluido el período de gracia, y se va a cancelar en cuotas trimestrales iguales. Calcule el valor de cada cuota. **R/. $ 2.429.869,52**.

55) Una entidad financiera concede un crédito de a tres años a un cliente por valor de $ 50.000.000 con las siguientes condiciones: período de gracia de 6 meses, cuotas mensuales iguales, tasa de interés del 34% capitalizable mensualmente y durante el período de gracia se cancelarán los intereses. Calcular las cuotas mensuales. **R/. $ 2.899.617,72**.

56) Un electrodoméstico que tiene un precio de contado de $ 5.000.000, se financia de la siguiente manera: cuota inicial del 30% y 36 cuotas mensuales iguales de $ 160.313,28. Sí solo se pueden pagar $ 150.000 mensuales, hallar el número de cuotas enteras necesarias para cancelar la deuda. La tasa de interés aplicada es del 3% mensual. **R/. 41 cuotas**.

57) Una obligación que inicialmente se había pactado cancelar con un pago de $ 2.000.000 dentro de 8 meses y otro pago por $ 3.250.000 para dentro de 16 meses, se conviene en pagar con 12 cuotas trimestrales iguales. Si la tasa de interés es del 3% mensual, calcular el valor de las trimestrales. **R/. $ 510.182,96**.

58) Un vehículo se está financiando con 36 cuotas mensuales de $ 800.000. Faltando el pago de 12 cuotas se resuelve cancelar el saldo con un solo pago, 6 meses más tarde. Calcular el valor de ese pago, si la tasa de interés es del 32% capitalizable mensualmente. **R/. $ 9.513.651,26**.

59) Al comprar mercancías se quedan debiendo $ 12.000.000, para cancelarlas en 3 años, por cuotas mensuales iguales el primes año, cuotas bimestrales iguales durante el segundo año y con cuotas trimestrales iguales en el tercer año. Si las cuotas bimestrales son el doble de las cuotas mensuales, y las cuotas

trimestrales son la tercera parte de las cuotas mensuales, calcular el valor de las cuotas, sí la tasa de financiación es del 2% mensual. **R/. mensuales: $ 613.882,65; bimestrales: $ 1.227.765,30; trimestrales: $ 204.627,55**.

60) Se hacen depósitos de $ 200.000 cada fin de mes, durante 24 meses, a una tasa del 2% mensual. ¿A qué tasa de interés se deben colocar igual número de depósitos, del mismo valor, en forma anticipada, para tener el mismo valor acumulado. **R/. 1,8495% mensual**.

CAPITULO 6. GRADIENTES O SERIES VARIABLES

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz:

1) Definir y explicar las series gradientes aritméticas y geométricas crecientes, decrecientes y perpetuas.
2) Calcular el valor presente y futuro de una serie aritmética creciente y decreciente.
3) Determinar el saldo con flujos de caja se comportan como serie gradiente aritmética y geométrica.
4) Resolver ejercicios de serie gradiente aritmética creciente con flujos anticipados y diferidos
5) Calcular el valor presente y futuro de una serie aritmética geométrica creciente y decreciente.
6) Calcular el valor presente de una serie aritmética perpetua.
7) Calcular el valor presente de una serie geométrica perpetua

TEMARIO

6.1 Introducción
6.2 Definición
6.3 Gradiente Aritmético o lineal
6.3.1 Valor presente de un gradiente aritmético o lineal creciente
6.3.2 Valor futuro de un gradiente aritmético o lineal creciente
6.4 Gradiente lineal decreciente
6.4.1 Valor presente de un gradiente lineal decreciente
6.4.2 Valor futuro de un gradiente lineal decreciente
6.5 Gradiente geométrico o exponencial
6.5.1 Valor presente de un gradiente geométrico creciente
6.5.2 Valor futuro de un gradiente geométrico creciente
6.6 Gradiente geométrico decreciente
6.6.1 Valor presente de un gradiente geométrico decreciente
6.6.2 Valor futuro de un gradiente geométrico decreciente
6.7 Gradiente aritmético perpetuo
6.8 Gradiente aritmético perpetuo

6.1 INTRODUCCIÖN

En este capítulo se tratan las series de flujos de caja (ingresos o desembolsos) que crecen o decrecen en un valor uniforme o constante, como también aquellas que aumentan o disminuyen en un valor porcentual. Es conveniente afirmar, que básicamente la única condición que cambia entre las series uniformes o anualidades y las series gradientes aritméticas y geométricas es que el valor de los flujos de caja varía y las demás condiciones no se modifican, por lo cual, los conceptos de series vencidas, anticipadas, diferidas y generales que se trataron en el capítulo anterior son los mismos y se manejaran en idéntica forma.

6.2 DEFINICION

Se denomina gradiente a una serie de flujos de caja (ingresos o desembolsos) periódicos que poseen una ley de formación, que hace referencia a que los flujos de caja pueden incrementar o disminuir, con relación al flujo de caja anterior, en una cantidad constante en pesos o en un porcentaje.

Para que una serie de flujos de caja se consideren un gradiente, deben cumplir las siguientes condiciones:

Los flujos de caja deben tener una ley de formación.
Los flujos de caja deben ser periódicos
Los flujos de caja deben tener un valor un valor presente y futuro equivalente.
La cantidad de periodos deben ser iguales a la cantidad de flujos de caja.

Cuando los flujos de caja crecen en una cantidad fija periódicamente, se presenta un gradiente lineal creciente vencido, sí los flujos de caja se pagan al final de cada periodo. Si los flujos de caja ocurren al comienzo de cada período se está frente a un gradiente lineal creciente anticipado. Si el primer flujo se posterga en el tiempo, se presenta un gradiente lineal creciente diferido. Las combinaciones anteriores también se presentan para el gradiente lineal decreciente.

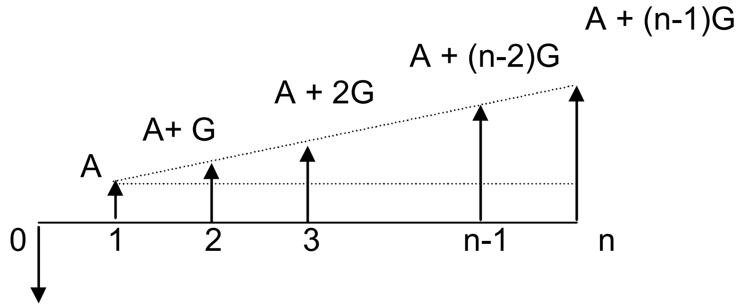
En el caso en que los flujos de caja aumenten en cada período en un porcentaje y se realizan al final de cada período se tiene un gradiente geométrico creciente vencido, y si los flujos ocurren al inicio de cada período, se tiene un gradiente geométrico creciente anticipado. Se tendrá un gradiente geométrico creciente diferido, si los flujos se presentan en períodos posteriores a la fecha de realizada la operación financiera. Lo anterior ocurre con el gradiente geométrico decreciente.

6.3 GRADIENTE ARITMETICO O LINEAL

Es la serie de flujos de caja periódicos, en la cual cada flujo es igual al anterior incrementado o disminuido en una cantidad constante en pesos y se simboliza con la letra **G** y se le denomina variación constante. Cuando la variación constante es positiva, se genera el gradiente aritmético creciente. Cuando la variación constante es negativa, se genera el gradiente aritmético decreciente.

6.3.1 Valor presente de un gradiente aritmético o lineal creciente

Es un valor ubicado en un período determinado, que resulta de sumar los valores presente de una serie de flujos de caja que aumenta cada período en una cantidad constante denominada gradiente (G).



$P_{TG} = P_A + P_G$

El valor A, se conoce como la base de la serie gradiente lineal creciente, y se comporta como una anualidad, esta base se encuentra localizada un periodo después del cero de la serie gradiente aritmética y en este cero se ubica el valor presente total de la serie gradiente aritmética o lineal, el cual se calcula a través de la fórmula $P_{TG} = P_A + P_G$, donde P_A , es el presente de la base o de la anualidad, y P_G es el presente del gradiente. El crecimiento o gradiente (G), se encuentra ubicado dos periodos después de donde se localiza el cero de la serie gradiente lineal o aritmética.

El valor presente total de la serie gradiente aritmética o lineal, se determina a través de la siguiente expresión:

$$P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right] \quad \textbf{(6.1)}$$

Donde:

$P_{TG} =$ Valor presente de la serie gradiente

$A =$ Valor de la base o anualidad

$i =$ Tasa de interés de la operación

$n =$ Número de flujos de caja

$G =$ Variación constante o gradiente

Para calcular el valor de cualquier flujo de caja en una serie gradiente aritmética creciente, se usa la siguiente expresión:

$$Cuota_n = A + (n-1)G \quad \textbf{(6.2)}$$

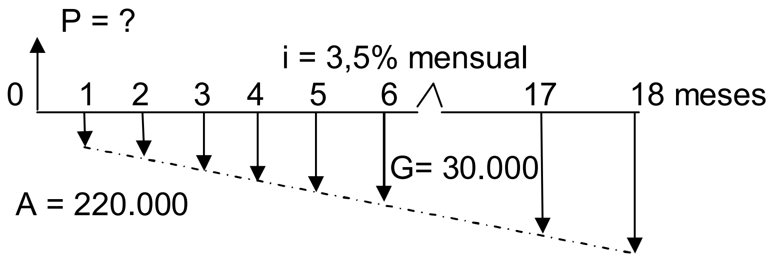
Donde:

$$\text{Cuota}_n = \text{Valor de la cuota n de la serie gradiente.}$$
$$A = \text{Valor de la base}$$
$$n = \text{Número del flujo de caja que se está analizando}$$
$$G = \text{Variación constante o gradiente}$$

Ejemplo 6.1

El valor de un torno se cancela en 18 cuotas mensuales, que aumentan cada mes en $ 30.000, y el valor de la primera es de $ 220.000. Si la tasa de interés es del 3,5% mensual, hallar el valor del torno.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$P = 220.000\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-18}}{0{,}035}\right] + \frac{30.000}{0{,}035}\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-18}}{0{,}035} - \frac{18}{(1+0{,}035)^{18}}\right]$$

$$P = \$\ 5.901.028,16$$

Ejemplo 6.2

Para el ejercicio anterior calcular la cuota No 12

Solución:

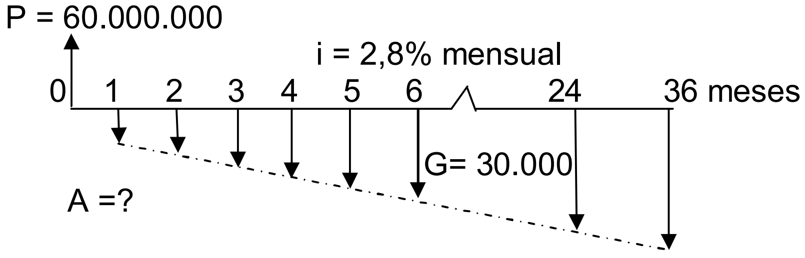
La cuota No 12 se puede calcular usando la fórmula $\text{Cuota}_n = A + (n-1)G$

Entonces: **Cuota$_{12}$** = 220.000 + (12 - 1)*30.000 = $ 550.000

Ejemplo 6.3

Una deuda de $ 60.000.000 se va a financiar en 36 cuotas mensuales, que aumentan en $ 30.000 cada mes. Si la tasas de interés es del 2,8% mensual, determinar el valor de la primera cuota y el valor de la cuota 24.

Solución:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 0)$$

$$60.000.000 = A\left[\frac{1-(1+0,028)^{-36}}{0,028}\right] + \frac{30.000}{0,028}\left[\frac{1-(1+0,028)^{-36}}{0,028} - \frac{36}{(1+0,028)^{36}}\right]$$

$$60.000.000 = 22,4986A + 9.832.693,192$$

$$A = \frac{50.167.306,88}{22,4986} = \$\ 2.229.796,83$$

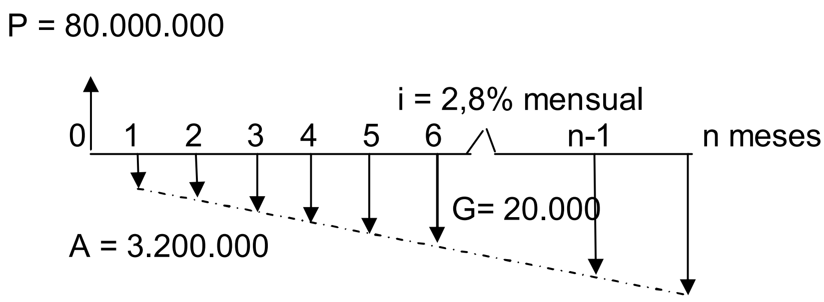
La cuota 24, se determina así:

$$\text{Cuota}_{24} = 2.229.796,83 + (24-1) * 30.000 = \$\ 2.919.796,83$$

Ejemplo 6.4

¿Con cuántos pagos mensuales que aumentan en $ 20.000 cada mes, se cancela el valor de una obligación de $ 80.000.000, si la tasa de interés es del 2,8% mensual y la primera cuota es de $ 3.200.000?¿Cuál será el valor de la cuota 20?

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

Este ejercicio de manera inicial se puede resolver usando el método de tanteo o ensayo y error, el cual requiere que se establezca la ecuación de valor y a partir de ella, se le da valores arbitrarios a la variable que se desea encontrar, en este caso sería hallar el valor de **n**, que para el ejercicio define el número de pagos con los cuales se cancela la obligación financiera. Lo que se pretende es hallar un valor muy cercano a cero (0) que sea positivo y un valor muy cercano a cero (0) que sea negativo, y a partir de ellos realizar una interpolación lineal para encontrar el valor de la variable requerida.

$$80.000.000 = 3.200.000\left[\frac{1-(1+0,028)^{-n}}{0,028}\right] + \frac{20.000}{0,028}\left[\frac{1-(1+0,028)^{-n}}{0,028} - \frac{n}{(1+0,028)^{n}}\right]$$

Para n = 35, se tiene 80.000.000 = 77.107.481,93, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = 2.892.518,07.

Para n = 39, se tiene 80.000.000 = 82.690.145,18, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = - 2.690.145,18

Se aprecia que se tienen dos valores uno positivo y otro negativo y se suponen que están muy cercanos a cero (0), por lo tanto se procederá a realizar la interpolación lineal.

	n	**Valor**	
$\Re_1$ →	35	2.892.518,07	→ X1
	?	0	→ X
$\Re_2$ →	39	- 2.690.145,18	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

$$n = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 35 + \frac{39 - 35}{-2.690.145,18 - 2.892.518,07}(0 - 2.892.518,07)$$

$$n = 35 + \frac{4}{5.582.663,25}(-2.892.518,07) = 37,03 \text{ meses,}$$

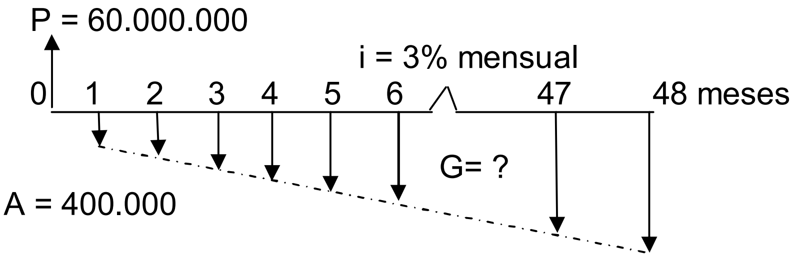
El valor de la cuota 20, se calcula con la fórmula: $Cuota_n = A + (n-1)G$

Entonces: **Cuota$_{20}$** = 3.200.000 + (20 - 1)*20.000 = $ 3.580.000

Ejemplo 6.5

En qué valor debe aumentar el valor de 48 cuotas mensuales, si se está financiando una obligación financiera que tiene un valor de $ 60.000.000, si se exige una primera cuota de $ 400.000 y se cobra una tasa de interés del 3% mensual.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$60.000.000 = 400.000\left[\frac{1-(1+0,03)^{-48}}{0,03}\right] + \frac{G}{0,03}\left[\frac{1-(1+0,03)^{-48}}{0,03} - \frac{48}{(1+0,03)^{48}}\right]$$

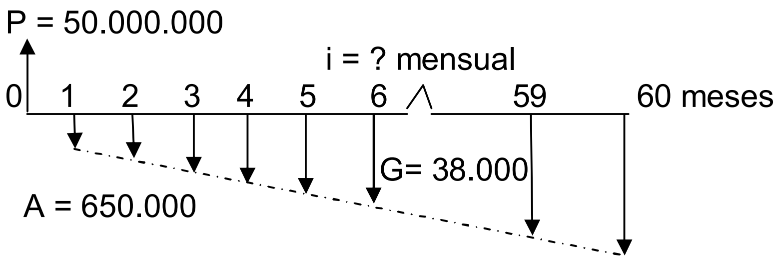
$$60.000.000 = 10.106.682,65 + \frac{G}{0,03}[25,2667 - 11,6159]$$

$$G = \frac{[60.000.000 - 10.106.682,65] \times 0,03}{25,2667 - 11,6159} = \frac{1.496.799,52}{13,6508} = 109.649,50$$

Ejemplo 6.6

Se comprará un apartamento por la suma de \$ 50.000.000 con las siguientes condiciones: 60 cuotas que aumenten en \$ 38.000 cada mes, siendo la primera de \$ 650.000, calcular la tasa de interés?.

Solución:



$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos} \quad (\text{en la ff} \rightarrow 0)$$

Este ejercicio de manera inicial se puede resolver usando el método de tanteo o ensayo y error, el cual requiere que se establezca la ecuación de valor y a partir de ella, se le da valores arbitrarios a la variable que se desea encontrar, en este caso sería hallar el valor de **i**, que para el ejercicio define el número de pagos con los cuales se cancela la obligación financiera. Lo que se pretende es hallar un valor muy cercano a cero (0) que sea positivo y un valor muy cercano a cero (0) que sea negativo, y a partir de ellos realizar una interpolación lineal para encontrar el valor de la variable requerida.

$$50.000.000 = 650.000\left[\frac{1-(1+i)^{-60}}{i}\right] + \frac{38.000}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-60}}{i} - \frac{60}{(1+i)^{60}}\right]$$

Para i = 2%, se tiene 50.000.000 = 53.895.082,65, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = - 3.895.082,65.

Para i = 2,4%, se tiene 80.000.000 = 47.735.673,35 , por lo tanto se establece una diferencia, DIF = 2.264.325,35

Se aprecia que se tienen dos valores uno positivo y otro negativo y se suponen que están muy cercanos a cero (0), por lo tanto se procederá a realizar la interpolación lineal.

	I	**Valor**	
$\Re_1 \rightarrow$	2%	- 3.895.082,65	$\rightarrow$ X1
	?	0	$\rightarrow$ X
$\Re_2 \rightarrow$	2,4%	2.264.326,35	$\rightarrow$ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 0{,}02 + \frac{0{,}024 - 0{,}02}{2.264.326{,}35 + 3.895.082{,}65}(0 + 3.895.082{,}65)$$

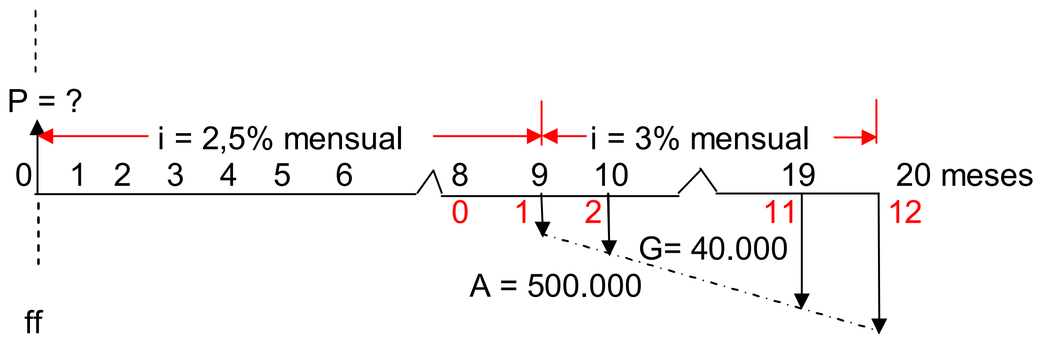
$$i = 0{,}02 + \frac{0{,}004}{6.159.409}(3.895.082{,}65) = 0{,}0224539 = 2{,}24539\% \quad \text{meses,}$$

Ejemplo 6.7

Calcular el valor de un préstamo que se está cancelando en 12 pagos mensuales que aumentan cada mes en \$ 40.000, pero el primer pago por valor de \$ 500.000 se realizó 9 meses después de la fecha de la negociación, y la tasa de interés es del 3% mensual. Durante los primeros 9 meses se cobró una tasa de interés del 2,5% mensual.

Solución:

El diagrama económico resultante en este ejercicio, es de una serie gradiente aritmética desfasada o diferida, ya que el primer flujo de caja, está ocurriendo nueve meses después de la fecha de la negociación.



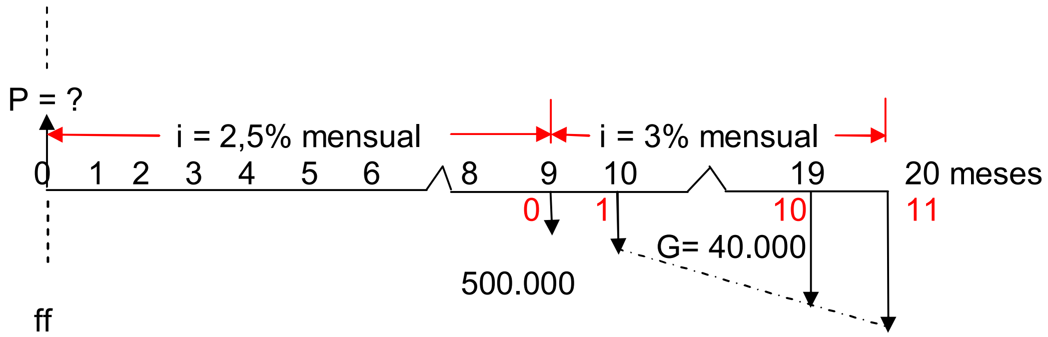
Para encontrar el valor del préstamo, se debe trasladar la serie gradiente al hoy (cero del diagrama económico), pero primero se define el cero de la serie gradiente, el cual se ubica un período antes de su primer flujo de caja, es decir en el período 8, y allí se calcula el valor presente total de la serie gradiente aritmética (Ptg) y luego se traslada al período 9 a la tasa de interés del 3%, porque hay que tener en cuenta que los primeros nueve períodos del diagrama económico, están afectados a la tasa del 2,5%.

