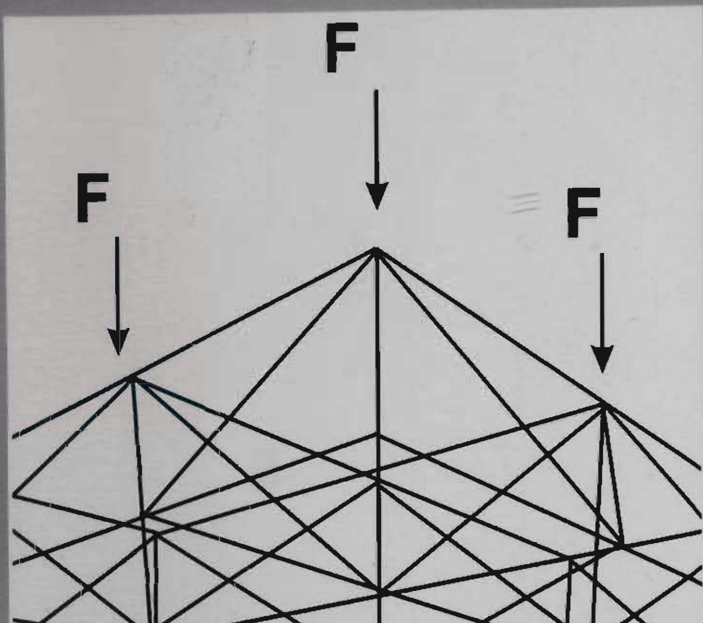


CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA

ARQ. CARLOS GARCÍA MALO FLORES

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

80

División de Ciencias y Artes para el Diseño
Departamento de Procesos y Técnicas de Realización

ARQ. CARLOS GARCÍA MALO FLORES

Realizó sus estudios de licenciatura en la Escuela Mexicana de Arquitectura en la Universidad La Salle, y obtuvo el título de arquitecto en el año de 1976.

Desde ese año es profesor titular en la materia de Estructuras en la mencionada Escuela y profesor investigador en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, en la División de Ciencias y Artes para el Diseño , donde ha impartido las siguientes materias: Diseño Básico, Dibujo, Perspectiva, Geometría descriptiva y Matemáticas en el tronco general; y Construcción, Estática, Resistencia de materiales y Estructuras, en el tronco específico de la carrera de Arquitectura.

En la UAM, ha participado en diversas comisiones (académicas), como representante del personal académico en el Consejo y Colegio académicos y como miembro de las comisiones dictaminadoras. También ha publicado algunas investigaciones en materia de estructuras.

Profesionalmente ha realizado el diseño y cálculo de estructuras de concreto armado, y estructuras de acero.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA

Arq. Carlos García Malo Flores

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

Diseño original de la portada:
Alberto Hernández García

Formación y revisión técnica:
Daniel Gallegos

Corrección de estilo:
Cristina Hernández y Rosa Ma. Rivera

Fotomecánica e impresión de la Portada:
Talleres de Diseño CYAD

Impresión Interior:
Sección de Impresión y Reproducción
de la Unidad

Unidad Azcapotzalco
División de Ciencias y Artes para el Diseño
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Del. Azcapotzalco
02200 México D.F.
Apdo Postal 16-307

Índice

Prólogo

Los temas presentados en este libro, se refieren básicamente a los conceptos fundamentales en materia de estática.

Se exponen de una manera práctica y sencilla, con la ayuda de ejercicios resueltos con procedimientos analíticos. También se pretende relacionar los conceptos de la estática en las estructuras arquitectónicas, con el objeto de que el estudiante de la carrera de Arquitectura identifique la importancia que tiene la materia, en la formación de futuros profesionistas.

El libro está dirigido a los alumnos que cursan los primeros años de la licenciatura en Arquitectura, y puede servir como libro básico para introducirse en las materias de resistencia de materiales y de estructuras.

Se han tratado de simplificar los temas para que los estudiantes asimilen con mayor facilidad los conceptos, en relación a otros textos demasiado complicados y a otro nivel de conocimientos.

Otro de los objetivos consiste en estudiar los temas que son de mayor importancia, con respecto a los programas propuestos por las diferentes escuelas de Arquitectura en México.

El autor

Introducción

Antecedentes históricos

En las estructuras arquitectónicas a.C. la estática se aplicaba de una forma experimental y no se conocían fórmulas matemáticas que relacionaran el comportamiento de los elementos estructurales como: muros, columnas, techos, y sólo se fundamentaban en una lógica estructural que permitía vencer a las fuerzas de gravedad. Por estas razones, las estructuras se limitaban a tener grandes aberturas en los muros, y en los espacios a cubierto.

En Egipto, aprovechando la abundancia de la piedra, las construcciones se levantaron formadas por grandes bloques de este material, lo que determinó un tipo de construcción maciza, con pocas aberturas. Se construyeron monumentos religiosos, templos y santuarios, de los dioses egipcios que en nuestros tiempos podemos visitar, y comprobar interiormente la reducción y limitación de espacios, como por ejemplo, el Templo de Edfu situado en el alto Egipto, construcción a 100 kilómetros de Luxor. (Fig. 1).

Por otro lado, en Mesopotamia no se tenía la piedra como material de construcción, por lo que se diseñó el arco y la bóveda de ladrillo como elemento estructural, y se utilizó el bloque de adobe para la construcción de grandes monumentos como el Ziggurat (torre escalonada) de Ur-Nammu, en Ur (hacia 2100 a.C.).

En Mesoamérica se construyen centros ceremoniales, dos siglos a.C., tales como Teotihuacán al noreste de la ciudad de México, en donde se emplea la piedra como material de construcción para formar grandes plataformas, escalinatas y pirámides escalonadas como las pirámides del Sol, de la Luna, y

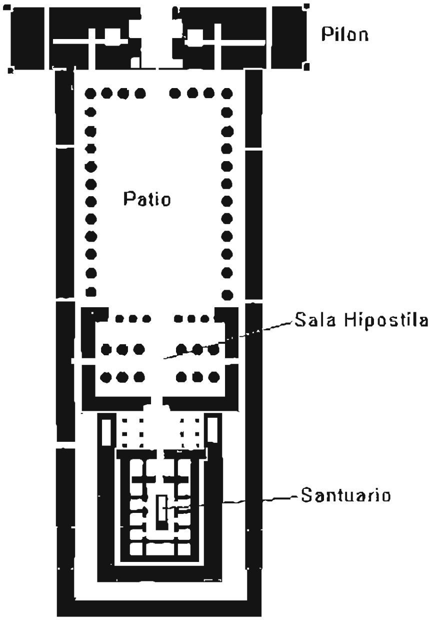


FIGURA 1. Templo de Edfu, Egipto. Debido a problemas estructurales las construcciones se limitaron a tener grandes aberturas en los muros y en los espacios. En Egipto se utilizaron grandes bloques de piedra para los templos, lo que determinó un tipo de construcción maciza.

la de Quetzalcóatl; formas que por sus proporciones guardan una estabilidad estructural.

También se construyeron templos excavados en la roca, con la finalidad de integrarse a la naturaleza, en ellos se tallaron como sistema de soporte las columnas de piedra sobre las cuales se apoyaban los techos de roca. Un ejemplo es el templo de la Reina Hatshepsut, situado en Deir el-Bahari, junto al río Nilo y construido por el arquitecto Senmut.

Otro de los templos excavados en roca es el palacio de Persépolis en Persia. En Grecia, por ejemplo, se aprovechó la pendiente natural del terreno para excavar graderías de sus construcciones como en el teatro de Dionisos en Atenas.

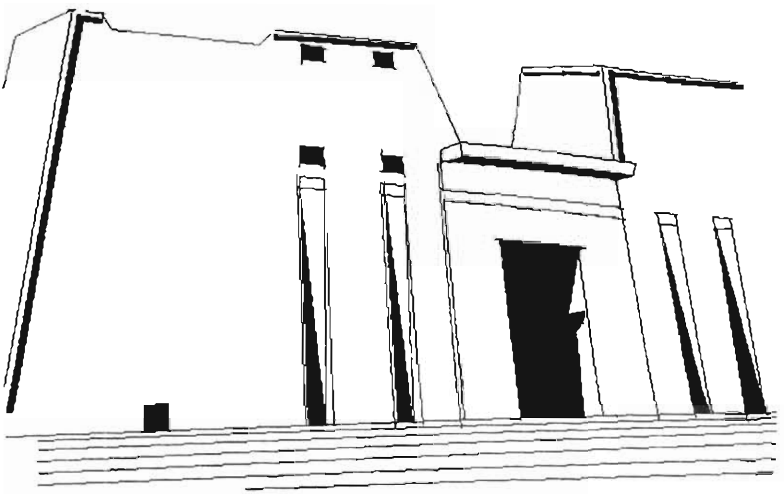


FIGURA 2. Perspectiva del templo de Edfu en Egipto. Predomina la masa sobre el vano.

La columna como elemento de soporte, se propone en una forma muy primitiva por primera vez en el santuario de Stonehenge (Salisbury, Inglaterra), como bloque de granito con alturas de 4 a 5 metros y 50 toneladas de peso.

Entre las construcciones de piedra más importantes de la prehistoria, desde el punto de vista estructural, se tiene la cueva de Menga de 25 metros de largo por 6 metros de ancho, y 3.3 metros de altura, la losa de techo mide dos metros de espesor y pesa 320 toneladas.

Los griegos utilizaron la piedra calcárea, y la madera para construir sus templos. Con relación a las construcciones macizas de la prehistoria en Grecia, se empleó en mayor cantidad la columna para equilibrar la relación de espacios, masas y volúmenes.

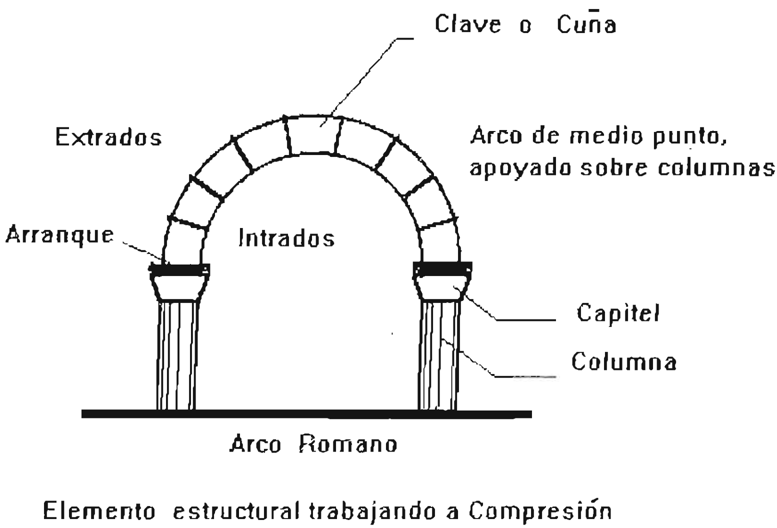


FIGURA 3. Arco. Estructura de piedra que trabaja a compresión. Los elementos del arco (piedras) se sostienen entre sí y provocan empujes laterales en los apoyos. En la antigüedad, el arco fue el punto de partida para dar solución a los problemas estructurales.

En los templos griegos, además de aplicar los principios de la estática, se preocuparon por un diseño en sus elementos estructurales. Por ejemplo, las columnas o soportes en los templos son más anchas en el basamento o fuste, y se reducen en la parte más alta, rematándolas con el capitel: collarino, equino, y ábaco. Por encima del ábaco se apoya la arquitrabe de madera o de piedra, y sobre ésta el friso. Como remate de los templos se propone el frontón triangular que forma parte del techo a dos vertientes.

Ejemplo: el templo de Hera I, llamado *la Basílica* y Hera II, llamado *el Poseidón*. El Partenón es considerado el más representativo de la Arquitectura griega.

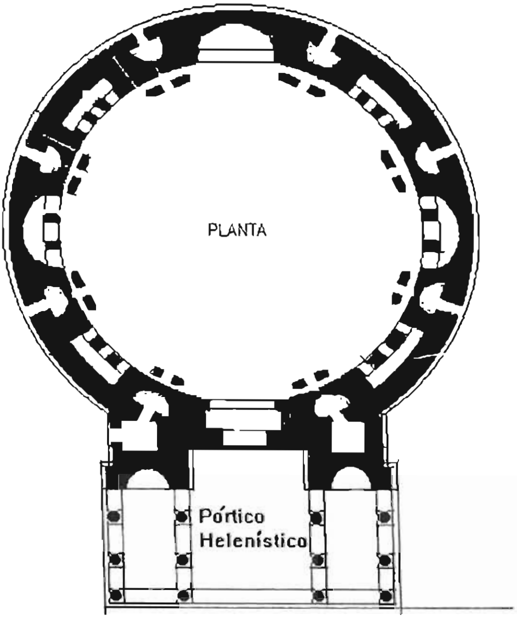


FIGURA 4. Planta del templo romano El Panteón. Tiene 43.2 m libres de diámetro, 43.2 m libres de altura y representa una esfera de 21.6 m de radio.

Posteriormente, en Roma se tiene una influencia etrusca y griega en la construcción de sus templos. Emplearon columnas de piedra tallada, muros de piedra, madera y un equilibrio entre la masa y el vano.

Los romanos emplearon en sus construcciones la bóveda y el arco como elementos estructurales. El Coliseo Romano aplica nuevas formas estructurales, dando ligereza con el uso de bóvedas y de arquerías apoyadas sobre columnas, relacionadas con la forma.

Otra de las grandes obras de arquitectura romana es el llamado Panteón de Roma construído por Apolodoro de Damasco entre los años 118 y 125 d.C. bajo la supervisión de Adriano. Es un edificio de planta circular de 43.2 me-

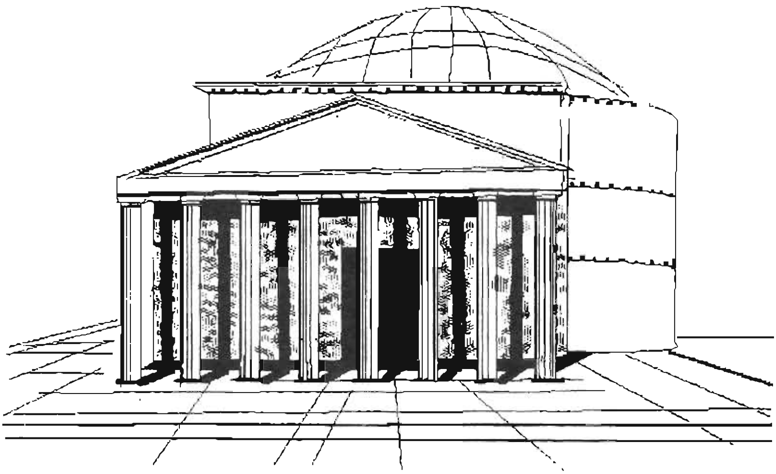


FIGURA 5. Panteón romano. Construido por Apolodoro de Damasco, entre los años 118 y 125 d.C. bajo la supervisión de Adriano. Al frente del edificio se construyó, en planta rectangular, el pórtico helenístico.

tres libres de diámetro, y tiene un pórtico perimetral formado por columnas de granito. Sobre las columnas se levanta una gran cúpula de 43.2 metros de altura desde el nivel de desplante del edificio, lo que representaría una esfera, con un radio de 21.60 metros.

Adosado a la planta circular se construyó de forma rectangular el pronaos, pórtico de Agripa o pórtico helenístico, que indica la entrada al templo.

Después aparecieron estilos como el bizantino, románico, gótico en diferentes países, y los elementos estructurales: bóvedas de cañon, bóvedas nervadas, bóvedas de crucería, bóvedas de arista, bóvedas ojivales, bóvedas semicirculares, pechinas, arcos torales, arcos románicos, arcos góticos, arcos de medio punto, columnas, pilares, contrafuertes, arbotantes, muros de sillería, fueron evolucionando para satisfacer mayores demandas funcionales, formales, espaciales, estéticas y de iluminación.

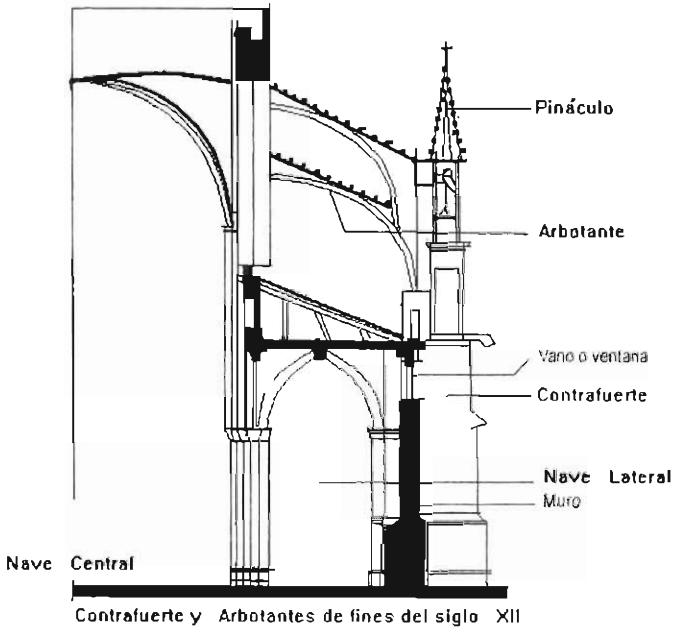


FIGURA 6. Catedral de Nôtre-Dame de Paris. En el templo gótico, el uso del arco ojival, el arbotante y el contrafuerte, facilitaron la abertura de vanos en los muros.

