BIOESTADÍSTICA

Base para el análisis de las ciencias de la salud

4a Edición

Daniel

LIMUSA WILEY

BIOESTADÍSTICA

Base para el análisis
de las ciencias de la salud

biostadística

Base para el análisis de las ciencias de la salud.

Wayne W. Daniel

Georgia State University

LIMUSA
NORIEGA

ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
MÉXICO • COLOMBIA • PUERTO RICO

Versión autorizada en español
de la obra publicada en inglés por
John Wiley & Sons con el título
BIOSTATISTICS: A FOUNDATION FOR
ANALYSIS IN THE HEALTH SCIENCES 3th ed.
© John Wiley & Sons, Inc.
ISBN 0-471-09753-5

Versión española:

MANUEL GUZMAN ORTIZ

Revisión:

ANA LIA BABINSKY EPSTEIN
Licenciada en Matemáticas de la
Universidad de Buenos Aires.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1977
Primera reimpresión: 1979
Segunda reimpresión: 1980
Tercera reimpresión: 1982
Cuarta reimpresión: 1983
Quinta reimpresión: 1984
Sexta reimpresión: 1985
Tercera edición: 1987
Primera reimpresión: 1988
Segunda reimpresión: 1989
Tercera reimpresión: 1989
Cuarta reimpresión: 1990
Quinta reimpresión: 1990
Sexta reimpresión: 1991

Impreso en México
(9941)

ISBN 968-18-0178-4

A mi esposa
Mary
y a mis hijos
Jean,
Carolyn
y John

Prólogo

Esta versión en español de la tercera edición en inglés de *Bioestadística: base para el análisis de las ciencias de la salud,* debe ser de interés para el mismo público para el cual fueron escritas las dos primeras ediciones: el estudiante universitario avanzado, el estudiante graduado principiante y el profesional en el área de salud, que requieren un libro de referencia sobre metodología estadística.

Esta edición supera a las anteriores en tres áreas importantes: 1) se han incluido temas adicionales; 2) se han ampliado, revisado y aclarado más algunos de los temas que aparecen en las dos primeras ediciones; y 3) se han incluido ejercicios adicionales para el estudiante.

Al igual que las ediciones anteriores, esta edición necesita pocos requisitos matemáticos. Sólo se requiere una destreza razonable en álgebra para comprender los conceptos y métodos que sirven de base para los cálculos. El énfasis continúa haciéndose en el entendimiento intuitivo de los principios, más que en el entendimiento basado en la sofisticación matemática.

Desde la publicación de la primera edición, la rápida aparición de calculadoras manuales económicas ha tenido un tremendo impacto sobre la enseñanza de la estadística, por lo que es raro el estudiante que no tenga una. Ahora, más que nunca, el profesor de estadística puede centrar su enseñanza en los conceptos y principios y dedicar menos tiempo de su clase a averiguar la causa de los errores de cómputo hechos por los estudiantes. Aminorando el tedio y el trabajo asociados al tiempo que se dedica a hacer cálculos manuales, los estudiantes de hoy en día, tienen razón en ver su curso de estadística como una experiencia mucho más agradable que sus predecesores.

Esta edición hace un mayor énfasis en las aplicaciones de cómputo. Considero que las computadoras, al igual que las calculadoras manuales, son sólo una herramienta que se utiliza para facilitar el trabajo del estudiante y de quien se dedica a la estadística. Creo que un libro de texto como éste no debería limitarse exclusivamente a un lenguaje particular o a un conjunto de programas. Por lo tanto, mis observaciones respecto a las computadoras se han expresado en términos generales, lo cual permite que cada uno de los instructores de la materia tenga mayor flexibilidad para integrar el texto con las ventajas que ofrecen las computadoras. Muchos de los ejercicios abarcan datos "en bruto", los cuales proporcionarán datos realistas para las aplicaciones de computadora.

El instructor que utilice la computadora puede abarcar un mayor número de temas durante un período académico que en los períodos anteriores. Sin embargo, los temas de esta edición deben ser suficientes para cubrir un curso de uno o dos períodos académicos.

Las siguientes mejoras específicas se han incorporado en esta tercera edición:

1. Se han añadido varios ejercicios nuevos. Al igual que los ejercicios y ejemplos originales, los que aquí se han incorporado se tomaron de una amplia gama de disciplinas de la salud y, aun cuando todos ellos sean hipotéticos, se han hecho tan interesantes y realistas como fue posible.
2. La mayoría de los ejercicios nuevos aparecen al final de los capítulos para servir de material de repaso cuando han concluido los capítulos. Como en las dos primeras ediciones, aparecen también ejercicios al término de las secciones dentro de los capítulos para servir de refuerzo inmediato a las técnicas y conceptos que se han enseñado.
3. Se han incorporado en el texto varios esquemas nuevos para facilitar la comprensión de algunos de los conceptos más problemáticos.
4. El capítulo sobre análisis de variancia con un solo criterio de clasificación por rangos se ha ampliado para incluir el caso de las muestras de distinto tamaño. El tema del método de Tukey para comparar pares de medias individuales se ha ampliado también para incluir el caso de muestras de distinto tamaño.

5. Se ha incorporado un estudio de la prueba de Mann-Whitney en el capítulo sobre estadística no paramétrica.
6. Las tablas del apéndice se han revisado a fin de que las distribuciones binomial, de Poisson, t, F, ji-cuadrada y normal den ahora la probabilidad de obtener un valor de la estadística de prueba tan pequeño o incluso más pequeño que el calculado. Esta característica debe facilitar el uso de las tablas por el estudiante.

Quisiera aprovechar esta oportunidad para expresar mi gratitud a los muchos lectores y usuarios de mi obra como libro de texto por sus valiosas sugerencias para esta tercera edición. En particular, quisiera dar las gracias a las siguientes personas, quienes hicieron sugerencias detalladas para esta revisión:

Bruce E. Trumbo
Universidad Estatal de California en Hayward
Hayward, California

Donald A. Pierce
Universidad Estatal de Oregón
Corvallis, Oregón

A. Larry Wright
Universidad de Arizona
Tucson, Arizona

Shirley Dowdy
Universidad de Virginia Occidental
Morgantown, Virginia Occidental

John McCloskey
Universidad de Dayton
Dayton, Ohio

Alan J. Gross
Universidad de Medicina de Carolina del Sur
Charleston, Carolina del Sur

Patrick L. Brockett
Universidad de Texas en Austin
Austin, Texas

David W. Hosmer
Universidad de Massachusetts
Amherst, Massachusetts

Quisiera agradecer también a mis siguientes colegas de la Universidad Estatal de Georgia su ayuda para la preparación de esta edición. Los profesores Geoffrey Churchill y Brian Schott escribieron los programas de cómputo para obtener algunas de las tablas del apéndice; el profesor Pickett Riggs hizo muchas sugerencias valiosas para mejorar la presente edición, y el profesor James Terrell verificó las soluciones a los ejercicios y ejemplos nuevos y revisados. En lo que respecta a cualquier deficiencia del libro, sin embargo, debo aceptar la total responsabilidad.

Finalmente, agradezco la ayuda de mi esposa Mary, sin cuyas habilidades como mecanógrafa, correctora de pruebas y crítica, este libro no se hubiera publicado. (No Mames!!)

Wayne W. Daniel

Contenido

1

Organización y resumen de los datos

1.1 INTRODUCCIÓN

Los objetivos de este libro son dos: 1) enseñar al estudiante a organizar y resumir los datos y 2) enseñarle la manera de tomar decisiones cuando tiene una gran cantidad de datos, examinando sólo una pequeña parte de ellos. Los conceptos y métodos necesarios para lograr el primer objetivo se presentan bajo el encabezado de *estadística descriptiva* y el segundo objetivo se alcanza a través del estudio de lo que se conoce como *inferencia estadística.* En este capítulo, se estudia la estadística descriptiva. Del capítulo, 2 al 5 se estudian los temas que constituyen el fundamento de la inferencia estadística y la mayor parte del resto del libro trata de esta última.

Dado que esta obra se ha escrito para personas que están preparándose en una carrera del campo de la salud pública o que ya están ejerciéndola, el material ilustrativo y los ejercicios reflejan los problemas y actividades que estas personas probablemente encontrarán en el ejercicio de sus profesiones.

1.2 ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

Se definirán primero algunos términos básicos que se encontrarán aquí.

Estadística. El significado de *estadística* está implícito en la sección anterior. Sin embargo, más concretamente, puede decirse que *la estadística es un campo del estudio relacionado con 1) la recopilación, organización y resumen de los datos y 2) la obtención de inferencias acerca de un conjunto de datos cuando sólo se observa una parte de ellos.*

Bioestadística. Las herramientas de la estadística se emplean en muchos campos: negocios, educación, psicología, agricultura y economía para mencionar sólo unos cuantos. Cuando los datos que se están analizando se obtienen de las ciencias biológicas y de la medicina, se utiliza el término bioestadística para diferenciar a esta aplicación particular de herramientas y conceptos estadísticos. Esta área de aplicación es el propósito de este libro.

Variable. Si, conforme se observa una característica, se encuentra que toma valores distintos en diferentes personas, lugares o cosas, se dice que esta característica es una *variable.* Se hace esto por la sencilla razón de que la característica no es la misma cuando se observa en diferentes personas, lugares o cosas que la poseen. Algunos ejemplos de variables son la estatura de los adultos del sexo masculino, el peso de los niños en edad preescolar y la edad de los pacientes que se ven en una clínica dental.

Variables cuantitativas. Una *variable cuantitativa* es aquella que puede medirse en la forma habitual. Por ejemplo, se pueden hacer las mediciones de la estatura de adultos del sexo masculino, el peso de niños en edad preescolar y la edad de los pacientes que se ven en una clínica dental. Estos son ejemplos de *variables cuantitativas.*

Variables cualitativas. Algunas características pueden no ser medidas en el sentido en que se miden la estatura, el peso y la edad. Muchas características sólo pueden catalogarse, por ejemplo, cuando a una persona enferma se le hace un diagnóstico médico, cuando a una persona se clasifica dentro de un grupo socioeconómico o cuando se dice que una persona, lugar u objeto, posee o no alguna característica de interés. A las variables de este tipo se les conoce como *variables cualitativas.*

Aunque, en el caso de las variables cualitativas, no puede lograrse su medición en el sentido habitual del término, puede contarse el número de personas, lugares o cosas que pertenecen a varias categorías. El administrador de un hospital, por ejemplo, puede contar el número de pacientes admitidos durante un día para cada uno de los diferentes diagnósticos de admisión.

Variable aleatoria. Cada vez que se determina la estatura, peso o edad de un individuo, se dice con frecuencia que el resultado es un *valor* de la variable correspondiente. Cuando los valores obtenidos son el resultado de factores fortuitos, se dice que la variable es una *variable aleatoria*. Los valores que resultan de procedimientos de medición suelen conocerse como *observaciones* o simplemente como *medidas*.

Variable aleatoria discreta. Las variables pueden caracterizarse aún más como *discretas* o *continuas*. Dado que las definiciones matemáticamente rigurosas de variables discretas y continuas están fuera del alcance de este libro, en su lugar se dan definiciones no rigurosas y un ejemplo de cada una de ellas.

Una variable aleatoria discreta se caracteriza por saltos o interrupciones en los valores que ésta puede tener. Estos saltos o interrupciones indican la ausencia de valores entre los valores particulares que puede tener la variable. Algunos ejemplos ilustrarán el punto. El número de admisiones diarias a un hospital general es una variable aleatoria discreta ya que, cada día, el número de admisiones debe representarse por un número entero, como 0, 1, 2, 3 y así sucesivamente. El número de admisiones por día no puede ser un número como 1.5, 2.997 ó 3.3333. El número de dientes con caries, faltantes u obturados por niño en una escuela primaria es otro ejemplo de variable discreta.

Variable aleatoria continua. *Una variable aleatoria continua no posee los saltos o interrupciones que caracterizan a una variable aleatoria discreta.* Una variable aleatoria continua puede tener cualquier valor dentro de un intervalo especificado de valores asumidos por la variable. Ejemplos de variables continuas son las diversas mediciones que pueden hacerse en individuos, como estatura, peso y circunferencia del cráneo. No importa qué tan iguales sean las estaturas observadas en dos individuos, ya que por ejemplo, puede encontrarse teóricamente otra persona que tenga una estatura intermedia entre ambas.

Sin embargo, debido a las limitaciones de los instrumentos de medición con que se cuenta, las variables que son esencialmente continuas suelen tratarse como si fueran discretas. La estatura, por ejemplo, se registra a menudo hacia el centímetro más próximo, mientras que, con un aparato de medición exacto esa medición podría hacerse tan precisa como se deseara.

Población. La persona promedio piensa en una población como un grupo de elementos, por lo común personas. Sin embargo, una población o conjunto de elementos puede consistir de animales, máquinas, plantas o células. Para los fines de este libro, se define a una *población de elementos como el mayor grupo de elementos por los cuales se tiene un cierto interés en un momento dado.* Si se lleva a cabo una medición de alguna variable sobre cada uno de los elementos de una población, se obtiene una población de valores de esa variable. Por lo tanto, puede definirse a una *población de valores como el mayor grupo de valores de una variable aleatoria por los cuales se tiene un cierto interés en un momento dado.* Por ejemplo, si se tiene interés en el peso de todos los niños inscritos en un determinado sistema escolar municipal, la población consta de todos estos pesos. Si el interés se centra sólo en el peso de los alumnos de primer año del sistema, se tiene una población distinta: los pesos de los alumnos de primer año inscritos en el sistema escolar. En consecuencia, las poblaciones se determinan o definen de acuerdo con la esfera de interés que se tenga en ellas. Las poblaciones pueden ser *finitas* o *infinitas.* Si una población de valores consta de un número fijo de estos valores, se dice que la población es *finita.* Por otra parte, si una población consta de una sucesión sin fin de valores, dicha población es *infinita.*

Muestra. Una muestra puede definirse simplemente como *una parte de una población.* Supóngase que una población consta del peso de todos los niños de nivel primaria inscritos en un determinado sistema escolar municipal. Si se reúnen para el análisis el peso de sólo una fracción de estos niños, se tiene sólo una parte de la población de pesos, es decir, se tiene una *muestra.* Hay muchos tipos de muestras que pueden seleccionarse de una población. En los capítulos siguientes se estudian estos tipos.

1.3 EL ARREGLO ORDENADO

Cuando se hacen mediciones de una variable aleatoria sobre los elementos de una población, los valores resultantes llegan por lo general al investigador o estadístico, como un conjunto de datos desordenados.

Tabla 1.3.1 Edades (en años) de los pacientes admitidos a un hospital de enfermedades crónicas durante cierto mes.

Número	*Edad*	*Número*	*Edad*	*Número*	*Edad*	*Número*	*Edad*
1	10	26	48	51	63	76	53
2	22	27	39	52	53	77	33
3	24	28	6	53	88	78	3
4	42	29	72	54	48	79	85
5	37	30	14	55	52	80	8
6	77	31	36	56	87	81	51
7	89	32	69	57	71	82	60
8	85	33	40	58	51	83	58
9	28	34	61	59	52	84	9
10	63	35	12	60	33	85	14
11	9	36	21	61	46	86	74
12	10	37	54	62	33	87	24
13	7	38	53	63	85	88	87
14	51	39	58	64	22	89	7
15	2	40	32	65	5	90	81
16	1	41	27	66	87	91	30
17	52	42	33	67	28	92	76
18	7	43	1	68	2	93	7
19	48	44	25	69	85	94	6
20	54	45	22	70	61	95	27
21	32	46	6	71	16	96	18
22	29	47	81	72	42	97	17
23	2	48	11	73	69	98	53
24	15	49	56	74	7	99	70
25	46	50	5	75	10	100	49

A menos que el número de observaciones sea extremadamente pequeño, es poco probable que estos datos proporcionen mucha información hasta que se hayan ordenado de alguna forma. Si el número de observaciones no es demasiado grande, un primer paso para la organización de estos datos es la preparación de un *arreglo ordenado*. Un *arreglo ordenado* es una lista de los valores de una colección (ya sea población o muestra), en orden de magnitud, desde el valor más pequeño hasta el valor más grande.

Ejemplo 1.3.1

La tabla 1.3.1 consta de una lista de las edades de los pacientes admitidos a un hospital de enfermedades crónicas durante cierto mes.

La tabla refleja el orden en el que fueron admitidos los pacientes. Como puede verse, se requiere un examen minucioso para averiguar una información tan elemental como la edad del paciente más joven y del más viejo que se admitió. La tabla 1.3.2 presenta los mismos datos en la forma de un arreglo ordenado. Si tienen que efectuarse a mano algunos cálculos y la organización de datos adicionales, el trabajo puede facilitarse si se lleva a cabo a partir del arreglo ordenado. Si los datos tienen que analizarse por medio de una computadora, es posible que no sea necesario preparar un arreglo ordenado.

Tabla 1.3.2 Arreglo ordenado de las edades de los pacientes admitidos a un hospital de enfermedades crónicas durante cierto mes.

Número	*Edad*	*Número*	*Edad*	*Número*	*Edad*	*Número*	*Edad*
1	1	26	14	51	37	76	58
2	1	27	15	52	39	77	60
3	2	28	16	53	40	78	61
4	2	29	17	54	42	79	61
5	2	30	18	55	42	80	63
6	3	31	21	56	46	81	63
7	5	32	22	57	46	82	69
8	5	33	22	58	48	83	69
9	6	34	22	59	48	84	70
10	6	35	24	60	48	85	71
11	6	36	24	61	49	86	72
12	7	37	25	62	51	87	74
13	7	38	27	63	51	88	76
14	7	39	27	64	51	89	77
15	7	40	28	65	52	90	81
16	7	41	28	66	52	91	81
17	8	42	29	67	52	92	85
18	9	43	30	68	53	93	85
19	9	44	32	69	53	94	85
20	10	45	32	70	53	95	85
21	10	46	33	71	53	96	87
22	10	47	33	72	54	97	87
23	11	48	33	73	54	98	87
24	12	49	33	74	56	99	88
25	14	50	36	75	58	100	89

1.4 DATOS AGRUPADOS: LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Aunque un conjunto de observaciones puede hacerse más comprensible y adquirir mayor significado por medio de un arreglo ordenado, puede lograrse una mayor síntesis agrupando los datos. Para agrupar a un conjunto de observaciones, se selecciona un conjunto de intervalos contiguos que no se traslapen de modo que cada valor en el conjunto de observaciones pueda colocarse en uno, y sólo uno, de los intervalos. Estos intervalos se conocen en general como *intervalos de clase.*

Uno de los primeros puntos a considerar, cuando se van a agrupar ciertos datos, es cuántos intervalos van a incluirse. No es conveniente incluir muy pocos intervalos debido a que hay pérdida de información. Por otra parte, si se utilizan demasiados intervalos, no se logra el objetivo de la síntesis. La mejor guía en relación con lo anterior, así como para otras decisiones que deben tomarse al agrupar los datos, es el conocimiento que se tenga de ellos. Puede ser que se hayan determinado con anterioridad los intervalos de clase, como en el caso de las tabulaciones anuales, cuando se conservan los intervalos de clase de años anteriores con fines comparativos. Quienes deseen una recomendación sobre este aspecto, pueden consultar una fórmula dada por Sturges.[2] Esta fórmula es $k = 1 + 3.322\ (\log_{10} n)$, donde k representa el número de intervalos de clase y n el número de valores en el conjunto de datos bajo consideración. La respuesta obtenida aplicando la *regla de Sturges* no debe considerarse como definitiva, sino sólo como una guía. El número de intervalos de clase, especificado por este regla, debe aumentarse o disminuirse, según convenga en beneficio de una presentación clara.

Por ejemplo, supóngase que se tiene una muestra de 275 observaciones que se desean agrupar. En la tabla B del apéndice, se encuentra que el logaritmo de base 10 de 275 es 2.4393. Aplicando la fórmula de Sturges se obtiene un valor de $k = 1 + 3.22(2.4393) \simeq 9$. En la práctica, otras consideraciones llevarían a utilizar 8 (o menos) o quizá 10 (o más) intervalos de clase.

Otra cuestión que debe decidirse se refiere a la amplitud de los intervalos de clase. Aunque a veces es imposible, los intervalos de clase deberían, en general, tener la misma amplitud. Esta amplitud puede determinarse dividiendo el recorrido entre k, el número de intervalos de clase. Simbólicamente, la amplitud del intervalo de clase está dada por

$$w = \frac{R}{k} \tag{1.4.1}$$

donde R (el recorrido) es la diferencia entre la observación más pequeña y más grande en el conjunto de datos. Como regla general, este procedimiento proporciona una amplitud tan grande que no es conveniente utilizarla. Una vez más, debe aplicarse el buen juicio y seleccionar una amplitud (por lo común próxima a la obtenida por la ecuación 1.4.1) que sea más conveniente.

Ejemplo 1.4.1

La tabla 1.4.1 muestra los pesos en onzas de tumores malignos extirpados del abdomen de 57 personas. Para tener una idea del número de intervalos de clase que deben utilizarse, puede aplicarse la regla de Sturges para obtener

$$\begin{aligned} k &= 1 + 3.322(\log 57) \\ &= 1 + 3.322(1.7559) \\ &\approx 7 \end{aligned}$$

Tabla 1.4.1 Pesos, en onzas, de los tumores malignos extirpados del abdomen de 57 personas.

68	65	12	22
63	43	32	43
42	25	49	27
27	74	38	49
30	51	42	28
36	36	27	23
28	42	31	19
32	28	50	46
79	31	38	30
27	28	21	43
22	25	16	49
23	45	24	12
24	12	69	
25	57	47	
44	51	23	

Divídase ahora el recorrido entre 7 para tener una idea acerca de la amplitud del intervalo de clase. Se tiene que

$$\frac{R}{k} = \frac{79 - 12}{7} = \frac{67}{7} = 9.6$$

Resulta evidente que será más conveniente utilizar una amplitud de 10 para el intervalo de clase, lo que, asimismo, tendrá más significado para el lector. Pueden construirse ahora los intervalos. Dado que el valor más pequeño en la tabla 1.4.1 es 12 y el más grande 79, pueden empezarse los intervalos con 10 y terminarse con 79. Esto da los intervalos siguientes:

10–19
20–29
30–39
40–49
50–59
60–69
70–79

Puede apreciarse que hay siete de estos intervalos, el número sugerido por la regla de Sturges.

La determinación del número de valores que caen en cada intervalo de clase consiste simplemente en observar los valores uno por uno y colocar una pequeña marca a un lado del intervalo apropiado. Cuando se hace esto, se tiene la tabla 1.4.2.

Tabla 1.4.2 Distribución de frecuencias de los pesos (en onzas) de los tumores malignos extirpados del abdomen de 57 personas.

Intervalo de clase		*Frecuencia*
10–19	𝍸	5
20–29	𝍸 𝍸 𝍸 ////	19
30–39	𝍸 𝍸	10
40–49	𝍸 𝍸 ///	13
50–59	////	4
60–69	////	4
70–79	//	2
Total		57

Una tabla de este tipo se conoce como *distribución de frecuencias.* Esta tabla muestra la forma en la que los valores de la variable se distribuyen entre los intervalos de clase especificados. Consultándola, puede determinarse la frecuencia con la que ocurren los valores dentro de cualquiera de los intervalos de clase que se muestran.

A veces puede ser útil conocer la proporción (más que el número) de valores que caen dentro de un determinado intervalo de clase. Esta información se obtiene dividiendo el número de valores del intervalo de clase entre el número total de valores. Por ejemplo, si se desea conocer la proporción de valores entre 30 y 39, inclusive, se divide 10 entre 57 y se obtiene .18. Así, se dice que 10 de 57 ó 10/57 ó .18 de los valores están entre 30 y 39. Multiplicando .18 por 100 da el porcentaje de valores entre 30 y 39. Puede decirse entonces que el 18 por ciento de los 57 valores están entre 30 y 39. A la proporción de valores que caen dentro de un intervalo de clase se le da el nombre de *frecuencia relativa de ocurrencia* de los valores en ese intervalo.

Para determinar la frecuencia de los valores que caen dentro de dos o más intervalos de clase, se obtiene la suma del número de valores que caen dentro de los intervalos de clase de interés. Asimismo, si se desea conocer la frecuencia relativa de la ocurrencia de los valores que caen dentro de dos o más intervalos de clase, se suman las frecuencias relativas correspondientes. Pueden *acumularse* las frecuencias y frecuencias relativas para facilitar la obtención de información acerca de la frecuencia o frecuencia relativa de los valores dentro de dos o más intervalos de clase contiguos. La tabla 1.4.3 muestra los datos de

Tabla 1.4.3 Frecuencia, frecuencia acumulada, frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada para el ejemplo 1.4.1.

Intervalos de clase	*Frecuencia*	*Frecuencia acumulada*	*Frecuencia relativa*	*Frecuencia relativa acumulada*
10–19	5	5	.0877	.0877
20–29	19	24	.3333	.4210
30–39	10	34	.1754	.5964
40–49	13	47	.2281	.8245
50–59	4	51	.0702	.8947
60–69	4	55	.0702	.9649
70–79	2	57	.0351	1.0000
Total	57		1.0000	

la tabla 1.4.2 junto con las *frecuencias acumuladas,* las *frecuencias relativas* y las *frecuencias relativas acumuladas.*

Supóngase que se tiene interés en la frecuencia relativa de los valores entre 40 y 69. Se utiliza la columna de la frecuencia relativa acumulada de la tabla 1.4.3 y se resta .5964 de .9649, obteniéndose .3685.

El histograma. Puede representarse gráficamente una distribución de frecuencias (o una distribución de frecuencias relativas) en la forma de un *histograma,* como se muestra en la figura 1.4.1. Al construir un histograma, los valores de la variable en consideración constituyen el eje horizontal, mientras que el eje vertical tiene como escala a la frecuencia (o frecuencia relativa, si se desea) de ocurrencia. Por encima de cada intervalo de clase sobre el eje horizontal se levanta una barra rectangular, o celda, como a veces se conoce, de modo que su

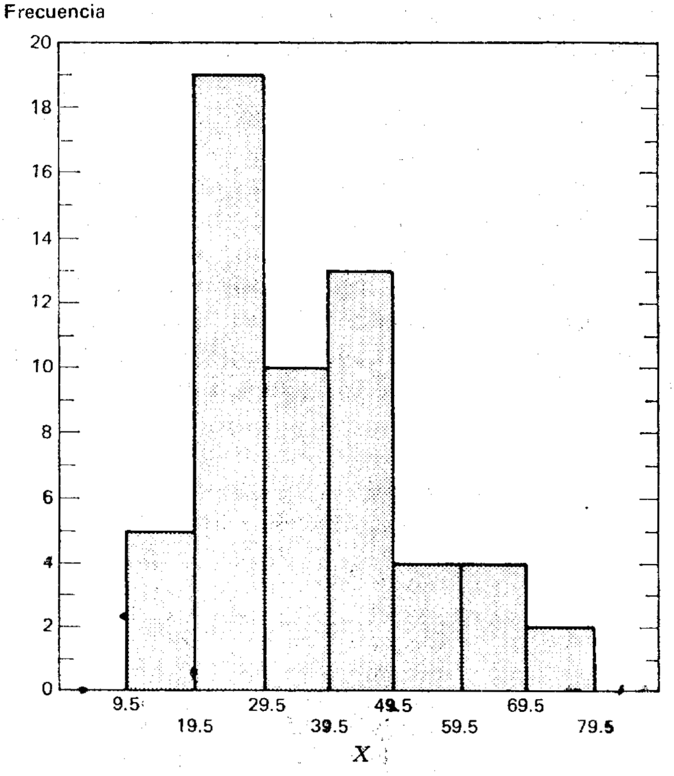


Figura 1.4.1 Histograma de los pesos (en onzas) de los tumores malignos extirpados del abdomen de 57 personas.

altura corresponda con la frecuencia correspondiente. Las celdas de un histograma deben quedar unidas y, para lograrlo, deben tomarse en cuenta los límites verdaderos de los intervalos de clase para evitar que queden espacios entre las celdas de la gráfica.

El nivel de precisión que se observa en datos reportados que se miden sobre una escala continua indica cierto orden de redondeo. El orden del redondeo refleja las preferencias personales de quien hace el reporte o las limitaciones del instrumento de medición utilizado. Cuando se construye una distribución de frecuencias a partir de los datos, los límites del intervalo de clase reflejan por lo general el grado de precisión de los datos en bruto. Esto se ha hecho en el ejemplo que se ha utilizado. Sin embargo, se sabe que algunos de los valores que caen dentro del segundo intervalo de clase por ejemplo, si se midieran con precisión, quizá serían poco menores que 20 y que algunos serían un poco mayores que 29. Considerando la continuidad fundamental de la variable y suponiendo que los datos se redondearon hasta el número entero más próximo, es conveniente pensar que 19.5 y 29.5 son los *límites verdaderos* de este segundo intervalo. Entonces, se toman los límites verdaderos para cada uno de los intervalos de clase, como se muestra en la tabla 1.4.4.

Si se traza una gráfica utilizando estos límites de clase como la base de los rectángulos, no quedarán espacios y se tendrá el histograma que se muestra en la figura 1.4.1.

Nótese que a cada observación se le asigna una unidad del área del histograma. Dado que se tienen 57 observaciones, el histograma consta de un total de 57 unidades. Cada celda posee una cierta proporción del área total, dependiendo de la frecuencia. Por ejemplo, la segunda

Tabla 1.4.4 Datos de la tabla 1.4.2 que representan los límites de clase verdaderos.

Límites de clase verdaderos	*Frecuencia*
9.5–19.5	5
19.5–29.5	19
29.5–39.5	10
39.5–49.5	13
49.5–59.5	4
59.5–69.5	4
69.5–79.5	2

celda contiene diecinueve cincuentisieteavos (19/57) del área. Esto, como ya se vio, es la frecuencia relativa de ocurrencia de los valores entre 19.5 y 29.5. A partir de esto, se ve que las subáreas del histograma, definidas por las celdas, corresponden a las frecuencias de ocurrencia de los valores entre los límites de las áreas de la escala horizontal. La razón de una subárea particular al área total del histograma equivale a la frecuencia relativa de ocurrencia de los valores entre los puntos correspondientes sobre el eje horizontal.

El polígono de frecuencias. Una distribución de frecuencias puede representarse gráficamente aun en otra forma, es decir, por medio de un *polígono de frecuencias.* Para trazar un polígono de frecuencias, se hace una marca primero en los puntos medios de la parte superior de cada una de las barras que representan los intervalos de clase so-

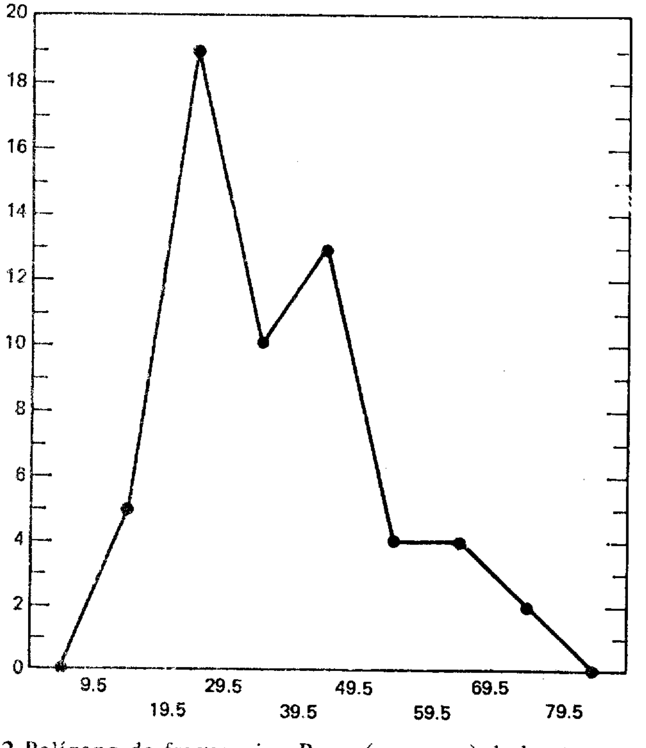


Figura 1.4.2 Polígono de frecuencias. Pesos (en onzas) de los tumores malignos extirpados del abdomen de 57 personas.

bre el eje horizontal de la gráfica, como la que se muestra en la figura 1.4.1. La altura de las barras de un determinado punto corresponde a la frecuencia del intervalo de clase pertinente. Uniendo los puntos por líneas rectas se obtiene el polígono de frecuencias. La figura 1.4.2 es el polígono de frecuencias para los datos del ejemplo 1.4.1.

Nótese que el polígono se lleva hasta el eje horizontal en los extremos hasta los puntos que serían los puntos medios si hubiera una celda adicional en cada extremo del histograma correspondiente. Esto permite que el área total quede incluida. El área total bajo el polígono de frecuencias equivale al área bajo el histograma. La figura 1.4.3 muestra el polígono de frecuencias de la figura 1.4.2 sobrepuesto sobre el histograma de la figura 1.4.1. Esta figura permite ver, para el mismo conjunto de datos, la relación que existe entre las dos formas gráficas.

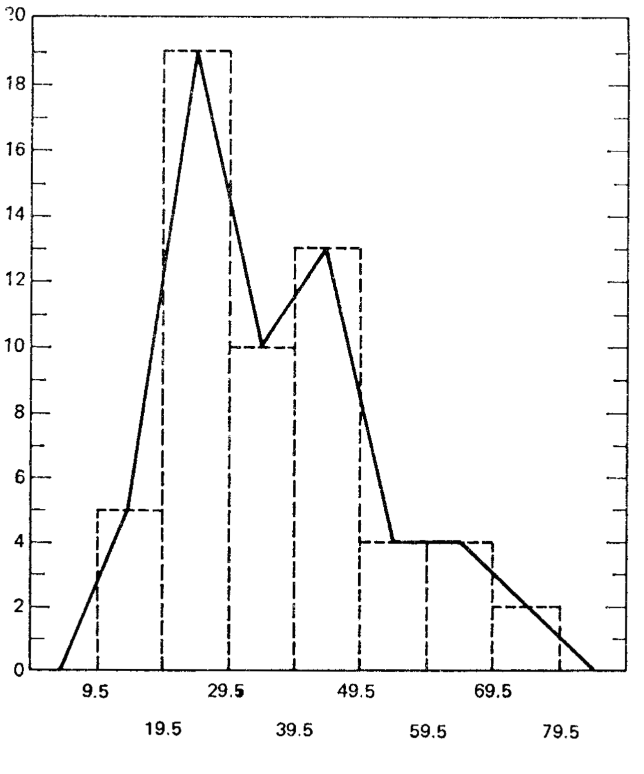


Figura 1.4.3 Polígono de frecuencias e histograma para el ejemplo 1.4.1.

Ejercicios

1.4.1 Los siguientes valores son los niveles de glucosa en sangre extraída a 100 niños en ayunas:

56	61	57	77	62	75	63	55	64	60
60	57	61	57	67	62	69	67	68	59
65	72	65	61	68	73	65	62	75	80
66	61	69	76	72	57	75	68	81	64
69	64	66	65	65	76	65	58	65	64
68	71	72	58	73	55	73	79	81	56
65	60	65	80	66	80	68	55	66	71
72	73	73	75	75	74	66	68	73	65
73	74	68	59	69	55	67	65	67	63
67	56	67	62	65	75	62	63	63	59

Trace:

a) Una distribución de frecuencias.
b) Un histograma.
c) Una distribución de frecuencias relativas.
d) Un polígono de frecuencias

1.4.2 Utilizando los datos de la tabla 1.3.1, trace:

a) Una distribución de frecuencias.
b) Una distribución de frecuencias relativas
c) Un histograma.
d) Un polígono de frecuencias.

1.4.3 Los siguientes valores son las calificaciones obtenidas en una prueba de inteligencia por un grupo de niños que participaron en un experimento:

Número del niño	*Calificación*	*Número del niño*	*Calificación*	*Número del niño*	*Calificación*	*Número del niño*	*Calificación*
1	114	16	90	31	137	46	118
2	115	17	89	32	120	47	110
3	113	18	106	33	138	48	108
4	112	19	104	34	111	49	134
5	113	20	126	35	100	50	118
6	132	21	127	36	116	51	114

Número del niño	*Califi-cación*	*Número del niño*	*Califi-cación*	*Número del niño*	*Califi-cación*	*Número del niño*	*Califi-cación*
7	130	22	115	37	101	52	142
8	128	23	116	38	111	53	120
9	122	24	109	39	110	54	119
10	121	25	108	40	137	55	143
11	126	26	122	41	119	56	133
12	117	27	123	42	115	57	85
13	115	28	149	43	83	58	117
14	88	29	140	44	109	59	147
15	113	30	121	45	117	60	102

Trace:

a) Una distribución de frecuencias.
b) Una distribución de frecuencias relativas.
c) Un histograma.
d) Un polígono de frecuencias.

1.4.4 A setenta y cinco empleados de un hospital general se les pidió que realizaran cierta tarea. Se registró el tiempo en minutos que requirió cada empleado para terminar su tarea. Los resultados son los que se muestran a continuación.

Número del empleado	*Tiempo*	*Número del empleado*	*Tiempo*	*Número del empleado*	*Tiempo*
1	1.3	26	2.2	51	3.2
2	1.5	27	2.3	52	3.0
3	1.4	28	2.6	53	3.4
4	1.5	29	2.8	54	3.4
5	1.7	30	2.1	55	3.2
6	1.0	31	2.3	56	4.5
7	1.3	32	2.4	57	4.6
8	1.7	33	2.0	58	4.9
9	1.2	34	2.8	59	4.1
10	1.8	35	2.2	60	4.6
11	1.1	36	2.5	61	4.2
12	1.0	37	2.9	62	4.0
13	1.8	38	2.0	63	4.3
14	1.6	39	2.9	64	4.8
15	2.1	40	2.5	65	4.5
16	2.1	41	3.6	66	5.1

Número del empleado	*Tiempo*	*Número del empleado*	*Tiempo*	*Número del empleado*	*Tiempo*
17	2.1	42	3.1	67	5.7
18	2.1	43	3.5	68	5.1
19	2.4	44	3.7	69	5.4
20	2.9	45	3.7	70	5.7
21	2.7	46	3.4	71	6.7
22	2.3	47	3.1	72	6.8
23	2.8	48	3.5	73	6.6
24	2.0	49	3.6	74	6.0
25	2.7	50	3.5	75	6.1

A partir de estos datos, trace:

a) Una distribución de frecuencias.
b) Una distribución de frecuencias relativas.
c) Un histograma.
d) Un polígono de frecuencias.

1.4.5 La siguiente tabla muestra el número de horas que durmieron 45 pacientes de un hospital después de la administración de un cierto anestésico.

7	10	12	4	8	7	3	8	5
12	11	3	8	1	1	13	10	4
4	5	5	8	7	7	3	2	3
8	13	1	7	17	3	4	5	5
3	1	17	10	4	7	7	11	8

A partir de estos datos, trace:

a) Una distribución de frecuencias.
b) Una distribución de frecuencias relativas.
c) Un histograma.
d) Un polígono de frecuencias

1.4.6 Los siguientes valores son el número de bebés nacidos durante un año en 60 hospitales de una comunidad.

30	55	27	45	56	48	45	49	32	57	47	56
37	55	52	34	54	42	32	59	35	46	24	57
32	26	40	28	53	54	29	42	42	54	53	59
39	56	59	58	49	53	30	53	21	34	28	50
52	57	43	46	54	31	22	31	24	24	57	29

A partir de estos datos, trace:

a) Una distribución de frecuencias.
b) Una distribución de frecuencias relativas.
c) Un polígono de frecuencias.

1.5 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Aunque la distribución de frecuencias tiene varias aplicaciones, hay muchos casos que requieren otros tipos de resúmenes de datos. Lo que se necesita en muchos casos es la habilidad para resumir los datos por medio de sólo unas cuantas *medidas descriptivas.* Las medidas descriptivas pueden calcularse a partir de los datos de una muestra o de una población. Para diferenciarlas, se tienen las siguientes definiciones:

1. *Una medida descriptiva calculada a partir de los datos de una muestra se conoce como* ***estadística.***
2. *Una medida descriptiva calculada a partir de los datos de una población se conoce como* ***parámetro.***

Hay varios tipos de medidas descriptivas que pueden calcularse a partir de un conjunto de datos. Sin embargo, en este capítulo la atención se ha centrado en las *medidas de tendencia central* y en las *medidas de dispersión.* Las medidas de tendencia central se estudiarán en esta sección y las medidas de dispersión en la siguiente.

En cada una de las medidas de tendencia central, de las cuales se estudiarán tres, se tiene un sólo valor que se considera como típico del conjunto de datos como un todo. Las tres medidas de tendencia central que más se utilizan son la *media,* la *mediana* y la *moda.*

Media aritmética. La medida de tendencia central más conocida es la media aritmética. Es la medida descriptiva que la mayoría de las personas tiene en mente cuando se habla del "promedio". El adjetivo aritmética distingue a esta media de otras que pueden calcularse. Dado que en este libro no se estudian estas otras medias, no debe haber motivo alguno de confusión si se menciona simplemente como *media* a la media aritmética. La media se obtiene sumando todos los valores en una población o muestra y dividiendo el valor obtenido entre el número de valores que se sumaron. Para obtener la edad media de la población de los 100 pacientes representados en la tabla 1.3.1, se hace lo siguiente:

$$\text{edad media} = \frac{10 + 22 + \cdots + 70 + 49}{100} = \frac{3920}{100} = 39.20$$

Los tres puntos en el numerador representan los valores que no se muestran con el fin de ahorrar espacio.

Será conveniente generalizar si es posible el procedimiento para obtener la media y representar dicho procedimiento por medio de una notación más compacta. Se empezará por designar a la variable aleatoria de interés por medio de la letra mayúscula X. En el presente ejemplo, sea X la variable aleatoria, edad. Los valores específicos de una variable aleatoria se designarán por medio de la letra minúscula x. Para distinguir un valor de otro, se agrega un subíndice a la x y se considera que dicho subíndice se refiere al primer, segundo y tercer valor, y así sucesivamente. Por ejemplo, de la tabla 1.3.1 se tiene que

$$x_1 = 10, \qquad x_2 = 22, \ldots, \qquad \text{y} \qquad x_{100} = 49$$

En general, un valor típico de una variable aleatoria se designará por x_i y el valor final, en una población finita de valores, por x_N. Por último, se utilizará la letra griega μ para representar la media de la población. Puede ahora escribirse la fórmula general para la media de una población finita como sigue:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \tag{1.5.1}$$

El símbolo $\sum_{i=1}^{N}$ indica que deben sumarse todos los valores de la variable desde el primero hasta el último. Este símbolo, Σ, llamado *signo de sumatoria,* se utilizará ampliamente en este libro. Cuando, por el contexto, resulta obvio cuáles valores deben sumarse, se omitirán los símbolos arriba y abajo de Σ.