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \ (ff \rightarrow 0)$$

$$P=\left[500.000\left(\frac{1-(1+0,03)^{-12}}{0,03}\right)\right]+\frac{40.000}{0,03}\left[\frac{1-(1+0,03)^{-12}}{0,03}-\frac{12}{(1+0,03)^{12}}\right](1+0,03)(1+0,025)^{-9}$$

$$P=(4.977.002+2.049.927,24)(1,03)(1,025)^{-9}=5.795.461,38$$

El ejercicio, también se podría realizar de la siguiente manera: El flujo de la serie gradiente que está en el período 9, se maneja de manera independiente, y se establece el cero de la serie gradiente en el periodo 9, entonces la nueva base tendrá un valor de 540.000, es decir en el periodo 9, se determinará el valor presente de la serie gradiente aritmética y luego se trasladará al cero del diagrama económico y así encontrar el valor del préstamo.



$$\sum \text{Arriba}=\sum \text{Abajo}\ (ff\rightarrow 0)$$

$$P=500.000(1+0,025)^{-9}+\left[540.000\left(\frac{1-(1+0,03)^{-11}}{0,03}\right)\right]+\frac{40.000}{0,03}\left[\frac{1-(1+0,03)^{-11}}{0,03}-\frac{11}{(1+0,03)^{11}}\right](1+0,025)^{-9}$$

$$P=400.364,18+(4.996.417,02+1.741.320,09)(1,025)^{-9}$$

$$P=5.795.461,38$$

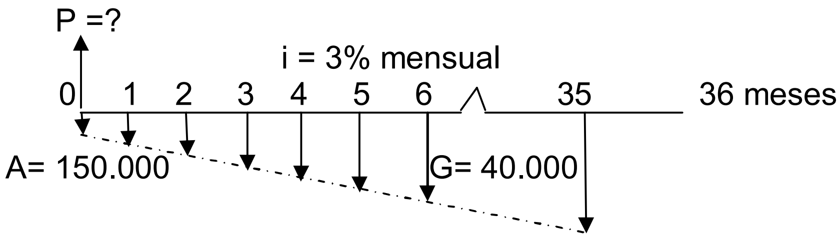
Hay que dejar claro que este ejercicio se refiere a una serie gradiente aritmética diferida, en esta la serie de flujos de caja aumentan en una cantidad constante respecto al flujo anterior, pero el primer flujo se realiza varios períodos después de haberse formalizada la operación financiera. El tiempo durante el cual no se hacen pagos se llama periodo de gracia muerto. Pero hay que tener el cuenta que como los pagos no se realizan, el capital se incrementa durante esos períodos de gracia, y sobre él se hacen los cálculos.

Ejemplo 6.8

El ejemplo que se realizara a continuación, se refiere a una serie a una serie gradiente aritmética anticipada, en la cual los flujos de caja cada período crecen en una cantidad constante de pesos con respecto al flujo anterior, pero el primer pago se realiza en el mismo momento en que se la operación financiera. El ejemplo se podrá resolver por dos métodos.

¿Cuál será el valor de un artículo que se financia en 36 cuotas mensuales anticipadas, que crecen cada mes en $ 40.000, si la primera cuota tiene un valor de de $ 150.000 y se paga el mismo día de la negociación?. La tasa de interés es del 3% mensual.

***Solución*: METODO 1**



En este método, se supondrá que el flujo que está en el cero del diagrama, es decir los $ 150.000 se tratará de manera independiente, y los flujos del periodo 1 al 35, se les dará tratamiento de una serie gradiente aritmética vencida, en donde su primer flujo tendrá un valor de $ 190.000.

$$\Sigma \text{ Deudas} = \Sigma \text{ Pagos (en la ff} \rightarrow 0)$$

$$P = 150.000 + 190.000\left[\frac{1-(1+0{,}03)^{-35}}{0{,}03}\right] + \frac{40.000}{0{,}03}\left[\frac{1-(1+0{,}03)^{-35}}{0{,}03} - \frac{35}{(1+0{,}03)^{35}}\right]$$

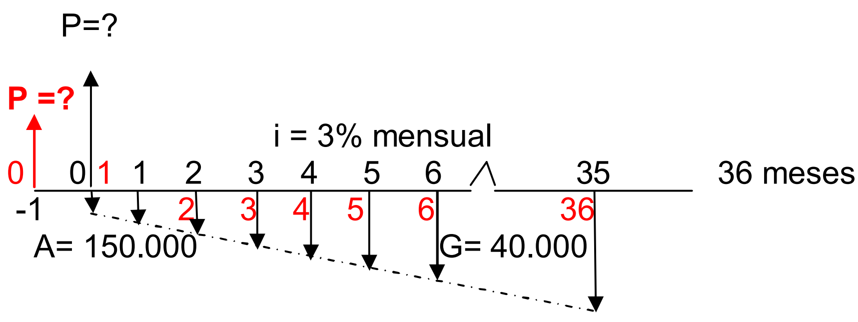
$$P = 150.000 + 4.082.571{,}81 + \frac{40.000}{0{,}03}[21{,}4872 - 12{,}4384]$$

$$P = \$16.297.638{,}47$$

<u>METODO 2</u>

***Solución*:**

En este método, se trabajará con el período -1 para tratar la serie gradiente aritmética como una serie vencida con flujos de caja desde el periodo 0 al 35, es decir, el primer flujo (base) será $ 150.000. En el período -1, se establecerá el cero (0) de la serie gradiente, en donde se calculará el presente, el cual se trasladará al cero del diagrama, que ahora será el período 1 de la serie gradiente aritmética.



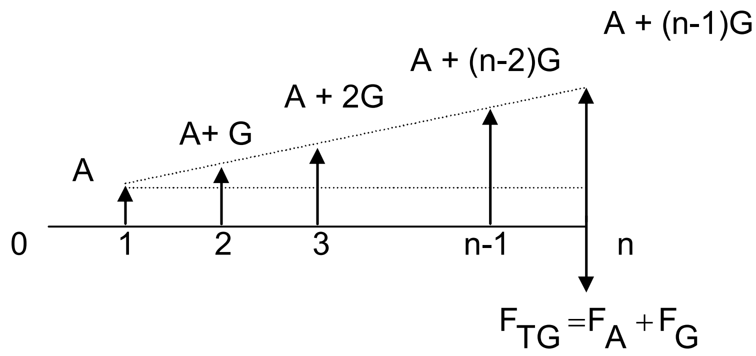
$$P=\left\{150.000\left[\frac{1-(1+0,03)^{-36}}{0,03}\right]+\frac{40.000}{0,03}\left[\frac{1-(1+0,03)^{-36}}{0,03}-\frac{36}{(1+0,03)^{36}}\right]\right\}(1+0,03)$$

$$P=\left\{3.274.837,874+\frac{40.000}{0,03}[21,8323-12,4212]\right\}(1,03)$$

$$P=\$16.297.638,47$$

6.3.2 Valor Futuro de un gradiente lineal creciente

Se busca determinar el valor futuro de una serie de flujos de caja periódicos que aumentan en un valor constante cada periodo. El valor futuro estará ubicado en el período de tiempo donde se encuentre el último flujo de caja de la serie gradiente aritmética o lineal creciente, y se calcula a través de la fórmula $F_{TG}=F_A+F_G$, donde F_A, es el valor futuro de la base o de la anualidad, y F_G es el valor futuro del gradiente.



El valor futuro total de la serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right] \quad \textbf{(6.3)}$$

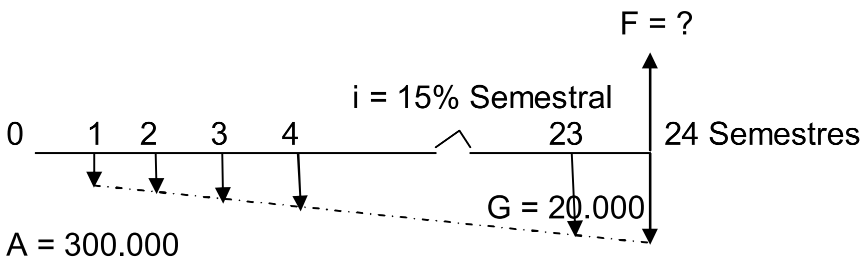
Donde:

$F_{TG} =$ Valor futuro de la serie gradiente
$A =$ Valor de la base o anualidad
$i =$ Tasa de interés de la operación
$n =$ Número de flujos de caja
$G =$ Variación constante o gradiente

Ejemplo 6.9

En una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 15% semestral, se hacen depósitos semestrales, que aumentan cada semestre en $ 20.000, durante 12 años. Si el valor del primer depósito es de $ 300.000, calcular el valor acumulado al final del año doce.

Solución:



El valor futuro total de la serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$F_{TG} = 300.000\left[\frac{(1+0,15)^{24} - 1}{0,15}\right] + \frac{20.000}{0,15}\left[\frac{(1+0,15)^{24} - 1}{0,15} - 24\right]$$

$$F_{TG} = 300.000\left[\frac{(1+0,15)^{24}-1}{0,15}\right] + \frac{20.000}{0,15}\left[\frac{(1+0,15)^{24}-1}{0,15} - 24\right]$$

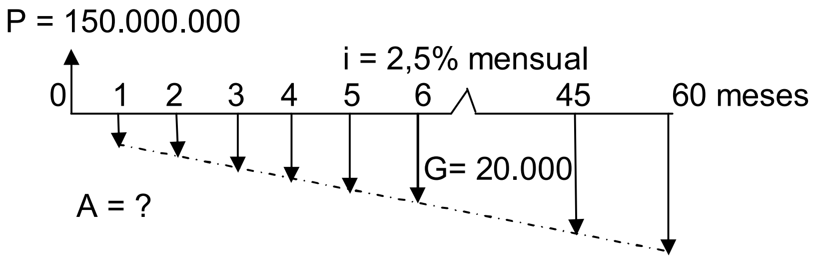
$$F_{TG} = 55.250.352,38 + 21.355.712,17 = \$76.606.064,55$$

$$F_{TG} = \$76.606.064,55$$

Ejemplo 6.10

Financiar una vivienda que tiene un valor de \$ 150.000.000 a una tasa de interés del 2,5% mensual, por medio de 60 cuotas mensuales que aumenten cada mes \$ 20.000. Calcular el valor de la primera cuota y el saldo de la deuda después de cancelar la cuota No 45.

Solución:



Σ Deudas = Σ Pagos (en la ff → 0)

$$150.000.000 = A\left[\frac{1-(1+0,025)^{-60}}{0,025}\right] + \frac{20.000}{0,025}\left[\frac{1-(1+0,025)^{-60}}{0,025} - \frac{60}{(1+0,025)^{60}}\right]$$

$$150.000.000 = 30,9087A + \frac{20.000}{0,025}[30,9087 - 13,6370]$$

Por lo tanto:

$$136.182.640 = 30,9087A \;;\quad A = \frac{136.182.640}{30,9087} = \$4.405.964,66$$

Para determinar el saldo, se lleva la deuda adquirida hoy al período 45, es decir; se le calcula el valor futuro: $\mathbf{F = P(1+i)^{n} = 150.000.000(1+0,025)^{45} = \$\ 455.685.491,8}$. A la cuotas que se han cancelado hasta el periodo 45, también se les halla el valor futuro, con la fórmula de valor futuro de la serie gradiente aritmética creciente:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - n\right]; \text{por lo tanto}:$$

$$F_{TG} = 4.405.964,66\left[\frac{(1+0,025)^{45}-1}{0,025}\right] + \frac{20.000}{0,025}\left[\frac{(1+0,025)^{45}-1}{0,025} - 45\right]$$

$$F_{TG} = 359.157.193 + 29.212.904,92 = \$\ 388.370.097,92$$

Por consiguiente el saldo en el período 45, será:

$$\text{Saldo} = 455.685.491,8 - 388.370.097,92 = \$67.315.393,9$$

Otra manera de determinar el saldo en el período 45, es trasladar a ese período las cuotas que faltan por pagar, es decir, 15 cuotas; para lo cual, hay que hallar el valor presente de esas cuotas, antes hay que encontrar la cuota No 46, así: $\mathbf{Cuota}_{(n)} = \mathbf{A} + (\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{G}$; por lo tanto:

$$\text{Cuota}_{46} = 4.405.964,66 + (46-1)20.000 = \$5.305.964,66$$

Ahora se procede a calcular el valor presente de las 15 cuotas que faltan por cancelar, así:

$$\text{Saldo} = P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

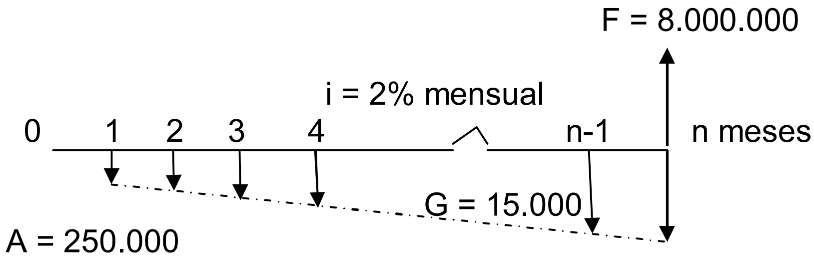
$$\mathbf{Saldo} = \mathbf{P_{TG}} = \mathbf{5.305.964,66}\left[\frac{\mathbf{1-(1+0,025)^{-15}}}{\mathbf{0,025}}\right] + \frac{\mathbf{20.000}}{\mathbf{0,025}}\left[\frac{\mathbf{1-(1+0,025)^{-15}}}{\mathbf{0,025}} - \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{(1+0,025)^{15}}}\right]$$

$$\mathbf{Saldo} = \mathbf{P_{TG}} = \mathbf{65.695.878,40} + \mathbf{1.619.515,5} = \mathbf{\$67.315.393,9}$$

Ejemplo 6.11

Un padre de familia necesita disponer de \$ 8.000.000 para pagar las matriculas universitarias de sus hijos, por lo cual depositará en una cuenta de ahorro \$ 250.000 al final del primer mes, si le reconocen una tasa de interés del 2% mensual, y cada mes puede aumentar sus depósitos en \$ 15.000. En cuánto tiempo tendrá el valor requerido?

Solución:



El valor futuro total de la serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - n\right]$$

Este ejercicio de manera inicial se puede resolver usando el método de tanteo o ensayo y error, el cual requiere que se establezca la ecuación de valor y a partir de ella, se le da valores arbitrarios a la variable que se desea encontrar, en este caso sería hallar el valor de **n**, que para el ejercicio define el número de pagos con los cuales se cancela la obligación financiera. Lo que se pretende es hallar un valor muy cercano a cero (0) que sea positivo y un valor muy cercano a cero (0) que sea negativo, y a partir de ellos realizar una interpolación lineal para encontrar el valor de la variable requerida.

$$8.000.000 = 250.000\left[\frac{(1+0{,}02)^{n}-1}{0{,}02}\right] + \frac{15.000}{0{,}02}\left[\frac{(1+0{,}02)^{n}-1}{0{,}02} - n\right]$$

Para n = 17 se tiene 80.000.000 = 7.262.070,96, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = 737.929,04.

Para n = 19, se tiene 8.000.000 = 8.590.558,63, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = - 590.558,63

Se aprecia que se tienen dos valores uno positivo y otro negativo y se suponen que están muy cercanos a cero (0), por lo tanto se procederá a realizar la interpolación lineal.

	n	**Valor**	
$\Re_1$ →	17	737.929,04	→ X1
	?	0	→ X
$\Re_2$ →	19	- 590.558,63	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

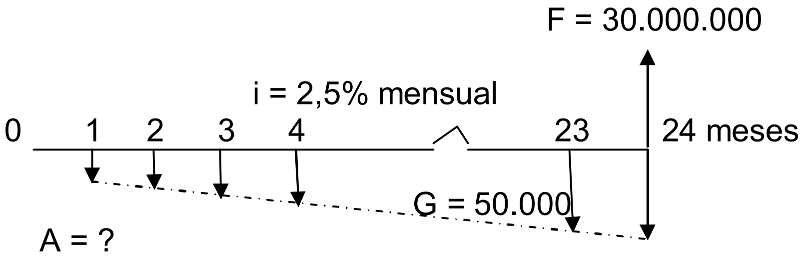
$$n = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 17 + \frac{19 - 17}{-590.558{,}63 - 737.929{,}04}(0 - 737.929{,}04)$$

$$n = 17 + \frac{2}{-1.328.487{,}67}(-737.929{,}04) = 18{,}13 \text{ meses,}$$

Ejemplo 6.12

Un vehículo que al final de dos años tiene un valor de \$ 30.000.000 se adquirirá haciendo depósitos mensuales durante los dos años, que aumentan cada mes en \$ 50.000, si la entidad financiera reconoce el 2,5% mensual. ¿Cuál debe ser el primer depósito?.

Solución:



El valor futuro total de la serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$30.000.000 = A\left[\frac{(1+0{,}025)^{24} - 1}{0{,}025}\right] + \frac{50.000}{0{,}025}\left[\frac{(1+0{,}025)^{24} - 1}{0{,}025} - 24\right]$$

$$30.000.000 = 32{,}35A + 16.698.075{,}97$$

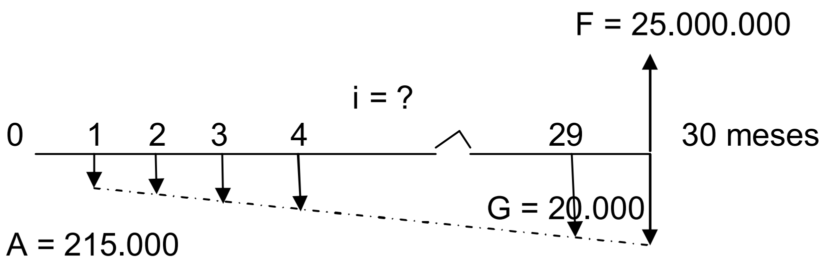
$$32{,}35A = 13.301.924{,}03$$

$$A = \frac{13.301.924{,}03}{32{,}35} = \$411.199{,}99$$

Ejemplo 6.13

¿Qué tasa de interés le aplicaron a una persona que al final del mes 30 pago la suma de \$ 25.000.000, si las cuotas que debía cancelar cada mes aumentaban en \$ 20.000, y el primer pago fue de \$ 215.000?.

Solución:



El valor futuro total de la serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

Este ejercicio de manera inicial se puede resolver usando el método de tanteo o ensayo y error, el cual requiere que se establezca la ecuación de valor y a partir de ella, se le da valores arbitrarios a la variable que se desea encontrar, en este caso sería hallar el valor de **i**, que para el ejercicio define el número de pagos con los cuales se cancela la obligación financiera. Lo que se pretende es hallar un valor muy cercano a cero (0) que sea positivo y un valor muy cercano a cero (0) que sea negativo, y a partir de ellos realizar una interpolación lineal para encontrar el valor de la variable requerida.

$$25.000.000 = 215.000\left[\frac{(1+i)^{30} - 1}{i}\right] + \frac{20.000}{i}\left[\frac{(1+i)^{30} - 1}{i} - 30\right]$$

Para i = 3,8% se tiene 25.000.000 = 24.425.029,61, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = 574.970,39

Para i = 4% , se tiene 25.000.000 = 25.100.730,49, por lo tanto se establece una diferencia, DIF = - 100.730,49

Se aprecia que se tienen dos valores uno positivo y otro negativo y se suponen que están muy cercanos a cero (0), por lo tanto se procederá a realizar la interpolación lineal.

	i	Valor	
$\Re_1$ →	3,8%	574.970,39	→ X1
	?	0	→ X
$\Re_2$ →	4%	- 100.730,49	→ X2

Inmediatamente se procede a la utilización de la expresión $? = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1)$, teniendo el cuidado de ubicar los $\Re$ en la columna donde se encuentra la incógnita, en frente de cada $\Re$, se localizaran los X. Por consiguiente:

$$i = \Re 1 + \frac{\Re 2 - \Re 1}{X2 - X1}(X - X1) = 0{,}038 + \frac{0{,}04 - 0{,}038}{-100.730{,}49 - 574.970{,}39}(0 - 574.970{,}39)$$

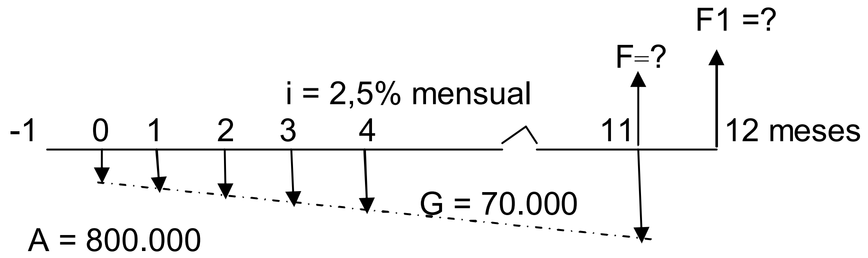
$$i = 0{,}038 + \frac{0{,}002}{-675.700{,}88}(-574.970{,}39) = 0{,}03971 = 3{,}971\% \text{ mensual,}$$

Ejemplo 6.14

Una persona se dispone invertir en una institución financiera depósitos mensuales que aumentan cada mes en $ 70.000. Si comienza hoy con $ 800.000, ¿ Cuál será el valor de la inversión al término de un año, sabiendo que le pagan un 2,5% mensual?.

Solución:

El diagrama económico resultante en este ejercicio, es de una serie gradiente aritmética anticipada, ya que el primer flujo de caja, está ocurriendo en el periodo cero (Hoy del diagrama económico). Para encontrar el valor de la inversión al final del año 1, se debe calcular primero el valor F1, por consiguiente se debe tomar como el cero de la serie gradiente el periodo -1, y luego calcular el valor F en el mes 12.



El valor futuro total de esta serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right](1+i)$$

$$F_{TG} = 800.000\left[\frac{(1+0,025)^{12}-1}{0,025}\right] + \frac{70.000}{0,025}\left[\frac{(1+0,025)^{12}-1}{0,025} - 12\right](1+0,025)$$

$$F_{TG} = 11.036,442,38 + 5.153.237,02 \; ; \qquad F_{TG} = 16.189.679,40$$

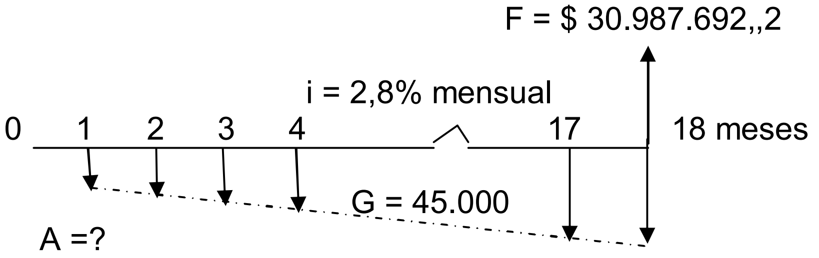
Ejemplo 6.15

Una persona desea comprar un automóvil que cuesta hoy $ 25.000.000; para lo cual hará depósitos mensuales durante 18 meses, que aumenten cada mes a $ 45.000, en una entidad financiera que le reconoce el 2,8% mensual, Si la inflación promedio mensual es del 1,2%. ¿Cuál será el valor de la primera cuota?.