Un ejemplo de diseño estructural integrado a un diseño arquitectónico, bien estudiado en la arquitectura gótica de Francia, se refiere a la catedral de Notre-Dame. Entre las características más importantes de esta edificación, en comparación con los templos románicos, se tiene el sistema estructural a base de bóvedas apoyadas sobre nervios o arcos ojivales, y éstos a su vez apoyados sobre pilares. Mientras que en el templo románico las bóvedas se apoyaban en muros de grandes espesores para transmitir los empujes de las bóvedas, en los templos góticos los empujes se transmiten a las columnas por medio de los arcos.

La solución estructural en los templos góticos facilitó la abertura de vanos en los muros de gran altura para proporcionar iluminación a la nave principal a través de ventanas.

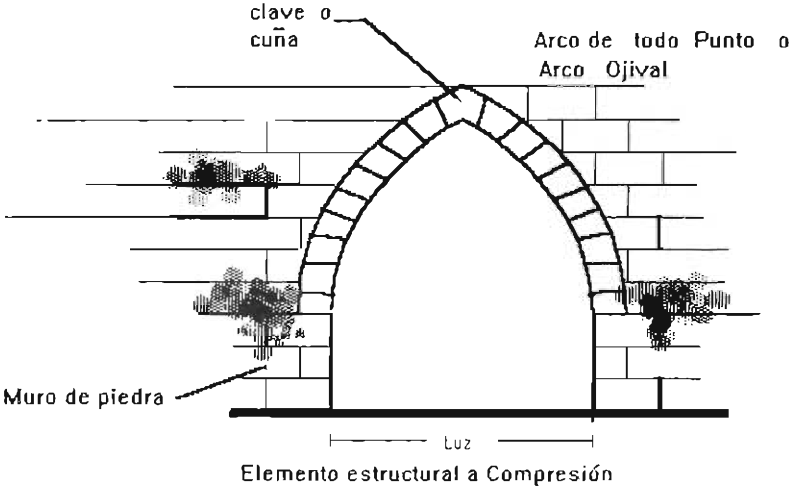


FIGURA 7. Puerta de arco. Desde la antigüedad hasta nuestros dias se ha empleado la piedra como material estructural.

Además del arco ojival en los templos góticos como el de Nôtre Dame, se diseñaron otros elementos estructurales exteriores para transmitir las fuerzas debidas a los empujes de las bóvedas, llamados arbotantes y contrafuertes.

Se puede decir que el equilibrio en los templos románicos es puramente estático: empuje de bóveda contra peso de muro. En el sistema estructural gótico el equilibrio se puede considerar dinámico: empuje contra empuje .

Fue realmente hasta el Renacimiento cuando se empezó a investigar desde el punto de vista analítico sobre los principios o leyes de la estática y las propiedades mecánicas de los materiales estructurales.

Leonardo da Vinci (1452-1519) y Galileo (1564-1642) se interesaron en la estática de los cuerpos deformables, y en las propiedades mecánicas de los materiales estructurales.

Estática en la arquitectura

En arquitectura los conocimientos que tienen mayor importancia son los que se refieren a las estructuras. Se puede considerar que una estructura es un sistema, y se entiende como sistema a un conjunto de partes ordenadas, para cumplir una función determinada.

En la historia de la arquitectura y hasta nuestros días, un problema a resolver en las construcciones es el del equilibrio. En ellas se pueden considerar los elementos de soporte y los que son soportados. Los primeros tienen como función la de resistir las cargas, por ejemplo: losas, trabes, columnas, cimentaciones. Los elementos soportados se consideran: mobiliarios, equipos, instalaciones, personas, automóviles, y todo aquello que no quede fijo a los elementos de soporte.

Para estudiar el problema estructural de las construcciones en arquitectura, es necesario investigar, los conceptos fundamentales, que nos ayuden a resolver el problema. Por lo tanto, el punto de partida sería conocer la materia de estática.

Las siguientes son algunas definiciones de estática:

Estática: la estática es parte de la mecánica y de la física, que tiene por objeto estudiar la estabilidad o equilibrio de los cuerpos.

Estática: es la rama de la mecánica que estudia las fuerzas en equilibrio que actúan sobre los cuerpos rígidos.

Contrariamente a la dinámica, la estática considera a los cuerpos sin movimiento, y sometidos a la acción de varias fuerzas que están en equilibrio.

La estática interviene en la estabilidad de las construcciones, y tiene como objetivo importante el de establecer el equilibrio de las fuerzas tanto externas como internas.

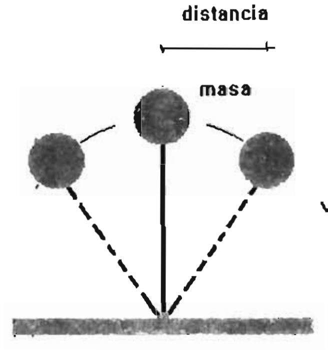
Las ecuaciones que determinan el equilibrio en la estática, se relacionan con las fuerzas y los momentos. Para lograr el equilibrio de las fuerzas se consideran:

La suma de fuerzas con respecto al eje X = 0
La suma de fuerzas con respecto al eje Y = 0
La suma de momentos de las fuerzas = 0

Estática de los cuerpos rígidos: estudia el equilibrio de las fuerzas externas en los cuerpos, sin considerar los efectos internos que las fuerzas producen.

La física es la ciencia que estudia la materia y la energía. La física se puede subdividir en las siguientes ramas:

- FÍSICA
  - ÓPTICA
  - ELECTRICIDAD
  - ACÚSTICA
  - HIDRÁULICA
  - FÍSICA DEL CALOR
  - FÍSICA ATÓMICA
  - MÉCANICA
    - ESTÁTICA
    - CINEMÁTICA
    - DINÁMICA
    - RESISTENCIA DE LOS MATERIALES



$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

$$\boxed{v = \frac{d}{t}}$$

FIGURA 8. Esquema de una masa oscilando.

Mecánica

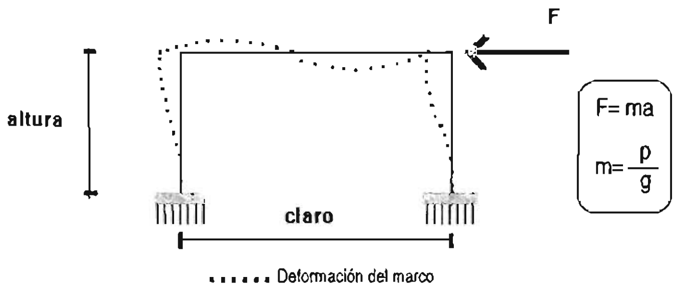
La mecánica estudia las leyes que rigen el movimiento y el equilibrio de los cuerpos, se subdivide en: estática, cinemática, dinámica, resistencia de los materiales.

Cinemática

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, sin atender a las causas que lo produce. Ejemplos: estudio del movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad, movimiento rectilineo uniformemente variado, caída de los cuerpos, movimiento circular uniforme, movimiento armónico simple.

Una de las aplicaciones de la cinemática la tenemos en el análisis sísmico de las estructuras en donde se emplea el concepto de velocidad:

$$v = \frac{e}{t} \qquad velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$$



Marco empotrado sujeto a una fuerza lateral

FIGURA 9. Marco: Estructura coplanar formada por tres elementos estructurales: dos columnas y una viga. Las estructuras que forman el sistema de soporte de los edificios pueden idealizarse para estudiar el comportamiento de sus elementos. En este esquema se considera un marco que debe soportar fuerzas horizontales. La fuerza es igual al producto de la masa del piso multiplicada por la aceleración. F= fuerza m= masa p= peso a= aceleración.

Otro concepto importante relacionado con los temblores es: la masa, el peso de la construcción y la aceleración de la gravedad:

$$M = \frac{P}{g} \qquad Masa = \frac{Peso}{Aceleración\ de\ la\ Gravedad}$$

De las fórmulas anteriores se relaciona la masa del piso de un edificio, el tiempo, la velocidad y la distancia que recorre entre dos puntos.

Entre otros conceptos importantes de la cinemática aplicados a las estructuras, están el movimiento armónico simple, y el movimiento circular uniforme, ambos se denominan movimientos periódicos y están relacionados con la vibración de los edificios.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

T = Periodo ω = Frecuencia circular

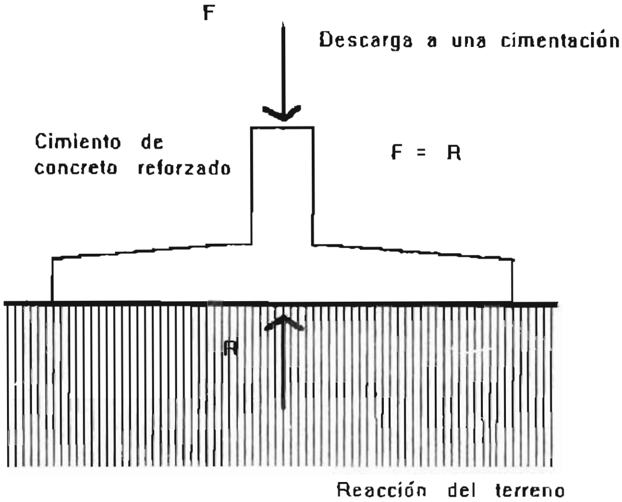


FIGURA 10. Principio de acción y reacción.

Dinámica

La dinámica es la parte de la mecánica que estudia la relación de los movimientos, las causas que los producen y los efectos que originan. Entre los conceptos de mayor importancia están las leyes de Newton, que se relacionan con las fuerzas.

La primera ley de Newton no considera la aplicación de las fuerzas externas en los cuerpos.

La segunda ley de Newton relaciona las fuerzas aplicadas con las aceleraciones de un cuerpo.

La tercera ley de Newton se refiere a la acción y reacción de un cuerpo. A toda acción corresponde una reacción igual, de sentido contrario.

Entre los conceptos de la dinámica aplicados a las estructuras de edificios, están los que se refieren a los métodos de análisis sísmico dinámicos. En los métodos dinámicos se realiza una idealización de la estructura a base de masas y resortes. Los métodos más conocidos en la actualidad son: análisis modal, análisis paso a paso, análisis de Newmark, análisis de Holzer.

Por ejemplo, una de las ecuaciones más empleadas en dinámica, es la segunda ley de Newton que relaciona la fuerza, la masa y la aceleración:

$$F = Ma \qquad \textit{Fuerza} = \textit{Masa por aceleración}$$

También se puede expresar de la siguiente forma:

$$m = \frac{F}{a} \qquad \textit{masa} = \frac{\textit{Fuerza}}{\textit{aceleración}}$$

Conociendo el peso de un edificio y la aceleración del terreno en donde se va a desplantar, se puede calcular con la fórmula anterior el empuje o la fuerza que un temblor ejerce sobre él. La aceleración del terreno se obtiene según historia o experiencias de diferentes temblores ocurridos en las ciudades; las aceleraciones se pueden medir con los acelerómetros.

Por ejemplo, un edificio pesa 1500 toneladas, y la aceleración del terreno es 350 m/seg^2:

$$M = \frac{P}{g} = \frac{1500\ ton}{9800\ mm\ /\ seg^2} = 0.153\ ton$$

g = aceleración de la gravedad = 9.8 m/seg^2 = 9800 mm/seg^2

Por lo tanto, la fuerza que el temblor ejerce sobre el edificio es:

$$F = Ma \qquad 0.153 \times 350 = 53.55\ ton$$

Resistencia de materiales

La resistencia de materiales es parte de la mecánica, y tiene por objeto estudiar a las fuerzas internas que actúan en los cuerpos.

La resistencia de materiales estudia las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones de los materiales.

Los conceptos que intervienen en materia de resistencia de materiales, constituyen la base fundamental del análisis y diseño de estructuras.

En el análisis y diseño de una estructura, un factor determinante es el valor del esfuerzo y de la deformación. Se puede representar la relación por medio de la siguiente ecuación:

$$E = \frac{f}{\varepsilon}$$

E = ***Módulo de Elasticidad***
f = ***Esfuerzo o Fatiga***
ε = ***Deformación Unitaria***

Estática

Para introducirnos en materia de estática será necesario definir dos tipos de cantidades:

a) Cantidades escalares y
b) Cantidades vectoriales

Se llaman cantidades escalares, aquellas cantidades que para ser representadas, solamente requieren de una escala numérica. Una cantidad descrita únicamente por un número se llama frecuentemente escalar. Ejemplos:

a) La edad de una persona : 30 años , 12 años , 6 años, etc.
b) La temperatura:15 grados Farenheit, 70 grados centígrados
c) La estatura: 1.80 m; 1.75 m
d) El volumen de un cuerpo : 1 m cúbico

Se llaman cantidades vectoriales, aquellas que además de ser representadas por un número, requieren de otras características como su sentido, dirección y punto de aplicación.

Vector: conjunto o grupo ordenado de dos o más números. Ejemplos:

a) La velocidad
b) La aceleración
c) La fuerza
d) El desplazamiento

Definición de una fuerza

Fuerza: toda acción capaz de modificar el estado de reposo o equilibrio de un cuerpo.

Definición de vector

Vector: es una cantidad dirigida que tiene módulo o magnitud, dirección y sentido.

Vector: es un segmento de recta dirigido o "una flecha" que va desde el origen hasta el punto considerado.

Representación de una fuerza

Las fuerzas se representan con un punto de partida que se denomina *origen*, y otro punto que limita a la fuerza y se le nombra *extremo*.

Características de una fuerza:

a) Magnitud
b) Dirección
c) Sentido
d) Punto de aplicación

Características de una fuerza

La magnitud de una fuerza se relaciona con su tamaño, también se le puede llamar módulo. Las unidades en que se expresa el módulo pueden ser: kilogramos, toneladas, libras, newtons, kilopounds, gramos.

La dirección de una fuerza se relaciona con su ángulo de inclinación, respecto a un eje. Se puede expresar la dirección en grados o por la pendiente de la fuerza:

$$\alpha = 45\,°$$

$$\arctan \frac{3}{3} = 45°$$

El sentido de una fuerza está relacionado con la orientación que tiene en el plano (x,y), o en el espacio (tres dimensiones x,y,z).

Por ejemplo: en un plano se considera por convención de signos que el sentido de una fuerza es negativa si sigue la acción de la gravedad, o positiva en caso contrario.

En el espacio se considera según los planos xy, yz, xz.

El punto de aplicación se relacionará con el origen de la fuerza. Por ejemplo: una fuerza se aplica en el origen del sistema de los ejes cartesianos, por lo tanto, el punto de aplicación de la fuerza es (0 , 0).

$x = 0$
$y = 0$

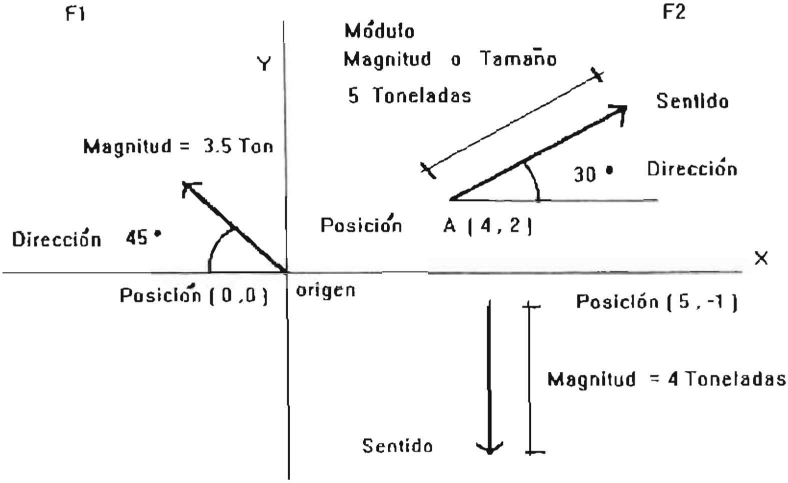
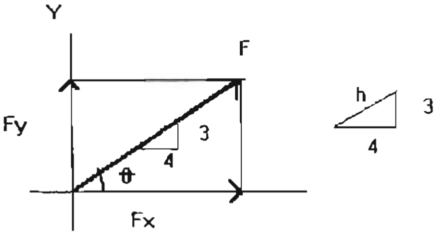


FIGURA 11. Las características de una fuerza se definen como: magnitud, dirección, sentido y posición.



$$h = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$h = 5$$

Las componentes de la fuerza F se determinan con la pendiente :

$$F_x = F\left(\frac{4}{5}\right) = F\,(\cos\theta)$$

$$F_y = F\left(\frac{3}{5}\right) = F\,(\operatorname{Sen}\theta)$$

FIGURA 12. Dirección de una fuerza en relación con su pendiente.

Principio de transmisibilidad de una fuerza

Una fuerza se puede trasladar sobre su línea de acción.