Cuando se calcula la media para una muestra de valores, se sigue el procedimiento que acaba de describirse, con algunas modificaciones en la notación. Se utiliza $\bar{x}$ para designar la media de la muestra y n para indicar el número de valores de la muestra. La media de la muestra se expresa entonces como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.5.2}$$

Supóngase que se tiene una muestra que consta de las siguientes cinco ($n = 5$) observaciones de la tabla 1.3.1. Sustituyendo los datos de la

Observación de la población	*Observación de la muestra*	
Número	*Número*	*Valor*
x_{12}	x_1	10
x_{20}	x_2	54
x_{36}	x_3	21
x_{62}	x_4	33
x_{98}	x_5	53

muestra en la ecuación 1.5.2, se tiene que

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{10 + 54 + 21 + 33 + 53}{5} = \frac{171}{5} = 34.2$$

La media aritmética posee ciertas propiedades, algunas deseables y otras no tan deseables. Estas propiedades incluyen las siguientes:

1. Unicidad. Para un determinado conjunto de datos, existe una y sólo una media aritmética.
2. Simplicidad. La media aritmética es fácil de comprender y fácil de calcular.

3. Dado que todos y cada uno de los valores de un conjunto de datos intervienen en el cálculo de la media, ésta es afectada por cada valor. Por lo tanto, los valores extremos influyen en la media y, en algunos casos, pueden alterarla tanto que resulta inconveniente como una medida de tendencia central.

Como ejemplo de qué tanto pueden afectar los valores extremos a la media, considérese la situación siguiente. Supóngase que se investiga a los cinco médicos que ejercen en cierta área con el fin de determinar sus honorarios para cierto trámite. Supóngase que reportan estos honorarios: \$15, \$15, \$15.50, \$15.50 y \$80. Se encuentra que los honorarios medios para los cinco médicos son de \$28.20, un valor que no es muy representativo del conjunto de datos como un todo. El único valor atípico ha tenido el efecto de inflar la media.

Mediana. La mediana de un conjunto finito de valores es aquel valor que divide al conjunto en dos partes iguales tales que el número de valores iguales a la mediana o mayores que ella es igual al número de valores iguales a ella o menores que ella. Si el número de valores es impar, la mediana será el valor que está en medio, cuando todos los valores se han arreglado en orden de magnitud. Cuando el número de observaciones es par, no se tiene una sola observación en medio, sino dos. En este caso, se toma la mediana como la media de estas dos observaciones de en medio, cuanto todas las observaciones se han dispuesto en el orden de su magnitud.

Para ilustrar esto, encuéntrese la mediana de los datos de la tabla 1.3.2. Aquí, los valores ya están ordenados, de modo que sólo se necesita encontrar los dos valores de en medio. Estos son los números de observación 50 y 51. Los valores son 36 y 37 y, por lo tanto, la mediana es $(36 + 37)/2 = 36.5$.

Obténgase ahora la mediana de la muestra que consta de los valores 10, 54, 21, 33 y 53. Arreglando estos valores de acuerdo a su orden de magnitud, se tiene la secuencia 10, 21, 33, 53 y 54. Dado que éste es un número impar de valores, la mediana es el valor de en medio, o sea, 33.

Las propiedades de la mediana incluyen las siguientes:

1. Unicidad. Como ocurre con la media, sólo existe una mediana para un determinado conjunto de datos.
2. Simplicidad. La mediana es fácil de calcular.

3. No es afectada tan drásticamente por los valores extremos como lo es la media.

La moda. La moda de un conjunto de valores es aquel valor que ocurre con más frecuencia. Si todos los valores son distintos, no hay moda; por otra parte, un conjunto de valores puede tener más de una moda. Una vez más, observando los datos de la tabla 1.3.2, se encuentra que 7, el cual se presenta cinco veces, es el valor que ocurre con más frecuencia, y es por lo tanto la moda.

Como ejemplo de un conjunto de valores que tiene más de una moda, considérese un laboratorio con 10 empleados cuyas edades son 20, 21, 20, 20, 34, 22, 24, 27, 27 y 27 años. Puede decirse que estos datos tienen dos modas, 20 y 27. La muestra que tenga los valores 10, 21, 33, 53 y 54 no tiene moda, ya que todos estos valores son distintos.

La moda puede utilizarse para describir datos cualitativos. Por ejemplo, supóngase que los pacientes que se atendieron en una clínica de salud mental durante un determinado año recibieron uno de los siguientes diagnósticos: retraso mental, síndrome cerebral orgánico, psicosis, neurosis y alteración de la personalidad. El diagnóstico que ocurriera con más frecuencia en el grupo de pacientes se llamaría diagnóstico modal.

Ejercicios

1.5.1 Los siguientes valores son los niveles de glucosa en sangre extraída a 10 niños en ayunas.

Número	*Valor*	*Número*	*Valor*
1	56	6	65
2	62	7	65
3	63	8	68
4	65	9	70
5	65	10	72

Calcule:

a) La media.
b) La mediana.
c) La moda.

1.5.2 Los siguientes valores son los pesos de una muestra de 10 animales experimentales sometidos a una operación quirúrgica.

Número	*Peso(kg)*	*Número*	*Peso(kg)*
1	13.2	6	14.4
2	15.4	7	13.6
3	13.0	8	15.0
4	16.6	9	14.6
5	16.9	10	13.1

Encuentre: *a*) La media.
b) La mediana.

1.5.3 Quince pacientes que realizaron visitas iniciales a un departamento sanitario municipal recorrieron las siguientes distancias:

Paciente	*Distancia (millas)*	*Paciente*	*Distancia (millas)*
1	5	8	6
2	9	9	13
3	11	10	7
4	3	11	3
5	12	12	15
6	13	13	12
7	12	14	15
		15	5

Encuentre: *a*) La media de la distancia recorrida por estos pacientes.
b) La mediana de la distancia recorrida.

1.5.4 Una muestra de once pacientes admitidos para diagnóstico y evaluación en una sala psiquiátrica recientemente abierta en un hospital general, tuvieron las duraciones siguientes de su internación:

Número	*Duración del internado (días)*	*Número*	*Duración del internado (días)*
1	29	6	14
2	14	7	28
3	11	8	14
4	24	9	18
5	14	10	22
		11	14

Encuentre:

a) La duración media de la internación para estos pacientes.
b) La mediana.
c) La moda.

1.5.5 A veinte pacientes en el ala de convalescencia de un hospital general se les permitió que eligieran entre cuatro tipos de carne para la comida. Sus elecciones fueron las siguientes: pollo, pescado, pescado, hígado, pollo, pollo, torta de carne, pollo, pescado, torta de carne, hígado, pescado, torta de carne, pollo, pollo, pollo, hígado, pescado, torta de carne, pollo.

¿Cuál fue la elección modal?

1.6 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

La *dispersión* de un conjunto de observaciones se refiere a la variedad que exhiben los valores de las observaciones. Si todos los valores son iguales, no hay dispersión; si no todos son iguales, hay dispersión en los datos. La magnitud de la dispersión puede ser pequeña, cuando los valores, aunque distintos, están próximos entre sí. Si los valores están ampliamente desparramados, la dispersión es mayor. Otros términos que se utilizan como sinónimos de dispersión son los de *variación* y *diseminación*.

El recorrido. Una forma de medir la variación en un conjunto de valores es calcular el *recorrido*. El recorrido es la diferencia que existe entre el valor menor y el mayor de un conjunto de observaciones. Si se denota el recorrido por R, el valor mayor por x_L y el menor por x_S, el recorrido se calcula como sigue:

$$R = x_L - x_S \tag{1.6.1}$$

Utilizando los datos de la tabla 1.3.2, se tiene que

$$R = 89 - 1 = 88$$

La utilidad del recorrido es limitada. El hecho de que sólo tome en cuenta dos valores, hace que sea una medida pobre de la dispersión. La ventaja principal de utilizar el recorrido es la sencillez de su cálculo.

La variancia. Cuando los valores de un conjunto de observaciones están muy próximos a su media, la dispersión es menor que cuando están distribuidos sobre un amplio recorrido. Dado que esto es cierto, intuitivamente sería interesante el hecho de que se pudiera medir la dispersión con respecto a la diseminación de los valores en torno a su media. Dicha medida se realiza en lo que se conoce como *variancia.* Para calcular la variancia, se resta la media de cada uno de los valores, se elevan al cuadrado las diferencias y, a continuación, se suman. Esta suma de las desviaciones de los valores de su media (elevadas al cuadrado) se divide entre el tamaño de la muestra, menos 1, para obtener la variancia. Suponiendo que s^2 es la variancia de la muestra, el procedimiento puede escribirse simbólicamente como sigue:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \tag{1.6.2}$$

Considérese lo anterior calculando la variancia de la ya conocida muestra de la tabla 1.3.1.

$$s^2 = \frac{(10 - 34.2)^2 + (54 - 34.2)^2 + (21 - 34.2)^2 + (33 - 34.2)^2 + (53 - 34.2)^2}{4}$$

$$= \frac{1506.8}{4} = 376.7$$

La razón de dividir entre $n - 1$, en lugar de n, como podría haberse esperado, es por la consideración teórica conocida como *grados de libertad.* Al calcular la variancia, se dice que tiene $n - 1$ *grados de libertad.* Se razona como sigue. La suma de las desviaciones de los valores respecto a su media es igual a cero, como puede demostrarse. Entonces, si se conocen los valores de $n - 1$ de las desviaciones respecto a la media, se conoce el n-ésimo, ya que éste queda automáticamente determinado debido a la necesidad de que los n valores tengan como suma cero. El concepto de los grados de libertad se estudiará de nuevo posteriormente. Los estudiantes que estén interesados en aprender más sobre el tema en este momento, deben consultar el artículo escrito por Walker.[1]

Cuando el número de observaciones es grande, puede resultar tedioso el uso de la ecuación 1.6.2. La fórmula siguiente puede ser menos incómoda, especialmente cuando se utiliza una calculadora de escritorio o una portátil.

$$s^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)} \tag{1.6.3}$$

Cuando se calcula la variancia de una población de valores, se siguen los procedimientos esbozados en los párrafos anteriores, excepto que se divide entre N, en lugar de entre $N - 1$. Si se denota por σ^2 a la variancia de una población finita, las fórmulas que la definen y que facilitan su cálculo, respectivamente, son las siguientes:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N} \tag{1.6.4}$$

$$\sigma^2 = \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N \cdot N} \tag{1.6.5}$$

La variancia representa unidades cuadradas y, por lo tanto, no es una medida de dispersión apropiada cuando se desea expresar este concepto en términos de las unidades originales. Para obtener una medida de dispersión en las unidades originales, simplemente se toma la raíz cuadrada de la variancia. El resultado se conoce como *desviación estándar.* En general, la desviación estándar de una muestra está dada por la expresión:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.6.6}$$

La desviación estándar de una población finita se obtiene calculando la raíz cuadrada de la cantidad resultante de la ecuación 1.6.4.

El coeficiente de variación. La desviación estándar es útil como una medida de variación dentro de un determinado conjunto de datos. Sin embargo, cuando se desea comparar la dispersión en dos conjuntos de datos, el comparar las dos desviaciones estándar puede conducir a resultados ilógicos. Puede ser que las dos variables que intervienen se midan en unidades distintas. Por ejemplo, es posible que se desee saber, para una cierta población, si los niveles de colesterol en el suero, medidos en mg por 100 ml, son más variables que el peso del cuerpo, medido en kilogramos.

Además, aun cuando se utilice la misma unidad de medición, las dos medias pueden ser bastante distintas. Si se compara la desviación estándar de los pesos de niños de primer año de primaria con la desviación estándar de los pesos de jóvenes de primer año de secundaria, puede encontrarse que la desviación estándar de estos últimos es numéricamente mayor que la de los primeros debido a que los propios pesos son mayores y no porque la dispersión sea mayor.

Lo que se necesita en situaciones como ésta es una medida de variación relativa, más que una de variación absoluta. Dicha medida se encuentra en el *coeficiente de variación,* que expresa la desviación estándar como un porcentaje de la media. La fórmula está dada por la expresión:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{x}}(100) \tag{1.6.7}$$

Puede apreciarse que, como la media y la desviación estándar se expresan en la misma unidad de medición esta unidad se anula al calcular el coeficiente de variación. Lo que se tiene entonces es una medida que es independiente de la unidad de medición.

Supóngase que dos muestras de personas del sexo masculino proporcionan los resultados siguientes.

	Muestra 1	*Muestra 2*
Edad	25 años	11 años
Peso medio	72.5 kg	40 kg
Desviación estándar	5 kg	5 kg

La comparación de las desviaciones estándar podría llevar a concluir que las dos muestras poseen igual variabilidad. Sin embargo, si se calculan los coeficientes de variación para los individuos de 25 años de edad se tiene que:

$$\text{C.V.} = \frac{5}{72.5}(100) = 6.9$$

y para los de 11 años de edad,

$$\text{C.V.} = \frac{5}{40}\,(100) = 12.5$$

Si se comparan estos resultados, se tiene una impresión bastante distinta.

El coeficiente de variación también es útil para comparar los resultados obtenidos por diferentes personas que estén efectuando investigaciones que comprendan la misma variable.

Ejercicios

1.6.1 Con base en el ejercicio 1.5.1, calcule:

a) El recorrido.
b) La variancia, s^2.
c) La desviación estándar, s.

1.6.2 Con base en el ejercicio 1.5.2, calcule:

a) El recorrido.
b) La variancia, s^2.
c) La desviación estándar, s.
d) El coeficiente de variación.

1.6.3 Con base en el ejercicio 1.5.3, calcule:

a) El recorrido.
b) La variancia, s^2.
c) La desviación estándar, s.
d) El coeficiente de variación.

1.6.4 Con base en el ejercicio 1.5.4, calcule:

a) El recorrido.
b) La variancia, s^2.
c) La desviación estándar, s.
d) El coeficiente de variación.

1.7 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL CALCULADAS A PARTIR DE DATOS AGRUPADOS

Una vez que se han agrupado los datos, es posible que se desee calcular alguna de las medidas descriptivas, como la media y la variancia. Con frecuencia, un investigador no tiene acceso a los datos en bruto en los que está interesado, pero tiene una distribución de frecuencias. Los datos suelen publicarse en la forma de una distribución de frecuencias sin que vayan acompañados de una lista de los valores individuales o medidas descriptivas. Quienes estén interesados en una medida de tendencia central o una medida de dispersión para estos datos, deben calcularla por sí mismos.

Cuando se agrupan los datos, las observaciones individuales pierden su identidad. Observando una distribución de frecuencias puede determinarse el número de observaciones que caen dentro de los diferentes intervalos de clase, pero no pueden determinarse los valores reales. Debido a esto, deben plantearse ciertas hipótesis acerca de los valores cuando se calcule una medida descriptiva a partir de datos agrupados. Como consecuencia de estas suposiciones, los resultados obtenidos son sólo aproximaciones de los valores verdaderos.

La media calculada a partir de datos agrupados. Al calcular la media a partir de datos agrupados, se supone que todos los valores que caen dentro de un determinado intervalo de clase se localizan en el *punto medio* del intervalo. El punto medio de un intervalo de clase se obtiene calculando la media de los límites superior e inferior del intervalo. El punto medio del primer intervalo de clase de la distribución que se muestra en la tabla 1.4.3 equivale a $(10 + 19)/2 = 29/2 = 14.5$. Los puntos medios de los intervalos de clase sucesivos pueden encontrarse sumando la amplitud del intervalo de clase al punto medio anterior. El punto medio del segundo intervalo de clase de la tabla 1.4.3, por ejemplo, equivale a $14.5 + 10 = 24.5$.

Para encontrar la media, se multiplica cada punto medio por la frecuencia correspondiente, se suman estos productos y se divide entre la suma de las frecuencias. Si los datos representan una muestra de observaciones, el cálculo de la media puede mostrarse simbólicamente como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \tag{1.7.1}$$

donde k = el número de intervalos de clase, m_i = el punto medio del i-ésimo intervalo de clase y f_i = la frecuencia del i-ésimo intervalo de clase.

Cuando se calcula la media a partir de datos agrupados, resulta conveniente preparar una tabla de trabajo como la tabla 1.7.1, que se ha preparado para los datos de la tabla 1.4.3.

Ahora puede calcularse la media.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{2086.5}{57} = 36.6$$

El cálculo de una media a partir de una población de valores agrupados en un número finito de clases, se lleva a cabo exactamente en la misma forma.

Figura 1.7.1 Tabla de trabajo para calcular la media a partir de los datos agrupados de la tabla 1.4.3.

Intervalo de clase	*Punto medio de la clase* m_i	*Frecuencia de la clase* f_i	$m_i f_i$
10–19	14.5	5	72.5
20–29	24.5	19	465.5
30–39	34.5	10	345.0
40–49	44.5	13	578.5
50–59	54.5	4	218.0
60–69	64.5	4	258.0
70–79	74.5	2	149.0
Total		57	2086.5

La mediana: datos agrupados. Cuando se calcula la media a partir de datos agrupados, se supone que los valores dentro de un intervalo de clase se localizan en el punto medio; sin embargo, al calcular la mediana, se supone que dichos valores están distribuidos uniformemente en todo el intervalo.

El primer paso para calcular la mediana a partir de datos agrupados es localizar el intervalo de clase en el que se encuentra. Esto se hace encontrando el intervalo de clase que contenga el valor $n/2$. Con base una vez más en los datos del ejemplo 1.4.1 con fines ilustrativos, recuérdese que se tienen 57 observaciones. El valor de $n/2$ es 28.5. Observando la tabla 1.4.3 se ve que los dos primeros intervalos de clase comprenden 24 de las observaciones, y que 34 de ellas están comprendidas en los tres primeros intervalos de clase. El valor de la mediana, por lo tanto, está en el tercer intervalo de clase. Está en algún punto entre 29.5 y 39.5 si se consideran los límites de clase verdaderos. La pregunta ahora es: ¿Qué tanto debe avanzarse en este intervalo antes de llegar a la mediana? Bajo la premisa de que los valores están distribuidos uniformemente a lo largo de todo el intervalo, parece razonable que se debe avanzar una distancia igual a $(28.5 - 24)/10$ de la distancia total del intervalo de clase debido a que, después de alcanzar el límite inferior del intervalo de clase que contiene a la mediana, se necesitan $4\frac{1}{2}$ observaciones más, y hay un total de 10 observaciones en el intervalo. El valor de la mediana equivale entonces al valor del límite inferior del intervalo que contiene a la mediana, más 4.5/10 de la amplitud del intervalo. Para los datos de la tabla 1.4.3, se tiene que el valor de la mediana es de $29.5 + (4.5/10)(10) = 34$.

En general, la mediana puede calcularse a partir de datos agrupados mediante la siguiente fórmula:

$$\text{mediana} = L_i + \frac{j}{f_i}(U_i - L_i) \qquad (1.7.2)$$

donde L_i = el límite inferior verdadero del intervalo que contiene a la mediana, U_i = el límite superior verdadero del intervalo que contiene a la mediana, j = el número de observaciones que aún faltan por alcanzar a la mediana una vez que se ha alcanzado el límite inferior del intervalo que contiene a la mediana y f_i = la frecuencia del intervalo que contiene a la mediana.

La moda: datos agrupados. Se ha definido la moda de un conjunto de valores como el valor que ocurre con más frecuencia. Cuando se designa la moda de datos agrupados, se refiere por lo general a la *clase modal,* donde la clase modal es el intervalo de clase con la frecuencia más alta. En el ejemplo 1.4.1 la clase modal sería la segunda clase, 20-29, o bien, 19.5-29.5, utilizando los límites de clase verdaderos. Si debe especificarse un sólo valor para la moda de datos agrupados, se toma como el punto medio de la clase modal. En el presente ejemplo, éste es 24.5. La suposición que se hace es que todos los valores del intervalo caen en el punto medio.

1.8 LA VARIANCIA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR: DATOS AGRUPADOS

Al calcular la variancia y la desviación estándar a partir de datos agrupados, se supone que todos los valores que caen dentro de un determinado intervalo de clase se localizan en el punto medio del intervalo. Se recordará que ésta es la hipótesis que se planteó al calcular la media y la moda. Entonces, la variancia de una muestra está dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (m_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1} \tag{1.8.1}$$

donde los símbolos tienen las definiciones dadas en la ecuación 1.7.1.

En ocasiones puede preferirse utilizar la siguiente fórmula de cálculo de la variancia de la muestra:

$$s^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{k} m_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{k} m_i f_i \right)^2}{n(n-1)} \tag{1.8.2}$$

donde

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

La fórmula para definir a σ^2 es la misma que para s^2, excepto que μ sustituye a x y el denominador es $\sum_{i=1}^{k} f_i$. La fórmula para calcular σ^2 tiene a $N \cdot N$ en el denominador, en lugar de $n(n-1)$.

Se ejemplificará el cálculo de la variancia y de la desviación estándar, utilizando tanto la fórmula que las define como la fórmula computacional, empleando los datos de la tabla 1.4.3. Para hacerlo, resultará útil otra tabla de trabajo como la tabla 1.8.1.

Tabla 1.8.1 Tabla de trabajo para calcular la variancia y desviación estándar de los datos agrupados de la tabla 1.4.3

(1) *Intervalo de clase*	(2) *Punto medio de la clase* m_i	(3) *Frecuencia de la clase* f_i	(4) $(m_i - \bar{x})$	(5) $(m_i - \bar{x})^2$	(6) $(m_i - \bar{x})^2 f_i$	(7) m_i^2	(8) $m_i^2 f_i$
10–19	14.5	5	−22.1	488.41	2442.05	210.25	1051.25
20–29	24.5	19	−12.1	146.41	2781.79	600.25	11404.75
30–39	34.5	10	−2.1	4.41	44.10	1190.25	11902.50
40–49	44.5	13	7.9	62.41	811.33	1980.25	25743.25
50–59	54.5	4	17.9	320.41	1281.64	2970.25	11881.00
60–69	64.5	4	27.9	778.41	3113.64	4160.25	16641.00
70–79	74.5	2	37.9	1436.41	2872.82	5550.25	11100.50
Total		57		3236.87	13347.37		89724.25
$\bar{x} = 36.6$							

Dividiendo el total de la columna 6 entre el total de la columna 3, menos 1, se tiene que:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (m_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1} = \frac{13347.37}{56} = 238.3459$$

La desviación estándar es

$$s = \sqrt{238.3459} = 15.44$$

Si se utiliza la fórmula de cálculo de la ecuación 1.8.2, se tiene que:

$$s^2 = \frac{57(89724.25) - (2086.5)^2}{57(56)} = 238.3459$$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, considere a los conjuntos de datos como muestras.

1.8.1 Véase el ejercicio 1.4.1 y encuentre:

a) La media.
b) La mediana.
c) La clase modal.
d) La variancia.
e) La desviación estándar.

1.8.2 Véase el ejercicio 1.4.2 y encuentre:

a) La media.
b) La mediana.
c) La clase modal.
d) La variancia.
e) La desviación estándar.

1.8.3 Véase el ejercicio 1.4.3 y encuentre:

a) La media.
b) La mediana.
c) La clase modal.
d) La variancia.
e) La desviación estándar.

1.8.4 Véase el ejercicio 1.4.4 y encuentre:

a) La media.
b) La mediana.
c) La clase modal.
d) La variancia.
e) La desviación estándar.

1.8.5 Véase el ejercicio 1.4.5 y encuentre:

a) La media.
b) La mediana.
c) La variancia.
d) La desviación estándar.

1.8.6 Véase el ejercicio 1.4.6 y encuentre:

a) La media.
b) La mediana.
c) La variancia.
d) La desviación estándar.

1.9 LAS COMPUTADORAS Y EL ANÁLISIS BIOESTADÍSTICO

El uso generalizado relativamente reciente de las computadoras ha tenido un tremendo impacto sobre la investigación de las ciencias de la salud en general y en el análisis bioestadístico en particular. La necesidad de llevar a cabo largos y tediosos cálculos aritméticos como parte del análisis estadístico de datos perdura sólo en la memoria de aquellos investigadores y profesionistas cuyas carreras precedieron a la llamada "revolución de las computadoras". Las computadoras llevan a cabo un mayor número de cálculos más rápidos y mucho más precisos que los que pueden efectuar los especialistas humanos. El uso de las computadoras ha permitido que los investigadores dediquen más tiempo al mejoramiento de la calidad de los datos en bruto y a la interpretación de los resultados.

Existen programas de computadora grabados que permiten llevar a cabo más procedimientos estadísticos descriptivos e inferenciales que los que el investigador promedio puede necesitar. Algunos "paquetes" de procedimientos estadísticos que se utilizan ampliamente son los siguientes: *BMDP: Biomedical Computer Programs,*[3] *SPSS Statistical Package for the Social Sciences,*[4] *The IMSL Library,*[5] *Minitab*[6] y el *SAS.*[7] En un artículo, Dixon v Jennrich[8] describen 38 paquetes de programas estadísticos distintos. Dan información respecto a las máquinas en las cuales pueden analizarse los programas, requerimientos del núcleo de memoria, terminología de los programas, documentación disponible y otras fuentes de información. Los cálculos de muchos de los ejercicios de este libro pueden efectuarse mediante los programas de estos y otros paquetes de programas estadísticos.

En particular, la computadora es una herramienta útil para calcular medidas descriptivas y construir varias distribuciones a partir de grandes conjuntos de datos. El uso de una computadora evita la necesidad de utilizar las fórmulas de datos agrupados de las secciones 1.7 y 1.8 cuando se dispone también de los datos en bruto.

Los programas estadísticos difieren respecto a sus requerimientos de información, sus formatos de salida y los cálculos específicos que llevarán a cabo. El lector que desee utilizar una computadora para obtener las soluciones a los ejercicios de este libro debe conocer los programas que pueden utilizarse en su centro de cómputo para determinar, ante todo, si hay un programa que efectúe los cálculos requeridos. Una vez que se ha encontrado el programa apropiado, sus requerimientos de información deben estudiarse primero cuidadosamente antes de incorporar los datos de los ejercicios a la computadora. Por último, debe estudiarse el formato de información de salida del programa a fin de que pueda hacerse la correcta interpretación de los resultados. Quienes hayan estudiado un lenguaje de computación pueden, en algunos casos, desear escribir sus propios programas de computadora para aplicarlos a los ejercicios.

La utilidad de las computadoras en las ciencias de la salud no está limitada al análisis estadístico. Quien esté interesado en saber más acerca del uso de las computadoras en biología, medicina y otras ciencias de la salud, debe consultar los libros escritos por Krasnoff,[9] Ledley,[10] Lindberg,[11] Sterling y Pollack[12] y Taylor.[13]

Los avances generales en el uso de las computadoras en biología, medicina y otros campos relacionados se reportan en varias revistas dedicadas al tema. Algunas de estas revistas son las de *Computers in Biology and Medicine, Computers and Biomedical Research, International Journal of Bio-Medical Computing, Computer Programs in Biomedicine* y *Computers and Medicine.*

1.10 RESUMEN

En este capítulo se ha definido a la estadística como un área de estudio que trata de la recolección y descripción de datos y obtención de inferencias. Al principio del capítulo se incorporó un vocabulario básico de estadística. Se explican varios procedimientos estadísticos descriptivos. Estos procedimientos incluyen la organización de los datos por medio del arreglo ordenado, la distribución de frecuencias, la distribución de frecuencias relativas, el histograma y el polígono de frecuencias. Se describen los conceptos de tendencia central y variación, junto con los métodos para calcular sus medidas más comunes: media, mediana, moda, recorrido, variancia y desviación estándar. Los conceptos y métodos se presentan de manera que sea posible el manejo tanto de datos agrupados como de no agrupados.

Preguntas y ejercicios de repaso.

1. Explique qué se entiende por estadística descriptiva.
2. Explique qué se entiende por inferencia estadística.
3. Defina:

   a) Estadística
   b) Bioestadística
   c) Variable
   d) Variable cuantitativa
   e) Variable cualitativa
   f) Variable aleatoria
   g) Población

h) Población finita
i) Población infinita
j) Muestra
k) Variable discreta
l) Variable continua

4. ¿Qué es un arreglo ordenado?
5. Defina y compare las características de la media, mediana y moda.
6. ¿Cuáles son las ventajas y limitaciones del recorrido como una medida de dispersión?
7. ¿Qué es una distribución de frecuencias?
8. ¿Qué es una distribución de frecuencias relativas?
9. Explique la diferencia que existe entre una estadística y un parámetro.
10. Explique la razón de utilizar $n - 1$ para calcular la variancia de la muestra.
11. ¿Para qué se utiliza el coeficiente de variación?
12. ¿Para qué se utiliza la regla de Sturges?
13. ¿Qué es un histograma?
14. ¿Qué es un polígono de frecuencias?
15. ¿Qué suposiciones deben hacerse al calcular la media a partir de datos agrupados?; ¿cuáles respecto a la mediana?; ¿cuáles respecto a la variancia?
16. ¿Qué se entiende por el término *límites de clase verdaderos*?
17. Describa, a partir de su campo de estudio, una población de datos donde sea útil el conocimiento de la tendencia central y la dispersión. Obtenga los valores sintéticos reales o realísticos de dicha población y calcule la media, mediana, moda, variancia y desviación estándar utilizando las técnicas para datos no agrupados.
18. Reúna un conjunto de datos reales o realísticos a partir de su campo de estudio y construya una distribución de frecuencias, una distribución de frecuencias relativas, un histograma y un polígono de frecuencias.
19. Calcule la media, mediana, clase modal, variancia y desviación estándar para los datos del ejercicio 10 utilizando las técnicas para datos agrupados.
20. Encuentre un artículo de una revista de su campo de estudio en el cual se haya calculado alguna medida de tendencia central y de dispersión.
21. En un estudio diseñado para investigar la efectividad de un anestésico local potencial, varias dosis se administraron a 15 anima-

les de laboratorio. Se hizo un registro de la duración (en minutos) de la respuesta. Los resultados fueron los siguientes:

Número del animal	*Duración de la respuesta*	*Número del animal*	*Duración de la respuesta*
1	31	9	22
2	14	10	20
3	19	11	32
4	17	12	19
5	34	13	27
6	25	14	11
7	17	15	23
8	35		

Calcule la media, mediana, variancia y desviación estándar para estos datos de la muestra.

22. La siguiente tabla muestra el consumo diario de grasas (en gramos) de una muestra de 150 hombres adultos en un país en vías de desarrollo. Haga una distribución de frecuencias y un histograma para los siguientes datos. Calcule la media, mediana, variancia y desviación estándar.

22	62	77	84	91	102	117	129	137	141
42	56	78	73	96	105	117	125	135	143
37	69	82	93	93	100	114	124	135	142
50	77	81	94	97	102	119	125	138	142
46	89	88	99	95	100	116	121	131	152
63	85	81	94	93	106	114	127	133	155
51	80	88	98	97	106	119	122	134	151
52	70	76	95	107	105	117	128	144	150
68	79	82	96	109	108	117	120	147	153
67	75	76	92	105	104	117	129	148	164
62	85	77	96	103	105	116	132	146	168
53	72	72	91	102	101	128	136	143	164
65	73	83	92	103	118	127	132	140	167
68	75	89	95	107	111	128	139	148	168
68	79	82	96	109	108	117	130	147	153

23. Los siguientes valores son los niveles de hemoglobina (g/100 ml) de 10 niños que reciben tratamiento para anemia hemolítica:

9.1	8.3
10.0	9.9
11.4	9.1
12.4	7.5
9.8	6.7

Calcule la media, mediana, variancia y desviación estándar de esta muestra.

24. Veinte mujeres postmenopáusicas a quienes se les había practicado histerectomía durante su período de premenopausia recibieron una terapia diaria de estrógeno sintético durante cuatro meses. Después de dicho tratamiento, se registraron los siguientes valores de estrógeno:

61	58	54	54
81	56	81	75
61	80	92	59
63	83	71	58
82	92	69	94

Calcule la media, mediana, variancia y desviación estándar de esta muestra.

25. La siguiente tabla muestra la distribución de edades de casos de una cierta enfermedad reportada durante un año en un estado particular.

Edad	*Número de casos*
5–14	5
15–24	10
25–34	20
35–44	22
45–54	13
55–64	5
Total	75

Calcule la media, mediana, variancia y desviación estándar de esta muestra.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. Helen M. Walker, "Degrees of Freedom," *The Journal of Educational Psychology, 31* (1940), 253-269.
2. H. A. Sturges, "The Choice of a Class Interval," *Journal of the American Statistical Association, 21* (1926), 65-66.
3. W. J. Dixon y M. B. Brown, editores *BMDP: Biomedical Computer Programs P-Series,* University of California Press, Berkeley, 1979.
4. Norman H. Nie, C. Hadlai Hull, Jean G. Jenkins, Karin Steinbrenner, y Dale H. Bent, *SPSS Statistical Package for the Social Sciences,* segunda edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1975.
5. *The IMSL Library, Vols.* 1-3, International Mathematical and Statistical Libraries, Inc., Dallas, Texas, 1979.
6. Thomas A. Ryan Jr., Brian L. Joiner y Barbara F. Ryan, *Minitab Student Handbook,* Duxbury Press, North Scituate, Mass., 1976.
7. Anthony J. Barr, James H. Goodnight, John P. Sall y June T. Helwig, *A User's Guide to SAS 79,* SAS Institute, Inc., Raleigh, N. C., 1979.
8. W. J. Dixon y R. L. Jennrich,"Scope, Impact, and Status of Packaged Statistical Programs," *Annual Review of Biophysics and Bioengineering, I* (1972), 505-528.
9. Sidney O. Krasnoff, *Computers in Medicine,* Charles C. Thomas, Springfield, Ill., 1967.
10. Robert Steven Ledley, *Use of Computers in Biology and Medicine,* McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
11. Donald A. B. Lindberg, *The Computer and Medical Care,* Charles C. Thomas, Springfield, Ill., 1968.
12. Theodor D. Sterling y Seymour V. Pollack, *Computers and the Life Sciences,* Columbia University Press, Nueva York, 1965.
13. Thomas R. Taylor, *The Principles of Medical Computing,* Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1967.

Otras referencias, libros

1. Wilfred J. Dixon y Frank J. Massey, Jr., *Introduction to Statistical Analysis,* tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1969.
2. A. Bradford Hill, *Principles of Medical Statistics,* octava edición, Oxford University Press, Nueva York, 1967.

3. George W. Snedecor y William G. Cochran, *Statistical Methods,* séptima edición. The Iowa State University Press, Ames, 1967.
4. George H. Weinberg y John A. Schumaker, *Statistics: An Intuitive Approach,* segunda edición, Wadsworth, Belmont, Cal., 1980.
5. Bernard G. Greenberg, "Biostatistics," en Hugh Rodman Leavell y E. Gurney Clark, *Preventive Medicine,* McGraw-Hill, Nueva York, 1965.

Otras referencias, artículos de revistas

1. I. Altman y A. Ciocco, "Introduction to Occupational Health Statistics I," *Journal of Occupational Medicine, 6* (1964), 297-301.
2. A. R. Feinstein, "Clinical Biostatistics I, A New Name and Some Other Changes of the Guard," *Clinical Pharmacology and Therapeutics,* (1970), 135-138.
3. Alva R. Feinstein, "Clinical Biostatistics VI, Statistical Malpractice and the Responsibility of a Consultant," *Clinical Pharmacology and Therapeutics, 11* (1970), 898-914.
4. Lyon Hyams, "The Practical Psychology of Biostatistical Consultation," *Biometrics, 27* (1971), 201-211.
5. Johannes Ipsen, "Statistical Hurdles in the Medical Career," *American Statistician, 19* (jun. 1965), 22-24.
6. Richard K. Means, "Interpreting Statistics: An Art," *Nursing Outlook 13* (mayo 1965), 34-37.
7. E. S. Pearson, "Studies in the History of Probability and Statistics. XIV Some Incidents in the Early History of Biometry and Statistics, 1890-94," *Biometrika, 52* (1965), 3-18.
8. Harold M. Schoolman, "Statistics in Medical Research," *The New England Journal of Medicine, 280* (1969), 218-19.
9. Stanley Schor e Irving Karten, "Statistical Evaluation of Medical Journal Manuscripts," *Journal of the American Medical Association, 195* (1966), 1123-1128.
10. H. C. Selvin y A. Stuart "Data–Dredging Procedures in Surgery Analysis," *American Statistician, 20* (jun. 1966), 20-22.
11. Robert L. Stearman, "Statistical Concepts in Microbiology," *Bacteriological Reviews, 19* (1955), 160-215.
12. Harry E. Ungerleider y Courtland C. Smith, "Use and Abuse of Statistics," *Geriatrics, 22* (feb. 1967), 112-120.
13. James P. Zimmerman, "Statistical Data and Their Use," *Physical Therapy, 49* (1969), 301-302.

14. Robert I. Rollwagen, "Statistical Methodology in Medicine," *Canadian Medical Association Journal, 112* (1975), 677.
15. Editorial, "Limitations of Computers in Medicine," *Canadian Medical Association Journal, 104* (1971), 234-235.
16. Carol M. Newton, "Biostatistical Computing," *Federation Proceeding, Federation of American Societies for Experimental Biology, 33* (1974), 2317-2319.

2

Algunos conceptos básicos de probabilidad

2.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de la probabilidad proporciona la base para la inferencia estadística. Sin embargo, esta teoría, que es una rama de las matemáticas, no es el tema principal de este libro y, como consecuencia, sólo se estudian aquí sus conceptos fundamentales. Los estudiantes que deseen dedicarse a este tema deben consultar los libros sobre probabilidad de Bates,[1] Dixon,[2] Mosteller y colaboradores,[3] Earl y colaboradores,[4] Berman,[5] Hausner,[6] y Mullins y Rosen.[7] También encontrarán útiles los libros sobre estadística matemática de Freund,[8] Hogg y Craig[9] y Mood, Graybill y Boes.[10] Para quienes estén interesados en la historia de la probabilidad, se les recomiendan los libros de Todhunter[11] y David.[12] Por ejemplo, en este último se encuentra que el primer matemático que calculó correctamente una probabilidad teórica fue el italiano Girolamo Cardano, quien vivió de 1501 a 1576. Los objetivos de este capítulo son ayudar al estudiante a adquirir alguna habilidad matemática en el área de la probabilidad y ayudarle a comprender los conceptos más importantes. El progreso logrado a lo largo de estas líneas contribuirá en gran medida al éxito que tenga el estudiante en comprender los procedimientos de inferencia estadística que se presentan posteriormente en este libro.

El concepto de probabilidad no es extraño para quienes trabajan en las ciencias de la salud, y suele encontrarse en la comunicación cotidiana. Por ejemplo, puede escucharse decir a un médico que un paciente tiene un 50% de probabilidad de sobrevivir a una cierta operación. Otro médico puede decir que está un 95% seguro de que un paciente tiene una determinada enfermedad. Una enfermera de salud pública puede decir que nueve de diez veces un cierto cliente cancelará una cita. Así, se tiene la costumbre de medir la probabilidad de ocurrencia de algún evento por medio de un número entre cero y uno. Cuanto más probable sea el evento, más próximo estará el número a uno; y cuanto menos probable sea el mismo, más próximo estará el número a cero. Un evento que no puede ocurrir tiene una probabilidad de cero y otro que con seguridad ocurre tiene una probabilidad de uno.

2.2 DOS PUNTOS DE VISTA DE LA PROBABILIDAD: OBJETIVO Y SUBJETIVO

Hasta hace muy poco tiempo, la probabilidad era concebida por los estadísticos y matemáticos sólo como un fenómeno *objetivo* derivado de procesos objetivos.

El concepto de *probabilidad objetiva* puede caracterizarse aún más bajo los títulos de 1) *probabilidad clásica,* o *a priori* y 2) el concepto de probabilidad de *frecuencia relativa,* o *a posteriori.*

El estudio clásico de la probabilidad data del siglo XVII y del trabajo de dos matemáticos, Pascal y Fermat.[11, 12] Gran parte de esta teoría se desarrolló a través de los intentos por resolver los problemas relacionados con los juegos de azar, como el lanzamiento de los dados. Los ejemplos de los juegos de azar ilustran muy bien los principios que intervienen en la probabilidad clásica. Por ejemplo, si se lanza un dado no cargado de seis lados, la probabilidad de que se observe un 1 es igual a 1/6 y es la misma para las otras cinco caras. Si se elige al azar una carta de una baraja normal bien barajada, la probabilidad de elegir una de corazones es de 13/52. Las probabilidades como éstas se calculan por el proceso de razonamiento abstracto. No es necesario lanzar un dado o tomar una carta para calcular las probabilidades anteriores. En el lanzamiento del dado se dice que es *igualmente probable* observar cada uno de los seis lados si no existe razón en favor de alguno de ellos. Asimismo, si no existe razón en favor de la elección de una carta en particular de una baraja, se dice que es igualmente probable tomar cada una de las 52 cartas. Puede definirse la probabilidad en el sentido clásico de la manera siguiente.

Definición

> *Si un evento puede ocurrir en* N *maneras mutuamente exclusivas e igualmente probables y si* m *de éstas posee una característica,* E, *la probabilidad de ocurrencia de* E *es igual a* m/N.

Si se lee $P(E)$ como "la probabilidad de E", la definición anterior puede expresarse como

$$P(E) = \frac{m}{N} \tag{2.2.1}$$

La aproximación de la frecuencia relativa a la probabilidad depende de la repetición de algún proceso y de la capacidad para contar el número de repeticiones, así como del número de veces que ocurre algún evento de interés. En este contexto, la probabilidad de observar alguna característica, E, de un evento, puede definirse de la manera siguiente.

Definición

> *Si algún proceso se repite un gran número de veces,* n, *y si algún evento resultante con la característica* E *ocurre* m *veces, la frecuencia relativa de ocurrencia de* E, m/n, *será aproximadamente igual a la probabilidad de* E.

Para expresar esta definición en forma concreta, se escribe

$$P(E) = \frac{m}{n} \tag{2.2.2}$$

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, estrictamente hablando, m/n es sólo una estimación de $P(E)$.

A principios de la década de 1950, L. J. Savage[13] dio un impulso considerable a lo que se conoce como concepto "personal" de la probabilidad. Este punto de vista sostiene que la probabilidad mide la confianza que tiene un determinado individuo en la veracidad de una proposición particular. Este concepto no se basa en la repetición de algún proceso. De hecho, aplicando este concepto de probabilidad, puede evaluarse la probabilidad de un evento que sólo puede ocurrir una vez, por ejemplo, la probabilidad de que se encuentre una cura para el cáncer en los próximos 10 años.

Aunque el punto de vista subjetivo de la probabilidad ha recibido una gran atención desde hace ya varios años, no ha sido completamente aceptado por los estadísticos con orientaciones tradicionales.