Solución:

Teniendo en cuenta el fenómeno inflacionario, se debe determinar el valor del automóvil al final de los dos. Por lo tanto:

$\mathbf{F = P(1+i_{di})^n = 25.000.000(1+0,012)^{18} = \$\ 30.987.692,21}$; ahora se procede al cálculo de la primera cuota, a partir del valor disponible que debe tener la persona al final de los 2 años, es decir los $ 30.987.692,21.



El valor futuro total de esta serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$30.987,692,21 = A\left[\frac{(1+0,028)^{18}-1}{0,028}\right] + \frac{45.000}{0,028}\left[\frac{(1+0,028)^{18}-1}{0,028} - 18\right]$$

$$30.987,692,21 = 22,9965A + 8.030.119,71; \text{ entonces:}$$

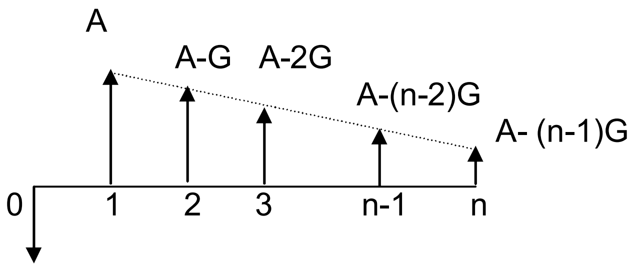
$$22.957.572,5 = 22,9965A$$

Por lo tanto, $A = \dfrac{22.957.572,5}{22,9965} = \$\ 998.307,24$

6.4 GRADIENTE LINEAL DECRECIENTE

6.4.1 Valor presente de un gradiente lineal decreciente

Es un valor localizado en el presente equivalente a una serie de flujos de caja periódicos que disminuyen, cada uno respecto al anterior, en una cantidad constante (G)



$$P_{TG} = P_A - P_G$$

El valor A, se conoce como la base de la serie gradiente lineal decreciente, y se comporta como una anualidad, esta base se encuentra localizada un periodo después del cero de la serie gradiente aritmética y en este cero se ubica el valor presente total de la serie gradiente aritmética o lineal, el cual se calcula a través de la fórmula $P_{TG} = P_A - P_G$, donde P_A, es el presente de la base o de la anualidad, y P_G es el presente del gradiente. El decrecimiento o gradiente (G), se encuentra ubicado dos periodos después de donde se localiza el cero de la serie gradiente lineal o aritmética.

El valor presente total de la serie gradiente aritmética decreciente, se determina mediante la siguiente expresión:

$$P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right] \quad \textbf{(6.4)}$$

Donde:

P_{TG} = Valor presente de la serie gradiente

A = Valor de la base o anualidad

i = Tasa de interés de la operación

n = Número de flujos de caja

G = Variación constante o gradiente

Para calcular el valor de cualquier flujo de caja en una serie gradiente aritmética decreciente, se usa la siguiente expresión:

$$\text{Cuota}_n = A - (n-1)G \quad \textbf{(6.5)}$$

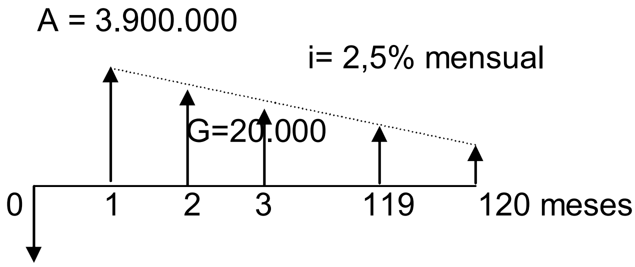
Donde:

$\text{Cuota}_n = \text{Valor de la cuota } n \text{ de la serie gradiente.}$
$A = \text{Valor de la base}$
$n = \text{Número del flujo de caja que se está analizando}$
$G = \text{Variación constante o gradiente}$

Ejemplo 6.16

Una vivienda se está cancelando con 120 cuotas mensuales que decrecen en $ 20.000 cada mes, siendo la primera cuota $ 3900.000. Si la tasa de financiación que se cobra es del 2,5% mensual, calcular el valor de la vivienda.

Solución:



$$P_{TG} = P_A - P_G$$

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los pagos para arriba y el valor del activo, en este caso el valor de la vivienda para abajo.

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

$$\mathbf{P_{TG} = 3.900.000\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-120}}{0{,}025}\right] - \frac{20.000}{0{,}025}\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-120}}{0{,}025} - \frac{120}{(1+0{,}025)^{120}}\right]}$$

$$P_{TG} = 147.941.378{,}6 - 25.387.797{,}85 = 122.553.580{,}07$$

Ejemplo 6.17

En el ejercicio anterior, calcule la cuota 80.

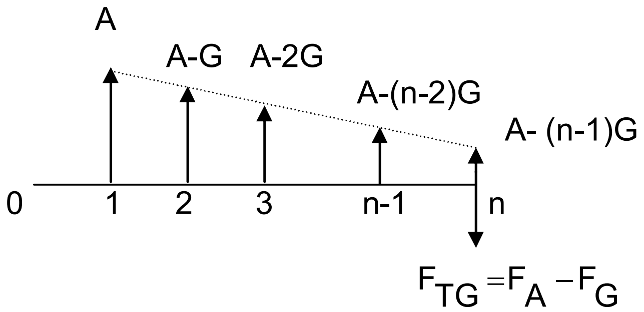
Solución:

La cuota 80, se calcula usando la siguiente igualdad: $Cuota_{(n)} = A - (n-1)G$

$$Cuota_{80} = 3.900.000 - (80-1)20.000 = 2.320.000$$

6.4.2 Valor futuro de un gradiente lineal decreciente

Consiste en determinar un valor futuro equivalente a una serie de flujos de caja periódicos que disminuyen cada periodo en un valor constante (G), el valor futuro se encuentra ubicado en el período donde se encuentra el último flujo de caja, y se calcula a través de la fórmula $F_{TG} = F_A - F_G$, donde F_A , es el valor futuro de la base o de la anualidad, y F_G es el valor futuro del gradiente.



El valor futuro total de la serie gradiente aritmética decreciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right] \quad \textbf{(6.6)}$$

Donde:

$F_{TG} =$ Valor futuro de la serie gradiente

$A =$ Valor de la base o anualidad

$i =$ Tasa de interés de la operación

$n =$ Número de flujos de caja

$G =$ Variación constante o gradiente

Para calcular el valor de cualquier flujo de caja en una serie gradiente aritmética decreciente, se usa la siguiente expresión:

$$Cuota_n = A - (n-1)G \quad \textbf{(6.7)}$$

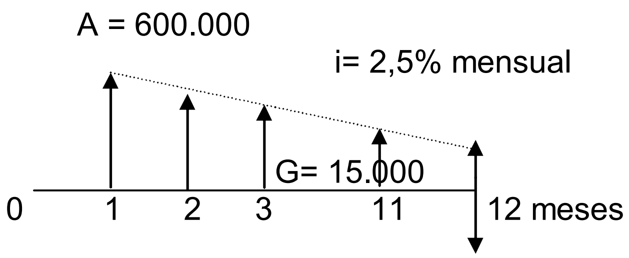
Donde:

$Cuota_n =$ Valor de la cuota n de la serie gradiente.
$A =$ Valor de la base
$n =$ Número del flujo de caja que se está analizando
$G =$ Variación constante o gradiente

Ejemplo 6.18

Una persona realiza depósitos en una institución bancaria que disminuyen en \$ 15.000 cada mes, si se devenga un interés del 2,5% mensual, ¿cuál será el valor que se tendrá acumulado al cabo de 12 meses, si el depósito del primer mes es \$ 600.000.

Solución:



$$F_{TG} = F_A - F_G$$

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los depósitos para arriba y el valor del total acumulado para abajo.

$$\sum Arriba = \sum Abajo \quad (ff \rightarrow 0)$$

$$F_{TG} = 600.000\left[\frac{(1+0,025)^{12}-1}{0,025}\right] - \frac{15.000}{0,025}\left[\frac{(1+0,025)^{12}-1}{0,025} - 12\right]$$

$$F_{TG} = 8.277.331,78 - 1.077.331,78 = 7.200.000$$

Ejemplo 6.19

En el ejercicio anterior calcule la cuota No 6

Solución:

La cuota No 6, se determina con la siguiente igualdad: $Cuota_{(n)} = A - (n-1)G$

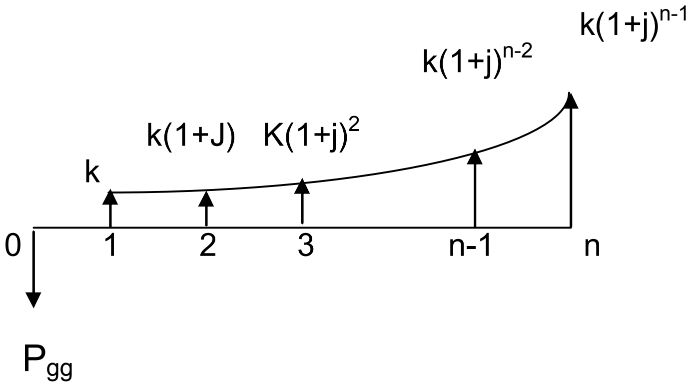
$$Cuota_6 = 600.000 - (6-1)15.000 = 525.000$$

6.5 GRADIENTE GEOMETRICO EXPONENCIAL

Un gradiente geométrico es una serie de flujos de caja periódicos tales que cada uno es igual al anterior disminuido o incrementado en un porcentaje fijo.

6.5.1 VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE GEOMETRICO CRECIENTE

Es el valor que se ubica en el presente, equivalente a una serie de flujos de caja periódicos que aumenta cada uno, con respecto al anterior, en un porcentaje fijo (j).



Si i ≠ j , el valor presente de una serie gradiente geométrica se puede determinar empleando la siguiente igualdad:

$$P_{gg} = k\left[\frac{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n}{i-j}\right] \quad \textbf{(6.8)}$$

, de donde el primer pago, se calcularía así:

$$k = \frac{P_{gg}(i-j)}{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n} \quad \textbf{(6.9)}$$

Ahora, Si i = J, el valor presente se determinaría, usando la siguiente fórmula:

$$P_{gg} = \frac{nk}{1+i} \quad \textbf{(6.10)}$$

La cuota de una serie gradiente geométrica creciente se determina de la siguiente manera:

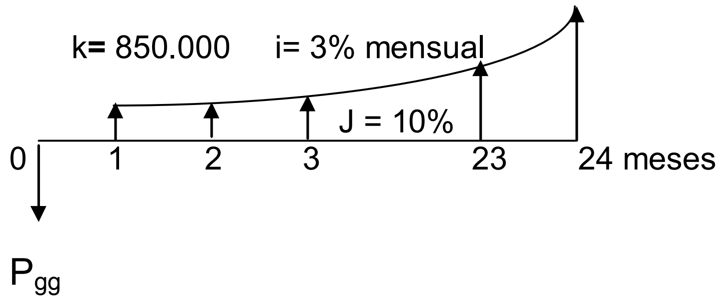
$$Cuota_{(n)} = K(1+J)^{n-1} \qquad (6.11)$$

Ejemplo 6.20

Una obligación se está cancelando en 24 cuotas mensuales que aumentan un 10% cada mes. Si el valor de la primera cuota es $ 850.000 y se cobra una tasa de interés del 3% mensual, calcular: a) El valor de la obligación, b) El valor de la cuota 18.

Solución:

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los pagos para arriba y el valor de la obligación para abajo.



$$\sum Arriba = \sum Abajo \quad (ff \rightarrow 0)$$

Como $i \neq j$, $$P_{gg} = k\left[\frac{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}}{i-j}\right] = 850.000\left[\frac{1-\left(\frac{1+0,10}{1+0,03}\right)^{24}}{0,03-0,10}\right] = 46.694.334,68,$$

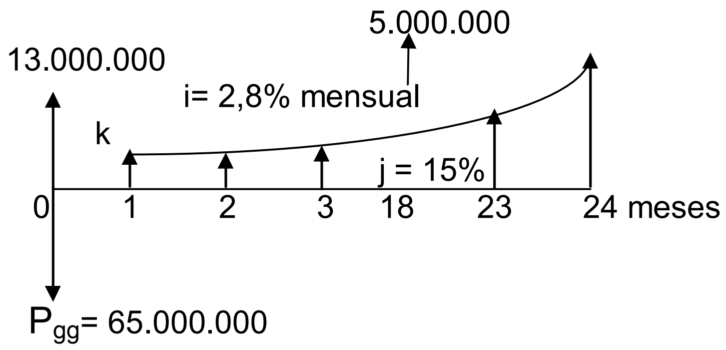
$$Cuota_{(18)} = 850.000(1+0,10)^{17} = 4.296.299,74$$

Ejemplo 6.21

Una persona desea comprar un apartamento que tiene un valor de $ 65.000.000, se le plantea el siguiente plan: 20% de cuota inicial, 24 cuotas que aumentan cada mes en el 1,5% mensual, y un abono extraordinario en el mes 18 por valor de $ 5.000.000, si la tasa de financiación es del 2,8 mensual, calcular el valor de la primera cuota.

Solución:

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los pagos para arriba y el valor de la obligación para abajo.



Cuota inicial = 65.000.000*0,20 = $ 13.000.000

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Como $i \neq j$; $P_{gg} = k\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{1+j}{1+i}\right)^{n}}{i-j}\right]$, se establece, la siguiente ecuación:

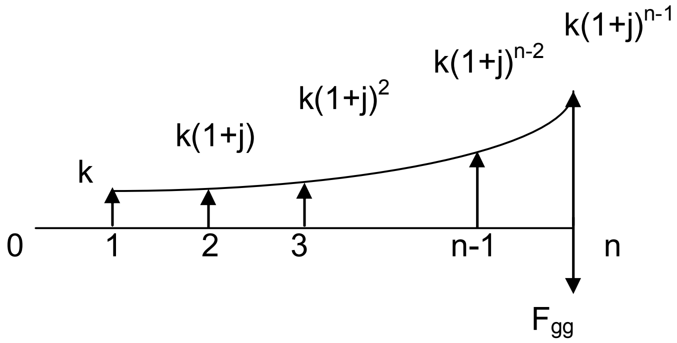
$$65.000.000 = 13.000.000 + 5.000.000(1+0,028)^{-18} + k\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{1+0.015}{1+0,028}\right)^{24}}{0,028-0,015}\right]$$

De donde: $48.958.457,14 = 20,25K$, por lo tanto:

$$K = \frac{48.958.457,14}{20,25} = 2.417.701,59$$

6.5.2 VALOR FUTURO DE UN GRADIENTE GEOMETRICO CRECIENTE

Es el valor ubicado en el período donde se encuentra el último flujo de caja del gradiente geométrico, hay que tener en cuenta que cada flujo crece cada período en un porcentaje constante (j)



Si $i \neq j$, el valor futuro de la serie gradiente geométrica, se calcula haciendo uso de la siguiente igualdad:

$$F_{gg} = k\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right] \quad \textbf{(6.12)}$$

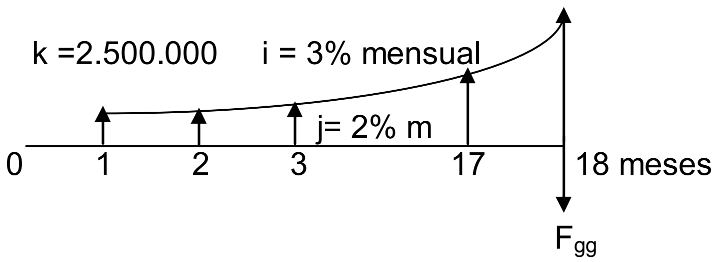
Ahora, Si i = J ; se puede usar la siguiente fórmula: $F_{gg} = nk(1+i)^{n-1}$ **(6.13)**

Ejemplo 6.22

Calcular el valor futuro equivalente a 18 pagos que aumentan cada mes en el 2% si se cobra una tasa del 3% mensual, siendo el primer pago de $ 2.500.000

Solución:

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los pagos para arriba y el valor de la obligación en el mes 18 para abajo.



$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Como $i \neq j$, $F_{gg} = k\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right]$, entonces se puede plantear:

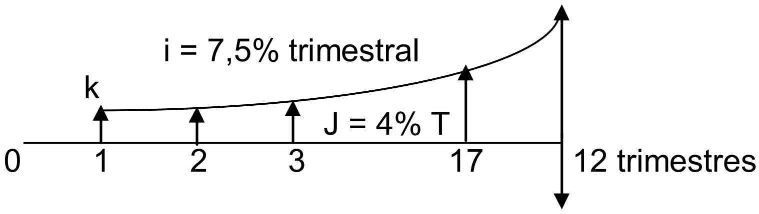
$$F_{gg} = 2.500.000\left[\frac{(1+0{,}03)^{18} - (1+0{,}02)^{18}}{0{,}03-0{,}02}\right] = 68.546.703{,}42$$

Ejemplo 6.23

Se hacen depósitos trimestrales que crecen en un 4% durante 3 años, en una institución financiera que paga el 7,5% trimestral, si se desea tener disponible $ 5.000.000, determinar el primer pago.

Solución:

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los depósitos para arriba y el monto en el trimestre 12 para abajo.



F_{gg} = 5.000.000

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Como $i \neq j$, $F_{gg} = k\left[\dfrac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right]$, por lo que se plantea la siguiente ecuación:

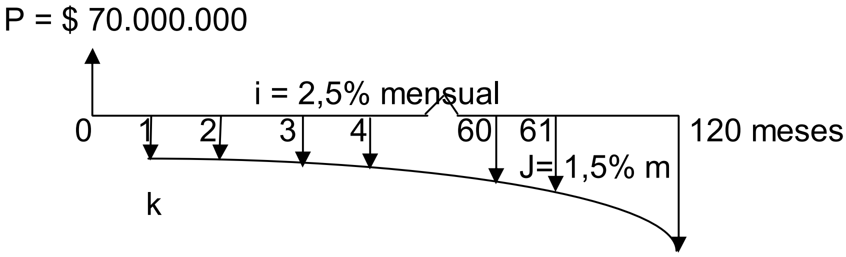
$$5.000.000 = k\left[\frac{(1+0{,}075)^{12} - (1+0{,}04)^{12}}{0{,}075 - 0{,}04}\right]$$; y se llega a:

$5.000.000 = 22{,}31\,k$; de donde $K = \dfrac{5.000.000}{22{,}31} = 224.114{,}75$

Ejemplo 6.24

Financiar una vivienda que tiene un valor de $ 70.000.000 a una tasa de interés del 2,5% mensual, por medio de 120 cuotas que crecen cada mes en el 1,5%. Calcule el saldo después de cancelada la cuota 60.

Solución:



Para determinar el primer pago o cuota, se utiliza la siguiente igualdad:

$$P_{TG} = k\left[\frac{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n}}{i-j}\right]$$; ahora, se plantea la siguiente ecuación:

$$70.000.000 = k\left[\frac{1-\left(\frac{1+0{,}015}{1+0{,}025}\right)^{120}}{0{,}025-0{,}015}\right]$$; entonces: $70.000.000 = 69{,}1638k$; por lo tanto: $k = \frac{70.000.000}{69{,}1638}$; por consiguiente: $k = 1.012.090{,}53$

Para determinar el saldo, se lleva la deuda adquirida hoy al período 60, es decir; se le calcula el valor futuro: $\mathbf{F = P(1+i)^{n} = 70.000.000(1+0{,}025)^{60} = \$\ 307.985.282{,}4}$. A la cuotas que se han cancelado hasta el periodo 46, también se les halla el valor futuro, con la fórmula de valor futuro de la serie gradiente geométrica creciente:

$$\mathbf{F_{gg} = k\left[\frac{(1+i)^{n}-(1+j)^{n}}{i-j}\right] = 1.012.090{,}53\left[\frac{(1+0{,}025)^{60}-(1+0{,}015)^{60}}{0{,}025-0{,}015}\right] = 198.022.594{,}10}$$

Por consiguiente el saldo en el período 60, será:

$$\text{Saldo} = 307.985.282{,}4 - 198.022.594{,}10 = \$109.962.688{,}3$$

Otra manera de determinar el saldo en el período 60, es trasladar a ese período las cuotas que faltan por pagar, es decir, 60 cuotas; para lo cual, hay que hallar el valor presente de esas cuotas, antes hay que encontrar la cuota No 61, así: $\mathbf{Cuota_{(n)} = K(1+J)^{n-1}}$; por lo tanto:

$$\mathbf{Cuota_{61} = 1.012.090{,}53(1+0{,}015)^{60} = \$\ 2.472.759{,}60}$$

Ahora se procede a calcular el valor presente de las 60 cuotas que faltan por cancelar, así:

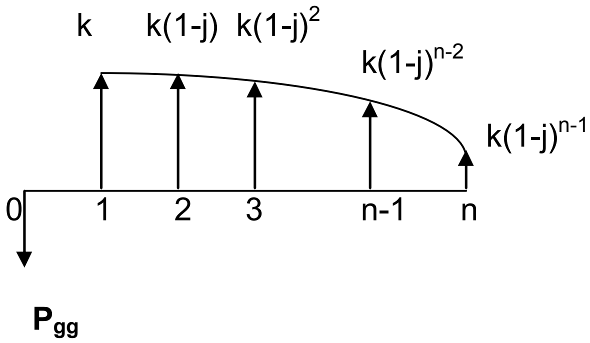
$$\text{Saldo} = P_{TG} = 2.472.759{,}60\left[\frac{1-\left(\frac{1+0{,}015}{1+0{,}025}\right)^{60}}{0{,}025-0{,}015}\right] = \$109.962.688{,}3$$

6.6 GRADIENTE GEOMETRICO DECRECIENTE

Lo conforma una serie de flujos de caja que decrecen periódicamente en un porcentaje constante.