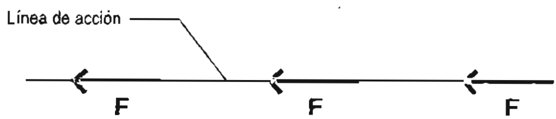


FIGURA 13. Principio de transmisibilidad

Clasificación de las fuerzas

Para el estudio de las fuerzas, se pueden considerar dos sistemas:

1. Coplanares
2. Espaciales

Se llaman coplanares las fuerzas que se consideran actuando en un plano, y espaciales a las fuerzas que se consideran en el espacio.

Las fuerzas coplanares y espaciales pueden dividirse en:

Colineales,
Concurrentes,
Paralelas y
Caso general de fuerzas.

Como antecedente para explicar cada uno de los sistemas es conveniente conocer los conceptos de tensión y compresión.

El concepto de tensión se relaciona con dos fuerzas de la misma magnitud, diferente sentido, y misma línea de acción, aplicadas en los extremos de un cuerpo, tratándolo de estirar o jalar.

El concepto de compresión se relaciona con dos fuerzas de la misma magnitud, diferente sentido y misma línea de acción, aplicadas en los extremos de un cuerpo, tratándolo de aplastar.

Fuerzas coplanares colineales

Se llaman fuerzas coplanares colineales a las que actúan sobre una misma línea de acción. Ejemplos de aplicación de las fuerzas colineales:

a) Una barra de acero sometida a dos fuerzas aplicadas en los extremos, que pueden tensarla o comprimirla.
b) Una columna de la planta baja de un edificio que recibe las cargas de las columnas de los pisos superiores.
c) Un tensor colocado entre las armaduras de una estructura.
d) Un cordón de soldadura eléctrica, que va a unir a dos elementos estructurales de acero.
e) Un cilindro de concreto simple para prueba de carga a compresión.

Fuerzas coplanares concurrentes

Se llaman fuerzas coplanares concurrentes, a las que actúan en un mismo punto. De otra forma, se puede considerar que tienen un punto de concurrencia. Como ejemplos de aplicación tenemos los siguientes:

a) En una armadura coplanar la unión de las barras en un nodo.
b) La unión de trabes y columnas en un marco plano.
c) La descomposición de una fuerza horizontal proyectada en un techo con pendiente.

Fuerzas coplanares paralelas

Se llaman fuerzas coplanares paralelas, a las que se aplican en diferentes rectas de acción, y paralelas entre sí. Pueden ser de diferente sentido y magnitud.

Ejemplos de aplicación de las fuerzas coplanares:

a) Las cargas que se aplican sobre una trabe, se consideran paralelas.
b) Las cargas debidas a los sismos, se consideran aplicadas en los entrepisos de un edificio.
c) Las fuerzas internas que producen el momento resistente de las vigas y columnas. Estas fuerzas son: tensión y compresión.

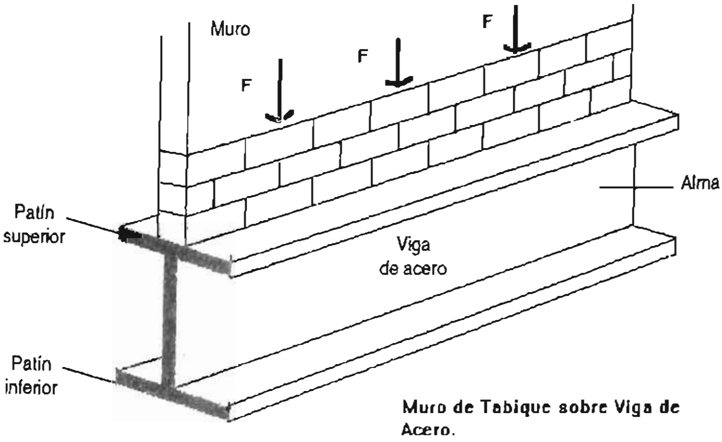


FIGURA 14. Sistema de fuerzas paralelas coplanares.

Caso general de las fuerzas coplanares

Se llama caso general de las fuerzas coplanares, cuando no se clasifican como colineales, concurrentes y paralelas. Como ejemplos de aplicación se consideran:

a) La combinación de efectos de las fuerzas de la acción de la gravedad, con los efectos de las fuerzas que produce el sismo o el viento, consideradas en un marco plano.
b) La combinación de efectos producidos en un muro de contención, por el empuje del relleno y el peso del material con el que se va a construir el muro.
c) El análisis de una trabe, en donde se consideran los efectos de cortante, momento, tensión y compresión.

Fuerzas espaciales

Las fuerzas en el espacio se consideran con respecto a tres ejes de referencia X, Y, Z.

Fuerzas colineales espaciales

Las fuerzas colineales en el espacio se consideran en forma similar a las coplanares, por ejemplo:

a) Una fuerza aplicada a una columna.
b) Una fuerza aplicada a un tensor.
c) El extremo de una trabe apoyada en otra trabe perpendicular.

Fuerzas concurrentes espaciales

Las fuerzas concurrentes en el espacio se dirigen a un punto común.

Ejemplos:

a) El nodo de una estructura tridimensional de acero, formada por barras unidas entre sí.
b) El nodo de un edificio de estructura de concreto reforzado, formado por trabes y columnas.
c) La estructura reticular de todo un edificio formado por trabes y columnas.
d) Una bóveda de concreto formada por arcos concurrentes en un punto.
e) Una estructura de acero para torres con cables de alta tensión.
f) Un edificio construido con estructura de muros de tabique.
g) Un edificio construido con estructura de muros de concreto.

Fuerzas paralelas espaciales

Se consideran como fuerzas paralelas en el espacio, a las fuerzas que se aplican en diferentes líneas de acción y están referidas a tres ejes perpendiculares: X,Y,Z.

Ejemplos:

a) El peso de los muros en el piso de un edificio.
b) El peso de las personas sobre las losas de concreto o de acero.
c) La carga de nieve sobre un techo.
d) Las cargas que transmiten las columnas en un edificio.

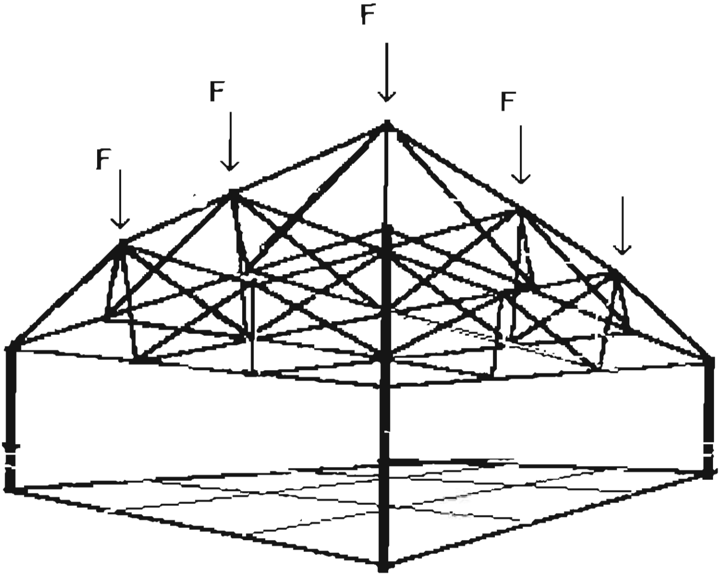


FIGURA 15. Estructura espacial formada por barras rectas conectadas en los extremos. Las cargas se consideran aplicadas en los nodos y se trasmiten, por medio de las barras, hacia los apoyos. Por su diseño, puede liberar grandes distancias sin necesidad de apoyos intermedios.

Caso general de fuerzas espaciales

En esta clasificación se consideran a las fuerzas que no son colineales, paralelas, concurrentes. Se aplican en todas direcciones.

Ejemplos:

a) Las fuerzas que se aplican en un análisis tridimensional a un edificio. Cargas gravitacionales, cargas debidas al viento, sismo, granizo. También se consideran efectos de temperatura, y los que se deben a las vibraciones.
b) Las fuerzas que se aplican a un elemento estructural: losa, trabe, zapata, muro.

Composición y descomposición de fuerzas

Se llama composición de fuerzas, al proceso que consiste en pasar de un sistema complejo a uno más simple. La composición de fuerzas, se aplica a la suma de efectos de varias fuerzas para obtener una resultante.

Se llama descomposición de fuerzas, al proceso que consiste en pasar de un sistema simple a uno más complejo. La descomposición de fuerzas se aplica al cálculo de las componentes de las fuerzas proyectadas a ejes de referencia.

La composición y descomposición de fuerzas se aplica en diferentes problemas, con el objeto de simplificar los sistemas de fuerzas coplanares y espaciales.

Concepto de resultante

Con relación a la composición de fuerzas se estudia el concepto de resultante. La resultante de dos fuerzas se puede obtener por dos procedimientos:

a) Procedimiento gráfico
b) Procedimiento analítico

Procedimiento gráfico
- Ley del paralelogramo
- Ley del triángulo

Procedimiento analítico
- Por descomposición y composición de fuerzas
- Ley del coseno

Ley del paralelogramo

Considérense dos fuerzas perpendiculares entre sí dibujadas con una escala gráfica en toneladas (Fig. 16):

$$F_1 = 5\ ton$$
$$F_2 = 2\ ton$$
$$\theta = 90°$$

Por los extremos de las fuerzas, se trazan rectas paralelas a las fuerzas hasta intersectarse en un punto común. La resultante se obtiene uniendo el origen de las dos fuerzas con el punto de intersección de las paralelas. A esta definición se le conoce como la ley del paralelogramo.

Las características de la resultante se miden gráficamente. La magnitud se mide con la misma escala de las fuerzas. El ángulo entre la resultante y una de las fuerzas se puede medir con un transportador.

La ley del paralelogramo se aplica a dos o más fuerzas, para obtener una resultante total.

Mediante la ley del paralelogramo se obtiene gráficamente la resultante de dos o más fuerzas. Para aplicarla será necesario dibujar las fuerzas con su magnitud a escala, y su dirección midiendo con el transportador. Las fuerzas deberán unirse por el origen, para calcular la resultante.

La magnitud de la resultante, se determina midiendo con la misma escala empleada para las fuerzas, y el ángulo de la resultante con transportador.

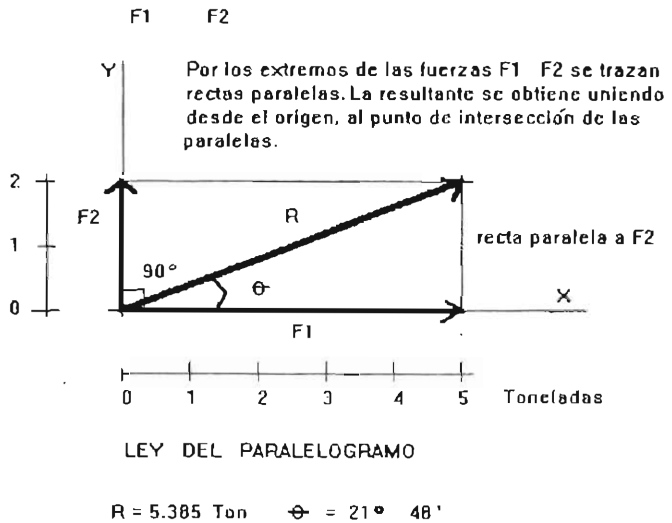


FIGURA 16. Resultante de dos fuerzas.

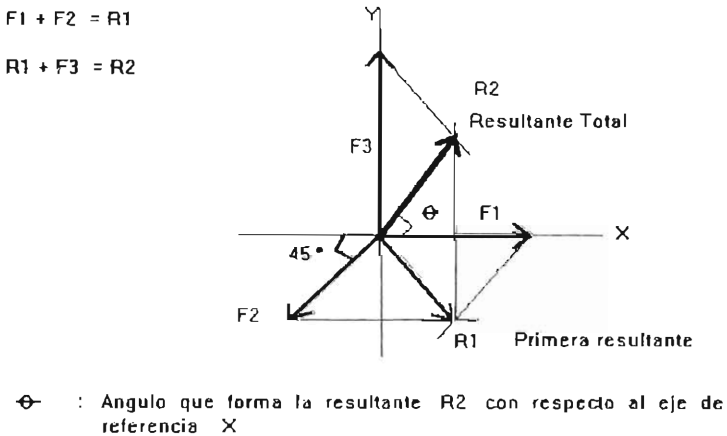


FIGURA 17. Aplicación de la Ley del paralelogramo. a 3 fuerzas: F1. F2 y F3.

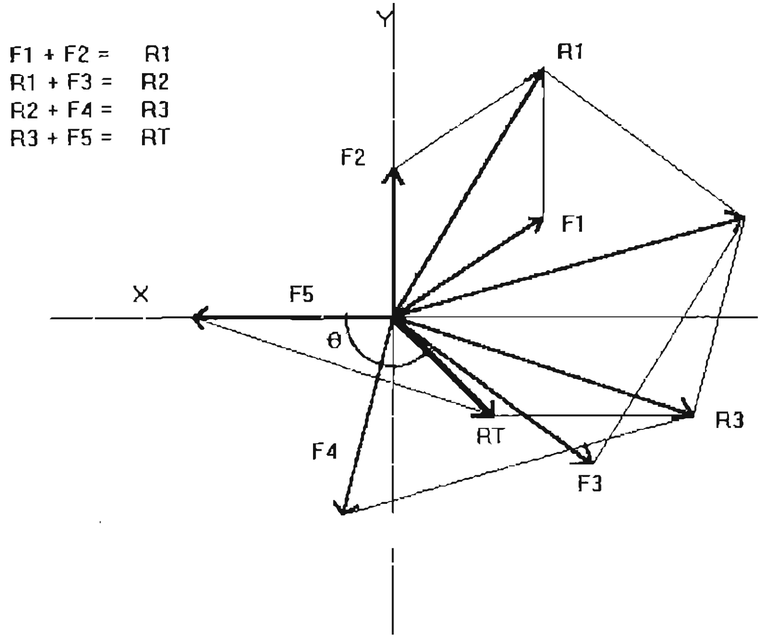


FIGURA 18. Aplicación de la ley del paralelogramo a varias fuerzas.

Para obtener la resultante de las tres fuerzas, se aplica la ley del paralelogramo (Fig. 18). Será necesario dibujar las fuerzas con su magnitud y dirección a escala.

Por los extremos de las fuerzas F1 y F2, se trazan rectas paralelas a F1 y F2 respectivamente: el punto de intersección de las paralelas, determina el extremo de primera resultante R1.

Por el extremo de la fuerza F3, y el extremo de la resultante R1, se trazan nuevamente paralelas F3 y R1 respectivamente; el punto de intersección de las dos paralelas, determina el extremo de la segunda resultante R2 o resultante total.

Finalmente se obtienen las características de la resultante total midiendo a escala su magnitud y dirección.

Ley del triángulo

Una simplificación de la ley del paralelogramo, es la llamada ley del triángulo, que reduce notablemente los trazos (Fig. 19).

La ley del triángulo se puede aplicar a cualquier número de fuerzas, y se define de la siguiente forma:

Considerando dos fuerzas F1 y F2.

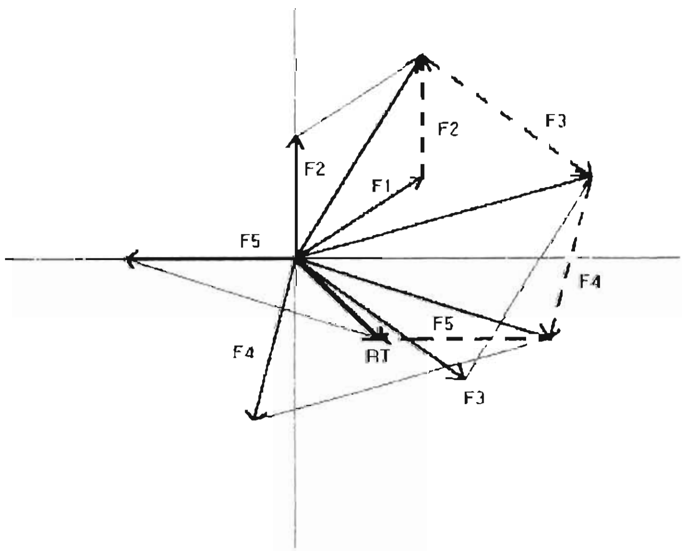


FIGURA 19. La Ley de triángulo es una variación de la Ley del paralelogramo.

Por el extremo de la primera fuerza F1, se une el origen de la segunda fuerza F2; la resultante se obtiene uniendo desde el origen de la primera fuerza F1, al extremo de la segunda fuerza F2.

Considerando más de dos fuerzas: F1, F2, F3, F4, F5.

Por el extremo de la primera fuerza F1, se une el origen de la segunda fuerza F2; por el extremo de la segunda fuerza F2 se une el origen de la tercera fuerza F3; por el extremo de F3 se une el origen de F4; por el extremo de F4 se une el origen de F5. Por lo tanto, la resultante total se obtiene uniendo desde el origen de la primera fuerza, al extremo de la última.

Procedimiento analítico

Por descomposición y composición de fuerzas

Otra forma de obtener la resultante de dos o más fuerzas, consiste en descomponer las fuerzas, proyectándolas a ejes perpendiculares X, Y, de acuerdo a sus magnitudes y direcciones (ángulos con respecto a los ejes).