2.3 PROPIEDADES ELEMENTALES DE LA PROBABILIDAD

En 1933, el enfoque axiomático de la probabilidad fue formalizado por el matemático ruso, A. N. Kolmogorov.[14] La base de este enfoque está englobada en tres propiedades, a partir de las cuales se construye un sistema completo de la teoría de la probabilidad mediante el uso de la lógica matemática. Las tres propiedades son las siguientes:

1. Dado algún proceso (o experimento) con n *resultados mutuamente excluyentes (llamados eventos)*, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, *a la probabilidad de cualquier evento,* E_i, *se le asigna un número no negativo.* Es decir,

$$P(E_i) \geq 0 \tag{2.3.1}$$

En otras palabras, todos los eventos deben tener una probabilidad mayor o igual a cero, lo cual es un requisito razonable en vista de la dificultad de concebir una probabilidad negativa. En concepto clave en el enunciado de esta propiedad es el concepto de los resultados *mutuamente excluyentes.* Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

2. *La suma de las probabilidades de todos los resultados mutuamente excluyentes es igual a 1.*

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 \tag{2.3.2}$$

Esta es la propiedad de *exhaustividad* y se refiere al hecho de que el observador de un proceso probabilístico debe tomar en cuenta todos los eventos posibles y, cuando se toman todos juntos, su probabilidad total es de 1. El requisito de que los eventos sean mutuamente excluyentes se satisface especificando que los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ no se traslapan.

3. *Considérense dos eventos cualesquiera mutuamente excluyentes,* E_i *y* E_j. *La probabilidad de que ocurra* E_i *o* E_j *es igual a la suma de sus probabilidades individuales.*

$$P(E_i \quad \text{o} \quad E_j) = P(E_i) + P(E_j) \tag{2.3.3}$$

Supóngase que los dos eventos no fueran mutuamente excluyentes, es decir, supóngase que pueden ocurrir al mismo tiempo. Al intentar calcular la probabilidad de ocurrencia de E_i o E_j, se descubriría el problema del traslape y el procedimiento se volvería bastante complicado.

Antes de aplicar estas ideas para calcular la probabilidad de un evento, resulta útil revisar algunas ideas básicas de la teoría de conjuntos y las técnicas de conteo. Estos temas se tratan en las siguientes dos secciones.

2.4 TEORÍA DE CONJUNTOS Y NOTACIÓN DE CONJUNTOS (NOCIONES BÁSICAS)

George Cantor (1845-1918) introdujo la teoría de conjuntos a fines del siglo pasado. Esta teoría es una herramienta matemática de gran utilidad en muchas ramas de las matemáticas, incluyendo la probabilidad. Debido a esta razón, la teoría de conjuntos se expone en el presente capítulo. Sin embargo, sólo se cubrirá un mínimo de sus conceptos básicos. Los libros de Breuer,[15] Stoll[16] y Maher,[17] entre otros, pueden consultarse para un estudio más completo.

Un *conjunto* es un grupo de *objetos* definidos y distintos. Los objetos que constituyen un conjunto se conocen como *elementos* o *miembros* del conjunto. Se utilizarán letras mayúsculas para designar un conjunto.

Un conjunto puede describirse en cualesquiera de las siguientes formas.

1. Enumerando todos los elementos del conjunto.
   Ejemplos:

   Conjunto *Todos los elementos del conjunto*
   A = {paciente número 1, paciente número 2, paciente número 3}
   B = {medicamento A, medicamento B, medicamento C, medicamento D}
   C = {animal 1, animal 2, . . . , animal n}
   D = {Sra. Pérez, Srita. Vázquez, Sr. González, Srita. Gutiérrez}

2. Describiendo el tipo de elementos que constituyen el conjunto.
   Ejemplos:

   Conjunto *Tipo de elemento*
   A = {todos los pacientes en estado crítico del cuarto piso}
   B = {todos los medicamentos utilizados en cierto experimento}
   C = {todos los animales utilizados en cierto experimento}
   D = {todas las enfermedades de salud pública empleadas en cierta clínica}

A continuación se dan algunos conceptos adicionales relacionados con los conjuntos.

1. Un *conjunto unitario* es un conjunto formado por un solo elemento.
2. Un conjunto que carece de elementos se conoce como *conjunto vacío* o *conjunto nulo,* y se designa por el símbolo ϕ.
3. El conjunto de todos los elementos por el que se tiene interés en una discusión dada se conoce como *conjunto universal.* Este conjunto se designa por medio de la letra mayúscula U.
4. Si el conjunto A contiene uno o más elementos del conjunto B, y si todo elemento de A es un elemento de B, entonces se dice que A es un *subconjunto* de B.
5. Por definición, el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier otro conjunto.
6. Dos conjuntos son iguales si, y sólo si, contienen los mismos elementos.

Las siguientes son algunas operaciones útiles con conjuntos. Donde sea conveniente, las diversas relaciones que hay entre los conjuntos se ilustrarán por medio de un artificio conocido como *diagrama de Venn,* el cual representa un conjunto como una porción de un plano.

1. La *unión* de dos conjuntos, A y B, es otro conjunto y consta de todos los elementos que pertenecen a A o a B, o tanto a A como a B. Se utilizará el símbolo $\cup$ para designar la unión de dos conjuntos.

Ejemplo: supóngase que en una clínica de salud mental, los casos asignados a una trabajadora social constan de los pacientes A, donde

$A =$ {pacientes 1, 2, 3, 4, 5, 6} = todos los pacientes asignados que están recibiendo terapia por medio de medicamentos

y el conjunto de los pacientes B, donde

$B =$ {pacientes 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11} = todos los pacientes asignados que están recibiendo psicoterapia de grupo

La unión de estos dos conjuntos puede escribirse como

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ = todos los pacientes asignados que están recibiendo terapia mediante medicamentos, psicoterapia, o ambas.

Se dice que los dos conjuntos, A y B son *no ajenos* cuando tienen al menos un elemento en común. En este caso, los elementos comunes son los pacientes 2 y 4.

En la figura 2.4.1 se muestran los tres conjuntos, utilizando diagramas de Venn. Nótese que $A \cup B$ es el área total sombreada en el rectángulo de la derecha.

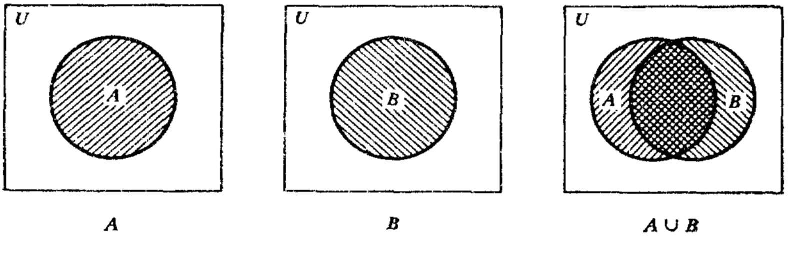


Figura 2.4.1 Unión de dos conjuntos no ajenos.

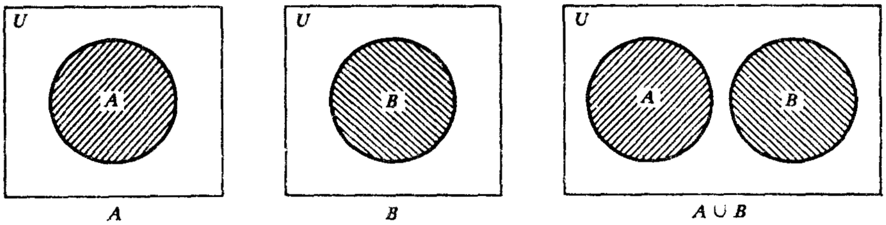


Figura 2.4.2 Unión de dos conjuntos ajenos.

Si dos conjuntos no tienen elementos en común se dice que son *ajenos*. Por ejemplo, supóngase que el 10 de marzo de 1983 fueron admitidos a un hospital general 15 pacientes, de los cuales 10 tenían más de 30 años y 5 menos de 30 años de edad. Defínanse los siguientes conjuntos:

A = {todos los pacientes de más de 30 años admitidos el 10 de marzo de 1983}

B = {todos los pacientes de menos de 30 años admitidos el 10 de marzo de 1983}

$A \cup B$ = {todos los pacientes admitidos el 10 de marzo de 1983}

Aquí, los conjuntos A y B son ajenos, puesto que un paciente no puede tener, al mismo tiempo, menos de 30 años y más de 30 años de edad. La unión de dos conjuntos ajenos se muestra en la figura 2.4.2.

2. La *intersección* de dos conjuntos, A y B, es otro conjunto, y consta de todos los elementos que están tanto en A como en B. Se utilizará el símbolo $\cap$ para designar a la intersección de dos conjuntos.

En el ejemplo anterior, que se refiere a los pacientes de una clínica de salud mental, la intersección de los conjuntos A y B consistiría de todos los pacientes que están recibiendo tanto la terapia mediante medicamentos como la psicoterapia de grupo, es decir, los pacientes 2 y 4. En la notación de conjuntos, esto se escribe como $A \cap B$ = {todos los pacientes que están recibiendo tanto la terapia mediante medicamentos como la psicoterapia de grupo}. En la figura 2.4.1, $A \cap B$ se muestra como el área doblemente sombreada, que representa el traslape de los conjuntos A y B.

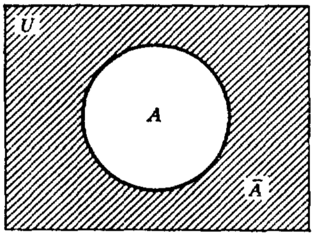


Figura 2.4.3 Diagrama de Venn mostrando los conjuntos A y $\bar{A}$.

El ejemplo de los pacientes admitidos a un hospital general el 10 de marzo de 1983 ilustra el hecho de que la intersección de dos conjuntos ajenos es el conjunto vacío.

3. Si el conjunto A es un subconjunto del conjunto universal, U, el *complemento* de A es otro subconjunto de U y consta de los elementos de U que no están en A. El complemento de A se designa como $\bar{A}$.

Supóngase que de 50 mujeres que están recibiendo cuidado prenatal privado, 4 tienen sangre tipo AB. Si se designa a las 50 mujeres como el conjunto universal, U, y al subconjunto de 4 con sangre tipo AB como el conjunto A, entonces el complemento de A es el conjunto $\bar{A}$ que consta de las 46 mujeres que tienen algún otro tipo sanguíneo. El complemento de un conjunto se muestra en la figura 2.4.3.

Ejemplo 2.4.1

Con frecuencia, es útil poder identificar a los conjuntos y subconjuntos representados por medio de datos tabulados cruzados, como en la tabla 2.4.1, que muestra al personal técnico y profesional de un grupo de hospitales, tabulado por edad y categoría de trabajo. Denótese el número de elementos de un conjunto, por decir el conjunto A, como $n(A)$ y utilícese la notación de conjuntos para identificar algunos de los subconjuntos definidos en la tabla.

En la tabla 2.4.1, los conjuntos A_1 al A_4 constan del personal que pertenece a los grupos especificados de edad y los conjuntos B_1 al B_9 constan del personal que pertenece a las categorías especificadas de trabajo. Pueden especificarse otros conjuntos utilizando los conceptos de intersección, unión y complemento. Por ejemplo,

Tabla 2.4.1 Empleados profesionales y técnicos de un grupo de hospitales, clasificados por edad y categoría de trabajo.

		A_1	A_2	A_3	A_4	
	Categoría de trabajo	*$\leqslant 25$*	*26–30*	*31–35*	*> 35*	*Total*
B_1	Médicos	0	5	25	75	105
B_2	Servicios de laboratorio clínico	20	30	35	35	120
B_3	Servicios de dietas	3	6	6	10	25
B_4	Servicios de registros médicos	7	15	8	12	42
B_5	Servicios de enfermería	200	375	442	203	1220
B_6	Farmacia	1	12	8	3	24
B_7	Tecnología radiológica	4	10	19	12	45
B_8	Servicios terapéuticos	5	25	15	10	55
B_9	Otros servicios profesionales y técnicos	20	35	50	25	130
Total		260	513	608	385	1766

el conjunto $B_1 \cap A_4$ consta de los médicos que tienen más de 35 años de edad, y $n(B_1 \cap A_4) = 75$. El conjunto $B_2 \cup A_2$ consta del personal de laboratorio clínico o del personal que está entre las edades de 26 y 30 años o ambos, y $n(B_2 \cup A_2) = 120 + 513 - 30 = 603$. Al calcular $n(B_2 \cup A_2)$, tiene que restarse el número (30), quienes son el personal tanto de laboratorio clínico como el que está entre las edades de 26 y 30 años, ya que se ha contado dos veces, o sea, está incluido tanto en el número 120 como en el 513. El complemento de A_4, $\overline{A}_4$, consta de todo el personal de 35 años de edad o menos y $n(\overline{A}_4) = 1766 - 385 = 1381$.

Ejercicios

2.4.1 La siguiente tabla muestra los pacientes admitidos a un hospital psiquiátrico durante un año. Los datos están tabulados por diagnóstico y edad.

	Edad (años)							
Diagnóstico	A_1 <15	A_2 15 a 24	A_3 25 a 34	A_4 35 a 44	A_5 45 a 54	A_6 55 a 64	A_7 65 y mayores	*Total*
B_1 Reacción psicótica involucional	0	0	0	7	27	20	4	58
B_2 Reacción maniático depresiva	0	1	1	4	9	5	4	24
B_3 Esquizo-frenia	5	90	140	160	103	44	7	549
B_4 Reacciones psiconeuróticas	0	26	44	47	29	13	3	162
B_5 Adicción al alcohol	0	7	41	77	68	26	5	224
B_6 Adicción a las drogas	0	2	2	4	2	2	1	13
Total	5	126	228	299	238	110	24	1030

Con base en la tabla anterior, explique con palabras los siguientes conjuntos y dé el número de pacientes en cada uno de ellos:

a) $A_4 \cap B_3$ *d*) $A_6 \cup B_5$
b) $B_5 \cap A_6$ *e*) $\overline{A}_1$
c) $B_3 \cup A_4$ *f*) $(A_4 \cup A_5) \cap B_3$

2.5 TÉCNICAS DE CONTEO: PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

En esta sección se presentan algunas técnicas útiles para contar el número de eventos que satisfacen algún conjunto de condiciones. Estas técnicas son útiles para calcular la probabilidad de un evento, cuando es grande el número total de eventos posibles.

Factoriales. Dado el entero positivo n, el producto de todos los números enteros de n a 1 se conoce como *factorial de* n y se escribe n!

Los siguientes son algunos ejemplos de factoriales:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$2! = 2 \cdot 1$$

y, en general,

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

Por definición, $0! = 1$. Debe observarse también que

$$10! = 10 \cdot 9!$$
$$5! = 5 \cdot 4!$$
$$n! = n(n-1)!$$

Ejemplo 2.5.1

Por medio de los factoriales, pueden contestarse las preguntas referentes al número de formas en que pueden disponerse unos objetos en línea. Por ejemplo, supóngase que se tienen cuatro recipientes de medios de cultivo, cada uno de los cuales está inoculado con un organismo distinto. ¿En cuántas formas distintas pueden colocarse en línea sobre un estante? La respuesta es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas. Una gráfica, conocida como diagrama arborescente, resulta útil para imaginar las posibilidades. Desígnese a las posibilidades como la primera, segunda, tercera y cuarta posiciones y a los cuatro medios por A, B, C y D. El diagrama arborescente de la figura 2.5.1 representa los arreglos posibles.

Permutaciones. Una *permutación* es un arreglo ordenado de objetos.

Los 24 arreglos de los medios de cultivo que se muestran en la figura 2.5.1 son las permutaciones posibles de cuatro objetos tomados los cuatro a la vez. A veces pueden tenerse más objetos que posiciones por llenar. Supóngase que, en el ejemplo anterior, sólo se tienen dos posiciones disponibles en el estante. ¿De cuántas maneras distintas pueden llenarse estas dos posiciones utilizando los cuatro medios

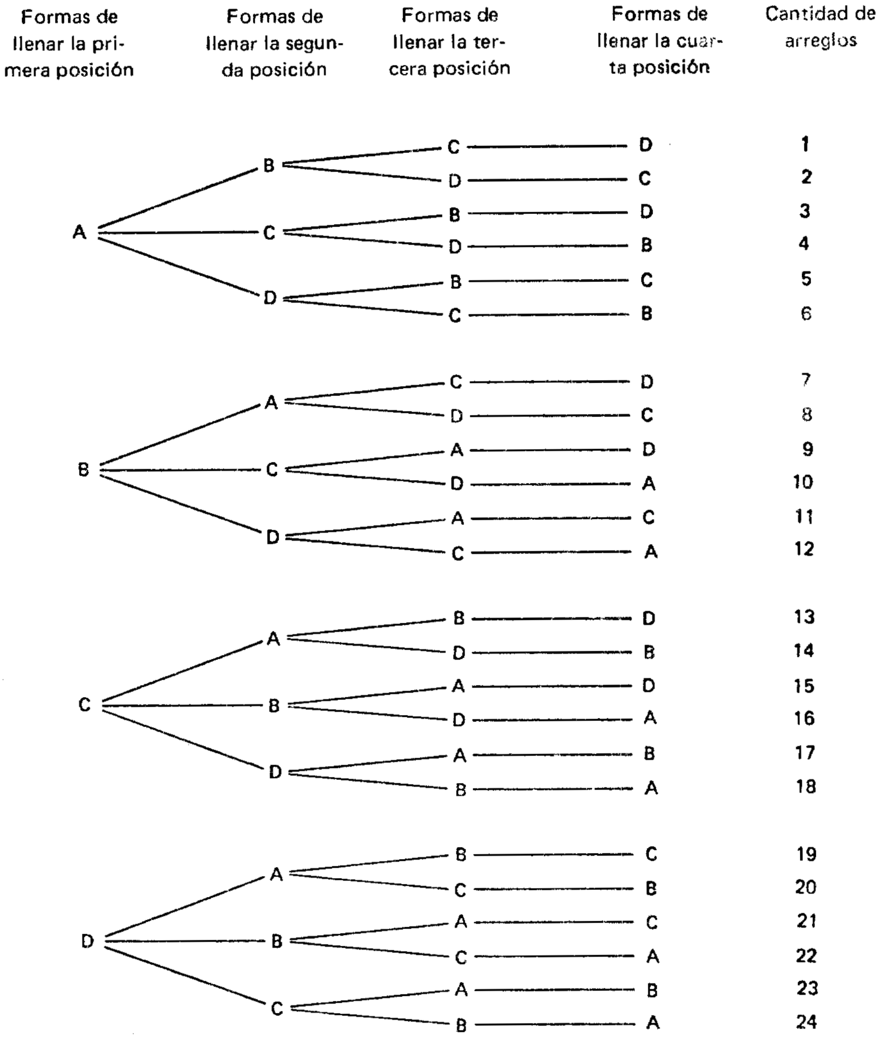


Figura 2.5.1 Diagrama arborescente que muestra los arreglos posibles de cuatro objetos colocados en línea.

de cultivo? Para contestar esta pregunta, debe determinarse el número de permutaciones posibles de cuatro objetos tomados dos a la vez. Se tienen cuatro objetos, A, B, C o D, con los cuales se puede llenar la primera posición. Una vez que se ha llenado la primera posición, se tienen sólo tres objetos, con los cuales puede llenarse

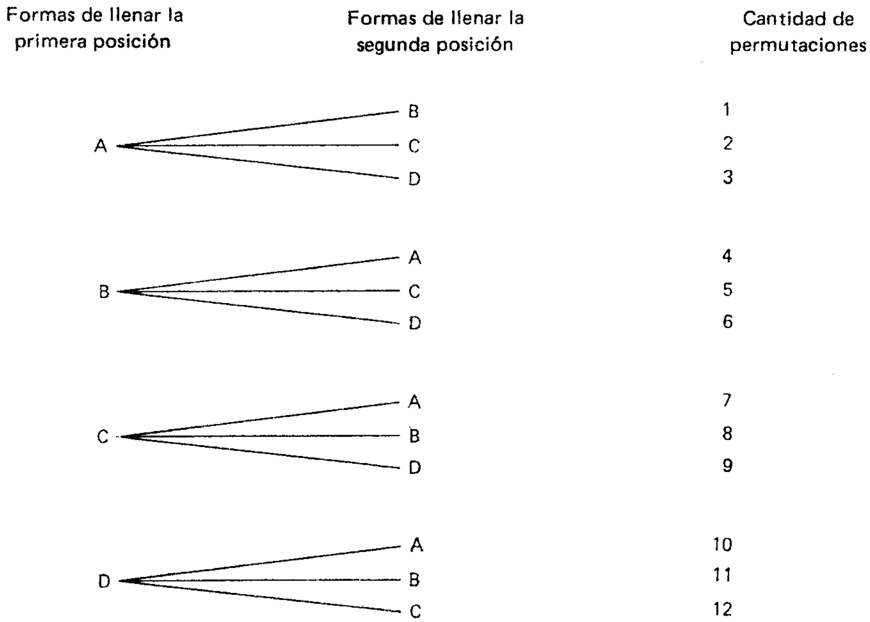


Figura 2.5.2 Diagrama arborescente que muestra las permutaciones de cuatro cosas tomadas dos a la vez.

la segunda posición. Una vez más, utilícese un diagrama arborescente (figura 2.5.2) para ilustrar la situación.

En la figura 2.5.2 se puede ver que hay $4 \cdot 3$ permutaciones posibles para cuatro objetos tomados dos a la vez. Desígnese por n al número de objetos distintos de los cuales se va a obtener un arreglo ordenado y por r al número de objetos en el arreglo. El número de dichos arreglos ordenados posibles se conoce como el número de permutaciones de n objetos tomados r a la vez y puede escribirse como ${}_nP_r$. En general, se tiene que

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{2.5.1} $$

También puede evaluarse ${}_nP_r$ por medio de una fracción que comprende factoriales como sigue:

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.5.2} $$

Desarrollando la ecuación 2.5.2 se tiene que:

$$_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 1}$$

El denominador y los términos del numerador más allá de $(n - r + 1)$ se anulan, quedando el otro miembro de la ecuación 2.5.1.

Considérese la evaluación de las permutaciones mediante otro ejemplo.

Ejemplo 2.5.2

En un departamento de sanidad municipal se tienen cinco oficinas adyacentes que van a ser ocupadas por cinco enfermeras, A, B, C, D y E. ¿De cuántas maneras distintas pueden asignarse las enfermeras a las oficinas? La respuesta se obtiene evaluando $_5P_5$, de modo que se tiene:

$$_5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Supóngase que hubiera seis enfermeras, de las cuales cuatro se fueran a asignar a cuatro oficinas adyacentes. En este caso, es necesario determinar el número de permutaciones de seis cosas tomadas cuatro a la vez, de modo que se tiene ahora que

$$_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 360$$

Combinaciones. Una *combinación* es un arreglo de objetos sin importar su orden. El número de combinaciones de n cosas tomadas r a la vez se escribe como $\binom{n}{r}$.

En la figura 2.5.2 las permutaciones de cuatro cosas tomadas dos a la vez consistieron de los 12 arreglos siguientes:

AB

AC

AD

BA

BC

BD

CA

CB

CD

DA

DB

DC

Nótese que, en la lista anterior, hay varias parejas de arreglos que son semejantes, excepto por el orden en el que aparecen las letras. Pueden ordenarse estas parejas para obtener

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

En ciertos casos, es posible que no se desee establecer una distinción entre el arreglo AB y el arreglo BA, por ejemplo. Es posible que se desee considerarlos como el mismo subconjunto, en cuyo caso se dice que *el orden no cuenta* y a estos arreglos se les da el nombre de combinaciones. Aunque en el ejemplo de los medios de cultivo se tienen 12 permutaciones, sólo se tienen seis combinaciones. En otras palabras, se tienen dos permutaciones por cada combinación. En general, se tendrán $r!$ permutaciones por cada combinación de n cosas tomadas r a la vez, o, diciéndolo de otra manera, en general, se tendrán $r!$ veces tantas permutaciones como combinaciones. Es decir,

$$_nP_r = r!\binom{n}{r} \tag{2.5.3}$$

Si se resuelve la ecuación 2.5.3 para $\binom{n}{r}$, se tiene que

$$\binom{n}{r} = \frac{_nP_r}{r!}$$

Volviendo a escribir el numerador de acuerdo con la ecuación 2.5.2, se tiene la fórmula para el número de combinaciones de n cosas tomadas r a la vez:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{2.5.4}$$

Se demostrará ahora que cuando se utiliza la ecuación 2.5.4 para obtener el número de combinaciones de cuatro cosas tomadas dos a la vez, se tiene un valor de seis:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6$$

Ejemplo 2.5.3

Como un ejemplo más, supóngase que un jefe de terapia de grupos de una clínica de enfermos mentales tiene 10 pacientes, de los cuales debe formar un grupo de seis. ¿Cuántas combinaciones de pacientes son posibles? Se encuentra que la respuesta está dada por el siguiente desarrollo:

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Permutaciones de objetos que no son todos distintos. Al estudiar las permutaciones, se ha considerado el caso donde todos los objetos que están permutándose son distintos. En algunos casos, en un conjunto de objetos que van a permutarse pueden tenerse uno o más subconjuntos de objetos que no son distinguibles. Surge ahora la pregunta de cuántas permutaciones son posibles bajo estas circunstancias. Parece lógico que el número sea menor que cuando todos los objetos son distintos.

Ejemplo 2.5.4

Considérese lo anterior respecto al caso de las cinco enfermeras, A, B, C, D y E, a quienes se les van a asignar oficinas adyacentes. Supóngase que dos de las enfermeras desean que sus oficinas se pinten de blanco, dos de amarillo y la enfermera restante desea que su oficina se pinte de verde. ¿Cuántas secuencias de colores son posibles? Se supone que, con respecto al color, las dos oficinas blancas no son distinguibles, así como también las de color amarillo. Las secuencias posibles de colores para las cinco oficinas adyacentes son las siguientes:

BBAAV	AABBV	ABBAV
BBAVA	AABVB	ABBVA
BBVAA	AAVBB	ABVBA
BVBAA	AVABB	AVBBA
VBBAA	VAABB	VABBA
BABAV	ABABV	BAABV
BABVA	ABAVB	BAAVB
BAVBA	ABVAB	BAVAB
BVABA	AVBAB	BVAAB
VBABA	VABAB	VBAAB

Como puede verse, hay 30 secuencias posibles. Si cada enfermera hubiera deseado un color distinto, de modo que, con respecto al color, todas las oficinas fueran distintas, habrían ${}_5P_5 = 5! = 120$ secuencias posibles de colores.

Supóngase que los dos blancos son distinguibles, por decir, que uno sea blanco mate; y que los amarillos son también distinguibles, por decir, que uno sea oscuro y el otro claro. Se indicarán ahora las diferencias por medio de subíndices, de la manera siguiente: B_1, B_2, A_1, A_2. Puede tomarse cualquiera de las secuencias dadas anteriormente y obtener tres secuencias adicionales, permutando los subíndices. Esto se hace permutando los dos subíndices para el blanco, mientras que los amarillos no se alteran. Se tienen 2! de esas permutaciones. Pueden obtenerse 2! secuencias adicionales permutando los subíndices de los amarillos, dejando los blancos inalterados. Dado que sólo hay un verde, no tiene que considerarse su efecto sobre el número de permutaciones, simplemente notando que hay 1! permutaciones del único verde. Sin embargo, si hubiera dos verdes que pudieran distinguirse, tendrían que tomarse en cuenta las 2! permutaciones posibles resultantes. Considérese ahora la primera secuencia e ilústrese lo anterior. Las cuatro secuencias posibles, cuando puede distinguirse entre los blancos y amarillos, son las siguientes:

$$B_1\,B_2\,A_1\,A_2\,V$$

$$B_2\,B_1\,A_1\,A_2\,V$$

$$B_1\,B_2\,A_2\,A_1\,V$$

$$B_2\,B_1\,A_2\,A_1\,V$$

Como puede hacerse esto para cualquiera de las 30 secuencias anteriores, se ve que hay $30 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! = 120$ secuencias cuando todos los objetos son distintos. Por supuesto, esto equivale a ${}_5P_5 = 120$, resultando lo que se encontró anteriormente.

Si se hace ${}_nP_{n_1,\, n_2, \ldots,\, n_k}$ igual al número de secuencias distinguibles que pueden formarse a partir de n objetos tomados n a la vez, cuando n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, . . . y n_k son de un k-ésimo tipo, y $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, pueden generalizarse los resultados anteriores escribiendo

$$n! = ({}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_k})n_1!n_2!\cdots n_k!$$

Si se resuelve para ${}_nP_{n_1,\, n_2, \ldots,\, n_k}$ se tiene que

$${}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{2.5.5}$$

Utilizando como ilustración el ejemplo que se está tratando, se tiene que

$$_5P_{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = 30$$

que es el número de secuencias enumeradas anteriormente.

Ejemplo 2.5.5

Considérese ahora otro ejemplo. Supóngase que el departamento de servicio de alimentos de un hospital está sirviendo, en cierto día, dos verduras blancas, dos verdes y dos amarillas. ¿Cuántos arreglos distinguibles de estas verduras pueden hacerse en la línea de servicio si lo único que interesa es distinguir a las verduras según su color? Utilizando la ecuación 2.5.5, se encuentra que la respuesta es

$$_6P_{2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{8} = 90$$

Se tiene un importante caso especial de la ecuación 2.5.5 cuando sólo están presentes dos tipos de objetos, es decir, cuando r son de un tipo y $n - r$ son de otro tipo. En este caso, se tiene que

$$_nP_{r,n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \qquad (2.5.6)$$

A partir de esto se observa que el número de permutaciones distintas de n cosas, de las cuales r son de un tipo y $n - r$ son de otro, es igual al número de combinaciones de n cosas distintas, tomadas r a la vez.

Ejercicios

2.5.1 Evalúe lo siguiente:

a) $_6P_2$ *b*) $_7P_3$ *c*) $_{10}P_5$

d) $\binom{6}{2}$ *f*) $\binom{10}{5}$ *h*) $\binom{9}{5}$

e) $\binom{7}{3}$ *g*) $\binom{8}{5}$ *i*) $\binom{5}{2}$

2.5.2 Una enfermera de salud pública está preparando un programa para una reunión con señoras embarazadas. Tiene que cubrir cuatro temas y puede hacerlo en cualquier orden.

a) ¿Cuántos programas distintos puede preparar?
b) Supóngase que en el último minuto se da cuenta que tiene tiempo sólo para desarrollar tres temas. ¿Cuántos programas distintos puede presentar si considera que los cuatro tienen la misma importancia?

2.5.3 Para la comida, en un hospital un paciente puede elegir una de cuatro carnes, dos de cinco vegetales y uno de tres postres. ¿Cuántas comidas distintas puede elegir el paciente si selecciona el número especificado de cada grupo?

2.5.4 Un fisioterapeuta, al planear su horario del día, encuentra que tiene que realizar siete actividades ese día.

a) Si puede realizar esas actividades en el orden que desee, ¿cuántos horarios distintos puede preparar?
b) Si decide tomar la tarde libre, de modo que sólo tiene tiempo para tres de sus actividades, ¿cuántos horarios puede preparar?

2.5.5 Un educador en asuntos de sanidad tiene tres carteles para exhibirlos uno junto al otro en la pared del vestíbulo de un centro de salud. ¿En cuántas formas distintas los puede disponer?

2.5.6 Supóngase que en cierto laboratorio se tienen cuatro trabajos que deben realizarse en una tarde particular y que hay cinco personas para llevarlos a cabo. ¿En cuántas formas pueden asignarse las cinco personas a los cuatro trabajos?

2.5.7 Un investigador tiene cuatro medicamentos que desea poner a prueba, pero sólo cuenta con los suficientes animales experimentales para probar tres de esos medicamentos. ¿Cuántas combinaciones de medicamentos puede poner a prueba?

2.5.8 Un educador en asuntos de sanidad ha conseguido la participación de cuatro dirigentes de una comunidad (dos hombres y dos mujeres) en un programa de mesas redondas. ¿En cuántas formas puede distribuir a los dirigentes en una sola línea frente a la audiencia, si la única distinción que desea tomar en cuenta entre ellas es respecto a su sexo?

2.5.9 A ocho animales de laboratorio se les ha administrado cierta droga; tres con el tipo A, tres con el tipo B y dos con el tipo C. Cada animal debe colocarse en una de ocho jaulas adyacentes para su observación. Si los animales sólo pueden distinguirse según el tipo de fármaco que recibieron, ¿cuántos arreglos distintos son posibles?

2.6 CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Ahora se aplicarán los conceptos y técnicas de las secciones anteriores para calcular las probabilidades de eventos específicos. Conforme se necesiten, se irán presentando ideas adicionales.

Ejemplo 2.6.1

Con fines ilustrativos, se utilizará el ejemplo 2.4.1 y los datos dados en la tabla 2.4.1. Supóngase que se elige un empleado al azar de todos los empleados que se presentan, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona tenga 25 años de edad o sea más joven? Se considerará que la probabilidad de seleccionar a cualquier empleado es igual a la probabilidad de seleccionar a cualquier otro, y se define la probabilidad de interés como el número de resultados favorables dividido entre el número total de resultados posibles. Entonces, la respuesta a la pregunta es

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(U)} = \frac{260}{1766} = .15$$

Probabilidad condicional. En ocasiones, el conjunto de "todos los resultados posibles" puede constituir un subconjunto del conjunto universal. En otras palabras, la población de interés puede disminuir por algún conjunto de condiciones no aplicables a la población total. Cuando se calculan las probabilidades con un subconjunto del conjunto universal como denominador, el resultado es una *probabilidad condicional.*

Puede ilustrarse el concepto de la probabilidad condicional utilizando nuevamente la tabla 2.4.1. Supóngase que se tiene interés en calcular la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar de los 1,766 empleados sea médico. Esta es una probabilidad incondicional, ya que no se han establecido condiciones sobre el conjunto de todos los resultados posibles y se calcula de la manera siguiente.

$$P(B_1) = \frac{n(B_1)}{n(U)} = \frac{105}{1766} = .06$$

Empero, supóngase que se reduce el conjunto de todos los resultados posibles a aquellos empleados que tienen más de 35 años de edad (conjunto A_4). Ahora, ¿cuál es la probabilidad de que un empleado sea médico dado que se elige al azar del conjunto de empleados que tienen más de 35 años? En la tabla 2.4.1 se observa que hay 385 miembros del conjunto A_4, empleados con más de 35 años de edad. Se observa también que, de este número, 75 de ellos son médicos y que estos 75 son el número de miembros del conjunto $B_1 \cap A_4$. Así, se encuentra que la respuesta a la pregunta es

$$P(B_1 | A_4) = \frac{n(B_1 \cap A_4)}{n(A_4)}$$

$$= \tfrac{75}{385} = .19$$

La línea vertical en $P(B_1|A_4)$ se lee "dado".

Puede obtenerse la probabilidad $P(B_1|A_4)$ de otra forma. Supóngase que se dividen el numerador y denominador entre $n(U)$, el número en el conjunto universal, el número total de empleados. Esto da

$$P(B_1|A_4) = \frac{\dfrac{n(B_1 \cap A_4)}{n(U)}}{\dfrac{n(A_4)}{n(U)}}$$

El numerador de esta última expresión es la probabilidad de que un empleado elegido al azar de entre todos los empleados sea médico y tenga más de 35 años de edad, y puede escribirse como $P(B_1 \cap A_4)$. El denominador es la probabilidad de que un empleado elegido al azar tenga más de 35 años de edad, y puede escribirse como $P(A_4)$. La expresión completa puede escribirse como

$$P(B_1|A_4) = \frac{P(B_1 \cap A_4)}{P(A_4)} = \frac{\frac{75}{1766}}{\frac{385}{1766}} = \frac{.0425}{.2180} = .19$$

Este resultado sugiere la siguiente definición general de probabilidad condicional.

Definición

La probabilidad condicional de A, *dado* B, *es igual a la probabilidad de* A ∩ B, *dividida entre la probabilidad de* B, *siempre que la probabilidad de* B *no sea cero.* Es decir,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad p(B) \neq 0 \tag{2.6.1}$$

Cuando se pregunta cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar de entre todos los empleados (tabla 2.4.1) tenga más de 35 años de edad, se está hablando de una *probabilidad marginal.* Esta probabilidad marginal proporciona el denominador de la probabilidad condicional antes mencionada, $P(B_1|A_4)$. El interés se centra en una probabilidad asociada a un total marginal y se descarta cualquier otro criterio de clasificación. Al calcular

$$P(A_4) = \tfrac{385}{1766} = .2180$$

está implícita una falta de interés en la clasificación B. Asimismo, si se tiene interés en la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea médico, por ejemplo, se calcula esta probabilidad utilizando el total marginal, 105, y se pasan por alto las clasificaciones de edad.

Entonces, en general, puede decirse que cuando se ignoran uno o más criterios de clasificación al calcular una probabilidad, la probabilidad resultante se conoce como *probabilidad marginal.*

Obsérvese ahora el numerador de $P(B_1|A_4)$. Este numerador es la probabilidad de que sucedan *conjuntamente* B_1 y A_4, es decir, es la condición de ser simultáneamente médico y tener más de 35 años de edad. Ya se ha señalado que si dos eventos, A y B, no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, si $A \cap B = \phi$, entonces A y B son mutuamente excluyentes. Utilizando la tabla 2.4.1 se observa que para este conjunto particular de empleados, los eventos de ser médico y de 25 años de edad o menos son mutuamente excluyentes, dado que $B_1 \cap A_1 = \phi$.

La tercera propiedad de la probabilidad dada anteriormente afirma que la probabilidad de ocurrencia de uno u otro de los eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de sus probabilidades individuales. Entonces, en el ejemplo en cuestión, se encuentra que la probabilidad de ser médico o de 25 años de edad o menos es

$$P(B_1) + P(A_1) = \tfrac{105}{1766} + \tfrac{260}{1766} = .06 + .15 = .21$$

¿Qué sucede si dos eventos no son mutuamente excluyentes? Este caso es cubierto por lo que se conoce como la *regla de adición,* la cual se enuncia a continuación.

Definición

> *Dados dos eventos* A *y* B, *la probabilidad de que el evento* A *o el evento* B, *o ambos ocurran es igual a la probabilidad de que el evento* A *ocurra, más la probabilidad de que el evento* B *ocurra, menos la probabilidad de que ambos eventos ocurran simultáneamente.* La regla de adición puede escribirse como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2.6.2)$$

Utilícese una vez más la tabla 2.4.1 y calcúlese la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea médico, tenga más de 35 años de edad o ambas cosas.

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup A_4) &= P(B_1) + P(A_4) - P(B_1 \cap A_4) \\ &= \tfrac{105}{1766} + \tfrac{385}{1766} - \tfrac{75}{1766} \\ &= .23 \end{aligned}$$

Nótese que los 75 empleados que son médicos y tienen más de 35 años de edad están incluidos tanto en los 105 que son médicos como en los 385 que tienen más de 35 años de edad. Dado que, al calcular la probabilidad, estos 75 se han sumado dos veces en el numerador, tienen que restarse una vez para eliminar el efecto de duplicación o traslape.

Otra regla útil para calcular la probabilidad de un evento es la *regla de multiplicación.* Esta regla es sugerida por la definición de probabilidad condicional y la ecuación 2.6.1:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0$$

Puede volver a escribirse la ecuación 2.6.1 para obtener

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) \tag{2.6.3}$$

La ecuación 2.6.3 expresa que la probabilidad de ocurrencia conjunta de los eventos A y B es igual a la probabilidad condicional de A dado B veces la probabilidad marginal de B.

Para ilustrar esto, utilícese la ecuación 2.6.3 para encontrar la probabilidad de que un empleado elegido al azar de todos los empleados sea médico y tenga más de 35 años de edad.

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap A_4) &= P(A_4)P(B_1 \mid A_4) \\ &= \tfrac{385}{1766} \cdot \tfrac{75}{385} \\ &= \tfrac{75}{1766} \end{aligned}$$

Por supuesto, esto concuerda con lo que puede calcularse directamente a partir de la tabla 2.4.1, al formar la razón del número de resultados favorables, 75, respecto del número total de resultados posibles, 1766.

Obsérvese una vez más la ecuación 2.6.3.

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Supóngase que el hecho de que se dé el evento B no tiene efecto alguno sobre la probabilidad de A. En otras palabras, supóngase que la probabilidad del evento A es la misma, ocurra o no el evento B. En tal caso, $P(A|B) = P(A)$ y se dice que A y B son *eventos independientes.*

Ejemplo 2.6.2

Ilústrese el concepto de independencia por medio del ejemplo siguiente. En cierto grupo de estudiantes de secundaria, que consta de 60 muchachas y 40 muchachos, se observa que 24 muchachas y 16 muchachos usan anteojos. Si se elige al azar un estudiante (muchacho o muchacha) de este grupo, la probabilidad de que use anteojos, $P(A)$, es 40/100 ó .4. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante elegido al azar use anteojos, dado que el estudiante es un muchacho? Utilizando la fórmula para calcular una probabilidad condicional, se encuentra que ésta es

$$P(A|H) = \frac{P(L \cap H)}{P(H)} = \frac{16/100}{40/100} = .4$$

Así, la información adicional de que el estudiante sea un muchacho no altera la probabilidad de que use anteojos, y $P(A) = P(A|H)$. Se dice que los eventos de ser un muchacho y usar anteojos son independientes para este grupo. Puede demostrarse también que el evento de usar anteojos, A, y *no* ser un muchacho, $\bar{H}$, son también independientes, como sigue:

$$P(A|\bar{H}) = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{24/100}{60/100} = \frac{24}{60} = .4$$

¿Cuál es la probabilidad de que ocurran conjuntamente los eventos de usar anteojos y ser un muchacho? Utilizando la regla dada en la ecuación 2.6.3, se tiene que

$$P(A \cap H) = P(A)P(A|H)$$

pero, dado que se ha demostrado que los eventos A y H son independientes, puede reemplazarse $P(A|H)$ por $P(A)$ para obtener

$$\begin{aligned} P(A \cap H) &= P(A)P(H) \\ &= \left(\tfrac{40}{100}\right)\left(\tfrac{40}{100}\right) \\ &= .16 \end{aligned}$$

Entonces, en general, cuando dos eventos, A y B, son independientes, y ni $P(A)$ ni $P(B)$ son iguales a cero, la probabilidad de que ocurran conjuntamente es igual al producto de sus probabilidades individuales. Es decir,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.6.4}$$

si

$$P(A) \neq 0, \qquad P(B) \neq 0$$

Antes de concluir esta sección, resulta apropiado tener en cuenta lo siguiente. La probabilidad de un evento A es igual a 1 menos la probabilidad de su complemento, $\bar{A}$, por lo que

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{2.6.5}$$

Esto se deduce de la tercera propiedad de la probabilidad, ya que el evento A y su complemento, $\bar{A}$, son mutuamente excluyentes.

