



**ANTOLOGIA**

**MAESTRIA EN ADMINISTRACION DE LOS SISTEMAS DE SALUD**

**MATERIA:**

**TENDENCIAS Y SISTEMAS DE SALUD EN MEXICO**

**Ana Cecilia Gutierrez Castellanos.**

---

## Marco Estratégico de Referencia

---

### Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1978 con el inicio de actividades de la normal de educadoras —Edgar Robledo Santiagoll, que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra universidad inició sus actividades el 19 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a las instalaciones de carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

## **Misión**

Satisfacer la necesidad de educación que promueva el espíritu emprendedor, basados en Altos Estándares de calidad Académica, que propicie el desarrollo de estudiantes, profesores, colaboradores y la sociedad.

## **Visión**

Ser la mejor Universidad en cada región de influencia, generando crecimiento sostenible y ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

## **Valores**

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Lealtad
- Responsabilidad
- Respeto

## **Escudo**



El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

### Eslogan

—Pasión por Educarll

### Balam



Es nuestra mascota, su nombre proviene de la lengua maya cuyo significado es jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen a los integrantes de la comunidad UDS.

---

## **TENDENCIAS Y SISTEMAS DE SALUD EN MEXICO**

---

### **OBJETIVO DE LA MATERIA.**

Al finalizar el curso, el estudiante será capaz de aplicar los diversos tópicos matemáticos en el planteamiento y resolución de problemas del ámbito empresarial, a través del uso e interpretación de modelos que le permitirán sustentar y apoyar el proceso de la toma de decisiones.

### **TEMAS**

#### **SEMANA TRES**

- 3.3.- Métodos no paramétricos.**
- 3.3.1.- Aplicaciones de ji cuadrada.**
- 3.3.2.- Otras pruebas no paramétricas.**
- 3.4.- Análisis de varianza.**
- 3.5.- Control estadístico de la calidad.**
- 3.6.- Matemáticas financieras.**

#### **UNIDAD IV INVESTIGACIÓN DE**

##### **OPERACIONES 4.1.- Origen y desarrollo.**

- 4.2.- Enfoque de modelado en la investigación de operaciones.**
- 4.3.- Programación lineal.**
- 4.4.- Administración de proyectos.**
- 4.5.- Introducción a la teoría de decisiones.**
- 4.6.- Introducción a la teoría de juegos.**

## **BIBLIOGRAFIA SUGERIDA**

- **Enrique y Guijarro, Evolución y Reforma del sistema de salud en México, Editorial Cepal, 2000**
- **GIEDION, Manuela Villar, Ávila Adriana, Los sistema de salud en Latinoamérica y el papel del seguro Privado, Editorial Fundación Mapre, 2010.**
- **SANCHES, León Gregorio, Editorial Cárdenas, 2006.**

## **CRITERIOS, PROCEDIMIENTOS DE EVALUACION Y ACREDITACION**

**Trabajos 50%**

**Foros 30%**

**Exámen 20% Total 100%**

**Escala de calificación 08- 10**

**Mínima aprobatoria 8**

## SEMANA 3

### 3.3 METODOS NO PARAMETRICOS

Las técnicas estadísticas de estimación de parámetros, intervalos de confianza y prueba de hipótesis son, en conjunto, denominadas ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA y son aplicadas básicamente a variables continuas. Estas técnicas se basan en especificar una forma de distribución de la variable aleatoria y de los estadísticos derivados de los datos.

En ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA se asume que la población de la cual la muestra es extraída es NORMAL o aproximadamente normal. Esta propiedad es necesaria para que la prueba de hipótesis sea válida.

Sin embargo, en un gran número de casos no se puede determinar la distribución original ni la distribución de los estadísticos por lo que en realidad no tenemos parámetros a estimar. Tenemos solo distribuciones que comparar. Esto se llama Estadística No Paramétrica.

Las principales pruebas no paramétricas son las siguientes:

- Prueba  $\chi^2$  de Pearson
- Prueba binomial
- Prueba de Anderson-Darling
- Prueba de Cochran
- Prueba de Cohen kappa
- Prueba de Fisher
- Prueba de Friedman
- Prueba de Kendall
- Prueba de Kolmogórov-Smirnov
- Prueba de Kruskal-Wallis
- Prueba de Kuiper
- Prueba de Mann-Whitney o prueba de Wilcoxon
- Prueba de McNemar

- Prueba de la mediana
- Prueba de Siegel-Tukey
- Prueba de los signos
- Coeficiente de correlación de Spearman
- Tablas de contingencia
- Prueba de Wald-Wolfowitz
- Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

La mayoría de estos test estadísticos están programados en los paquetes estadísticos más frecuentes, quedando para el investigador, simplemente, la tarea de decidir por cuál de todos ellos guiarse o qué hacer en caso de que dos test nos den resultados opuestos. Hay que decir que, para poder aplicar cada uno existen diversas hipótesis nulas y condiciones que deben cumplir nuestros datos para que los resultados de aplicar el test sean fiables. Esto es, no se puede aplicar todos los test y quedarse con el que mejor convenga para la investigación sin verificar si se cumplen las hipótesis y condiciones necesarias pues, si se violan, invalidan cualquier resultado posterior y son una de las causas más frecuentes de que un estudio sea estadísticamente incorrecto. Esto ocurre sobre todo cuando el investigador desconoce la naturaleza interna de los test y se limita a aplicarlos sistemáticamente.

Es importante mencionar que si la distribución de los datos se ajusta a un tipo de distribución conocida, existen otras [pruebas] que, en la práctica, son más aconsejables pero que así mismo requieren otros supuestos. En este caso, la estadística a emplear es la estadística paramétrica, dentro de la cual muchas veces podemos encontrar equivalencias entre pruebas pero con diferencias en la potencia entre ambas siendo siempre la potencia de las pruebas no paramétricas menor que la potencia de las pruebas paramétricas equivalentes. Aun así, el uso adecuado de los tamaños muestrales disminuye la posibilidad de cometer un [error tipo II], puesto que aumenta al mismo tiempo la eficacia de la prueba . Es decir, a medida que se aumenta el tamaño de la muestra,

disminuye la posibilidad de cometer un error tipo II (un falso negativo: No rechazar la hipótesis nula cuando ésta en realidad es falsa).

La estadística no paramétrica es una rama de la estadística que estudia las pruebas y modelos estadísticos cuya distribución subyacente no se ajusta a los llamados criterios paramétricos. Su distribución no puede ser definida a priori, pues son los datos observados los que la determinan. La utilización de estos métodos se hace recomendable cuando no se puede asumir que los datos se ajusten a una distribución conocida, cuando el nivel de medida empleado no sea, como mínimo, de intervalo.

La prueba de los signos es quizá la prueba no paramétrica mas antigua. En ella está, basadas muchas otras. Se utiliza para contrastar hipótesis sobre el parámetro de centralización y es usado fundamentalmente en el análisis de comparación de datos pareados. Consideremos una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tal que sus observaciones estén o puedan estar clasificadas en dos categorías: 0 y 1, + y -, ... etc.

Podemos establecer hipótesis acerca de la mediana, los centiles, cuartiles, etc. Sabemos que la mediana deja por encima de sí tantos valores como por debajo; Considerando que  $X_i - Mdn > 0$  , darán signos positivos (+) y  $X_i - Mdn < 0$  signos negativos (-) , en la población original tendremos tantos (+) como (-). Se tratara de ver hasta que punto el numero de signos (+) esta dentro de lo que cabe esperar que ocurra por azar si el valor propuesto como mediana es verdadero. Lo mismo se puede decir respecto a los cuartiles, centiles, o deciles.

Teniendo en cuenta que se trabaja con dos clases de valores, los que están por encima y los que están por debajo, es decir, los (+) y los (-) , los estadísticos de contraste seguirán la distribución binomial, si se supone independencia y constancia de probabilidad en el muestreo.

La mejor forma de entender este apartado es mediante un ejemplo práctico; De modo que en la tabla que pondremos a continuación se pueden ver los resultados de un experimento sobre comparación de sabores. Un fabricante de alubias está considerando

una nueva receta para la salsa utilizada en su producto. Eligió una muestra aleatoria de ocho individuos y a cada uno de ellos le pidió que valorara en una escala de 1 a 10 el sabor del producto original y el nuevo producto. Los resultados se muestran en la tabla, donde también aparecen las diferencias en las valoraciones para cada sabor y los signos de estas diferencias. Es decir, tendremos un signo + cuando el producto preferido sea el original, un signo - cuando el preferido sea el nuevo producto y un 0 si los dos productos son valorados por igual. En particular en este experimento, dos individuos han preferido el producto original y cinco el nuevo; Uno los valoro con la misma puntuación.

La hipótesis nula es que ninguno de los dos productos es preferido sobre el otro. Comparamos las valoraciones que indican la preferencia por cada producto, descartando aquellos casos en los que los dos productos fueron valorados con la misma puntuación. Así el tamaño muestral efectivo se reduce a siete, y la única información muestral en que se basara nuestro contraste será la de los dos individuos de los siete que prefirieron el producto original.

→ BIBLIOGRAFIA:

<https://sites.google.com/site/tecnicasdeinvestigaciond38/estadisticas-no-parametricas/3-1-estadistica-no-parametrica>

Katherine (2008) Estadística Inferencial. Texto completo en:  
<http://www.mitecnologico.com/iem/Main/EstadisticaInferencial>

### 3.3.1 APLICACIONES DE LA CHI CUADRADA

→ BIBLIOGRAFIA:

<http://www.fuenterrebollo.com/Aeronautica2016/contingencia.pdf>

### 3.3.2 ANALISIS DE LA VARIANZA

El análisis de la varianza (o Anova: Analysis of variance) es un método para comparar dos o más medias, que es necesario porque cuando se quiere comparar más de dos medias es incorrecto utilizar repetidamente el contraste basado en la *t de Student*. por dos motivos:

En primer lugar, y como se realizarían simultánea e independientemente varios contrastes de hipótesis, la probabilidad de encontrar alguno significativo por azar aumentaría. En cada contraste se rechaza la  $H_0$  si la *t* supera el nivel crítico, para lo que, en la hipótesis nula, hay una probabilidad  $\alpha$ . Si se realizan  $m$  contrastes independientes, la probabilidad de que, en la hipótesis nula, ningún estadístico supere el valor crítico es  $(1 - \alpha)^m$ , por lo tanto, la probabilidad de que alguno lo supere es  $1 - (1 - \alpha)^m$ , que para valores de  $\alpha$  próximos a 0 es aproximadamente igual a  $\alpha \cdot m$ . Una primera solución, denominada *método de Bonferroni*, consiste en bajar el valor de  $\alpha$ , usando en su lugar  $\alpha/m$ , aunque resulta un método muy conservador.

Por otro lado, en cada comparación la hipótesis nula es que las dos muestras provienen de la misma población, por lo tanto, cuando se hayan realizado todas las comparaciones, la hipótesis nula es que todas las muestras provienen de la misma población y, sin embargo, para cada comparación, la estimación de la varianza necesaria para el contraste es distinta, pues se ha hecho en base a muestras distintas.

El método que resuelve ambos problemas es el *anova*, aunque es algo más que esto: es un método que permite comparar varias medias en diversas situaciones; muy ligado, por tanto, al diseño de experimentos y, de alguna manera, es la base del análisis multivariante.

Supónganse  $k$  muestras aleatorias independientes, de tamaño  $n$ , extraídas de una única población normal. A partir de ellas existen dos maneras independientes de estimar la varianza de la población  $s^2$

1) Una llamada *varianza dentro de los grupos* (ya que sólo contribuye a ella la varianza dentro de las muestras), o *varianza de error*, o *cuadrados medios del error*, y habitualmente representada por *MSE* (Mean Square Error) o *MSW* (Mean Square Within) que se calcula como la media de las  $k$  varianzas muestrales (cada varianza muestral es un estimador centrado de  $s^2$  y la media de  $k$  estimadores centrados es también un estimador centrado y más eficiente que todos ellos). *MSE* es un cociente: al numerador se le llama *suma de cuadrados del error* y se representa por *SSE* y al denominador *grados de libertad* por ser los términos independientes de la suma de cuadrados.

2) Otra llamada *varianza entre grupos* (sólo contribuye a ella la varianza entre las distintas muestras), o *varianza de los tratamientos*, o *cuadrados medios de los tratamientos* y representada por *MSA* o *MSB* (Mean Square Between). Se calcula a partir de la varianza de las medias muestrales y es también un cociente; al numerador se le llama *suma de cuadrados de los tratamientos* (se le representa por *SSA*) y al denominador  $(k-1)$  grados de libertad.

*MSA* y *MSE*, estiman la varianza poblacional en la hipótesis de que las  $k$  muestras provengan de la misma población. La distribución muestral del cociente de dos estimaciones independientes de la varianza de una población normal es una *F* con los grados de libertad correspondientes al numerador y denominador respectivamente, por lo tanto se puede contrastar dicha hipótesis usando esa distribución.

Si en base a este contraste se rechaza la hipótesis de que *MSE* y *MSA* estimen la misma varianza, se puede rechazar la hipótesis de que las  $k$  medias provengan de una misma población. Aceptando que las muestras provengan de poblaciones con la misma varianza, este rechazo implica que las medias poblacionales son distintas, de modo que con un único contraste se contrasta la igualdad de  $k$  medias.

Existe una tercera manera de estimar la varianza de la población, aunque no es independiente de las anteriores. Si se consideran las  $kn$  observaciones como una única muestra, su varianza muestral también es un estimador centrado de  $s^2$ :

Se suele representar por  $MST$ , se le denomina *varianza total* o *cuadrados medios totales*, es también un cociente y al numerador se le llama *suma de cuadrados total* y se representa por  $SST$ , y el denominador  $(kn - 1)$  grados de libertad.

Los resultados de un anova se suelen representar en una tabla como la siguiente:

Fuente de variación	G.L.	SS	MS	F
Entre grupos Tratamientos	$k-1$	SSA	$SSA / (k-1)$	$MSA / MSE$
Dentro Error	$(n-1)k$	SSE	$SSE / k(n-1)$	
Total	$kn-1$	SST		

$F$  se usa para realizar el contraste de la hipótesis de medias iguales. La región crítica para dicho contraste es  $F > F$

Es fácil ver en la tabla anterior que

$$GL_{error} + GL_{trata} = (n - 1)k + k - 1 = k + k - 1 = nk - 1 = GL$$

No es tan inmediato, pero las sumas de cuadrados cumplen la misma propiedad, llamada *identidad* o *propiedad aditiva* de la suma de cuadrados:

$$SST = SSA + SSE$$

El análisis de la varianza se puede realizar con tamaños muestrales iguales o distintos, sin embargo es recomendable iguales tamaños por dos motivos:

1) La  $F$  es insensible a pequeñas variaciones en la asunción de igual varianza, si el tamaño es igual.