Ejemplo:

Se tienen dos fuerzas F1, F2

$$F_1 = 8\ ton$$
$$F_2 = 4\ ton$$
$$\alpha_1 = 30°$$
$$\alpha_2 = 60°$$

Por suma algebraica de las componentes con respecto al eje X

$$\Sigma_{Fx} = 8\ ton\ \cos 30° + 4\ ton\ \cos 60° = Fx$$

$$Fx = 8\,(0.866) + 4\,(0.5)$$
$$Fx = 6.92 + 2$$
$$Fx = 8.92\ ton$$

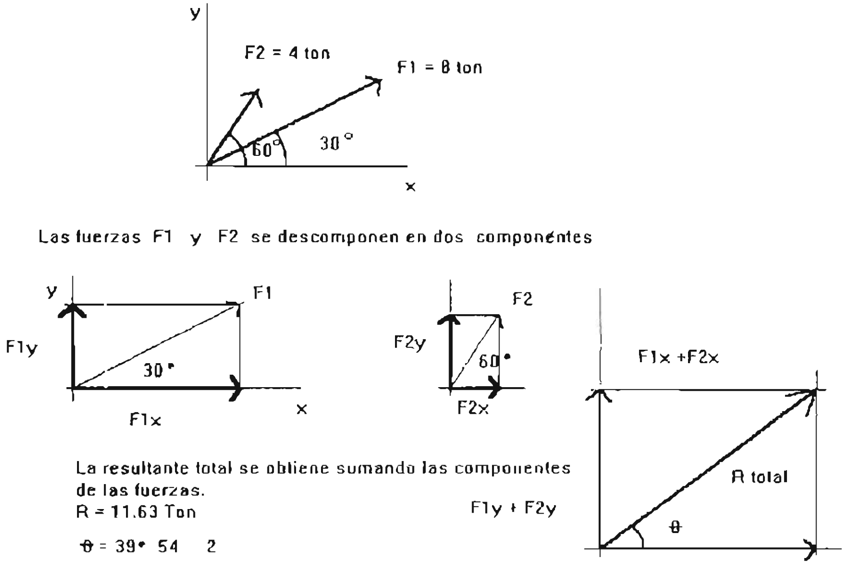


FIGURA 20. Método de composición y descomposición de fuerzas.

Por convención de signos las fuerzas se consideran positivas si su sentido es hacia la derecha y hacia arriba. Se consideran negativas si el sentido es hacia la izquierda y hacia abajo.

Por suma algebraica de las componentes con respecto al eje Y

$$\sum Fy = 8 \; ton \; sen \; 30° + 4 \; ton \; sen \; 60° = Fy$$

$$Fy = 8\,(0.5) + 4\,(0.866)$$
$$Fy = 4 + 3.46$$
$$Fy = 7.46 \; ton$$

Una vez calculada la suma de fuerzas en los dos ejes, se procede a aplicar una composición de fuerzas, empleando el teorema de Pitágoras.

$$R = \sqrt{(Fx)^2 + (Fy)^2}$$

$$R = \sqrt{(8.93)^2 + (7.46)^2}$$
$$R = 11.64\ ton$$

El ángulo formado entre la resultante con respecto al eje X se obtiene, empleando la función tangente.

$$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx}$$

$$= \frac{7.46\ ton}{8.93\ ton}$$

$$\arctan\ 0.835$$

$$\theta = 39°.875$$

$$\theta = 39°\ 52'\ 3''$$

Ley del coseno

La resultante de dos fuerzas se puede obtener también, con la aplicación de la ley del coseno:

Aplicando las funciones trigonométricas

$$\sin \alpha = \frac{l}{Q} \qquad \cos \alpha = \frac{m}{Q}$$

$$l = Q \sin \alpha \qquad m = Q \cos \alpha$$

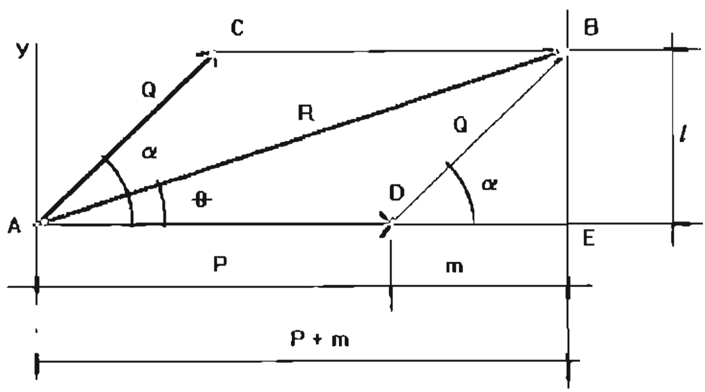


FIGURA 21. Ley del coseno. Paralelogramo de fuerzas.

Aplicando el teorema de Pitágoras en la figura ABE:

$$R^2 = (l^2) + (P + m)^2$$

Substituyendo los valores anteriores

$$R^2 = (Q \sin \alpha)^2 + (P + Q \cos \alpha)^2$$
$$R^2 = Q^2 \sin^2 \alpha + P^2 + 2 P Q \cos \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha$$
$$R^2 = Q^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + P^2 + 2PQ \cos \alpha$$

Simplificando

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Por lo tanto

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos \alpha$$

La ecuación de la ley del coseno se puede expresar

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos \alpha}$$

En el mismo triángulo rectángulo ABE, se aplica la función tangente para determinar el ángulo formado entre la resultante y la componente P:

$$\tan \theta = \frac{l}{P + m}$$

Substituyendo valores

$$\tan \theta = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha}$$

$$\theta = \textit{ángulo entre P y la Resultante}$$

Como ejemplo de aplicación vamos a considerar dos fuerzas P y Q. Obtener las características de la resultante

$$P = 10 \; ton$$
$$Q = 5 \; ton$$
$$\alpha = 30°$$

Aplicando la ley del coseno

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$$

Substituyendo valores

$$R = \sqrt{(10)^2 + (5)^2 + 2(10)(5)\cos 30°}$$

$$R = \sqrt{100 + 25 + 100(0.866)}$$

$$R = 14.546 \; ton \quad \text{magnitud de la resultante}$$

Para calcular el ángulo entre la resultante con respecto a P, se aplica la función tangente

$$\tan\theta = \frac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{5 \sin 30°}{10 + 5\cos 30°}$$

$$= \frac{5\,(0.5)}{10 + 5\,(0.866)}$$

$$= 0.174$$

$$\arctan\ 0.174 \qquad \theta = 9.896$$

$$\theta = 9°\ 53'\ 5''$$

El resultados se puede comprobar por descomposición de fuerzas

$$\sum Fx = 10\ ton + 5\ ton\ \cos 30°$$
$$Fx = 10 + 5\,(0.866)$$
$$Fx = 14.33\ ton \quad \rightarrow$$

$$\sum Fy = 5\ ton\ \sin 30°$$
$$Fy = 5\,(0.5)$$
$$Fy = 2.5\ ton \quad \uparrow$$

Aplicando el teorema de Pitágoras se determina por composición de fuerzas la magnitud de la resultante

$$R = \sqrt{(Fx)^2 + (Fy)^2}$$

$$R = \sqrt{(14.33)^2 + (2.5)^2}$$
$$R = 14.546 \ ton$$

El ángulo entre la resultante y la componente Fx se determina por la función tangente.

$$\tan \theta = \frac{Fy}{Fx}$$

$$= \frac{2.5}{14.33}$$

$$= 0.174 \qquad \arctan 0.174$$
$$\theta = 9.896$$
$$\theta = 9° \ 53' \ 5''$$

Ejercicio:
(Fig. 22).

En la unión de una estructura se tienen tres fuerzas coplanares concurrentes. Obtener las características de la resultante

$$F_1 = 3 \ ton$$
$$F_2 = 4 \ ton$$
$$F_3 = 5 \ ton$$

Para aplicar la ley del coseno se determina una primera resultante

$$F_1 + F_2 = R_1$$

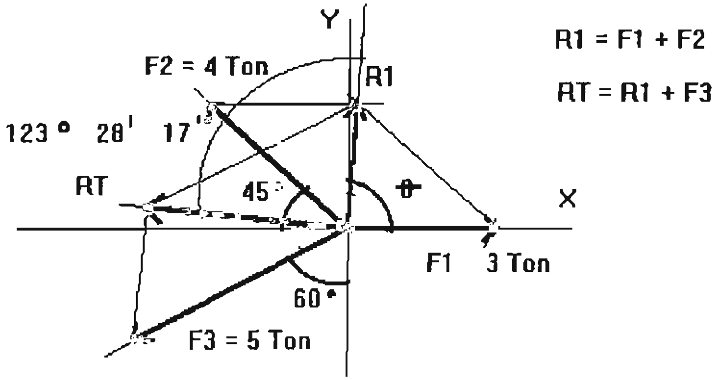


Figura 22. Aplicación de la ley del coseno a tres fuerzas concurrentes. Primero se determina la resultante R1, aplicando la ley del coseno entre F1 y F2, llamando P a F1 y Q a F2. El ángulo alfa entre estas dos fuerzas es 90° + 45°. El ángulo θ entre P y la resultante R1 se determina por la función tangente. Después se determina la resultante RT, aplicando la ley del coseno entre F3 y R1, llamando P a R1 y Q a F3. El ángulo formado entre F3 y R1 es 123° 28' 17".

Luego se determina la segunda resultante

$$F_3 + R_1 = R_2$$

Procedimiento:

$$F_1 = 3\,ton = P$$
$$F_2 = 4\,ton = Q$$
$$\alpha = 135°$$

Aplicando la fórmula de la ley del coseno.

$$R = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + 2(3)(4)\cos 135°}$$

$$R = \sqrt{9 + 16 + 24(-0.7071)}$$

$$R = 2.8336\ ton$$

Por lo tanto, R1 = 2.8336 ton

El ángulo entre la fuerza P y la resultante R1 se obtiene por la función tangente

$$\tan\theta = \frac{4 \operatorname{sen} 135°}{3 + 4 \cos 135°}$$

$$\tan\theta = \frac{4\,(0.7071)}{3 + 4\,(-0.7071)}$$

$$= 16.485$$

Aplicando trigonometría

$$\arctan 16.485 \qquad \theta = 86°.528649 \qquad \theta = 86°\ 31'\ 43''$$

Que representa el ángulo formado entre P y la resultante R1.

A continuación se determina la segunda resultante entre R1 y la fuerza F3. Por diferencia de ángulos se determina el ángulo formado entre R1 y F3.

$$\alpha = 90° - \theta + 120°$$

$$\begin{array}{r} 90° \\ -\,86°\ 31'\ 43'' \\ \hline 89°\ 59'\ 60'' \\ -\,86°\ 31'\ 43'' \\ \hline 3°\ 28'\ 17'' \end{array}$$

Por lo tanto, el ángulo formado entre la resultante R1 y la fuerza F3.

$$\begin{array}{r} 120^\circ \\ +\quad 3^\circ\;28'\;17'' \\ \hline 123^\circ\;28'\;17'' \end{array}$$

Aplicando la fórmula de la ley del coseno.

$$R = \sqrt{(2.8336)^2 + (5)^2 + 2(2.8336)(5)\cos 123^\circ\;28'\;17''}$$

$$\cos 123^\circ.4628 = -0.55139$$

$$R = 4.1719 \; ton$$

Se determina el ángulo entre R2 y R1 por la función tangente.

$$\tan\theta = \frac{5 \sin 123^\circ.4628}{2.8336 + 5\cos 123^\circ.4628}$$

$$= 54.435565$$

$$\arctan 54.435565 \qquad 88^\circ.947575 \qquad \theta = 88^\circ\;56'\;51''$$

Los resultados se pueden comprobar por descomposición de fuerzas.

Por suma de fuerzas en X se determina la componente con respecto al eje X.

$$\sum F_x = 3\,ton - 4\,ton\,\cos 45^\circ - 5\,ton\,\cos 30^\circ = R_x$$
$$R_x = 3 - 4\,(0.7071) - 5\,(0.866)$$
$$R_x = -4.158\,ton \quad \rightarrow$$

Por suma de fuerzas en Y se determina la componente con respecto al eje Y.

$$\sum F_y = 4\, sen\, 45° - 5\, sen\, 30° = F_y$$

$$F_y = 4\,(0.7071) - 5\,(0.5)$$

$$F_y = 0.328 \ ton \uparrow$$

Por composición de fuerzas se obtiene la resultante.

$$R = \sqrt{(-4.158)^2 + (0.328)^2}$$

$$R = 4.17$$

El ángulo entre la resultante con respecto al eje x, se determina por la función tangente.

$$\tan \theta = \frac{0.328}{4.158} = 0.079$$

$$\arctan\ 0.079 \quad \theta = 4°.510 \quad \theta = 4°\ 30'\ 4''$$

Momento de una fuerza

Concepto: El momento de una fuerza se define como el producto de su magnitud por una distancia perpendicular, con respecto a un eje.

El momento de una fuerza se puede expresar con la siguiente fórmula.

$$M = Fd$$

M: Momento
F: Magnitud de la fuerza en toneladas, kilogramos, libras.
d: Distancia perpendicular entre el eje y la fuerza en centímetros, metros, pies, pulgadas.

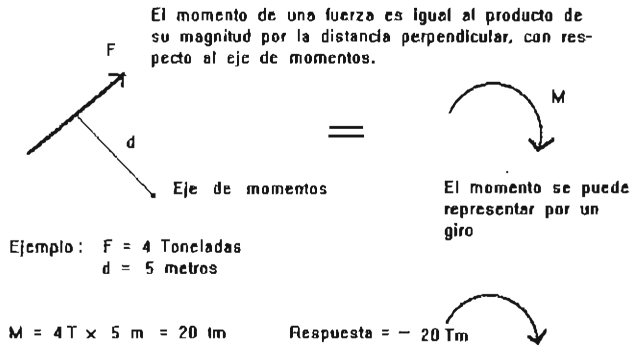


FIGURA 23. Convención de signos: Se considera negativo el momento de una fuerza cuando el giro de la fuerza es en sentido de las manecillas del reloj. Se considera positivo el momento de una fuerza cuando el giro de la fuerza es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

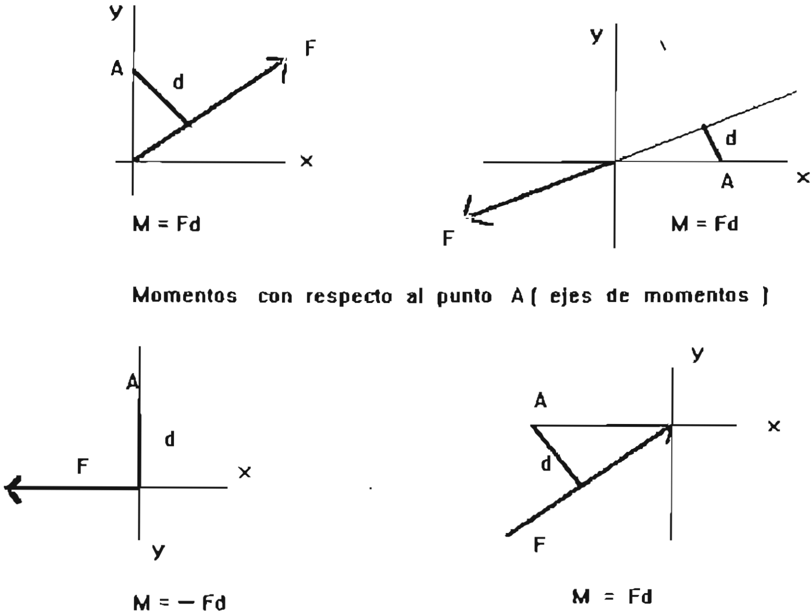
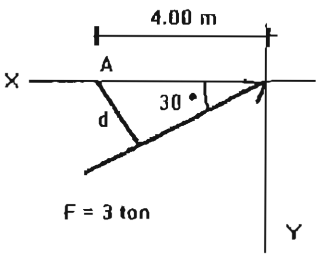


FIGURA 24. Ejemplos de representación de momentos de fuerzas.



Obtener el momento de la fuerza con respecto al punto A.

d = 4 Sen 30°

d = 2 m

Momento = 3 ton (2 m) = 6 tm

se considera positivo el giro cuando es contrario al sentido de las manecillas del reloj.

FIGURA 25. Momento de una fuerza.

Ejemplo:
(Fig. 25)

Calcular el momento de una fuerza con respecto al punto A

Datos:

$$F = 3\,ton$$
$$d = 4\,metros$$
$$angulo\ \ con\ \ respecto\ al\ eje\ X = 30\,°$$

Primero será necesario determinar la distancia perpendicular, con respecto al punto A o eje de momentos

$$\sin\,\theta = \frac{d}{4m}$$

$$d = 4\,m\,(\,0.5\,)$$
$$d = 2\,m$$

Por lo tanto, el momento de la fuerza es:

$$M = 3\,ton\,(\,2\,m\,) = 6\,tm$$

El problema también se puede resolver por descomposición de fuerzas, con respecto a los ejes cartesianos X, Y.