Ejemplo 2.6.3

Supóngase que de 1,200 admisiones a un hospital general durante cierto período, 750 son admisiones privadas. Si se designa a éstas como el conjunto A, entonces $\bar{A}$ es igual a 1,200 menos 750, o sea, 450. Puede hacerse el cálculo

$$P(A) = 750/1200 = .625$$

y

$$P(\bar{A}) = 450/1200 = .375$$

y ver que

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ .375 &= 1 - .625 \\ .375 &= .375 \end{aligned}$$

Ejercicios

2.6.1 Con base en el ejercicio 2.4.1, calcule:

a) $P(A_4 \cap B_3)$ *c*) $P(B_3 \cup A_4)$ *e*) $P(\bar{A}_1)$

b) $P(B_5 \cap A_6)$ *d*) $P(A_6 \cup B_5)$ *f*) $P[(A_4 \cup A_5) \cap B_3]$

2.6.2 La siguiente tabla muestra los primeros 1,000 pacientes admitidos a una clínica de niños con retraso mental según su clasificación por diagnóstico y su nivel de inteligencia. Para este grupo, encuentre:

a) $P(A_3 \cap B_4)$.
b) La probabilidad de que un paciente escogido al azar tenga retraso severo.
c) La probabilidad de que un paciente escogido al azar sea no retrasado o dudoso.
d) La probabilidad de que un paciente escogido al azar tenga retraso profundo y síndrome de Down.
e) La probabilidad de que un paciente tenga retraso profundo, dado que tiene el síndrome de Down.

	Nivel de retraso mental						
Clasificación por diagnóstico	A_1 *No retrasado*	A_2 *Profundo*	A_3 *Severo*	A_4 *Moderado*	A_5 *Benigno*	A_6 *Dudoso*	*Total*
B_1 Encefalopatías	33	38	57	114	103	55	400
B_2 Síndrome de Down	2	4	34	88	27	5	160
B_3 Defecto cerebral congénito	10	2	6	6	6	0	30
B_4 Retraso mental de causa desconocida	0	0	9	36	62	35	142
B_5 Otros	161	0	8	16	8	75	268
Total	206	44	114	260	206	170	1000

2.6.3 En un grupo de 502 personas se determinó que la distribución de los grupos sanguíneos era la siguiente:

Grupo sanguíneo	*Número*
O	226
A	206
B	50
AB	20
Total	502

Si se elige al azar una persona de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el grupo sanguíneo:

a) O? *b*) A? *c*) B? *d*) AB?

2.6.4 Supóngase que cuando los datos del ejercicio 2.6.3 se clasifican por sexo quedan en la forma siguiente:

Grupo sanguíneo	*Sexo* *Masculino*	*Femenino*	*Total*
O	113	113	226
A	103	103	206
B	25	25	50
AB	10	10	20
Total	251	251	502

Para este grupo de personas, ¿podría decirse que el sexo y el grupo sanguíneo son independientes? Demuestre lo anterior calculando las probabilidades apropiadas.

2.6.5 Si la probabilidad de ser zurdo en cierto grupo de personas es de .05, ¿cuál es la probabilidad de ser derecho (suponiendo que no hay ambidiestros)?

2.7 RESUMEN

En este capítulo se presentaron algunas de las ideas y conceptos básicos de la probabilidad. El objetivo ha sido lograr una "percepción" suficiente de la materia, de modo que puedan comprenderse y apreciarse con más facilidad los aspectos probabilísticos de la inferencia estadística.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. Defina lo siguiente:

a) Probabilidad
b) Probabilidad objetiva
c) Probabilidad subjetiva
d) Probabilidad clásica
e) El concepto de probabilidad como frecuencia relativa
f) Eventos mutuamente excluyentes
g) Independencia
h) Probabilidad marginal
i) Probabilidad conjunta
j) Probabilidad condicional

2. Nombre y explique las tres propiedades de la probabilidad.
3. ¿Qué es un conjunto? Dé tres ejemplos de conjuntos.
4. Defina lo siguiente:

   a) Conjunto unitario
   b) Conjunto vacío
   c) Conjunto universal
   d) Subconjunto
   e) Conjunto ajeno
   f) Complemento

5. ¿Bajo qué condición se considera que dos conjuntos son iguales?
6. Defina y dé un ejemplo de la unión de dos conjuntos.
7. Defina y dé un ejemplo de la intersección de dos conjuntos.
8. ¿Qué es un diagrama de Venn?
9. Defina e ilustre lo siguiente:

   a) Factorial
   b) Permutación
   c) Combinación
   d) La regla de adición
   e) La regla de multiplicación

10. El conjunto C consta de los ciudadanos de una cierta ciudad que votaron a favor de la fluoración del agua. El conjunto D consta de los ciudadanos de la misma ciudad que tienen niños en edad preescolar. Defina:

    a) $C \cup D$
    b) $A \cap D$
    c) $\bar{C}$
    d) $\bar{D}$

11. A 100 mujeres casadas se les preguntó que especificaran qué tipo de método de control de la natalidad preferían. La siguiente tabla muestra las 100 respuestas obtenidas clasificadas con base en el nivel educativo de la entrevistada.

	Nivel educativo			
Método de control de la natalidad	*Escuela de segunda enseñanza (A)*	*Universidad (B)*	*Postgrado (C)*	*Total*
S	15	8	7	30
T	3	7	20	30
V	5	5	15	25
W	10	3	2	15
Total	33	23	44	100

Especifique el número de miembros de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) S	*c*) A	*e*) U	*g*) $T \cap B$
b) $V \cup C$	*d*) $\bar{W}$	*f*) $\bar{B}$	*h*) $\overline{(T \cap C)}$

12. Una trabajadora social en asuntos psiquiátricos tiene 10 pacientes a quienes va a visitar en una semana. Los pacientes constan de tres alcohólicos, cuatro adictos a las drogas, dos pacientes esquizofrénicos y un maniaco depresivo. ¿Cuántos arreglos de visitas distintos puede preparar la trabajadora social si desea distinguir entre los pacientes sólo con base en su diagnóstico?
13. Cierto departamento de sanidad municipal ha recibido 25 solicitudes de empleo para una plaza que existe para una enfermera de salud pública. De las aspirantes, diez tienen más de 30 años de edad y quince tienen una edad inferior a este valor. Sólo 17 de las aspirantes tienen el grado de bachillerato y 8 el grado de maestría. De las que tienen una edad inferior a los 30 años, seis tienen el grado de maestría. Si se hace al azar una selección de entre esas 25 aspirantes, ¿cuál es la probabilidad de que sea seleccionada una aspirante de más de 30 años *o* que tenga el grado de maestría?
14. La siguiente tabla muestra 1,000 estudiantes de enfermería clasificadas según las calificaciones que obtuvieron después de un examen de admisión y el prestigio de la escuela de segunda enseñanza en la cual se graduaron, como lo constató un grupo de profesores.

	Prestigio de la escuela de segunda enseñanza			
Calificación	*Deficiente (D)*	*Promedio (P)*	*Superior (S)*	*Total*
Baja (B)	105	60	55	220
Media (M)	70	175	145	390
Alta (A)	25	65	300	390
Total	200	300	500	1,000

a) Calcule la probabilidad de que una aspirante seleccionada al azar de este grupo:

1. Haya obtenido una baja calificación en el examen.
2. Se haya graduado en una escuela superior de segunda enseñanza.
3. Haya obtenido una baja calificación en el examen y se haya graduado en una escuela superior de segunda enseñanza.
4. Haya obtenido una baja calificación en el examen dado que se graduó en una escuela superior de segunda enseñanza.
5. Haya obtenido una alta calificación en el examen o se haya graduado en una escuela superior de segunda enseñanza.

b) Calcule las siguientes probabilidades:

1. $P(P)$	3. $P(M)$	5. $P(M \cap D)$
2. $P(A)$	4. $P(P \mid H)$	6. $P(A \mid S)$

15. Si la probabilidad de que una enfermera de salud pública encuentre a un paciente en su casa es de .7, ¿cuál es la probabilidad (suponiendo que existe independencia) de que después de hacer la visita en dos casas encuentre en ellas a ambos pacientes?
16. La siguiente tabla muestra el resultado de 500 entrevistas concluidas durante una encuesta para estudiar las opiniones que tienen respecto al aborto legalizado los residentes de cierta ciudad. Los datos están clasificados también por el área de la ciudad en la que se hizo la encuesta.

	Resultado			
Area de la ciudad	*A favor (F)*	*En contra (Q)*	*Indecisas (R)*	*Total*
A	100	20	5	125
B	115	5	5	125
D	50	60	15	125
E	35	50	40	125
Total	300	135	65	500

a) Si se elige al azar una de las entrevistas de las 500 efectuadas, ¿cuál es la probabilidad de que:

1. El entrevistado estuviera a favor del aborto legalizado?
2. El entrevistado estuviera en contra del aborto legalizado?
3. El entrevistado estuviera indeciso?
4. El entrevistado viviera en el área A? B? D? E?
5. El entrevistado estuviera a favor del aborto legalizado dado que vive en el área B?
6. El entrevistado estuviera indeciso o que viviera en el área D?

b) Calcule las siguientes probabilidades:

1. $P(A \cap R)$	3. $P(\overline{D})$	5. $P(B\|R)$
2. $P(Q \cup D)$	4. $P(Q\|D)$	6. $P(F)$

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. Grace E. Bates, *Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
2. John R. Dixon, *A Programmed Introduction to Probability*, Wiley, Nueva York, 1964.
3. Frederick Mosteller, Robert E. K. Rourke y George B. Thomas, Jr., *Probability With Statistical Applications*, segunda edición, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.
4. Boyd Earl, William Moore y Wendell I. Smith, *Introduction to Probability*, McGraw-Hill, Nueva York, 1963.
5. Simeon M. Berman, *The Elements of Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
6. Melvin Hausner, *Elementary Probability Theory*, Harper and Row, Nueva York, 1971.
7. E. R. Mullins, Jr. y David Rosen, *Concepts of Probability*, Bogden and Quigley, Nueva York, 1972.
8. John E. Freund, *Mathematical Statistics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
9. Robert V. Hogg y Allen T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, Macmillan, Nueva York, 1965.

10. Alexander M. Mood, Franklin A. Graybill y Duane C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics,* tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1974.
11. I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability,* G. E. Stechert, Nueva York, 1931.
12. F. N. David, *Games, Gods and Gambling,* Hafner, Nueva York, 1962.
13. L. J. Savage, *Foundations of Statistics,* Wiley, Nueva York, 1954.
14. A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability,* Chelsea, Nueva York, 1964. (edición alemana original publicada en 1933).
15. Joseph Breuer, *An Introduction to the Theory of Sets,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1958 (traducido por Howard F. Fehr.).
16. Robert R. Stoll, *Set Theory and Logic,* W. H. Freeman, San Francisco, 1963.
17. Lawrence P. Maher, Jr., *Finite Sets, Theory, Counting, and Applications,* Charles E. Merrill, Columbus, Ohio, 1968.

3

Distribuciones de probabilidad

3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se introdujeron los conceptos básicos de probabilidad, así como los métodos para calcular la probabilidad de un evento. En este capítulo se desarrollarán estos conceptos y se investigarán las formas para calcular la probabilidad de un evento en condiciones un tanto más complejas.

3.2 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES DISCRETAS

Para empezar el estudio de las distribuciones de probabilidad, se considerará la distribución de probabilidad de una variable discreta, que puede definirse como sigue:

Definición

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es una tabla, gráfica, fórmula o cualquier otro medio que se utilice para especificar todos los valores posibles de una variable aleatoria discreta junto con sus probabilidades respectivas.

Tabla 3.2.1 Distribución de probabilidad del número de niños por familia en una población de 50 familias.

x	*Frecuencia de ocurrencia de x*	$P(X = x)$
0	1	1/50
1	4	4/50
2	6	6/50
3	4	4/50
4	9	9/50
5	10	10/50
6	7	7/50
7	4	4/50
8	2	2/50
9	2	2/50
10	1	1/50
	50	50/50

Ejemplo 3.2.1

Una enfermera de salud pública tiene a su cargo 50 familias. Constrúyase la distribución de probabilidad de X, el número de niños por familia para esta población. Esto puede hacerse con una tabla en la que, en una columna, x, se enumeren los valores posibles que tome X, y, en otra columna, $P(X = x)$, la probabilidad con la que X toma un valor particular, x. Esto se ha hecho en la tabla 3.2.1.

Alternativamente, puede presentarse esta distribución de probabilidad en la forma de una gráfica, como en la figura 3.2.1.

En la figura 3.2.1, la longitud de cada barra vertical indica la probabilidad para el valor de x correspondiente.

En el presente ejemplo se observará que todos los valores de $P(X = x)$ son positivos, que todos son menores que 1 y su suma es igual a 1. Estos no son fenómenos peculiares de este ejemplo particular, sino son características de todas las distribuciones de probabilidad de variables discretas. Pueden darse entonces las dos propiedades esenciales siguientes de una distribución de probabilidad de una variable discreta:

$$(1)\ 0 \leq P(X = x) \leq 1$$

$$(2)\ \sum P(X = x) = 1$$

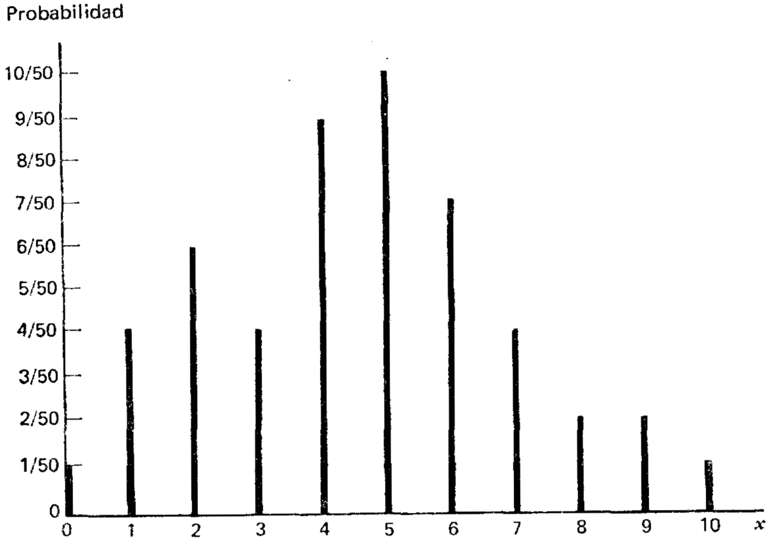


Figura 3.2.1 Representación gráfica de la distribución de probabilidad del número de niños por familia para una población de 50 familias.

El lector observará también que cada una de las probabilidades de la tabla 3.2.1 es la *frecuencia relativa de ocurrencia* del valor correspondiente de X.

Disponiendo de su distribución de probabilidad, pueden hacerse proposiciones de probabilidad referentes a la variable aleatoria X. Supóngase que la enfermera, con las 50 familias a su cargo, elige aleatoriamente una de las familias con el fin de visitarla. ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga tres niños? En la tabla 3.2.1 se observa que la respuesta es $4/50 = .08$, es decir, $P(X = 3) = .08$. ¿Cuál es la probabilidad de que la familia elegida al azar tenga tres o cuatro niños? Para contestar esta pregunta se aplica la regla de adición. Dado que la probabilidad de tres niños es .08 y la probabilidad de cuatro es .18, la probabilidad de elegir una familia que tenga tres o cuatro niños es de $.08 + .18 = .26$. Esto puede expresarse de manera más concreta como

$$P(X = 3 \text{ ó } X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = .26$$

Distribuciones acumuladas. A veces resulta más conveniente trabajar con la *distribución de probabilidad acumulada* de una variable aleatoria. La distribución de probabilidad acumulada para la varia-

Tabla 3.2.2 Distribución de probabilidad acumulada del número de niños por familia en una población de 50 familias.

x	*Frecuencia de ocurrencia de x*	$P(X = x)$	$P(X \leq x)$
0	1	1/50	1/50
1	4	4/50	5/50
2	6	6/50	11/50
3	4	4/50	15/50
4	9	9/50	24/50
5	10	10/50	34/50
6	7	7/50	41/50
7	4	4/50	45/50
8	2	2/50	47/50
9	2	2/50	49/50
10	1	1/50	50/50
	50	50/50	

discreta cuya distribución de probabilidad está dada en la tabla .1, puede obtenerse sumando sucesivamente las probabilidades, $= x$), que se dan en la última columna. La distribución de probaad acumulada resultante se muestra en la tabla 3.2.2.

onsultando la distribución de probabilidad acumulada, puede se respuesta a preguntas como las siguientes.

Cuál es la probabilidad de que una familia elegida al azar de las tenga menos de 5 niños? Lo que se necesita para contestar esta regunta es $P(X < 5)$, y ésta se obtiene determinando el valor de probabilidad acumulada para los valores de $X = 0$ hasta $X = 4$. n la tabla se observa que ésta es de $24/50 = .48$.

uál es la probabilidad de que una familia elegida al azar tenga o más niños? Puede responderse a esta pregunta por medio del ncepto del complemento. El conjunto de familias con 5 o más ños es el complemento del conjunto de familias con menos de 5 ños. Su suma es igual al conjunto universal de 50 familias. Dado e la probabilidad total es de 1 y se ha encontrado que $P(X < 5)$ .48, la probabilidad deseada, $P(X \geq 5)$, es igual a $1 - P(X < 5) =$ $.48 = .52$

3. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia elegida al azar te[illegible] entre 3 y 6 niños, inclusive? Lo que se necesita es $P(3 \leq X \leq$ [illegible] que es igual a $P(X \leq 6) - P(X < 3)$. La probabilidad de que X s[illegible] menor o igual a 6 es la probabilidad acumulada hasta $X = 6$ ó $41/50$ = .82; y la probabilidad de que X sea menor que 3 es la probabilidad acumulada hasta $X = 2$ ó $11/50 = .22$. Así, se observa que $P(3 \leq X \leq 6) = .82 - .22 = .60$.

La distribución de probabilidad dada en la tabla 3.2.1 se desarrolló con base en la experiencia actual, y encontrar otra variable siguiendo esta distribución sería una coincidencia. Sin embargo, las distribuciones de probabilidad de muchas variables de interés pueden determinarse o suponerse con base en consideraciones teóricas. En las siguientes secciones se estudian en detalle tres de estas distribuciones teóricas de probabilidad, a saber, la *binomial,* la *de Poisson* y la *normal.*

3.3 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La *distribución binomial* es una de las distribuciones de probabilidad que se encuentra con más frecuencia en la estadística aplicada. La distribución se obtiene a partir de un proceso conocido como *ensayo de Bernoulli,* en honor del matemático suizo James Bernoulli (1654-1705), quien hizo contribuciones importantes en el campo de la probabilidad incluyendo, en particular, la distribución binomial. Cuando un solo ensayo de algún proceso o experimento puede conducir sólo a uno de dos resultados mutuamente excluyentes, tales como muerto o vivo, enfermo o sano, masculino o femenino, el ensayo se conoce como ensayo de Bernoulli.

Una secuencia de ensayos de Bernoulli forma un *proceso de Bernoulli* en las siguientes condiciones.

1. Cada ensayo conduce a uno de dos resultados posibles, mutuamente excluyentes. Uno de los resultados posibles se denota (arbitrariamente) como éxito y el otro como fracaso.
2. La probabilidad de éxito, denotada por p, permanece constante de ensayo a ensayo. La probabilidad de fracaso, $1 - p$, se denota por q.
3. Los ensayos son independientes, es decir, el resultado de cualquier ensayo particular no es afectado por el resultado de cualquier otro ensayo.

Ejemplo 3.3.1

Se tiene interés en poder calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos de Bernoulli. Por ejemplo, supóngase que en cierta población, el 52 por ciento de todos los nacimientos registrados son varones. Esto se interpreta en el sentido de que la probabilidad de un nacimiento registrado de varón es de .52. Si, de esta población, se seleccionan al azar cinco registros de nacimientos, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres de los registros sean de nacimientos de varones? Desígnese la ocurrencia de un registro de nacimiento de un varón como "éxito" y agréguese que ésta es una designación arbitraria para fines de claridad y conveniencia, y que no refleja una opinión referente a los méritos relativos de los nacimientos de varones contra los de niñas. Se designará como éxito a la ocurrencia de un registro de nacimiento de un varón, dado que están observándose los registros de nacimientos de varones. Si se estuvieran observando los registros de nacimientos de niñas, éstos se designarían como éxitos y los registros de nacimientos de varones como fracasos.

Resulta también conveniente asignar un valor de 1 a un éxito (registro de nacimiento de un varón) y un valor de 0 a un fracaso (registro de nacimiento de una niña).

El proceso que finalmente resulta en un registro de nacimiento se considera como un proceso de Bernoulli.

Supóngase que los cinco registros de nacimientos seleccionados dieron la siguiente secuencia de sexos:

MFMMF

En forma codificada, esto se escribiría como

10110

Dado que la probabilidad de un éxito se denota por p y la probabilidad de un fracaso por q, la probabilidad de la secuencia anterior de resultados se encuentra por medio de la regla de multiplicación como

$$P(1, 0, 1, 1, 0) = pqppq = q^2p^3$$

La regla de multiplicación es apropiada para calcular esta probabilidad, ya que se desea encontrar la probabilidad de un varón, una niña, un varón, un varón y una niña, en este orden o, en otras palabras, la probabilidad conjunta de los cinco eventos. Para que se entienda mejor, se han utilizado comas, en lugar de la notación de intersección para separar los resultados de los eventos en el enunciado de la probabilidad anterior.

La probabilidad resultante es la de obtener la secuencia específica de resultados en el orden mostrado. Sin embargo, no se tiene interés en el orden en que se presenten los registros de los nacimientos de varón y niña sino, por el contrario, como ya se ha señalado, en la probabilidad de que se presenten exactamente tres registros de nacimientos de varón de los cinco registros elegidos al azar. En lugar de ocurrir en la secuencia antes mostrada (llámese secuencia número 1), tres éxitos y dos fracasos podrían ocurrir también en cualquiera de las siguientes secuencias adicionales:

Número	*Secuencia*
2	11100
3	10011
4	11010
5	11001
6	10101
7	01110
8	00111
9	01011
10	01101

Cada una de estas secuencias tiene la misma probabilidad de ocurrir, y esta probabilidad es igual a q^2p^3, la probabilidad calculada para la primera secuencia ya mencionada.

Cuando se extrae una sola muestra de tamaño cinco de la población especificada, sólo se obtiene una secuencia de éxitos y fracasos. La pregunta se convierte ahora en la de ¿cuál es la probabilidad de obtener la secuencia número 1 o la secuencia número 2. . . o la secuencia número 10? Por la regla de adición, se sabe que esta probabilidad es igual a la suma de las probabilidades individuales. En el presente ejemplo, se deben sumar los diez valores de q^2p^3 o, lo que es equivalente multiplicar q^2p^3 por diez. Ahora se puede contestar la pregunta original: ¿cuál es la probabilidad, en una muestra aleatoria de tamaño 5, extraída de la población especificada, de observar tres éxitos (registro de nacimiento de un varón) y dos fracasos (registro de nacimiento de una niña)?. Dado que en la población, $p = .52$, $q = (1 - p) = (1 - .52) = .48$, la respuesta a la pregunta es

$$10(.48)^2(.52)^3 = 10(.2304)(.140608) = .32$$

Fácilmente puede anticiparse que, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, la enumeración del número de secuencias se hace cada vez más difícil y tediosa. Lo que se necesita es un método fácil de contar el número de secuencias. Dicho método es el proporcionado por la ecuación 2.5.6, ya que se tienen n cosas, algunas de las cuales son de un tipo y el resto, de otro tipo. Por medio de la ecuación 2.5.6, se encuentra que el número de secuencias en el presente ejemplo es de $\binom{5}{2} = 5!/2!3! = 120/12 = 10$. En general, si n es igual al número total de objetos, x el número de objetos de un tipo y $n - x$ el número de objetos de otro tipo, el número de secuencias es igual a $\binom{n}{x} = n!/x!\,(n - x)!$, que es igual al número de combinaciones de n cosas tomadas x a la vez.

En el ejemplo, se puede hacer que $x = 3$, el número de éxitos, de modo que $n - x = 2$, el número de fracasos. Puede escribirse entonces la probabilidad de obtener exactamente x éxitos en n ensayos como

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n}{x} q^{n-x} p^x \qquad \text{para} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ &= 0, \text{ en todos los demás puntos} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Esta expresión se conoce como distribución binomial. En la ecuación 3.3.1, $f(x) = P(X = x)$, donde X es la variable aleatoria, número de éxitos en n ensayos. Se utiliza $f(x)$ en lugar de $P(X = x)$ por ser más compacta y por su uso casi universal.

Puede presentarse la distribución binomial en forma tabular como en la tabla 3.3.1.

Se establece el hecho de que la ecuación 3.3.1 es una distribución de probabilidad al demostrar que:

Tabla 3.3.1 La distribución binomial.

Número de éxitos, x	*Probabilidad, f(x)*
0	$\binom{n}{0} q^{n-0} p^0$
1	$\binom{n}{1} q^{n-1} p^1$
2	$\binom{n}{2} q^{n-2} p^2$
$\vdots$	$\vdots$
x	$\binom{n}{x} q^{n-x} p^x$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n}{n} q^{n-n} p^n$
Total	1

1. $f(x) \geq 0$ para todos los valores reales de x. Esto se deduce del hecho de que tanto n como p son no negativos y, por lo tanto $\binom{n}{x}$, p^x y $(1 - p)^{n-x}$ son todos no negativos y, en consecuencia, su producto es mayor o igual a cero.
2. $\Sigma \; f(x) = 1$. Se ve que esto es cierto si se reconoce que $\Sigma \binom{n}{x} q^{n-x}$ p^x es igual a $[(1 - p) + p]^n = 1^n = 1$, el desarrollo binomial conocido. Si se desarrolla el binomio $(q + p)^n$, se tiene que

$$(q + p)^n = q^n + nq^{n-1}p^1 + \frac{n(n-1)}{2} q^{n-2}p^2 + \cdots + nq^1p^{n-1} + p^n$$

Si se comparan los términos del desarrollo anterior, término por término, con la $f(x)$ de la tabla 3.3.1, se observa que, término por término son equivalentes, ya que

$$f(0) = \binom{n}{0} q^{n-0} p^0 = q^n$$

$$f(1) = \binom{n}{1} q^{n-1} p^1 = nq^{n-1} p^1$$

$$f(2) = \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 = \frac{n(n-1)}{2} q^{n-2} p^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(n) = \binom{n}{n} q^{n-n} p^n = p^n$$

Ejemplo 3.3.2

Como otro ejemplo del uso de la distribución binomial, supóngase que se sabe que el 30 por ciento de los ciudadanos de cierta población son inmunes a alguna enfermedad. Si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 10 de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que contenga exactamente cuatro personas inmunes? Se toma la probabilidad de una persona inmune como .3. Utilizando la ecuación 3.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} f(4) &= \binom{10}{4} (.7)^6 (.3)^4 \\ &= \frac{10!}{4!6!} (.117649)(.0081) \\ &= .2001 \end{aligned}$$

El cálculo de una probabilidad utilizando la ecuación 3.3.1 puede ser una tarea un tanto tediosa si el tamaño de la muestra es grande. Afortunadamente, se han tabulado las probabilidades para valores distintos de n, p y x, de modo que sólo es necesario consultar una tabla apropiada para obtener la probabilidad deseada. La tabla C del apéndice es una de las muchas tablas de este tipo que existen. Esta tabla da la probabilidad de que x sea menor o igual a algún valor especificado. Es decir, dicha tabla da las probabilidades acumuladas de $x = 0$ hasta algún valor especificado.

Se ilustrará el uso de dicha tabla utilizando el ejemplo anterior donde se deseaba encontrar la probabilidad de que $x = 4$ cuando $n = 10$ y $p = .3$. Haciendo acopio del conocimiento de las distribuciones de probabilidad acumulada de la sección anterior, se sabe que $P(x = 4)$ puede encontrarse restando $P(X \leq 3)$ de $P(X \leq 4)$. Si en la tabla se localiza $p = .3$ para $n = 10$, se encuentra que $P(X \leq 4) = .8497$ y

$P(X \leq 3) = .6496$. Restando el último del primero se obtiene $.8497 - .6496 = .2001$, que concuerda con el cálculo realizado a mano.

Obsérvese una vez más el ejemplo de los registros de nacimientos. El objetivo era determinar la probabilidad de observar exactamente tres registros de nacimientos de varones cuando $n = 5$ y $p = .52$. Para utilizar la tabla, primero se localiza $n = 5$. Sin embargo, se observa que la tabla no contiene un valor para $p = .52$. Reflexionando un poco uno puede convencerse de que es posible obtener los resultados deseados si se vuelve a plantear la pregunta como sigue: ¿cuál es la probabilidad de observar exactamente dos registros de nacimientos de niñas si la probabilidad de registro de nacimiento de un niña es de .48 y $n = 5$?

Puede localizarse $p = .48$ en la tabla para $n = 5$, y se observa que $P(X \leq 2) = .5375$ y $P(X \leq 1) = .2135$. La resta da $.5375 - .2135 = .324$, que coincide con el valor obtenido anteriormente.

Con frecuencia, se tiene interés en determinar las probabilidades, no para valores específicos de X, sino para intervalos como la probabilidad de que X esté entre, por decir algo, 5 y 10. Se ilustrará lo anterior con un ejemplo.

Ejemplo 3.3.3

Supóngase que se sabe que en cierta población el 10 por ciento de sus habitantes padece de daltonismo. Si de esta población se extrae una muestra al azar de 25 personas, utilícese la tabla C del apéndice para encontrar la probabilidad de que

1. Cinco o menos sean daltónicas.

   Solución. Esta probabilidad es un valor de la tabla. No se necesita adición o sustracción alguna. $P(X \leq 5) = .9666$.

2. Seis o más sean daltónicas.

   Solución. Este conjunto es el complemento del conjunto especificado en 1, por lo que $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - .9666 = .0334$.

3. Entre seis y nueve, inclusive, sean daltónicas.

   Solución. Esto se encuentra restando la probabilidad de que X sea menor o igual a 5 de la probabilidad de que X sea menor o igual a

9. Es decir,

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 5) = .9999 - .9666 = .0333$$

4. Dos, tres o cuatro sean daltónicas.

Solución. Esta es la probabilidad de que X esté entre 2 y 4 inclusive.

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = .9020 - .2712 = .6308$$

La distribución binomial tiene dos parámetros, n y p. Son parámetros en el sentido de que son suficientes para especificar una distribución binomial. La distribución binomial es en realidad una familia de distribuciones donde cada valor posible de n y p designa un miembro distinto de la familia. La media y variancia de la distribución binomial son, respectivamente, $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1 - p)$.

Estrictamente hablando, el uso de la distribución binomial se aplica a aquellas situaciones donde el muestreo es a partir de una población infinita o a partir de una población finita con reemplazo. Dado que en la práctica real frecuentemente se extraen muestras sin reemplazo de poblaciones finitas, surge naturalmente la cuestión de lo apropiado de la distribución binomial en estas circunstancias. El que la distribución binomial sea apropiada o no depende de qué tan drástico sea el efecto de estas condiciones sobre la constancia de p de ensayo a ensayo. En general, se está de acuerdo en que cuando n es pequeño en relación con N, el modelo binomial es apropiado. Algunos autores señalan que n es pequeño respecto a N, si N es por lo menos 10 veces más grande que n.

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios, supóngase que N es suficientemente grande con respecto a n, de modo que pueda utilizarse la distribución binomial para encontrar las probabilidades deseadas.

3.3.1 Supóngase que el 24 por ciento de los individuos de una población tiene el grupo sanguíneo B. Para una muestra de tamaño 20 extraída de esta población, encuentre la probabilidad de que

a) Se encuentren exactamente tres personas con el grupo sanguíneo B.

b) Se encuentren tres o más personas con la característica de interés.
c) Se encuentren menos de tres.
d) Se encuentren exactamente cinco.

3.3.2 En una población grande, el 16 por ciento de los miembros son zurdos. En una muestra al azar de tamaño 10 encuentre:

a) La probabilidad de que exactamente dos sean zurdos.
b) $P(X \geq 2)$.
c) $P(X < 2)$.
d) $P(1 \leq X \leq 4)$.

3.3.3 Supóngase que se sabe que la probabilidad de recuperación de cierta enfermedad es de .4. Si 15 personas contraen la enfermedad (considérese esto como una muestra aleatoria), ¿cuál es la probabilidad de que

a) Tres o más se recuperen?
b) Cuatro o más?
c) Cinco o más?
d) Menos de tres?

3.3.4 Supóngase que la tasa de mortalidad para cierta enfermedad es de .10 y que la contraen 10 personas de la comunidad. ¿Cuál es la probabilidad de que

a) Ninguna sobreviva?
b) El cincuenta por ciento muera?
c) Al menos tres mueran?
d) Exactamente tres mueran?

3.4 LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La siguiente distribución discreta que se estudiará es la ***distribución de Poisson***, llamada así en honor del matemático francés Simeon Denis Poisson (1781-1840), a quien generalmente se le acredita la publicación de su deducción en 1837.[1,2] Esta distribución se ha utilizado ampliamente en biología y medicina. En el capítulo 7 de su libro, Haight[2] ha preparado un catálogo bastante extenso de dichas aplicaciones.

Si x es el número de ocurrencias de algún evento al azar en un intervalo de tiempo o espacio (o algún volumen de materia), la probabilidad de que x ocurra está dada por la expresión

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3.1}$$

La letra griega λ (lambda) se conoce como parámetro de la distribución y es el número promedio de veces que ocurre el evento al azar en el intervalo (o volumen). El símbolo e es la constante (hasta cuatro decimales) 2.7183.

Puede demostrarse que $f(x) \geq 0$ para cada x y que $\sum_x f(x) = 1$, de modo que la distribución satisface los requisitos para una distribución de probabilidad.

El proceso de Poisson. Se ha visto que la distribución binomial resulta de un conjunto de suposiciones acerca de un proceso fundamental que proporciona un conjunto de observaciones numéricas. Este también es el caso de la distribución de Poisson. Las siguientes proposiciones describen lo que se conoce como *proceso de Poisson.*

1. Las ocurrencias (frecuencias) de los eventos son independientes. La ocurrencia de un evento en un intervalo* de espacio o tiempo no tiene efecto alguno sobre la probabilidad de una segunda ocurrencia del evento en el mismo intervalo o en cualquier otro.
2. Teóricamente, debe ser posible un número infinito de ocurrencias del evento en el intervalo.
3. La probabilidad de que se presente una sola vez el evento en un determinado intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.
4. En cualquier porción infinitesimalmente pequeña del intervalo, se rechaza la probabilidad de que el evento se presente más de una vez.

Una característica interesante de la distribución de Poisson es el hecho de que la media y la variancia son iguales.

La distribución de Poisson se utiliza cuando se hacen registros de eventos o entidades que están distribuidos al azar en espacio o tiem-

* Para una mejor comprensión, el proceso de Poisson se estudia en términos de intervalos, aunque quedan implícitas otras unidades como el volumen de materia.

po. Puede esperarse que cierto proceso obedezca a la ley de Poisson, y con esta suposición pueden calcularse las probabilidades de que se presenten eventos o entidades dentro de alguna unidad de espacio o tiempo. Por ejemplo, suponiendo que la distribución de algún parásito entre los miembros hospederos individuales sigue la ley de Poisson, se puede calcular, conociendo el parámetro λ, la probabilidad de que un hospedero seleccionado al azar tenga x número de parásitos. En un capítulo posterior se aprenderá qué decisión tomar si es posible la suposición de que un proceso especificado obedece a la ley de Poisson.

Con el fin de ilustrar el uso de la distribución de Poisson para calcular probabilidades, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4.1

El administrador de un hospital, que ha estado estudiando las admisiones diarias de emergencia durante un período de varios años, ha llegado a la conclusión de que están distribuidas de acuerdo a la ley de Poisson. Los registros del hospital revelan que, durante este período, las admisiones de emergencia han sido, en promedio, de tres por día. Si el administrador está en lo cierto al asumir una distribución de Poisson, encuentre la probabilidad de que

1. En cierto día ocurran exactamente dos admisiones de urgencias.

Solución. Considérese que λ es igual a 3 y que X es una variable aleatoria que denota el número de admisiones diarias de emergencia. Entonces, si X sigue la distribución de Poisson, se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(X = 2) = f(2) &= \frac{e^{-3}3^2}{2!} \\
&= \frac{.050(9)}{2 \cdot 1} \\
&= .225
\end{aligned}
$$

La tabla D del apéndice da los valores de e^x.

2. En un día particular no haya admisión de urgencias.

Solución.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{e^{-3}3^0}{0!} \\
&= \frac{.050(1)}{1} \\
&= .05
\end{aligned}
$$

3. En un día particular sean admitidos tres o cuatro casos de urgencias.

   Solución. Dado que los dos eventos son mutuamente excluyentes, se utiliza la regla de adición para obtener

$$
\begin{aligned}
f(3) + f(4) &= \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^4}{4!} \\
&= \frac{.05(27)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{.05(81)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= .225 + .16875 \\
&= .39
\end{aligned}
$$

En el ejemplo anterior, las probabilidades se calcularon directamente a partir de la ecuación. Sin embargo, puede utilizarse la tabla E del apéndice que da las probabilidades acumuladas para diversos valores de λ y X.

Ejemplo 3.4.2

En el estudio de cierto organismo acuático, se tomó un gran número de muestras de un estanque y se contó el número de organismos que había en cada muestra. Se encontró que el número promedio de organismos por muestra era de dos. Suponiendo que el número de organismos sigue una distribución de Poisson, encuentre la probabilidad de que

1. La siguiente muestra que se tome contenga uno o menos organismos.

   Solución. En la tabla E se observa que cuando $\lambda = 2$, la probabilidad de que $X \leq 1$ es de .406. Es decir, $P(X \leq 1 | 2) = .406$.

2. La siguiente muestra que se tome contenga exactamente tres organismos.

Solución.

$$P(X = 3|2) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = .857 - .677 = .180$$

3. La siguiente muestra que se tome contenga más de cinco organismos.

Solución. Dado que el conjunto de más de cinco organismos no incluye a cinco, se está pidiendo la probabilidad de que se observen seis o más organismos. Esta se obtiene restando la probabilidad de observar cinco o menos organismos de 1. Es decir,

$$P(X > 5|2) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - .983 = .017$$

Ejercicios

3.4.1 Supóngase que se sabe que en cierta área de una gran ciudad el número promedio de ratas por manzana es de cinco. Suponiendo que el número de ratas sigue una distribución de Poisson, encuentre la probabilidad de que en una manzana seleccionada al azar:

a) Haya exactamente cinco ratas.
b) Haya más de cinco ratas.
c) Haya menos de cinco ratas.
d) Haya entre cinco y siete ratas, inclusive.

3.4.2 Supóngase que durante un período de varios años el número promedio de muertes debidas a cierta enfermedad no contagiosa ha sido de diez. Si el número de muertes debidas a esta enfermedad sigue la distribución de Poisson, ¿cuál es la probabilidad de que durante el año que transcurre:

a) Mueran exactamente siete personas debido a la enfermedad?
b) Mueran diez o más personas debido a la enfermedad?
c) Nadie muera debido a la enfermedad?

3.4.3 Si el número promedio de accidentes graves por año en una fábrica grande (donde el número de empleados permanece constante) es de cinco, encuentre la probabilidad de que en el año en curso:

a) Haya exactamente siete accidentes.
b) Ocurran diez o más accidentes.
c) No haya accidentes.
d) Haya menos de cinco accidentes.

3.4.4 En un estudio de la efectividad de un insecticida sobre cierta especie de insecto, una gran extensión de tierra fue rociada. Posteriormente se examinó el área para buscar insectos vivos seleccionando al azar cuadrados y contando el número de insectos vivos por cuadrado. Las anteriores experiencias habían demostrado que el número promedio de insectos vivos por cuadrado después de la aspersión era de 0.5. Si el número de insectos vivos por cuadrado sigue una distribución de Poisson, ¿cuál es la probabilidad de que un cuadrado seleccionado contenga:

a) Exactamente un insecto vivo?
b) Ningún insecto vivo?
c) Exactamente cuatro insectos vivos?
d) Uno o más insectos vivos?

3.5 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

Las distribuciones de probabilidad consideradas hasta ahora, la binomial y la de Poisson, son distribuciones de variables discretas. Ahora, se estudiarán las distribuciones de variables aleatorias continuas. En el capítulo 1 se señaló que una variable continua es aquella que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo especificado de valores asumidos por la variable. En consecuencia, entre cualquiera de los dos valores asumidos por una variable continua, existe un número infinito de valores.

Para comprender mejor la naturaleza de la distribución de una variable aleatoria continua, considérense los datos de la tabla 1.4.1 y la figura 1.4.1. En la tabla se tienen 57 valores de la variable aleatoria, que corresponden a los pesos en onzas de tumores malignos. El histograma de la figura 1.4.1 se construyó localizando los puntos especificados sobre una línea que representa la medida de interés y levantando una serie de rectángulos, cuyos anchos fueron las distancias entre dos puntos especificados sobre la línea y cuyas alturas representaban el número de valores de la variable que caen entre los dos puntos especificados. Los intervalos definidos por dos puntos especificados (consecutivos) cualesquiera, recibieron el nombre de intervalos de clase. Como se indicó en el capítulo 1, las subáreas del histograma corresponden a las frecuencias de ocurrencia de los valores de la variable entre los límites de la escala horizontal de estas subáreas. Esto proporciona una forma de cómo calcular la frecuencia relativa de ocurrencia de los valores entre dos puntos especificados cualesquiera: simplemente se determina la proporción del área total del histograma que cae entre los puntos especificados. Esto puede hacerse en forma más conveniente consultando las columnas de frecuencia relativa o frecuencia relativa acumulada de la tabla 1.4.3.

Imagínese ahora una situación en donde el número de valores de la variable aleatoria es muy grande y el ancho de los intervalos de clase se hace muy pequeño. El histograma resultante podría verse como el que se muestra en la figura 3.5.1.

Si se unieran los puntos medios de las celdas del histograma de la figura 3.5.1 para formar un polígono de frecuencias, evidentemente se tendría una figura mucho más uniforme que el polígono de frecuencias de la figura 1.4.2. No debe ser difícil creer que, en general, a

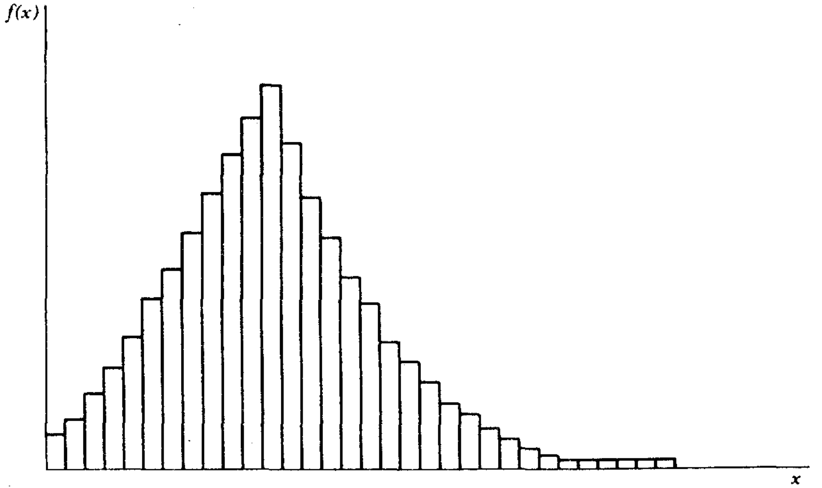


Figura 3.5.1 Histograma obtenido de un gran número de valores e intervalos de clase pequeños.