2) Igual tamaño minimiza la probabilidad de error tipo II.

### Ejemplo I

Se quiere evaluar la eficacia de distintas dosis de un fármaco contra la hipertensión arterial, comparándola con la de una dieta sin sal. Para ello se seleccionan al azar 25 hipertensos y se distribuyen aleatoriamente en 5 grupos. Al primero de ellos no se le suministra ningún tratamiento, al segundo una dieta con un contenido pobre en sal, al tercero una dieta sin sal, al cuarto el fármaco a una dosis determinada y al quinto el mismo fármaco a otra dosis. Las presiones arteriales sistólicas de los 25 sujetos al finalizar los tratamientos son:

Grupo				
1	2	3	4	5
180	172	163	158	147
173	158	170	146	152
175	167	158	160	143
182	160	162	171	155
181	175	170	155	160

La tabla de anova es:

Fuente de variación	GL	SS	MS	F
Tratamiento	4	2010,64	502,66	11,24
Error	20	894,4	44,72	
Total	24	2905,04		

Como  $F = 2,87$  y  $11,24 > 2,87$  rechazamos la hipótesis nula y concluimos que los resultados de los tratamientos son diferentes.

→ BIBLIOGRAFIA:

ANDERSON, D. SWEENEY D. y Williams, T. (1982, 2005).  
Estadística para administración y economía. México: Thomson editores.

### **3.5 CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD**

#### **→ BIBLIOGRAFIA:**

<https://cdigital.uv.mx/bitstream/handle/123456789/47685/CamposRoblesEmmanuel.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

### **3.6 MATEMATICAS FINANCIERAS**

[http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/20172/contaduria/1/apunte/LC\\_1154\\_14116\\_A\\_MatematicasFinancieras.pdf](http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/20172/contaduria/1/apunte/LC_1154_14116_A_MatematicasFinancieras.pdf)

## **UNIDAD IV**

### **INVESTIGACION DE OPERACIONES**

#### **4.1.- ORIGEN Y DESARROLLO.**

La investigación de operaciones se entiende que es la aplicación de un método científico para resolver problemas dentro de una organización que permita a la misma, tomar las decisiones correctas o acertadas para tener las soluciones que más convengan o favorezcan a la organización, además de mejorar la coordinación entre las múltiples áreas de la organización y mejorar el control de sistemas, hoy por hoy es indispensable que una organización cuente con esta área.

Las primeras actividades formales en la historia de la investigación de operaciones se dieron en Inglaterra en la Segunda Guerra Mundial, cuando se encarga a un grupo de científicos ingleses el diseño de herramientas cuantitativas para el apoyo a la toma de decisiones acerca de la mejor utilización de materiales bélicos. Se presume que el nombre de Investigación de Operaciones fue dado aparentemente porque el equipo de científicos estaba llevando a cabo la actividad de Investigar Operaciones (militares).

Una vez terminada la guerra las ideas utilizadas con fines bélicos fueron adaptadas para mejorar la eficiencia y la productividad del sector civil.

#### Historia de la investigación de operaciones

La búsqueda de la mejor solución (máxima, mínima, o también la óptima) para una variedad de problemas ha divertido e intrigado al hombre a través de las épocas. Euclides en su libro III, describió formas de encontrar las líneas rectas de mayor y menor longitud, desde un punto hasta la circunferencia de un círculo; y en el libro IV, el paralelogramo de mayor área para un perímetro dado. Los grandes matemáticos de los siglos XVI a XVIII desarrollaron la teoría y proceso de optimización que resuelven difíciles problemas

geométricos, dinámicos y físicos, tales como las curvas de revolución mínima o la curva de descenso más rápido.

En general, la historia no se escribe con exactitud, pero si se pueden recopilar hechos que describan de alguna manera la evolución conocida de acuerdo con escritos, estudios e investigaciones encontradas. Las técnicas utilizadas en la aplicación de la IO conducen al pasado siglo XX, pero también al pasado remoto de siglos como antecedentes. Para ello es conveniente fijarse en la idea fundamental de la IO que es el método científico cuyo origen exacto se desconoce. En escritos hechos hace milenios como es el Antiguo Testamento se menciona a Jetro, suegro de Moisés, como autor de un tratado de principios de organización y más recientemente, en el antepasado siglo XIX, Charles Babbage es autor del trabajo *On the Economy of Machinery and Manufactures*. Al ingeniero Frederick Winslow Taylor, norteamericano de origen, se le reconoce la paternidad de la Administración Científica debido a sus investigaciones sobre las obligaciones y tareas de los jefes de taller, así como también de la producción diaria individual según la capacidad del obrero para tareas específicas, definiendo así la división del trabajo mediante capacitación, selección y adiestramiento de los trabajadores. Además, Taylor aplicó el análisis científico a los problemas de manufactura, estableciendo normas de trabajo y la especialización. Por su parte Henry L. Gantt, planeó las tareas de las máquinas para evitar demoras de producción. Así es posible fijar fechas de entrega con más seguridad. También contribuyó al enfoque científico incluyendo el aspecto humano como integrante.

Con el inicio del siglo XX, los investigadores también utilizaron procedimientos científicos para analizar problemas localizados fuera de las ciencias puras como son la Física, la Química, la Biología, entre otras más, pero en la década que se inicia en 1910, Taylor se dedicó a buscar la eficiencia para las tareas haciendo valer los estudios de tiempos y movimientos de Frank y Lillian Gilbreth eliminando movimientos innecesarios y desperdicios en cada tarea. En la misma década durante la 1ª. Guerra Mundial, se le confió a Thomas A. Edison el averiguar las maniobras más eficaces de los barcos mercantes para disminuir los embarques perdidos por ataques de los submarinos enemigos. Edison empleó un «tablero táctico» como modelo para simular las operaciones reales.

Un ingeniero danés A. K. Erlang hizo experimentos relacionados con las fluctuaciones de la demanda telefónica en equipo automático quedando estos trabajos como fundamento de muchos modelos matemáticos que se usan actualmente en los estudios de Teoría de Colas o Líneas de Espera. En 1937, a punto de empezar la Segunda Guerra Mundial, se juntó en el Reino Unido a un equipo de matemáticos, ingenieros y científicos en áreas básicas, para estudiar los problemas estratégicos y tácticos asociados con la defensa del país. Se formó un equipo cuyo objetivo era determinar la utilización más efectiva de los limitados recursos militares. En consecuencia, a las actividades de este grupo se le llamó Investigación Operacional, que es terminología común en el medio militar. Primero se le pidió ayuda para los militares en la utilización eficiente del radar para localizar aviones enemigos; después en 1940 se reunió otro grupo, el circo de Blackett encabezado por el distinguido físico inglés P. Blackett para estudiar la actuación del equipo de control de cañones en el campo; había tres fisiólogos, cuatro matemáticos, un físico, un astrofísico, un oficial militar y un agrimensor.

En los Estados Unidos de Norteamérica se motivaron por los éxitos alcanzados por los grupos británicos, en Abril de 1942 se decidió introducir la IO a nivel superior, emprendiendo también estudios tales como: problemas logísticos complejos, el desarrollo de patrones de vuelo para aviones y la planeación de maniobras navales. En la Fuerza Aérea se le dio el nombre de Análisis de Operaciones y en el Ejército y la Marina los de Investigación de Operaciones y Evaluación de Operaciones, respectivamente. Cuando terminó la guerra, la necesidad de reconstruir en la Gran Bretaña, dio lugar al surgimiento de otros problemas de administración en sectores de gobierno e industria los cuales demandaron la actuación de los mismos científicos especializados en la IO.

También en los Estados Unidos de Norteamérica, en la década de 1950 con el desarrollo y comercialización de las computadoras, los investigadores de operaciones y la gente asociada con las operaciones de la última guerra, se percataron que los estudios realizados en la misma eran de gran utilidad, aplicados a los problemas industriales. La computadora y el desarrollo de la IO motivaron a los ejecutivos industriales y a los especialistas de esta disciplina para reunirse y provocar su rápido crecimiento.

La Programación Lineal (PL) tuvo un gran impulso para la investigación industrial dando entrada las empresas a muchos especialistas; las técnicas Pert, control de inventarios, y la simulación, empezaron a emplearse con éxito; en vez de los simples promedios, se incluyeron la probabilidad y la estadística tan útiles en cualquier estudio moderno.

Actualmente el uso de la IO es extenso en áreas de: contabilidad, compras, planeación financiera, mercadotecnia, planeación de producción, transporte y muchas otras más, convirtiéndose en importante instrumento de competencia para los presupuestos y contratos.

La siguiente tabla esboza parte de los estudios y técnicas en que se apoyaron los grupos de IO en el desarrollo de esta disciplina.

Antecedente histórico de Investigación de Operaciones.- Desde el siglo XVI:



<b>Año</b>	<b>Autor</b>	<b>Técnica Desarrollada</b>
1759	Quesnay	Modelos primarios de programación matemática
1873	Jordan	Modelos lineales
1874	Warlas	Modelos primarios de programación matemática
1896	Minkousky	Modelos lineales
1897	Markov	Modelos dinámicos probabilísticos
1903	Farkas	Modelos dinámicos probabilísticos
1905	Erlang	Líneas de espera
1920-1930	Konig - Egervary	Asignación
1937	Morgestern	Lógica estadística
1937	Von Neuman	Teoría de juegos
1939	Kantorovich	Planeación en producción y distribución
1941	Hitchcock	Transporte
1947	Dantzig George	Método Simplex
1958	Bellman Richard	Programación dinámica
1950-1956	Kun-Tucker	P. no lineal, m. húngaro, sistemas desigualdades
1958	Gomory	Programación entera
1956-1962	Ford - Fulkerson	Redes de flujo
1957	Markowitz	Simulación y programación discreta
	Raifa	Análisis de decisiones
1958	Arrow-Karlin	Inventarios
1963	Karmarkar Narend	Algoritmo de punto interior

Se puede observar que la IO fue desarrollada en el siglo XX con el apoyo, siglos atrás, de importantes aportaciones de científicos que con su talento y dedicación, dejaron sólidos cimientos para los estudios de solución en los sistemas actuales.

La IO es el procedimiento científico que está auxiliado por modelos y técnicas matemáticas, servible para diseñar y operar a los problemas complejos de la dirección y administración de grandes sistemas que forman una organización compleja en las cuales las decisiones son muy importantes y difíciles de elegir, ya que la eficacia de una decisión sobre guardará la supervivencia y desarrollo de ésta, al contrario estaría en camino hacia el fracaso.

Desde la primera guerra mundial se dio a Édison la tarea de averiguar maniobras de los barcos mercantes que fueran más eficaces para disminuir las pérdidas de embarques causadas por los submarinos enemigos. En vez de arriesgar los barcos en condiciones bélicas reales, se empleó un tablero táctico para encontrar la solución, a fines de la década de 1910, Erlang, un ingeniero danés llevo a cabo experimentos relacionados con las fluctuaciones de la demanda de instalaciones telefónicas en relación con el equipo automático, sus trabajos constituyen la base de muchos de los modelos matemáticos que actualmente se usan en líneas de espera, A través del tiempo el hombre siempre ha buscado la mejor solución a la gran variedad de problemas las técnicas de investigación de operaciones.

La investigación de operaciones representa un apoyo para la toma de decisiones, es un apoyo para la asignación óptima de los recursos para una actividad, evalúa el rendimiento de un sistema con objeto de mejorarlo, obtiene información cuantitativa y ayuda a mejorar procesos tradicionales así como conocer algunas de las limitaciones en los modelos.

#### Bibliografía

ACK68.- Ackoff Rusell L. & Sasieni Maurice W.

Fundamentals of Operations Research. Wiley. New York. 1968.

DAN63.- Dantzig George B.

Linear Programming and Extensions. Princenton University Press. Princenton N.J. 1963.

GAS74.- Gass Saul I.

Linear Programming. Methods and Applications. McGraw Hill, New York.1974

HIL95.- Hillier-Lieberman.

## **4.2.- ENFOQUE DE MODELADO EN LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.**

### LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Y EL USO DE MODELOS

Un poco de Historia

Se inicia desde la revolución industrial, en los libros se dice que fue a partir de la segunda Guerra Mundial. La investigación de operaciones se aplica a casi todos los problemas. En 1947, en E.U., George Dantzig encuentra el método SIMPLEX para el problema de programación lineal. En la investigación de operaciones, las computadoras son la herramienta fundamental en la investigación de operaciones.

Definición

Investigación de operaciones, es la aplicación del método científico por un grupo multidisciplinario de personas a un problema, principalmente relacionado con la distribución eficaz de recursos limitados (dinero, materia prima, mano de obra, energía ), que apoyados con el enfoque de sistemas (este enfoque, es aquel en el que un grupo de personas con distintas áreas de conocimiento, discuten sobre la manera de resolver un problema en grupo.). Puede considerarse tanto un arte como una ciencia. Como arte refleja los conceptos eficiente y limitado de un modelo matemático definido para una situación dada. Como ciencia comprende la deducción de métodos de cálculo para resolver los modelos.

Panorama del enfoque de modelado en investigación de operaciones

Una manera de resumir las etapas usuales (no secuenciales) de un estudio de IO es la siguiente:

1. Definición del problema de interés y recolección de los datos relevantes
2. Formulación de un modelo que represente el problema
3. Solución del modelo
- 4 . Prueba del modelo
5. Preparación para la aplicación del modelo
6. Puesta en marcha

#### Definición del problema y recolección de datos

La primera actividad que se debe realizar es el estudio del sistema relevante, esto incluye determinar los objetivos, las restricciones sobre lo que se puede hacer, los diferentes cursos de acción posibles las interrelaciones del área bajo estudio con otras áreas de la organización, los límites de tiempo para tomar una decisión . Este proceso de definir el problema es muy importante ya que afectará en forma significativa las conclusiones en estudio, lo cual hace imposible extraer una respuesta correcta de un problema equivocado. Lo primero que hay que reconocer es que un equipo de IO, por lo general trabaja en un nivel de asesoría. A los miembros del equipo no se les presentan un problema y se les dice que lo resuelvan como puedan, sino que asesoran a la gerencia (casi siempre un tomador de decisiones). El equipo realiza un análisis técnico y después presentan un informe a los administradores. Con frecuencia, el informe a la gerencia identifica cierto número de opciones atractivas, en particular bajo diferentes suposiciones. El gerente evalúa el estudio y sus recomendaciones. Y toma una decisión final basándose en su mejor juicio. Entonces, es vital que el equipo de IO pueda observar desde el mismo nivel que la gerencia.