Se obtiene la componente Fy

$$Fy = 3\,ton\ \sin\ 30°$$
$$Fy = 1.5\,ton$$

$$Fx = 3\,ton\ \cos\ 30°$$
$$Fx = 2.598\,ton$$

Por suma algebraica de momentos de las fuerzas con respecto al eje A.

$$\sum MF_A = 1.5\ ton\ (4m) = 6\ tm$$

La componente Fx no tiene momento con respecto al punto A, por ser una fuerza colineal al eje de momentos.

La descomposición de la fuerza en el problema, con respecto a dos ejes perpendiculares permite una simplificación en el cálculo, no siendo necesario obtener la distancia perpendicular desde la fuerza al eje de momentos (A).

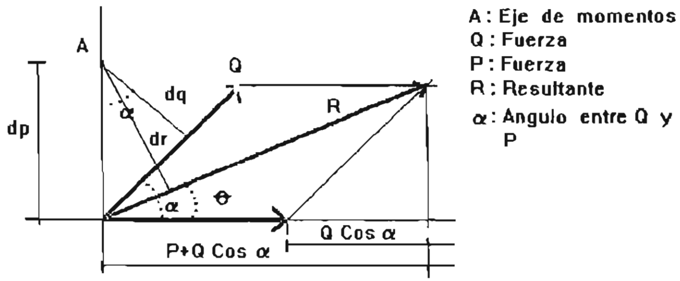
Una vez calculadas las componentes de la fuerza, las distancias perpendiculares se obtienen directamente con relación a los ejes cartesianos.

Este concepto de la descomposición de fuerzas está relacionado con el llamado: *Teorema de Varignon* o teorema de los momentos.

Teorema de Varignon

Concepto. La suma algebraica de los momentos de un sistema de fuerzas con respecto a un eje, es igual al momento de la resultante de las fuerzas con respecto al mismo eje.

Para su demostración se consideran dos fuerzas concurrentes P y Q, y su resultante R. Se trazan rectas perpendiculares desde el punto A (eje de momentos) a las fuerzas P, Q, R.



dp = distancia perpendicular de la fuerza P con respecto al eje de momentos.

dq = distancia perpendicular de la fuerza Q con respecto al eje de momentos.

dr = distancia perpendicular de la Resultante con respecto al eje de momentos.

FIGURA 26. Teorema de Varignon: La suma algebraica de los momentos de dos fuerzas con respecto a un punto, es igual al momento de la resultante de las fuerzas con respecto al mismo punto.

El punto A (eje de momentos) se considera sobre el eje Y de referencia. Se determinan los ángulos correspondientes entre P y Q y R y P.

Multiplicando por una constante AO, se mantiene la igualdad.

$$P\,(AO) + Q\,(AO)\cos\alpha = R\,(AO)\cos\theta$$

En los triángulos AOG y AOE

$$dp = AO \qquad dq = AO\cos\alpha \qquad dr = \cos\theta$$

Substituyendo estos valores en la ecuación 1.

$$P\,dp + Q\,dq = R\,dr$$

El teorema se puede generalizar para cualquier sistema y número de fuerzas.

Ejemplo:
Calcular el momento de la resultante para dos fuerzas P y Q, con respecto al punto A.

$$P = 6\ ton$$
$$Q = 8\ ton$$
$$\alpha = 30°$$

Solución:

Primero se determinan las distancias perpendiculares dp y dq de las fuerzas con respecto al punto A.

$$dq = 4\cos\alpha$$
$$dq = 4\cos 30°$$
$$dq = 4\,(0.866)$$
$$dq = 3.464\ m$$

$$dp = 4\ m$$

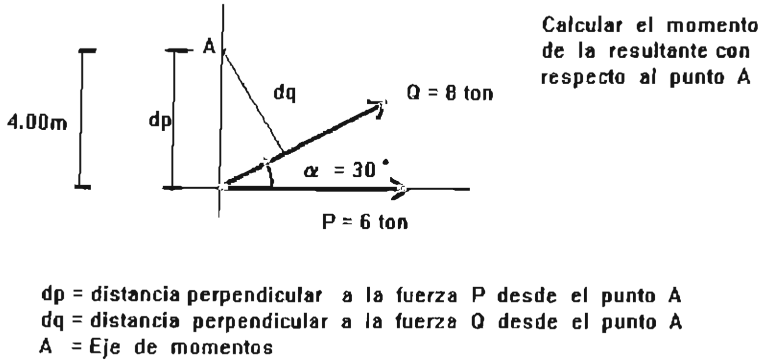


FIGURA 27. Aplicación del teorema de Varignon a dos fuerzas.

Una vez calculadas las distancias perpendiculares con respecto al punto A, se determina la suma de momentos.

$$\sum MF_A = 8\,ton\,(3.464\text{ m}) + 6\,(4m)$$
$$= 51.712\,tm$$

El resultado se puede comprobar aplicando la ley del coseno, o por descomposición de fuerzas.

1. Por la ley del coseno.

Primero se determina la resultante de P y Q aplicando la fórmula.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$R = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2(6)(8)\cos 30°}$$

$$R = 13.533\,ton$$

Se determina el ángulo entre la resultante con la fuerza P.

$$\tan\theta = \frac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{8\,ton\,(0.5)}{6\,ton + 8\,ton\,(0.866)}$$

$$\theta = 17°\ 11'\ 3''$$

Se determina la distancia perpendicular entre la resultante y el eje A.

$$dr = 4\cos 17°.192$$
$$dr = 3.821\ m$$

Por lo tanto, el momento de la resultante con respecto al punto A es igual:

$$\Sigma M_A = 13.533\,ton\,(3.821\,m)$$

$$M = 51.71\,tm$$

También se puede comprobar por descomposición de fuerzas con respecto a los ejes perpendiculares X, Y.

Por descomposición con respecto al eje X.

$$\Sigma F_x = 6\,ton + 8\,ton\cos 30°$$
$$F_x = 12.928\,ton \quad \rightarrow$$

Por descomposición con respecto al eje Y.

$$\Sigma F_y = 8\,ton\sin 30°$$
$$F_y = 4\,ton \quad \uparrow$$

Se determina una suma algebraica de momentos de las componentes Fx, Fy con respecto al punto A.

$$\sum MF_A = 12.928\ \textit{ton}\ (4\ \mathrm{m}) + 4\ \textit{ton}\ (0\ \mathrm{m})$$
$$M = 51.71\ \textit{tm}$$

Por lo tanto, el momento final de la resultante es el mismo resultado en los tres procedimientos.

Ejemplo:

En un sistema de fuerzas concurrentes coplanares, se aplican cuatro fuerzas.

F1 = 6 *ton*
F2 = 5 *ton*
F3 = 4 *ton*
F4 = 5.5 *ton*

Calcular las características de la resultante con relación al punto A.

Solución:

Por descomposición de fuerzas:

1. Por descomposición de las fuerzas se determinan las componentes de las fuerzas Fx, Fy.
2. Se determinan las resultantes Rx, Ry por suma de fuerzas.
3. Se determina la resultante total R, por composición de fuerzas.
4. Se determina el ángulo formado entre el eje X y la resultante.
5. Se determinan momentos de las componentes Rx,Ry con respecto al punto A.
6. Se determina la distancia perpendicular entre el punto A y la resultante total.

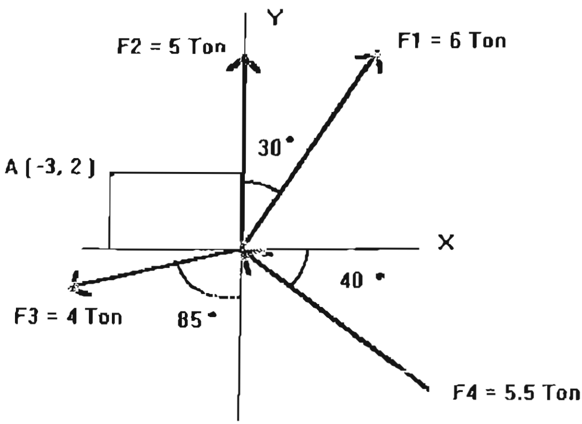


FIGURA 28. Aplicación del Teorema de Varignon a varias fuerzas. Calcular el momento de la resultante con respecto al punto A, del siguiente sistema de fuerzas concurrentes. El problema se puede resolver fácilmente por descomposición de fuerzas en los ejes X, Y, para obtener dos resultantes perpendiculares Rx, Ry. Después se determina una resultante total Rt. Se determina por suma de momentos el momento Rx y Ry, para determinar el momento de la resultante.

1. Se descomponen las fuerzas *F1, F2, F3, F4* en sus componentes *F1x, F2x, F3x, F4x* y *F1y, F2y, F3y, F4y.*

$$F1_x = 6 \sin 30°$$
$$F2_x = 0$$
$$F3_x = 4 \sin 85°$$
$$F4_x = 5.5 \cos 40°$$

$$F1y = 6\ ton \cos 30°$$
$$F2y = 5\ ton$$
$$F3y = 4\ ton \cos 85°$$
$$F4y = 5.5\ ton \sin 40°$$

2. Se determinan las resultantes Rx, Ry por suma algebraica de fuerzas.

$$\Sigma F_x = 6 \sin 30° - 4 \sin 85° - 5.5 \cos 40° = F_x$$
$$F_x = 6\,(0.5) - 4\,(0.99) - 5.5\,(0.766)$$
$$F_x = -5.173\ ton \leftarrow$$

$$\Sigma Fy = 6\ ton\ (0.866) + 5\ ton - 4\ ton\ (0.087) + 5.5\ ton\ (0.643) = Fy$$
$$Fy = 5.196 + 5 - 0.348 + 3.537$$
$$Fy = 13.385\ ton \uparrow$$

3. Por composición de fuerzas se determina la resultante de Rx, Ry.

$$R = \sqrt{(Rx)^2 + (Ry)^2}$$
$$R = \sqrt{(5.173\ ton)^2 + (13.385\ ton)^2}$$
$$R = 14.350\ ton$$

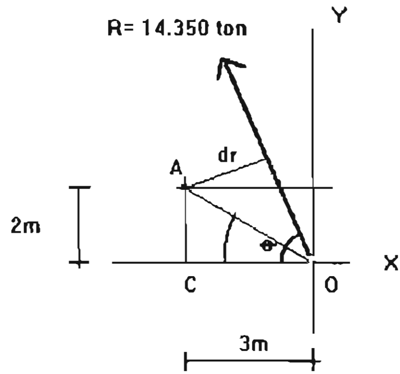
4. El ángulo entre la resultante y el eje X se determina por la función tangente.

$$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx}$$

$$\tan\theta = \frac{13.385\ ton}{5.173\ ton}$$

$$\theta = 68°\ 52'\ 1''$$

5. Se determinan los momentos de las resultantes *Rx*, *Ry* con respecto al eje de momentos punto A.



$$dr = \frac{M}{R} = \frac{29.809 \text{ tm}}{14.350 \text{ t}} = 2.078 \text{ l}$$

angulo entre la resultante y el eje X

$$\theta = 68^\circ \quad 52' \quad 1''$$

distancia AO = 3.606 m.

Por lo tanto	**la magnitud de la resultante**	=	**14.35 ton**
	momento de la resultante	=	**29.809 tm**
	distancia de la resultante	=	**2.078 m**
	direccion de la resultante	=	**68° 52 1**

FIGURA 29. Respuesta al problema.

Se consideran momentos positivos a los momentos de las fuerzas que giran en sentido contrario a las manecillas del reloj, y momentos negativos en sentido a favor.

$$\sum M_A = 13.385 \, ton \, (3 \text{ m}) - 5.173 \, ton \, (2 \, m)$$
$$M_A = 29.809 \, tm$$

El resultado de la suma algebraica de momentos indica que el momento de la resultante igual a 29.809 *tm* es de signo positivo, lo que representa en la figura que la resultante se localiza a la derecha del punto A (Fig. 29).

6. La distancia perpendicular entre la resultante y el eje de momentos, punto A, se determina fácilmente despejando la fórmula siguiente:

Momento de una fuerza es igual al producto de su magnitud por su distancia perpendicular.

$$M = F d$$

$$d = \frac{M}{F}$$

Por lo tanto, la distancia se obtiene:

$$d = \frac{29.809 \ tm}{14.350 \ ton}$$

$$d = 2.077 \ m$$

Otra forma de calcular la distancia perpendicular entre la resultante total al punto A, es aplicando la trigonometría.

Para ayudarnos con las funciones trigonométricas será necesario analizar un esquema de la ubicación de la resultante con respecto a los ejes X,Y y el eje de momentos A (ver la página siguiente).

a) El ángulo formado entre el eje X y la resultante ya calculado.

$$68° \ 52' \ 1''$$

b) Se traza una línea recta desde el punto A, al punto de coordenadas (0,0).

c) Se determina el ángulo entre esta línea recta con respecto al eje X.

$$\tan \gamma = \frac{2}{3} = 0.667$$

$$\arctan 0.667 \quad \gamma = 33.°69 \quad \gamma = 33°41' \ 2''$$

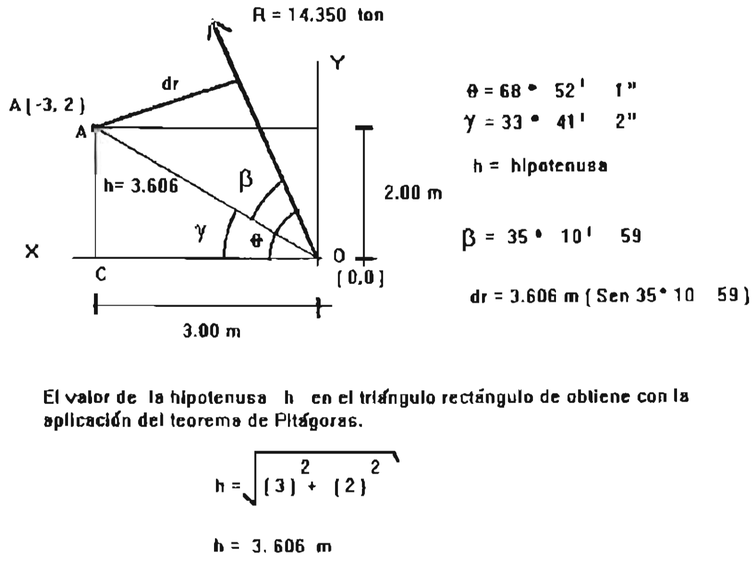


Figura 30. Esquema para determinar la distancia dr aplicando las funciones trigonométricas.

Por diferencia de ángulos se obtiene el ángulo entre la resultante y la recta.

$$
\begin{array}{r}
68°52'\ 1'' \\
-\ 33°41'\ 2''
\end{array}
$$

$$\beta = 35°10'\ 59''$$

d) Este ángulo es opuesto a la distancia *dr*. Por lo tanto, *dr* se obtiene por la función *Sin*.

$$\sin\beta = \frac{dr}{h} \qquad h = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$$

$$dr = h \sin \beta$$
$$dr = 2.07\ m$$

e) Finalmente el momento se obtiene con la siguiente fórmula:

$$M = F\, d$$
$$M = 29.805\ tm$$

Como conclusión de este problema, el teorema de Varignon se puede aplicar a cualquier número de fuerzas en un sistema de fuerzas concurrentes coplanares.

Resultante de sistema de fuerzas paralelas coplanares

Procedimiento Analítico

Para obtener las características de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas por el procedimiento analítico, es necesario tomar en cuenta los siguientes conceptos:

La magnitud se determina por una suma algebraica de las fuerzas, considerando las fuerzas positivas y negativas.

$$\sum F = F1 + F2 + F3 + F4 + Fn \ldots = R$$

La dirección de la resultante, estará de acuerdo al paralelismo que guardan dichas fuerzas.

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ F1 & F2 & F3 & F4 & F5 \end{array}$$

O también:

$$\begin{array}{cc} \leftarrow & F1 \\ \leftarrow & F2 \\ \rightarrow & F3 \\ \leftarrow & F4 \\ \rightarrow & F5 \end{array}$$

El sentido se obtiene de acuerdo a la suma algebraica de las fuerzas.

Ejemplo:

Calcular la magnitud de la resultante de dos fuerzas paralelas:

$F1 = 6\ ton$

$F2 = 10\ ton$

$$\uparrow \qquad \downarrow$$

$$\boldsymbol{F1 = 6\ ton \qquad F2 = 10\ ton}$$

Si se suman algebraicamente se obtiene que el sentido de la resultante para estas dos fuerzas sería hacia abajo o negativo.

$$\sum F = 6\ ton - 10\ ton = -4\ ton$$

Por lo tanto, la fuerza tiene sentido negativo.

$$\Downarrow \ -4\ ton$$

El punto de aplicación se obtiene utilizando el teorema de Varignon: Por suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas con respecto a un eje de momentos, se determina el momento de la resultante.

Después se divide el momento de la resultante entre la magnitud de la resultante y se obtiene la distancia con respecto a dicho eje.

$$\sum MF_A = MF1 + MF2 + MF3 + MF4 + MF_N \ldots = MR$$

$$dr = \frac{MR}{R}$$

Para ubicar la resultante con respecto al eje de momentos será necesario considerar el signo del momento o giro, y considerar el sentido de la resultante.