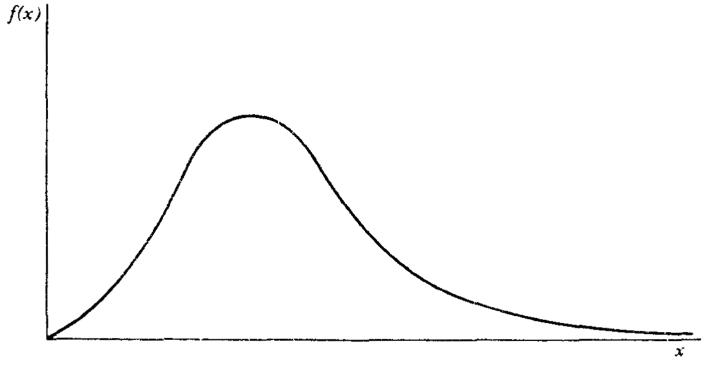


Figura 3.5.2 Representación gráfica de una distribución continua.

medida que el número de observaciones, n, tiende hacia el infinito y el ancho de los intervalos de clase tiende hacia cero, el polígono de frecuencias se aproxima a una curva uniforme como la que se muestra en la figura 3.5.2. Curvas uniformes como ésta son las que se utilizan para representar gráficamente las distribuciones de las variables aleatorias continuas. Esto tiene algunas consecuencias importantes cuando se trabaja con distribuciones de probabilidad. Primero, el área total bajo la curva es igual a uno, como lo fue con el histograma, y la frecuencia relativa de ocurrencia de los valores entre dos puntos cualesquiera sobre el eje de las x es igual al área total limitada por la curva, el eje de las x y las líneas perpendiculares levantadas en los dos puntos sobre el eje de las x. Véase la figura 3.5.3. La probabilidad de

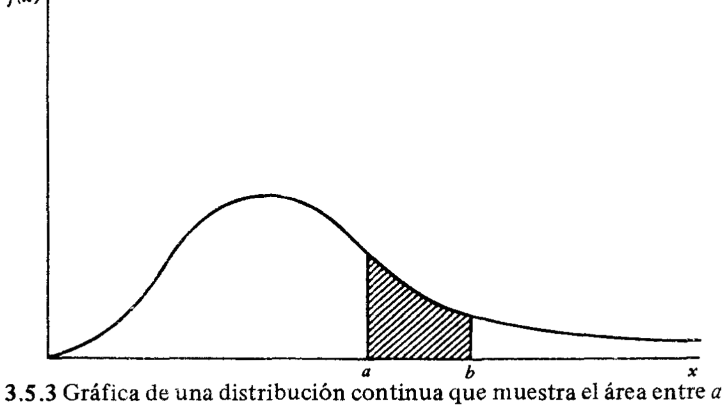


Figura 3.5.3 Gráfica de una distribución continua que muestra el área entre a y b.

cualquier valor específico de la variable aleatoria es *cero.* Esto parece lógico, dado que un valor específico está representado por un punto sobre el eje de las x y el área por arriba de un punto es cero.

Con un histograma, como ya se ha visto, las subáreas de interés pueden encontrarse sumando las áreas representadas por las celdas. En el caso de una curva uniforme, no se tienen celdas, de modo que debe buscarse un método alternativo para encontrar las subáreas. Dicho método lo proporciona el cálculo integral. Para encontrar el área bajo una curva uniforme entre dos puntos cualesquiera, a y b, se integra la *función densidad* de a a b. Una *función de densidad* es una fórmula que se utiliza para representar la distribución de una variable aleatoria continua. La integración es el caso límite de la sumatoria, pero no se llevarán a cabo integraciones de ninguna especie, dado que las matemáticas que intervienen están más allá del alcance de este libro. Como se verá más adelante, para todas las distribuciones continuas que se consideren aquí, existe una manera más fácil de encontrar las áreas bajo las curvas.

Aunque en esta sección ya se dio por entendida la definición de una distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua, a manera de resumen se presentará en una forma más compacta como sigue.

Definición

> *Una función no negativa* f(x) *recibe el nombre de distribución de probabilidad (llamada a veces función de densidad de probabilidad) de la variable aleatoria continua* X *si el área total limitada por su curva y el eje de las* x *es igual a 1, y si la subárea bajo la curva, limitada por la curva, el eje de las* x *y las perpendiculares trazadas en dos puntos cualesquiera,* a *y* b*, da la probabilidad de que* X *esté entre los puntos* a *y* b.

3.6 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Se ha llegado ahora a la distribución más importante de toda la estadística, la *distribución normal.* La fórmula para esta distribución fue publicada por primera vez por Abraham De Moivre (1667-1754) el 12 de noviembre de 1733.[3] Muchos otros matemáticos figuran de manera prominente en la historia de la distribución normal, incluyendo a Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Con frecuencia a esta distribución se le nombra como *distribución gaussiana* en reconocimiento a sus contribuciones.

La densidad normal está dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.6.1}$$

En la ecuación 3.6.1 π y e son, respectivamente, las conocidas constantes 3.14159 y 2.71828, que se encuentran con frecuencia en las matemáticas. Los dos parámetros de la distribución son μ, la media, y σ, la desviación estándar. Para los fines que aquí se siguen, puede imaginarse a μ y σ de una distribución normal, respectivamente, como las medidas de tendencia central y de dispersión, como se vio en el capítulo 1. Sin embargo, dado que una variable aleatoria con distribución normal es continua y toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$, su media y distribución estándar pueden definirse más rigurosamente; pero no pueden darse tales definiciones sin recurrir al análisis matemático. La gráfica de la distribución normal produce la conocida curva en forma de campana que se muestra en la figura 3.6.1.

Los siguientes puntos son las características más importantes de la distribución normal.

1. Es simétrica en torno a su media, μ. Como se muestra en la figura 3.6.1, la curva hacia cualquiera de los lados de μ es una imagen de espejo de la del otro lado.
2. La media, mediana y moda son iguales.
3. El área total bajo la curva arriba del eje de las x es una unidad de área. Esta característica se deduce del hecho de que la distribución normal es una distribución de probabilidad. Debido a la simetría

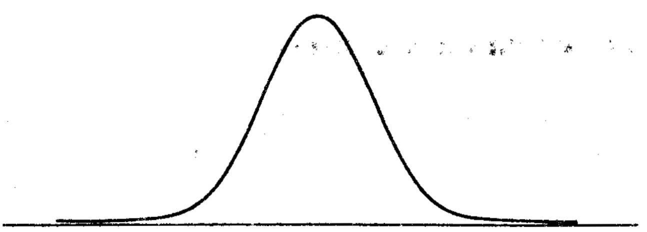


Figura 3.6.1 Gráfica de una distribución normal.

ya mencionada, el 50 por ciento del área está hacia la derecha de una perpendicular trazada en la media, y el 50 por ciento restante está hacia la izquierda.

4. Si se trazan perpendiculares a una distancia de una desviación estándar a partir de la media, en ambas direcciones, el área encerrada por estas perpendiculares, el eje de las x y la curva será aproximadamente el 68 por ciento del área total. Si se extienden estos límites laterales hasta una distancia de dos desviaciones estándar, hacia cualquier lado de la media, se encerrará aproximadamente el 95 por ciento del área, y extendiéndolas hasta una distancia de tres desviaciones estándar, se logrará que aproximadamente el 99.7 por

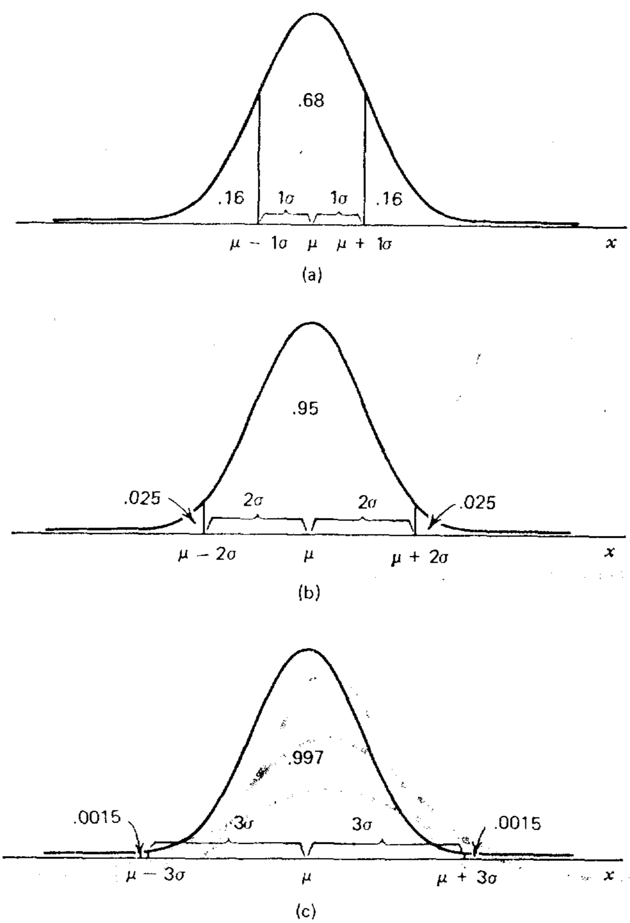


Figura 3.6.2 Subdivisión del área bajo la curva normal (las áreas son aproximadas).

ciento del área total quede encerrada. Estas áreas aproximadas se ilustran en la figura 3.6.2.

5. La distribución normal está determinada completamente por los parámetros μ y σ. En otras palabras, se especifica una distribución normal distinta para cada valor distinto de μ y σ. Los valores distintos de μ trasladan la gráfica de la distribución a lo largo del eje de las x, como se muestra en la figura 3.6.3. Los diferentes valores de σ determinan el grado de aplanamiento o levantamiento de la gráfica de la distribución, como se aprecia en la figura 3.6.4.

La distribución normal unitaria o normal estándar. La última característica mencionada de la distribución normal implica que ésta es en realidad una familia de distribuciones en la cual un miembro se distingue de otro con base en los valores de μ y σ. El miembro más importante de esta familia es la *distribución normal unitaria o normal estándar,* llamada así porque tiene una media de cero y una desviación estándar de uno. Esta distribución puede obtenerse a partir de la ecuación 3.6.1, haciendo que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La variable aleatoria que

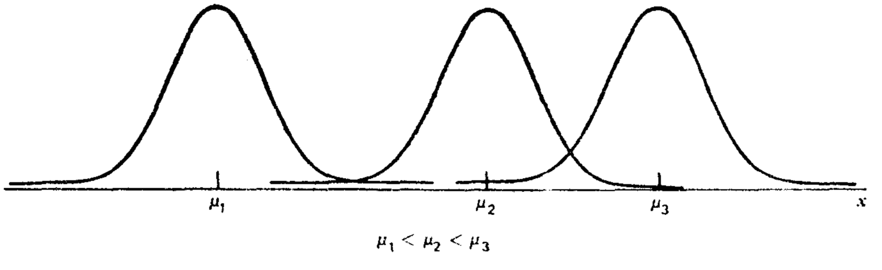


Figura 3.6.3 Tres distribuciones normales con diferentes medias.

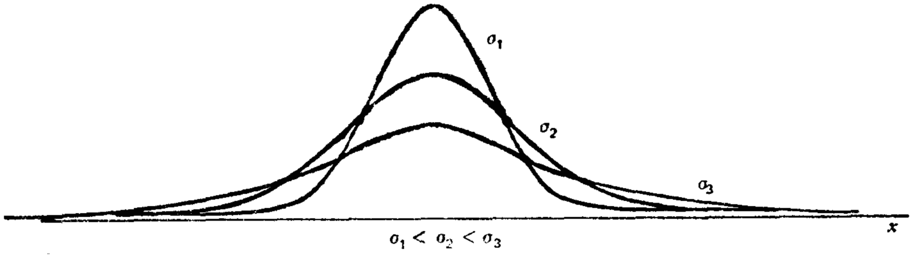


Figura 3.6.4 Tres distribuciones normales con diferentes desviaciones estándar.

resulta, $(x - \mu)/\sigma$, se designa generalmente por la letra z, de modo que la ecuación para la distribución normal unitaria se escribe como

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < \infty \tag{3.6.2}$$

La gráfica de la distribución normal unitaria se muestra en la figura 3.6.5.

Para encontrar la probabilidad de que z tome un valor entre dos puntos cualesquiera sobre el eje z, por ejemplo z_0 y z_1, debe encontrarse el área limitada por las perpendiculares trazadas en estos puntos, la curva y el eje horizontal. Como se mencionó anteriormente, las áreas bajo la curva de una distribución continua se encuentran integrando la función entre dos valores de la variable. Entonces, en el caso de la normal unitaria, para encontrar el área entre z_0 y z_1, se necesita calcular la siguiente integral:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

Afortunadamente, no tiene que llevarse a cabo esta integración, dado que se cuenta con tablas que proporcionan los resultados de todas aquellas integraciones que podrían ser interesantes. La tabla F del apéndice es un ejemplo de estas tablas. En dicha tabla se encuentran las áreas bajo la curva entre $-\infty$ y los valores de z mostrados en la columna de la extrema izquierda de la tabla. El área sombreada de la figura 3.6.6 representa el área dada en la tabla como aquella entre $-\infty$ y $z = z_0$.

Ilústrese ahora el uso de la tabla F por medio de varios ejemplos.

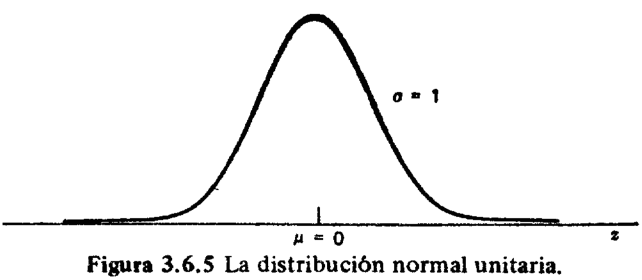


Figura 3.6.5 La distribución normal unitaria.

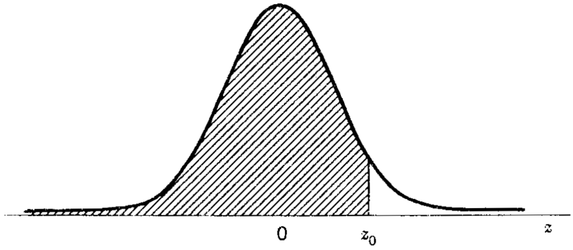


Figura 3.6.6 Area dada por la tabla F del apéndice.

Ejemplo 3.6.1

Dada la distribución normal unitaria, encuentre el área bajo la curva, por arriba del eje z, entre $-\infty$ y $z = 2$.

Solución. Será útil trazar un esquema de la distribución normal unitaria y sombrear el área que se desea, como en la figura 3.6.7. Si se localiza $z = 2$ en la tabla F y se lee el valor correspondiente en el cuerpo de dicha tabla, se encuentra que el área deseada tiene un valor de .9772. Esta área puede interpretarse de varias maneras: como la probabilidad de que una z seleccionada al azar de la población de z tenga un valor entre $-\infty$ y 2, como la frecuencia relativa de ocurrencia (o proporción) de los valores de z entre $-\infty$ y 2, o bien puede decirse que el 97.72 por ciento de las z tiene un valor entre $-\infty$ y 2.

Ejemplo 3.6.2

¿Cuál es la probabilidad de que una z seleccionada al azar de la población de z tenga un valor entre -2.55 y $+2.55$?

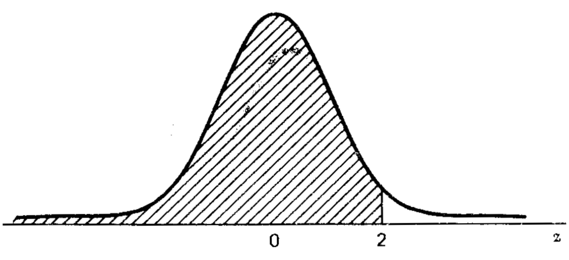


Figura 3.6.7 Distribución normal unitaria que muestra el área entre $-\infty$ y $z = 2$.

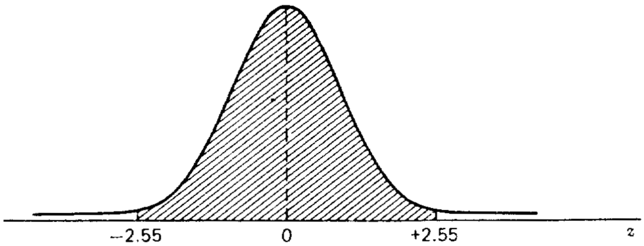


Figura 3.6.8 Curva normal unitaria que muestra $P(-2.55 < z < 2.55)$.

Solución. La figura 3.6.8 muestra el área deseada. La tabla F da el área entre $-\infty$ y 2.55, la cual se encuentra localizando el 2.5 en la columna de la extrema izquierda de la tabla y, a continuación, dirigiéndose horizontalmente hasta llegar al valor que se encuentra en la columna encabezada por .05. Se encuentra que esta área es de .9946. Si se observa la figura que se trazó, se ve que ésta es más del área deseada. Se necesita restar de .9946 el área hacia la izquierda de -2.55. Utilizando la tabla F se verifica que el área a la izquierda de -2.55 es .0054. Por lo tanto, la probabilidad deseada es

$$P(-2.55 < z < 2.55) = .9946 - .0054 = .9892$$

Supóngase que se hubiera deseado encontrar la probabilidad de que z estuviera entre -2.55 y 2.55, inclusive. La probabilidad deseada se expresa como $P(-2.55 \leq z \leq 2.55)$. Entonces, como se señaló en la sección 3.5, $P(z = z_0) = 0$, $P(-2.55 \leq z \leq 2.55) = P(-2.55 < z < 2.55) = .9892$.

Ejemplo 3.6.3

¿Qué proporción de valores z están entre -2.74 y 1.53?

Solución. La figura 3.6.9 muestra el área deseada. En la tabla F se encuentra que el área entre $-\infty$ y 1.53 es .9370 y que el área entre $-\infty$ y -2.74 es .0031. Para obtener la probabilidad deseada, se resta .0031 de .9370. Es decir,

$$P(-2.74 \leq z \leq 1.53) = .9370 - .0031 = .9339$$

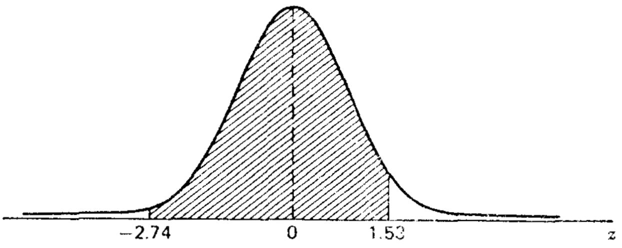


Figura 3.6.9 Curva normal unitaria que muestra la proporción de los valores de z entre $z = -2.74$ y $z = 1.53$.

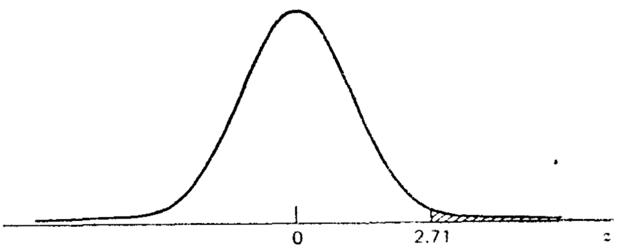


Figura 3.6.10 Distribución normal unitaria que muestra $P(z \geq 2.71)$.

Ejemplo 3.6.4

Dada la distribución normal unitaria, encuentre $P(z \geq 2.71)$.

Solución. El área deseada se muestra en la figura 3.6.10. Se obtiene el área hacia la derecha de $z = 2.71$ restanto el área entre $-\infty$ y 2.71 de 1. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} P(z \geq 2.71) &= 1 - P(z \leq 2.71) \\ &= 1 - .9966 \\ &= .0034 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.5

Dada la distribución normal unitaria, encuentre $P(.84 \leq z \leq 2.45)$.

Solución. El área deseada se muestra en la figura 3.6.11. Se obtiene primero el área entre $-\infty$ y 2.45 y, de ésta, se resta el área entre $-\infty$ y .84. En otras palabras, se tiene que

$$\begin{aligned} P(.84 \leq z \leq 2.45) &= P(z \leq 2.45) - P(z \leq .84) \\ &= .9929 - .7995 \\ &= .1934 \end{aligned}$$

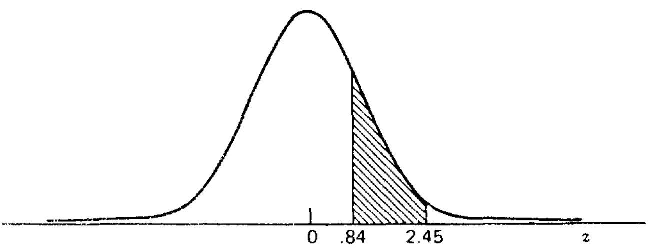


Figura 3.6.11 Curva normal unitaria que muestra $P(.84 \leq z \leq 2.45)$

Ejercicios

Dada la distribución normal unitaria, encuentre:

3.6.1 El área bajo la curva entre $z = 0$ y $z = 1.43$.

3.6.2 La probabilidad de que una z seleccionada al azar tenga un valor entre $z = -2.87$ y $z = 2.64$.

3.6.3. $P(z \geq .55)$.

3.6.4. $P(z \geq -.55)$.

3.6.5. $P(z < -2.33)$.

3.6.6. $P(z < 2.33)$.

3.6.7. $P(-1.96 \leq z \leq 1.96)$.

3.6.8. $P(-2.58 \leq z \leq 2.58)$.

3.6.9. $P(-1.65 \leq z \leq 1.65)$.

3.6.10. $P(z = .74)$.

Aplicaciones. Aunque su importancia en el campo de la estadística es indiscutible, debe tenerse en cuenta que la distribución normal no es una ley a la que se apeguen todas las características medibles que se presentan en la naturaleza. Sin embargo, es cierto que muchas de esas características están distribuidas casi en forma de una distribución normal. Suelen citarse como ejemplos la estatura e inteligencia humanas. Por otra parte, Elverback y colaboradores[4] y Nelson y colaboradores[5] han señalado que muchas distribuciones relevantes para el campo de la salud no pueden describirse convenientemente a través de una distribución normal. Siempre que se sabe que una variable aleatoria está distribuida en forma aproximadamente normal o cuando se carece de un conocimiento completo, se considera razonable hacer esta suposición, el estadístico recibe una ayuda considerable en su esfuerzo por resolver los problemas prácticos relativos a esta variable.

Existen varias otras razones por las que la distribución normal es tan importante en la estadística, y se considerarán a su debido tiempo. Por ahora, véase cómo pueden contestarse algunas preguntas sencillas de probabilidad acerca de variables aleatorias cuando se sabe, o se tienen motivos para suponer que, al menos, están distribuidas en forma aproximadamente normal.

Ejemplo 3.6.6

Un fisioterapeuta nota que las calificaciones obtenidas en cierta prueba de destreza manual están distribuidas en forma aproximadamente normal con una media de 10 y una desviación estándar de 2.5. Si un individuo seleccionado al azar realiza la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación de 15 o más?

Solución. Primero debe trazarse un esquema de la distribución y sombrear el área correspondiente a la probabilidad de interés. Esto se ha hecho en la figura 3.6.12.

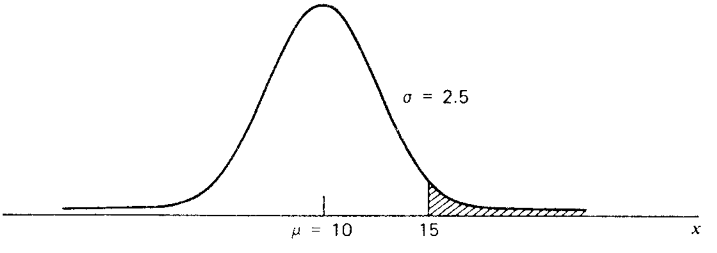


Figura 3.6.12 Distribución normal para aproximar la distribución de las calificaciones en una prueba de destreza manual.

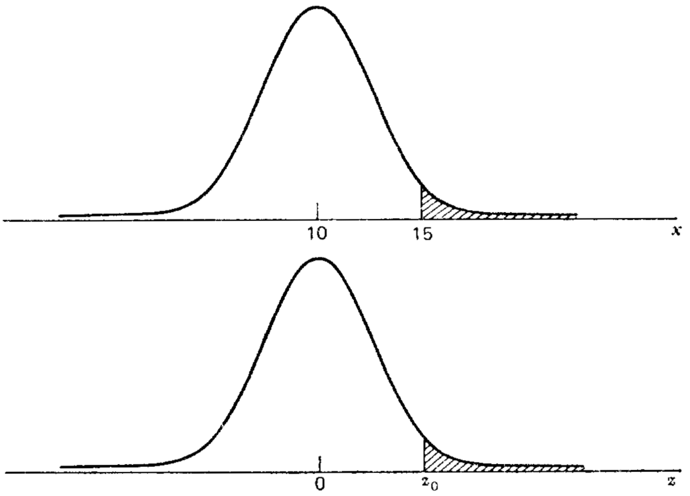


Figura 3.6.13 Distribución normal de las calificaciones de destreza manual (x) y la distribución normal unitaria (z).

Si la distribución en cuestión fuera la normal unitaria, con una media de 0 y una desviación estándar de 1, podría utilizarse la tabla F y encontrar la probabilidad con poco esfuerzo. Afortunadamente, cualquier distribución normal puede transformarse en la normal unitaria. Lo que tiene que hacerse es transformar todos los valores de X en los correspondientes valores de z. Esto significa que la media de X debe hacerse 0, la media de z. En la figura 3.6.13 se muestran ambas distribuciones. Debe determinarse qué valor de z, por decir z_0, corresponde a un x de 15. Esto se lleva a cabo mediante la siguiente fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{3.6.3}$$

la cual transforma cualquier valor de x en cualquier distribución normal al valor correspondiente de z en la distribución normal unitaria. Para el presente ejemplo se tiene que

$$z = \frac{15 - 10}{2.5} = \frac{5}{2.5} = 2$$

Entonces, el valor de z_0 que se busca es 2.

Examínense ahora estas relaciones con más cuidado. Se observa que la distancia desde la media, 10, hasta el valor de x de interés, 15, es de $15 - 10 = 5$, que es una distancia de dos desviaciones estándar. Cuando se transforman los valores de x en valores de z, la distancia del valor de z de interés a partir de su media, 0, es igual a la distancia del valor correspondiente de x a partir de su media, 10, en unidades de desviación estándar. Se ha visto que esta última distancia es de 2 desviaciones estándar. En la distribución z, una desviación estándar es igual a uno y, en consecuencia, el punto sobre la escala z localizado a una distancia de 2 desviaciones estándar de 0 es $z = 2$, que es el resultado que se obtuvo utilizando la fórmula. Consultando la tabla F, se encuentra que el área a la derecha de $z = 2$ es .0228. La discusión anterior puede resumirse como sigue:

$$P(x \geq 15) = P\left(z \geq \frac{15 - 10}{2.5}\right) = P(z \geq 2) = .0228$$

Para dar respuesta a la pregunta original, se dice que la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar que realice la prueba obtenga una calificación de 15 o más es de .0228.

Ejemplo 3.6.7

Supóngase que se sabe que los pesos de cierto grupo de individuos están distribuidos en forma aproximadamente normal con una media de 70 kg y una desviación estándar de 12.5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de este grupo pese entre 50 y 85 kg?

Solución. En la figura 3.6.14 se muestra la distribución de los pesos y la distribución z a la cual se transforman los valores originales, con el fin de determinar las probabilidades deseadas. Se encuentra que el valor de z correspondiente a un x de 50 es

$$z = \frac{50 - 70}{12.5} = -1.6$$

Asimismo, para $x = 85$ se tiene que

$$z = \frac{85 - 70}{12.5} = 1.2$$

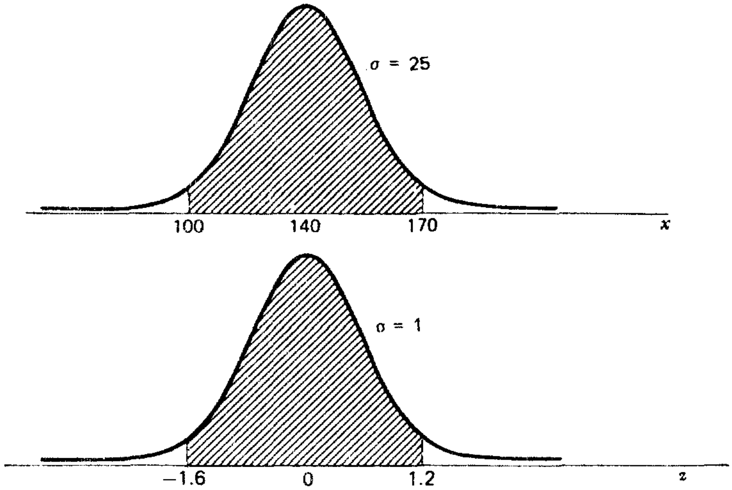


Figura 3.6.14 Distribución de pesos (x) y la distribución normal unitaria correspondiente (z).

En la tabla F se encuentra que el área entre $-\infty$ y -1.6 es de .0548 y que el área entre $-\infty$ y 1.2 es de .8849. El área deseada es la diferencia entre estos valores, $.8849 - .0548 = .8301$. Para resumir, se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(100 \leq x \leq 170) &= P\left(\frac{100-140}{25} \leq z \leq \frac{170-140}{25}\right) \\
&= P(-1.6 \leq z \leq 1.2) \\
&= P(-\infty \leq z \leq 1.2) - P(-\infty \leq z \leq -1.6) \\
&= .8849 - .0548 \\
&= .8301
\end{aligned}
$$

Entonces, la probabilidad buscada en la pregunta original es de .8301.

Ejercicios

3.6.11 Supóngase que las edades en las que se adquiere cierta enfermedad están distribuidas en forma aproximadamente normal con una media de 11.5 años y una desviación estándar de 3 años. Un niño acaba de contraer dicha enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que el niño tenga:

a) Entre 8 1/2 y 14 1/2 años de edad?
b) Más de 10 años de edad?
c) Menos de 12?

3.6.12 En los estudios dactiloscópicos, una importante característica cuantitativa es el número total de surcos para los 10 dedos de un individuo. Supóngase que los números totales de surcos de los individuos de cierta población están distribuidos en forma aproximadamente normal con una media de 140 y una desviación estándar de 50. Encuentre la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar de dicha población tenga un número de surcos:

a) De 200 o más
b) Menor de 100.
c) Entre 100 y 200.
d) Entre 200 y 250.

3.6.13 Si las capacidades de la cavidad craneana de los individuos de cierta población están distribuidas en forma aproximadamente normal con una media de 1,400 cc y una desviación estándar de 125, encuentre la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de dicha población tenga una capacidad de cavidad craneana:

a) Mayor de 1,450 cc.
b) Menor de 1,350 cc.
c) Entre 1,300 y 1,500 cc.

3.6.14 Supóngase que la duración promedio de la internación en un hospital de enfermedades crónicas para cierto tipo de paciente es de 60 días con una desviación estándar de 15. Si es lógico suponer una distribución aproximadamente normal de las duraciones de la internación, encuentre la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar de dicho grupo tenga una duración de internación:

a) De más de 50 días.
b) De menos de 30 días.
c) Entre 30 y 60 días.
d) De más de 90 días.

3.6.15 Si las concentraciones de colesterol total para cierta población están distribuidas en forma aproximadamente normal con una media de 200 mg/100 ml y una desviación estándar de 20 mg/100 ml, encuentre la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar de dicha población tenga una concentración de colesterol:

a) Entre 180 y 200 mg/100 ml.
b) Mayor de 225 mg/100 ml.
c) Menor de 150 mg/100 ml.
d) Entre 190 y 210 mg/100 ml.

3.6.16 Dada una población con distribución normal con una media de 75 y una variancia de 625, encuentre:

a) $P(50 \leq x \leq 100)$.
b) $P(x > 90)$.
c) $P(x < 60)$.
d) $P(x \geq 85)$.
e) $P(30 \leq x \leq 110)$.

3.7 RESUMEN

En el presente capítulo se desarrollaron aún más los conceptos de probabilidad descritos en el capítulo anterior. Se estudiaron los conceptos de variables aleatorias discretas y continuas y sus distribuciones de probabilidad. En particular, se examinaron con bastante detalle dos distribuciones discretas de probabilidad, la binomial y la de Poisson, y una distribución continua de probabilidad, la distribución normal. Se ha visto en qué forma estas distribuciones teóricas permiten hacer ciertas afirmaciones de probabilidad acerca de ciertas variables aleatorias que son de interés para el profesional en salud pública.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una variable aleatoria discreta? Dé tres ejemplos que sean de interés para el profesional en salud pública.
2. ¿Qué es una variable aleatoria continua? Dé tres ejemplos de interés para el profesional en salud pública.

3. Defina la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
4. Defina la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua.
5. ¿Qué es una distribución de probabilidad acumulada?
6. ¿Qué es un ensayo de Bernoulli?
7. Describa la distribución binomial.
8. Dé un ejemplo de una variable aleatoria que siga una distribución binomial.
9. Describa la distribución de Poisson.
10. Dé un ejemplo de una variable aleatoria que siga una distribuida de acuerdo a la ley de Poisson.
11. Describa la distribución normal.
12. Describa la distribución normal unitaria y diga cómo se utiliza en la estadística.
13. Dé un ejemplo de una variable aleatoria que esté, al menos, distribuida en forma aproximadamente normal.
14. Utilizando los datos del ejemplo anterior, demuestre el uso de la distribución normal unitaria para contestar las preguntas de probabilidad relacionadas con la variable seleccionada.
15. El método habitual de enseñanza de una destreza particular de cuidado de sí mismo para personas con retraso mental es eficaz en el 50 por ciento de los casos. Se ensayó un nuevo método en 10 personas. Si el nuevo método no es mejor que el estándar, ¿cuál es la probabilidad de que siete o más personas aprendan dicha destreza?
16. Los registros del personal de un hospital grande muestran que el 10 por ciento de los empleados de administración y mantenimiento renuncian dentro del año posterior a su contratación. Si 10 nuevos empleados han sido contratados recientemente:

    a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de ellos continúen trabajando al cabo de un año?
    b) ¿cuál es la probabilidad de que todos estén trabajando al cabo de un año?
    c) ¿cuál es la probabilidad de que tres de los 10 renuncien antes de que concluya el año?

17. En cierto país en vías de desarrollo, el 30 por ciento de los niños está desnutrido. En una muestra al azar de 25 niños de esta área, ¿cuál es la probabilidad de que el número de niños desnutridos sea

a) exactamente de 10?
b) menor de cinco?
c) de cinco o más?
d) entre tres y cinco, inclusive?
e) menor de siete, pero mayor de 4?

18. En promedio, dos estudiantes por hora acuden a la sala de primeros auxilios de una escuela primaria.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que durante una hora determinada tres estudiantes acudan a la sala de primeros auxilios?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que durante una hora determinada dos o menos estudiantes acudan a la sala de primeros auxilios?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que entre tres y cinco estudiantes, inclusive, acudan a la sala de primeros auxilios durante una hora determinada?

19. En promedio, cinco fumadores pasan por la esquina de cierta calle cada diez minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un período de diez minutos el número de fumadores que pasan por esa esquina sea de

a) seis o menos?
b) siete o más?
c) exactamente ocho?

20. En cierta área metropolitana hay un promedio de un suicidio por mes. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un determinado mes el número de suicidios sea

a) mayor de uno?
b) menor de uno?
c) mayor de tres?

21. El coeficiente intelectual de individuos admitidos a una escuela estatal para retrasados mentales muestra una distribución aproximadamente normal con una media de 60 y una desviación estándar de 10.

a) Encuentre la proporción de individuos con un coeficiente intelectual mayor de 75.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un coeficiente intelectual entre 55 y 75?
c) Encuentre $P(50 \leq X \leq 70)$.

22. Una enfermera supervisora ha encontrado que las enfermeras en servicio, en promedio, tardan 10 minutos en realizar una tarea. Si los tiempos requeridos para concluir la tarea están distribuidos en forma aproximadamente normal con una desviación estándar de 3 minutos, encuentre:

    a) La proporción de enfermeras que concluyen la tarea en menos de cuatro minutos.
    b) La proporción de enfermeras que requieren más de cinco minutos para concluir la tarea.
    c) La probabilidad de que una enfermera, a quien recientemente se le ha asignado la tarea, la concluya al cabo de tres minutos.

23. Las calificaciones obtenidas en cierta prueba de aptitudes por estudiantes de enfermería están distribuidas en forma aproximadamente normal con una media de 500 y una variancia de 10,000.

    a) ¿Qué proporción de calificaciones están por debajo de 200?
    b) Una persona está a punto de hacer la prueba; ¿cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación de 650 o más?
    c) ¿Qué proporción de calificaciones está entre 350 y 675?

24. Dada una variable binomial con una media de 20 y una variancia de 16, encuentre n y p.
25. Supóngase que una variable X muestra una distribución normal con una desviación estándar de 10. Dado que .0985 de los valores de X son mayores de 70, ¿cuál es el valor medio de X?

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. Norman L. Johnson y Samuel Kotz, *Discrete Distributions*, Houghton-Mifflin, Boston, 1969.
2. Frank A. Haight, *Handbook of the Poisson Distribution*, Wiley, Nueva York, 1967.
3. Helen M. Walker, *Studies in the History of Statistical Method,* The Williams and Wilkins Company, Baltimore, 1931.
4. Lila R. Elveback, Claude L. Gulliver y F. Raymond Deating, Jr., "Health, Normality and the Ghost of Gauss," *The Journal of the American Medical Association, 211* (1970), 69-75.

5. Jerald C. Nelson, Elizabeth Haynes, Rodney Willard y Jan Kuzma, "The Distribution of Euthyroid Serum Protein-Bound Iodine Levels," *The Journal of the American Medical Association, 216* (1971), 1639-1641.

Otras referencias

1. Sam Duker, "The Poisson Distribution in Educational Research," *Journal of Experimental Education, 23* (1955), 265-269.
2. M. S. Lafleur, P. R. Hinrichsen, P. C. Landry y R. B. Moore, "The Poisson Distribution: An Experimental Approach to Teaching Statistics," *Physics Teacher, 10* (1972), 314-321.

4

Algunas distribuciones muestrales importantes

4.1 INTRODUCCIÓN

Antes de examinar el tema principal del presente capítulo, se revisarán los puntos sobresalientes de lo que se ha tratado hasta aquí. En el capítulo 1 se hizo énfasis en la organización y resumen de los datos. Aquí se encuentran los conceptos de tendencia central y dispersión, y se aprende cómo calcular sus medidas descriptivas. En el capítulo 2 se estudiaron las ideas fundamentales de la probabilidad y en el capítulo 3 se consideró el concepto de una distribución de probabilidad. Estos conceptos son fundamentales para comprender la inferencia estadística, el tema que abarca la mayor parte de este libro.

El presente capítulo sirve de enlace entre el material estudiado, que es esencialmente de naturaleza descriptiva, y la mayoría de los temas restantes, que se han seleccionado del área de la inferencia estadística.

4.2 MUESTREO ALEATORIO SIMPLE

En términos generales, existen dos tipos de muestreo, el *muestreo probabilístico* y el *muestreo no probabilístico* pero, en este texto, se estudiará sólo el primero. La razón es que únicamente para el muestreo probabilístico existen procedimientos estadísticamente seguros que permiten inferir, a partir de la muestra extraída, la población de interés.

Definición

Una muestra probabilística es una muestra extraída de una población de tal manera que todo miembro de esta última tenga una probabilidad conocida de estar incluido en la muestra.

De cualquier población finita de tamaño N, puede extraerse un cierto número de muestras distintas de tamaño n. (Se hace esta afirmación bajo la hipótesis de que N es lo suficientemente grande como para garantizar el muestreo. Como regla, por razones obvias, las poblaciones pequeñas no se muestrean, sino que se estudia la población completa).

Definición

Si se extrae una muestra de tamaño n *de una población de tamaño* N, *de tal manera que cada muestra posible de tamaño* n *tenga la misma probabilidad de ser seleccionada, la muestra recibe el nombre de* **muestra aleatoria simple**.

La mecánica de extraer una muestra que satisfaga la definición de una muestra aleatoria simple se conoce como *muestreo aleatorio simple.*

Más adelante se demostrará el procedimiento del muestreo aleatorio simple, pero, primero, se considerará el problema de si se muestrea *con reemplazo* o *sin reemplazo.* Cuando se utiliza el muestreo con reemplazo, cada miembro de la población está disponible para cada extracción. Por ejemplo, supóngase que se extrae una muestra de una población de pacientes antiguos de un hospital, como parte de un estudio de duración de la internación. Supóngase que el muestreo comprende la selección de una muestra tomada de los expedientes del departamento de archivo médico de los pacientes dados de alta. En el muestreo con reemplazo se procedería como sigue: se selecciona un expediente para formar parte de la muestra, se registra la duración de la internación y se regresa el expediente al estante. El expediente está nuevamente en la "población" y puede ser tomado una vez más en alguna ocasión subsiguiente, en cuyo caso, la duración de la internación se registrará otra vez. En el muestreo sin reemplazo, el expediente extraído no se regresaría al estante después de haber registrado la duración de la internación, sino que se separaría hasta que se extrajera la muestra completa. Siguiendo este procedimiento, un expediente dado aparecería en la muestra sólo una vez. Como regla, en la práctica, el muestreo siempre se realiza sin reemplazo. Posteriormente, se explicará el significado y las consecuencias de esto, pero primero se verá cómo se selecciona una muestra aleatoria simple. Con el fin de asegurar una verdadera aleatoriedad, se necesitará seguir algún procedimiento objetivo. Evidentemente, se deseará evitar el uso del criterio propio para decidir qué miembros de la población constituyen una muestra aleatoria.

Ejemplo 4.2.1

Una manera de seleccionar una muestra aleatoria simple es utilizar una tabla de números aleatorios como la que se muestra en la tabla G del apéndice. Supóngase que la población de interés consta de los 150 valores de concentración de azúcar en sangre que se ha extraído en ayunas y que se indican en la tabla 4.2.1.