Es común que el equipo de IO pase mucho tiempo recolectando los datos relevantes sobre el problema.

Ejemplo: Un estudio de IO hecho para Citgo Petroleum Corporation optimizó tanto las operaciones de refinación como el abastecimiento, la distribución y la comercialización de sus productos, logrando un mejoramiento en las utilidades de alrededor de \$70 millones de dólares al año. La recolección de datos también jugó un papel muy importante en este estudio.

#### Formulación del modelo

Una vez definido el problema la siguiente etapa consiste en reformularlo para su análisis, mediante la construcción de un modelo que represente la esencia del problema. Los modelos son representaciones idealizadas de la realidad. Los modelos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema, una ventaja obvia es que el modelo describe un problema en forma mucho más concisa. Al desarrollar el modelo, se recomienda empezar con una versión muy sencilla y moverse, en forma evolutiva, hacia modelos más elaborados que reflejen mejor la complejidad del problema real. Los modelos siempre deben ser menos complejos que el sistema real, de otra manera, no tiene sentido trabajar con modelos si se puede trabajar con el sistema real en sí.

Ejemplo: La oficina responsable del control del agua y los servicios públicos del gobierno de Holanda, el Rijkswaterstatt, contrató un importante estudio de IO para guiarlo en el desarrollo de una nueva política de administración del agua. La nueva política ahorró cientos de millones de dólares en gastos de inversión y redujo el daño agrícola en alrededor de \$15 millones de dólares anuales, al mismo tiempo que disminuyó la contaminación térmica y debida a las algas. En lugar de formular modelo, éste estudio de IO desarrolló un sistema integrado y comprensible de 50 modelos, algunos de los modelos se desarrollaron en versiones sencillas y complejas. La versión sencilla se usó para adquirir una visión básica, en cambio la versión compleja se usó cuando se deseaba mayor exactitud o más detalles en los resultados.

#### Obtención de una solución a partir del modelo

Una vez formulado el modelo para el problema bajo estudio, la siguiente etapa de un estudio consiste en desarrollar un procedimiento para derivar en una solución al problema a partir de este modelo, según el tipo de modelo este puede hacerse en

computadora. Puede pensarse que esta debe ser la parte principal de estudio, pero por lo general no lo es, encontrar la solución es la parte divertida del estudio, mientras que el verdadero trabajo se encuentra en las etapas anteriores y posteriores del estudio. Un tema común es la búsqueda de una solución óptima, es decir, la mejor, es necesario reconocer que estas soluciones son óptimas sólo respecto al modelo que se está utilizando. Como el modelo necesariamente es una idealización y no una representación del problema real, no puede existir una garantía de que la solución óptima del modelo resulte ser la mejor solución posible que pueda llevarse a la práctica para el problema real. Esto, por supuesto, es de esperarse si se toma en cuenta los muchos imponderables e incertidumbre asociados a casi todos los problemas reales, pero si el modelo está bien formulado la solución debe tener una buena aproximación de curso de acción ideal para el problema real.

El eminente científico de la administración y premio Nobel de Economía, Herbert Simon, introdujo el concepto de que en la práctica es mucho más frecuente satisfacer que optimizar. Al inventar el término satisfacer como una combinación de satisfacer y optimizar. La distinción entre optimizar y satisfacer refleja la diferencia entre la teoría y la realidad.

Por lo tanto, la meta de un estudio de IO debe ser llevar a cabo el estudio de una manera óptima, independientemente de si implica o no encontrar una solución óptima para el modelo. Al reconocer este concepto, en ocasiones se utilizan solo procedimientos de diseño intuitivo para encontrar una buena solución subóptima.

Una solución óptima para el modelo original puede ser mucho menos que ideal para el problema real, de manera que es necesario hacer un análisis adicional. El análisis posóptimo, constituye una parte muy importante, éste determina qué parámetros del modelo son los más críticos, los parámetros críticos, del modelo son aquellos cuyos valores no se pueden cambiar sin que la solución óptima cambie.

Ejemplo: Considere de nuevo el estudio de IO para el Rijkswaterstatt sobre la política nacional de administración de agua en Holanda. Este estudio no concluyó con la recomendación de una solución. Más bien, se identificaron, analizaron y compararon varias

alternativas atractivas. El análisis postóptimo jugó un papel importante en este estudio. Por ejemplo, ciertos parámetros de los modelos representaron estándares ecológicos. El análisis postóptimo incluyó la evaluación del impacto en los problemas de agua si los valores de los parámetros se cambiaran de los estándares ecológicos a otros valores razonables. Se usó también para evaluar el impacto de cambio de las suposiciones de los modelos, por ejemplo, la suposición sobre el efecto de tratados internacionales futuros sobre la contaminación que pudiera llegar, etc.

### Prueba del modelo

Sin duda que la primera versión de un modelo grande tenga muchas fallas, por lo tanto antes de usar el modelo debe probarse para identificar y corregir todas las fallas que se pueda, este proceso de prueba y mejoramiento se conoce como validación del modelo. Un modelo es válido si, independientemente de sus inexactitudes, puede dar una predicción confiable del funcionamiento del sistema. Un método común para probar la validez de un modelo es comparar su funcionamiento con algunos datos pasados disponibles del sistema actual (se le llama también prueba retrospectiva). Debe notarse que tal método de validación no es apropiado para sistemas que no existen, ya que no habrá datos disponibles para poder comparar. Otro método podría ser incluir a una persona que no haya participado en la formulación del modelo, para poder encontrar errores que el equipo de IO no encontró.

Ejemplo: Considerando nuevamente el estudio de IO para el Rijkswaterstatt sobre la política de administración del agua. El proceso de prueba del modelo en este caso constó de tres grandes partes. Primero, el equipo de IO verificó el comportamiento general de los modelos viendo si los resultados de cada uno de ellos cambiaban en forma razonable al hacer cambios en los valores de los parámetros. Segundo, se hizo una prueba retrospectiva. Tercero, personas totalmente ajenas al proyecto, llevaron a cabo una revisión técnica de los modelos, la metodología y los resultados. Este proceso llevó al reconocimiento de varios aspectos importantes y a mejoras en los modelos.

### Preparación para la aplicación del modelo

El siguiente paso es instalar un sistema bien documentado para aplicar el modelo. Este sistema incluirá el modelo y el procedimiento de solución (además del análisis postóptimo) y los procedimientos operativos para su implantación (este sistema casi siempre está diseñado para computadora).

Parte de este esfuerzo incluye el desarrollo de un proceso de mantenimiento durante su uso futuro, por lo tanto si las condiciones cambian con el tiempo, este proceso debe modificar al sistema como al modelo.

### Implantación del modelo

Una vez desarrollado el sistema para aplicar el modelo, la última etapa consiste en la implantación de los resultados probados del modelo. Esto básicamente implicaría la traducción de estos resultados en instrucciones de operación detallada, emitidas en una forma comprensible a los individuos que administrará y operarán al sistema. A la culminación del estudio, es apropiado que el equipo de IO documente su metodología utilizada con suficiente claridad para que el trabajo sea reproducible.

Ejemplo: Volviendo al caso de la política nacional de administración del agua del Rijkswaterstatt en Holanda. La administración deseaba documentación más extensa que lo normal, tanto para apoyar la nueva política como para utilizarla en la capacitación de nuevos analistas o al realizar nuevos estudios.

### Pasos del Método científico en IO

Delimitación del problema

Modelación del problema

Resolución del modelo

Verificación con la realidad

Implantación

Conclusiones

## TIPOS DE MODELOS Y SU SIGNIFICADO

Un modelo es una representación ideal de un sistema y la forma en que este opera. El objetivo es analizar el comportamiento del sistema o bien predecir su comportamiento futuro. Obviamente los modelos no son tan complejos como el sistema mismo, de tal manera que se hacen las suposiciones y restricciones necesarias para representar las porciones más relevantes del mismo. Claramente no habría ventaja alguna de utilizar modelos si estos no simplificaran la situación real. En muchos casos podemos utilizar modelos matemáticos que, mediante letras, números y operaciones, representan variables, magnitudes y sus relaciones.

### Modelos Matemáticos

Un modelo es producto de una abstracción de un sistema real: eliminando las complejidades y haciendo suposiciones pertinentes, se aplica una técnica matemática y se obtiene una representación simbólica del mismo.



Un modelo matemático consta al menos de tres conjuntos básicos de elementos:

### VARIABLES DE DECISIÓN Y PARÁMETROS

Las variables de decisión son incógnitas que deben ser determinadas a partir de la solución del modelo. Los parámetros representan los valores conocidos del sistema o bien que se pueden controlar.

### RESTRICCIONES

Las restricciones son relaciones entre las variables de decisión y magnitudes que dan sentido a la solución del problema y las acotan a valores factibles. Por ejemplo si una de

las variables de decisión representa el número de empleados de un taller, es evidente que el valor de esa variable no puede ser negativa.

### Función Objetivo

La función objetivo es una relación matemática entre las variables de decisión, parámetros y una magnitud que representa el objetivo o producto del sistema. Por ejemplo si el objetivo del sistema es minimizar los costos de operación, la función objetivo debe expresar la relación entre el costo y las variables de decisión. La solución OPTIMA se obtiene cuando el valor del costo sea mínimo para un conjunto de valores factibles de las variables. Es decir hay que determinar las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que optimicen el valor de  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeto a restricciones de la forma  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ . Donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de decisión  $Z$  es la función objetivo,  $f$  es una función matemática.

### Ejemplo A1:

Sean  $x_1$  y  $x_2$  la cantidad a producirse de dos productos 1 y 2, los parámetros son los costos de producción de ambos productos, \$3 para el producto 1 y \$5 para el producto 2. Si el tiempo total de producción esta restringido a 500 horas y el tiempo de producción es de 8 horas por unidad para el producto 1 y de 7 horas por unidad para el producto 2, entonces podemos representar el modelo como:

$$C = 3x_1 + 5x_2 \text{ (Costo total de Producción)}$$

Sujeto a:

$$8x_1 + 7x_2 \leq 500$$

$$x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0.$$

### Ejercicios A1:

Se pide construir un cilindro del máximo volumen posible utilizando a lo más 3m<sup>2</sup> de material calcule el radio ( r ) y la altura (h) del mismo.

En una empresa se fabrican dos productos, cada producto debe pasar por una máquina de ensamblaje A y otra de terminado B, antes de salir a la venta, el producto 1 se vende a

\$60 y el otro a \$50 por unidad. La siguiente tabla muestra el tiempo requerido por cada producto:

Producto	Maquina A	Maquina B
1	2 H	3 H
2	4 H	2 H
Total disponible	48 H	36 H

#### Clasificación de Modelos

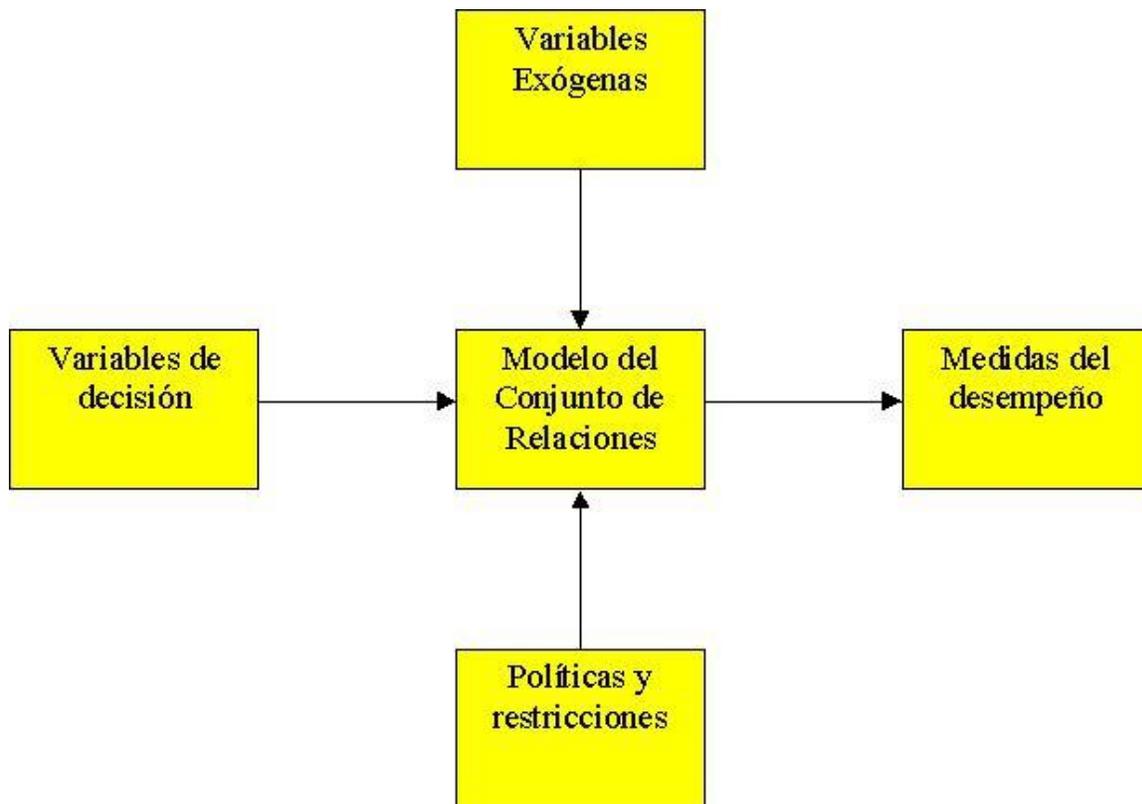
Muchos problemas de decisión implican un gran número de factores o variables importantes o pueden tener muchas opciones a considerar por lo que se hace necesario la utilización de computadoras para su solución. Por ejemplo una empresa puede contar con varias fábricas donde produce bienes para enviar a cientos de clientes. Decidir la programación de las fábricas y determinar cuales de ellas deben atender a cuales clientes, para minimizar costos, implica cientos de variables y restricciones que pueden tener millones de posibles soluciones. Los modelos de programación lineal y programación entera son las técnicas más utilizadas para resolver problemas grandes y complejos de negocios de este tipo. En ellos se aplican técnicas matemáticas para hallar el valor máximo (o el mínimo) de un objetivo sujeto a un conjunto de restricciones.