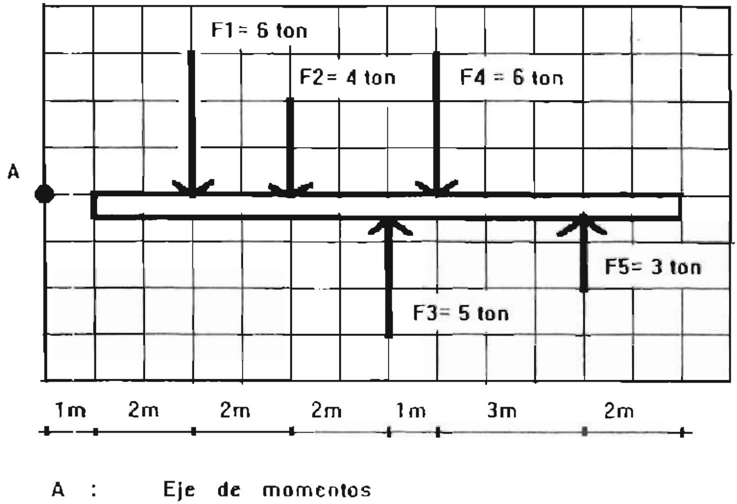


FIGURA 31. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas cooplanares.

Ejemplo:

En una barra de acero se aplican cinco fuerzas paralelas. Determinar las características de la resultante con respecto al eje de momentos, punto "A".

$$F1 = 6\ ton$$
$$F2 = 4\ ton$$
$$F3 = 5\ ton$$
$$F4 = 6\ ton$$
$$F5 = 3\ ton$$

a) Se determina la magnitud de la resultante por suma algebraica de fuerzas. Se consideran fuerzas de sentido negativo las que se encuentran según la acción de la gravedad, y positivas en sentido contrario.

$$\sum F_y = -6\ ton - 4\ ton + 5\ ton - 6\ ton + 3\ ton = R$$
$$R = -8\ ton \downarrow$$

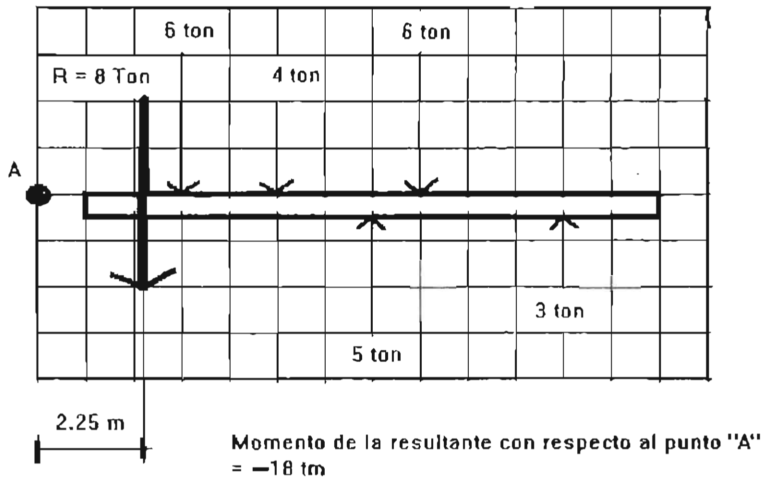


FIGURA 32. Ubicación de la resultante. Resultados al problema del sistema de fuerzas paralelas coplanares.

b) Se determina la posición por suma algebraica de momentos de las fuerzas con respecto al punto "A" eje de momentos.

$$\sum MF_A = -6\,ton\,(3m) - 4\,ton\,(5m) + 5\,ton\,(7m) - 6\,ton\,(8m) + 3\,ton\,(11m) = MR$$

$$MR = -18\,tm$$

c) Con la magnitud y el momento de la resultante se obtiene la posición que guarda con respecto al eje de momentos.

$$dr = \frac{18\,tm}{8\,ton}$$

$$dr = 2.25\,m$$

d) Para ubicar la resultante se deben considerar el sentido y el signo del momento. Por lo tanto, como el momento es negativo y el sentido también, entonces se localizará a la derecha del eje de momentos con la flecha apuntando hacia abajo a 2.25 m.

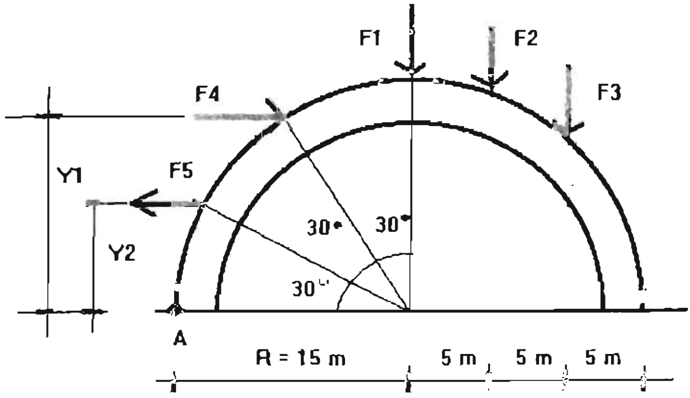


FIGURA 33 . Sistema de fuerzas paralelas coplanares.

Ejercicio:
(Fig. 33)

En un arco de concreto se aplican dos sistemas de fuerzas paralelas. Determinar las características de la resultante para cada sistema de fuerzas y la resultante total.

Para resolver el problema podemos considerar primero el sistema de fuerzas paralelas verticales F1, F2, F3, localizadas a la derecha del arco.

a) Aplicando una suma algebraica de momentos de las fuerzas con respecto a un eje de momentos, se obtiene el momento de la resultante. El eje de momentos puede ubicarse en cualquier punto de la figura, y le llamaremos punto "A".

$$\Sigma MF_A = -3ton\ (15m) - 6.5ton\ (20m) - 10ton\ (25m) = MR$$
$$MR = -425\ tm$$

b) Por suma algebraica de fuerzas, se obtiene la magnitud de la resultante.

$$\sum F_Y = -3\ ton\ -6.5\ ton\ -10\ ton = RY$$
$$RY = -\ 19.5\ ton$$

c) La distancia a la que se encuentra la resultante con respecto al eje de momentos se determina fácilmente dividiendo el momento de la resultante entre la magnitud de la resultante.

$$dr = \frac{425\ tm}{19.5\ ton}$$
$$dr = 21.\ 795m$$

Ahora consideramos el sistema de fuerzas paralelas a la izquierda en el arco.

d) Se obtiene una suma algebraica de momentos de las fuerzas, con respecto al mismo punto "A", eje de momentos.

$$\sum MF_A = -8\ ton\ (\ Y1\ )\ +\ 2.5\ ton\ (\ Y2\ ) = MR$$

e) Para este sistema será necesario calcular las distancias perpendiculares desde el eje "A" a cada fuerza. Aplicando las funciones trigonométricas se obtiene Y1 y Y2. Por seno del ángulo.

$$\sin 60° = \frac{Y1}{15\ m}$$
$$Y1 = 15\ (\ 0.866\ )$$
$$Y1 = 12.99\ m$$

$$\sin 30° = \frac{Y2}{15\ m}$$
$$Y2 = 15\ (\ 0.5)$$
$$Y2 = 7.5\ m$$

f) Una vez calculadas las distancias perpendiculares de las fuerzas con respecto al eje de momentos punto "A", se aplica una suma de momentos.

$$\Sigma MF_A = -8\ ton\ (12.99\ m) + 2.5\ ton\ (7.5\ m) = MR$$
$$MR = -85.17\ tm$$

g) Se determina una suma algebraica de fuerzas para el sistema izquierdo, para obtener la resultante.

$$\Sigma F_X = -2.5\ ton + 8\ ton = Rx$$
$$Rx = 5.5\ ton$$

h) Se obtiene la distancia de Rx con respecto al punto "A".

$$dr = \frac{-85.17\ tm}{5.5\ \ ton}$$
$$dr = 15.485\ m$$

i) Con las resultantes calculadas RY, RX, por composición de fuerzas se determina una sola resultante haciéndolas concurrentes.

$$R = \sqrt{(RY)^2 + (RX)^2}$$
$$R = \sqrt{(19.5)^2 + (5.5)^2}$$
$$R = 20.261\ ton$$

Por tangente se obtiene el ángulo

$$\tan\theta = \frac{19.5\ ton}{5.5\ ton}$$
$$= 3.545$$

$$\arctan\ 3.545 \qquad \theta = 74.249 \qquad \theta = 74°\ 14'\ 6''$$

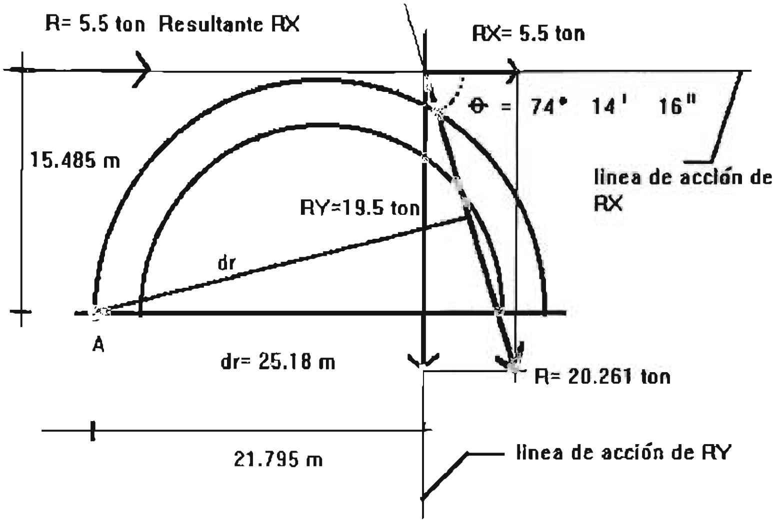


FIGURA 34. Solución al problema de 2 sistemas de fuerzas paralelas.
A: Eje de momentos
dr: Distancia perpendicular desde el eje de momentos, a la resultante total
RY: Resultante vertical
RX: Resultante horizontal
R: Resultante total

j) Para obtener el momento final de la resultante se suman algebraicamente los momentos de RX y de RY.

$$\sum M = -425\ tm - 85.17\ tm = MR$$
$$MR = -510.17\ tm$$

k) La distancia perpendicular entre la resultante total con respecto al punto "A" se obtiene.

$$dr = \frac{-510.17\ tm}{20.261\ ton}$$
$$dr = 25.18\ m$$

Como la resultante final es de signo negativo y el momento también, su posición se determina a la derecha del eje de momentos punto "A".

Resultante de fuerzas no paralelas, no colineales, no concurrentes

Para determinar la resultante de fuerzas no paralelas, no concurrentes, no colineales coplanares, se pueden descomponer las fuerzas en componentes perpendiculares con respecto a los ejes X, Y. De esta forma se traduce el problema a dos sistemas de fuerzas paralelas, uno en X y otro en Y.

Una vez calculadas las componentes, se determina la resultante total aplicando una composición de fuerzas. Considérese la figura para 4 fuerzas F1, F2, F3 y F4. El procedimiento para calcular la resultante se describe en los siguientes pasos:

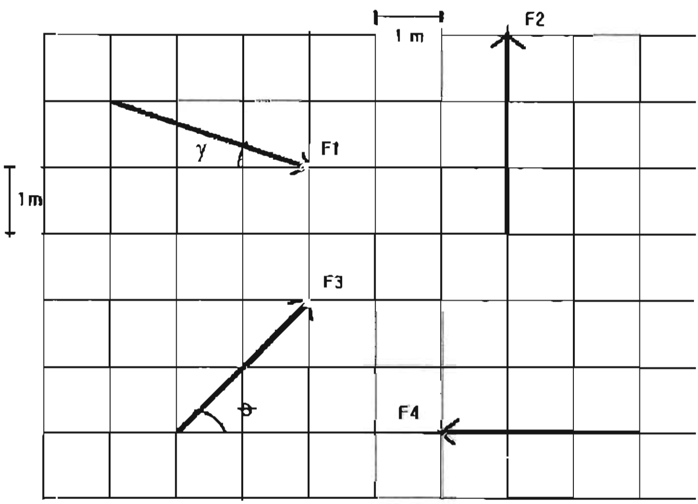


FIGURA 35. El problema se puede resolver por descomposición de fuerzas. Se determinan componentes con respecto a los dos ejes X, Y.

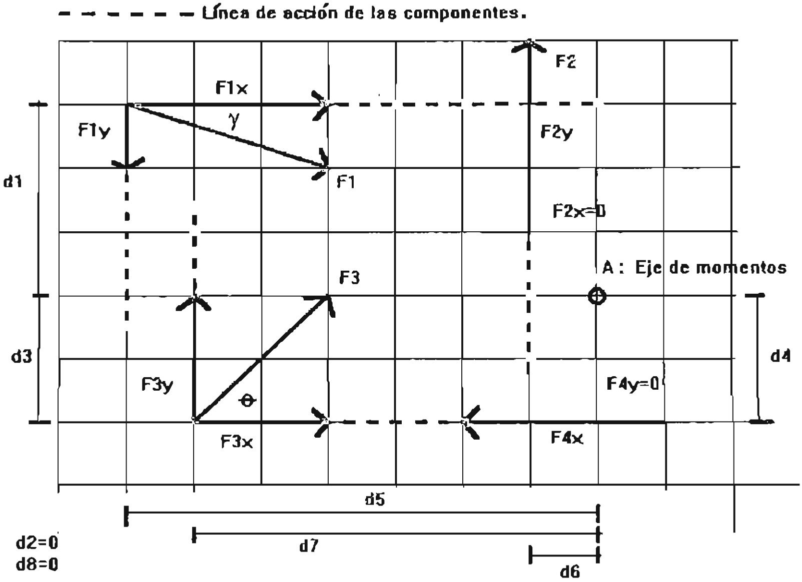


FIGURA 36. Descomposición de fuerzas.

a) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje X.

$$F\,1_x = F1 \cos \gamma$$
$$F\,2_x = F2 \cos 90°$$
$$F\,3_x = F3 \cos \theta$$
$$F\,4_x = F4 \cos 180°$$

b) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje Y.

$$F\,1_y = F1 \ sen\, \gamma$$
$$F\,2_y = F2 \ sen\, 90°$$
$$F\,3_y = F3 \ sen\, \theta$$
$$F\,4_y = F4 \ sen\, 180°$$

c) Se suman las fuerzas con respecto al eje X considerando signos positivos y negativos según el sentido de cada fuerza.

$$\sum F_x = F1 \cos\gamma + 0 + F3 \cos\theta - F4 = Rx$$

d) Se suman las fuerzas con respecto al eje Y considerando signos positivos y negativos según el sentido de cada fuerza.

$$\sum F_y = -F1 \sin\gamma + F2 + F3 \sin\theta + 0 = RY$$

e) Por composición de fuerzas se determina la magnitud y la dirección de la resultante de Rx y Ry.

$$R = \sqrt{(Rx)^2 + (Ry)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{Ry}{Rx}$$

f) Se determina una suma de momentos de las componentes Rx, con respecto a un eje de momentos, punto "A".

$$\sum MF_A = -F1x\,(d1) + F2x\,(d2) + F3x\,(d3) - F4x\,(d4) = MRx$$

g) Se determina una suma de momentos de las componentes Ry, con respecto al mismo eje de momentos punto "A".

$$\sum MF_y = F1y\,(d5) - F2y\,(d6) - F3y\,(d7) + F4y\,(d8) = MRy$$

h) Con los momentos calculados, se puede conocer el momento final de la resultante, por suma algebraica de momentos:

$$\sum M = MRx + MRy = MR$$

i) La posición de la resultante con respecto al punto "A" se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$dr = \frac{\sum M}{R}$$

Con relación a los valores obtenidos por el procedimiento anterior, se pueden graficar los datos correspondientes a las características de la resultante: Magnitud, posición, sentido, línea de acción.

Para aplicar el procedimiento descrito, podemos asignar valores a las fuerzas.

Ejemplo:

Determinar las características de la resultante para los siguientes datos:

$$F1 = 8\ ton$$
$$F2 = 6\ ton$$
$$F3 = 4\ ton$$
$$F4 = 2\ ton$$

Los ángulos pueden considerarse según la escala gráfica, por la relación de lados en un triángulo rectángulo.