6.6.1 VALOR PRESENTE DE UN GRADIENTE GEOMETRICO DECRECIENTE

En un valor ubicado un período antes a la fecha del primer flujo de caja que conforma el gradiente, que es equivalente a una serie de flujos de caja que decrecen periódicamente en un porcentaje fijo (j)



Si i ≠ j, el valor presente de la serie gradiente geométrica decreciente, se determina utilizado la siguiente igualdad:

$$P_{gg} = k\left[\frac{1-\left(\frac{1-j}{1+i}\right)^n}{i+j}\right] \quad \textbf{(6.14)}$$

, de donde, el primer pago o flujo de la serie se calcula con la siguiente fórmula:

$$k = \frac{P_{gg}(i+j)}{1-\left(\frac{1-j}{1+i}\right)^n} \quad \textbf{(6.15)}$$

Ahora, Si i = J, el valor presente serie gradiente geométrica o exponencial, se halla con: $P_{gg} = \frac{nk}{1+i}$ **(6.16)**

La cuota de una serie gradiente geométrica decreciente se determina de la siguiente manera:

$$Cuota_{(n)} = K(1\text{-}J)^{n-1} \quad \textbf{(6.17)}$$

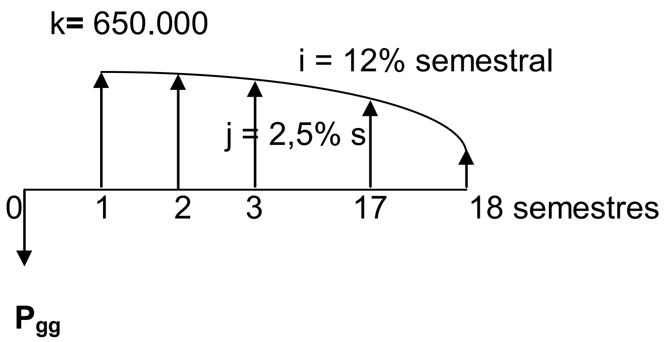
Ejemplo 6.25

Calcular el valor presente de 18 pagos semestrales que disminuyen cada semestre en el 2,5%, siendo el primer pago de $ 650.000. La tasa de Interés es del 24% NS.

Solución:

Para facilitar la realización del diagrama económico, se suponen los pagos para arriba y el valor de la obligación para abajo.

$$i=\frac{r}{m}=\frac{0,24}{2}=12\%\,\text{semestral}$$



$$\sum \text{Arriba}=\sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Si $i \neq j$, $P_{gg}=k\left[\frac{1-\left(\frac{1-j}{1+i}\right)^{n}}{i+j}\right]$; se puede plantear la siguiente ecuación:

$$P_{gg}=650.000\left[\frac{1-\left(\frac{1-0,025}{1+0,12}\right)^{18}}{0,12+0,025}\right]=\$4.113.182,39$$

Ejercicio 6.26

Encuentre la cuota 12 del ejercicio anterior

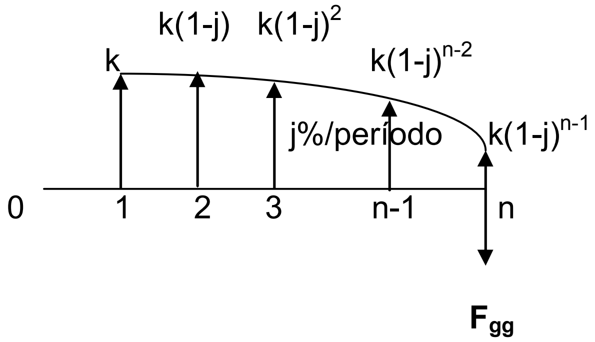
Solución:

Para el cálculo de la cuota, se establece la siguiente igualdad:

$$\text{Cuota}_{(12)}=650.000(1\text{-}0,025)^{11}=491.998,90$$

6.6.2 VALOR FUTURO DE UN GRADIENTE GEOMETRICO DECRECIENTE

Es el valor futuro equivalente a una serie periódica de flujos de caja que decrecen en un porcentaje fijo (j). El valor futuro queda localizado en el último flujo.



Si $i \neq j$, el valor futuro de una serie gradiente geométrica decreciente, se calcula utilizando la fórmula:

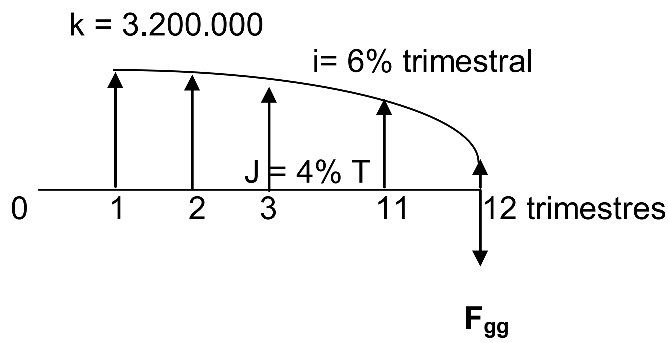
$$F_{gg} = k\left[\frac{(1+i)^n - (1-j)^n}{i+j}\right] \quad \textbf{(6.18)}$$

Ahora, si i = J ; el valor futuro se determinaría con: $F_{gg} = nk(1+i)^{n-1}$ **(6.19)**

Ejercicio 6.27

Calcular el valor que se tendrá ahorrado en una institución financiera si se hacen 12 depósitos trimestrales que decrecen en un 4%, siendo el primer depósito de $ 3.200.000 y se devenga una tasa de interés del 6% trimestral. Encontrar la cuota 7.

Solución:



Para resolver el ejercicio, se han tomado los depósitos para arriba y el acumulado hacia abajo. Como $i \neq j$, el valor futuro de una serie gradiente geométrica decreciente, se calcula utilizando la fórmula:

$$F_{gg} = k\left[\frac{(1+i)^n - (1-j)^n}{i+j}\right] = 3.200.000\left[\frac{(1+0{,}06)^{12} - (1-0{,}04)^{12}}{0{,}06+0{,}04}\right] = \$\,44.783.574{,}86$$

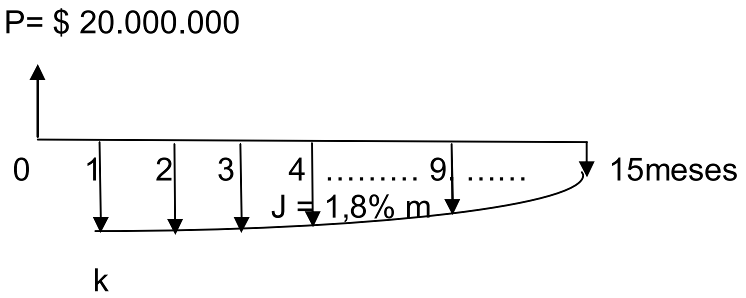
La cuota 7, se determina así: $\text{Cuota}_{(n)} = K(1\text{-}J)^{n-1}$;

$$\text{Cuota}_{(7)} = 3.200.00(1\text{-}0{,}04)^{6} = 2.504.824{,}93$$

Ejemplo 6.28

Un préstamo de $ 20.000.000 se cancela con 15 cuotas mensuales que disminuyen en 1,8% cada mes, calcule el saldo después de cancelada la novena cuota. La tasa de financiación es del 2% mensual.

Solución:



Para determinar el primer pago o cuota, se utiliza la siguiente igualdad:

$$P_{TG} = k\left[\frac{1-\left(\frac{1\text{-}j}{1+i}\right)^{n}}{i+j}\right]$$; ahora se establece la siguiente igualdad:

$$20.000.000 = k\left[\frac{1-\left(\frac{1\text{-}0{,}018}{1+0{,}02}\right)^{15}}{0{,}02+0{,}018}\right]$$; entonces: $20.000.000 = 11{,}4261k$; por lo tanto: $k = \frac{20.000.000}{11{,}4261}$; por consiguiente: $k = 1.750.378{,}52$

Para determinar el saldo, se lleva la deuda adquirida hoy al período 9, es decir; se le calcula el valor futuro: $\mathbf{F = P(1+i)^{n} = 20.000.000(1+0{,}02)^{9} = \$\ 23.901.851{,}37}$. A la cuotas que se han cancelado hasta el periodo 46, también se les halla el valor futuro, con la fórmula de valor futuro de la serie gradiente geométrica decreciente:

$$F_{gg} = k\left[\frac{(1+i)^n-(1-j)^n}{i+j}\right] = 1.750.378,52\left[\frac{(1+0,02)^9-(1-0,018)^9}{0,02+0,018}\right] = \$15.933.302,51$$

Por consiguiente el saldo en el período 9, será:

$$Saldo = 23.901.851,37 - 15.933.302,51 = \$7.968.548,86$$

Otra manera de determinar el saldo en el período 9, es trasladar a ese período las cuotas que faltan por pagar, es decir, 6 cuotas; para lo cual, hay que hallar el valor presente de esas cuotas, antes hay que encontrar la cuota No 10, así: $\mathbf{Cuota}_{(n)} = \mathbf{K(1-J)^{n-1}}$; por lo tanto:

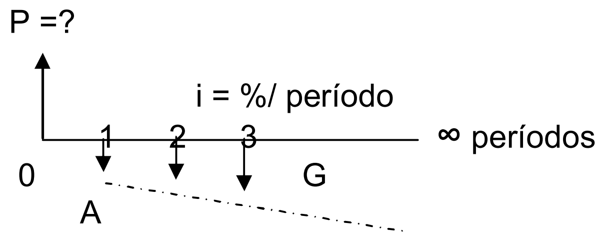
$$\mathbf{Cuota}_{(10)} = \mathbf{1.750.378,52(1-0,018)^9 = \$\ 1.486.398,87}$$

Ahora se procede a calcular el valor presente de las 6 cuotas que faltan por cancelar, así:

$$Saldo = P_{TG} = 1.486.398,87\left[\frac{1-\left(\frac{1-0,018}{1+0,02}\right)^6}{0,02+0,018}\right] = \$7.968.548,86$$

6.7 GRADIENTE ARITMETICO PERPETUO

En este tipo de series de flujos de caja sólo tiene sentido, la determinación del valor presente. Se puede analizar desde la óptica de lo creciente, su aplicación más importante se da en el cálculo del costo de capital.



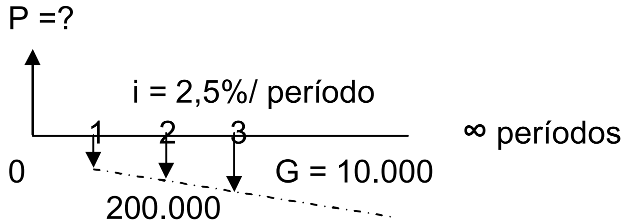
Se sabe que: $P_{TG} = P_A + P_G = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$; si se aplica límite cuando n tiende a ∞; entonces; $(1+i)^{-n}$ y $\frac{n}{(1+i)^n}$ se vuelve cero (0); por lo que:

$$P_{TG} = P_A + P_G = \frac{A}{i} + \frac{G}{i^2} \quad \textbf{(6.20)}$$

Ejemplo 6.29

Encontrar el valor presente de una serie de flujos de caja a perpetuidad que crecen en \$ 10.000, si el primer flujo vale \$ 200.000 y la tasa de interés es del 2,5%.

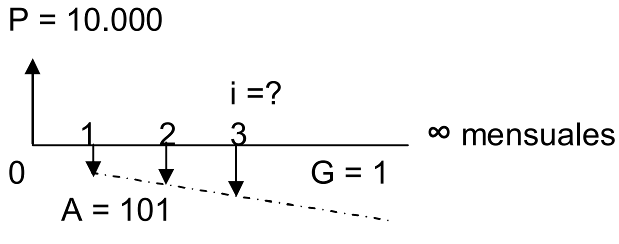
Solución:



$$P_{TG} = \frac{A}{i} + \frac{G}{i^2} = \frac{200.000}{0,025} + \frac{10.000}{(0,025)^2} = \$24.000.000$$

Ejemplo 6.30

Actualmente las acciones de una empresa cuestan \$ 10.000 y están pagando un dividendo mensual de \$ 100. Por experiencia de los últimos 5 años se sabe que cada mes el valor del dividendo se viene incrementando en \$ 1 y se espera mantener esta tendencia en el futuro. Calcular el costo de capital en estas condiciones.



$P_{TG} = \frac{A}{i} + \frac{G}{i^2}$; de donde: $10.000 = \frac{101}{i} + \frac{1}{i^2}$; por lo tanto: $10.000i^2 = 101i + 1$

$$10.000i^2 - 101i - 1 = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática, se puede determinar así:

$$i = \frac{101 \pm \sqrt{(101)^2 + 4(10.000)(1)}}{2(10.000)}$$; por consiguiente:

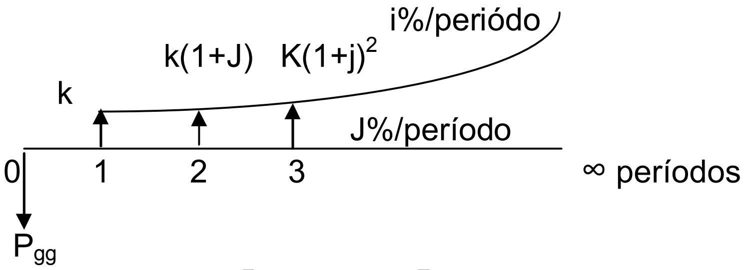
$$i = \frac{101 \pm \sqrt{50.201}}{20.000} = \frac{101 + 224,1}{20.000} = \frac{325,1}{20.000} = 0,0163$$ **mensual**; ahora si se quiere expresar en efectivo anual, se aplica el concepto de tasas equivalentes así:

$(1+i_e)^m = (1+i_e)^t$; por lo tanto: $(1+i_e) = (1+0,0163)^{12}$; entonces:

$$ie = 0,2134 = 21,34\% \ EA$$

6.8 GRADIENTE GEOMETRICO PERPETUO

Una de sus aplicaciones que tiene este gradiente está en el análisis sobre emisión de acciones. Sólo tiene sentido el análisis del valor presente. Se puede analizar desde la óptica de lo creciente.



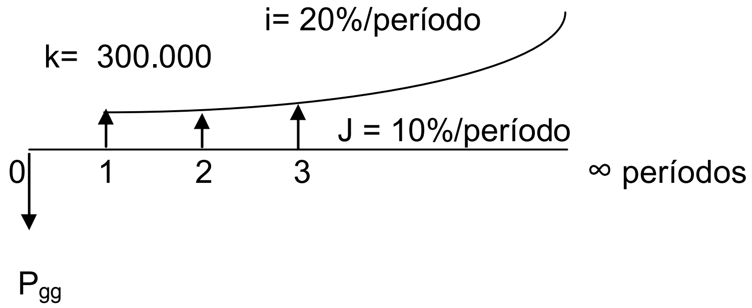
Se sabe que: $P_{gg} = K\left[\frac{1-\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n}{i-j}\right]$; si se aplica límite cuando n tiende a ∞ a esta ecuación; la expresión $\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n$ se vuelve cero (0); entonces:

$$P_{gg} = \frac{k}{i-j};\ \text{sí y sólo sí } i \rangle j \qquad \textbf{(6.21)}$$

Ejemplo 6.31

Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos que crecen en un 10%, si la tasa de interés es del 20% y el primer pago es $ 300.000.

Solución:

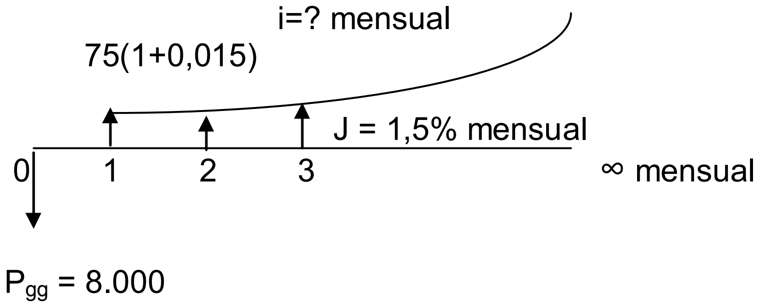


El presente se determina así: $P_{gg}=\frac{k}{i-j}=\frac{300.000}{0,20-0,10}=\$3.000.000$

Ejemplo 6.32

El valor comercial de una acción de una empresa es actualmente de $ 8.000 y desea hacerse una nueva emisión de acciones, manteniendo la tendencia de aumentar los dividendos mensualmente, en un 1,5%. ¿Cuál será el costo de capital, si el dividendo actual es de $ 75 por mes y por acción?.

Solución:



Se sabe que: $P_{gg}=\frac{K}{i-j}$; por lo tanto: $8.000=\frac{75(1+0,015)}{i-0,015}$; entonces: $8.000(i-0,015)=76,125$; Por consiguiente: $8000i-120=76,125$; de donde: $8000i=196,125$; por lo tanto: $i=\frac{196,125}{8.000}=0,0245=2,45\%$ mensual. Si se desea expresar en efectivo anual, se utiliza el concepto de tasas equivalentes, así: $(1+i_e)^m=(1+i_e)^t$; entonces: $(1+i_e)=(1+0,0245)^{12}$; se tiene: $ie=33,73\%$ EA

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Hallar el valor de contado de un artículo adquirido con el siguiente plan: cuota inicial de $ 130.000 y 20 cuotas mensuales; $ 15.500 es el valor de la primera, $ 15.700 la segunda, $ 15.900 la tercera y así sucesivamente, sabiendo que la tasa de interés sobre saldo es del 30% NM. **R/.$ 398.702.**
2) Usted va a depositar dentro de 6 meses $50.000, dentro de 9 meses $100.000, dentro de 1 año $150.000, y así sucesivamente hasta que hace el último depósito dentro de 4 años. ¿Cuánto tendrá en ese entonces acumulado, si los depósitos ganan un interés del 8% trimestral? **R/. $ 8.952.676,90.**
3) Para una serie de pagos de $ 5.000 cada mes durante el primer año, de $ 6.000 cada mes durante el segundo año, de $ 7.000 cada mes durante el tercer año y así sucesivamente y por espacio de 10 años. Calcular el valor presente teniendo en cuenta que la tasa de interés aplicada es del 3% mensual. **R/. $ 228.298.**
4) 10 estudiantes recién ingresados piensan asociarse y crear un fondo de ahorros mensuales de tal forma que al culminar sus 5 años de estudio posean un capital de $10'000.000 con el propósito de fundar su propia empresa. Sus ingresos les permiten incrementar el ahorro mensual en un 2% y la entidad financiera les ofrece un interés mensual del 2.5%. ¿Cuánto deberá ser el ahorro mensual inicial de cada uno de los estudiantes? **R/. $ 4.469,24.**
5) Una serie de pagos mensuales se inicia hoy con un pago de $ 5.000 y aumentará en una cantidad fija de dinero hasta llegar a $ 11.000 dentro de doce meses; a partir de allí disminuirá en otra suma fija de dinero hasta llegar a $ 7.400 diez meses más tarde. Para una tasa de interés del 32% anual, hallar el valor presente de esta serie. **R/. $ 149.792**.
6) Usted es un inversionista que tiene una tasa de oportunidad del 33% anual y en este momento necesita $ 15.000.000, los cuales puede obtener de una institución bancaria en las siguientes condiciones: tiempo del crédito 3 años, amortización en cuotas trimestrales iguales y tasa de interés del 36% NTA, pagando los intereses al principio de cada trimestre. ¿A cuánto le equivale a usted hoy lo que se le pagará al banco a lo largo de los tres años?. **R/.16.623.900**.
7) Un obrero está ganando un salario mensual de $ 96.000 y decide ahorrar en una corporación que paga un interés del 29% NT, cantidades así: el primes la mitad del salario, el segundo mes la cuarta parte del salario, el tercer mes la octava parte del salario y así sucesivamente por espacio de dos años. Hallar la cantidad que tendrá acumulada al final de este tiempo. **R/. $ 160.440**.
8) Financiar $ 6 millones de hoy, a tres años con cuotas mensuales que aumenten en el 3% cada mes hasta el final del segundo año y de allí en adelante permanezcan constantes. La tasa de interés será del 2,5% mensual durante los dos primeros años y del 36% anual de allí en adelante. **R/. $ 167.123 la primera cuota**.
9) Una serie a término indefinido de pagos por trimestre vencido de $ 10.000, $ 10.500, $ 11.000 y así sucesivamente, desea sustituirse por otra equivalente y también a término indefinido, de pagos mensuales que aumenten en el 1% cada mes. Hallar el valor de esta nueva serie de pagos, si para ambas series se utiliza una tasa del 8% trimestral. **R./ Primer pago $ 3.250**.
10) Un proyecto consiste en invertir $3'000.000 para recibir 1 año después $2'125.000, 2 años más tarde $1'750.000 y 3 años después $1'375.000. Si en el

momento de invertir los $3'000.000 el índice de precios al consumidor es 600, un año después 750, dos años después 937,5 y tres años más tarde 1.171,875, cuál será la rentabilidad del proyecto en pesos corrientes y en pesos constantes? **R/. Pesos corientes: i= 37,5% ; Pesos constantes: i = 10%**.

11) Determinar el valor de contado de un activo, si financiado se adquiere así: una cuota inicial de $ 450.000, dieciocho cuotas mensuales iguales de $ 40.000 cada una, y luego cuotas trimestrales de $ 150.000 la primera, $ 160.000 la segunda, $ 170.000 la tercera y así sucesivamente hasta finales del cuarto año; finalmente, seis meses después de la última de estas cuotas trimestrales, un pago equivalente al 15% del valor de contado. La tasa de interés es del 36% anual. **R./$ 1.888.380**
12) Financiar una deuda de $ 8.000.000 de hoy, , en 36 cuotas mensuales sabiendo que la primera debe pagarse dentro de 6 meses y de allí en adelante las cuotas aumentarán en el 3% cada mes hasta la vigésima cuota, y a partir de ese momento las cuotas permanecerán constantes. La tasa de interés sobre saldo será del 3% mensual durante los 6 primeros meses y del 4% mensual de allí en adelante. R**/. $ Primera cuota: $ 341.494.**
13) Debe reunirse la suma de $ 10.000.000 para dentro de 4 años y con tal fin se harán depósitos mensuales tales que cada uno sea igual a la mitad del anterior durante el primer año. Si estos mismos depósitos se repiten en cada uno de los tres años siguientes, determinar el valor del primer depósito de cada año, suponiendo una tasa de interés del 30% anual. **R/. $ 649.283**.
14) Sustituir una obligación que consta de tres pagarés así: $ 2.000.000 para dentro de tres meses; $ 2.850.000 para dentro de 8 meses y $ 3.200.000 para dentro de un año y medio, todos con un interés del 32% NMV, por su equivalente en cuotas mensuales que disminuyan en el 5% cada mes, debiendo pagarse la primera dentro de 6 meses y la última dentro de 28 meses, sabiendo que para este caso se cobrará un interés del 3,3% mensual. **R/. $ 702.728 la primera cuota**.
15) Un empleado decide ahorrar la quinta parte de su salario mensual, en una cuenta de ahorros que paga un interés del 33% NT. El empleado tiene en la actualidad un salario de $ 335.000 mensuales y le será aumentado en el 22% cada año. Hallar la cantidad que tendrá ahorrada al cabo de doce años. **R/. $ 207.650.000**.
16) Determinar el valor de contado de un electrodoméstico si financiado se adquiere con el siguiente plan: una cuota inicial equivalente al 40% del valor de contado y el resto en 24 cuotas mensuales de $ 8.000, $ 7.900, $ 7.800 y así sucesivamente, sabiendo además que la primera cuota se debe pagar dentro de dos meses; y por último, después de estas cuotas, doce pagos mensuales de $ 2.000 cada uno. La tasa de interés sobre saldo es del 30% NT. **R/. $ 222.800**.
17) Un artículo se compraría a crédito mediante cuotas mensuales iguales variables durante cinco años; $ 2.500 es el valor de la primera cuota y de allí en adelante aumentarían en el 2% cada mes, hasta finales del tercer año y a partir de esa fecha aumentarían en el 3% cada mes. Se desea pagar mediante dos pagos iguales, el primero hoy y el otro dentro de 3 años. Determinar el valor de cada uno de estos pagos si la tasa de interés es del 3% mensual. **R/. $ 85.830**.
18) Un empleado abre una cuenta de ahorros hoy con $ 25.000 y dentro de un año empieza a hacer depósitos trimestrales de $ 40, $ 80, $ 160, $ 320, y así sucesivamente. Si la cuenta de ahorros paga el 28% NT, hallar la cantidad

acumulada que el empleado tendrá en su cuenta dentro de seis años, sabiendo además que durante los dos últimos años el empleado retiró $ 40.000 cada trimestre. **R/. $ 89.916.000**.