La simulación es una técnica para crear modelos de sistemas grandes y complejos que incluyen incertidumbre. Se diseña un modelo para repetir el comportamiento del sistema. Este tipo de modelo se basa en la división del sistema en módulos básicos o elementales que se enlazan entre sí mediante relaciones lógicas bien definidas. El desarrollo de un modelo de simulación es muy costoso en tiempo y recursos.

Problemas dinámicos los problemas dinámicos de decisión implican un tipo particular de complejidad cuando hay una secuencia de decisiones interrelacionadas a través de varios períodos. Por ejemplo modelos de inventario, para determinar cuando pedir mercadería y

cuanto debe mantenerse en existencia; los modelos PERT o de ruta Critica para la programación de proyectos y los modelos de colas para problemas que involucran congestión.

En los problemas complejos pueden aparecer variables exógenas o variables externas, importantes para el problema de decisión, pero que están condicionadas por factores que están fuera del control de la persona que decide, tales como condiciones económicas, acciones de los competidores, precios de las materias primas y otros factores similares. Las restricciones pueden considerar ciertas políticas definidas por la empresa tales como que los materiales tienen que adquirirse a determinados proveedores o que deben mantenerse ciertos niveles de calidad.



La investigación de operaciones, tiene métodos de optimización aplicables a los siguientes tipos de problemas:

**METODOS DETERMINISTICOS:** Ej, Programación lineal, programación entera, probabilidad de transporte, programación no lineal, teoría de localización o redes, probabilidad de asignación, programación por metas, teoría de inventarios, etc.

**METODOS PROBABILISTICOS:** Ej. Cadenas de Markov, teoría de juegos, líneas de espera, teoría de inventarios, etc.

**METODOS HIBRIDOS:** Tienen que ver con los métodos determinísticos y probabilísticos como la teoría de inventarios.

**METODOS HEURISTICOS:** Son las soluciones basadas en la experiencia, como la programación heurística.

Un Analista de investigación de Operaciones debe elegir el plan de acción más efectivo para lograr las metas de la organización, debe seleccionar un conjunto de medidas de desempeño, utilizar una unidad monetaria y tomar decisiones, debe seguir un proceso general de solución, en cualquier situación, durante la toma de decisiones. Deben establecerse los criterios de tomas de decisiones (Costos, Cantidades, Máximos, Mínimos etc), seleccionar las alternativas, determinar un modelo y evaluarlo, integrar la información cuantitativa obtenida para luego decidir. Muchas veces hay que incorporar factores cualitativos tales como el ánimo y el liderazgo en la organización, problemas de empleo, contaminación u otras de responsabilidad social.

Nota: el proceso de abstracción (idealización restricción y simplificación) siempre introduce algún grado de error en las soluciones obtenidas, por lo que el ejecutivo no debe volverse incondicional de un modelo cuantitativo y adoptar automáticamente sus conclusiones como la decisión correcta. La cuantificación es una ayuda para el juicio empresarial y no un sustituto de este.

Los modelos planteados se conocen como modelos determinísticos. En contraste, en algunos casos, quizá no se conozcan con certeza los datos, más bien se determinan a través de distribuciones de probabilidad, se da cabida a la naturaleza probabilística de los fenómenos naturales. Esto da origen a los así llamados modelos probabilísticos o estocásticos.

Las dificultades evidentes en los cálculos de los modelos matemáticos han obligado a los analistas a buscar otros métodos de cálculo que aunque no garantizan la optimalidad de la solución final, buscan una buena solución al problema. Tales métodos se denominan heurísticos. Suelen emplearse con dos fines: En el contexto de un algoritmo de optimización exacto, con el fin de aumentar la velocidad del proceso. En segundo lugar para obtener una solución al problema aunque no óptima, la que puede ser muy difícil encontrar.

## MODELOS DE OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

En un problema de optimización se busca maximizar o minimizar una cantidad específica llamada objetivo, la cual depende de un número finito de variables, en un modelo de optimización restringida, éstas se encuentran relacionadas a través de una o más restricciones. El planteamiento de este modelo se conoce como programa matemático. Los programas matemáticos tienen la forma:

$$\text{Optimizar } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

Con las condiciones:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

$$\dots =$$

$$\dots \geq$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots b_m$$

Cada una de las m relaciones emplea uno de los signos  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$  respecto de las constantes  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Los programas matemáticos sin restricciones se producen cuando todas las  $g_i$  y las  $b_i$  son 0  $i = 1, \dots, m$ .

Programación Lineal

Un programa matemático (l) es lineal si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y cada  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $j = 1, \dots, m$  son lineales en cada uno de sus argumentos, es decir

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

y

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

donde las  $c_j$  y las  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) son constantes conocidas o parámetros del sistema. Cualquier otro programa que no cumpla la linealidad de  $f$  o de  $g_i$  es no lineal.

El Ejemplo A.1 es un problema de programación lineal en dos variables.

### Programación Entera

Un programa lineal que tiene la restricción adicional de que las variables de decisión son números enteros se conoce como programa entero. No es necesario que las  $c_j$  y las  $a_{ij}$  y las  $b_j$  sean enteros, pero, normalmente esto es así.

### Ejemplo A2

Un fabricante de dos productos A y B dispone de 6 unidades de material y 28 Horas para su ensamblaje, el modelo A requiere 2 unidades de material y 7 horas de ensamblaje, el modelo B requiere una unidad de material y 8 horas de ensamblaje, los precios de los productos son \$120 y \$80 respectivamente. ¿Cuántos productos de cada modelo debe fabricar para maximizar su ingreso?

Sea  $x_1$  y  $x_2$  la cantidad de productos a producir de A y B

El objetivo se Expresa Como:

$$\text{Maximizar } z = 120x_1 + 80x_2$$

El fabricante está sujeto a dos restricciones:

$$\text{De Material : } 2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$\text{De Horas : } 7x_1 + 8x_2 \leq 28$$

De no negatividad  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$

Además no se venden productos no terminados por lo tanto las variables  $x_1$  y  $x_2$  deben ser enteras.

Programación no lineal

En este caso se destaca el estudio de optimización en una variable sin restricciones de la forma:

Optimizar  $z = f(x)$

donde  $f$  es función no lineal de  $x$  y la optimización se realiza en  $(-\infty, \infty)$ . Si la búsqueda se circunscribe a un sub intervalo finito  $[a, b]$  el problema es de optimización no lineal restringida y se transforma a

Optimizar  $z = f(x)$

con la condición  $a \leq x \leq b$ .

Optimización no lineal multivariable

Es el caso análogo al anterior, pero en el caso en que la función  $f$  es de más de una variable, es decir:

Optimizar  $z = f(X)$  donde  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

Si existen las restricciones

$G_i(X) = 0$

Es un problema no lineal multivariable restringido.

Ejemplo A3

Una Compañía desea construir una planta que recibirá suministros desde tres ciudades A, B, C, tomando como origen la ciudad A, B tiene coordenadas (300 Km. al Este, 400 Km. al Norte), y C tiene coordenadas (700 Km. al Este, 300 Km. al Norte) respecto de A. La

posición de la planta debe estar en un punto tal que la distancia a los puntos A, B y C sea la mínima.

Sean  $x_1$  y  $x_2$  las coordenadas desconocidas de la planta respecto de A.

Utilizando la fórmula de la distancia, debe minimizarse la suma de las distancias:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} + \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}$$

No hay restricciones en cuanto a las coordenadas de la planta ni condiciones de no negatividad, puesto que un valor negativo de  $x_1$  significa que la planta se localiza al Oeste del punto A. La ecuación es un programa matemático no lineal sin restricciones.

### Programación Cuadrática

Es un caso particular de programación matemática no lineal. Un programa matemático en el cual cada restricción  $g_i$  es lineal pero el objetivo es cuadrático se conoce como programa cuadrático, es decir

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1, n}^n \sum_{j=1, n}^n c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1, n}^n d_i x_i$$

### Ejemplo A4

$$\text{Minimizar } z = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{Con las condiciones } x_1 - x_2 = 3$$

$$x_2 \geq 3$$

Donde ambas restricciones son lineales, con  $n = 2$  (dos variables)  $c_{11} = 1$ ;  $c_{12} = c_{21} = 0$ ;  $c_{22} = 1$  y  $d_1 = d_2 = 0$ .

### Programación Dinámica

El programa matemático :

$$\square \text{ Optimizar } z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

- Con la condición  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b$
- Con todas las variables enteras y no negativas.

En que las funciones  $f_i(x_i)$  son funciones no lineales conocidas de una sola variable,  $b$  es un número entero conocido. Corresponde al modelo importante de decisión en etapas múltiples en que el número de etapas es  $n$ . La etapa 1 comprende la especificación de la variable  $x_1$  con contribución  $f_1(x_1)$  al rendimiento total; etc.

La programación dinámica es una forma de enfoque de los procesos de decisión de optimización de  $n$  etapas.

#### Ejemplo A5

Una persona dispone de \$4000 para invertir y se le presentan tres opciones de inversión. Cada opción requiere de depósitos en cantidades de \$1000, puede invertir lo que desee en las tres opciones.

Las ganancias esperadas son las siguientes

	Inversión				
	0	1000	2000	3000	4000
Ganancias	0	1000	2000	3000	4000
Opción 1	0	2000	5000	6000	7000
Opción 2	0	1000	3000	6000	7000
Opción 3	0	1000	4000	5000	8000

¿Cuánto dinero deberá invertirse en cada opción para maximizar las ganancias?

Sea  $z$  la ganancia total, que es la suma de las ganancias de cada opción, las inversiones tienen la restricción de ser múltiplos de \$1000, la tabla muestra las  $f_i(x) =$  Etapa  $i$ , ( $i = 1,2,3$ ),  $x$  es la cantidad de dinero invertida en cada opción.

El programa matemático es el siguiente:

Maximizar  $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$

La persona sólo posee \$4000 para invertir:

Las condiciones son :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4000$$

Con todas variables enteras y no negativas.

Programación Dinámica estocástica

Un proceso de decisión de  $n$  etapas es estocástico si el rendimiento asociado con al menos una de las variables decisión es aleatoria. Esta aleatoriedad puede presentarse o bien asociada a la variable de decisión o a la función de rendimiento.



BIBLIOGRAFIA:

1. CAMACHO, J. (2000) *Estadística con SPSS versión 9 para Windows*. Madrid: Ra-Ma.
2. DIAZ de RADA, V. (1999) *Técnicas de análisis de datos para investigadores sociales: aplicaciones prácticas con SSPS para Windows*. Madrid: Ra-Ma

### **4.3.- PROGRAMACIÓN LINEAL.**

Introducción

La programación lineal es un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas que tiene por objeto ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables.

El nombre de programación lineal no procede de la creación de programas de ordenador, sino de un término militar, programar, que significa —realizar planes o propuestas de tiempo para el entrenamiento, la logística o el despliegue de las unidades de combate.

Aunque parece ser que la programación lineal fue utilizada por G. Monge en 1776, se considera a L. V. Kantoróvich uno de sus creadores. La presentó en su libro *Métodos matemáticos para la organización y la producción* (1939) y la desarrolló en su trabajo *Sobre la transferencia de masas* (1942). Kantoróvich recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos.

La investigación de operaciones en general y la programación lineal en particular recibieron un gran impulso gracias a los ordenadores. Uno de los momentos más importantes fue la aparición del método del simplex.

### Objetivos

Conocer la programación lineal y sus aplicaciones a la vida cotidiana.

Plantear y resolver situaciones con programación lineal.

Pasos para la construcción de un modelo.

### Tipo de Soluciones

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser:

**Factibles:** Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones. Estas a su vez pueden ser: con solución única, con solución múltiple (si existe más de una solución) y con solución no acotada (cuando no existe límite para la función objetivo).

**No factibles:** Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, cuando las restricciones son inconsistentes.

### Métodos de solución

Existen tres métodos de solución de problemas de programación lineal:

Método gráfico: Las rectas de nivel dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Método analítico: El siguiente resultado, denominado teorema fundamental de la programación lineal, nos permite conocer otro método de solucionar un programa con dos variables: —en un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, esta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región. Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan. En el caso de que la región factible no es acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace este se encuentra en uno de los vértices de la región.

Esquema práctico: Los problemas de programación lineal puede presentarse en la forma estándar, dando la función, objetivos y las restricciones, o bien plantearlos mediante un enunciado.

Estructura básica:

Ejemplos de programación lineal tomados de:

Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas.

El fabricante dispone para confección de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de poliéster. Para cada chaqueta se necesita 1.5 m de algodón y 1 m de poliéster.

El precio del pantalón se fija en \$ 50 y de la chaqueta en \$40.

¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que estos consigan una venta máxima?

I. Elección de las incógnitas.

X= número de pantalones

Y= número de chaquetas

## 2. Función objetivo

$$F(x,y)=50x + 40y$$

## 3. Restricciones

	Pantalones	Chaquetas	Disponibles
Algodón	1	1.5	750
Poliéster	2	1	1000

$$X + 1.5y < 750 \quad 2x + 3y < 1500$$

$$2x + y < 1000$$

Como el número de pantalones y chaquetas son números naturales, tendremos dos restricciones más:

$$X > 0$$

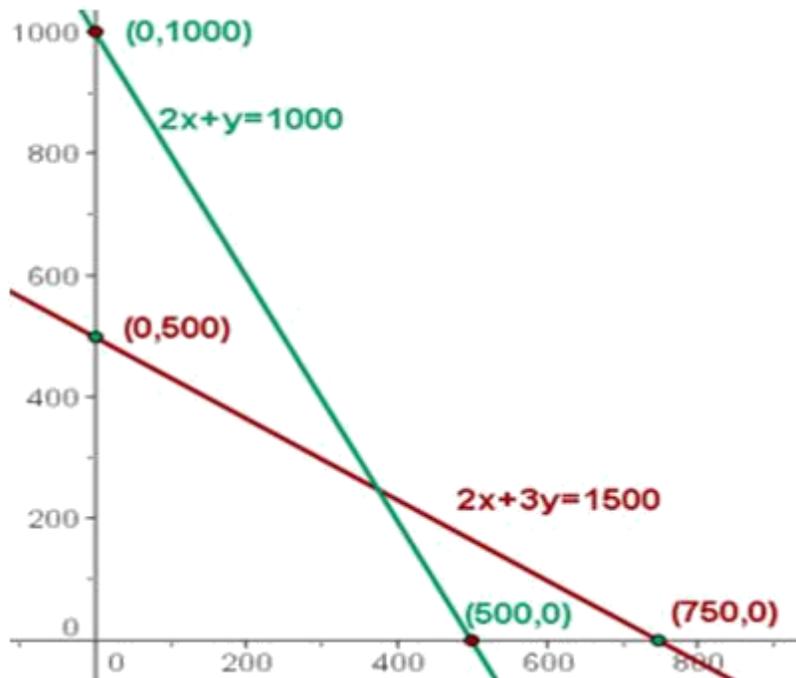
$$Y > 0$$

## 4. Halla el conjunto de soluciones factibles

Tenemos que representar gráficamente las restricciones.