Para la fuerza F1 el ángulo se sustituye por la relación que indica en la escala gráfica 3m horizontal, 1m vertical y la hipotenusa es = h.

$$h = \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$$
$$h = 3.162$$

Para la fuerza F3 el ángulo se sustituye por la relación que indica en la escala gráfica 2m horizontal, 2m vertical, y la hipotenusa es = h.

$$h = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$
$$h = 2.828$$

Procedimiento:

a) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje X.

$$F1x = 8\ ton\left[\frac{3}{3.162}\right]$$
$$F1x = 7.59\ ton$$

$$F2x = 0$$

$$F3x = 4\ ton\left[\frac{2}{2.828}\right]$$
$$F3x = 2.829\ ton$$

$$F4 = 2\ ton$$

b) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje Y.

$$F1y = 8\ ton\left[\frac{1}{3.162}\right]$$
$$F1y = 2.53\ ton$$

$$F2y = 6\ ton$$

$$F3y = 4\ ton\left[\frac{2}{2.828}\right]$$
$$F3y = 2.829\ ton$$

$$F4y = 0$$

c) Se suman las componentes Fx, considerando su signo.

$$\sum Fx = 7.59\ ton + 2.829\ ton - 2 = Rx$$
$$Fx = 8.419\ ton \rightarrow$$

d) Se suman las componentes Fy, considerando su signo.

$$\sum Fy = -2.53\ ton + 6\ ton + 2.829\ ton = Ry\uparrow$$
$$Fy = 6.299\ ton$$

e) Por composición de fuerzas se suman Rx, Ry para determinar la magnitud y dirección de la resultante.

$$R = \sqrt{(8.419)^2 + (6.299)^2}$$
$$R = 10.515\ ton$$

El ángulo entre la resultante con respecto al eje X se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{6.299\ ton}{8.419\ ton}$$
$$= 0.748$$

$$\arctan\ 0.748 \quad \theta = 36°.803 \quad \theta = 36°\ 48'\ 1''$$

f) Por suma de momentos con respecto al punto "A" eje de momentos, se determina el momento de la resultante Rx (MRx).

$$\sum MFx_A = -7.59\ ton\ (3m) + 2.829\ ton\ (2m) - 2\ ton\ (2m) = MRx$$
$$MRx = -21.112\ tm$$

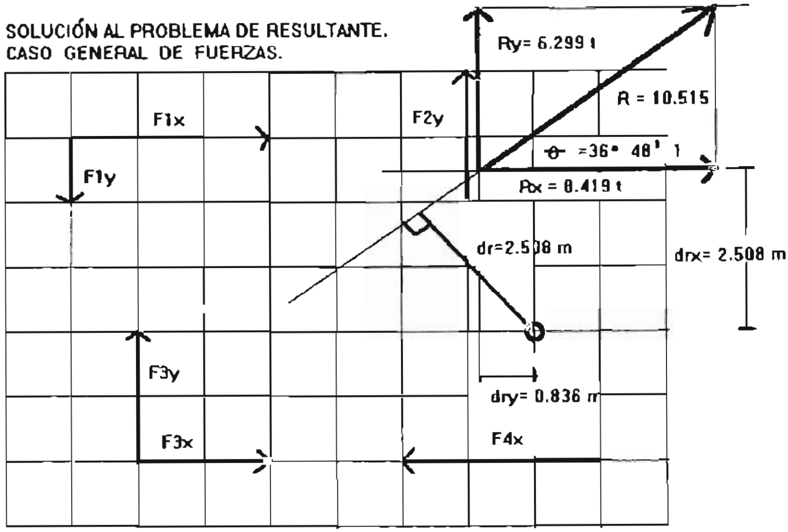


FIGURA 37. Solución al problema de resultantes de fuerzas no paralelas no concurrentes no colineales.

Dividiendo el momento de la resultante MRx entre la magnitud Rx se obtiene su posición.

$$dr_x = \frac{21.112 \; tm}{8.419 \; ton}$$

$$dr_x = 2.508 \; m$$

g) Por suma de momentos con respecto al punto "A" eje de momentos, se determina el momento de la resultante Ry (MRy).

$$\sum MFy_A = 2.53 \; ton \; (7m) - 6 \; ton \; (1m) - 2.829 \; ton \; (6m) = MRy$$

$$MRy = -5.264 \; tm$$

Dividiendo el momento de la resultante MRy entre la magnitud Ry se obtiene su posición.

$$dr_y = \frac{5.264\ tm}{6.299\ ton}$$
$$dr_y = 0.836\ m$$

h) Con los momentos calculados se determina el momento final de la resultante MR, por suma algebraica de momentos.

$$\sum M = -21.112\ tm - 5.264\ tm$$
$$MR = -26.376\ tm$$

i) La posición se determina dividiendo el momento final de la resultante entre su magnitud..

$$dr = \frac{26.376\ tm}{10.515\ ton}$$
$$dr = 2.508\ m$$

j) Con los datos obtenidos se pueden graficar los resultados (Fig. 37).

Equilibrio de sistemas de fuerzas

Para que una edificación sea capaz de resistir las acciones permanentes, accidentales, y variables será necesario que todos sus elementos estructurales: columnas, trabes, losas, muros y cimientos, cumplan con los requisitos de resistencia y servicio.

Desde el punto de vista resistencia, uno de los requisitos de mayor importancia es el que se refiere al equilibrio de las fuerzas externas e internas de cada elemento estructural.

Como por ejemplo, si a una trabe se le aplican fuerzas que se derivan del peso propio de los materiales como losas de concreto, acero, muros u otros materiales, será necesario para establecer el equilibrio, aplicar fuerzas que se traducen en la resistencia del material de la trabe. Esta resistencia es equivalente a las fuerzas internas. Así las fuerzas externas aplicadas serán contrarrestadas por las fuerzas internas. Si la trabe que debe cargar es de concreto reforzado con acero, por lo tanto, se tendrán dos fuerzas internas que van a resistir.

1) Una fuerza de compresión interna que aporta el concreto.
2) Una fuerza de tensión interna que aporta el acero.

Estas dos fuerzas en la trabe proporcionan lo que llamaremos: Resistencia a momento flexionante.

También debemos considerar que para dar resistencia en la trabe, es importante tomar en cuenta la forma de la sección recta.

a) Una trabe de sección rectangular.
b) Una trabe de sección cuadrada.
c) Una trabe de sección en forma de T.
d) Una trabe de sección en forma de I.
e) Una columna de sección circular.
f) Una columna de sección circular hueca.
g) Una columna en forma de canal [.
h) Una trabe de sección con dos canales soldados [].

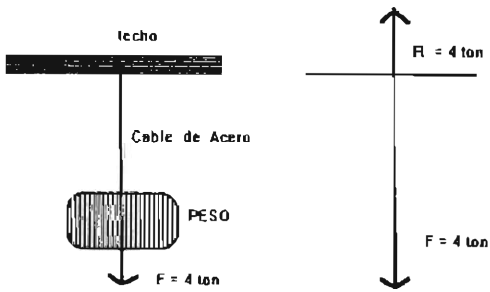
En este texto sólo consideraremos el equilibrio externo de las fuerzas. En lo que se refiere al equilibrio interno de fuerzas será tema del texto sobre resistencia de materiales.

Equilibrio de sistemas de fuerzas colineales coplanares

Para establecer el equilibrio en cualquiera de los sistemas de fuerzas deberán, aplicarse las siguientes ecuaciones que proporciona la estática:

$$\sum FX = 0$$
$$\sum FX = 0$$
$$\sum MF = 0$$

A estas ecuaciones les llamaremos condiciones de equilibrio. En un sistema de fuerzas concurrentes la suma de fuerzas deberá cumplir con las ecuaciones anteriores. Como en este sistema las fuerzas se encuentran sobre una misma línea, sólo se aplicará una de las ecuaciones anteriores.



$$\sum FY = -4\ ton + R = 0$$

$$R = 4\ ton$$

FIGURA 38. Equilibrio de sistema de fuerzas colineales coplanares.

Ejemplo 1:
(Fig.38)

Un cable de acero suspendido del techo soporta una carga de 4 tons. Determinar el equilibrio o reacción que debe aplicarse.

$$\sum F_Y = -4\,ton + R = 0$$

Al aplicar la ecuación de la suma de fuerzas con respecto a la vertical "Y" es necesario que en la ecuación se considere el valor de reacción como una incógnita llamada R. Además, deberá igualarse la ecuación a cero, para despejar la incógnita. Una vez planteada la ecuación de la suma de fuerzas verticales, se determina el valor R.

$$R = 4\,ton$$

Si al despejar la incógnita R, el resultado es positivo, quiere decir que el sentido de R está bien propuesto. De lo contrario, si el resultado es negativo será necesario cambiarle el sentido a la reacción.

Ejemplo 2:

Una columna de una planta baja en un edificio recibe las cargas que transmiten los pisos superiores:

$$F1 = 3.5\,ton$$
$$F2 = 4.0\,ton$$
$$F3 = 5.5\,ton$$
$$F4 = 6.0\,ton$$
$$F5 = 10\,ton$$

Calcular la reacción en la base de la columna.

El problema se resuelve en la misma forma que el anterior, con base en la ecuación de suma de fuerzas.

$$\sum F_Y = -3.5\,ton - 4\,ton - 5.5\,ton - 6\,ton - 10\,ton + R = 0$$

En esta ecuación se propone que el sentido de la incógnita sea positivo. Por lo tanto, R se determina

$$R = 29\ ton \uparrow$$

La ecuación de momentos no se aplicaría para este sistema, por encontrarse las fuerzas sobre una misma línea de acción.

Equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes coplanares

Para determinar el equilibrio del sistema de fuerzas concurrentes, se aplican las condiciones de equilibrio con respecto a los ejes perpendiculares X, Y.

$$\sum F_X = 0$$
$$\sum F_Y = 0$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan el equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes para varias fuerzas concurrentes, se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\sum F_X = F1_X + F2_X + F3_X + F4_X + Fn + \ldots FX = 0$$

$$\sum F_Y = F1_Y + F2_Y + F3_Y + F4_Y + Fn + \ldots + FY = 0$$

La ecuación de momentos para este sistema no se aplicaría, por tener las fuerzas un punto común o de concurrencia. Para darle solución al problema de este sistema, podemos considerar los siguientes pasos:

a) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje X.
b) Se descomponen las fuerzas con respecto al eje Y.
c) Se suman las componentes de las fuerzas en X, proponiendo para esta ecuación la incógnita que va a equilibrar estas fuerzas.
d) Se despeja la incógnita FX de la ecuación anterior, y se revisa su signo.
e) Se suman las componentes de las fuerzas en Y, proponiendo para esta ecuación la incógnita que va a equilibrar estas fuerzas

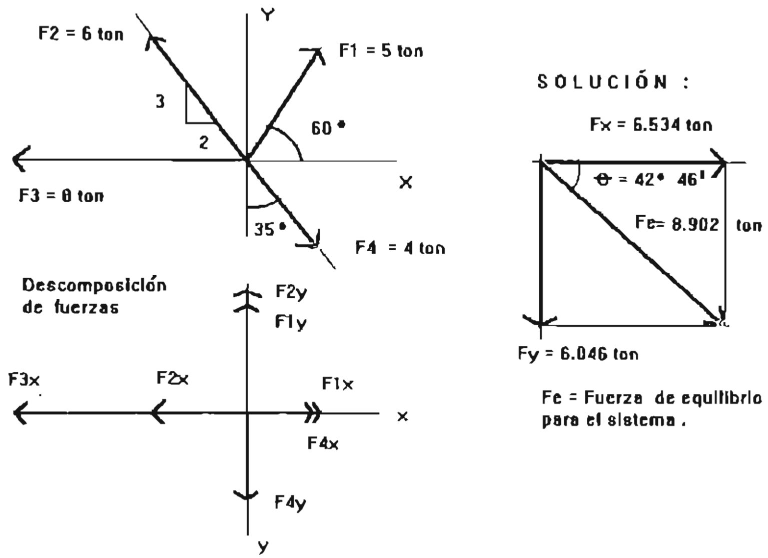


FIGURA 39. Equilibrio de fuerzas concurrentes.

f) Se despeja la incógnita FY de la ecuación anterior, y se revisa su signo.
g) Se suman las componentes FX, FY para determinar la fuerza de equilibrio total.
h) Se obtiene el ángulo de la fuerza de equilibrio.

Ejemplo (Fig. 39):

En un punto de una estructura coplanar se aplican 4 fuerzas F1, F2, F3, F4. Determinar las fuerzas FX, FY que deberán equilibrar el sistema.

El problema se resuelve por descomposición de fuerzas con respecto a los ejes X, Y, aplicando las ecuaciones de equilibrio.

$$\Sigma F_x = 5\ ton\ \cos 60° - 6\ ton\ \frac{2}{\sqrt{13}} - 8\ ton + 4\ ton\ \sin 35° - FX = 0$$

$$= 5\,(0.50) - 6\,(0.555) - 8 + 4\,(0.574) - FX = 0$$

Para esta ecuación proponemos el sentido negativo para FX, y se revisa si es correcto al despejar en la ecuación. Por lo tanto, de la ecuación anterior

$$FX = -6.534 \; ton$$

El resultado negativo indica que el sentido de FX estuvo mal propuesto en la ecuación, por lo que deberá cambiarse el sentido.

$$FX = 6.534 \; ton \; \rightarrow$$

Por lo tanto, el sentido correcto de FX es hacia la derecha.

Aplicando la ecuación de suma de fuerzas con respecto al eje Y, se determina la fuerza de FY.

$$\sum F_Y = 5 \; ton \; \sin 60° + 6 \; ton \; \frac{3}{\sqrt{13}} - 4 \; ton \; \cos 35° - FY = 0$$

$$= 5\,(0.866) + 6\,(0.832) - 4\,(0.819) - FY = 0$$

Para esta ecuación proponemos que el sentido de FY sea negativo, y se revisa si es correcto al despejar en la ecuación. Por lo tanto, de la ecuación anterior

$$FY = 6.046 \; ton$$

El resultado indica que el sentido de FY estuvo bien propuesto. Por lo tanto, la fuerza de equilibrio de FY es hacia abajo.

$$FY = 6.046 \; \downarrow$$

Finalmente, se obtiene el equilibrio de fuerzas en el sistema sumando FX, FY.

$$R = \sqrt{(6.534)^2 + (6.046)^2}$$

$$R = 8.902\ ton$$

El ángulo se determina por la función tangente.

$$\tan\theta = \frac{6.046}{6.534}$$

$$= 0.925 \qquad \arctan 0.925 \qquad \theta = 42°46'\,4''$$

El ángulo calculado es medido entre el eje X y la fuerza R = 8.902 t.

Tipos y condiciones de apoyos en estructuras

Uno de los factores que intervienen en el análisis y diseño de estructuras es el que se refiere a las condiciones de apoyo.

Se pude considerar un apoyo a un elemento estructural que tiene como función transmitir las fuerzas hacia otros elementos estructurales como: trabes, columnas, muros, zapatas y losas de cimentación.

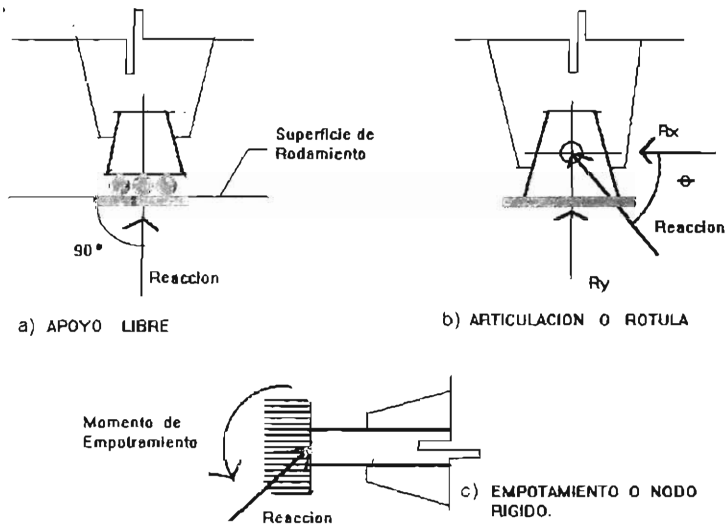


FIGURA 40. Apoyos en estructuras.

En estructuras comúnmente se designa como apoyo a un elemento estructural sobre el cual descansa simplemente el extremo de una viga o trabe. Una de las condiciones para que el extremo de la trabe se apoye, es la de permitir que la trabe gire en dicho extremo.

En estructuras el apoyo se relaciona también con una articulación, rótula o un punto que permite girar al elemento que se conecta. Cuando en el extremo del elemento estructural no permite giro y deslizamiento se le denomina empotramiento.

En una forma general y desde el punto de vista de la estática vamos a clasificar a los *apoyos* en tres grupos:

A) Libres o deslizantes.
B) Articulados o rótulas.
C) Empotrados o rígidos.

Para estudiar los apoyos debemos considerar que en cada uno de ellos se aplicarán fuerzas que se llaman comúnmente reacciones. Las reacciones como las fuerzas, también tienen características, y son las siguientes:

1) Magnitud.
2) Dirección.
3) Sentido.
4) Posición o punto de aplicación.

A) Libre

Este tipo de apoyo se puede representar como un elemento que permite movimiento paralelo con respecto a la superficie de rodamiento. Por esta razón, y para efectos de análisis, se le consideran elementos redondos que permitan el deslizamiento del apoyo (Fig. 40, inciso a).

No necesariamente en una estructura deberán colocarse elementos redondos como solución, sino que se considerará algún diseño especial para permitir que el elemento estructural se desplace como consecuencia de efectos de temperatura, como es el caso de las armaduras de gran claro.

Existirán casos especiales de estructuras en que sí deberán diseñarse elementos redondos, como por ejemplo, en edificios sujetos a movimientos horizontales.

Desde el punto de vista analítico en el apoyo libre la reacción se considera perpendicular a la superficie de rodamiento, y se tienen como incógnitas la magnitud de la reacción, y su sentido.

En síntesis, para el apoyo libre se tiene una incógnita: La magnitud de la reacción.

B) Articulación o rótula

A diferencia del apoyo libre la articulación no permite deslizamiento, pero sí permite giro. Se le puede representar por un círculo o perno. Los elementos estructurales que se conecten a la articulación tendrán libertad de movimiento o giro en el extremo (Fig. 40, inciso b).