Se desea extraer de esta población, una muestra aleatoria simple de tamaño 10, utilizando los números aleatorios de la tabla G. Como primer paso, se debe localizar un punto de partida aleatorio en la tabla. Esto puede hacerse en varias formas, una de las cuales es quitar la vista de la página, mientras se toca con la punta de un lápiz. El punto de partida aleatorio es el dígito más próximo al punto donde el lápiz tocó la página. Supóngase que, siguiendo este procedimiento, se llegó a un punto de partida aleatorio en la primera página de la tabla G, en la intersección del renglón 21 y la columna 28. El dígito en este punto es 5. Dado que se tienen 150 valores para elegir, pueden utilizarse sólo los números aleatorios del 1 al 150. Resultará conveniente seleccionar números de tres dígitos, de modo que sean elegibles sólo los números del 001 al 150. El primer número de tres dígitos, empezando en el punto de partida aleatorio, es el 532, un número que no puede utilizarse. Se recorre la tabla hacia abajo y se pasan los números 196, 372, 654 y 928 hasta llegar al 137, un número que puede utilizarse. El 137-ésimo valor de la tabla 4.2.1 es 92, el primer valor de la muestra. En la tabla 4.2.2 se han registrado el número aleatorio y la concentración de azúcar en sangre correspondiente. Se han registrado los números aleatorios para que se vea cuáles fueron los seleccionados. Dado que se desea una muestra sin reemplazo, no se desea incluir dos veces el valor de un mismo individuo. Procediendo en la forma que acaba de describirse, se llega a los nueve números aleato-

Tabla 4.2.1 Concentraciones de azúcar en la sangre que se ha extraído en ayunas a 50 individuos aparentemente normales.

Número del individuo	*Concen-tración*	*Número del individuo*	*Concen-tración*	*Número del individuo*	*Concen-tración*	*Número del individuo*	*Concen-tración*	*Número del individuo*	*Concen-tración*
1	91	31	107	61	87	91	91	121	90
2	94	32	94	62	104	92	104	122	105
3	115	33	101	63	109	93	109	123	100
4	85	34	95	64	93	94	92	124	89
5	89	35	80	65	95	95	85	125	90
6	107	36	104	66	107	96	108	126	106
7	94	37	94	67	88	97	99	127	94
8	105	38	102	68	107	98	103	128	100
9	94	39	89	69	113	99	81	129	92
10	103	40	98	70	95	100	96	130	91
11	104	41	106	71	102	101	105	131	87
12	105	42	85	72	94	102	91	132	105
13	88	43	93	73	99	103	115	133	102
14	107	44	103	74	87	104	108	134	101
15	90	45	119	75	102	105	102	135	111
16	95	46	90	76	105	106	101	136	91
17	104	47	82	77	80	107	94	137	92
18	93	48	90	78	90	108	93	138	98
19	109	49	113	79	108	109	102	139	81
20	87	50	104	80	105	110	119	140	117
21	92	51	97	81	90	111	96	141	103
22	117	52	101	82	115	112	104	142	96
23	98	53	90	83	82	113	85	143	101
24	89	54	88	84	90	114	108	144	88
25	105	55	108	85	102	115	103	145	100
26	101	56	95	86	91	116	90	146	100
27	81	57	100	87	103	117	105	147	95
28	108	58	103	88	107	118	99	148	103
29	94	59	108	89	107	119	88	149	101
30	104	60	85	90	97	120	103	150	90

Tabla 4.2.2 Muestra de 10 concentraciones de azúcar en la sangre que se ha extraído, obtenida de los datos de la tabla 4.2.1.

Número aleatorio	*Número del individuo en la muestra*	*Concentración*
137	1	92
114	2	108
028	3	108
085	4	102
018	5	93
042	6	85
053	7	90
108	8	93
144	9	88
126	10	106

rios restantes y sus correspondientes concentraciones de azúcar en sangre que se muestran en la tabla 4.2.2. Nótese que cuando se llega al fin de la columna, se avanza simplemente tres dígitos hasta el 028 y hacia arriba de la columna. También pudo haberse empezado por la parte de arriba de dicha columna con el número 369.

Así, se ha extraído una muestra aleatoria simple, de tamaño 10, de una población de tamaño 150. En todo estudio futuro, siempre que se utilice el término de muestra aleatoria simple, se entenderá que la muestra se extrajo en esta forma o en otra equivalente.

Muchas de las computadoras más comunes tienen capacidad para generar números aleatorios. Como alternativa para utilizar tablas impresas de números aleatorios, los investigadores pueden utilizar computadoras para obtener los números aleatorios que desean. En realidad, los números "aleatorios" dados por la mayoría de las computadoras son de hecho, ***números pseudoaleatorios*** debido a que son el resultado de una fórmula determinística. Sin embargo, como Fishman[1] lo ha señalado, parece ser que dichos números sirven satisfactoriamente para muchos de los fines prácticos.

Ejercicios

4.2.1 Utilizando la tabla de números aleatorios, seleccione un nuevo punto de partida aleatorio y extraiga otra muestra aleatoria simple de tamaño 10 de los datos de la tabla 4.2.1.

4.2.2 Obtenga una muestra aleatoria simple de tamaño 5 de los datos de la tabla 1.4.1.

4.3 DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Se ha llegado ahora al tema principal de este capítulo, las *distribuciones muestrales*. Nunca estará de más todo lo que se haga por resaltar la importancia que tiene la comprensión clara de las distribuciones muestrales, ya que este concepto es la clave para comprender la inferencia estadística. Se empezará el estudio con la siguiente definición.

Definición

> *La distribución de todos los valores posibles que puede tomar alguna estadística, calculados a partir de muestras del mismo tamaño extraídas al azar de la misma población, se conoce como* **distribución muestral** *de esa estadística.*

Las distribuciones muestrales pueden construirse empíricamente cuando se obtienen de una población finita, discreta. Para construir una distribución muestral, se hace lo siguiente.

1. De una población finita de tamaño N, se extraen al azar todas las muestras posibles de tamaño n.
2. Se calcula la estadística de interés para cada muestra.
3. Se enlistan en una columna los diferentes valores observados de la estadística y en otra columna, la frecuencia correspondiente de ocurrencia de cada uno de esos valores.

La construcción real de una distribución de muestreo es una tarea formidable si la población es de un tamaño apreciable, y es imposible si la población es infinita. En dichos casos, pueden obtenerse aproximaciones de las distribuciones muestrales tomando un gran número de muestras de un determinado tamaño.

En general, se tiene interés en conocer tres cosas acerca de una determinada distribución muestral: su media, su variancia y su forma funcional (cómo se ve cuando se construye su gráfica).

Es bien conocida la dificultad para construir una distribución muestral de acuerdo con los pasos dados líneas arriba, cuando la población es de un tamaño apreciable. Puede plantearse también un problema difícil cuando se considera la construcción de una distribución muestral si la población es infinita. Lo mejor que puede hacerse experimentalmente en este caso es aproximar la distribución muestral de una estadística.

Estos dos problemas pueden evitarse por medio de las matemáticas. Aunque los procedimientos que intervienen son incompatibles con el nivel matemático de este texto, las distribuciones muestrales pueden deducirse matemáticamente. El lector interesado puede consultar uno de los muchos textos de estadística matemática, como por ejemplo, el de Hoel[2] y de Anderson y Bancroft[3].

En las secciones siguientes, se estudian algunas de las distribuciones muestrales que se encuentran con más frecuencia.

4.4 DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA DE LA MUESTRA

Una importante distribución muestral es la distribución de la media de la muestra. Se verá cómo podría construirse esta distribución muestral siguiendo los pasos esbozados en la sección anterior.

Ejemplo 4.4.1

Supóngase que se tiene una población de tamaño $N = 5$ que consta de las edades de cinco niños, pacientes externos de un centro de enfermedades mentales. Las edades son las siguientes: $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = 10$, $x_4 = 12$ y $x_5 = 14$. La media, μ, de esta población, es igual a $\Sigma x_i/N = 10$ y la variancia

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

Se calculará otra media de dispersión como sigue:

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N - 1} = \frac{40}{4} = 10$$

Esta cantidad se utilizará otra vez en el capítulo siguiente. Se extraerán de esta población todas las muestras posibles de tamaño $n = 2$. Estas muestras, junto con sus medias, se muestran en la tabla 4.41.

Tabla 4.4.1 Todas las muestras posibles de tamaño $n = 2$ obtenidas de una población de tamaño $N = 5$. Las muestras por arriba o por debajo de la diagonal resultan cuando el muestreo es sin reemplazo. Las medias de las muestras están entre paréntesis.

		Segunda extracción				
		6	8	10	12	14
Primera Extracción	6	6, 6 (6)	6, 8 (7)	6, 10 (8)	6. 12 (9)	6, 14 (10)
	8	8, 6 (7)	8, 8 (8)	8, 10 (9)	8, 12 (10)	8, 14 (11)
	10	10, 6 (8)	10, 8 (9)	10, 10 (10)	10, 12 (11)	10, 14 (12)
	12	12, 6 (9)	12, 8 (10)	12, 10 (11)	12, 12 (12)	12, 14 (13)
	14	14, 6 (10)	14, 8 (11)	14, 10 (12)	14, 12 (13)	14, 14 (14)

En este ejemplo se observa que, cuando el muestreo es con reemplazo, hay 25 muestras posibles. Generalizando, cuando el muestreo es con reemplazo, el número de muestras posibles es igual a N^n.

Puede construirse la distribución de muestreo de $\bar{x}$ enumerando los diferentes valores de $\bar{x}$ en una columna y su frecuencia de ocurrencia en otra, como en la tabla 4.4.2.

Se observa que los datos de la tabla 4.4.2 satisfacen los requisitos para una distribución de probabilidad. Las probabilidades individuales son mayores que 0 y su suma es igual a 1.

Se afirmó anteriormente que, en general, se tiene interés en la forma funcional de la distribución muestral, su media y su variancia.

Obsérvese la distribución de $\bar{x}$ construida como histograma junto con la distribución de la población que se muestra en la figura 4.4.1. Sin duda, el lector debe haberse impresionado con la radical diferencia que existe en el aspecto del histograma de la población y la distribución muestral de $\bar{x}$. Mientras que la primera tiene una distribución uniforme, la última crece gradualmente hasta formar un pico y, a continuación, disminuye con una simetría perfecta. Se calcula aho-

Tabla 4.4.2 Distribución muestral de $\bar{x}$ calculada a partir de las muestras de la tabla 4.4.1.

$\bar{x}$	**Frecuencia**	**Frecuencia relativa**
6	1	1/25
7	2	2/25
8	3	3/25
9	4	4/25
10	5	5/25
11	4	4/25
12	3	3/25
13	2	2/25
14	1	1/25
Total	25	25/25

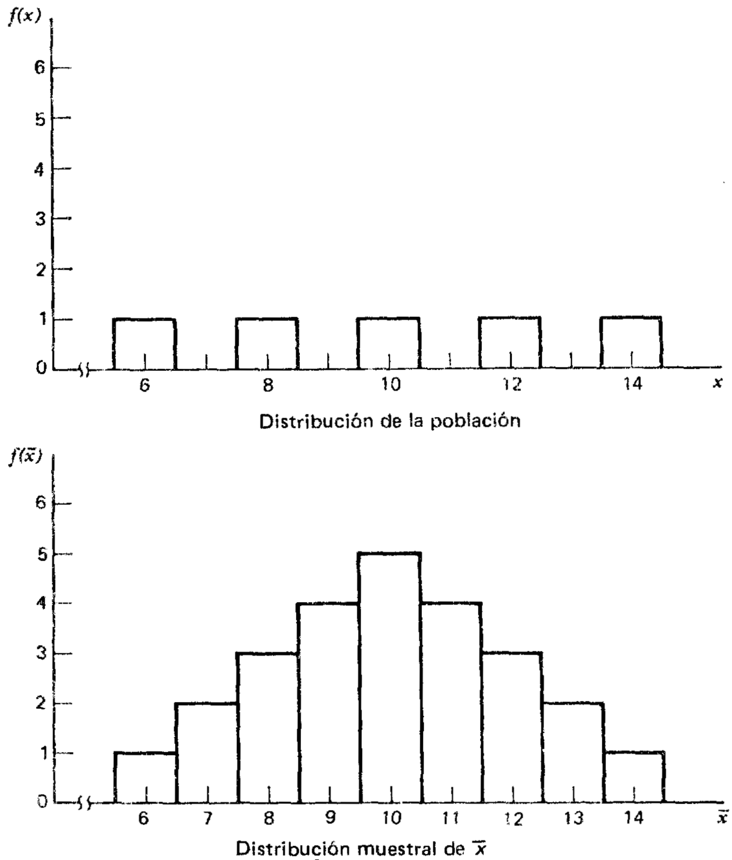


Figura 4.4.1 Distribución de la población y distribución muestral de $\bar{x}$.

ra la media, a la cual se denotará por $\mu_{\bar{x}}$, de la distribución muestral. Para hacerlo, se suman las 25 medias de las muestras y se divide entre 25. Así, se tiene que

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n} = \frac{6 + 7 + 7 + 8 + \cdots + 14}{25} = \frac{250}{25} = 10$$

Se observa con interés que la media de la distribución muestral de $\bar{x}$ tiene el mismo valor que la media de la población original.

Finalmente, se calcula la variancia de $\bar{x}$, que se denotará por $\sigma_{\bar{x}}{}^2$, como sigue:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}{}^2 &= \frac{\sum(\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{N^n}\\ &= \frac{(6-10)^2 + (7-10)^2 + (7-10)^2 + \cdots + (14-10)^2}{25}\\ &= \frac{100}{25} = 4\end{aligned}$$

Se observa que la variancia de la distribución muestral no es igual a la variancia de la población. Sin embargo, resulta interesante observar que la variancia de la distribución muestral es igual a la variancia de la población dividida entre el tamaño de la muestra utilizada para obtener la distribución muestral. Es decir,

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{8}{2} = 4$$

La raíz cuadrada de la variancia de la distribución muestral, $\sqrt{\sigma_{\bar{x}}{}^2} = \sigma/\sqrt{n}$, se conoce como *error estándar de la media* o, simplemente, *error estándar.*

Estos resultados no son coincidencias, sino ejemplos de las características de las distribuciones muestrales en general, cuando el muestreo es con reemplazo o cuando se realiza a partir de una población infinita. Para generalizar, se distingue entre dos situaciones: muestreo a partir de una población con distribución normal y a partir de una población que no presenta distribución normal.

Cuando el muestreo es a partir de una población con distribución normal, la distribución de la media de la muestra tendrá las siguientes propiedades:

1. *La distribución de $\overline{x}$ será normal.*
2. *La media, $\mu_{\overline{x}}$, de la distribución de $\overline{x}$ será igual a la media de la población de la cual se extrajeron las muestras.*
3. *La variancia, $\sigma_{\overline{x}}^2$, de la distribución de $\overline{x}$ será igual a la variancia de la población dividida entre el tamaño de la muestra.*

Para el caso en el que el muestreo se realice a partir de una población que no tiene distribución normal, se utiliza un importante teorema matemático conocido como *teorema del límite central.* La importancia de este teorema en la inferencia estadística puede resumirse en el siguiente enunciado.

Dada una población de cualquier forma funcional no normal con una media, μ, y variancia finita, σ^2, la distribución muestral de $\overline{x}$, calculada a partir de muestras de tamaño n *de esta población, estará distribuida en forma aproximadamente normal con media μ y variancia σ^2/n, cuando el tamaño de la muestra es grande.*

Nótese que el teorema del límite central permite muestrear a partir de poblaciones que no presentan distribución normal con una garantía de aproximadamente los mismos resultados que se obtendrían si la población tuviera distribución normal, siempre que se tome una muestra grande.

La importancia de esto será evidente después, cuando se aprenda que una distribución muestral con distribución normal es una herramienta muy importante en la inferencia estadística. En el caso de la media de la muestra, se tiene la seguridad de que la distribución muestral está al menos distribuida en forma aproximadamente normal bajo tres condiciones: 1) cuando se hace el muestreo a partir de una población con distribución normal; 2) cuando se hace el muestreo a partir de una población que no muestra distribución normal y la muestra es grande y 3) cuando se hace el muestreo a partir de una población cuya forma funcional se desconoce en tanto que el tamaño de la muestra es grande.

La pregunta lógica que surge en este punto es: ¿qué tan grande debe ser la muestra para que pueda aplicarse el teorema del límite central? No existe una respuesta firme y rápida, debido a que el tamaño de la muestra depende del grado de no normalidad presente en la población. Una regla empírica señala que, en la mayoría de las situaciones prácticas, resulta satisfactoria una muestra de tamaño 30.

Además, se hace mucho mejor la aproximación hacia la normalidad de la distribución muestral de $\overline{x}$, a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

Los resultados anteriores se han dado bajo la premisa de que el muestreo es con reemplazo, o bien, que las muestras se han extraído de poblaciones infinitas. En general, no se muestrea con reemplazo y, en muchas situaciones prácticas, es posible que sea necesario muestrear a partir de una población finita; de aquí que sea necesario familiarizarse con el comportamiento de la distribución muestral de la media de la muestra bajo estas condiciones. Antes de hacer cualquier afirmación general, obsérvense de nuevo los datos de la tabla 4.4.1. Las medias de las muestras que se obtienen cuando el muestreo es sin reemplazo son aquellas que están arriba de la diagonal, que son las mismas que están debajo de la misma si se ignora el orden en que se hicieron las observaciones. Se observa que hay 10 muestras posibles. En general, cuando se extraen sin reemplazo muestras de tamaño n a partir de una población finita de tamaño N y se ignora el orden en el que fueron extraídos los valores de la muestra, el número de muestras posibles está dado por la combinación de N cosas, tomadas n a la vez. En el presente ejemplo se tiene que

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = 10 \text{ muestras posibles}$$

La media de las 10 medias de las muestras es

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{\binom{N}{n}} = \frac{7 + 8 + 9 + \cdots + 13}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

Se observa una vez más que la media de la distribución muestral es igual a la media de la población.

La variancia de esta distribución de muestreo es:

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\sum(\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{\binom{N}{n}} = \frac{30}{10} = 3$$

y se observa que, en esta ocasión, la variancia de la distribución de muestreo no es igual a la variancia de la población dividida entre el tamaño de la muestra, ya que $\sigma_{\bar{x}}{}^2 = 3 \neq 8/2 = 4$. Sin embargo, existe una interesante relación que se descubre al multiplicar σ^2/n por $(N-n)/(N-1)$. Es decir,

$$\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{8}{2} \cdot \frac{5-2}{4} = 3$$

Este resultado muestra que, si se multiplica la variancia de la distribución muestral, que se obtendría si el muestreo fuera con reemplazo, por el factor $(N-n)/(N-1)$, se obtiene el valor de la variancia de la distribución muestral que resulta cuando el muestreo es sin reemplazo. Pueden generalizarse estos resultados con el siguiente enunciado.

Cuando se muestrea sin reemplazo a partir de una población finita, la distribución de muestreo de $\bar{x}$ tendrá media μ y variancia,

$$\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Si el tamaño de la muestra es grande, se aplica el teorema del límite central, y la distribución de muestreo de $\bar{x}$ estará distribuida en forma aproximadamente normal.

El factor $(N-n)/(N-1)$ se conoce como corrección por población finita y puede ignorarse cuando el tamaño de la muestra es pequeño en comparación con el tamaño de la población. Cuando la población es mucho más grande que la muestra, la diferencia entre σ^2/n y $(\sigma^2/n)[(N-n)/(N-1)]$ será despreciable. Supóngase que una población está formada por 10,000 observaciones y que una muestra de esta población consta de 25 observaciones; la corrección por población finita sería igual a $(10{,}000-25)/(9999) = .9976$. Multiplicar σ^2/n por .9976 es casi equivalente a multiplicar por 1. La mayoría de los que hacen cálculos estadísticos no utilizan la corrección por población finita a menos que la muestra contenga más del 5 por ciento de las observaciones en la población. Es decir, la corrección por población finita se ignora por lo general cuando $n/N \leqslant .05$).

Aplicaciones. Como se verá en los capítulos siguientes, el conocimiento y comprensión de las distribuciones muestrales será un requisito necesario para comprender los conceptos de la inferencia estadística. La aplicación más sencilla de la distribución muestral de la media de la muestra es al calcular la probabilidad de obtener una muestra con una media de alguna magnitud especificada. Se ilustrará lo anterior con algunos ejemplos.

Ejemplo 4.4.2

Supóngase que se sabe que, en cierta gran población formada por personas, la longitud craneal está distribuida en forma casi normal con una media de 185.6 mm y una desviación estándar de 12.7 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño 10 de esta población tenga una media mayor de 190?

Solución. Se sabe que la muestra bajo consideración es una de todas las muestras posibles de tamaño 10 que pueden extraerse de la población, de modo que la media a la cual conduce es una de las $\bar{x}$ que comprenden la distribución muestral de $\bar{x}$ que, teóricamente, podría derivarse de esta población.

Cuando se dice que la población está distribuida en forma casi normal, se supone que, para todos los fines prácticos, la distribución muestral de $\bar{x}$ mostrará una distribución normal. Se sabe también que la media y la desviación estándar de la distribución muestral son iguales, respectivamente, a 185.6 y $\sqrt{(12.7)^2/10} = 12.7/\sqrt{10} = 4.02$. Se supone que la población es grande respecto a la muestra, de modo que puede ignorarse la corrección por población finita.

En el capítulo anterior se aprendió que, siempre que se tiene una variable aleatoria con distribución normal, puede transformarse fácilmente en la distribución normal unitaria. La variable aleatoria es ahora $\bar{x}$, la media de su distribución es $\mu_{\bar{x}}$, y su desviación estándar es $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$. Modificando apropiadamente la fórmula dada con anterioridad, se llega a la fórmula siguiente para transformar la distribución normal de $\bar{x}$ en la distribución normal unitaria.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{4.4.1}$$

La probabilidad que da respuesta a la pregunta formulada está representada por el área a la derecha de $\bar{x} = 190$ bajo la curva de la distribución muestral. Esta área es igual al área a la derecha de

$$z = \frac{190 - 185.6}{4.02} = \frac{4.4}{4.02} = 1.09$$

Consultando la tabla normal unitaria, se encuentra que el área a la derecha de 1.09 es .1379; en consecuencia, se dice que la probabilidad de que una muestra de tamaño 10 tenga una media mayor de 190 es de .1379.

La figura 4.4.2 muestra la relación que existe entre la población original, la distribución muestral de $\bar{x}$ y la distribución normal unitaria.

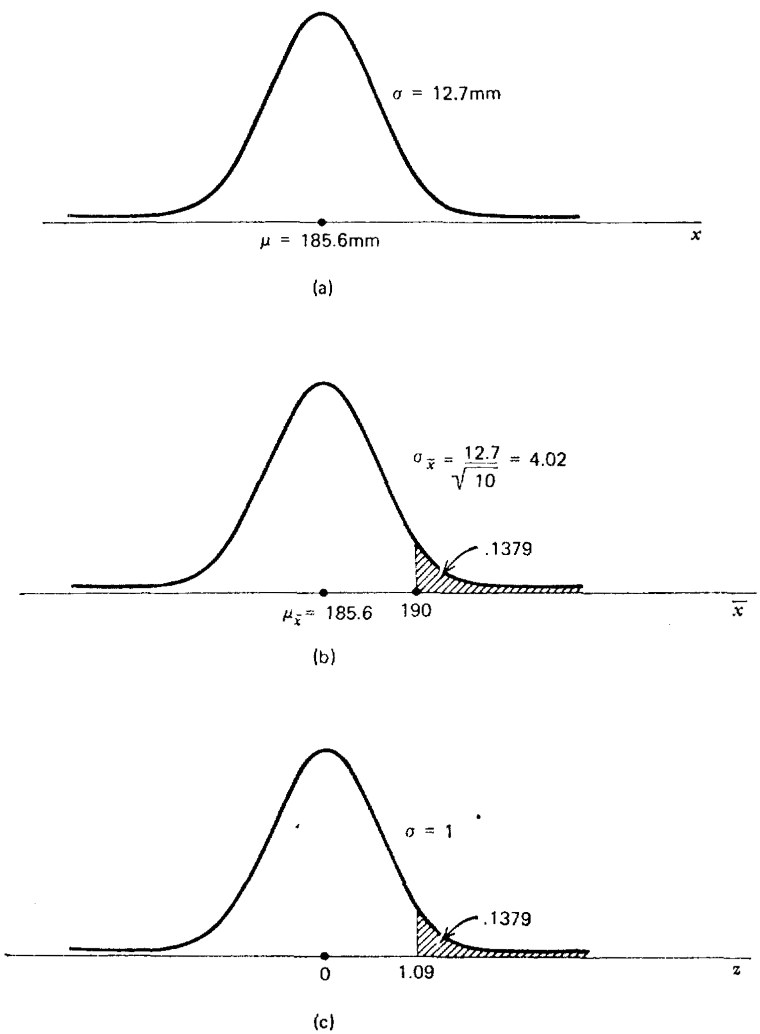


Figura 4.4.2 Distribución de la población, distribución muestral y distribución normal unitaria, ejemplo 4.4.2. *a*) Distribución de la población. *b*) Distribución muestral de $\bar{x}$ para muestras de tamaño 10. *c*) Distribución normal unitaria.

Ejemplo 4.4.3

Si la media y la desviación estándar de las concentraciones de hierro en el suero de hombres sanos son, respectivamente, de 120 y 15 microgramos por 100 ml, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra al azar de 50 hombres normales proporcione una media entre 115 y 125 microgramos por 100 ml?

Solución. No se especifica la forma funcional de la población de concentraciones de hierro en el suero, pero dado que se tiene una muestra de tamaño mayor de 30, se utiliza el teorema del límite central y se transforma la distribución muestral resultante de $\bar{x}$ con distribución casi normal (la cual tiene una media de 120 y una desviación estándar de $15/\sqrt{50} = 2.12$) en la normal unitaria. La probabilidad que se busca es:

$$\begin{aligned} P(115 \leq \bar{x} \leq 125) &= P\left(\frac{115 - 120}{2.12} \leq z \leq \frac{125 - 120}{2.12}\right) \\ &= P(-2.36 \leq z \leq 2.36) \\ &= .9909 - .0091 \\ &= .9818 \end{aligned}$$

Ejercicios

4.4.1 Supóngase que se sabe que los salarios por hora de cierto tipo de empleados de un hospital están distribuidos en forma casi normal con una media y una desviación estándar de \$4.50 y \$.50, respectivamente. Si se selecciona una muestra al azar de tamaño 16 de esta población, encuentre la probabilidad de que la media del salario por hora para la muestra sea:

a) Mayor de \$4.25.
b) Entre \$4.25 y \$4.75.
c) Mayor de \$4.80.
d) Menor de \$4.20.

4.4.2 Se ha encontrado que, después de un período de entrenamiento, el tiempo medio que requieren ciertas personas impedidas para realizar una tarea particular es de 25 segundos con una desviación estándar de 5 segundos. Suponiendo una distribución normal de los tiempos, encuentre la probabilidad de que una muestra de 25 individuos proporcione una media:

a) De 26 segundos o más.
b) Entre 24 y 27 segundos.
c) De 26 segundos o menos.
d) Mayor de 22 segundos.

4.4.3 Si las concentraciones de ácido úrico en hombres adultos y normales están distribuidas en forma casi normal con una media y una desviación estándar de 5.7 y 1 mg por ciento, respectivamente, encuentre la probabilidad de que una muestra de tamaño 9 proporcione una media:

a) Mayor de 6.
b) Entre 5 y 6.
c) Menor de 5.2.

4.4.4 Para cierto sector grande de una población, en un año determinado, supóngase que el número medio de días de incapacidad es de 5.4 con una desviación estándar de 2.8 días. Encuentre la probabilidad de que una muestra al azar de tamaño 49 de dicha población tenga una media:

a) Mayor de 6 días.
b) Entre 4 y 6 días.
c) Entre 4 1/2 y 5 1/2 días.

4.4.5 Dada una población con distribución normal con una media de 100 y una desviación estándar de 20, encuentre las siguientes probabilidades basadas en una muestra de tamaño 16:

a) $P(\overline{x} \geqslant 100)$.
b) $P(96 \leqslant \overline{x} \leqslant 108)$.
c) $P(\overline{x} \leqslant 110)$.

4.4.6 Dados $\mu = 50$, $\sigma = 16$, $n = 64$, encuentre:

a) $P(45 \leqslant \overline{x} \leqslant 55)$.
b) $P(\overline{x} > 53)$.

c) $P(\bar{x} < 47)$.
d) $P(49 \leqslant \bar{x} \leqslant 56)$.

4.4.7 Supóngase que una población consta de los siguientes valores: 1, 3, 5, 7, 9. Construya la distribución muestral de $\bar{x}$ en base a muestras de tamaño 2 seleccionadas sin reemplazo. Encuentre la media y la variancia de la distribución muestral.

4.4.8 Utilice los datos del ejemplo 4.4.1 para construir la distribución muestral de $\bar{x}$ en base a muestras de tamaño 3 seleccionadas sin reemplazo. Encuentre la media y la variancia de la distribución muestral.

4.5 DISTRIBUCIÓN DE LA DIFERENCIA ENTRE LAS MEDIAS DE DOS MUESTRAS

Con frecuencia, el interés de una investigación está centrado en dos poblaciones. Específicamente, puede ser que un investigador desee saber algo acerca de la diferencia entre las medias de dos poblaciones. En una investigación, por ejemplo, puede ser que un investigador desee saber si es razonable concluir que las medias de dos poblaciones son distintas. En otra situación, el investigador puede desear conocer la magnitud de la diferencia entre las medias de dos poblaciones. Un grupo de médicos investigadores, por ejemplo, puede desear saber si la concentración media de colesterol en el suero es mayor en una población de oficinistas sedentarios que en una población de trabajadores. En caso de que los investigadores lleguen a la conclusión de que las medias de las poblaciones son distintas, es posible que deseen saber qué tanto difieren. El conocimiento de la distribución muestral de la diferencia entre dos medias es útil en investigaciones de este tipo.

Ejemplo 4.5.1

Supóngase que se tienen dos grupos de individuos, uno de los grupos (grupo 1) ha experimentado alguna afección que se considera está asociada al retraso mental y el otro grupo (grupo 2) no ha experimentado dicha afección. Se supone que la distribución de las calificaciones de inteligencia en cada uno de los dos grupos muestra una distribución casi normal con una desviación estándar de 20.

Supóngase además que se toma una muestra de 15 individuos de cada grupo y, para cada muestra, se calcula la calificación media de inteligencia con los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 92$ y $\bar{x}_2 = 105$. Si no existe diferencia entre los dos grupos con respecto a sus verdaderas calificaciones de inteligencia, ¿cuál es la probabilidad de observar esta gran diferencia entre las medias de las muestras?

Para contestar esta pregunta se necesita conocer la naturaleza de la distribución muestral de la estadística pertinente, la *diferencia entre las medias de dos muestras,* $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Nótese que se busca una probabilidad asociada a la diferencia entre las medias de dos muestras, en lugar de una sola media.

Aunque en la práctica no se intentaría construir la distribución de muestreo deseada, puede formarse una idea conceptual de la manera en la que podría hacerse cuando el muestreo se hace a partir de poblaciones finitas. Se empezaría por seleccionar, del grupo 1, todas las muestras posibles de tamaño 15 y calcular la media de cada muestra. Se sabe que habría $\binom{N_1}{n_1}$ de dichas muestras, donde N_1 es el tamaño del grupo y $n_1 = 15$. Asimismo, se seleccionarían todas las muestras posibles de tamaño 15 del grupo 2 y se calcularía la media de cada una de dichas muestras. Se tomarían entonces todas las parejas posibles de las medias de las muestras, una del grupo 1 y una del grupo 2, y se obtendría la diferencia. La tabla 4.5.1 muestra los resultados al aplicar este procedimiento. Nótese que los números fuera

Tabla 4.5.1 Tabla de trabajo para construir la distribución de la diferencia entre las medias de dos muestras.

Muestras del grupo 1	*Muestras del grupo 2*	*Medias de las muestras del grupo 1*	*Medias de las muestras del grupo 2*	*Todas las diferencias posibles entre las medias*
n_{11}	n_{12}	$\bar{x}_{11}$	$\bar{x}_{12}$	$\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12}$
n_{21}	n_{22}	$\bar{x}_{21}$	$\bar{x}_{22}$	$\bar{x}_{11} - \bar{x}_{22}$
n_{31}	n_{32}	$\bar{x}_{31}$	$\bar{x}_{32}$	$\bar{x}_{11} - \bar{x}_{32}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$n_{\binom{N_1}{n_1}1}$	$n_{\binom{N_2}{n_2}2}$	$\bar{x}_{\binom{N_1}{n_1}1}$	$\bar{x}_{\binom{N_2}{n_2}2}$	$\bar{x}_{\binom{N_1}{n_1}1} - \bar{x}_{\binom{N_2}{n_2}2}$

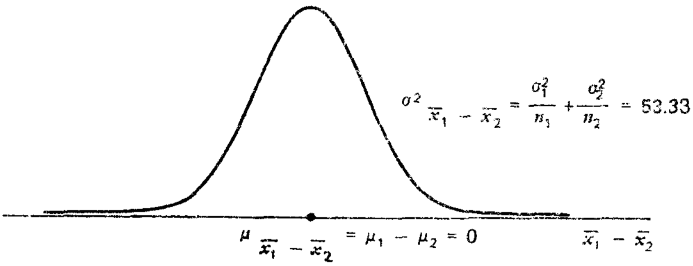


Figura 4.5.1 Gráfica de la distribución muestral de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ cuando no existe diferencia entre las medias de las poblaciones. Ejemplo 4.5.1.

de los paréntesis de la última línea de esta tabla no son exponentes, sino indicadores del grupo 1 y del grupo 2, respectivamente.

Lo que se desea encontrar es la distribución de las diferencias entre las medias de las muestras. Si se grafican las diferencias de las muestras contra su frecuencia de ocurrencia, se obtendría una distribución normal con una media igual a $\mu_1 - \mu_2$, la diferencia entre las medias reales de los grupos o poblaciones y una variancia igual a $(\sigma_1{}^2/n_1) + (\sigma_2{}^2/n_2)$.

Para el presente ejemplo, se tendría una distribución normal con una media de 0 (si no existe diferencia entre las medias reales de las poblaciones) y una variancia de $[(20)^2/15] + [(20)^2/15] = 53.33$. La gráfica de la distribución muestral se muestra en la figura 4.5.1.

Se sabe que esta distribución normal puede transformarse en la distribución normal unitaria por medio de la modificación de una fórmula aprendida con anterioridad. La nueva fórmula es la siguiente:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} \tag{4.5.1}$$

El área bajo la curva de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ que corresponde a la probabilidad que se busca es el área a la izquierda de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 92 - 105 = -13$. El valor de z que corresponde a -13, suponiendo que no existe diferencia entre las medias de las poblaciones, es

$$z = \frac{-13 - 0}{\sqrt{\dfrac{(20)^2}{15} + \dfrac{(20)^2}{15}}} = \frac{-13}{\sqrt{53.3}} = \frac{-13}{7.3} = -1.78$$

Consultando la tabla F, se encuentra que el área bajo la curva normal unitaria a la izquierda de -1.78 es igual a .0375. Como respuesta a la pregunta original se dice que, si no existe diferencia entre las medias de las poblaciones, la probabilidad de obtener una diferencia entre las medias de las muestras tan grande o mayor que 13 es de .0375.

El procedimiento que se acaba de seguir es válido incluso cuando los tamaños de las muestras, n_1 y n_2, son distintos y cuando las variancias de las poblaciones, σ_1^2 y σ_2^2, tienen valores distintos. Los resultados teóricos sobre los cuales se basa este procedimiento pueden resumirse como sigue.

Dadas dos poblaciones con distribución normal, con medias μ_1 y μ_2 y variancias σ_2^1 y σ_2^2, respectivamente, la distribución muestral de la diferencia $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ entre las medias de muestras independientes de tamaño n_1 y n_2, extraídas de estas poblaciones, muestra una distribución normal con media $\mu_1 - \mu_2$ y variancia $(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)$.

Muestreo de poblaciones no normales. Muchas veces un investigador se enfrenta a uno u otro de los problemas siguientes: la necesidad de 1) muestrear a partir de poblaciones no distribuidas normalmente, o bien, 2) muestrear a partir de poblaciones cuyas formas funcionales se desconocen. Una solución a estos problemas es tomar muestras grandes, dado que cuando los tamaños de las muestras son grandes, se aplica el teorema del límite central y la diferencia entre las dos medias de las muestras está distribuida en forma casi normal, con una media igual a $\mu_1 - \mu_2$ y una variancia de $(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)$. Para encontrar entonces las probabilidades asociadas a valores específicos de la estadística, el procedimiento sería el mismo que el dado anteriormente, cuando el muestreo se hace a partir de poblaciones con distribución normal.

Ejemplo 4.5.2

Supóngase que se ha establecido que, para cierto tipo de cliente, la duración media de una visita domiciliaria realizada por una enfermera es de 45 minutos, con una desviación estándar de 15 minutos y, que para un segundo tipo de cliente, la visita domiciliaria media es de 30 minutos, con una desviación estándar de 20 minutos. Si una enfermera visita al azar a 35 clientes del primer tipo y 40 del segundo grupo, ¿cuál es la probabilidad de que la duración media de la visita difiera entre los dos grupos por 20 minutos o más?

Solución. No se menciona la forma funcional de las dos poblaciones, por lo que se supone que esta característica se desconoce, o bien, que las poblaciones no muestran distribución normal. Dado que los tamaños de las muestras son grandes (mayores de 30) en ambos casos, se hace uso de los resultados del teorema del límite central para responder a la pregunta formulada. Se sabe que la diferencia entre las medias de las muestras tiene una distribución casi normal, con las siguientes media y variancia:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 45 - 30 = 15$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2} = \frac{(15)^2}{35} + \frac{(20)^2}{40} = 16.4286$$

El área bajo la curva de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ que se busca es aquella a la derecha de 20. El valor correspondiente de z en la distribución normal unitaria es

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} = \frac{20 - 15}{\sqrt{16.4286}} = \frac{5}{4.05} = 1.23$$

En la tabla F se encuentra que el área a la derecha de $z = 1.23$ es de $1 - .8907 = .1093$. Se dice entonces que la probabilidad de que las visitas al azar de la enfermera conduzcan a una diferencia entre los dos grupos, tan grande o mayor que 20 minutos, es de .1093. La curva de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ y la curva normal unitaria correspondiente se muestran en la figura 4.5.2.

Ejercicios

4.5.1 Un investigador se siente inclinado a creer que los niveles de vitamina A en el hígado de dos poblaciones de personas mues-

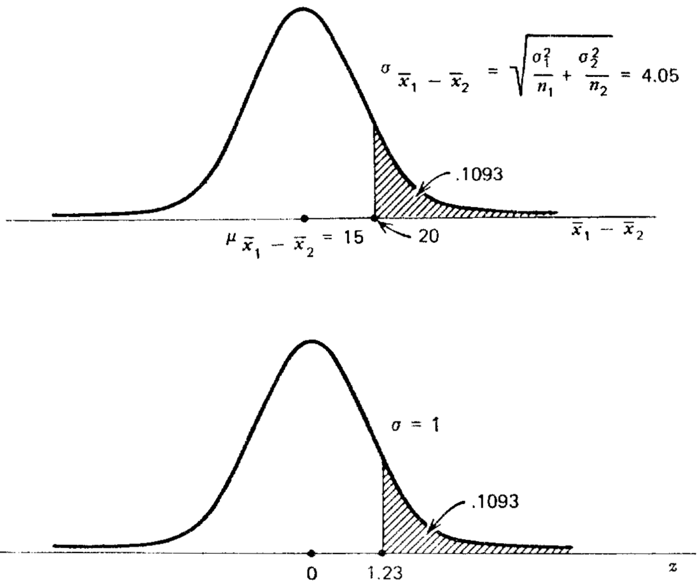


Figura 4.5.2 Distribución muestral de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ y la distribución normal unitaria correspondiente, ejemplo de la visita domiciliaria.

tran, en cada una, una distribución normal. Se supone que las variancias para las dos poblaciones son las siguientes:

Población 1: $\sigma_1{}^2 = 19{,}600$
Población 2: $\sigma_2{}^2 = 8100$

¿Cuál es la probabilidad de que una muestra al azar de tamaño 15 de la primera población y de 10 de la segunda proporcionen un valor de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ mayor que o igual a 50 si no existe diferencia en las medias de las poblaciones?

4.5.2 En un estudio de los gastos anuales por familia para el cuidado general de la salud, se investigaron dos poblaciones con los resultados siguientes:

Población 1: $n_1 = 40, \bar{x}_1 = \$346$
Población 2: $n_2 = 35, \bar{x}_2 = 300$

Si se sabe que las variancias de las dos poblaciones son $\sigma_1{}^2 = 2{,}800$ y $\sigma_2{}^2 = 3{,}250$, ¿cuál es la probabilidad de obtener resultados de las muestras tan extremos como los dados anteriormente, si no existe diferencia entre las medias de ambas poblaciones?

4.5.3 Dadas dos poblaciones con distribución normal y con medias iguales y variancias de $\sigma_1^2 = 100$ y $\sigma_2^2 = 80$, ¿cuál es la probabilidad de que muestras de tamaños $n_1 = 25$ y $n_2 = 16$ proporcionen un valor de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ mayor que o igual a 8?

4.5.4 Dadas dos poblaciones con distribución no normal y con medias iguales y variancias de $\sigma_1^2 = 240$ y $\sigma_2^2 = 350$, ¿cuál es la probabilidad de que muestras de tamaños $n_1 = 40$ y $n_2 = 35$ proporcionen un valor de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ tan grande como 12?

4.6 DISTRIBUCIÓN DE LA PROPORCIÓN DE LA MUESTRA

En las secciones anteriores se trató de las distribuciones muestrales de estadísticas calculadas a partir de variables medidas. Sin embargo, se tiene interés con frecuencia en la distribución muestral de estadísticas, tales como una proporción de la muestra, que es un resultado de datos de conteos o frecuencias.

Ejemplo 4.6.1

Supóngase que se sabe que en cierta población de personas, .08 de sus habitantes son daltónicos. Si se designa la proporción de la población por p, puede decirse en este ejemplo que $p = .08$. Si se seleccionan al azar 150 individuos de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de los que son daltónicos sea tan grande como .15?

Para contestar esta pregunta, se necesita conocer las propiedades de la distribución muestral de la proporción de la muestra. Se designará a la proporción de la muestra mediante el símbolo $\hat{p}$.

El lector reconocerá la semejanza que existe entre el presente ejemplo y los presentados en la sección 3.3, que trataron de la distribución binomial. Además, la variable daltonismo es binomial, dado que un individuo puede clasificarse en una u otra de dos categorías mutuamente excluyentes, daltónico y no daltónico. En la sección 3,3, se dio la misma información y se pidió encontrar el número con la característica de interés, mientras que aquí está pidiéndose la proporción en la muestra que posee la característica de interés. Con una tabla lo suficientemente grande de probabilidades binomiales, como la tabla C, podría determinarse la probabilidad asociada con el número correspondiente a la proporción de interés. Como se verá más adelante, esto no será necesario, ya que se cuenta con otro procedimiento que, en general, es más conveniente cuando los tamaños de las muestras son grandes.