Al ser  $x > 0$  e  $y > 0$ , trabajaremos en el primer cuadrante.

Representamos las rectas, a partir de sus puntos de corte con los ejes.

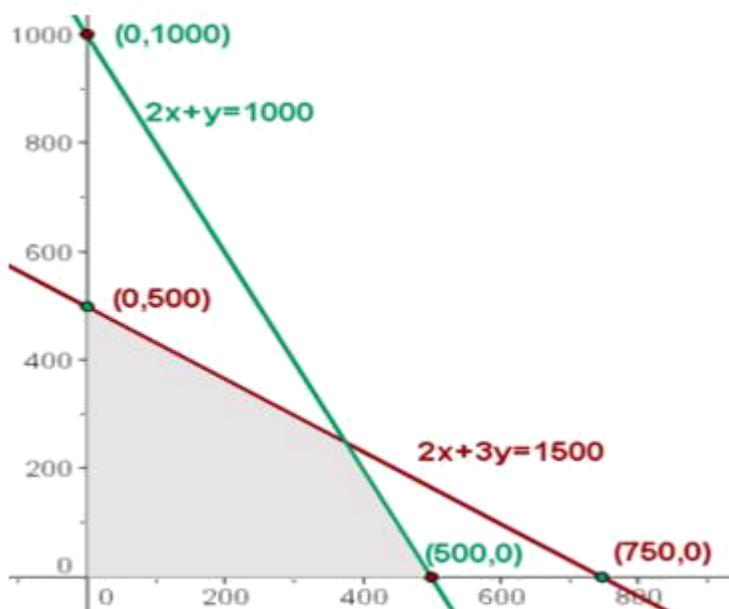


Programación lineal

Resolvemos gráficamente la inecuación:  $2x + 3y < 1500$ , para ello tomamos un punto del plano, por ejemplo el  $(0,0)$ .

Como  $0 < 1500$  entonces el punto  $(0,0)$  se encuentra en el semiplano donde se cumple la desigualdad.

De modo análogo resolver  $2x + y < 1000$ .



Programación lineal

La zona de intersección de las soluciones de las inecuaciones sería la solución al sistema de inecuaciones, que constituye el conjunto de las soluciones factibles.

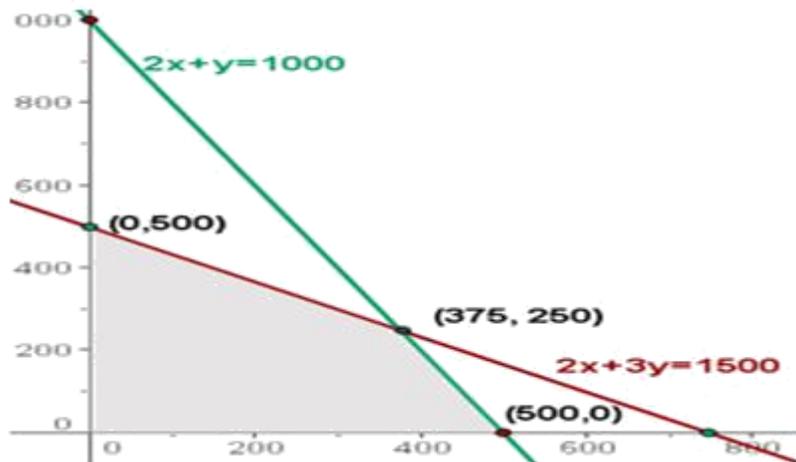
5. Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de las soluciones factibles.

La solución óptima, si es única, se encuentra en un vértice del recinto. Estos son las soluciones a los sistemas:

$$2x + 3y = 1500; x = 0 \quad (0, 500)$$

$$2x + y = 1000; y = 0 \quad (500, 0)$$

$$2x + 3y = 1500; 2x + y = 1000 \quad (375, 250)$$



Programación lineal

6. Calcular el valor de la función objetivo

En la función objetivo sustituimos cada uno de los vértices.

$$F(x,y) = 50x + 40y$$

$$F(0,500) = 50 \cdot 0 + 40 \cdot 500 = \$20000$$

$$F(500,0) = 50 \cdot 500 + 40 \cdot 0 = \$ 25000$$

$$F(375,250) = 50 \cdot 375 + 40 \cdot 250 = \$28750$$

La solución óptima es fabricar 375 pantalones y 250 chaquetas para obtener un beneficio de \$ 28750.



**BIBLIOGRAFÍA:**

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/lineal/pl/ejemplos-de-programacion-lineal.html>

#### **4.4.- ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS.**

La administración de proyectos es una metodología usada a nivel mundial, por empresas e instituciones para alcanzar objetivos en un tiempo determinado. También significa llevar una gestión equilibrando, separando las urgencias de las tareas que realmente son importantes para el cliente. El volumen de trabajo, las variables y los requisitos cada vez más complejos, han dado lugar a que cada vez más empresas e instituciones administren su trabajo por proyectos. De acuerdo al PMI (Project Management Institute) en todos los proyectos existen 5 fases, 10 áreas de conocimiento y 47 procesos.

##### Antecedentes

La administración de proyectos, en su forma moderna, comenzó a afianzarse hace solo apenas unas décadas. A partir de principios de los años sesenta, las empresas y otras organizaciones comenzaron a observar las ventajas de organizar el trabajo en forma de proyectos.

##### Fases, Áreas de conocimiento y Procesos

Dependiendo del tipo de proyecto, es posible utilizar menos procesos o áreas de conocimiento, sin embargo, deben de mantenerse siempre las cinco fases.

Las cinco fases consideradas para los proyectos son:

Inicio.

Planificación.

Ejecución.

Control.

Conclusión.

Las 10 áreas de conocimiento son:

Integración.

Alcance.

Tiempo.

Costo.

Calidad.

Recursos Humanos

Comunicaciones.

Riesgos.

Adquisiciones

Interesados.

Los 47 procesos están distribuidos en las fases del proyecto de la siguiente forma:

Fase de Inicio: dos procesos

Fase de Planificación: 24 procesos.

Fase de Ejecución: ocho procesos.

Fase de Monitoreo y Control: 11 procesos.

Fase de Conclusión: dos procesos.

Conceptos básicos

Administración es el proceso de alcanzar objetivos a través de las personas.

Proyecto es el conjunto de actividades a realizar para alcanzar un objetivo.

Estrategia es la ruta o camino que se sigue para alcanzar un objetivo.

Objetivo es aquello que se desea conseguir mediante un conjunto de actividades en el largo plazo.

Meta es lo que se desea lograr en términos cuantitativos en el corto o mediano plazo.

### Objetivos claros

La definición clara de lo que se pretende lograr es, por supuesto, la primera tarea. Tanto para la institución dueña del proyecto, como para la empresa o persona que lo va a desarrollar. Aquel que no tiene claros sus objetivos muy pronto llegará a ninguna parte.

Para que los objetivos sean claros, se debe trabajar con expertos en el proyecto que se realizará, de otra forma será complicado definir tanto actividades eficientemente, así como calcular sus tiempos.

### Selección del líder del proyecto

Responsable de diseñar las estrategias para poder lograr las metas que se trazaron previamente. Se recomienda que en la fase de Inicio sea asignado el líder de proyecto y no se cambie durante todo el ciclo de vida del mismo.

### Definición de los recursos para el proyecto

Una vez que se tengan los objetivos a alcanzar y el líder del proyecto, se deben de definir los recursos humanos, económicos y materiales necesarios para alcanzar los fines establecidos. Esta planeación debe ser flexible, porque siempre se encontrarán imponderables que resolver.

Un elemento crucial dentro del proyecto es el cronograma de trabajo, el plan de comunicaciones, el plan de riesgos, el plan de adquisiciones (que son todos aquellos proveedores de servicios o de recursos humanos o materiales) y los planes de riesgo del proyecto.

### Acciones con las persona

Es importante considerar a todos los involucrados en el proyecto, no importa si tiene o no poder de decisión. El líder del proyecto tiene que considerar a todos los involucrados o stakeholders para poder plantear el objetivo del proyecto, de tal forma que todos salgan beneficiados.

En todo proyecto las personas son muy importantes. Trate de identificar desde un principio las personas más adecuadas, y rechace a las que no convienen. Tome en cuenta el dicho que utiliza la gente del campo, que con mucha sabiduría señala que Gallina que no da huevos, al caldo. Una vez seleccionado el personal hay que poner manos a la obra.

#### Evaluación, seguimiento y reconocimiento

Para asegurar que se alcancen los objetivos no basta con tener objetivos claros, un buen líder del proyecto y recursos humanos, financieros y materiales adecuados; es necesario evaluar las etapas del proyecto periódicamente, con la finalidad de identificar desviaciones y poner en práctica las medidas correctivas. Es decir, hay que darle un cuidadoso seguimiento. Además, una vez terminado el proyecto se recomienda reconocer a las personas que se distinguieron por su trabajo en equipo y por su desempeño individual.

#### Administración de proyectos en México

La administración por proyectos la utilizan las empresas públicas, privadas y del sector social, cuando se tiene una tarea o proceso específico a realizar. En ocasiones se contrata a terceros para realizar tareas que las empresas por sus características propias no desean realizar. Por necesidades propias del servicio de una empresa asigna proyectos a otras, evitando así la contratación de más personal. En México, este proceso, denominado outsourcing, fue aprobado en la Ley Federal del Trabajo.

Esta ley faculta a las empresas a la subcontratación. Anteriormente ya existía el outsourcing en la práctica, no estaba expresamente autorizado por la ley.

La administración de proyectos es muy útil para las empresas porque pueden definir objetivos, asignar recursos y personal para lograr objetivos en un tiempo predeterminado.

En muchas ocasiones es preferible contratar personas o empresas externas a una institución para realizar un proyecto.

→ BIBLIOGRAFÍA

1. ALEA, V. et al. (1999) *Estadística Aplicada a les Ciències Econòmiques i Socials*. Barcelona: Edicions McGraw-Hill EUB.
2. CANAVOS, G. (1988) *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México: McGraw-Hill.

#### **4.5.- INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DECISIONES.**

El problema de la Decisión, motivado por la existencia de ciertos estados de ambigüedad que constan de proposiciones verdaderas (conocidas o desconocidas), es tan antiguo como la vida misma. Podemos afirmar que todos los seres vivos, aún los más simples, se enfrentan con problemas de decisión. Así, un organismo unicelular asimila partículas de su medio ambiente, unas nutritivas y otras nocivas para él. La composición biológica del organismo y las leyes físicas y químicas determinan qué partículas serán asimiladas y cuáles serán rechazadas.

Conforme aumenta la complejidad del ser vivo, aumenta también la complejidad de sus decisiones y la forma en que éstas se toman. Así, pasamos de una toma de decisiones guiada instintivamente, a procesos de toma de decisiones que deben estar guiados por un pensamiento racional en el ser humano. La Teoría de la Decisión tratará, por tanto, el estudio de los procesos de toma de decisiones desde una perspectiva racional.

## CARACTERÍSTICAS Y FASES DEL PROCESO DE DECISIÓN

Un proceso de decisión presenta las siguientes características principales:

- Existen al menos dos posibles formas de actuar, que llamaremos alternativas o acciones, excluyentes entre sí, de manera que la actuación según una de ellas imposibilita cualquiera de las restantes.
- Mediante un proceso de decisión se elige una alternativa, que es la que se lleva a cabo.
- La elección de una alternativa ha de realizarse de modo que cumpla un fin determinado.

El proceso de decisión consta de las siguientes fases fundamentales:

- Predicción de las consecuencias de cada actuación. Esta predicción deberá basarse en la experiencia y se obtiene por inducción sobre un conjunto de datos. La recopilación de este conjunto de datos y su utilización entran dentro del campo de la Estadística.
- Valoración de las consecuencias de acuerdo con una escala de bondad o deseabilidad. Esta escala de valor dará lugar a un sistema de preferencias.
- Elección de la alternativa mediante un criterio de decisión adecuado. Este punto lleva a su vez asociado el problema de elección del criterio más adecuado para nuestra decisión, cuestión que no siempre es fácil de resolver de un modo totalmente satisfactorio.

## CLASIFICACIÓN DE LOS PROCESOS DE DECISIÓN

Los procesos de decisión se clasifican de acuerdo según el grado de conocimiento que se tenga sobre el conjunto de factores o variables no controladas por el decisor y que pueden tener influencia sobre el resultado final (esto es lo que se conoce como ambiente o contexto). Así, se dirá que:

- El ambiente es de certidumbre cuando se conoce con certeza su estado, es decir, cada acción conduce invariablemente a un resultado bien definido.
- El ambiente de riesgo cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que puede asignarse una distribución de probabilidad conocida.
- El ambiente es de incertidumbre cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que no puede asignarse una distribución de probabilidad, bien porque sea desconocida o porque no tenga sentido hablar de ella.

Según sea el contexto, diremos que el proceso de decisión (o la toma de decisiones) se realiza bajo certidumbre, bajo riesgo o bajo incertidumbre, respectivamente.

## ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN

En todo problema de decisión pueden distinguirse una serie de elementos característicos:

- El decisor, encargado de realizar la elección de la mejor forma de actuar de acuerdo con sus intereses.
- Las alternativas o acciones, que son las diferentes formas de actuar posibles, de entre las cuales se seleccionará una. Deben ser excluyentes entre sí.
- Los posibles estados de la naturaleza, término mediante el cual se designan a todos aquellos eventos futuros que escapan al control del decisor y que influyen en el proceso.
- Las consecuencias o resultados que se obtienen al seleccionar las diferentes alternativas bajo cada uno de los posibles estados de la naturaleza.
- La regla de decisión o criterio, que es la especificación de un procedimiento para identificar la mejor alternativa en un problema de decisión.

## CONCEPTO DE REGLA DE DECISIÓN

La tabla de decisión es un mero instrumento para dar respuesta a la cuestión fundamental en todo proceso de decisión:

¿Cuál es la mejor alternativa ?