Un ejemplo de conexión para este apoyo lo tenemos en los puentes, por la cantidad de movimiento, por las dimensiones de los puentes, y por variaciones del material por efectos de temperatura.

Otro ejemplo, es cuando se quiere lograr una unión entre dos vigas de acero que no transmitan momento flexionante, pero sí fuerza cortante.

Como incógnitas se consideran la magnitud, dirección. La reacción se puede descomponer en dos reacciones perpendiculares entre sí para equilibrar las fuerzas en sentido del eje X, y en sentido del eje Y.

En síntesis, para la articulación se tienen dos incógnitas:

a) La magnitud de la reacción.
b) La dirección de la reacción.

Para determinar las dos reacciones perpendiculares deberán de aplicarse las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum FX = 0$$
$$\sum FY = 0$$

Posteriormente, se determina la magnitud, dirección y sentido de la reacción, por composición de fuerzas.

C) Empotramiento

Con respecto a los apoyos libre y articulado, el empotramiento no permite giro y deslizamiento. Se le considera idealmente rígido. Se le puede representar mediante líneas paralelas (ashurado) que indicarán una unión capaz de transmitir un momento flexionante, y una fuerza cortante (Fig 40, inciso c).

Esta unión se puede realizar con materiales rígidos como el concreto reforzado y el acero. En la mayoría de las estructuras reticulares formadas por elementos con trabes y columnas, se diseñan las uniones para resistir momentos y fuerzas cortantes. El objetivo de lograr uniones rígidas, consiste en reducir al máximo las deformaciones angulares y los desplazamientos verticales y horizontales.

En otras palabras, la función del empotramiento o nodo rígido consiste en absorber momentos provenientes de los elementos como trabes y columnas, que se conectan al nodo.

Desde el punto de vista estructural, al considerar las uniones entre las columnas y trabes, losas y trabes, columnas y zapatas, como empotramientos, el número de incógnitas de la estructura será mayor al número de ecuaciones de equilibrio que proporciona la estática.

Por lo tanto, el problema se tendrá que resolver con la aplicación de ecuaciones de compatibilidad, basadas en las deformaciones de los materiales y de la estructura. Dentro de la estática es posible resolver elementos estructurales como trabes o vigas empotradas en un extremo, y libre en el otro. También es posible resolver estructuras de tres articulaciones.

Desde el punto de vista analítico el empotramiento tiene como incógnitas un momento, llamado momento de empotramiento y una reacción. En síntesis, tres incógnitas:

a) La magnitud de la reacción.
b) La dirección de la reacción.
c) La magnitud del momento de empotramiento.

Equilibrio de sistemas de fuerzas paralelas coplanares

Para tratar el tema de equilibrio en el sistema de fuerzas paralelas, se puede considerar como elemento estructural una trabe o viga, sin importar el material de la misma.

Cuando se considera el material de la trabe o viga, relacionaremos la trabe con los conocimientos en materia de resistencia de materiales.

Por lo tanto, sólo se estudiarán las fuerzas exteriores o reacciones en la trabe. El objetivo consistirá en relacionar los conceptos de equilibrio que proporciona la estática a un elemento, que en la práctica tiene como función la de transmitir las cargas vivas y muertas que se aplican en un edificio.

Antes de abordar el problema podemos definir al elemento trabe o viga:

Se llama trabe, a un elemento estructural, que tiene como función principal la de transmitir fuerzas por medio de su masa (materiales) hacia los apoyos.

Se define como trabe a un elemento estructural, que soporta cargas transversales, con respecto a su eje longitudinal, y tiene como función principal la de salvar un claro entre sus apoyos.

Se define como trabe a un elemento estructural de masa activa.

En algunos textos en materia de estructuras se le llama barra, a un elemento a flexión y cortante. elemento que trabajando a flexotensión y flexocompresión.

Ejercicio:
(Fig. 41)

Como ejercicio consideremos una trabe con apoyos en ambos extremos, uno libre y el otro articulado y con cuatro fuerzas concentradas en diferentes puntos.

Calcular las características de las reacciones.

Datos de las fuerzas:

$$F1 = 5\ ton$$
$$F2 = 10\ ton$$
$$F3 = 7\ ton$$
$$F4 = 9\ ton$$

Longitud entre apoyos L = 7 metros.

Para resolver el problema se aplican las condiciones de equilibrio.

$$\sum MF = 0$$
$$\sum FX = 0$$
$$\sum FY = 0$$

Con la aplicación de las ecuaciones anteriores tenemos:

a) La primera ecuación que se debe aplicar es la de momentos, condición que sirve para eliminar la incógnita RB, y obtener la reacción del apoyo libre. Por suma algebraica de momentos de las fuerzas con respecto al eje de momentos, punto "B", se determina la reacción RA.

En la ecuación de suma de momentos se deberá proponer el giro de la reacción, y revisar el sentido correcto según el signo que se determine al despejar RA. Para la aplicación de suma de momentos se considerará la convención de signos.

Si el giro de la fuerza o reacción con respecto al eje de momentos, gira en sentido de las manecillas del reloj, se considera negativo. Si el giro de la

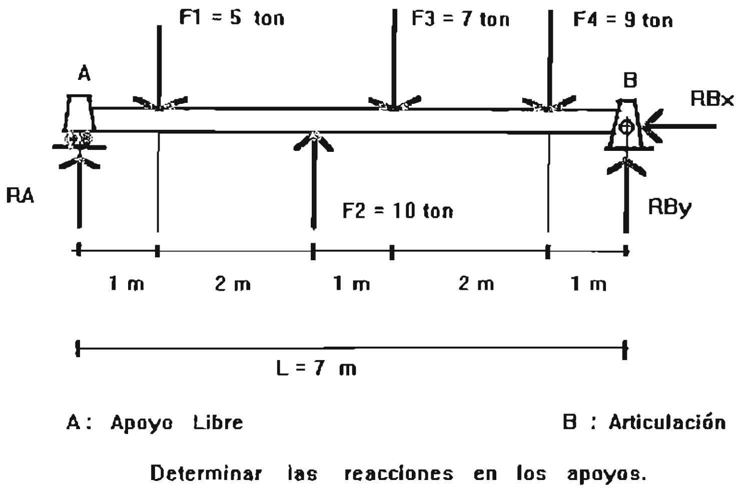


FIGURA 41. Equilibrio de sistemas paralelas coplanares.

fuerza reacción con respecto al eje de momentos gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, se considera positivo.

$$\sum MF_B = 5ton\ (6m) - 10ton\ (4m) + 7ton\ (3m) + 9ton\ (1m) - RA\ (7m) = 0$$

$$RA = \frac{20\ tm}{7\ m}$$

$$RA = 2.857\ ton$$

Al despejar RA en la ecuación anterior, el resultado positivo indica que su sentido es correcto.

b) La segunda ecuación que se aplica, es la de suma de fuerzas con respecto al eje "Y". Para obtener RBy. Como es un sistema de fuerzas paralelas, no se toma en cuenta el efecto de la reacción RBx, y por lo tanto, existe

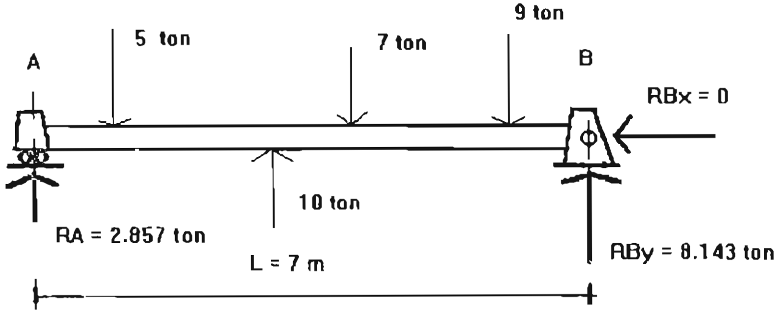


FIGURA 42. Solución al problema de equilibrio en una trabe que soporta fuerzas concentradas en diferentes puntos.

la posibilidad de aplicar una suma algebraica de momentos de las fuerzas con respecto al eje punto "A" para calcular RBy.

$$\sum F_Y = -5\,ton + 10\,ton - 7\,ton - 9\,ton + 2.857\,ton + RBy = 0$$

$$RBy = 8.143\,ton$$

El resultado positivo de RBy indica que el sentido es el correcto.

c) La ecuación de suma de fuerzas con respecto al eje X, sólo se aplicaría para fuerzas aplicadas en el eje X. Por lo tanto:

$$\sum F_X = 0$$

$$Rx = 0$$

Equilibrio de sistemas de fuerzas no paralelas, no concurrentes, no colineales

Equilibrio del caso general de fuerzas

En forma similar al caso de equilibrio de fuerzas paralelas deberán aplicarse las condiciones de equilibrio que nos proporciona la estática.

$$\sum MF = 0$$
$$\sum FX = 0$$
$$\sum F_Y = 0$$

Para calcular las reacciones en el caso del sistema de fuerzas no colineales, no concurrentes, no paralelas, es conveniente descomponer las fuerzas aplicadas en proyecciones con respecto a los ejes X, Y. Antes de aplicar las ecuaciones de equilibrio, se traza un diagrama de la figura para calcular componentes y distancias, con respecto al eje de momentos (articulación).

Ejemplo:
(Ver la siguiente página)

Como ejemplo de equilibrio para el caso general de fuerzas, consideremos una estructura formada por una trabe y una columna de concreto armado, con las siguientes fuerzas:

$$F1 = 8\ ton$$
$$F2 = 6\ ton$$
$$F3 = 9\ ton$$
$$F4 = 5\ ton$$
$$F5 = 7\ ton$$

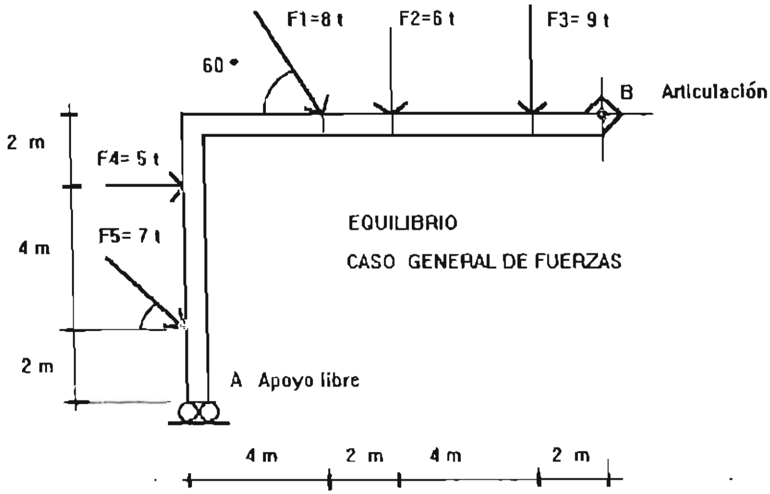


FIGURA 43. Equilibrio de fuerzas no paralelas no concurrentes no colineales. Por descomposición de fuerzas con respecto a los ejes X y Y, se aplican de una manera más fácil las ecuaciones que proporciona la estática.

a) Como primer paso, se descomponen las fuerzas con respecto al eje X.

$$F1_X = 8\ ton\ \cos 60°$$
$$F2_X = 0$$
$$F3_X = 0$$
$$F4_X = 5\ ton$$
$$F5_X = 7\ ton\ \cos 45°$$

b) Se determinan las componentes con respecto al eje Y.

$$F1_Y = -8\ \sin 60°$$
$$F2_Y = -6\ ton$$
$$F3_Y = -9\ ton$$
$$F4_Y = 0$$
$$F5_Y = -7\ \sin 45°$$

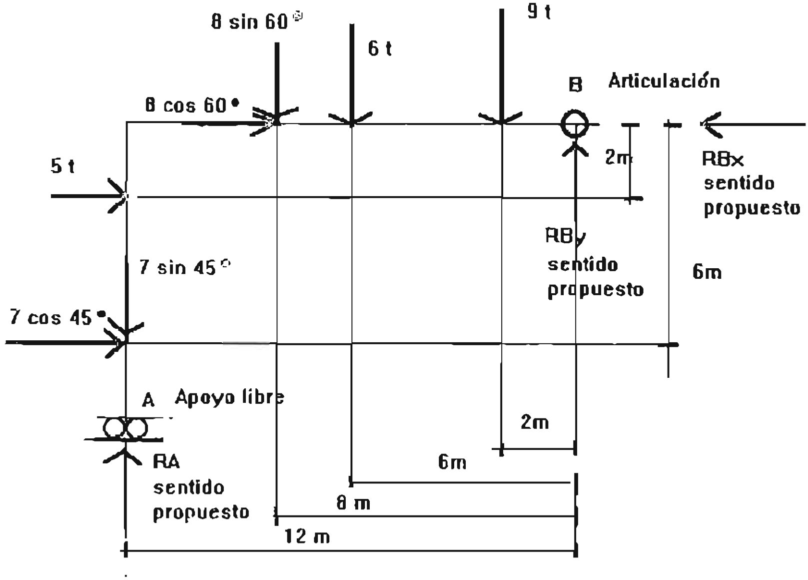


FIGURA 44. Componentes de las fuerzas y distancias al punto. Diagrama que indica las distancias perpendiculares desde cada componente Fx, Fy, con respecto al eje de momentos punto B (articulación).

c) Por suma algebraica de momentos de las fuerzas con respecto al eje "B" (articulación), se determina la reacción RA.

El giro de la reacción RA en la ecuación de momentos se propone negativo.

$$\sum MF_B = +8\,ton \sin 60°(8m) + 8 \cos 60°(0m) +$$
$$6\,ton\,(6m) + 9\,ton\,(2m) + 5\,ton\,(2m) +$$
$$7 \sin 45°(12m) + 7 \cos 45°\,(6m) - RA\,(12m) = 0$$

Se despeja el valor de RA de la ecuación anterior.

$$RA = 17.377\,ton \quad \uparrow$$

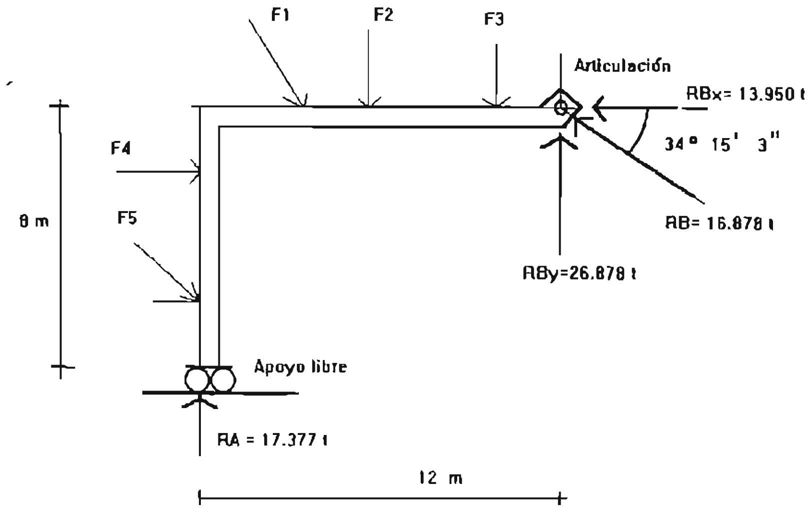


FIGURA 45. Resultados.

El sentido supuesto de la reacción RA es correcto.

d) Por suma algebraica de fuerzas verticales se determina el valor de Rby.

$$\sum F_Y = -8\,ton \sin 60° - 6\,ton - 9\,ton - 7 \sin 45° + RBy = 0$$

Por lo tanto, el valor de Rby:

$$RBy = 9.501 \; ton \uparrow$$

e) La reacción horizontal RBx se determina por suma algebraica de las fuerzas con respecto al eje X.

$$\sum F_X = 8\,ton \cos 60° + 5\,ton + 7\,ton \cos 45° - RBx = 0$$

$$RBx = 13.950 \; ton \leftarrow$$

f) Por último, se determinan las características de la reacción RB, por composición de fuerzas.

$$RB = \sqrt{(13.950)^2 + (9.501)^2}$$
$$RB = 16.878 \text{ ton}$$

El ángulo de la reacción RB, con respecto al eje X, se determina por la función tangente.

$$\tan \theta = \frac{9.501 \text{ ton}}{13.950 \text{ ton}}$$

$$\arctan 0.681 \qquad \theta = 34.258 \qquad 34\ 15'\ 3''$$

Los resultados se indican en la figura 45.

Bibliografía

SEELY, Fred B., M.S Newton E. Ensign, M.A., *Mecánica Analítica para Ingenieros,* Ed. UTEHA, Unión Tipográfica Hispanoamericana, México, 1960, 461 págs.

SHAEFFER, Ronald E., *Elementary Structures for Architects and Builders*, Regents/Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993, 305 págs.

DR. JULIO RUBIO OCA
Rector General UAM

M. EN C. MAGDALENA FRESÁN OROZCO
Secretaria General UAM

MTRA. MÓNICA DE LA GARZA MALO
Rectora UAM Azcapotzalco

LIC. GUILLERMO EJEA MENDOZA
Secretario de la Unidad

ARQ. JORGE SÁNCHEZ DE ANTUÑANO B.
Director de la División de CyAD

M. EN C. HÉCTOR SCHWABE MAYAGOITIA
Jefe del Depto. de Procesos y Técnicas de Realización