La distribución muestral de la proporción de una muestra se obtendría experimentalmente en la misma forma que se sugirió en el caso de la media aritmética y la diferencia entre dos medias. De la población, que se supone es finita, se tomarían todas las muestras posibles de un determinado tamaño y, para cada muestra, se calcularía la proporción de la muestra, $\tilde{p}$. Se prepararía entonces una distribución de frecuencias de $\tilde{p}$ enumerando los diferentes valores de $\tilde{p}$ junto con sus frecuencias de ocurrencia. Esta distribución de frecuencias (así como la distribución de frecuencias relativas correspondientes) constituirían la distribución muestral de $\tilde{p}$.

Cuando el tamaño de la muestra es grande, la distribución de las proporciones de la muestra es aproximadamente normal, en virtud del teorema del límite central. La media de la distribución, $\mu_{\tilde{p}}$, es decir, el promedio de todas las proporciones de la muestra posibles, será igual a la proporción real de la población, p, y la variancia de la distribución, $\sigma_{\tilde{p}}^2$, será igual a $p(1-p)/n$.

La pregunta que surge ahora es: ¿qué tan grande tiene que ser el tamaño de la muestra para que sea válido el uso de la aproximación normal? Un criterio ampliamente utilizado es que tanto np como $n(1-p)$ deben ser mayores que 5, y se sujetará a esta regla en este texto.

Se está ahora en condiciones de contestar a la pregunta referente al daltonismo en la muestra de 150 individuos de una población en la que .08 son daltónicos. Dado que np y $n(1-p)$ son mayores que 5 ($150 \times .08 = 12$ y $150 \times .92 = 138$), puede decirse que, en este caso, $\tilde{p}$ muestra una distribución casi normal con una media $\mu_{\tilde{p}} = p = .08$ y $\sigma_{\tilde{p}}^2 = p(1-p)/n = (.08)(.92)/150 = .00049$. La probabilidad que se busca es el área bajo la curva de $\tilde{p}$ que está a la derecha de .15. Esta área es igual al área bajo la curva normal unitaria a la derecha de

$$z = \frac{\tilde{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{.15 - .08}{\sqrt{.00049}} = \frac{.07}{.0222} = 3.15$$

Se ha llevado a cabo la transformación hacia la distribución normal unitaria en la forma habitual: z se encuentra dividiendo la diferencia entre un valor de la estadística y la media, entre el error estándar. En la tabla F se encuentra que el área a la derecha de $z = 3.15$ es $1 - .9992 = .0008$. Puede decirse entonces que la probabilidad de observar $\tilde{p} \geqslant .15$ en una muestra al azar de tamaño $n = 150$ de una población en la que $p = .08$ es de .0008. De hecho, si se extrajera una muestra así, la mayoría de las personas la consideraría un evento raro.

La aproximación normal puede mejorarse mediante la *corrección por continuidad,* un artificio que hace un ajuste debido a que se está aproximando una distribución discreta mediante una distribución continua. Supóngase que $x = n\tilde{p}$, el número en la muestra con la característica de interés cuando la proporción es $\tilde{p}$. Para aplicar la corrección por continuidad, se calcula

$$z_c = \frac{\dfrac{x + .5}{n} - p}{\sqrt{pq/n}}, \quad \text{para } x > np \tag{4.6.1}$$

o

$$z_c = \frac{\dfrac{x - .5}{n} - p}{\sqrt{pq/n}}, \quad \text{para } x < np \tag{4.6.2}$$

donde $q = 1 - p$. La corrección por continuidad no produce una gran diferencia cuando n es grande. En el ejemplo anterior, $n\tilde{p} = 150(.15) = 22.5$ y

$$z_c = \frac{\dfrac{22.5 - .5}{150} - .08}{\sqrt{.00049}} = 3.01$$

y $P(\tilde{p} \geqslant .15) = 1 - .9987 = .0013$, un resultado no muy distinto del obtenido sin la corrección por continuidad.

Ejemplo 4.6.2

Supóngase que se sabe que en cierta población de mujeres, el 90 por ciento de las que entran a su tercer trimestre de embarazo ha tenido algún cuidado prenatal. Si se extrae una muestra al azar de tamaño 200 de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de la muestra que haya tenido algún cuidado prenatal sea mayor que .85?

Solución. Puede suponerse que la distribución muestral de p muestra una distribución casi normal con $\mu_{\bar{p}} = .90$ y $\sigma_{\bar{p}}{}^2 = (.1)(.9)/200 = .00045$. Se calcula

$$z = \frac{.85 - .90}{\sqrt{.00045}} = \frac{-.05}{.0212} = -2.36$$

El área a la izquierda de -2.36 bajo la curva normal unitaria es de .0091. Por lo tanto, $P(\bar{p} \leqslant .85) = P(z \leqslant -2.36) = .0091$.

Ejercicios

4.6.1 Si, en una población de adultos, .15 están sometidos a algún tipo de dieta, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra al azar de tamaño 100 dé una proporción de aquellos que se encuentran a dieta:

a) Mayor que o igual a .20?
b) Entre .10 y .20?
c) No mayor de .12?

4.6.2 En cierta ciudad se observa que el 20 por ciento de las familias tienen por lo menos un miembro que sufre de algún malestar debido a la contaminación atmosférica. Una muestra al azar de 150 familias dio $\bar{p} = .27$. Si el valor del 20 por ciento es correcto, ¿cuál es la probabilidad de obtener una proporción de la muestra así o mayor?

4.6.3 En una muestra al azar de 75 adultos, 35 dijeron que consideran que el cáncer mamario es curable. Si, en la población de la cual se extrajo la muestra, la proporción real de quienes piensan que dicho tipo de cáncer puede ser curado es de .55, ¿cuál es la probabilidad de obtener una proporción de la muestra tan pequeña o menor que la obtenida en esta muestra?

4.6.4 Se sabe que el medicamento estándar utilizado para tratar una cierta enfermedad ha resultado ser eficaz en un lapso de tres días en el 75 por ciento de los casos en los que se utilizó. Al evaluar la eficacia de un nuevo medicamento para tratar la misma enfermedad, se le dio a 150 personas que la padecían. Al término de los tres días, se habían recuperado 97 personas. Si el nuevo medicamento es tan eficaz como el estándar, ¿cuál es la probabilidad de observar esta pequeña proporción de recuperación?

4.6.5 Dada una población en la que $p = .6$ y una muestra aleatoria de esta población de tamaño 100, encuentre:

a) $P(\bar{p} \geqslant .65)$
b) $P(\bar{p} \leqslant .58)$
c) $P(.56 \leqslant \bar{p} \leqslant .63)$

4.7 DISTRIBUCIÓN DE LA DIFERENCIA ENTRE LAS PROPORCIONES DE DOS MUESTRAS

Con frecuencia, se tienen las proporciones de dos poblaciones en las cuales se tiene interés y se desea averiguar la probabilidad asociada a una diferencia en las proporciones calculadas a partir de muestras extraídas de cada una de dichas poblaciones. La distribución muestral pertinente es la distribución de la diferencia entre las proporciones de dos muestras. Las características de esta distribución muestral pueden resumirse como sigue:

Si se extraen muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de dos poblaciones de variables binomiales donde las proporciones de las observaciones con la característica de interés en las dos poblaciones son, respectivamente, p_1 y p_2, la distribución de la diferencia entre las proporciones de las muestras, $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$, es casi normal con media

$$\mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = p_1 - p_2$$

y variancia

$$\sigma^2_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \frac{p_1(1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1 - p_2)}{n_2}$$

cuando n_1 y n_2 son grandes.

Con el fin de elaborar físicamente la distribución de muestreo de la diferencia entre las proporciones de dos muestras, se procedería en la forma descrita en la sección 4.5 para obtener la distribución muestral de la diferencia entre dos medias.

Dadas dos poblaciones suficientemente pequeñas, se podrían extraer de la población 1, todas las muestras aleatorias posibles de tamaño n_1 y calcular, a partir de cada conjunto de datos de la muestra, la proporción de la muestra, $\tilde{p}_1$. De la población 2, se podrían extraer independientemente todas las muestras aleatorias posibles de tamaño n_2 y calcular, para cada conjunto de datos de la muestra, la proporción de la muestra, $\tilde{p}_2$. Se calcularían las diferencias entre todos los pares posibles de proporciones de las muestras, donde un miembro de cada par tenía un valor de $\tilde{p}_1$ y el otro un valor de $\tilde{p}_2$. La distribución muestral de la diferencia entre las proporciones de las muestras consistiría entonces de todas las diferencias existentes acompañadas de sus frecuencias (o frecuencias relativas) de ocurrencia. Para poblaciones grandes, finitas o infinitas, podría aproximarse la distribución muestral de la diferencia entre las proporciones de las muestras tomando un gran número de muestras aleatorias independientes y procediendo en la forma anteriormente descrita.

Ejemplo 4.7.1

Supóngase que la proporción de personas que consumen, moderada o intensamente, drogas ilegales de una población, grupo 1, es de .50, mientras que en otra población, grupo 2, la proporción es de .33. ¿Cuál es la probabilidad de que muestras de tamaño 100, extraídas de cada una de las poblaciones, tengan un valor de $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ tan grande como .30?

Se supone que la distribución muestral de $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ es casi normal con media

$$\mu_{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2} = .50 - .33 = .17$$

y variancia

$$\sigma^2_{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2} = \frac{(.33)(.67)}{100} + \frac{(.5)(.5)}{100}$$
$$= .004711$$

El área que corresponde a la probabilidad que se busca es el área bajo la curva de $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ a la derecha de .30. Pasando a la distribución normal unitaria se tiene que

$$z = \frac{(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{.30 - .17}{\sqrt{.004711}} = 1.89$$

Al consultar la tabla F, se encuentra que el área bajo la curva normal unitaria que está a la derecha de $z = 1.89$ es de $1 - .9706 = .0294$. Entonces, la probabilidad de observar una diferencia tan grande como .30 es .0294.

Ejemplo 4.7.2

Se sabe que en cierta población de adolescentes, el 10 por ciento de los muchachos son obesos. Si la misma proporción de muchachas de dicha población son obesas, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra al azar de 250 muchachos y 200 muchachas dé un valor de $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 \geqslant .06$?

Se supone que la distribución muestral de $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ es casi normal. Si la proporción de individuos obesos es la misma en los dos grupos, la media de la distribución será 0 y la variancia

$$\sigma^2_{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} = \frac{(.1)(.9)}{250} + \frac{(.1)(.9)}{200}$$
$$= .00081$$

El área de interés bajo la curva de $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ es la que se encuentra a la derecha de .06. El valor correspondiente de z es:

$$z = \frac{.06 - 0}{\sqrt{.00081}} = 2.11$$

Si se consulta la tabla F, se encuentra que el área a la derecha de $z = 2.11$ es de $1 - .9826 = .0174$.

Ejercicios

4.7.1 En cierta población de niños con retraso mental, se sabe que la proporción de los que son hiperactivos es de .40. Se extrajo una muestra al azar de tamaño 120 de esta población y otra de tamaño 100 de otra población de niños con el mismo problema. Si la proporción de niños hiperactivos es la misma en ambas poblaciones, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra proporcione una diferencia de $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$ de .16 o más?

4.7.2 Se tienen bases para suponer que en cierta zona de una gran ciudad, el 40 por ciento de las casas están en malas condiciones. Una muestra al azar de 75 casas de esta sección y 90 casas de otra sección dieron una diferencia de $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$ de .09. Si no existe diferencia entre las dos zonas en la proporción de casas en mal estado, ¿cuál es la probabilidad de observar una diferencia como ésta o mayor?

4.8 RESUMEN

Este capítulo trata del muestreo y de las distribuciones muestrales. Se define el muestreo aleatorio simple, el tipo de muestreo básico para la inferencia estadística, y se explica un procedimiento para obtener este tipo de muestra. Se introduce el concepto de distribución muestral y se estudian las siguientes distribuciones muestrales importantes:

1. La distribución de la media de una sola muestra.
2. La distribución de la diferencia entre las medias de dos muestras.
3. La distribución de la proporción de una muestra.
4. La distribución de la diferencia entre las proporciones de dos muestras.

Se recalca la importancia de estos aspectos y se insiste en que el lector se asegure de que los ha comprendido antes de que continúe con el siguiente capítulo.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. ¿Cuáles son los dos tipos de muestreo?
2. ¿Por qué no se estudia en este texto el muestreo no probabilístico?
3. Defina o explique los siguientes términos:

   a) Muestra probabilística.
   b) Muestra aleatoria simple.
   c) Muestreo con reemplazo.

d) Muestreo sin reemplazo.
e) Distribución muestral.

4. Explique cómo puede conformarse una distribución muestral a partir de una población finita.
5. Describa la distribución muestral de la media de una muestra cuando el muestreo se hace con reemplazo a partir de una población con distribución normal.
6. Explique el teorema del límite central.
7. ¿En qué forma difiere la distribución muestral de la media de la muestra, cuando el muestreo es sin reemplazo, de la distribución muestral obtenida cuando el muestreo es con reemplazo?
8. Describa la distribución muestral de la diferencia entre las medias de dos muestras.
9. Describa la distribución muestral de la proporción de la muestra cuando se extraen muestras grandes.
10. Describa la distribución muestral de la diferencia entre las medias de dos muestras cuando se extraen muestras grandes.
11. Explique el procedimiento que seguiría para obtener la distribución muestral de la diferencia entre las proporciones de las muestras basada en muestras grandes obtenidas de una población finita.
12. Supóngase que se sabe que el tiempo de respuesta a un estímulo particular en individuos sanos es una variable aleatoria con distribución normal, con una media de 15 segundos y una variancia de 16. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra al azar de 16 individuos tenga un tiempo medio de respuesta de 12 segundos o más?
13. Cierta empresa tiene 2,000 empleados. Durante un año reciente, el monto medio por empleado debido a costos médicos personales fue de $31.50, y la desviación estándar de $6.00. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria simple de 36 empleados proporcione una media entre $30 y $33?
14. Supóngase que se sabe que en cierta población de adictos a las drogas la duración media de abuso es de 5 años y la desviación estándar de 3 años. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra al azar de 36 individuos de dicha población proporcione una duración media de abuso entre 4 y 6 años?
15. Supóngase que el consumo medio diario de proteínas para cierta población es de 125 g, y que para otra población la media es de 100 g. Si los valores diarios de consumo de proteínas en ambas

poblaciones presentan una distribución normal con una desviación estándar de 15 g, ¿cuál es la probabilidad de que muestras al azar e independientes de tamaño 25 de cada población proporcionen una diferencia entre las medias de las muestras de 12 o menos?

16. Supóngase que dos medicamentos, que se supone sirven para reducir el tiempo de respuesta a cierto estímulo, están siendo estudiados por cierto laboratorio. El investigador está inclinado a creer que los tiempos de respuesta, después de la administración de los dos medicamentos, presentan una distribución normal con iguales variancias de .60. Como parte de la evaluación de ambos medicamentos, el A va a administrarse a 15 personas y el medicamento B a 12 personas. Al investigador le gustaría saber entre qué valores estaría el 95 por ciento central de todas las diferencias entre las medias de las muestras si dichos medicamentos son igualmente eficaces y si el experimento se repitiera un gran número de veces utilizando estos tamaños de las muestras.
17. Supóngase que se sabe que la concentración de albúmina en el suero en cierta población de individuos presenta una distribución normal con una media de 4.2 g/100 ml y una desviación estándar de .5. Una muestra al azar de nueve de esos individuos sometidos a una dosis diaria de cierto esteroide oral produjo una concentración media de albúmina en el suero de 3.8 g/100 ml. En base a estos resultados, ¿es probable que el esteroide oral disminuya la concentración de albúmina en el suero?
18. Un estudio llevado a cabo en una gran área metropolitana reveló que, entre los estudiantes de segunda enseñanza, el 35 por ciento de ellos había fumado, en una u otra ocasión, mariguana. Si, de una muestra al azar de 150 de esos estudiantes, sólo 40 admitieron haber fumado alguna vez la mariguana, ¿qué concluiría usted?
19. El sesenta por ciento de los empleados de una gran empresa faltaron a su trabajo debido a enfermedad tres o más días el último año. Si se extrae una muestra aleatoria simple de 150 de dichos empleados, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción en la muestra de los que faltaron a su trabajo tres o más días debido a enfermedad esté entre .50 y .65?
20. Una trabajadora social especializada en problemas psiquiátricos piensa que tanto en la comunidad A como en la comunidad B la proporción de adolescentes que sufren de algún problema mental o emocional es de .20. En una muestra de 150 adolescentes de la comunidad A, 15 de ellos tuvieron algunos de estos problemas.

mientras que en una muestra de 100 de la comunidad B, el número fue de 16. Si lo que piensa la trabajadora social es acertado, ¿cuál es la probabilidad de tener una diferencia tan grande como la observada entre estas dos muestras?

21. Se supone que dos medicamentos, A y B, son igualmente eficaces para disminuir el nivel de ansiedad en cierto tipo de persona alterada emocionalmente. Se supone que la proporción de personas en las que los medicamentos son eficaces es de .80. A una muestra aleatoria de 100 personas alteradas emocionalmente se les dio el medicamento A y 85 de ellos experimentaron una disminución en su nivel de ansiedad. El medicamento B fue efectivo en 105 de una muestra aleatoria independiente de 150 individuos con trastornos emocionales. Si ambos medicamentos son, en realidad, igualmente eficaces como se pensó, ¿cuál es la probabilidad de obtener una diferencia en las proporciones de las muestras tan grande que o más grande que la observada?

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. George S. Fishman, *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation,* John Wiley y Sons, Nueva York, 1973.
2. Paul G. Hoel, *Introduction to Mathematical Statistics,* tercera edición, Wiley, Nueva York, 1962.
3. R. L. Anderson y T. A. Bancroft, *Statistical Theory in Research,* McGraw-Hill, Nueva York, 1952.

Otras referencias, libros

1. John E. Freund y Ronald E. Walpole, *Mathematical Statistics,* tercera edición, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
2. Richard J. Larsen y Morris L. Marx, *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

5

Estimación

5.1 INTRODUCCIÓN

Ahora se estudiará la *estimación*, la primera de las dos áreas generales de la inferencia estadística. La segunda área general, la *prueba de hipótesis*, se estudia en el siguiente capítulo.

En el capítulo 1 se definió la inferencia estadística como el procedimiento por medio del cual se llega a decisiones acerca de un gran volumen de datos examinando sólo una pequeña porción de ellos. Más específicamente, el gran volumen de datos, y la pequeña porción de ellos, a los que se hace referencia en dicha definición son una población y una muestra extraída de ella, respectivamente. Esto conduce al siguiente enunciado de definición de la inferencia estadística.

Definición

> *La inferencia estadística es el procedimiento por medio del cual se llega a inferencias acerca de una población con base en los resultados obtenidos de una muestra extraída de esa población.*

El proceso de estimación implica calcular, a partir de los datos de una muestra, alguna estadística que se ofrece como una aproximación del parámetro correspondiente de la población de la cual se extrajo la muestra.

La explicación de las razones en que se funda la estimación en el campo de las ciencias de la salud se apoya en la suposición de que quienes trabajan en este campo, tienen interés en los parámetros de varias poblaciones. Si este es el caso, existen dos buenas razones por las que se debe confiar en los procedimientos de estimación para obtener información respecto a dichos parámetros. Primero, muchas poblaciones de interés, aunque finitas, son tan grandes que no se podría llevar a cabo un estudio del 100 por ciento desde el punto de vista del costo. Segundo, no es posible estudiar por completo las poblaciones que son infinitas.

Supóngase que el administrador de un hospital grande está interesado en saber la edad promedio de los pacientes que fueron admitidos a su hospital durante un determinado año. Es posible que considere demasiado laborioso consultar todos los registros de todos los pacientes admitidos durante ese año y, como consecuencia, decide examinar una muestra de los registros a partir de los cuales pueda calcular una estimación de la edad promedio de los pacientes admitidos ese año.

Un médico general puede estar interesado en saber qué proporción de cierto tipo de individuos, tratados con un determinado medicamento, sufre efectos secundarios indeseables. Sin duda, su concepto de población consta de todas aquellas personas que alguna vez han sido, o serán tratadas, con este medicamento. Aplazar una conclusión hasta que haya observado la población completa podría tener un efecto adverso en el ejercicio de su profesión.

Estos dos ejemplos impulsaron cierto interés en estimar la medida y la proporción de una población, respectivamente. Otros parámetros, la estimación de los cuales se estudiará en este capítulo, son la diferencia entre dos medias, la diferencia entre dos proporciones, la variancia de la población y la razón de dos variancias.

Se encontrará que, para cada uno de estos parámetros, pueden calcularse dos tipos de estimación: una estimación puntual y una estimación por intervalos. Una *estimación puntual* es un solo valor numérico utilizado para estimar el parámetro correspondiente de la población. Una *estimación por intervalos* consta de dos valores numéricos que definen un intervalo que, con un grado especificado de confianza, se considera incluye al parámetro que se está estimando. Estos conceptos se explicarán en las siguientes secciones.

Nótese que se ha dado el nombre de *estimación* a un solo valor calculado. La regla que dice cómo calcular este valor, o estimación, se conoce como *estimador*. Los estimadores en general se presentan como fórmulas. Por ejemplo,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

es un estimador de la media de la población, μ. El valor numérico único que resulta de evaluar esta fórmula se conoce como estimación del parámetro, μ.

En muchos casos, puede estimarse un parámetro por medio de más de un estimador. Por ejemplo, podría utilizarse la mediana de la muestra para estimar la media de la población. ¿Cómo decidir entonces qué estimador debe utilizarse para estimar un determinado parámetro? La decisión se basa en criterios que reflejan la "bondad" de los estimadores particulares. Cuando se miden contra estos criterios, algunos estimadores son mejores que otros. Uno de estos criterios es la propiedad de ser *insesgado*.

Se dice que un estimador, por decir T, del parámetro θ es un estimador insesgado de θ si $E(T) = \theta. E(T)$ se lee "el valor esperado de T". Para una población finita, $E(T)$ se obtiene tomando el valor promedio de T calculado a partir de todas las muestras posibles de un determinado tamaño que puedan extraerse de la población. Es decir, $E(T) = \mu_T$. Para una población infinita, $E(T)$ se define en términos del cálculo matemático.

En el capítulo anterior se ha visto que la media de la muestra, la proporción de la muestra, la diferencia entre las medias de dos muestras y la diferencia entre las proporciones de dos muestras son cada una estimadores insesgados de sus parámetros correspondientes. Esta propiedad estaba implícita cuando se dijo que los parámetros eran las medias de las distribuciones de muestreo correspondientes. Por ejemplo, dado que la media de la distribución de muestreo de $\bar{x}$ es igual a μ, se sabe que $\bar{x}$ es un estimador insesgado de μ. En este libro no se estudiarán los otros criterios de buenos estimadores. El lector interesado encontrará que los estudian con todo detalle Freund y Walpole[1] y Mood, Graybill y Boes[2] entre otros. Un estudio matemático mucho menos riguroso puede encontrarse en Yamane.[3]

Poblaciones muestreadas y poblaciones blanco. El investigador en el área de salud, quien utiliza los procedimientos de inferencia estadística, debe estar al tanto de las diferencias entre dos tipos de población: la *población muestreada* y la *población objetivo*. La población muestreada es la población de la cual en realidad se extrae una muestra. La población objetivo es la población de la cual se desea hacer una inferencia. Estas dos poblaciones pueden ser o no la misma. Los procedimientos de inferencia estadística permiten hacer inferencias acerca de las poblaciones muestreadas (siempre que se hayan utilizado métodos de muestreo apropiados). Sólo cuando la población objetivo y la población muestreada son la misma, pueden utilizarse procedimientos de inferencia estadística para llegar a conclusiones acerca de la población objetivo. En caso de que ambas poblaciones sean distintas, el investigador puede llegar a conclusiones acerca de la población objetivo sólo en base a consideraciones no estadísticas.

Supóngase, por ejemplo, que un investigador desea estimar la efectividad de un método para tratar la artritis reumatoide. La población objetivo consta de todos los pacientes que sufren esta enfermedad. No es práctico extraer una muestra de esta población. Sin embargo, el investigador puede extraer una muestra de todos los pacientes con artritis reumatoide de alguna clínica específica. Estos pacientes constituyen la población muestreada y, si se utilizan métodos de muestreo apropiados, pueden hacerse inferencias sobre esta población muestreada en base a la información de la muestra. Si el investigador desea hacer inferencias acerca de todos los pacientes con artritis reumatoide, debe confiar en los medios no estadísticos para hacerlo. Quizá el investigador sepa que la población muestreada es similar, respecto a todas las características importantes, a la población objetivo. Es decir, es posible que el investigador sepa que la edad, sexo, severidad de la enfermedad, duración de desarrollo de ésta, etc., son similares. Y con base en este conocimiento, el investigador puede ya extrapolar sus descubrimientos a la población objetivo.

En muchos casos, la población muestreada y la población objetivo son idénticas y, cuando esto ocurre, las inferencias en torno a la población objetivo son directas. Sin embargo, el investigador debe estar consciente de que este no siempre es el caso, a fin de que no caiga en el error de hacer inferencias erróneas acerca de una población que difiere de la que ha sido muestreada.

Muestras aleatorias y no aleatorias. En los ejemplos y ejercicios de este libro, se supone que los datos que van a analizarse provienen de muestras aleatorias. La estricta validez de los procedimientos estadísticos estudiados depende de esta suposición. En muchos casos, en las aplicaciones del mundo real, es imposible o no resulta práctico utilizar muestras verdaderamente aleatorias. En experimentos con animales, por ejemplo, los investigadores suelen utilizar los animales con que cuentan o su propia raza de crianza. Si los investigadores tuvieran que depender de material seleccionado al azar, se llevaría a cabo muy poca investigación de este tipo. Una vez más, las consideraciones no estadísticas juegan un papel en el proceso de generalización. Los investigadores pueden afirmar que las muestras realmente utilizadas equivalen a muestras aleatorias simples, dado que no hay razón para pensar que el material verdaderamente utilizado no es representativo de la población de la cual se desean hacer inferencias.

En muchos proyectos de investigación en el área de la salud, se utilizan muestras de conveniencia y no muestras aleatorias. Puede ser que los investigadores tengan que confiar en el personal voluntario o en personas disponibles, como los estudiantes de su clase. Una vez más, deben hacerse generalizaciones con base en consideraciones no estadísticas. Sin embargo, las consecuencias de dichas generalizaciones pueden ser útiles o pueden ir desde erróneas hasta desastrosas.

En algunos casos puede introducirse aleatoriedad en un experimento aun cuando los individuos disponibles no sean seleccionados al azar de alguna población bien definida. Al comparar dos tratamientos, por ejemplo, a cada individuo puede asignársele al azar uno u otro de los tratamientos. Las inferencias en tales casos se aplican a los tratamientos y no a los individuos; en consecuencia, dichas inferencias son válidas.

5.2 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN

Supóngase que un investigador desea estimar la media de alguna población con distribución normal. Extrae una muestra al azar de tamaño n de la población y calcula $\bar{x}$, que utiliza como una estimación puntual de μ. Aunque esta estimación de μ posee todas la cualidades de un buen estimador, se sabe que, debido a los caprichos del muestreo, no puede esperarse que $\bar{x}$ sea igual a μ.

Por lo tanto, sería mucho más significativo estimar μ mediante un intervalo que de alguna forma muestre la magnitud probable de μ.

Para obtener dicha estimación de intervalo, debe aprovecharse lo que se sabe acerca de las distribuciones de muestreo. En el presente caso, dado que se tiene interés en la media de la muestra como estimador de la media de una población, debe recordarse lo que se sabe acerca de la distribución muestral de la media de la muestra.

En el capítulo anterior se aprendió que si el muestreo se realiza a partir de una población con distribución normal, la distribución muestral de la media de la muestra presentará una distribución normal con una media $\mu_{\bar{x}}$ igual a la media de la población, μ, y una variancia

$\sigma_{\bar{x}}^2$ igual a σ^2/n. Podría graficarse la distribución muestral si sólo se supiera dónde se localiza sobre el eje $\bar{x}$. Con base en el conocimiento que se tiene sobre las distribuciones normales, en general, se sabe aún más de la distribución de $\bar{x}$ de este caso. Por ejemplo, se sabe que sin importar dónde se localiza, aproximadamente el 95 por ciento de los valores posibles de $\bar{x}$ que constituyen la distribución están dentro de dos desviaciones estándar respecto de la media. Los dos puntos que están a dos desviaciones estándar de la media son $\mu - 2\sigma_{\bar{x}}$ y $\mu + 2\sigma_{\bar{x}}$, de modo que el intervalo $\mu \pm 2\sigma_{\bar{x}}$ contendrá aproximadamente el 95 por ciento de los valores posibles de $\bar{x}$. Se sabe que μ y, por lo tanto, $\mu_{\bar{x}}$ se desconocen, pero puede colocarse arbitrariamente la distribución muestral de $\bar{x}$ sobre el eje $\bar{x}$.

Dado que se desconoce el valor de μ, no se logra mucho por medio de la expresión $\mu \pm 2\sigma_{\bar{x}}$. Sin embargo, se tiene una estimación puntual de μ que es $\bar{x}$. ¿Resultaría útil construir un intervalo en torno a esta estimación puntual de μ? La respuesta es sí. Supóngase que se construyeran intervalos en torno a cualquier valor posible de $\bar{x}$ calculados a partir de todas las muestras posibles de tamaño n de la población de interés. Se tendría un gran número de intervalos de la forma $\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$ con amplitudes todas iguales a la amplitud del intervalo en

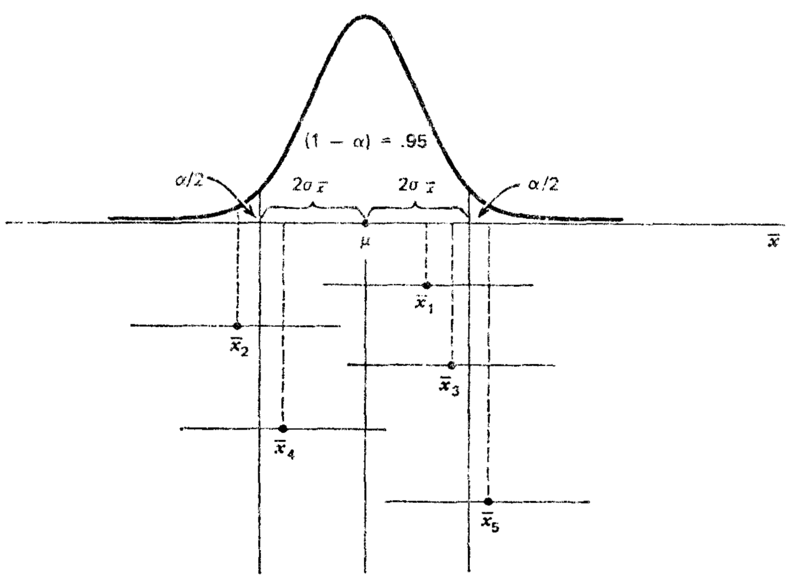


Figura 5.2.1 Intervalo de confianza del 95 por ciento para μ.

torno a la μ desconocida. Aproximadamente el 95 por ciento de estos intervalos tendrían centros que caen dentro del intervalo $\pm\ 2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ. Cada uno de los intervalos cuyos centros caen dentro de $2\sigma_{\bar{x}}$ de μ contendrían a μ. Estos conceptos se ilustran en la figura 5.2.1. En la figura 5.2.1 se observa que $\bar{x}_1, \bar{x}_3$ y $\bar{x}_4$ caen dentro del intervalo $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ y, en consecuencia, los intervalos $2\sigma_{\bar{x}}$ alrededor de estas medias de las muestras incluyen el valor de μ. Las medias de las muestras $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_5$ no caen dentro del intervalo $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a μ, y los intervalos $2\sigma_{\bar{x}}$ en torno a ellas no incluyen a μ.

Ejemplo 5.2.1

Supóngase que un investigador, interesado en obtener una estimación del nivel promedio de alguna enzima en cierta población humana, toma una muestra de 10 individuos, determina el nivel de la enzima en cada uno y calcula la media muestral $\bar{x} = 22$. Supóngase que se sabe además que la variable de interés presenta una distribución aproximadamente normal con una variancia de 45. Un intervalo de confianza de aproximadamente el 95 por ciento para μ está dado por

$$\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$$
$$22 \pm 2\sqrt{\frac{45}{10}}$$
$$22 \pm 2(2.12)$$
$$17.76,\ 26.24$$

Examínese la composición de esta estimación de intervalo. Contiene en su centro la estimación puntual de μ. Se reconoce al 2 como un valor de la distribución normal unitaria que dice dentro de cuántos errores estándar están aproximadamente el 95 por ciento de los valores posibles de $\bar{x}$. Este valor de z se conoce como *coeficiente de confiabilidad*. El último componente, $\sigma_{\bar{x}}$, es el error estándar, o desviación estándar, de la distribución de muestreo de $\bar{x}$. En general, entonces, una estimación de intervalo puede expresarse como sigue:

$$\text{estimador} \pm (\text{coeficiente de confiabilidad}) \times (\text{error estándar}) \qquad (5.2.1)$$

En particular, cuando el muestreo se realiza a partir de una distribución normal con variancia conocida, una estimación por intervalos para μ puede expresarse como

$$\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}} \qquad (5.2.2)$$

¿Cómo se interpreta el intervalo dado por 5.2.2?. En el presente ejemplo, donde el coeficiente de confiabilidad es igual a 2, se dice que, al repetir el muestreo aproximadamente el 95 por ciento de los intervalos construidos mediante 5.2.2 incluirán la media de la población. Esta interpretación se basa en la probabilidad de ocurrencia de diferentes valores de $\bar{x}$. Puede generalizarse esta interpretación si se designa el área total bajo la curva de $\bar{x}$, que queda fuera del intervalo $\mu \pm 2\sigma_{\bar{x}}$ como α y el área dentro del intervalo como $1 - \alpha$ y puede darse la siguiente *interpretación probabilística* de 5.2.2.

> *En el muestreo repetido, a partir de una población con distribución normal, el* 100 $(1 - \alpha)$ *por ciento de todos los intervalos de la forma* $\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}}$ *incluirán, a la larga, la media de la población,* μ.

La cantidad $1 - \alpha$, en este caso .95, se conoce como *coeficiente de confianza* y el intervalo $\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}}$ se conoce como *intervalo de confianza* para μ. Cuando $(1 - \alpha) = .95$, el intervalo recibe el nombre de intervalo de confianza del 95 por ciento para μ. En el presente ejemplo, se dice que se tiene el 95 por ciento de confianza de que la media de la población esté entre 17.76 y 26.24. Esto se conoce como la *interpretación práctica* de 5.2.2. En general, puede expresarse como sigue.

> *Se tiene el* $100(1 - \alpha)$ *por ciento de confianza de que el intervalo único calculado,* $\bar{x} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sigma_{\bar{x}}$, *contenga la media de la población,* μ.

En el ejemplo dado aquí podría preferirse, en lugar de 2, el valor más exacto de z, 1.96, que corresponde a un coeficiente de confianza de .95. El investigador puede utilizar cualquier coeficiente de confianza que desee, y los valores que se utilizan con más frecuencia son .90, .95 y .99.

Ejemplo 5.2.2

Un fisioterapeuta desea estimar, con el 99 por ciento de confianza, la media de fuerza máxima de un músculo particular en cierto grupo de individuos. Se inclina a suponer que los valores de dicha fuerza muestran una distribución aproximadamente normal con una variancia de

144. Una muestra de 15 individuos, quienes participaron en el experimento, proporcionaron una media de 84.3. En la tabla F, el valor de z que corresponde a un coeficiente de confianza de .99 es de 2.58. Este es el coeficiente de confiabilidad. El error estándar es de

$$\sigma_{\bar{x}} = 12/\sqrt{15} = 3.10$$

El intervalo de confianza del 99 por ciento para μ es entonces,

$$84.3 \pm 2.58(3.10)$$

$$84.3 \pm 8.0$$

$$76.3, 92.3$$

Se dice que se tiene el 99 por ciento de confianza de que la media de la población esté entre 76.3 y 92.3 ya que, al repetir el muestreo, el 99 por ciento de todos los intervalos que podrían construirse en la forma que acaba de describirse incluirían a la media de la población.

Muestreo a partir de poblaciones no normales. No siempre será posible o prudente suponer que la población de interés muestra una distribución normal. Gracias al teorema del límite central, esto no será un problema si puede seleccionarse una muestra lo suficientemente grande. Se ha aprendido que, para muestras grandes, la distribución muestral de $\bar{x}$ presenta una distribución aproximadamente normal sin importar cómo está distribuida la población original.

Ejemplo 5.2.3

En un estudio del flujo de pacientes a través de las oficinas de médicos generales, se encontró que, en promedio, una muestra de 35 pacientes llegaban 17.2 minutos tarde a las citas. Una investigación previa había demostrado que la desviación estándar era de 8 minutos aproximadamente. Se tuvo la sensación que la distribución de la población no era normal. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 90 por ciento para μ, la cantidad de tiempo promedio verdadera de llegada tarde a las citas?.

Dado que el tamaño de la muestra es bastante grande (mayor de 30) y se conoce la desviación estándar de la población, la situación se aproxima al teorema del límite central y se supone que la distribución muestral de $\bar{x}$ presenta una distribución aproximadamente normal. Utilizando la tabla F, se encuentra que el coeficiente de confiabilidad, que corresponde a un coeficiente de confianza de .90, se aproxima a 1.645 si se interpola. El error estándar es de $\sigma_{\bar{x}} = 8\sqrt{35} = 1.35$, de modo que el intervalo de confianza del 90 por ciento para μ es

$$\begin{gathered} 17.2 \pm 1.645(1.35) \\ 17.2 \pm 2.2 \\ 15.0,\ 19.4 \end{gathered}$$

Ejercicios

5.2.1 En un experimento diseñado para estimar el número promedio de latidos por minuto del corazón para cierta población, en las condiciones del experimento, se encontró que el número promedio de latidos por minuto para 49 personas era de 90. Si resulta lógico suponer que esos 49 pacientes constituyen una muestra aleatoria y que la población está distribuida normalmente, con una desviación estándar de 10, encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para μ.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para μ.
c) El intervalo de confianza del 99 por ciento para μ.

5.2.2 Se encontró que el nivel indirecto medio de bilirrubinas en el suero de 16 niños de cuatro días de nacidos era de 5.98 mg/100 cc. Suponiendo que los niveles de bilirrubinas en los niños de cuatro días de nacidos presentan una distribución aproximadamente normal con una desviación estándar de 3.5 mg/100 cc., encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para μ.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para μ.
c) El intervalo de confianza del 99 por ciento para μ .

5.2.3 En un estudio de la duración de hospitalización realizado por varios hospitales en cooperación, se extrajo al azar una muestra de 64 pacientes con úlcera péptica de una lista de todos los pacientes con esta enfermedad admitidos alguna vez en los hospitales y se determinó, para cada uno, su duración de hospitalización por admisión. Se encontró que la duración media de hospitalización fue de 8.25 días. Si se sabe que la desviación estándar de la población es de 3 días, encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para μ.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para μ.
c) El intervalo de confianza del 99 por ciento para μ.

5.2.4 Una muestra de 100 hombres adultos aparentemente normales, de 25 años de edad, mostró una presión sistólica sanguínea media de 125. Si se tiene la sensación de que la desviación estándar de la población es de 15, encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para μ.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para μ.

5.3 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA ENTRE LAS MEDIAS DE DOS POBLACIONES

A veces surgen casos en los que se tiene interés en estimar la diferencia entre la media de dos poblaciones. A partir de cada población se extrae una muestra aleatoria independiente y, de los datos de cada una, se calculan las medias de las muestras $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, respectivamente. En el capítulo anterior se aprendión que el estimador $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ proporciona una estimación insesgada de $\mu_1 - \mu_2$, la diferencia entre las medias de las poblaciones. De lo expuesto en el capítulo 4, se sabe también que, dependiendo de las condiciones, la distribución muestral de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ puede presentar al menos una distribución aproximadamente normal, de modo que en muchos casos se utiliza la teoría pertinente a las distribuciones normales para calcular un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$. Ilústrese ahora primero para el caso donde el muestreo se realiza a partir de una distribución normal y luego para el caso donde no puede hacerse la suposición de poblaciones con distribución normal.

Ejemplo 5.3.1

En un hospital grande para el tratamiento de retrasados mentales, una muestra de 12 individuos con síndrome de Down proporcionó una concentración media de ácido úrico en suero de $\bar{x}_1 = 4.5$ mg/100 ml. En un hospital general, se encontró que una muestra de 15 individuos normales de la misma edad y sexo tenía un valor medio de $\bar{x}_2 = 3.4$. Si resulta lógico suponer que las dos poblaciones de concentraciones presentan una distribución normal con variancias iguales a 1, encuentre el intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

Para una estimación puntual de $\mu_1 - \mu_2$, utilícese

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 4.5 - 3.4 = 1.1.$$

En la tabla F se encuentra que el coeficiente de confiabilidad que corresponde a .95 es de 1.96. El error estándar está dado por la expresión

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{15}} = .39$$

El intervalo de confianza del 95 por ciento es entonces

$$1.1 \pm 1.96(.39)$$
$$1.1 \pm .8$$
$$.3, 1.9$$

Se dice que se tiene el 95 por ciento de confianza de que la diferencia real, $\mu_1 - \mu_2$, esté entre .3 y 1.9, porque, al repetir el muestreo, el 95 por ciento de los intervalos construidos de esta manera incluirían la diferencia entre las medias reales.

Muestreo a partir de poblaciones no normales. La construcción de un intervalo de confianza para la diferencia entre la media de dos poblaciones, cuando el muestreo se realiza a partir de poblaciones no normales, se lleva a cabo en la misma forma anterior si los tamaños de las muestras, n_1 y n_2, son grandes. Una vez más, este es un resultado del teorema del límite central.

Ejemplo 5.3.2

El ingreso medio familiar de una muestra de 75 pacientes admitidos a un hospital A fue de $\bar{x}_1 = \$6{,}800$, mientras que el promedio basado en una muestra de 80 pacientes de un hospital B se encontró como $\bar{x}_2 = \$4{,}450$. Si las desviaciones estándar de las poblaciones son

$$\sigma_1 = \$600 \text{ y } \sigma_2 = \$500,$$

encuentre el intervalo de confianza del 99 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$, la diferencia entre las medias de ambas poblaciones.