Para la elección de la alternativa más conveniente nos basaremos en el concepto de regla o criterio de decisión, que podemos definir de la siguiente forma:

Una regla o criterio de decisión es una aplicación que asocia a cada alternativa un número, que expresa las preferencias del decisor por los resultados asociados a dicha alternativa.

Notaremos por  $S$  a esta aplicación y  $S(a)$  el valor numérico asociado por el criterio  $S$  a la alternativa  $a$ .

La descripción de los diferentes criterios de decisión que proporcionan la alternativa óptima será realizada de acuerdo con el conocimiento que posea el decisor acerca del estado de la naturaleza, es decir, atendiendo a la clasificación de los procesos de decisión. Según esto, distinguiremos:

■ Tablas de decisión en ambiente de certidumbre

■ Tablas de Decisión en ambiente de incertidumbre

→ BIBLIOGRAFIA:

1. FREEDMAN, D., et al. (1991) *Estadística*. Barcelona: A.Bosch Ed.
2. FREEDMAN, D., et al. (1991) *Estadística*. Barcelona: A.Bosch Ed.

#### **4.6.- INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS.**

Los psicólogos destacan la importancia del juego en la infancia como medio de formar la personalidad y de aprender de forma experimental a relacionarse en sociedad, a

resolver problemas y situaciones conflictivas. Todos los juegos, de niños y de adultos, juegos de mesa o juegos deportivos, son modelos de situaciones conflictivas y cooperativas en las que podemos reconocer situaciones y pautas que se repiten con frecuencia en el mundo real.

El estudio de los juegos ha inspirado a científicos de todos los tiempos para el desarrollo de teorías y modelos matemáticos. La estadística es una rama de las matemáticas que surgió precisamente de los cálculos para diseñar estrategias vencedoras en juegos de azar. Conceptos tales como probabilidad, media ponderada y distribución o desviación estándar, son términos acuñados por la estadística matemática y que tienen aplicación en el análisis de juegos de azar o en las frecuentes situaciones sociales y económicas en las que hay que adoptar decisiones y asumir riesgos ante componentes aleatorios.

Pero la Teoría de Juegos tiene una relación muy lejana con la estadística. Su objetivo no es el análisis del azar o de los elementos aleatorios sino de los comportamientos estratégicos de los jugadores. En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes o jugadores. Se dice de un comportamiento que es estratégico cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas.

La técnica para el análisis de estas situaciones fue puesta a punto por un matemático, John von Neumann. A comienzos de la década de 1940, este trabajó con el economista Oskar Morgenstern en las aplicaciones económicas de esa teoría. El libro que publicaron en 1944, "Theory of Games and Economic Behavior", abrió un insospechadamente amplio campo de estudio en el que actualmente trabajan miles de especialistas de todo el mundo.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía (Equilibrio General, Distribución de Costos, etc.), se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de

crecer. Y no son sólo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

Hay dos clases de juegos que plantean una problemática muy diferente y requieren una forma de análisis distinta:

Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar los resultados se tratará de juegos con transferencia de utilidad (también llamados juegos cooperativos), en los que la problemática se concentra en el análisis de las posibles coaliciones y su estabilidad.

En los juegos sin transferencia de utilidad, (también llamados juegos no cooperativos) los jugadores no pueden llegar a acuerdos previos; es el caso de los juegos conocidos como "la guerra de los sexos", el "dilema del prisionero" o el modelo "halcón-paloma".

Los modelos de juegos sin transferencia de utilidad suelen ser bipersonales, es decir, con sólo dos jugadores. Pueden ser simétricos o asimétricos según que los resultados sean idénticos desde el punto de vista de cada jugador. Pueden ser de suma cero, cuando el aumento en las ganancias de un jugador implica una disminución por igual cuantía en las del otro, o de suma no nula en caso contrario, es decir, cuando la suma de las ganancias de los jugadores puede aumentar o disminuir en función de sus decisiones. Cada jugador puede tener opción sólo a dos estrategias, en los juegos biestratégicos, o a muchas. Las estrategias pueden ser puras o mixtas; éstas consisten en asignar a cada estrategia pura una probabilidad dada. En el caso de los juegos con repetición, los que se juegan varias veces seguidas por los mismos jugadores, las estrategias pueden ser también simples o reactivas, si la decisión depende del comportamiento que haya manifestado el contrincante en jugadas anteriores.

## ORIGEN

La Teoría de Juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en su libro clásico "The Theory of Games Behavior", publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo

XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos en el artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de Von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

Durante las dos décadas que siguieron a la Segunda Guerra Mundial, uno de los progresos más interesantes de la Teoría Económica fue la Teoría de los Juegos y el comportamiento económico, publicada en un libro de este título bajo la autoridad conjunta de Jhon Von Neumann y Oskar Morgenstern. Actualmente, el consenso parece ser que la Teoría de los Juegos es más relevante al estudio de problemas comerciales específicos que a la teoría económica general, porque representa un enfoque único al análisis de las decisiones comerciales en condiciones de intereses competitivos y conflictivos.

En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos términos.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan del primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El Ajedrez, el Backgamón y el Póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

La segunda parte del libro de Von Neumann y Morgenstern, se desarrolla el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de

sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaban papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente indeterminados.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosos el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se había auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de equilibrio, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría (de aquí que se restringieran a juegos de suma cero). Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de equilibrio de Nash, la cual no es otra cosa que cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fueron aconsejados, por su consultor especialista en Teoría de Juegos, que usaran un equilibrio de Nash. Es tal vez, el más importante de los instrumentos que los especialistas en Teoría de Juegos tienen a disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern.

Nash no aceptó la idea de que la Teoría de Juegos debe considerar indeterminados problemas de negociación entre dos personas y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la Teoría de Juegos paso en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativa de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron improductivas.

John Von Neumann, 1903-1957

John von Neumann es un matemático húngaro considerado por muchos como la mente más genial del siglo XX, comparable solo a la de Albert Einstein. A pesar de ser completamente desconocido para el "hombre de la calle", la trascendencia práctica de su actividad científica puede vislumbrarse al considerar que participó activamente en el Proyecto Manhattan, el grupo de científicos que creó la primera bomba atómica, que participó y dirigió la producción y puesta a punto de los primeros ordenadores o que, como científico asesor del Consejo de Seguridad de los Estados Unidos en los años cincuenta, tuvo un papel muy destacado (aunque secreto y no muy bien conocido) en el diseño de la estrategia de la guerra fría. Nicholas Kaldor dijo de él "Es sin duda alguna lo más parecido a un genio que me haya encontrado jamás".

Nació en Budapest, Hungría, hijo de un rico banquero judío. Tuvo una educación esmerada. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de Budapest y en químicas por la Universidad de Zurich. En 1927 empezó a trabajar en la Universidad de Berlín. En 1932 se traslada a los Estados Unidos donde trabajará en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Sus aportaciones a la ciencia económica se centran en dos campos:

Es el creador del campo de la Teoría de Juegos. En 1928 publica el primer artículo sobre este tema. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, publica la *Theory of Games and Economic Behavior*. La Teoría de Juegos es un campo en el que trabajan actualmente miles de economistas y se publican a diario cientos de páginas. Pero además, las formulaciones matemáticas descritas en este libro han influido en muchos otros campos de la economía. Por ejemplo, Kenneth Arrow y Gerard Debreu se basaron en su axiomatización de la teoría de la utilidad para resolver problemas del Equilibrio General.

En 1937 publica *A Model of General Economic Equilibrium*", del que E. Roy Weintraub dijo en 1983 ser "el más importante artículo sobre economía matemática que haya sido escrito jamás". En él relaciona el tipo de interés con el crecimiento económico dando base a los desarrollos sobre el "crecimiento óptimo" llevado a cabo por Maurice Allais, Tjalling C. Koopmans y otros.

Oskar Morgenstern, 1902-1976

Nacido en Górlitz, Silesia, estudia en las universidades de Viena, Harvard y New York. Miembro de la Escuela Austriaca y avezado matemático, participa en los famosos "Coloquios de Viena" organizados por Karl Menger (hijo de Carl Menger) que pusieron en contacto científicos de diversas disciplinas, de cuya sinergia se sabe que surgieron multitud de nuevas ideas e incluso nuevos campos científicos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Emigra a Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial ejerciendo la docencia en Princeton. Publica en 1944, conjuntamente con John von Neuman, la "Theory of Games and Economic Behavior".

## APLICACIONES

La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, sin embargo, la economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en Teoría de Juego. Entre las disciplinas donde hay aplicación de la Teoría de Juegos tenemos:

En la Economía:

No debería sorprender que la Teoría de Juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta triste ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la Teoría de Juegos.

Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en Teoría de Juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por Von Neumann y Morgenstern.

En consecuencia sólo se podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras a todas las demás

variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón por que la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si el o ella actúa individualmente.

En la Ciencia Política:

La Teoría de Juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se deba a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de problemas más paradigmáticos.

En la Biología:

En Biología se ha utilizado ampliamente la teoría de juegos para comprender y predecir ciertos resultados de la evolución, como lo es el concepto de estrategia evolutiva estable introducido por John Maynard Smith en su ensayo "Teoría de Juegos y la Evolución de la Lucha", así como en su libro "Evolución y Teoría de Juegos".

En la Filosofía:

Los especialistas en Teoría de Juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado.

Con este fin estudian los equilibrios de juegos con repetición (juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez). Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el

problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios. Cuando estos progresos se den, sospecho que la filosofía social sin Teoría de Juegos será algo inconcebible – y que David Hume será universalmente considerado como su verdadero fundador.

## PROPIEDADES PARA EL CONOCIMIENTO COMÚN DEL JUEGO

El Filósofo Hobbes dijo que un hombre se caracteriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón.

**Fortaleza Física:** esta determina lo que alguien puede o no puede hacer. Un atleta puede planear correr una milla en cuatro minutos, pero sería imposible para la mayoría ejecutar este plan. La Teoría de Juegos incorpora estas consideraciones en las reglas del juego. Estas determinan lo que es factible para un jugador. Más exactamente, un jugador queda limitado a escoger en el conjunto de sus estrategias en el juego.

**Pasión y Experiencia:** estas corresponden a las preferencias y creencias de un jugador. En la mayoría de los casos, ambas deben ser conocimiento común para que sea posible realizar un análisis en términos de la Teoría de Juegos.

**Razón:** en problemas de decisión unipersonales, los economistas simplemente suponen que los jugadores maximizan sus pagos esperados dadas sus creencias. En un juego las cosas son más complicadas, porque la idea de equilibrio da por supuesto que los jugadores saben algo acerca de cómo razona todo el mundo.

**Conocimiento común de las reglas:**

Como en muchos resultados de la Teoría de Juegos, no es inmediatamente evidente que esta conclusión dependa de que el valor de "n" debe ser conocimiento común. Sin embargo, si el valor "n" no es de conocimiento común existe equilibrio de Nash.

La noción de equilibrio es fundamental para la Teoría de Juegos. Pero por qué anticipamos que los jugadores usarán estrategias de equilibrio.

Dos tipos de respuestas hay, en primer lugar del tipo educativo, estos suponen que los jugadores tengan al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente.

Sin embargo, la respuesta educativa no es la única posible. También hay respuestas evolutivas. Según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos períodos de tiempo.

En un juego finito de dos jugadores, ningún jugador sabe con seguridad que estrategia pura, incluso si el oponente mezcla, el resultado final será que se juega alguna estrategia pura, la cual terminará por utilizar el oponente. Un jugador racional, por tanto, asigna una probabilidad subjetiva a cada una de las alternativas posibles. Entonces el jugador escoge una estrategia que maximiza su pago esperado con respecto a estas probabilidades subjetivas. Por tanto, el o ella se comportan como si estuviera escogiendo una respuesta óptima a una de las estrategias mixtas del oponente, si la estrategia mixta para la que se elige una respuesta óptima.

La Teoría de Juegos sostiene, que las creencias de un jugador sobre lo que un oponente hará depende de lo que el jugador sabe acerca del oponente. Sin embargo, no está ni mucho menos claro lo que debemos suponer acerca de lo que los jugadores saben de su oponente. La idea de racionalidad se construye sobre la hipótesis de que por lo menos debería ser de conocimiento común que ambos jugadores son racionales.

## OBJETIVOS DE LA TEORÍA DE JUEGOS

El principal objetivo de la teoría de los juegos es determinar los papeles de conducta racional en situaciones de "juego" en las que los resultados son condicionales a las acciones de jugadores interdependientes.

Un juego es cualquier situación en la cual compiten dos o más jugadores. El Ajedrez y el Póker son buenos ejemplos, pero también lo son el duopolio y el oligopolio en los negocios. La extensión con que un jugador alcanza sus objetivos en un juego depende del azar, de sus recursos físicos y mentales y de los de sus rivales, de las reglas del juego y de los cursos de acciones que siguen los jugadores individuales, es decir, sus estrategias. Una estrategia es una especificación de la acción que ha de emprender un jugador en cada contingencia posible del juego.

Se supone que, en un juego, todos los jugadores son racionales, inteligentes y están bien informados. En particular, se supone que cada jugador conoce todo el conjunto de estrategias existentes, no solo para él, sino también para sus rivales, y que cada jugador conoce los resultados de todas las combinaciones posibles de las estrategias.

Igualmente, en una gran variedad de juegos, el resultado es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades debe ser establecida para que pueda ser posible una solución para el juego. A este respecto, debe observarse que las decisiones de los jugadores interdependientes no se toman en un vacío y que los pagos resultantes de estas decisiones dependen de las acciones emprendidas por todos los jugadores. Esta interdependencia implica que puede ser inapropiado suponer que los pagos están siendo generados por un proceso probabilista invariante que no es afectado por el curso de acción que uno escoja. En otras palabras, la acción que emprende un jugador puede dictar los actos de otros jugadores o influir en la probabilidad de que se comporten en una forma particular. Esta potencialidad de posibles efectos en los resultados es la que distingue la toma de decisiones en conflictos y la toma de decisiones en un medio incierto. La clase más sencilla de modelo de juego rigurosamente adversario, en el que los resultados posibles son calificados en orden opuesto por los jugadores.

Entre esta clase, el más común es el juego de suma constante, en el que la suma de las ganancias de los jugadores es igual, cualesquiera que sea su distribución entre ellos. Un caso especial, y el único que consideraremos, de juegos de suma constante se llama juego de suma cero de dos personas.