19) Un profesional recién egresado de la universidad se vincula a una empresa donde empieza devengando un salario de $ 1.150.000 mensuales el primer año, la empresa le garantiza un aumento cada año del 24% y este empleado decide ahorrar cada mes la décima parte de su salario mensual en una institución bancaria que promete pagarle el 2,5% mensual durante los cinco primeros años y el 3,2% mensual de allí en adelante ¿Cuánto tendrá ahorrado este profesional al cabo de diez años?. **R/. $ 228.332.100**.

20) Una empresa produce 200 unidades de un artículo al mes. El precio por unidad es de $ 12.500 el primer año, de $ 13.000 en el segundo año, de $ 13.500 en el tercer años y así sucesivamente. El costo por unidad del artículo es de $ 8.000, y la empresa invierte mensualmente la cuarta parte de las utilidades en una institución que paga el 30% anual durante los cuatro primeros años y el 31,5% AMV de allí en adelante. ¿Cuánto tendrá ahorrado la empresa al cabo de nueve años?. **R/. $ 152.350.000**.

21) Financiar una deuda de $ 5.000.000 de hoy a cuatro años con cuotas que aumenten en el 3% cada mes durante los dos primeros años y luego disminuyan en el 2% cada mes, suponiendo una tasa de interés para el préstamo del 33% NMV. **R/. $ 130.079 la primera cuota**.

22) Una fábrica tiene costos fijos de $ 600.000 mensuales y costos variables de $ 150 por unidad. Durante los primeros 6 meses no hay producción porque este tiempo se dedicará a pruebas y ajustes. En el mes 7 se iniciará la producción con 300 unidades y cada mes la producción aumentará en 200 unidades hasta llegar al tope de 2.500 al mes. Si se espera vender la fábrica al final de 3 años, calcular el costo total de la producción en estos 3 años en pesos de hoy, suponga una tasa del 3% efectivo mensual. **R/. $ 17.791.600**.

23) Una fábrica debe importar 80 toneladas mensuales de materia prima pagándola al principio de cada mes en dólares de Estados Unidos a razón de 200 US$ la tonelada. Según la experiencia se observa que el peso se devalúa a razón del 2,5% mensual con relación al dólar. Si el cambio actual es de 1 US$ = $ 400 hallar el valor total de las importaciones de la fábrica en el transcurso de un año; a) en pesos de principio de año y b) en pesos de final del año. Suponga que la fábrica trabaja con una tasa del 3% efectivo anual. **R/. $ 74.782.334 y $ 106.621.727**.

24) Una máquina produce una utilidad de un millón de pesos durante el primer año, sin embargo, la utilidad de la máquina disminuye $ 35.000 cada año debido al desgaste. Calcular en pesos de hoy el total de las ganancias suponiendo que la máquina va a trabajar por 10 años. La tasa de interés es del 30% EA. **R/. $ 2.815.488**.

25) Se ofrece la administración de un restaurante durante un año y se garantiza que comprarán exactamente 6.000 almuerzos mensuales durante ese año, los cuales serán pagaderos en un solo contado a razón de $ 500 cada uno, pero su valor total será cancelado al final del año sin intereses, la persona calcula que el costo de los insumos de cada almuerzo será de $ 200 los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes y su valor aumentará cada mes un 5%. El costo mensual de mano de obra se considera estable en $ 250.000 y además, se requerirá una inversión inicial de $ 1.000.000 para la adecuación del

restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3%. Calcular cuál será el valor de su ganancia: a) en pesos de hoy y b) en pesos futuros. **R/. $ 5.719.285 y $ 8.154.333**.

26) Una entidad financiera presta a un cliente $ 3.000.000, con un interés del 34% NMV. El deudor tiene un plazo de 15 años para amortizar la deuda, mediante pagos mensuales. Suponiendo que la primera cuota es de $ 10.000 y vence al final del primer mes, ¿Cuál debe ser el porcentaje de reajuste mensual de la cuota, para cancelar la deuda?. **R/. J= 3,47% mensual**.

27) Una máquina se compró a plazos financiándose el 70% de su valor de contado, saldo que se canceló con 20 pagos de $ 100.000 el primero, 8 meses después de entregada la cuota inicial, y las demás cuotas aumentadas en $ 50 respecto de la cuota anterior. Sí para los primeros 12 meses se cobró el 1,75% mensual y de allí en adelante el 2% mensual, Encontrar el valor de contado de la máquina. **R/. $ 2.100.581**.

28) Si de mi sueldo de $ 400.000 espero ahorrar dentro de 9 meses el 60% y mes a mes disminuirá el ahorro en $ 5.000 hasta el mes 24, ¿Cuánto acumularé 6 meses después de realizado el último depósito, si a la cuenta le reconocen un interés del 1,5% mensual, de hoy hasta el mes 15 y de allí en adelante el 1,75% mensual?. **R/. $ 4.128.842,65**.

29) Una camioneta tiene un valor de contado de $ 15.000.000. Financian el 70% de su valor para ser cancelado con 36 cuotas mensuales de tal manera que el valor de la primera cuota sea cierta cantidad que mes a mes crece en $ 20.000. Si el interés de financiación es el 24,48% ASA: a) Diga cuánto habrá abonado a capital una vez cancelada la cuota 23, y cuánto está debiendo en ese momento, b) Si una vez cancelada la cuota 23 solicita refinanciar el saldo existente para pagarlo en 10 cuotas de principio de mes, de tal manera que cada cuota sea $ 5.000 menos que la cuota anterior, encontrar el valor de la última cuota en esta refinanciación, si el interés es del 2,4% mensual. **R/. Primera cuota: A= $ 121.786,70, Total abonado mes 23: $ 9.528.481,62; Deuda mes 23: $ 7.791.992,88, Ultima cuota: $ 841.473**.

30) ¿Cuánto se debe consignar hoy en una corporación que nos paga un interés del 3% mensual, para atender una serie de gastos a perpetuidad si empezando dentro de dos meses y con un valor de $ 3.000 se incrementa mes a mes en la misma cantidad?. **R/ $ 3.333.333,33**.

31) ¿Qué interés nominal MA le reconocen a un depósito de $ 800.000 realizado hoy, si se pueden hacer retiros de $ 500 dentro de 2 meses, dentro de 3 meses $ 1.000 y así sucesivamente de manera perpetua. **R/. 29,268% Nominal MA**.

32) Un préstamo de $ 5.000.000 se debe cancelar en 3 años así: doce cuotas mensuales en el primer año, la cuota trece es la cuota 12 disminuida en $ 500 y así sucesivamente irán disminuyendo en la misma cantidad hasta el mes 24. La cuota 25 es la cuota aumentada en $ 300 y así seguirá aumentando en $ 300 hasta el mes 36. Encontrar el valor de la última cuota si el interés es del 1,8% mensual. **R/. $ 189.741,5**.

33) Un producto de contado vale $ 800.000. A plazos financian el 70% del valor de contado el cual se debe pagar así: 10 cuotas mensuales, la primera de $ 30.000, la segunda de $ 32.000 y así sucesivamente. Si la primera cuota se paga 4 meses después de entregada la cuota inicial y además se pagan dos cuotas extras iguales en los meses 9 y 18, hallar el valor de estas cuotas extras si el interés de financiación es del 2,3% mensual. **R/. $ 162.913**.

34) Un préstamo se debe cancelar con 12 cuotas mensuales así: la primera es de cierto valor, que mes a mes se incrementa en cierta cantidad constante; si se sabe que el valor de la cuota 6 es de $ 33.500 y el valor de la cuota 12 es de $ 53.500, encontrar el valor de la primera y segunda cuota al igual que el valor del préstamo si el interés de financiación es del 2% mensual. **R/. $ Primera cuota: $ 16.833,33; segunda cuota: $ 20.166,66; valor préstamo: $ 363.588,54**.
35) Un préstamo que solicito lo conceden bajo estas condiciones: dentro de un mes recibo cierta cantidad que mes a mes decrecerá en una cantidad constante de tal manera que en el mes 16 lo recibido es cero. En el mes 17 empiezo a pagar la deuda con $ 70.000 y mes a mes incremento la cuota en $ 500 hasta el mes 35. Del mes 36 al mes 45 pago cuotas mensuales iguales a las del mes 35 y termino. Si el interés de financiación es del 1,5% mensual, encontrar el valor que recibí en el mes 1 y hallar el valor del préstamo. **R/. $ 189.331,18 y $ 1.3914.128**.
36) Un artículo de contado vale $ 700.000, a plazos exigen de cuota inicial $ 100.000 y el resto para ser cancelados con 9 cuotas mensuales de tal manera que cada cuota decrezca en $ 300 respecto de la anterior. Si el interés de financiación es del 2% mensual, encontrar el valor de la última cuota. **R/. $ 74.669,6**.
37) Un producto se debe cancelar en 20 cuotas mensuales iguales vencidas de $ 30.000 y un interés de financiación del 1,8% mensual. Si quiero cambiar esta forma de pago por 20 pagos que tengan forma de gradiente aritmético típico, hallar el valor del primer pago, si este se realiza un mes después de recibida la mercancía. **R/. primer pago: $ 3.027,83**.
38) Dentro de un año se debe cancelar $ 5.000.000 como cuota inicial de un apartamento; para tal fin se efectúan depósitos mensuales empezando hoy con un ahorro de $ 200.000. ¿Cuál debe ser el incremento constante en las cuotas posteriores si por los depósitos reconocen un interés del 1,4% mensual.? **R/. $ 26.415,6**.
39) Una mercancía por valor de $ 1.000.000 y un interés de financiación del 2,5% mensual se debe cancelar con 36 cuotas mensuales de tal manera que cada cuota sea $ 2.000 menos que la cuota anterior. Si una vez cancelada la cuota 26, solicito refinanciar el saldo para ser pagado durante el mismo tiempo pero con cuotas iguales, encontrar el valor de estas nuevas cuotas. **R/. Cuotas nuevas: $ 11.598 y Primera cuota original: $ 72.191,04**.
40) Al comprar una máquina se quedaron debiendo $ 3.000.000 los cuales se deben cancelar al 2,7% mensual y 24 cuotas mensuales de tal manera que cada cuota sea $ 2.500 más que la cuota anterior. Si una vez cancelada la cuota 9 abono $ 400.000 y solicito refinanciar el saldo para cancelarlo durante el mismo tiempo pero con cuotas que decrezcan en $ 500 respecto de la cuota anterior, encontrar el valor de la cuota 9 que se cancela en la primera forma de pago, al igual que el valor de la primera cuota que se pagará después de solicitada la refinanciación. **R/. $ Cuota 9: $ 165.886,78, Primera cuota refinanciación: $ 187.898,8**.
41) Un préstamo se debe cancelar con cuotas mensuales iguales dentro de cada semestre, pero semestre a semestre crecerán en $ 2.000. Si el interés de financiación es del 24% anual, y el plazo es de 3 años, encontrar el valor del préstamo, si la primera cuota cancelada tiene un valor de $ 40.000. **R/. $ 1.166.640,8**.

42) Un préstamo se debe cancelar a 5 años y un interés de financiación del 36% nominal MA. Si las cuotas son quincenales e iguales dentro de cada semestre pero, semestre a semestre decrecen en $ 1.500, encontrar el valor de la primera cuota si el préstamo era de $ 3.000.000. **R/. $ 59.466**.

43) Un préstamo de $ 8.000.000 al 48% nominal SA se debe cancelar en 4 años con cuotas mensuales iguales dentro de cada año, pero, año tras año crecen en $ 4.000, encontrar el valor de la última cuota. **R/. $ 429.842,5**.

44) Se necesita reponer una máquina dentro de 5 meses y se estima que su precio en dicho momento será $ 17.213.648,4. Con tal fin se desea crear un fondo en una corporación que pagará un interés del 3% mensual. Hallar el valor del depósito que se debe efectuar dentro de un mes si los depósitos se incrementan en un 4% mensual, con respecto al depósito anterior. **R/. $ 3.000.000**.

45) Si se deposita hoy $ 14.848.644,2 en una corporación que reconoce el 3% mensual durante cuantos meses podré hacer retiros de fin de mes de tal manera que cada retiro sea el 4% mayor que el retiro anterior, si se sabe que el valor del primero retiro es de $ 3.000.000. **R/. n = 5 meses**.

46) Encontrar el valor de un préstamo a 3 años, con un interés de financiación del 3% mensual, si fue cancelado de la siguiente manera: la primera cuota de $ 60.000 se pagó un mes después de concedido el préstamo. Las demás cuotas durante el primer año aumentaron en el 8% mensual; la cuota 13 fue la cuota 12 disminuida en el 9%, y las demás siguieron disminuyendo en el mismo porcentaje hasta la cuota 24. La cuota 25 tiene el valor de la cuota 24 aumentada en el 3%. Las demás cuotas del tercer año también aumentaron en el 3%. **R/. $ 1.761.542,6**.

47) Hallar el valor de un préstamo financiado al 2,8% mensual que se debe pagar con 24 cuotas, siendo de $ 300.000 la primera y las demás los 4/5 de la correspondiente cuota anterior. Halle también el valor de las cuotas canceladas en los meses 3 y 24. **R/. $ 1.312.586,81 ; cuota 3: $ 192.000; cuota 24: $ 1.770,89**.

48) Una deuda se debe cancelar con 18 cuotas mensuales tales que cada cuota decrece en el 2,4% respecto de la cuota anterior. Si el interés de financiación es del 3,1% mensual y el valor de la primera cuota es de $ 400.000. a) Encuentre el valor del préstamo, b) Hallar el acumulado de lo que se ha pagado una vez cancelada la cuota 10, y c) Si al pagar la cuota 10 se solicita refinanciar el saldo existente en dicho momento para cancelarlo con 15 cuotas mensuales iguales un interés del 3,3% mensual determine el valor de las nuevas cuotas. **R/. Préstamo: $ 4.561.674, Acumulado: $ 4.165.035, Saldo a refinanciar: $ 2.025.252,76 ; nuevas cuotas: $ 173.350,95**.

49) Al comprar una casa se quedan debiendo $ 15.000.000 los cuales se deben cancelar en 10 años con cuotas mensuales iguales dentro de cada año pero que año tras año se incrementan en el 3%. Si el interés de financiación es del 25% anual: a) encontrar el valor del primer pago, b) hallar el saldo una vez se cancele la cuota 78. **R/. $ 367.923,46 y $ 11.835.260,5**.

50) Un préstamo para adquirir vivienda se debe cancelar en 7 años con cuotas mensuales iguales dentro de cada semestre pero semestre a semestre decrecen en el 2%. Si el interés de financiación es del 48% EA y el valor de la primera cuota es de $ 580.000, encontrar: a) Valor del préstamo, b) ¿cuánto se estará debiendo una vez cancelada la cuota 50?. **R/. $ 15.213.469,57 y $ 9.544.420,23**.

51) Dentro de presupuesto de ingresos y egresos mensuales que el señor Arteaga tiene para el próximo año, espera ahorrar al final de cada trimestre $700.000 e incrementar periódicamente dicha suma en $300.000 ¿Cuánto tendrá ahorrado al final del año el señor Arteaga, si el banco le ofrece un interés del 4.5% trimestral? **R/. $ 1.600.000**.
52) Usted necesita pedir un préstamo para la compra de un vehículo que vale 15 millones de pesos. Usted prevée que comprometiendo las primas que le pagan en la empresa, usted podría realizar pagos semestrales crecientes al 5% durante 5 años. Sus relaciones con la Corporación Financiera Finauto S.A. son tan buenas, que le conceden un semestre de gracia de capital e interés, y un interés del 14% semestral. Encuentre cuál deberá ser la primera y la última cuota del préstamo? **R/. Cuota 1: $2.745.196 y Cuota 10: $ 4.258.700**.
53) Financiar $ 4.000.000 de hoy a tres años en cuotas mensuales que aumentan cada mes en la misma cantidad de dinero, sabiendo que la primera cuota, que será de $ 80.000, se pagará dentro de cuatro meses y que la tasa de interés sobre el saldo será del 3.3%mensual. Calcular cuál es el valor del gradiente? **R/. G: $10.777.6**
54) Una empresa vende cada mes 500 unidades de su producto a un precio de $1.000 por unidad durante el primer año, a $1.200 por unidad durante el segundo año, a $1.400 por unidad durante el tercer año y así sucesivamente. La empresa ahorra la décima parte de su ingreso mensual en una corporación financiera que paga el 2.5% mensual. Hallar el valor total que la empresa tendrá ahorrado al cabo de siete años. **R/. $19.186.475**
55) Hallar el valor de contado de un artículo que, financiado, puede adquirirse así: una cuota inicial equivalente al 30% del valor de contado y el resto a 15 meses con cuotas que aumenten cada mes en el 2%, sabiendo que la primera será de $ 23.000 y la tasa de interés será del 34% nominal mensual. **R/. $ 453.137.**
56) Se va a financiar una deuda de $ 50.000.000 por medio de 36 cuotas mensuales anticipadas que crecen en $ 50.000 cada mes, y una cuota extraordinaria por valor de $ 3.000.000 en el mes 24. Si la tasa de interés es del 2,5% mensual, calcule el valor de la primera cuota. **R/. $ 1.258.628,20**.
57) Un terreno que tiene un valor de $ 100.000.000 se financia a una tasa de interés del 34% MV, por medio del siguiente plan: cuota inicial igual al 20%, un pago por $ 5.000.000 en el mes 3, y una serie de 12 pagos que comienza en el mes 6, con un crecimiento mensual del 1,5%. Calcular el valor de la primera cuota de la serie de pagos. **R/. $ 7.972.150,79**.
58) Una obligación de $ 34.000.000, con una tasa de interés del 34% MV, se va a cancelar con 24 pagos mensuales que aumentan cada mes en un 4%. Después de cancelada la tercera cuota se resuelve pagar el saldo con 12 pagos trimestrales que aumentan cada trimestre en $ 12.000. Calcular el valor del primer pago del nuevo plan de pagos. **R/. $ 4.477.722.56**.
59) ¿Qué tasa de interés mensual debe reconocer un banco, donde se deposita inicialmente $ 2.000.000 y luego hace al final del primer mes un depósito de $ 150.000 que aumenta cada mes en $ 10.000, para que pueda comprar después de 3 años, un activo que hoy cuesta $ 18.000.000 y aumenta de valor en 1,56% mensual?. **R/. 4,17% mensual**.
60) El 60% de un crédito se está pagando con 36 cuotas mensuales que crecen cada mes un 1,2%, comenzando con una cuota de $ 1.500.000. Una vez cancelada la cuota 12 se abonan $ 10.000.000 y el saldo se financia con 6

cuotas trimestrales de $ 5.000.000. Si la tasa de financiación es del 9,27% trimestral, ¿Cuál es el valor del crédito?. **R/. $ 65.263.794,54**.

UNIDAD 7. AMORTIZACION

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector será capaz de:

1) Explicar que es amortización y los componentes de la tabla de amortización.
2) Identificar situaciones en las que se aplican estos conceptos.
3) Construir tablas de amortización cuando la deuda está expresada en pesos para los diferentes sistemas de amortización.
4) Construir tablas de amortización cuando la deuda está expresada en moneda extranjera y se requiere manejarla en pesos.
5) Determinar el saldo deudor y acreedor en cualquier tiempo en una operación de amortización.
6) Calcular el monto de los pagos o cuotas, los intereses y las amortizaciones a capital.

TEMARIO

7.1	Introducción
7.2	Definición de amortización
7.3	Amortización con cuotas uniformes y cuotas extraordinarias pactadas.
7.3.1	Amortización con cuotas uniformes
7.3.2	Amortización con cuotas extras pactadas
7.4	Amortización con cuotas extras no pactadas
7.5	Amortización con período de gracia
7.6	Distribución de un pago
7.7	Amortización mediante abono constante a capital con intereses vencidos
7.8	Amortización con abono constante a capital con intereses anticipados
7.9	Amortización en moneda extranjera

7.1 INTRODUCCION

Uno de los aspectos más importantes de las finanzas es la amortización, porque es la forma más fácil de pagar una deuda, su objetivo es la financiación de un proyecto. Una manera de visualizar mejor el flujo de caja y el comportamiento de la deuda a través del tiempo, es mediante el uso de la tabla de amortización.

7.2 DEFINICION DE AMORTIZACION

La amortización de una obligación o deuda se define como el proceso mediante el cual se paga la misma junto con sus intereses, en una serie de pagos y en un tiempo determinado. Para visualizar de manera fácil como se paga una deuda, se realiza una tabla de amortización, la cual, es un cuadro donde se describe el comportamiento del crédito en lo referente a saldo, cuota cancelada, intereses generados por el préstamo, abonos a capital. En ocasiones la cuota pagada en un préstamo se dedica primero a pagar los intereses y lo que sobre se considera abono a capital.

7.3 AMORTIZACION CON CUOTAS UNIFORMES Y CUOTAS EXTRAODINARIAS PACTADAS

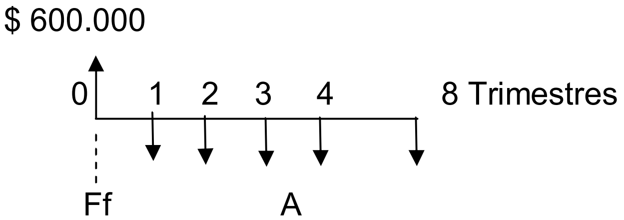
7.3.1 Amortización con cuotas uniformes

Cuotas uniformes son los pagos iguales y periódicos que acuerdan el prestamista y el prestatario en el mismo momento en que se contrata el crédito.

Ejemplo 7.1

Realizar una tabla de amortización para una deuda de \$ 600.000 en 8 pagos trimestrales con una tasa de interés del 36% CT.

Solución:



$$i=\frac{r}{m}=\frac{0,36}{4}=8 \text{ trimestral}$$

$$\sum \text{Arriba}=\sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

$600.000=A\left[\dfrac{1-(1+0,08)^{-8}}{0,08}\right]$; por lo tanto: $600.000=5,7466A$; por consiguiente:

$$A = \frac{600.000}{5,7466} = \$\ 104.408,86$$

El cero de la anualidad concuerda con el cero del diagrama económico. Para elaborar la tabla de amortización, se debe tener en cuenta las siguientes expresiones:

1) $\text{Intereses}_{(n)} = \text{Saldo}_{(n-1)} * i$; donde: $\text{Saldo}_{(n-1)} = \text{Saldo anterior}$

2) $\text{Saldo}_{(n)} = \text{Saldo}_{(n-1)} - \text{Amortización}_{(n)}$

3) $\text{Amortización}_{(n)} = \text{Cuota}_{(n)} - \text{Intereses}_{(n)}$

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	600.000,00			
1	543.591,14	48.000,00	104.408,86	56.408,86
2	482.669,57	43.487,29	104.408,86	60.921,57
3	416.874,28	38.613,57	104.408,86	65.795,29
4	345.815,36	33.349,94	104.408,86	71.058,92
5	269.071,73	27.665,23	104.408,86	76.743,63
6	186.188,61	21.525,74	104.408,86	82.883,12
7	96.674,83	14.895,09	104.408,86	89.513,77
8	0,00	7.733,99	104.408,86	96.674,83

7.3.2 Amortización con cuotas extras pactadas

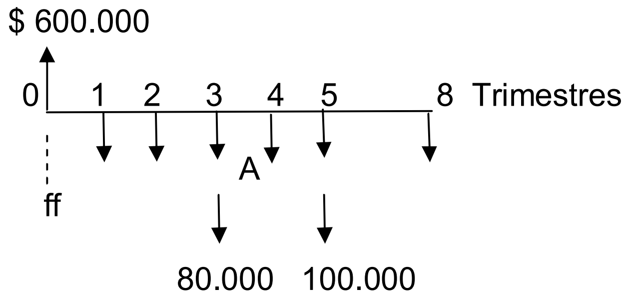
Cuotas extras pactadas son aquellas en las que el prestamista y acreedor en el mismo instante en que se contrata el crédito, determinan las fechas en las que se van a efectuar las cuotas extras.

Ejemplo 7.2

Resolver el ejercicio anterior, suponiendo que en el trimestre 3 y 5, se hacen abonos extraordinarios de $ 80.000 y $ 100.000 respectivamente.

Solución:

Los abonos extra pactados, se incluyen en el diagrama económico para calcular la cuota. El cero de la anualidad concuerda con el cero del diagrama económico.



$\mathbf{i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}36}{4} = 8\%}$ **trimestral**

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

$$600.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08}\right] + 80.000(1+0{,}08)^{-3} + 100.000(1+0{,}08)^{-5};$$

$$468.435{,}10 = 5{,}7466A \quad ; \quad A = \frac{468.435{,}10}{5{,}7466} = \$\,81.514{,}62$$

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	600.000,00			
1	566.485,38	48.000,00	81.514,62	33.514,62
2	530.289,59	45.318,83	81.514,62	36.195,79
3	411.198,14	42.423,17	161.514,62	119.091,45
4	362.579,37	32.895,85	81.514,62	48.618,77
5	210.071,10	29.006,35	181.514,62	152.508,27
6	145.362,17	16.805,69	81.514,62	64.708,93
7	75.476,52	11.628,97	81.514,62	69.885,65
8	0,00	6.038,12	81.514,62	75.476,52

7.4 AMORTIZACIÓN CON CUOTAS EXTRAS NO PACTADAS

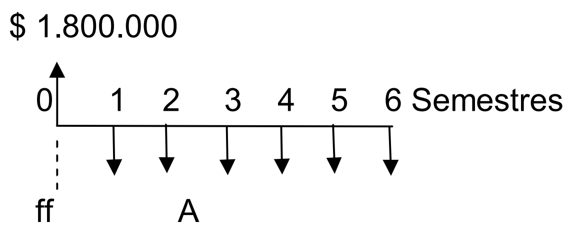
Estas cuotas no aparecen en la ecuación inicial por no haberse pactado. Se pueden presentar dos (2) situaciones: (1) Reliquidar el valor de la cuota con el ánimo de conservar el plazo inicialmente pactado. (2) Cancelamiento de la obligación antes del plazo previsto.

Ejemplo 7.3

Una deuda de \$ 1.800.000 se va a cancelar en 6 pagos semestrales con un interés 20% NS, si al momento efectuar el pago No 3, se realiza un abono extra no pactado de \$ 780.000 se pide: a) Realizar la tabla si con el abono extra se solicita la reliquidación de la cuota, b) Realizar la tabla si la cuota extra se abona al capital sin reliquidar la cuota,

Solución:

Los abonos extra no pactados, no se incluyen en el diagrama económico para calcular la cuota. El cero de la anualidad concuerda con el cero del diagrama económico.



$$i=\frac{r}{m}=\frac{0{,}20}{2}=10\%\ \text{semestral}$$

$$\sum \text{Arriba}=\sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

$$1.800.000=A\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-6}}{0{,}10}\right]; \quad \text{entonces:} \quad 1.800.000=4{,}3553A;$$ por consiguiente:

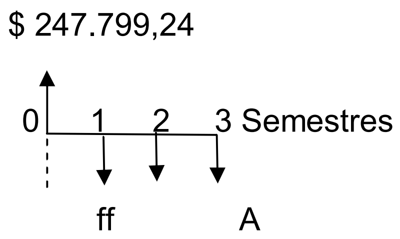
$$A=\frac{1.800.000}{4{,}3553}=\$\ 413.293{,}28$$

a) **Mantenimiento del plazo, reliquidación de la cuota**

La tabla de amortización se presenta a continuación:

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	1.800.000,00			
1	1.566.706,72	180.000,00	413.293,28	233.293,28
2	1.310.084,11	156.670,67	413.293,28	256.622,61
3	247.799,24	131.008,41	1.193.293,28	1.062.284,87
4	172.935,43	24.779,92	99.643,74	74.863,82
5	90.585,23	17.293,54	99.643,74	82.350,20
6	0,00	9.058,52	99.643,74	90.585,23

Después del abono extra no pactado, el saldo en el período 3, alcanza la suma de \$ 247.799,24, por lo tanto, se debe proceder a reliquidar una nueva cuota, para garantizar pagar en el mismo plazo. La reliquidación se hace de la siguiente forma:



$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}20}{2} = 10\% \text{ semestral}$$

$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

$$247.799{,}24 = A\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10}\right]$$; entonces: $247.799{,}24 = 2{,}4869A$; de donde:

$$A = \frac{247.799{,}24}{2{,}4869} = \$\ 99.643{,}74$$

b) Disminución del plazo

A partir del abono extra no pactado de \$ 780.00 en el período 3, la tabla de amortización quedaría así:

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	1.800.000,00			
1	1.566.706,72	180.000,00	413.293,28	233.293,28
2	1.310.084,11	156.670,67	413.293,28	256.622,61
3	247.799,24	131.008,41	1.193.293,28	1.062.284,87
4	-	24.779,92	272.579,17	247.799,24

El plazo se disminuye en 3 períodos. La cuota del período 4, se determina sumando al saldo del período 3 más los intereses del período 4, es decir, la cuota del período 4, quedará así:

$$\text{Cuota}_{(4)} = 247.799{,}24 + 24.779{,}92 = \$272.579{,}17$$

7.5 AMORTIZACIÓN CON PERÍODO DE GRACIA

El periodo de gracia se refiere en que una vez establecida la obligación financiera, al prestatario se le concede una periodo de tiempo determinado antes de efectuar el primer pago. Existen dos formas de préstamos con período de gracia: a) Periodo de gracia muerto, y b) periodo de gracia con cuota reducida

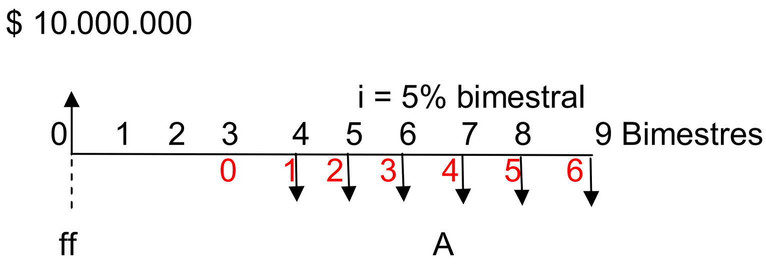
Periodo de gracia muerto: Es aquel tiempo en el que no hay pagos de intereses ni abono a capital, pero los intereses causados se acumulan al capital principal, produciéndose un incremento en la deuda por acumulación de los intereses durante el periodo de gracia.

Periodo de gracia con cuota reducida: Es aquel en el cual se cobra únicamente los interés que se causan, pero no se realizan abonos a capital, evitándose con esto el incremento del valor del préstamo, debido que los intereses se van pagando a medida que se causan.

Ejemplo 7.4

Se adquiere un préstamo por la suma de $ 10.000.000, pagadero en 6 cuotas bimestrales 5% bimestral. Elaborar la tabla de amortización, si la primera cuota se paga en el bimestre 4, en el período de gracia, no se pagan intereses ni se abona a capital

Solución:



$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Lo primero que se debe hacer, es definir el cero de la anualidad, el cual es el período 3, en ese período se determina el presente de la anualidad y posteriormente se traslada a la fecha focal.

En el periodo de gracia muerto, por no pagarse los intereses, ni realizarse abonos a capital, éste durante el período de gracia se va incrementando, por producirse el fenómeno de desamortización o amortización negativa, el cual se visualiza con claridad en la tabla de amortización.

$$10.000.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-6}}{0{,}05}\right](1+0{,}05)^{-3};\ \text{donde:}\ 10.000.000 = 4{,}3846A\ ;$$

por consiguiente:

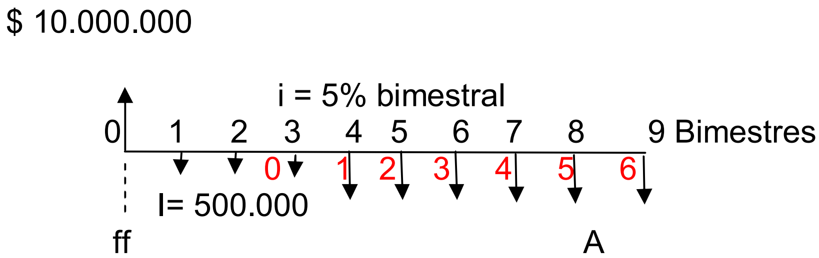
$$A = \frac{10.000.000}{4{,}3846} = \$\ 2.280.723{,}47$$

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	10.000.000,00			
1	10.500.000,00	500.000,00		-500.000,00
2	11.025.000,00	525.000,00		-525.000,00
3	11.576.250,00	551.250,00		-551.250,00
4	9.874.339,03	578.812,50	2.280.723,47	1.701.910,97
5	8.087.332,51	493.716,95	2.280.723,47	1.787.006,52
6	6.210.975,67	404.366,63	2.280.723,47	1.876.356,84
7	4.240.800,98	310.548,78	2.280.723,47	1.970.174,69
8	2.172.117,56	212.040,05	2.280.723,47	2.068.683,42
9	0,00	108.605,88	2.280.723,47	2.172.117,56

Ejemplo 7.5

Resolver el problema anterior suponiendo que el período de gracia es con cuota reducida.

Solución:



$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Se encuentra los intereses que se generan en los períodos de gracia, como los intereses en los 3 períodos son iguales, se realiza el cálculo para un período.

$$I = Pin = 10.000.000 * 0{,}05 * 1 = \$\,500.000$$

Lo primero que se debe hacer, es definir el cero de la anualidad (**A**) que se refiere al pago de intereses y abono al capital, el cual es el período 3, en ese período se determina el presente de la anualidad y posteriormente se traslada a la fecha focal. La anualidad que se refiere a los intereses, su cero coincide con el cero del diagrama económico.

En el periodo de gracia por pagarse los intereses, la cantidad prestada se mantiene constante durante el período de gracia, debido a que la amortización en esos períodos, es cero, lo cual se visualiza con claridad en la tabla de amortización.

$$10.000.000 = 500.000\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-3}}{0{,}05}\right] + A\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-6}}{0{,}05}\right](1+0{,}05)^{-3};$$

donde: $8.638.375{,}99 = 4{,}3846A$; por consiguiente:

$$A = \frac{8.638.375{,}99}{4{,}3846} = \$\,1.970.174{,}68$$

La tabla de amortización quedaría, de la siguiente manera:

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	10.000.000,00			
1	10.000.000,00	500.000,00	500.000,00	0,00
2	10.000.000,00	500.000,00	500.000,00	0,00
3	10.000.000,00	500.000,00	500.000,00	0,00
4	8.529.825,32	500.000,00	1.970.174,68	1.470.174,68
5	6.986.141,91	426.491,27	1.970.174,68	1.543.683,41
6	5.365.274,32	349.307,10	1.970.174,68	1.620.867,58
7	3.663.363,36	268.263,72	1.970.174,68	1.701.910,96
8	1.876.356,85	183.168,17	1.970.174,68	1.787.006,51
9	0,00	93.817,84	1.970.174,68	1.876.356,81

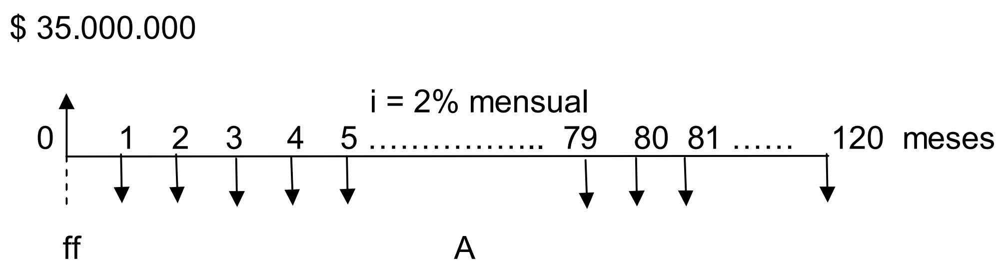
7.6 DISTRIBUCION DE UN PAGO

Una cuota de amortización se compone de dos partes: 1) Intereses y 2) la amortización; no obstante; no es indispensable construir toda la tabla de amortización para determinar los intereses y la amortización de una cuota dada, sólo es necesario calcular los intereses al capital insoluto del periodo inmediatamente anterior y luego, hacer la diferencia con el valor de la cuota, para establecer la parte que corresponde a la amortización o abono al capital.

Ejemplo 7.6

Encontrar la distribución del pago No 80, en una obligación financiera de $ 35.000.000 pactada a 10 años mediante pagos mensuales y a una tasa de interés del 24% CM.

Solución:



$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Lo primero que se debe realizar es encontrar el saldo en el período 79, por lo tanto, es necesario determinar la cuota que se tiene que cancelar durante los 120 meses de la obligación financiera. El cero de la anualidad concuerda con el cero del diagrama.

$i=\frac{r}{m}=\frac{0,24}{12}=2\%$ mensual ;donde: $35.000.000=A\left[\frac{1-(1+0,02)^{-120}}{0,02}\right]$;

entonces: $35.000.000=45,36A$; por consiguiente:

$$A=\frac{35.000.000}{45,46}=\$\ 771.683,39$$

Una vez establecida la cuota, se determina el saldo en el período 79, lo cual se puede realizar de dos métodos:

Método 1.

a) El préstamo ($ 35.000.000) se traslada al período 79, es decir, se busca su valor futuro en ese periodo
b) A los pagos realizados desde el período 1 al 79, se trasladan al período 79, es decir, se les determina su valor futuro.
c) El saldo de lo adeudado en el período 79, será igual a la diferencia de a menos b.

En otras palabras se podría establecer la siguiente igualdad:

$\text{Saldo}_{(n)}=\text{F.deuda}_{(n)}-\text{F.pagos}_{(n)}$; por consiguiente, se estable el saldo así::

$$\mathbf{Saldo_{(79)}=35.000.000(1+0,02)^{79}-771.683,39\left[\frac{(1+0,02)^{79}-1}{0,02}\right]=\$\ 21.452.404,48}$$

Método 2

Las cuotas desde el período 80 hasta el periodo 120, se trasladan al período 79, es decir se les busca el valor presente en ese período, se podría presentar la siguiente igualdad: $\text{Saldo}_{(n)}=\text{VP.Cuotas por Cancelar}$

$$\text{Saldo}(79)=771.683,39\left[\frac{1-(1+0,02)-41}{0,02}\right]=\$\ 21.452.404,48$$

Ahora teniendo el saldo en el período 79, se procede a determinar el valor de los intereses en el período 80, se usa la siguiente fórmula:

$$I = Pin = 21.452.404{,}48 * 0{,}02 * 1 = \$429.048{,}09$$

El valor de la amortización será: 771.683,39 – 429.048,09 = $ 342.635,30

Lo anterior se visualiza en la siguiente tabla de amortización, que muestra los períodos 79 y 80, si el lector desea puede terminarla hasta el período 120.

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
79	21.452.404,48			
80	21.109.769,18	429.048,09	771.683,39	342.635,30

7.7 AMORTIZACION MEDIANTE ABONO CONSTANTE A CAPITAL CON INTERESES VENCIDOS

Esta forma de amortización, consiste en amortizar el capital recibido en préstamo a través de un valor constante al final de cada período, es importante anotar que la cuota es variable, pero el abono o amortización al capital es fijo. Por lo tanto, la amortización se calcula dividiendo el valor de la deuda entre el número de pagos que se van a realizar; por consiguiente se tiene: $\mathbf{A} = \dfrac{\textbf{Deuda}}{\textbf{No De pagos}}$

Ejemplo 7.7

Una persona solicita a una entidad bancaria un préstamo por $ 20.000.000, el cual pagará durante 2 años con amortización constante a capital e intereses del 30% NT. Elaborar una tabla de amortización.

Solución:

Es necesario calcular el interés por trimestre, así: $i = \dfrac{r}{m} = \dfrac{0{,}30}{4} = 0{,}075$ trimestral

Se determina la amortización o abono a capital con la siguiente igualdad:

$$A = \frac{\text{Deuda}}{\text{No de Pagos}} = \frac{20.000.000}{8} = \$2.500.000$$

Inmediatamente se procede a la elaboración de la tabla de amortización. Teniendo en cuenta que:

$$\text{Cuota}_{(n)} = \text{Amortizacion}_{(n)} + \text{Intereses}_{(n)}$$

La tabla de amortización quedaría así:

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	20.000.000,00			
1	17.500.000,00	1.500.000,00	4.000.000,00	2.500.000,00
2	15.000.000,00	1.312.500,00	3.812.500,00	2.500.000,00
3	12.500.000,00	1.125.000,00	3.625.000,00	2.500.000,00
4	10.000.000,00	937.500,00	3.437.500,00	2.500.000,00
5	7.500.000,00	750.000,00	3.250.000,00	2.500.000,00
6	5.000.000,00	562.500,00	3.062.500,00	2.500.000,00
7	2.500.000,00	375.000,00	2.875.000,00	2.500.000,00
8	-	187.500,00	2.687.500,00	2.500.000,00

7.8 AMORTIZACION MEDIANTE ABONO CONSTANTE A CAPITAL CON INTERESES ANTICIPADO

Es la forma más difundida de amortización usada por las instituciones financieras, y consiste en cobrar los intereses de manera anticipada y amortizar el capital a través de un valor constante al final de cada período, es importante anotar que la cuota es variable, pero el abono o amortización al capital es fijo. Por lo tanto, la amortización se calcula dividiendo el valor de la deuda entre el número de pagos que se van a realizar, por consiguiente se tiene: $\mathbf{A} = \frac{\textbf{Deuda}}{\textbf{No de Pagos}}$

Los intereses por ser anticipados, se calculan aplicando la tasa al saldo de capital del mismo período y la cuota será igual a la amortización más los intereses.

Ejemplo 7.8

Una persona solicita a una entidad bancaria un préstamo por $ 12.000.000, el cual pagará durante 4 años con amortización constante a capital e intereses del 36% ASA. Elaborar una tabla de amortización.

Solución:

Es necesario calcular el interés por trimestre, así: $i_a = \frac{r_a}{m} = \frac{0,36}{2} = 0,18$ semestral anricipado

Se determina la amortización o abono a capital con la siguiente igualdad:

$$A = \frac{\text{Deuda}}{\text{No de Pagos}} = \frac{12.000.000}{8} = \$1.500.000$$

Inmediatamente se procede a la elaboración de la tabla de amortización. Teniendo en cuenta que:

$$\text{Cuota}_{(n)} = \text{Amortizacion}_{(n)} + \text{Intereses}_{(n)}$$

La tabla de amortización quedaría así:

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	12.000.000,00			
1	10.500.000,00	2.160.000,00	3.660.000,00	1.500.000,00
2	9.000.000,00	1.890.000,00	3.390.000,00	1.500.000,00
3	7.500.000,00	1.620.000,00	3.120.000,00	1.500.000,00
4	6.000.000,00	1.350.000,00	2.850.000,00	1.500.000,00
5	4.500.000,00	1.080.000,00	2.580.000,00	1.500.000,00
6	3.000.000,00	810.000,00	2.310.000,00	1.500.000,00
7	1.500.000,00	540.000,00	2.040.000,00	1.500.000,00
8	-	270.000,00	1.770.000,00	1.500.000,00

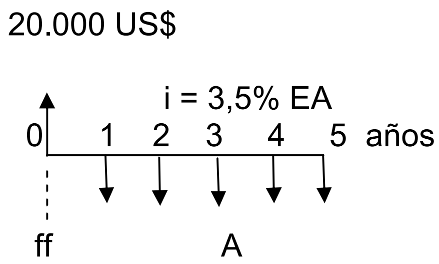
7.9 AMORTIZACION EN MONEDA EXTRANJERA

Cuando se va a amortizar con cuotas en pesos, un préstamo en moneda extranjera, las cuotas y los saldos insolutos deben ser ajustados con la tasa de devaluación o de revaluación del período. Los intereses se calculan en base al saldo ajustado del período. La amortización, se determina por la diferencia entre la cuota ajustada y los intereses del periodo; mientras que el saldo sin ajustar de un período, será igual al saldo ajustado menos la amortización del período.