## ESTRATEGIAS REACTIVAS

Cuando un juego se repite varias veces, cada jugador puede adoptar su estrategia en función de las decisiones que haya adoptado antes su oponente.  
[http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t\\_blank](http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t_blank)

Las estrategias reactivas son las que se adoptan en los juegos con repetición y se definen en función de las decisiones previas de otros jugadores.

El ejemplo más conocido es la estrategia OJO POR OJO (en inglés TIT FOR TAT). Supongamos que dos jugadores repiten de forma indefinida una situación con pagos de forma del Dilema del Prisionero:

Dilema del Prisionero Matriz de Pagos		Jugador columna	
		Cooperar	Traicionar
Jugador fila	Cooperar	2°, 2°	4°, 1°
	Traicionar	1°, 4°	3°, 3°*

En esta situación la estrategia OJO POR OJO puede quedar definida de la forma siguiente: "En la primera jugada elegiré la estrategia COOPERAR. En las jugadas siguientes elegiré la misma estrategia que haya elegido mi oponente en la jugada anterior". En otras palabras, si el otro coopera, yo cooperaré con él. Si el otro es un traidor, yo seré un traidor".

Otra posible estrategia reactiva es la TORITO (también llamada en inglés "BULLY"). Esta estrategia consiste en hacer lo contrario que haga el oponente: "Si el otro jugador es leal en una jugada, yo le traicionaré en la siguiente; si el otro jugador me ha traicionado, yo le seré leal a la siguiente oportunidad".

En el ambiente del Dilema del Prisionero, la estrategia OJO POR OJO ofrece muy buenos resultados mientras que la estrategia TORITO proporciona pagos medios muy bajos.

En cambio, en el ambiente del juego Halcón-Paloma sucede precisamente lo contrario: TORITO obtiene buenos resultados mientras que OJO POR OJO proporciona pagos medios inferiores.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En la vida real es fácil descubrir situaciones y personas (incluyéndonos a nosotros mismos) en las que se muestran comportamientos fácilmente identificables con las estrategias OJO POR OJO o TORITO.

En el primer caso son los comportamientos descritos por la Ley del Tali3n. En el despacho de un abogado, negociador profesional, haba un letrado que decia "Por las buenas soy muy bueno, por las malas soy a3n mejor". Al fin y al cabo, todos los humanos en alguna ocasi3n nos hemos comprometido con nosotros mismos a mantener esta estrategia en una situaci3n difcil en la que un oponente pod3a elegir entre hacernos da3o o respetarnos, y preve3amos oportunidades para "devolverle la jugada".

El segundo caso tambi3n es muy frecuente. Se trata de ese tipo de personas o comportamientos que en Latinoam3rica llaman "ser un torito" y en Espa3a —ser un gallito"; es decir, alguien que se muestra muy agresivo pero al que "se le bajan los humos" si se le responde tambi3n con agresividad.

## EL DUOPOLIO EN LA TEOR3A DE JUEGOS

En el oligopolio, los resultados que obtiene cada empresa dependen no s3lo de su decisi3n sino de las decisiones de las competidoras. El problema para el empresario, por tanto, implica una elecci3n estrat3gica que puede ser analizada con las t3cnicas de la Teor3a de Juegos.

Supongamos que dos empresas, Hipermercados Xauen y Almacenes Yuste, constituyen un duopolio local en el sector de los grandes almacenes. Cuando llega la 3poca de las tradicionales rebajas de enero, ambas empresas acostumbran a realizar inversiones en publicidad tan altas que suelen implicar la p3rdida de todo el beneficio. Este a3o se han puesto de acuerdo y han decidido no hacer publicidad por lo que cada una, si cumple el acuerdo, puede obtener unos beneficios en la temporada de 50 millones. Sin embargo una de ellas puede preparar en secreto su campaa publicitaria y lanzarla en el 3ltimo momento con lo que conseguir3 atraer a todos los consumidores. Sus beneficios en ese caso ser3an de 75 millones mientras que empresa competidora perder3a 25 millones.

Los posibles resultados se pueden ordenar en una Matriz de Pagos. Cada almacén tiene que elegir entre dos estrategias: respetar el acuerdo —Cooperar— o hacer publicidad —Traicionar—. Los beneficios o pérdidas mostrados a la izquierda de cada casilla son los que obtiene Xauen cuando elige la estrategia mostrada a la izquierda y Yuste la mostrada arriba. Los resultados a la derecha en las casillas son los correspondientes para Yuste.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

El que lo máximo que se puede obtener sea 75 M. o 85 M. no tiene mucha influencia sobre la decisión a adoptar, lo único que importa en realidad es la forma en que están ordenados los resultados. Si sustituimos el valor concreto de los beneficios por el orden que ocupan en las preferencias de los jugadores, la matriz queda como la mostrada en el cuadro. Las situaciones como las descritas en esta matriz son muy frecuentes en la vida real y reciben el nombre de Dilema de los Presos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Veamos cuál debe ser la decisión a adoptar por esos almacenes. El director de la división de estrategia de Xauen pensará: "Si Yuste no hace publicidad, a nosotros lo que más nos conviene es traicionar el acuerdo, pero si ellos son los primeros en traicionar, a nosotros también nos convendrá hacerlo. Sea cual sea la estrategia adoptada por nuestros competidores, lo que más nos conviene es traicionarles". El director de la división de estrategia de Yuste hará un razonamiento similar.

Como consecuencia de ello ambos se traicionarán entre sí y obtendrán resultados peores que si hubieran mantenido el acuerdo. La casilla de la matriz de pagos marcada con un asterisco es la única solución estable: es un Punto de Equilibrio de Nash. Contrariamente a las argumentaciones de Adam Smith, en las situaciones caracterizadas por el Dilema de los Presos si los agentes actúan buscando de forma racional su propio interés, una "mano invisible" les conducirá a un resultado socialmente indeseable.

Supongamos ahora otra situación ligeramente diferente. Si ambas empresas se enredan en una guerra de precios, haciendo cada vez mayores rebajas, ambas sufrirán importantes pérdidas, 25 millones cada una. Han llegado al acuerdo de no hacer rebajas con lo que

cada una podrá ganar 50 millones. Si una de ellas, incumpliendo el acuerdo, hace en solitario una pequeña rebaja, podrá obtener un beneficio de 75 millones mientras que la otra perdería muchos clientes quedándose sin beneficios ni pérdidas.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Si, como en el caso anterior, sustituimos los valores concretos por su orden en la escala de preferencias obtenemos una matriz que es conocida en Teoría de Juegos como Gallina o Halcón-Paloma.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

El razonamiento de los estrategias será ahora diferente: "Si nuestros competidores cooperan, lo que más nos interesa es traicionarles, pero si ellos nos traicionan será preferible que nos mostremos cooperativos en vez de enredarnos en una guerra de precios. Hagan lo que hagan ellos, nos interesará hacer lo contrario".

En el juego "Gallina" el orden en que actúen los jugadores es muy importante. El primero en intervenir decidirá Traicionar, forzando al otro a Cooperar y obteniendo así el mejor resultado. La solución de equilibrio puede ser cualquiera de las dos marcadas con un asterisco en la matriz de pagos, dependiendo de cuál haya sido el primer jugador en decidirse. Ambas soluciones son puntos de equilibrio de Nash.

En casi todos los modelos, sea cual sea la forma de la matriz, el protocolo o reglas del juego influirá mucho en la solución. Además del orden de intervención de los jugadores, habrá que tener en cuenta si el juego se realiza una sola vez o si se repite cierto número de veces, la información de que disponen en cada momento, el número de jugadores que intervienen y la posibilidad de formar coaliciones, etc.

## CLASES DE JUEGOS

### El Dilema del Prisionero

Dos delincuentes son detenidos y encerrados en celdas de aislamiento de forma que no pueden comunicarse entre ellos. El alguacil sospecha que han participado en el robo del banco, delito cuya pena es diez años de cárcel, pero no tiene pruebas. Sólo tiene

pruebas y puede culparles de un delito menor, tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. Promete a cada uno de ellos que reducirá su condena a la mitad si proporciona las pruebas para culpar al otro del robo del banco.

Las alternativas para cada prisionero pueden representarse en forma de matriz de pagos. La estrategia "lealtad" consiste en permanecer en silencio y no proporcionar pruebas para acusar al compañero. Llamaremos "traición" a la estrategia alternativa.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Los pagos a la izquierda o a la derecha de la barra indican los años de cárcel a los que es condenado el preso X o Y respectivamente según las estrategias que hayan elegido cada uno de ellos.

En vez de expresar los pagos en años de cárcel, podríamos indicar simplemente el orden de preferencia de cada preso de los correspondientes resultados, con lo que el modelo pasa a tener aplicación más general.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

La aplicación de la estrategia maximín conduce en este juego a un resultado subóptimo. Al no conocer la decisión del otro preso, la estrategia más segura es traicionar. Si ambos traicionan, el resultado para ambos es peor que si ambos hubieran elegido la lealtad. Este resultado es un punto de equilibrio de Nash y está señalado en la matriz mediante un asterisco.

El dilema del prisionero, tal como lo hemos descrito, es un juego de suma no nula, bipersonal, biestratégico y simétrico. Fue formalizado y analizado por primera vez por A. W. Tucker en 1950. Es posiblemente el juego más conocido y estudiado en la Teoría de Juegos. En base a él se han elaborado multitud de variaciones, muchas de ellas basadas en la repetición del juego y en el diseño de estrategias reactivas.

El modelo Halcón - Paloma

[http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t\\_blank](http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t_blank)

En el lenguaje ordinario entendemos por "halcón" a los políticos partidarios de estrategias más agresivas mientras que identificamos como "paloma" a los más pacifistas. El modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras. Este modelo es conocido en la literatura anglosajona como el "hawk-dove" o el "chicken" y en español es conocido también como "gallina".

En la filmografía holywoodiense se han representado en varias ocasiones desafíos de vehículos enfrentados que siguen este modelo. Los dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvíe ha perdido. Pero si ninguno de los dos frena o se desvía...

También se ha utilizado este modelo abundantemente para representar una guerra fría entre dos superpotencias. La estrategia Halcón consiste en este caso en proceder a una escalada armamentística y bélica. Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde. Pero la situación peor para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón. El resultado puede modelizarse con la siguiente matriz de pagos.

Obsérvense las sutiles pero importantes diferencias de este modelo con el Dilema del Prisionero. En principio la matriz es muy parecida, simplemente se han trocado las posiciones de los pagos 3º y 4º, pero la solución y el análisis son ahora muy diferentes.

Hay aquí dos resultados que son equilibrios de Nash: cuando las estrategias elegidas por cada jugador son diferentes; en la matriz aquí representada esas soluciones están marcadas con un asterisco. Compruébese, por el contrario, que en el Dilema del Prisionero el equilibrio de Nash está en el punto en que ambos jugadores traicionan.

Otra notable diferencia de este juego con otros es la importancia que aquí adquiere el orden en que los jugadores eligen sus estrategias. Como tantas veces en la vida real, el primero que juega, gana. El primero elegirá y manifestará la estrategia Halcón con lo que el segundo en elegir se verá obligado a elegir la estrategia Paloma, la menos mala.

La guerra de los sexos

El modelo de "La guerra de los sexos" es un ejemplo muy sencillo de utilización de la teoría de juegos para analizar un problema frecuente en la vida cotidiana. Hay dos jugadores: "ÉL" y "ELLA". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos "Fútbol" y "Discoteca".

Supongamos que el orden de preferencias de ÉL es el siguiente:

(Lo más preferido) EL y ELLA eligen Fútbol.

EL y ELLA eligen Discoteca.

EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.

(Lo menos preferido) El elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

Supongamos que el orden de preferencias de ELLA es el siguiente:

(Lo más preferido) ÉL y ELLA eligen Discoteca.

EL y ELLA eligen Fútbol.

EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.

(Lo menos preferido) Él elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

La matriz de pagos es como sigue:

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Este juego, tal como lo hemos descrito, es un juego sin repetición y sin transferencia de utilidad. Sin repetición significa que sólo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. Sin transferencia de utilidad significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vienes al fútbol te pago la entrada").

El problema que se plantea es simplemente un problema de coordinación. Se trata de coincidir en la elección. Al no haber comunicación previa, es posible que el resultado no

sea óptimo. Si cada uno de los jugadores elige su estrategia maximín el pago que recibirán (3\3) es subóptimo. Esa solución, marcada en la matriz con un asterisco, no es un punto de equilibrio de Nash ya que los jugadores están tentados de cambiar su elección: cuando ELLA llegue a la discoteca y observe que ÉL se ha ido al fútbol, sentirá el deseo de cambiar de estrategia para obtener un pago mayor.

El modelo que hemos visto es un juego simétrico ya que jugadores o estrategias son intercambiables sin que los resultados varíen. Podemos introducir una interesante modificación en el juego convirtiéndolo en asimétrico a la vez que nos aproximamos más al mundo real. Supongamos que las posiciones 2ª y 3ª en el orden de preferencias de ÉL se invierten. EL prefiere ir solo al Fútbol más que ir con ELLA a la Discoteca. La matriz de pagos queda como sigue:

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Si ELLA conoce la matriz de pagos, es decir, las preferencias de ÉL, el problema de coordinación desaparece. Está muy claro que ÉL elegirá siempre la estrategia Fútbol, sea cual sea la elección de ELLA. Sabiendo esto ELLA elegirá siempre la estrategia Fútbol también, ya que prefiere estar con ÉL aunque sea en el Fútbol que estar sola aunque sea en la Discoteca. La estrategia maximín de ambos jugadores coincide. El resultado, marcado con un asterisco, es un óptimo, un punto de silla, una solución estable, un punto de equilibrio de Nash. Obsérvese que esta solución conduce a una situación estable de dominación social del jugador que podríamos calificar como el más egoísta.

### La Estrategia MAXIMIN

Consideremos un "juego de suma cero" en el que lo que yo gano lo pierde el otro jugador. Cada jugador dispone de tres estrategias posibles a las que designaremos como A, B, y C (supongamos que son tres tarjetas con dichas letras impresas).

Los premios o pagos consisten en la distribución de diez monedas que se repartirán según las estrategias elegidas por ambos jugadores y se muestran en la siguiente tabla llamada matriz de pagos. Mis ganancias, los pagos que puedo recibir, se muestran sobre fondo

verde. Los pagos al otro jugador se muestran sobre fondo rosa. Para cualquier combinación de estrategias, los pagos de ambos jugadores suman diez.

Por ejemplo. Si yo juego la tarjeta C y el otro jugador elige su tarjeta B entonces yo recibiré ocho monedas y el otro jugador recibirá dos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Éste es por tanto un juego de suma cero. Se llama juego de suma cero aquél en el que lo que gana un jugador es exactamente igual a lo que pierde o deja de ganar el otro.