Ejemplo 7.9

Un empresario colombiano importa maquinaria a crédito por un valor de 20.000 US$ para cancelar al final del año 5, la tasa que le cobran es del 3,5% EA. Elaborar una tabla de amortización, si para los dos primeros años se estima una devaluación promedio del peso frente al dólar del 12%, en el año tres el dólar se revalúa frente al peso en un 3,8% y en los dos últimos años la devaluación promedio anual del peso frente al dólar se estima en un 10%. La tasa de cambio actual es de $ 1.600/US$.

Solución:



$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (ff \quad 0)$$

Se determina la anualidad en dólares, teniendo en cuenta que el cero de la anualidad, concuerda con el cero del diagrama.

$$20.000 = A\left[\frac{1-(1+0,035)^{-5}}{0,035}\right]; \quad \text{entonces: } 20.000 = 4,515A \text{ ; donde:}$$

$$A = \frac{20.000}{4,515} = 4.429,63\,US\$$$

Como la tasa de cambio TC_0 está expresada en $/US$, se debe determinar la devaluación del peso frente dólar en el año 3, para lo cual, se usa la siguiente expresión:

$$i_{dv(\$/US\$)} = \frac{i_{rv(US\$/\$)}}{1-i_{rv(US\$/\$)}} = \frac{0,038}{1-0,038} = 0,0395 = 3,95\%\,EA \text{ ; por consiguiente:}$$

Ahora, se podría realizar la tabla de amortización, teniendo en cuenta lo siguiente:

a) Se calcula el saldo sin ajustar en pesos en el período cero:

$$P_{\$} = P_{US\$} * TC_0 = 20.000\ US\$ * \$1.600/US\$ = \$\ 32.000.000$$

b) Se determina el saldo ajustado en cada uno de los años de la obligación financiera, teniendo en cuenta los procesos devaluatorios.

$$\text{Saldo Ajustado}_{(n)} = \text{Saldo Sin Ajustar}_{(n-1)} * i_{dv}$$

$$\text{Saldo Ajustado}_{(1)} = \$32.000.000 * (1+0,12) = \$35.840.000$$

$$\text{Saldo Ajustado}_{(2)} = \$29.156.503,04 * (1+0,12) = \$32.655.283,40$$

$$\text{Saldo Ajustado}_{(3)} = \$24.907.773,73 * (1+0,0395) = \$25.891.630,79$$

$$\text{Saldo Ajustado}_{(4)} = \$17.556.220,71 * (1+0,10) = \$19.311.842,78$$

$$\text{Saldo Ajustado}_{(5)} = \$9.821.978 * (1+0,10) = \$10.804.176,25$$

c) Los intereses se calculan sobre los saldos ajustados de cada uno de los años.

$$\text{Intereses}_{(n)} = \text{Saldo Ajustado}_{(n)} * i$$

$$\text{Intereses}_{(1)} = \$35.840.000 * 0,035 = \$1.254.400$$

$$\text{Intereses}_{(2)} = \$32.655.283,40 * 0,035 = \$1.142.934,92$$

$$\text{Intereses}_{(3)} = \$25.891.630,79 * 0,035 = \$\ 906.207,08$$

$$\text{Intereses}_{(4)} = \$19.311.842,78 * 0,035 = \$\ 675.914,50$$

$$\text{Intereses}_{(5)} = \$10.804.176,25 * 0,035 = \$\ 378.146,17$$

d) En el cálculo de las cuotas, se sigue el siguiente procedimiento:

$$\text{Cuota}_{(n)} = \text{Cuota(US\$)} * TC0 * (1+idv_1) * (1+idv_2) * (1+idv_3) * (1+idv_4) * (1+idv_5)$$

$$\text{Cuota}_{(1)} = 4.429,63\ \text{US\$} * \$1.600/\text{US\$} * (1+0,12) = \$7.937.896,96$$

$$\text{Cuota}_{(2)} = 4.429,63\ \text{US\$} * \$1.600/\text{US\$} * (1+0,12)\ \hat{}2 = \$8.890.444,60$$

$$\text{Cuota}_{(3)} = 4.429,63\ \text{US\$} * \$1.600/\text{US\$} * (1+0,12)\ \hat{}2 (1+0,0395) = \$9.241.617,16$$

$$\textbf{Cuota}_{(4)} = \textbf{4.429,63 US\$ * \$1.600/US\$ * (1,12)}^{\wedge 2}\textbf{(1,0395)(1,10)} = \textbf{\$10.165.778,88}$$

$$\textbf{Cuota}_{(5)} = \textbf{4.429,63 US\$ * \$1.600/US\$ * (1,12)}^{\wedge 2}\textbf{(1,0395)(1,10)}^{\wedge 2} = \textbf{\$11.182.356,76}$$

e) La amortización de cada período se hará tomando la cuota de período y restándole la amortización del período.

f) El saldo sin ajustar de cada periodo, se realiza de la siguiente forma:

$$\text{Saldo Sin Ajustar(n)} = \text{Saldo Ajustado(n)} - \text{Amortización(n)}$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(1)} = 35.840.000 - 6.683.496,96 = 29.156.503,04$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(2)} = 32.655.283,40 - 7.747.509,68 = 24.907.773,73$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(3)} = 25.891.630,79 - 8.335.410,08 = 17.556.220,71$$

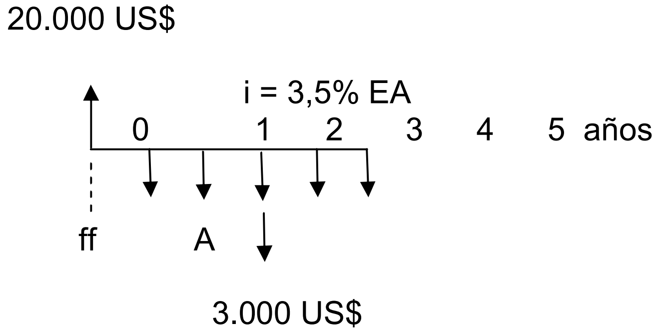
$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(4)} = 19.311.842,78 - 9.489.864,37 = 9.821.978,41$$

Para el periodo 5, el saldo sin ajustar debe ser cero. A continuación, se presenta la tabla de amortización.

Periodo	Saldo Sin Ajustar	Saldo Ajustado	Intereses	Cuota	Amortización
0	32.000.000,00				
1	29.156.503,04	35.840.000,00	1.254.400,00	7.937.896,96	6.683.496,96
2	24.907.773,73	32.655.283,40	1.142.934,92	8.890.444,60	7.747.509,68
3	17.556.220,71	25.891.630,79	906.207,08	9.241.617,16	8.335.410,08
4	9.821.978,41	19.311.842,78	675.914,50	10.165.778,87	9.489.864,37
5	(0,00)	10.804.176,25	378.146,17	11.182.356,76	10.804.176,25

Ejemplo 7.10

Resuelva el ejercicio anterior si el año 3, se realiza un abono extra pactado de 3.000 US$.



$$\sum \text{Arriba} = \sum \text{Abajo} \quad (\text{ff} \rightarrow 0)$$

Se determina la anualidad en dólares, teniendo en cuenta que el cero de la anualidad, concuerda con el cero del diagrama.

$$20.000 = A\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-5}}{0{,}035}\right] + 3.000(1+0{,}035)^{-3}; \qquad 17.294{,}17 = 4{,}515A\,;$$

donde:

$$A = \frac{17.294{,}17}{4{,}515} = 3.830{,}34\,\text{US\$}$$

Como la tasa de cambio TC_0 está expresada en $/US$, se debe determinar la devaluación del peso frente dólar en el año 3, para lo cual, se usa la siguiente expresión:

$$i_{dv(\$/US\$)} = \frac{i_{rv(US\$/\$)}}{1-i_{rv(US\$/\$)}} = \frac{0{,}038}{1-0{,}038} = 0{,}0395 = 3{,}95\%\,EA \text{ ; por consiguiente:}$$

Ahora, se podría realizar la tabla de amortización, teniendo en cuenta lo siguiente:

a) Se calcula el saldo sin ajustar en pesos en el período cero:

$$P_{\$} = P_{US\$} * TC_0 = 20.000\ \text{US\$} * \$1.600/\text{US\$} = \$\ 32.000.000$$

b) Se determina el saldo ajustado en cada uno de los años de la obligación financiera, teniendo en cuenta los procesos devaluatorios.

$$\text{Saldo Ajustado}_{(n)} = \text{Saldo Sin Ajustar}_{(n-1)} * i_{dv}$$

$$Saldo\,Ajustado_{(1)} = \$32.000.000 * (1+0,12) = \$35.840.000$$

$$Saldo\,Ajustado_{(2)} = \$30.230.436,21 * (1+0,12) = \$33.858.088,56$$

$$Saldo\,Ajustado_{(3)} = \$27.355.482,21 * (1+0,0395) = \$\,28.436.023,76$$

$$Saldo\,Ajustado_{(4)} = \$\,15.181.029,15 * (1+0,10) = \$\,16.699.132,07$$

$$Saldo\,Ajustado_{(5)} = \$\,8.493.170,36 * (1+0,10) = \$\,9.342.487,40$$

c) Los intereses se calculan sobre los saldos ajustados de cada uno de los años.

$$Intereses_{(n)} = Saldo\ Ajustado_{(n)} * i$$

$$Intereses_{(1)} = \$35.840.000 * 0,035 = \$1.254.400$$

$$Intereses_{(2)} = \$33.858.088,56 * 0,035 = \$1.185.033,10$$

$$Intereses_{(3)} = \$28.436.023,76 * 0,035 = \$\ 995.260,83$$

$$Intereses_{(4)} = \$16.699.132,07 * 0,035 = \$\ 584.469,62$$

$$Intereses_{(5)} = \$9.342.487,40 * 0,035 = \$\ 326.987,06$$

d) En el cálculo de las cuotas, se sigue el siguiente procedimiento:

$$Cuota_{(n)} = Cuota(US\$) * TC0 * (1+idv_1) * (1+idv_2) * (1+idv_3) * (1+idv_4) * (1+idv_5)$$

$$Cuota_{(1)} = 3.830,34\ US\$ * \$1.600/US\$ * (1+0,12) = \$6.863,963,79$$

$$\text{Cuota}_{(2)} = 3.830{,}34\ \text{US\$} * \$1.600/\text{US\$} * (1+0{,}12)\ \hat{}2 = \$7.687.639{,}44$$

$$\text{Cuota}_{(3)} = 3.830{,}34\ \text{US\$} * \$1.600/\text{US\$} * (1+0{,}12)\ \hat{}2 (1+0{,}0395) = \$7.991.301{,}20$$

A esta cuota hay que adicionarle los 3.000 US$ de abono extra pactado, teniendo en cuenta el efecto devaluatorio de los tres años; entonces:

$$\textbf{Abono extra pactado} = \mathbf{3.000\ US\$ \times \$1.600/US\$ \times (1{,}12)\hat{}2 \times (1{,}0395) = \$6.258.954{,}24}$$

Entonces la cuota 3 será = 7.991.301,2 + 6.258.954,24 = $ 14.250.255,44

$$\textbf{Cuota}_{\mathbf{(4)}} = \mathbf{3.830{,}34\ US\$ * \$1.600/US\$ * (1{,}12)\ \hat{}2 (1{,}0395)(1{,}10) = \$8.790.431{,}32}$$

$$\textbf{Cuota}_{\mathbf{(5)}} = \mathbf{3.830{,}34\ US\$ * \$1.600/US\$ * (1{,}12)\ \hat{}2 (1{,}0395)(1{,}10)\ \hat{}2 = \$9.669.474{,}46}$$

e) La amortización de cada período se hará tomando la cuota de período y restándole la amortización del período.

f) El saldo sin ajustar de cada periodo, se realiza de la siguiente forma:

$$\text{Saldo Sin Ajustar(n)} = \text{Saldo Ajustado(n)} - \text{Amortizacion(n)}$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(1)} = 35.840.000 - 5.609.563{,}79 = 30.230.436{,}21$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(2)} = 33.858.088{,}56 - 6.502.606{,}35 = 27.355.482{,}21$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(3)} = 28.436.023{,}76 - 13.254.994{,}61 = 15.181.029{,}15$$

$$\text{Saldo Sin Ajustar}_{(4)} = 16.699.132{,}06 - 8.205.961{,}70 = 8.493.170{,}36$$

Para el periodo 5, el saldo sin ajustar debe cero. A continuación, se presenta la tabla de amortización.

Período	Saldo Sin Ajustar	Saldo Ajustado	Intereses	Cuota	Amortización
0	32.000.000,00				
1	30.230.436,21	35.840.000,00	1.254.400,00	6.863.963,79	5.609.563,79
2	27.355.482,21	33.858.088,56	1.185.033,10	7.687.639,44	6.502.606,35
3	15.181.029,15	28.436.023,76	995.260,83	14.250.255,44	13.254.994,61
4	8.493.170,36	16.699.132,06	584.469,62	8.790.431,32	8.205.961,70
5	0	9.342.487,40	326.987,06	9.669.474,45	9.342.487,00

Ejemplo 7.11

Un préstamo de $ 40.000 US$ se va a cancelar en 4 años con abonos constantes a capital en forma anual. Si la tasa de interés es del 3,2% EA, construya la tabla de amortización en pesos. Considere una tasa de devaluación promedio anual para los primeros 2 años del peso frente al dólar del 11% EA y para los dos siguientes el 9%. La tasa de cambio, el día de la operación era de $ 1.700/US$.

Solución:

Se calcula el abono constante a capital, así:

$$\text{Amortización} = \frac{\text{Deudas}}{\text{No de pagos}} = \frac{40.000}{4} = 10.000\ \text{US\$}$$

Las amortizaciones para cada año se ajustan por su efecto devaluatorio y se determinan de la siguiente manera:

$$\text{Amortización}_{(1)} = 10.000\ \text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11) = 18.700.000$$

$$\text{Amortización}_{(2)} = 10.000\ \text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11)\text{\^{}}2 = 20.570.000$$

$$\text{Amortización}_{(3)} = 10.000\ \text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11)\text{\^{}}2 * (1+0,09) = 22.421.300$$

$$\text{Amortización}_{(4)} = 10.000\ \text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11)\text{\^{}}2 * (1+0,09)\text{\^{}}2 = 24.439.217$$

El saldo sin ajustar de período cero (0), se halla así:

$$\text{Saldo sin Ajustar}_{(0)} = 40.000\,\text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} = \$68.000.000$$

El saldo ajustado de cada período se encuentra tomando el saldo sin ajustar del período anterior y multiplicarlo por el efecto devaluatorio o revaluatorio del período respectivo, así:

$$\text{Saldo Ajustado}_{(1)} = 68.000.000 * (1 + 0{,}10) = \$74.800.000$$
$$\text{Saldo Ajustado}_{(2)} = 56.100.000 * (1 + 0{,}10) = \$61.710.000$$
$$\text{Saldo Ajustado}_{(3)} = 41.140.000 * (1 + 0{,}09) = \$44.842.600$$
$$\text{Saldo Ajustado}_{(4)} = 22.421.300 * (1 + 0{,}09) = \$24.439.217$$

Los intereses en cada uno de los períodos se calculan tomando el saldo ajustado del período y multiplicarlo por la tasa de interés, es decir, se procede de la siguiente forma:

$$\text{Intereses}_{(1)} = 74.800.000 * 0{,}032 = \$2.393.600$$
$$\text{Intereses}_{(2)} = 61.710.000 * 0{,}032 = \$1.974.720$$
$$\text{Intereses}_{(3)} = 44.842.600 * 0{,}032 = \$1.434.963{,}20$$
$$\text{Intereses}_{(4)} = 24.439.217 * 0{,}032 = \$782.054{,}94$$

Los saldos sin ajustar de cada uno de los otros períodos se encuentran así:

$$\text{Saldo sin ajustar}_{(1)} = 74.800.000 - 18.700.000 = \$56.100.000$$
$$\text{Saldo sin ajustar}_{(2)} = 61.710.000 - 20.570.000 = \$41.140.000$$
$$\text{Saldo sin ajustar}_{(3)} = 44.842.600 - 22.421.300 = \$22.421.300$$
$$\text{Saldo sin ajustar}_{(4)} = 24.439.217 - 24.439.217 = \$0$$

La cuota de cada período se determina sumándole a la amortización del período los intereses.

La tabla de amortización se muestra a continuación:

Periodo	Saldo sin ajustar	Saldo Ajustado	Intereses	Cuota	Amortización
0	68.000.000,00				
1	56.100.000,00	74.800.000,00	2.393.600,00	21.093.600,00	18.700.000,00
2	41.140.000,00	61.710.000,00	1.974.720,00	22.544.720,00	20.570.000,00
3	22.421.300,00	44.842.600,00	1.434.963,20	23.856.263,20	22.421.300,00
4	0,00	24.439.217,00	782.054,94	25.221.271,94	24.439.217,00

Ejemplo 7.12

Resuelva el ejemplo anterior, si se supone que la tasa de interés es 3,5% Anual Anticipada.

Solución:

Se calcula el abono constante a capital, así:

$$\text{Amortización} = \frac{D}{N} = \frac{40.000}{4} = 10.000\,\text{US\$}$$

Las amortizaciones para cada año se ajustan por su efecto devaluatorio y se determinan de la siguiente manera:

En el período cero (0) los intereses pagados es igual a la cuota, debido a que en ese período la amortización es cero.

$$\text{Amortización}_{(1)} = 10.000\,\text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11) = 18.700.000$$

$$\text{Amortización}_{(2)} = 10.000\,\text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11)^{\wedge 2} = 20.570.000$$

$$\text{Amortización}_{(3)} = 10.000\,\text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11)^{\wedge 2} * (1+0,09) = 22.421.300$$

$$\text{Amortización}_{(4)} = 10.000\,\text{US\$} * \$1.700/\text{US\$} * (1+0,11)^{\wedge 2} * (1+0,09)^{\wedge 2} = 24.439.217$$

El saldo ajustado de cada período se encuentra tomando el saldo sin ajustar del respectivo y se multiplica por el efecto devaluatorio o revaluatorio así:

$$\text{Saldo Ajustado}_{(0)} = 68.000.000 * (1+0,10) = \$74.800.000$$

$$\text{Saldo Ajustado}_{(1)} = 56.100.000 * (1+0,10) = \$61.710.000$$
$$\text{Saldo Ajustado}_{(2)} = 41.140.000 * (1+0,09) = \$44.842.600$$
$$\text{Saldo Ajustado}_{(3)} = 22.421.300 * (1+0,09) = \$24.439.217$$

Los intereses son anticipados, y en cada uno de los períodos se calculan tomando el saldo ajustado del período y multiplicarlo por la tasa de interés, es decir, se procede de la siguiente forma:

$$\text{Intereses}_{(0)} = 74.800.000 * 0,035 = \$2.618.000$$
$$\text{Intereses}_{(1)} = 61.710.000 * 0,035 = \$2.159.850$$
$$\text{Intereses}_{(2)} = 44.842.600 * 0,035 = \$1.569.491$$
$$\text{Intereses}_{(3)} = 24.439.217 * 0,035 = \$855.372,60$$

Los saldos sin ajustar de cada uno de los otros períodos se encuentran así:

$$\text{Saldo sin ajustar}_{(1)} = 74.800.000 - 18.700.000 = \$56.100.000$$
$$\text{Saldo sin ajustar}_{(2)} = 61.710.000 - 20.570.000 = \$41.140.000$$
$$\text{Saldo sin ajustar}_{(3)} = 44.842.600 - 22.421.300 = \$22.421.300$$
$$\text{Saldo sin ajustar}_{(4)} = 24.439.217 - 24.439.217 = \$0$$

La cuota de cada período se determina sumándole a la amortización del período los intereses.

Se muestra a continuación la tabla de amortización:

Periodo	Saldo sin ajustar	Saldo Ajustado	Intereses	Cuota	Amortización
0	68.000.000,00	74.800.000,00	2.618.000,00	2.618.000,00	-
1	56.100.000,00	61.710.000,00	2.159.850,00	21.318.000,00	18.700.000,00
2	41.140.000,00	44.842.600,00	1.569.491,00	22.729.850,00	20.570.000,00
3	22.421.300,00	24.439.217,00	855.372,60	23.990.791,00	22.421.300,00
4	0,00	0,00		25.294.589,60	24.439.217,00

Se observa que el saldo sin ajustar y ajustado en el período cuatro (4) es cero.

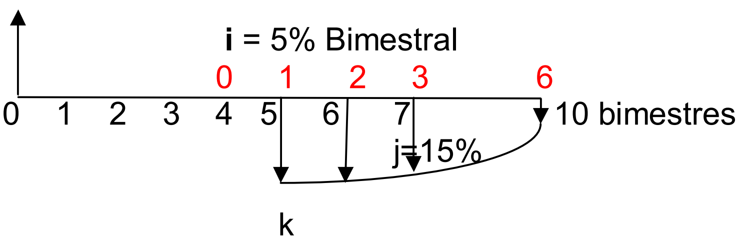
A continuación y a través de dos ejemplos, se mostrará como se realiza la tabla de amortización, cuando se está trabajando con una serie gradiente geométrica o exponencial.

Ejemplo 7.13

Se adquiere un préstamo por la suma de $ 4.000.000, con un periodo de gracia muerto de 4 bimestres y pagadero en 6 cuotas bimestrales decrecientes en un 15% y con un interés del 5% bimestral. Elaborar la tabla de amortización.

Solución:

P = $ 4.000.000



El cero (0) de la serie gradiente geométrica, se encuentra en el período 4. La fecha focal se establece en el cero (0) del diagrama, por tanto, se tiene:

$$4.000.000 = k\left[\frac{1-\left(\frac{1-0,15}{1+0,05}\right)^{6}}{0,05+0,15}\right](1+0,05)^{-4}$$; por tanto: $4.000.000 = 2,9558k$,

entonces:

$$k = \frac{4.000.000}{2,9558} = \$1.353.259,2$$; Primera cuota

A continuación se calculan las demás cuotas, se usa la fórmula: $\text{Cuota}_{(n)} = k(1-j)^{n-1}$

$\text{Cuota}_2 = 1.353.259,2(1-0,15) = \$1.150.270,32$;

$\text{Cuota}_3 = 1.353.259,2(1-0,15)^{\wedge 2} = \$977.729,77$

$\text{Cuota}_4 = 1.353.259,2(1-0,15)^{\wedge 3} = \$831.070,31$;

$\text{Cuota}_5 = 1.353.259,2(1-0,15)^{\wedge 4} = \$706.409,76$

$\text{Cuota}_6 = 1.353.259,2(1-0,15)^{\wedge 5} = \$600.448,30$

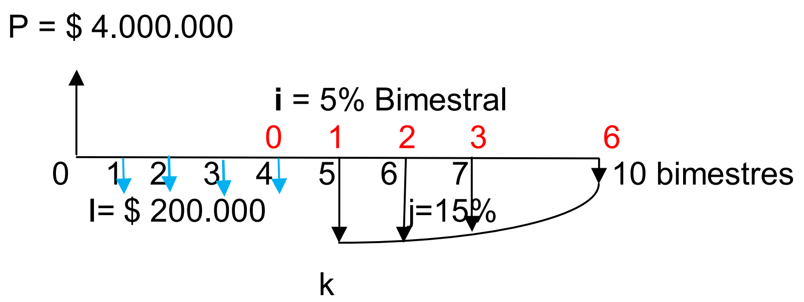
La tabla de amortización, se presenta a continuación:

Período	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	4.000.000,00			
1	4.200.000,00	200.000,00		(200.000,00)
2	4.410.000,00	210.000,00		(210.000,00)
3	4.630.500,00	220.500,00		(220.500,00)
4	4.862.025,00	231.525,00		(231.525,00)
5	3.751.867,05	243.101,25	1.353.259,20	1.110.157,95
6	2.789.190,08	187.593,35	1.150.270,32	962.676,97
7	1.950.919,81	139.459,50	977.729,77	838.270,27
8	1.217.395,50	97.545,99	831.070,31	733.524,32
9	571.855,51	60.869,77	706.409,76	645.539,99
10	0,00	28.592,78	600.448,30	571.855,51

Ejemplo 7.14

Resolver el problema anterior suponiendo que el período de gracia es con cuota reducida.

Solución:



El cero (0) de la serie gradiente geométrica, se encuentra en el período 4. La fecha focal se establece en el cero (0) del diagrama. Se calcula los intereses para cada uno de los periodos de cuota reducida: $I = Pin = 4.000.000 * 0,05 * 1 = \$200.000$

$$4.000.000 = 200.000\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-4}}{0{,}05}\right] + k\left[\frac{1-\left(\frac{1-0{,}15}{1+0{,}05}\right)^{6}}{0{,}05+0{,}15}\right](1+0{,}05)^{-4}$$; por tanto:

$3.290.809,90 = 2{,}9558k$, entonces: $k = \frac{3.290.809{,}90}{2{,}9558} = \$1.113.329{,}69$; Primera cuota

A continuación se calculan las demás cuotas, se usa la fórmula: $Cuota_{(n)} = k(1-j)^{n-1}$

$Cuota_2 = 1.113.329{,}69(1-0{,}15) = \$946.330{,}24$;

$Cuota_3 = 1.113.329{,}69(1-0{,}15)^{\wedge 2} = \$804.380{,}70$

$Cuota_4 = 1.113.329{,}69(1-0{,}15)^{\wedge 3} = \$683.723{,}60$;

$Cuota_5 = 1.113.329{,}69(1-0{,}15)^{\wedge 4} = \$581.165{,}06$

$Cuota_6 = 1.113.329{,}69(1-0{,}15)^{\wedge 5} = \$493.990{,}30$

La tabla de amortización, se presenta a continuación:

Periodo	Saldo	Intereses	Cuota	Amortización
0	4.000.000,00			
1	4.000.000,00	200.000,00	200.000,00	-
2	4.000.000,00	200.000,00	200.000,00	-
3	4.000.000,00	200.000,00	200.000,00	-
4	4.000.000,00	200.000,00	200.000,00	-
5	3.086.670,31	200.000,00	1.113.329,69	913.329,69
6	2.294.673,59	154.333,52	946.330,24	791.996,72
7	1.605.026,57	114.733,68	804.380,70	689.647,02
8	1.001.554,30	80.251,33	683.723,60	603.472,27
9	470.466,96	50.077,71	581.165,06	531.087,34
10	(0,00)	23.523,35	493.990,30	470.466,96

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Un préstamo de $ 300.000 se debe cancelar en 3 cuotas iguales a fin de mes. Si el interés de financiación es del 2% mensual, construir la tabla de amortización. **R/. Primera Cuota: $ 104.026,40**.
2) Un préstamo de $ 400.000 se debe cancelar en cuatro cuotas iguales vencidas más una cuota extra pactada de $ 70.000 en el mes tres. Si el interés de financiación es del 2,5% mensual, construir la tabla de amortización. **R/. Cuota = $ 89.048,47**.
3) Un préstamo de $ 700.000 se debe cancelar con tres cuotas en los meses 2,5 y 8, de tal manera que cada cuota sea de $ 10.000 más que la anterior. Si el interés es del 1,5% mensual, construir la tabla de amortización. **R/. Primera cuota: $ 241.496,82**.
4) Un almacén vende electrodomésticos financiando el 60% del valor, el cual se debe pagar con interés de 3,1% mensual y tres cuotas mensuales iguales; encontrar: a) El factor de liquidación de las cuotas, b) Construir la tabla de amortización para un producto que tiene un valor, de contado, de $ 1.000.000. **R/. 2,8231817A; Cuota: $ 212.526,1**.
5) Un préstamo de $ 380.000 y con interés de financiación del 3% mensual se debe cancelar con 5 cuotas mensuales iguales pagándose la primera 3 meses después de concedido el préstamo. Construir la tabla de amortización. **R/. Cuota $ 88.028**.
6) Una deuda de $ 5.000.000 se va a cancelar mediante el pago de 6 cuotas mensuales de $ 916.725. ¿Qué tasa efectiva mensual se aplicará en el crédito?. Elaborar la tabla de amortización.
7) Una entidad financiera concede un préstamo de $ 6.000.000 a un plazo de 5 años y para cancelar en cuotas semestrales iguales. La tasa de interés es del 12% anual, construir la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 808.655**.
8) Un banco concede un préstamo de $ 7.000.000, a un plazo de 7 años y para cancelar con abonos constantes a capital de manera anual, si la tasa de interés es del 10% EA, construir la tabla de amortización. **R/. Abono: $ 1.000.000**.
9) Un banco concede un préstamo de $ 8.000.000, a un plazo de 8 años, en los cuales 3 son de gracia, donde se pagan solo intereses, en los 5 años restante se hacen abonos constante a capital, si la tasa de interés es del 10% EA, construir la tabla de amortización. **R/. Abono: $ 1.600.000**.
10) Resolver el ejercicio anterior si en el período de gracia no se pagan intereses ni se realizan abono a capital. **R/. Abono: $ 2.129.600**.
11) Un préstamo de $ 4.000.000 se cancela en 6 años con cuotas anuales iguales, si el interés para los 3 primeros años es del 9% EA y del 10% EA para los tres restantes, construir la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 898.555**.
12) Resolver el ejercicio anterior, si el préstamo se cancela con abonos constantes a capital. **R/. Abono: $ 666.666**.
13) Un banco concede un préstamo de $ 6.000.000 a 4 años y un interés del 12% AA. Si se cancelan en cuotas anuales iguales, construir la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 1.798.630**.
14) Resolver el ejercicio anterior, si se realizan abonos constantes a capital. **R/. Abono: $ 1.500.000**.
15) Un préstamo de $ 1.000.000 se quiere cancelar de acuerdo a un gradiente aritmético típico que empiece dentro de un mes, (es decir dentro de un mes se

paga $ G; dentro de 2 meses $ 2G y así sucesivamente) y termine dentro de 5 meses. Si el interés de financiación del préstamo es del 3% mensual, construir la tabla de amortización. **R/. Primera Cuota: G= $ 74.247,41**.

16) Un préstamo de $ 3.000.000 se debe cancelar en 6 cuotas anuales y un interés de financiación del 20% anual, si la primera cuota se paga hoy y las demás cuotas son $ 10.000 más que la correspondiente cuota anterior, construir la tabla de amortización. **R/. Primera Cuota: A= $ 731.976,11**.
17) Un banco concede un préstamo de $ 10.000.000, a un plazo de 5 años, con pagos semestrales iguales y un interés del 8% EA. Se conceden 2 años de gracia, durante el cual se pagan intereses. Construir la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 1.902.840**.
18) Resolver el ejercicio anterior, si se supone que en el período de gracia, no se pagan intereses y no se hace abono a capital. **R/ Cuota: $ 2.219.468**.
19) Un préstamo de $ 2.500.000 se debe cancelar en 5 cuotas semestrales, pagándose la primera 6 meses después de concedido el préstamo, por $ 250.000 y las demás cuotas, aumentadas en cierta cantidad constante con respecto al valor de la cuota anterior. Si el interés de financiación es del 12% semestral, construir la tabla de amortización. **R/. Primera Cuota: A= 250.000 y G= 547.858**.
20) Un préstamo de $ 1.000.000 se debe cancelar con 5 cuotas mensuales de tal manera que cada cuota sea $ 12.000 menos que la cuota anterior. Construir la tabla de amortización si el interés de financiación es del 24,18% ATA y la primera cuota se paga dos meses después de concedido el préstamo. **R/. Primera Cuota: A = $ 240.744,10**.
21) Una deuda de $ 2.000.000 se debe cancelar con 6 pagos mensuales anticipados. Construir la tabla de amortización si el interés de financiación es del 2% mensual y se sabe que cada cuota es el 5% mayor que la cuota anterior. **R/. Primera cuota: K = $ 309.651,99**.
22) Al comprar un artículo se quedaron debiendo $ 1.500.000, los cuales se deben cancelar con 5 cuotas pagándose la primera 3 meses después de comprado el artículo. Si cada cuota aumenta en el 8% respecto de la cuota anterior y el interés de financiación es del 2,4% mensual, construya la tabla de amortización. **R/. Primer pago K = 288.764,01**.
23) En un almacén se venden artículos y se pide de cuota inicial el 40% del valor de contado; el resto debe ser cancelado con 5 cuotas mensuales vencidas de tal manera que cada cuota sea el 10% menos que la cuota anterior. Si el interés de financiación es del 2,1% mensual: a) hallar el valor de liquidación de la primera cuota en función del valor de contado del artículo vendido; b) Encuentre el valor de la última cuota y c) construya la tabla de amortización para un artículo que tiene un valor de contado de $ 600.000. **R/. K= 0,15519817P; $ 61.095,31**.
24) Un banco concede un préstamo de $ 10.000.000, a cuatro años, con abonos constante a capital de manera semestral. Si la tasa de interés es del 12% EA, construir la tabla de amortización. **R/. Abono: $ 1.250.000**.
25) Elaborar la tabla de amortización para un préstamo de $ 900.000 que se cancela en 4 cuotas trimestrales iguales, la tasa de interés es del 8% trimestral. **R/. Cuota: $ 271.728,72**.
26) Una deuda de $ 700.000 se va a cancelar en 4 cuotas semestrales de $A, además se efectuará un abono extra pactado de $ 200.000 que se hará en el

semestre 2, si la tasa de interés es del 14% semestral, construir la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 187.426,36**.

27) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $ 2.000.000 en 12 cuotas mensuales iguales, en el mes 6 se hace un abono extra pactado de $ 500.000. Durante los primeros 6 meses se cobrará la tasa de 2,8% mensual y en los siguientes 6 meses se cobrará una tasa del 3,5% mensual. **R/. Cuota: $ 158.137,30**.
28) Una deuda de $ 1.000.000 se va a cancelar mediante 8 cuotas semestrales iguales con un interés del 12% semestral. Al vencimiento de tercer semestre se efectúa un abono extra no pactado de $ 400.000. Elaborar la tabla de amortización sí: a) El deudor desea disminuir el plazo, b) si se desea mantener el mismo plazo. **R/. Cuota: $ 201.302,84 y cuota reliquidada: $ 90.338,95**.
29) Una persona solicita un crédito por $ 800.000 para pagar en 4 cuotas mensuales de $A y dos períodos de gracia de 2 meses durante los cuales paga solo los intereses, si la tasa de interés es 3,5% mensual, elaborar la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 217.800,91**.
30) Elaborar una tabla de amortizar la suma de $ 3.000.000 en pagos semestrales iguales durante 3 años con un abono extra pactado de $ 800.000 al final del año 2 y una tasa del 16% semestral. **R/. Cuota: $ 694.269,64**.
31) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $ 4.000.000 en 4 cuotas mensuales iguales más un período de gracia de 2 meses y un abono extra pactado de $ 1.000.000 al final de mes 4 y una tasa de interés del 36% NM. **R/. Cuota. $ 888.059,38**.
32) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $ 6.000.000 en pagos anuales iguales durante 5 años, con un período de gracia de 2 años, en el cual sólo se pagan intereses y una tasa el 38% EA. **R/. Cuota: $ 2.849.302, 56**.
33) Calcular la tasa efectiva trimestral a la cual se está amortizando una deuda de $ 3.000.000 mediante cuotas trimestrales de $ 250.000 durante 5 años. **R/. i = 5,45% trimestral**.
34) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $ 1.000.000 en 4 cuotas semestrales que crecen en $ 50.000, la tasa de intereses es del 12% semestral. **R/. Cuota 1 = $ 261.291,83**.
35) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $ 800.000 en 5 pagos períodos crecientes en 16% incluyendo un abono extra pactado de $ 200.000 en el tercer período, la tasa de interés es del 13% efectivo para el período. **R/. Cuota 1 = $ 141.745,35**.
36) Una deuda de $ 20.000.00 se financiar a 6 meses a una tasa de interés del 2,5% mensual, solo se cancelaran los intereses en cada mes, ya que el capital se pagará al final de los 6 meses. Elaborar la tabla de amortización. **R/. Intereses mensuales: $ 500.000**.
37) Un artículo que vale de contado $ 5.000.000 se financia de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 500.000, y el saldo en 6 cuotas mensuales iguales. Si la tasa de interés que se aplica es del 30% MV. Construya la tabla de amortización. **R/. Cuota mes 1: $ 816.974,87**.
38) Un vehículo tiene un valor de contado de $ 20.000.000 y se piensa financiar de la siguiente manera: cuota inicial de $ 2.000.000 y el saldo en 12 cuotas mensuales iguales de $ 1.808.317,54, con una tasa de financiación del 3% mensual. El comprador sólo tiene capacidad para cancelar $ 1.500.000

mensuales y 2 cuotas extraordinarias en los meses 6 y 12. Elaborar la tabla de amortización. **R/. Cuotas extraordinarias: $ 1.994.277,74**.

39) Una deuda de $ 20.000.000 se va a cancelar con 4 cuotas trimestrales iguales y una tasa de interés del 9% trimestral. Elaborar la tabla de amortización si hay un período de gracia de 6 meses, además, suponga: a) En el período de gracia se pagan los intereses causados, b) Los intereses que se causan en el período de gracia se capitalizan. **R/. a) Cuota: $ 6.173.373,24, b) Cuota: $ 7.334.584,75**.

40) El Banco Popular concede un crédito por valor de $ 100.000.000 a una tasa de interés del 36% TV, con un plazo de un año y con abonos constantes a capital de manera trimestral, se pide: elaborar la tabla de amortización. **R/. Abono a capital trimestral: $ 25.000.000**.

41) Resolver el ejercicio anterior, asumiendo una tasa de interés del 36% ACTA. **R/. Abono a capital trimestral: $ 25.000.000**.

42) Una deuda por valor de $ 10.000.000 a una tasa del 2,5% mensual, se va a cancelar con 6 cuotas mensuales que crecen $ 10.000 cada mes. Elaborar la tabla de amortización. **R/. Cuota 1: $ 1.791.219,64**.

43) Un crédito por valor de $ 5.000.000 se cancela por medio de 8 cuotas mensuales iguales que crecen un 1% cada mes. Si la tasa de interés es del 2% mensual, elaborar la tabla de amortización. **R/. Cuota 1: $ 659.698,24**.

44) Un terreno que tiene un valor de contado de $ 55.000.000 se va a financiar por medio de 6 cuotas mensuales que aumentan cada mes en $ 200.000, cobrándose una tasa de interés del 2% mensual. Elaborar la tabla de amortización. **R./ Cuota 1: $ 9.330.468,42**.

45) Se debe pagar una deuda de $ 6.000.000 en 6 meses, con el siguiente plan de pagos: cuotas mensuales iguales con una tasa de interés del 18% MV. Durante los primeros 3 meses sólo se pagarán los intereses y a partir del cuarto mes se cancelarán cuotas hasta amortizar la deuda. Construya la tabla de amortización.

46) Un activo que tiene un valor de $ 50.000.000, se está financiando a una tasa de interés del 30% MV, con cuotas mensuales iguales. Si se sabe que el saldo al final del décimo mes es de $ 32.683.593,58, ¿Cuál es el valor de la cuota que se paga mensualmente y cuál es el número de cuotas o pagos. Elaborar la tabla de amortización. **R/. Cuota: $ 2.795.641,02 y n= 24 cuotas**.

BIBLIOGRAFIA

Alvarez Arango, Alberto. Matemáticas Financieras. 3ª Edición. Mc Graw Hill. 2005.

Baca Currea, Guillermo. Matemáticas Financieras. 3ª Edición. Fondo Educativo Panamericano. 2007

Baca Currea, Guillermo. Ingeniería Económica. 8ª Edición. Fondo Educativo Panamericano. 2005

Baca Urbina, Gabriel. Fundamentos de Ingeniería Económica. 4ª Edición. Mc Graw Hill. 2007.

Cabello González, José M. Matemáticas Financieras Aplicadas. 1ª Edición. Mc Graw Hill. 2005.

Cabeza De V, Leonor & Castrillón C, Jaime. Matemáticas Financieras. 4ª Edición. Uninorte. 2008

Cardona R, Alberto. Matemáticas Financieras. 1ª Edición. Interamericana. 1986.

Cissel, Robet & Cissel Helen. Matemáticas Financieras. 1ª Edición. Continental. 1980

Chan S, Park. Fundamentos de Ingeniería Económica. 2ª Edición. Pearson. 2009

Cruz Rambaud, Salvador. Introducción a las Matemáticas Financieras. 2ª Edición. Pirámide. 2008.

Delgado Perea, Alejandro. Matemáticas Financieras con aplicaciones en los mercados de dinero y de crédito. 2ª Edición. Limusa. 2006.

Díaz, Mata Alfredo & Aguilera, Gómez Víctor. Matemáticas Financieras. 4ª Edición. Mc Graw Hill. 2006

Flórez Uribe, Juan A. Matemáticas Financieras empresariales. 1ª Edición. Ecoe. 2008

García González, Enrique. Matemáticas Financieras. 1ª Edición. Mc Graw Hill.1998.

García, Jaime A. Matemáticas Financieras con Ecuaciones de Diferencias Finita. 4ª Edición. Pearson. 2000.

Gómez Ceballos, Jose Alberto. Matemáticas Financieras aplicadas al sistema financiero colombiano. 4ª Edición. Tecno Mundo Editores. 1985.

Gualteros Villarreal, Omar. Matemáticas Financieras aplicadas a los negocios. 2ª Edición. Rodríguez Quito Editores. 2002.

Hernández Hernández, Abraham. Matemáticas Financieras “Teoría y práctica”. 4ª Edición. ECAFSA. 2000

Highland, Esther H & Rosenbaum, Roberta S. Matemáticas Financieras. 3ª Edición. Prentice Hall. 1987

Infante Villarreal, Arturo. Evaluación Financiera de Proyectos de inversión. 2ª Edición. Norma. 1988.

Jaramillo Betancur, Fernando. Matemática Financiera y su uso para las decisiones en un entorno internacional. 1ª Edición. Universidad de Antioquia. 2005.

Jaramillo Vallejo, Felipe. Matemáticas Financieras Básicas Aplicadas. 1ª Edición. Alfaomega. 2004

Kosikowski Zarzka, Zbigniew. Matemáticas Financieras "El valor del dinero en el Tiempo". 1ª Edición. Mc Graw Hill. 2007.

Meza Orozco, Jhonny de Jesús. Matemáticas Financieras Aplicadas. 3ª Edición. Ecoe. 2008.

Miner Aranzábal, Javier. Curso de Matemática Financiera. 2ª Edición. Mc Graw Hill. 2008.

Montoya Durando, Leonel. Matemáticas Financieras. 8ª Edición. Investigar Editores. 1995

Moore, Justin H, Manual de Matemáticas Financieras. 1ª Edición. Hispanoamericana. 1979

Mora Zambrano, Armando. Matemáticas Financieras. 2ª Edición. Alfaomega. 2007.

Navarro, E & Nave, J. Fundamentos de Matemáticas Financieras. 1ª Edición. A.Bosch. 2001.

Portus Govinden, Lyncoyan. Matemáticas Financieras. 4ª Edición. Mc Graw Hill. 2008.

Riggs, James L & Otros. Ingeniería Económica. 4ª Edición. Alfaomega. 2002

Ruíz, Hector Alfonso. Matemáticas Financieras. 2ª Edición. Universidad Santo Tomás. 1998

Sánchez Vega, Jorge E. Manual de Matemáticas financieras. 1ª Edición. Ecoe.1997

Sanmiguel Arias, Héctor & Veloza Gaitán, Néstor. Manuel de matemáticas financieras aplicadas al sector financiero. 1ª Edición. Asociación Bancaria de Colombia.1990.

Santandreu, Pol. Matemática Financiera "Con ejercicios resueltos". 4ª Edición. Gestión 2000. 2002

Serrano Rodríguez, Javier. Matemáticas Financieras. 1ª Edición. Alfaomega. 2008.

Sullivan, William G. Ingeniería Económica de Degarmo. 12ª Edición. Pearson. 2004

Tarquín, Anthony & Blank, Leland. Ingeniería Económica. 5ª Edición. Mc Graw Hill. 2006.

Tarango, J.P. Matemáticas Financieras. 1ª Edición. Ceysa. 2006

Taylor, George A. Ingeniería Económica “Toma de decisiones económicas”. 1ª Edición. Limusa. 1981

Timor, Enrique. Curso práctico de Matemática Financiera con Excel 2007. 1ª Edición. Inforbook´s, S.L. 2009.

Valera V, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. 4ª Edición. Norma. 1999

Vieira Sobrinho, José Dutra. Matemática Financiera. 2ª Edición. Atlas. 1982.

Vidaurri Aguirre, Héctor Manuel. Matemáticas Financieras. 3ª Edición. Thomson Internacional. 2001.

Villalobos Pérez, José Luis. Matemáticas Financieras. 3ª Edición. Pearson. 2007.

Zendejas Nuñez, Hugo. Matemáticas Financieras. 2ª Edición. Trillas. 1.993.

Zima, Petr & Brown, Robert L. Matemáticas Financieras (schaum). 2ª Edición. Mc Graw Hill. 2005