Para descubrir qué estrategia me conviene más vamos a analizar la matriz que indica mis pagos, la de fondo verde. Ignoro cuál es la estrategia (la tarjeta) que va a ser elegida por el otro jugador. Una forma de analizar el juego para tomar mi decisión consiste en mirar cuál es el mínimo resultado que puedo obtener con cada una de mis cartas. En la siguiente tabla se ha añadido una columna indicando mis resultados mínimos.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En efecto,

Si yo elijo la tarjeta A, puedo obtener 9, 1 o 2, luego como mínimo obtendré un resultado de 1.

Si elijo la tarjeta B, puedo obtener 6, 5 o 4, luego como mínimo obtendré 4.

Si elijo la tarjeta C, puedo obtener 7, 8 o 3, luego como mínimo obtendré 3.

De todos esos posibles resultados mínimos, el que prefiero es 4 ya que es el máximo de los mínimos.

La estrategia MAXIMIN consiste en elegir la tarjeta B ya que esa estrategia me garantiza que, como mínimo, obtendré 4.

¿Podemos prever la estrategia del otro jugador? Supongamos que el otro jugador quiere elegir también su estrategia MAXIMIN. Mostramos ahora sólo los pagos asignados al otro

jugador en los que destacamos el pago mínimo que puede obtener para cada una de sus estrategias. Subrayamos el máximo de los mínimos y su estrategia maximin.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En efecto,

Si él elige A, su peor resultado sería si yo elijo A con lo que yo obtendría 9 y él 1.

Si él elige B, su peor resultado sería si yo elijo C con lo que yo obtendría 8 y él 2.

Si él elige C, su peor resultado sería si yo elijo B con lo que yo obtendría 4 y él 6.

Su estrategia MAXIMIN consiste por tanto en jugar la carta C con lo que se garantiza que, al menos, obtendrá 6.

Éste es un juego con solución estable. Ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia. Supongamos que se empieza a repetir el juego una y otra vez. Yo jugaré siempre mi estrategia maximin (B) y el otro jugará siempre su estrategia maximin (C). Cada uno sabe lo que jugará el otro la siguiente vez. Ninguno estará tentado de cambiar su estrategia ya que el que decida cambiar su estrategia perderá.

Se llama "punto de silla" al resultado en el que coinciden las estrategias maximin de ambos jugadores.

No todos los juegos tienen un punto de silla, una solución estable. La estabilidad del juego anterior desaparece simplemente trastocando el orden de las casillas BB y BC:

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

En esta nueva tabla mi estrategia maximin sigue siendo la B y la estrategia maximin del otro jugador sigue siendo la C. Pero la solución ahora ya no es estable. Si jugamos repetidas veces y yo repito mi estrategia maximin, B, el otro estará tentado de cambiar su estrategia, pasando de la C a la B con lo que obtendrá un pago mayor, 6 en vez de 5.

Claro que si el otro empieza a elegir sistemáticamente la estrategia B yo preferiré cambiar mi estrategia a la C para así obtener 8. Entonces el querrá volver a su estrategia C y así sucesivamente.

El Teorema del Maximin afirma que en todo juego bipersonal de suma cero en el que sea posible jugar estrategias mixtas además de las puras, las estrategias maximin de cada jugador coincidirán siempre en una solución estable, un punto de silla. Este teorema fue demostrado matemáticamente por John von Neumann en un artículo publicado en 1928

Juegos con Transferencia de Utilidad (Juegos Cooperativos)

[http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t\\_blank](http://www.eumed.net/cursecon/0/recomiendo.phtml/t_blank)

Si los jugadores pueden comunicarse entre sí y negociar un acuerdo ANTES de los pagos, la problemática que surge es completamente diferente. Se trata ahora de analizar la posibilidad de formar una coalición de parte de los jugadores, de que esa coalición sea estable y de cómo se deben repartir las ganancias entre los miembros de la coalición para que ninguno de ellos esté interesado en romper la coalición.

Juego 1.- Empecemos con el ejemplo más sencillo. Supongamos que tres jugadores, Ana, Benito y Carmen, tienen que repartirse entre sí cien euros. El sistema de reparto tiene que ser adoptado democráticamente, por mayoría simple, una persona un voto. Hay cuatro posibles coaliciones vencedoras: ABC, AB, BC y AC, pero hay infinitas formas de repartir los pagos entre los tres jugadores.

Supongamos que Ana propone un reparto de la forma  $A=34$ ,  $B=33$  y  $C=33$ . Benito puede proponer un reparto alternativo de la forma  $A=0$ ,  $B=50$  y  $C=50$  Carmen estará más interesada en la propuesta de Benito que en la de Ana. Pero puede proponer una alternativa aún mejor para ella:  $A=34$ ,  $B=0$  y  $C=66$ . A Benito es posible que se le ocurra alguna propuesta mejor para atraer a Ana.

El juego puede continuar indefinidamente. No tiene solución. No hay ninguna coalición estable. Sea cual sea la propuesta que se haga siempre habrá una propuesta alternativa que mejore los pagos recibidos por cada jugador de una nueva mayoría.

Definición: En los juegos con transferencia de utilidad se llama solución a una propuesta de coalición y de reparto de los pagos que garantice estabilidad, es decir, en la que ninguno de los participantes de una coalición vencedora pueda estar interesado en romper el acuerdo.

Juego 2.- Modifiquemos ahora el ejemplo. En vez de "un hombre un voto" consideremos que hay voto ponderado. Ana tiene derecho a seis votos, Benito a tres y Carmen a uno. Las posibles mayorías son las siguientes: ABC, AB, AC, A. En esta situación Ana propondrá un reparto de la siguiente forma:  $A=100$ ,  $B=0$  y  $C=0$ . Ese reparto se corresponde con una coalición estable en la que los seis votos de Ana estarán a favor. Es una solución única. Ana no aceptará ningún reparto en el que ella obtenga menos de 100 euros y sin la participación de Ana no hay ninguna coalición vencedora.

Definición: Se llama "valor del juego" al pago que un jugador tiene garantizado que puede recibir de un juego si toma una decisión racional, independientemente de las decisiones de los demás jugadores. Ningún jugador aceptará formar parte de una coalición si no recibe como pago al menos el valor del juego.

En el juego 1, el valor del juego es cero para los tres jugadores. En el juego 2 el valor del juego para Ana es cien y para Benito y Carmen es cero.

Juego 3.- Pongamos un ejemplo algo más realista y, por tanto, un poco más complejo. Supongamos un municipio en el que cinco partidos políticos se han presentado a las elecciones: el Partido Austero (PA), el Partido Benefactor (PB), el Partido Comunal (PC), el Partido Democrático (PD) y el Partido de la Esperanza (PE). En las elecciones, han obtenido el siguiente número de concejales:

PA=11

PB=8

PC=5

PD=2

PE=1

Como ningún partido ha conseguido la mayoría absoluta, es necesario que se forme una coalición para gobernar el municipio. El presupuesto anual del municipio es de 520 millones de euros. La coalición gobernante debe asignar los cargos y las responsabilidades del ayuntamiento a los diferentes partidos. En las negociaciones se debe acordar el reparto del presupuesto, cargos y responsabilidades entre los partidos. Suponemos que no hay simpatías ni antipatías ideológicas y que los cargos y responsabilidades son valorados exclusivamente según el presupuesto económico que controlan. Supondremos, para simplificar, que hay disciplina de voto y que no son posibles las traiciones internas

Análisis del juego 3. Como el número total de concejales es 27, la coalición vencedora debe disponer al menos de 14 votos. A diferencia del juego 2, no hay ningún jugador imprescindible para ganar. Si utilizamos la definición que dimos arriba, el valor del juego para todos los jugadores es cero ya que ninguno tiene garantizada su pertenencia a la coalición vencedora.

Definición: Se llama "valor de Shapley" a la asignación que recibe cada jugador en una propuesta de reparto según un criterio de arbitraje diseñado por Lloyd S. Shapley. El criterio consiste en asignar un pago a cada jugador en proporción al número de coaliciones potencialmente vencedoras en las que el jugador participa de forma no redundante.

Un jugador es redundante en una coalición si no es imprescindible para que esa coalición resulte vencedora.

Las especies en extinción y los recursos naturales.

Actualmente existe una inquietud generalizada ante la desaparición de extensas zonas de selva tropical y la posibilidad de extinción de especies animales por sobreexplotación. Este problema presenta características similares a los efectos externos y a los bienes públicos y tampoco es resuelto de forma satisfactoria por el mercado. A diferencia de los bienes públicos, los recursos naturales de propiedad común sí provocan o pueden llegar a provocar rivalidad en el consumo. A diferencia del problema de los efectos externos, que son efectos tecnológicos provocados por bienes privados sobre bienes privados, la

sobreexplotación de recursos naturales comunes incluye efectos tecnológicos y pecuniarios provocados por el acto de privatización de una propiedad común.

En muchos países sudamericanos como Brasil o Costa Rica, la selva tropical está siendo quemada para roturar nuevas tierras que permitan la instalación de colonos. En las selvas tropicales de extremo oriente, especialmente en Indonesia y Filipinas, el ritmo de explotación de su riqueza maderera dobla a la tasa de reproducción agravándose la situación en las especies de maderas nobles, más demandadas, algunas de las cuales están ya en peligro de desaparición. Varias especies de mamíferos marinos tienen su supervivencia gravemente amenazada por exceso de capturas. Muchos bancos de peces, aunque no estén en peligro de extinción, han visto reducida su población hasta el punto de arruinar a muchas poblaciones pesqueras en Perú, Islas Británicas y Noruega.

Las razones son similares en todos esos casos. Las selvas, bosques, pastos comunales, cazaderos o pesquerías no están sometidos al régimen de propiedad privada. Cualquier individuo o empresa puede acceder a ellos por lo que cada uno intentará obtener el máximo rendimiento sin preocuparse por su preservación para el futuro. La ciencia económica estudió el problema por primera vez para el caso de las pesquerías que se han convertido así en el ejemplo tradicional.

Algunos ecologistas radicales, mal informados, proponen que consideremos las especies animales como un "capital heredado" del que podemos aprovechar sus rentas pero que debemos transmitir "íntegro" a las futuras generaciones. Eso no es posible en la realidad. Cualquier volumen de capturas de peces de un banco supone inevitablemente la disminución de su población. Con la expresión "capital heredado" esos ecologistas se están refiriendo al punto de equilibrio natural de la población, el tamaño que tendría la población de peces si no existiéramos los humanos. La única forma de mantener "íntegro" ese número de peces sería no pescar.

Supongamos en cambio que partimos de una situación intermedia, cualquier tamaño de la población de peces entre  $P_a$  y  $P_c$ , en la que la tasa de crecimiento es positiva, por ejemplo del 3% anual. Si limitásemos nuestras capturas anuales precisamente a esa tasa, al 3% de la población total, el tamaño del banco se mantendría estable indefinidamente. El problema

puede plantearse por tanto en términos estrictamente biológicos: cuál es el volumen máximo de capturas que puede conseguirse de forma indefinida o, en otras palabras, cuál es el tamaño de la población en el que su tasa de crecimiento es máxima, el punto  $P_b$  en el gráfico.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Los biólogos son capaces de resolver perfectamente ese problema y lo consiguen con un alto grado de sofisticación, determinando la edad óptima de los peces capturados y la época del año en que debe realizarse la campaña. Se llama management o gestión de pesquerías al conjunto de estudios y técnicas que permiten una explotación óptima a largo plazo.

Pero, una vez que se tiene una solución óptima, se trata de ver si somos capaces de aplicarla. Cada individuo, cada barco pesquero, tiene que elegir entre dos alternativas en un ambiente que puede ser modelado según el Dilema de los Presos. Vamos a llamar "cooperar" a la estrategia consistente en respetar las cuotas y la reglamentación acordadas por una cooperativa o por un organismo supranacional y establecidas según criterios racionales de gestión de pesquerías. Vamos a llamar "traicionar" a la estrategia consistente en tratar de obtener el máximo beneficio individual a corto plazo aunque ello implique sobrepasar cuotas o usar artes de pesca prohibidas.

		Los otros Barcos	
		Cooperar	Traicionar
Mi Barco	Cooperar	2,2	4,1
	Traicionar	1,4	3,3

El equilibrio de Nash se encuentra en la casilla en que todos traicionan. La tendencia, por tanto, es a que los recursos sean sobre explotados.

Si existiese una empresa que pudiera ejercer sobre la pesquería un control monopolista no habría ninguna dificultad para hacer una gestión eficiente. Es por ello que una primera solución consiste en que el estado monopolice el recurso y utilice su poder coactivo para impedir la sobreexplotación. La ampliación de las aguas jurisdiccionales de los países hasta las doscientas millas de su plataforma continental fue un primer paso para controlar la producción pesquera en la década de los setenta, generalizándose desde entonces el sistema de cuotas mediante el que se fija un volumen máximo de capturas a repartir entre todas las empresas autorizadas a pescar.

Para las especies como las ballenas y otros mamíferos marinos, que viven a más de doscientas millas de las costas o en costas no sometidas a jurisdicción alguna, la solución está aun lejana. No existe -aún- un estado global, unas instituciones con capacidad para gestionar todos los recursos del planeta Tierra y con legitimidad para castigar a los infractores.

## CONCLUSIONES

Algunas teorías buscan encontrar las estrategias racionales, que se utilizan en situaciones donde el resultado depende no solamente de las estrategias propias y las condiciones del entorno, sino también en las estrategias utilizadas por otros jugadores que posiblemente tienen objetivos distintos.

La Teoría de Juegos consiste en razonamientos circulares, los cuales no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. La intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas, razón por la que se debe entrenar. La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, entre las disciplinas tenemos: la Economía, la Ciencias Políticas, la Biología y la Filosofía.

Hay dos tipos de respuesta, la del tipo educativo, en la cual los jugadores suponen que tienen al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente, y un segundo tipo de respuestas, las evolutivas, según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos períodos de tiempo.

Las estrategias maximin y minimax conducen a los dos jugadores del juego a situaciones en las que ningún jugador tiene razón o incentivo alguno para cambiar su posición. Así mismo, se dice que un jugador posee una estrategia dominante si una estrategia particular es preferida a cualquier otra estrategia a disposición de él.

#### BIBLIOGRAFÍA

Martínez Coll, Juan Carlos (2001): "La Teoría de Juegos" en La Economía de Mercado, virtudes e inconvenientes.