La estimación puntual de $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \$6{,}800 - \$4{,}450 = \$2{,}350.$$

Utilizando la tabla F, se encuentra que el coeficiente de confiabilidad es de 2.58. El error estándar es de

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(600)^2}{75} + \frac{(500)^2}{80}} = 89$$

El intervalo de confianza del 99 por ciento es

$$\$2350 \pm 2.58(89)$$
$$\$2350 \pm 230$$
$$\$2120, \$2580$$

Este intervalo se interpreta en las formas habituales.

Ejercicios

5.3.1 En un estudio en el que se utilizaron niños retrasados educables, 11 niños y 10 niñas, después de un año de enseñanza académica combinada con terapia, se les calificó en relación con sus logros. La calificación media para los niños fue de $\bar{x}_1 = 67.0$ y para las niñas, de $\bar{x}_2 = 61.5$. Si es lógico suponer que las calificaciones para niños semejantes bajo circunstancias similares muestran una distribución normal con desviaciones estándar de $\sigma_1 = 11$ y $\sigma_2 = 10$, encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.
c) El intervalo de confianza del 99 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

5.3.2 Una muestra de 10 niñas de doce años de edad y una muestra de 10 niños de doce años también proporcionaron las estaturas medias de $\bar{x}_1 = 151.9$ centímetros y $\bar{x}_2 = 148.6$ centímetros, respectivamente. Suponiendo distribuciones normales de las estaturas con $\sigma_1 = 5.1$ centímetros y $\sigma_2 = 7.6$ centímetros, encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.
c) El intervalo de confianza del 99 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

5.3.3 Una muestra de 100 pacientes con la enfermedad A, admitidos a un hospital de enfermedades crónicas, permanecieron en el hospital, en promedio, 35 días. Otra muestra de 100 pacientes con la enfermedad B permanecieron, en promedio, 28 días. Si las variancias de ambas poblaciones son, respectivamente, de 100 y 225, encuentre:

a) El intervalo de confianza del 90 por ciento para $\mu_A - \mu_B$.
b) El intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_A - \mu_B$.
c) El intervalo de confianza del 99 por ciento para $\mu_A - \mu_B$.

5.4 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA PROPORCIÓN DE UNA POBLACIÓN

Muchas cuestiones de interés para quien trabaja en el campo de la salud se relacionan con la proporción de las poblaciones. ¿Qué proporción de los pacientes que reciben un tipo particular de tratamiento se recupera?. ¿Qué proporción de alguna población tiene cierta enfermedad?. ¿Qué proporción de una población es inmune a cierta enfermedad?.

Para estimar la proporción de una población se procede en la misma forma que cuando se estima la media de una población. Se extrae una muestra de la población de interés y se calcula su proporción, $\tilde{p}$. Esta proporción de la muestra se utiliza como el estimador puntual de la proporción de la población. Se obtiene un intervalo de confianza a través de la fórmula general:

estimador $\pm$ (coeficiente de confiabilidad) X (error estándar)

En el capítulo anterior se ha visto que cuando tanto np como $n(1 - p)$ son mayores que 5, puede considerarse que la distribución muestral de $\tilde{p}$ se aproxima bastante a la distribución normal. Cuando se cumple esta condición, el coeficiente de confiabilidad es algún valor de z de la distribución normal unitaria. Se ha visto que el error estándar es igual a $\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{p(1 - p)/n}$. Dado que se desconoce p, que es el parámetro que se está tratando de estimar, debe utilizarse $\bar{p}$ como una estimación. Así, se estima $\sigma_{\bar{p}}$ por medio de $\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n}$, y el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento de p está dado por

$$\bar{p} \pm z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n} \tag{5.4.1}$$

A este intervalo se le dan interpretaciones tanto probabilísticas como prácticas.

Ejemplo 5.4.1

Se llevó a cabo una encuesta para estudiar las prácticas de salud dentales y las actitudes de cierta población urbana de adultos. De los 300 adultos entrevistados, 123 de ellos dijeron que se sometían regularmente a una revisión dental dos veces al año.

La mejor estimación puntual de la proporción de la población es $\bar{p} = 123/300 = .41$. El tamaño de la muestra y la estimación de p son de magnitud suficiente como para justificar el uso de la distribución normal unitaria para construir un intervalo de confianza. El coeficiente de confiabilidad que corresponde a un nivel de confianza de .95, por ejemplo, es de 1.96 y la estimación del error estándar, $\sigma_{\bar{p}}$, es $\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n} = \sqrt{.41(.59)/300} = .028$. El intervalo de confianza del 95 por ciento para p, con base en estos datos es

$$.41 \pm 1.96(.028)$$
$$.41 \pm .05$$
$$.36, .46$$

Se dice que se tiene el 95 por ciento de confianza de que la proporción verdadera, p, esté entre .36 y .46 ya que, al repetir el muestreo, el 95 por ciento de los intervalos construidos en la forma del presente intervalo incluirían a la p verdadera.

Ejercicios

5.4.1 Un encargado del archivo de expedientes médicos extrajo al azar una muestra de 100 expedientes de pacientes y encontró que en el 8 por ciento de ellos, la carátula tenía, al menos, un detalle de información que contradecía a la demás información que aparecía en el expediente. Construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para la proporción verdadera de los expedientes que contienen dichas discrepancias.

5.4.2 Una encuesta, que condujo a una muestra aleatoria de 150 familias en cierta comunidad urbana, reveló que, en el 87 por ciento de los casos, por lo menos uno de los miembros de la familia tenía alguna forma de seguro relacionado con la salud. Construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para p, la proporción verdadera de familias en la comunidad con la característica de interés.

5.4.3. En un estudio diseñado para conocer la relación entre cierto medicamento y cierta anomalía en los embriones de pollo, se inyectaron con el medicamento 50 huevos fecundados al cuarto día de incubación. En el vigésimo día de incubación se examinaron los embriones y se observó la presencia de la anomalía en 12 de ellos. Encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para p.

5.5 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA ENTRE LAS PROPORCIONES DE DOS POBLACIONES

Con frecuencia se tiene interés por conocer la magnitud de la diferencia entre las proporciones de dos poblaciones. Por ejemplo, es posible que se desee comparar hombres y mujeres, dos grupos de edades, dos grupos socioeconómicos o dos grupos de diagnósticos respecto a la proporción en que poseen alguna característica de interés. Un estimador insesgado puntual de la diferencia entre las proporciones de dos poblaciones lo proporciona la diferencia en las proporciones de las muestras, $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$. Dado que, como ya se ha visto, cuando n_1. y n_2 son grandes y las proporciones de las poblaciones no están demasiado próximas a 0 ó a 1, se aplica el teorema del límite central y puede utilizarse la teoría de la distribución normal para obtener los intervalos de confianza. El error estándar de la estimación puede encontrarse mediante la expresión

$$\sqrt{\frac{\tilde{p}_1(1 - \tilde{p}_1)}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2(1 - \tilde{p}_2)}{n_2}}$$

dado que se desconocen las proporciones de las poblaciones. Un intervalo de confianza del 100(1 $-$ α) por ciento para $p_1 - p_2$ está dado por

$$(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) \pm z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{\tilde{p}_1(1-\tilde{p}_1)}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2(1-\tilde{p}_2)}{n_2}} \qquad (5.5.1)$$

Este intervalo puede interpretarse desde el punto de vista tanto probabilístico como práctico.

Ejemplo 5.5.1

Doscientos pacientes que sufrían de cierta enfermedad fueron divididos al azar en dos grupos iguales. Del primer grupo, quienes recibieron el tratamiento estándar, 78 se recuperaron en un plazo de tres días. De los otros 100, quienes fueron tratados mediante un nuevo método, 90 se recuperaron al cabo de tres días también. Los médicos desearon estimar la diferencia verdadera en las proporciones de quienes se recuperaron en tres días.

La mejor estimación puntual de la diferencia entre las proporciones de las poblaciones es $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 = .78 - .90 = -.12$. El intervalo de confianza del 95 por ciento para $p_1 - p_2$ es

$$(.78 - .90) \pm 1.96 \sqrt{\frac{(.78)(.22)}{100} + \frac{(.90)(.10)}{100}}$$

$$-.12 \pm 1.96(.05)$$

$$-.12 \pm .10$$

$$-.22, -.02$$

Se dice que se tiene el 95 por ciento de confianza de que la diferencia verdadera esté entre .02 y .22, ya que se sabe que, al repetir el muestreo, aproximadamente el 95 por ciento de los intervalos que puedan construirse de la manera que acaba de describirse incluirán a la diferencia verdadera.

Nótese que los signos negativos sólo reflejan el hecho de que se obtuvieron mejores resultados al utilizar el nuevo método. Podría haberse construido también el intervalo en torno a $\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1$, en cuyo caso los puntos extremos del intervalo habrían sido positivos.

Ejercicios

5.5.1 De una muestra de 150 personas, seleccionada de los pacientes que se admitieron en un hospital grande durante un período de dos años, 129 de ellos tenían algún tipo de seguro de hospitalización. En una muestra de 160 pacientes seleccionados en forma similar, de un segundo hospital, 144 de ellos tuvieron algún tipo de seguro de hospitalización. Encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para la diferencia real en las proporciones de las poblaciones.

5.5.2 En una encuesta conducida en dos secciones de un área metropolitana grande, se obtuvieron los siguientes resultados respecto a la presión sanguínea anormal.

Area	Número de personas seleccionadas	Número de anormales en la selección
1	200	20
2	250	38

Construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para la diferencia entre las proporciones de las dos poblaciones.

5.5.3 En un estudio diseñado para conocer los efectos secundarios de dos medicamentos, a 50 animales se les dio el medicamento A y a otros 50 se les dio el medicamento B. De los 50 que recibieron el medicamento A, 11 de ellos mostraron efectos secundarios no deseables, mientras que 8 de los que recibieron el medicamento B reaccionaron en forma similar. Encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para $p_A - p_B$.

5.6 LA DISTRIBUCIÓN t

En las secciones 5.2 y 5.3 se describieron los procedimientos para construir los intervalos de confianza para la media de una población y la diferencia entre las medias de dos poblaciones. Se recordará que estos procedimientos requieren del conocimiento de las variancias de las poblaciones, a partir de las cuales se extraen las muestras. Puede parecer un tanto extraño que se tenga conocimiento de la variancia de la población y no se conozca el valor de la media de la población. De hecho, es común, en situaciones como las que se han presentado, que se desconozca tanto la variancia como la media de la población. Esta situación presenta un problema respecto a la construcción de los intervalos de confianza. Por ejemplo, aun cuando la estadística presenta

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

una distribución normal cuando la población también está distribuida en forma normal, y una distribución aproximadamente normal cuando n es grande, sin importar la forma funcional de la población, no puede utilizarse este hecho debido a que se desconoce σ. Sin embargo no está todo perdido y la solución más lógica al problema es la siguiente. Para sustituir a σ, se utiliza la desviación estándar de la muestra, $s = \sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2/(n-1)}$. Cuando el tamaño de la muestra es grande, por ejemplo mayor que 30, la confianza en s como una aproximación de σ es por lo general sustancial, por lo que se justifica la utilización de la teoría de la distribución normal para construir los intervalos de confianza de las medias de las poblaciones o las diferencias entre ellas. En tal caso, se procede como se indicó en las secciones 5.2 y 5.3.

Cuando se tienen muestras pequeñas, es imprescindible encontrar un procedimiento alternativo para construir intervalos de confianza.

Como resultado del trabajo de W. S. Gosset,[4] escrito bajo el seudónimo de "Student", se dispone de una alternativa, conocida como *distribución t de Student*, que por lo general se abrevia como *distribución t*.

La cantidad

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

sigue esta distribución. La distribución t tiene las siguientes propiedades.

1. Tiene una media de 0.
2. Es simétrica en torno a la media.
3. En general, tiene una variancia mayor de 1, pero ésta tiende a 1 a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

4. La variable t va de $-\infty$ a $+\infty$.
5. La distribución t es en realidad una familia de distribuciones, ya que se tiene una distribución distinta para cada valor muestral $n-1$, el divisor utilizado para calcular s^2. La figura 5.6.1 muestra las distribuciones t que corresponden a varios valores de grados de libertad.
6. Comparada con la distribución normal, la distribución t es menos puntiaguda en el centro y tiene colas más altas. En la figura 5.6.2 se compara la distribución t con la distribución normal.
7. La distribución t se aproxima a la distribución normal a medida que $n-1$ se aproxima al infinito.

La distribución t, al igual que la distribución normal unitaria, se ha tabulado ampliamente. Una tabla así se da en la tabla H del apéndice.

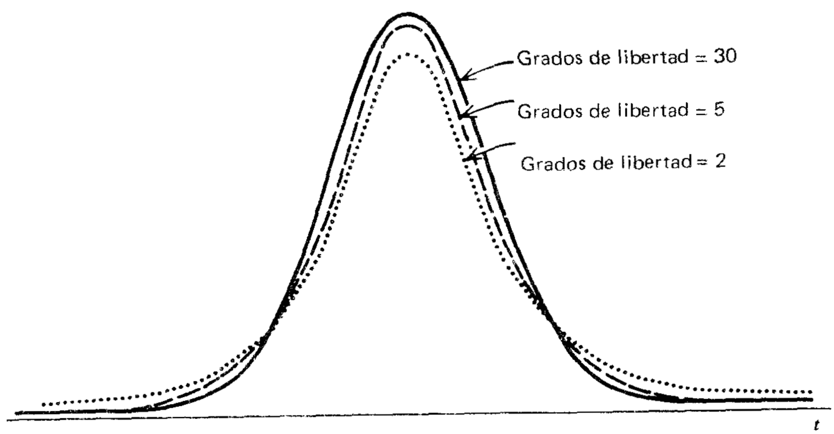


Figura 5.6.1 Distribución t para diferentes valores de grados de libertad.

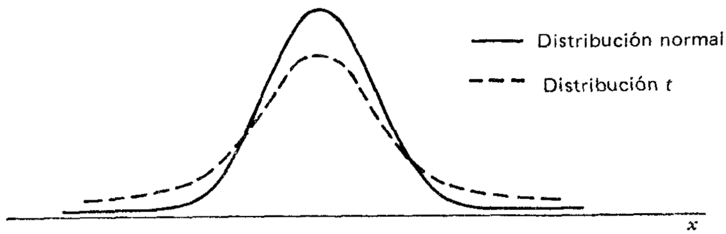


Figura 5.6.2 Comparación de las distribuciones normal y t.

Se recordará que la cantidad $n - 1$ utilizada para calcular la variancia de la muestra se conoce como los grados de libertad; por lo tanto, se dice que existe una distribución t distinta para cada valor de los grados de libertad, y como se verá, deben tomarse en cuenta los grados de libertad cuando se utilice la tabla de la distribución t.

El procedimiento general para construir intervalos de confianza no se ve afectado por tener que utilizar la distribución t en lugar de la distribución normal unitaria. Se utilizará aún la relación expresada por

estimador $\pm$ (coeficiente de confiabilidad) $\times$ (error estándar)

Lo que es diferente es la fuente del coeficiente de confiabilidad. Se obtiene ahora a partir de la tabla de la distribución t en lugar de la tabla de la distribución normal unitaria. Para ser más específicos, *cuando se muestrea a partir de una distribución normal cuya desviación estándar, σ, se desconoce, está dado por la expresión*

$$\bar{x} \pm t_{(1-\alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{5.6.1}$$

el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ *por ciento para la media de la población, μ.*

Nótese que un requisito para el uso válido de la distribución t es que la muestra debe ser extraída de una distribución normal. Sin embargo, la experiencia ha demostrado que pueden tolerarse desviaciones moderadas de este requisito. Como consecuencia, la distribución t se utiliza incluso cuando se sabe que la población original se desvía de la normalidad. La mayoría de los investigadores requieren el supuesto de que, al menos, pueda sostenerse una hipótesis de una población con distribución en forma de montículo.

Ejemplo 5.6.1

Se hicieron determinaciones de amilasa en suero de una muestra de 15 personas aparentemente normales. Dicha muestra proporcionó una media de 96 unidades/100 ml y una desviación estándar de 35 unidades/100 ml. Se desconocía la variancia de la población. Puede utilizarse la media de la muestra, 96, como una estimación puntual de la media de la población, pero, dado que se desconoce la desviación estándar de la población, debe suponerse que los valores de la población están al menos distribuidos en forma aproximadamente normal antes de construir un intervalo de confianza para μ. Supóngase que dicha suposición resulta razonable y que se desea un intervalo de confianza del 95 por ciento. Se tiene el estimador, $\bar{x}$, y el error estándar es $s/\sqrt{n} = 35/\sqrt{15} = 9.04$. Ahora se necesita encontrar el coeficiente de confiabilidad, el valor de t asociado a un coeficiente de confianza de .95 y $n - 1 = 14$ grados de libertad. Dado que un intervalo de confianza del 95 por ciento deja .05 del área bajo la curva de t igualmente dividida entre las dos colas, se necesita el valor de t a la derecha del cual se encuentra .025 del área. En la tabla H se localiza la columna encabezada por $t_{.975}$. Este es el valor de t a la izquierda del cual está .975 del área bajo la curva. El área a la derecha de este valor es igual al deseado .025. Se localiza ahora el número 14 en la columna de los grados de libertad. El valor de la intersección del renglón marcado con el número 14 y la columna encabezada por $t_{.975}$ es el t buscado. Se encuentra que este valor de t, que es el coeficiente de confiabilidad, es de 2.1448. Ahora se construye el intervalo de confianza del 95 por ciento como sigue:

$$96 \pm 2.1448(9.04)$$

$$96 \pm 19$$

$$77, 115$$

Este intervalo puede interpretarse desde los puntos de vista tanto probabilístico como práctico. Se dice que se tiene el 95 por ciento de confianza de que la media real de la población, μ, esté entre 77 y 115 ya que, al muestrear varias veces, el 95 por ciento de los intervalos construidos de una manera semejante incluirán a μ.

La distribución t y la diferencia entre las medias. Cuando se desconocen las desviaciones estándar de las poblaciones y se desea estimar la diferencia entre las medias de dos poblaciones con un intervalo de confianza, debe establecerse una hipótesis adicional antes de poder utilizar la distribución t en la forma que acaba de describirse. La suposición que debe hacerse es que las variancias de las poblaciones, aunque desconocidas, son iguales; debe suponerse que $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$. Lo razonable de esta suposición puede probarse mediante un criterio apropiado que se discutirá en una sección posterior.

Si está justificada la suposición de que las variancias de las poblaciones son iguales, pueden interpretarse las variancias de las dos muestras, que se calculan a partir de las dos muestras independientes, como estimaciones de lo mismo, la variancia común. Parece lógico entonces que esto debe capitalizarse, de alguna manera, en el análisis en cuestión. Esto es precisamente lo que se hace y se obtiene una *estimación mancomunada* de la variancia común. Esta estimación mancomunada se obtiene calculando el promedio ponderado de las variancias de las dos muestras. La variancia de cada muestra se pondera por sus grados de libertad. Si los tamaños de las muestras son iguales, este promedio ponderado resulta ser la media aritmética de las variancias de las dos muestras. Si los tamaños de las dos muestras son distintos, el promedio ponderado aprovecha la información adicional proporcionada por la muestra mayor. La estimación mancomunada está dada por la fórmula:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{5.6.2}$$

El error estándar de la estimación, entonces, está dado por

$$\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$$

y el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} \tag{5.6.3}$$

El número de grados de libertad utilizado para determinar el valor de t, que se aplica al construir el intervalo, es de $n_1 + n_2 - 2$, que es el denominador de la ecuación 5.6.2. Este intervalo se interpreta en la forma habitual.

Ejemplo 5.6.2

Como ilustración, utilícese el ejemplo 5.6.1 y supóngase que aparte de las personas aparentemente normales, se hicieron también las determinaciones de la amilasa en suero en una muestra independiente de 22 personas hospitalizadas. Supóngase que la media y la desviación estándar de este grupo son, respectivamente, de 120 y 40 unidades/100 ml. Desígnese a las 15 personas normales como grupo 2. La estimación de punto de $\mu_1 - \mu_2$ es de $120 - 96 = 24$.

Para encontrar un intervalo de confianza, supóngase que las dos poblaciones en estudio presentan una distribución normal y que sus variancias son iguales. El primer paso es obtener una estimación mancomunada de la variancia común como sigue:

$$s_p^2 = \frac{14(35)^2 + 21(40)^2}{15 + 22 - 2} = 1450$$

El intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ es como sigue:

$$(120 - 96) \pm 2.0301 \sqrt{\frac{1450}{15} + \frac{1450}{22}}$$

$$24 \pm (2.0301)(12.75)$$

$$24 \pm 26$$

$$-2, 50$$

Una vez más, se dice que se tiene un 95 por ciento de confianza de que la diferencia real, $\mu_1 - \mu_2$, esté entre -2 y 50 ya que, al muestrear varias veces, el 95 por ciento de los intervalos así construidos incluirían a $\mu_1 - \mu_2$.

Diferencia entre dos medias: variancias poblacionales distintas. Cuando no se acepta que las variancias de dos poblaciones de interés son iguales, aun cuando pueda suponerse que las dos poblaciones sean normales, no es apropiado utilizar la distribución *t* como acaba de describirse, para construir los intervalos de confianza.

Una solución al problema de variancias distintas fue propuesta por Behrens[5] y posteriormente verificada y generalizada por Fisher.[6,7] También han sido propuestas soluciones por Neyman,[8] Scheffé[9,10] y Welch.[11,12] El problema ha sido discutido en detalle por Aspin,[13] Trickett y colaboradores[14] y Cochran.[15] El procedimiento de Cochran se encuentra también en Snedecor y Cochran.[16]

El problema gira en torno al hecho de que la cantidad

$$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

no sigue una distribución *t* con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad cuando las variancias de las poblaciones son distintas. Una forma de solu-

D.E V.
L S S^2

cionar el problema es utilizar un valor modificado para los grados de libertad. Una fórmula conveniente para hacerlo es la dada por Dixon y Massey[17] como sigue:

$$gl' = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2}} \tag{5.6.4}$$

Si se verifican las hipótesis de normalidad, t' está distribuida aproximadamente como t con los grados de libertad calculados mediante la ecuación 5.6.4. El intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ está dado entonces por la expresión

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{5.6.5}$$

El valor numérico de los grados de libertad calculados a partir de la ecuación 5.6.4 puede no ser un entero. En este caso, por lo general resulta conveniente utilizar el valor más próximo de $g\ell'$ dado en la tabla de la distribución t.

El intervalo obtenido mediante este método se interpreta en la forma habitual, pero debe tenerse presente que dicho intervalo es sólo aproximado.

Ejemplo 5.6.3

Se estudió la actividad total del complemento serológico (C_{H50}) en 20 personas aparentemente sanas y 10 personas enfermas. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Personas	n	$\bar{x}$	s
Enfermas	10	62.6	33.8
Normales	20	47.2	10.1

Los investigadores tenían razón al pensar que las poblaciones muestreadas estaban distribuidas en forma aproximadamente normal, pero se rehusaban a suponer que las variancias de las dos poblaciones desconocidas eran iguales. Encuentre el intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

La estimación puntual para $\mu_1 - \mu_2$ es de $62.6 - 47.2 = 15.4$. El valor modificado de los grados de libertad está dado por la expresión

$$g\ell' = \frac{\left(\frac{33.8^2}{10} + \frac{10.1^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{33.8^2}{10}\right)^2}{10} + \frac{\left(\frac{10.1^2}{20}\right)^2}{20}} = \frac{(114.2440 + 5.1005)^2}{\frac{13051.692}{10} + \frac{26.0151}{20}} = 10.9$$

El valor de t que corresponde a un coeficiente de confianza de .95 y 11 grados de libertad es de 2.2010, y el intervalo de confianza aproximado del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$15.4 \pm 2.2010\sqrt{\frac{(33.8)^2}{10} + \frac{(10.1)^2}{20}}$$

$$15.4 \pm (2.2010)(10.92)$$

$$15.4 \pm 24.0$$

$$-8.6,\ 39.4$$

Ejercicios

5.6.1 A nueve pacientes que sufren la misma incapacidad física, pero de otra manera comparables, se les pidió que llevaran a cabo cierta tarea como parte de un experimento. El tiempo promedio requerido para realizar la tarea fue de siete minutos con una desviación estándar de dos minutos. Suponiendo que existe normalidad, construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para el tiempo medio verdadero requerido para que este tipo de pacientes efectuara la tarea.

5.6.2 El administrador de un hospital tomó una muestra de 25 cuentas vencidas, a partir de las cuales calculó una media de \$250 y una desviación estándar de \$75. Suponiendo que las cantidades de todas las cuentas vencidas presentan una distribución normal, encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para μ.

5.6.3 Una muestra de 25 niños de diez años de edad proporcionó un peso medio y una desviación estándar de 36.5 y 5 kg, respectivamente. Suponiendo una población con distribución normal, encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para la media de la población a partir de la cual se obtuvo la muestra.

5.6.4 Una muestra de 16 niñas de diez años de edad proporcionó un peso medio de 35.8 kg y una desviación estándar de 6 kg, respectivamente. Suponiendo que existe normalidad, encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para μ.

5.6.5 Con referencia a los ejercicios 5.6.3 y 5.6.4, supóngase que las variancias de las poblaciones son iguales. Construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para la diferencia entre las medias de las dos poblaciones.

5.6.6 Las mediciones del diámetro transversal del corazón de hombres y mujeres adultos dieron los siguientes resultados:

Grupo	*Tamaño de la muestra*	$\bar{x}$ *(Centímetros)*	s *(Centímetros)*
Hombres	12	13.21	1.05
Mujeres	9	11.00	1.01

Suponiendo poblaciones con distribución normal y con variancias iguales, construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

5.6.7 Veinticuatro animales de laboratorio con deficiencia de vitamina D se dividieron en dos grupos iguales. El grupo 1 recibió un tratamiento consistente en una dieta que proporcionaba la vitamina D. El segundo grupo no fue tratado. Al término del período experimental, se hicieron las determinaciones del calcio en suero, obteniéndose los siguientes resultados:

Grupo tratado: $\bar{x} = 11.1$ mg/100 ml, $s = 1.5$
Grupo no tratado: $\bar{x} = 7.8$ mg/100 ml, $s = 2.0$

Suponiendo poblaciones con distribución normal y con variancias iguales, construya los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para la diferencia entre las medias de las poblaciones.

5.6.8 A dos grupos de niños se les hicieron pruebas de agudeza visual. El grupo 1 estaba formado por 11 niños que recibieron cuidados de la salud por parte de médicos privados. La calificación media para este grupo fue de 26 con una desviación estándar de 5. El segundo grupo, que incluía 14 niños que recibieron cuidados de la salud por parte del departamento de salud pública, tuvo una calificación promedio de 21 con una desviación estándar de 6. Suponiendo poblaciones con distribución normal y con variancias iguales, encuentre los intervalos de confianza del 90, 95 y 99 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

5.6.9 La duración promedio de internación de una muestra de 20 pacientes dados de alta de un hospital general fue de siete días con una desviación estándar de dos días. Una muestra de 24 pacientes dados de alta de un hospital de enfermedades crónicas tuvo una duración promedio de internación de 36 días con una desviación estándar de 10 días. Suponiendo poblaciones con distribución normal y con variancias distintas, encuentre el intervalo de confianza del 95 por ciento para la diferencia entre las medias de ambas poblaciones.

5.7 DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA PARA ESTIMAR LAS MEDIAS

La pregunta de qué tan grande debe tomarse una muestra surge inmediatamente en el planteamiento de cualquier investigación o experimento. Esta es una importante pregunta y no debe tratarse con ligereza. Tomar una muestra más grande de lo necesario para lograr los resultados deseados es un desperdicio de los recursos, mientras que muestras pequeñas con frecuencia dan resultados sin uso práctico. Considérese entonces cómo puede procederse para determinar el tamaño de la muestra que se requiere en una determinada situación. En esta sección se da un método para determinar el tamaño de la muestra requerido para estimar la media de una población, y en la siguiente sección se aplicará este método al caso de la determinación del tamaño de la muestra cuando el parámetro que va a estimarse es la proporción de una población. Mediante extensiones directas de estos métodos, puede determinarse el tamaño de las muestras requerido para situaciones más complicadas.

Los objetivos de la estimación por intervalos son obtener intervalos estrechos con alta confiabilidad. Si se observan los componentes de un intervalo de confianza, se ve que la amplitud del intervalo está determinado por la magnitud de la cantidad.

(Coeficiente de confiabilidad) × (error estándar)

ya que la amplitud total del intervalo es el doble de esta cantidad. Para un determinado error estándar, el aumento de confiabilidad significa un coeficiente de confiabilidad mayor. Sin embargo, un coeficiente de confiabilidad mayor, para un error estándar fijo, produce un intervalo más amplio.

Por otra parte, si se fija el coeficiente de confiabilidad, la única forma de reducir la amplitud del intervalo es reducir el error estándar. Dado que el error estándar es igual a $\sigma/\sqrt{n}$ y como σ es una constante, la única forma de obtener un error estándar menor es tomar una muestra grande. ¿Qué tan grande debe ser la muestra?. Esto depende del tamaño de σ, la desviación estándar de la población del grado deseado de confiabilidad y la amplitud del intervalo deseado.

Supóngase que se desea un intervalo que se extienda d unidades hacia uno u otro lado del estimador. Puede escribirse.

$$d = (\text{coeficiente de confiabilidad}) \times (\text{error estándar}) \qquad (5.7.1)$$

Si el muestreo va a ser con reemplazo a partir de una población infinita o a partir de una población que sea lo suficientemente grande como para poder ignorar la corrección por población finita, la ecuación 5.7.1 queda como

$$d = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.2)$$

la cual, cuando se resuelve para n, da

$$n = \frac{z^2\sigma^2}{d^2} \qquad (5.7.3)$$

Cuando el muestreo se realiza sin reemplazo a partir de una población finita, se requiere la corrección por población finita y la ecuación 5.7.1 queda como

$$d = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (5.7.4)$$

La cual, cuando se resuelve para n, da

$$n = \frac{Nz^2\sigma^2}{d^2(N-1) + z^2\sigma^2} \tag{5.7.5}$$

En caso de que pueda ignorarse la corrección por población finita, la ecuación 5.7.5 se reduce a la ecuación 5.7.3.

Las fórmulas para el tamaño de la muestra requieren que se conozca σ^2 pero, como ya se ha señalado, es una regla que se desconozca la variancia de la población. Como resultado, tiene que estimarse σ^2. Las fuentes de estimación de σ^2 que se utilizan con más frecuencia son las siguientes.

1. Puede extraerse una muestra *piloto* o preeliminar de la población y utilizarse la variancia calculada a partir de esta muestra como una estimación de σ^2. Las observaciones utilizadas en la muestra piloto pueden contarse como parte de la muestra final, de modo que n (el tamaño calculado de la muestra) $- n_1$ (el tamaño de la muestra piloto) $= n_2$ (el número de observaciones necesarias para satisfacer el requerimiento total del tamaño de la muestra).
2. Puede contarse con estimaciones de σ^2 obtenidas de estudios previos o similares.
3. Si se cree que la población de la cual va a extraerse la muestra posee una distribución aproximadamente normal, puede utilizarse el hecho de que el recorrido es aproximadamente igual a 6 desviaciones estándar y calcular $\sigma \approx R/6$. Este método requiere de cierto conocimiento de los valores mínimo y máximo de la variable en la población.

Ejemplo 5.7.1

Un nutriólogo del departamento de salud pública, al conducir una investigación entre una población de muchachas adolescentes con el fin de determinar su ingestión diaria promedio de proteínas, está buscando el consejo de un bioestadístico con respecto al tamaño de la muestra que debe tomar.

¿ Qué procedimiento sigue el bioestadístico para ayudar al nutriólogo?. Antes de que el estadístico pueda ayudar al nutriólogo, éste debe proporcionar tres detalles de información: la amplitud deseada del intervalo de confianza, el nivel de confianza deseado y la magnitud de la variancia de la población.

Supóngase que al nutriólogo le gustaría un intervalo de aproximadamente 10 unidades de amplitud, es decir, le gustaría que su estimación estuviera dentro de cinco unidades aproximadamente respecto del valor real en cualquier dirección. Supóngase también que se decide por un coeficiente de confianza de .95 y que, con base en su experiencia el nutriólogo siente que la desviación estándar de la población es quizá de aproximadamente 20 gramos. El estadístico tiene ahora la información necesaria para calcular el tamaño de la muestra: $z = 1.96$, $\sigma = 20$ y $d = 5$. Supóngase que la población de interés es grande, de modo que el estadístico puede ignorar la corrección por población finita y utilizar la ecuación 5.7.3. Haciendo las sustituciones apropiadas, se encuentra que el valor de n es de

$$n = \frac{(1.96)^2(20)^2}{(5)^2}$$

$$= 61.47$$

Se recomendó que el nutriólogo tomara una muestra de tamaño 62. Al calcular el tamaño de una muestra a partir de las ecuaciones 5.7.3 ó 5.7.5, se redondea al número entero mayor siguiente si los cálculos dan un número que no sea un entero.

Ejercicios

5.7.1 El administrador de un hospital desea estimar el peso de los bebés nacidos en su hospital. ¿Cuán grande debe tomarse una muestra de los registros de nacimientos si el administrador desea un intervalo de confianza del 99 por ciento que tenga 500 g de amplitud? Supóngase que resulta razonable estimar a σ como 500 g ¿Qué tamaño de muestra se requiere si se baja el coeficiente de confianza hasta .95?.

5.7.2 El director de la sección de control de la rabia del departamento de salud pública de una ciudad desea obtener una muestra de los registros de dicho departamento acerca de las mordidas de perro reportadas durante el año anterior, para estimar la edad media de las personas mordidas. Desea un intervalo de confianza del 95 por ciento, está conforme con que $d = 2.5$ y con base en estudios anteriores estima que la desviación estándar de la población es de casi 15 años. ¿Cuán grande debe tomarse la muestra?.

5.7.3 A un médico le gustaría saber el valor medio de glucosa en sangre (mg/100 ml) de pacientes en ayunas tratados en una clínica para diabéticos durante los pasados 10 años. Determine el número de registros que el médico debe de examinar para obtener un intervalo de confianza del 90 por ciento para μ si la amplitud deseada del intervalo es de 6 unidades y una muestra piloto da una variancia de 60.

5.8 DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA PARA ESTIMAR PROPORCIONES

El método de determinación del tamaño de la muestra, cuando va a estimarse la proporción de una población, es esencialmente el mismo que se describió con anterioridad para estimar la media de una población. Se utiliza el hecho de que la mitad del intervalo deseado, d, puede hacerse igual al producto del coeficiente de confiabilidad por el error estándar.

Suponiendo muestreo aleatorio y condiciones que garanticen la normalidad aproximada de la distribución de $\hat{p}$, se llega a la siguiente fórmula para n, cuando el muestreo es con reemplazo, cuando el muestreo se realiza a partir de una población infinita o cuando la población muestreada es lo bastante grande como para hacer innecesario el uso de la corrección por población finita:

$$n = \frac{z^2 pq}{d^2} \tag{5.8.1}$$

donde $q = 1 - p$.

Cuando la corrección por población finita no puede pasarse por alto, la fórmula apropiada para n es

$$n = \frac{Nz^2 pq}{d^2(N-1) + z^2 pq} \tag{5.8.2}$$

Cuando N es grande en comparación con n (es decir, $n/N \leqslant .05$), puede pasarse por alto la corrección por población finita y la ecuación 5.8.2 se reduce a la ecuación 5.8.1.

Como puede observarse, ambas fórmulas requieren que se conozca p, la proporción en la población que posee la característica de interés. Obviamente, dado que este es el parámetro que se está tratando de estimar, será desconocido. Una solución a este problema es tomar una muestra piloto y calcular una estimación para utilizarse en lugar de p en la fórmula para n. Algunas veces, el investigador tendrá alguna noción de un límite superior para p que pueda utilizarse en la fórmula. Por ejemplo, si se desea estimar la proporción de alguna población que tenga una cierta condición, es posible que se crea que la proporción verdadera no puede ser mayor, por decir algo, que .30. Se sustituye entonces p por .30 en la fórmula para n. Si es imposible llegar a una mejor estimación, puede hacerse que p sea igual a .5 y resolver para n. Dado que $p = .5$ en la fórmula es el que da el máximo valor de n, este procedimiento dará una muestra lo suficientemente grande para la confiabilidad y la amplitud del intervalo deseados. Sin embargo, puede ser más grande de lo necesario y resulta en que se toma una muestra más costosa que si se dispusiera de una mejor estimación de p. Este procedimiento debe utilizarse sólo si se es incapaz de llegar a una mejor estimación de p.

Ejemplo 5.8.1

Se está planeando una encuesta con el fin de determinar qué proporción de familias en cierta área son médicamente indigentes. Se cree que la proporción no puede ser mayor que .35. Se desea un intervalo de confianza del 95 por ciento con $d = .05$. ¿Qué tamaño de muestra de familias debe seleccionarse?.

Si puede ignorarse la corrección por población finita, se tiene que

$$n = \frac{(1.96)^2(.35)(.65)}{(.05)^2} = 349.6$$

El tamaño de muestra necesario es entonces de 350.

Ejercicios

5.8.1 Un epidemiólogo desea saber qué proporción de adultos que viven en una área metropolitana grande tienen el subtipo ay del virus B de la hepatitis. Determine el tamaño de muestra que se requeriría para estimar la proporción verdadera cercana a un .03 con un intervalo de confianza del 95 por ciento. En una área metropolitana similar, se reportó que la proporción de adultos con la característica de interés fue de .20. Si no se contara con los datos de otra área metropolitana y no se obtuviera una muestra piloto, ¿qué tamaño de la muestra se requeriría?

5.8.2 Se planeó una encuesta para determinar qué proporción de los estudiantes de secundaria de un sistema escolar metropolitano han fumado regularmente mariguana. Si no se cuenta con una estimación de p de estudios anteriores, no puede extraerse una muestra piloto, se desea un coeficiente de confianza de .95 y debe utilizarse el valor de $d = .04$, determine el tamaño de muestra apropiado. ¿Qué tamaño de muestra se requeriría si se desea una confianza del 99 por ciento?.

5.8.3 El administrador de un hospital desea saber qué proporción de los pacientes dados de alta están inconformes con los cuidados recibidos durante su hospitalización. ¿Cuán grande debe ser la muestra si se considera que $d = .05$, el coeficiente de confianza es de .95 y no se dispone de alguna otra información?. ¿Cuán grande debe ser la muestra si p tiene un valor de aproximadamente .25?.

5.9 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA VARIANCIA DE UNA POBLACIÓN CON DISTRIBUCIÓN NORMAL

Estimación puntual de la variancia de la población. En las secciones anteriores se ha sugerido que, cuando se desconoce la variancia de una población, puede utilizarse la variancia de la muestra como un estimador. Es posible que el lector se pregunte acerca de la calidad de este estimador. Se ha discutido sólo un criterio de bondad, el de ser insesgado, de modo que se verá si la variancia muestral es un estimador insesgado de la variancia de la población. Para ser insesgado, el valor promedio de la variancia de la muestra sobre todas las muestras posibles debe ser igual a la variancia de la población. Es decir, debe cumplirse la expresión $E(s^2) = \sigma^2$. A fin de ver si esta condición se cumple para una situación particular, considérese el ejemplo dado en la sección 4.4 para construir una distribución muestral. En la tabla 4.4.1, se tienen todas las muestras posibles de tamaño 2 de la población que consta de los valores 6, 8, 10, 12 y 14. Se recordará que se calcularon dos medidas de dispersión para esta población como sigue:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = 8 \qquad \text{y} \qquad S^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N - 1} = 10$$

Si se calcula la variancia muestral, $s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2/(n - 1)$ para cada una de las muestras posibles mostradas en la tabla 4.4.1, se obtienen las variancias muestrales que se dan en la tabla 5.9.1.

Tabla 5.9.1 Variancias calculadas a partir de las muestras que aparecen en la tabla 4.4.1

		Segunda extracción				
		6	*8*	*10*	*12*	*14*
Primera extracción	6	0	2	8	18	32
	8	2	0	2	8	18
	10	8	2	0	2	8
	12	18	8	2	0	2
	14	32	18	8	2	0

Si el muestreo se realiza con reemplazo, el valor esperado de s^2 se obtiene tomando la media de todas las variancias de las muestras dadas en la tabla 5.9.1. Cuando se hace esto, se tiene que

$$E(s^2) = \frac{\sum s_i^2}{N^n} = \frac{0 + 2 + \cdots + 2 + 0}{25} = \frac{200}{25} = 8$$

y se observa, por ejemplo, que cuando el muestreo se realiza con reemplazo, $E(s^2) = \sigma^2$, donde $s^2 = \Sigma(x_i - \overline{x})^2/(n-1)$ y $\sigma^2 = \Sigma(x_i - \mu)^2/N$.

Si se considera el caso donde el muestreo se realiza sin reemplazo, el valor esperado de s^2 se obtiene tomando la media de todas las variancias por encima (o por debajo) de las diagonales. Es decir,

$$E(s^2) = \frac{\sum s_i^2}{\binom{N}{n}} = \frac{2 + 8 + \cdots + 2}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

lo cual, como puede observarse, no es igual a σ^2, sino igual a

$$S^2 = \Sigma(x_i - \mu)^2/(N-1).$$

Estos resultados son ejemplos de principios generales, ya que puede demostrarse que, en general,

$E(s^2) = \sigma^2$, *cuando el muestreo se realiza con reemplazo*,
$E(s^2) = S^2$, *cuando el muestreo se realiza sin reemplazo*.

Cuando N es grande, $N - 1$ y N serán aproximadamente iguales y, en consecuencia, σ^2 y S^2 serán aproximadamente iguales.

Estos resultados justifican el uso de $s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2/(n - 1)$ cuando se calcula la variancia muestral. De paso, nótese que aun cuando s^2 es un estimador insesgado de σ^2, s no es un estimador insesgado de σ. Sin embargo, el sesgo disminuye rápidamente a medida que aumenta n. Quienes estén interesados en profundizar más en este punto pueden consultar los artículos escritos por Cureton[18] y Gurland y Tripathi.[19]

Estimación por intervalos de la variancia de una población. Disponiendo de una estimación puntual, resulta lógico inquirir acerca de la construcción de un intervalo de confianza para la variancia de una población.

El que se tenga éxito en construir un intervalo de confianza para σ^2 dependerá de la habilidad para encontrar una distribución muestral apropiada.

En general, los intervalos de confianza para σ^2 se basan en la distribución muestral de $(n - 1)s^2/\sigma^2$. Si se extraen muestras de tamaño n de una población con distribución normal, esta cantidad tiene una distribución conocida como *distribución ji – cuadrada* con $n - 1$ grados de libertad. Dado que se dirá más acerca de esta distribución en un capítulo posterior, aquí sólo se dirá que es la distribución que sigue la cantidad $(n - 1)s^2/\sigma^2$ y que es útil para encontrar los intervalos de confianza para σ^2 cuando se cumple la hipótesis de que la población muestra distribución normal.

En la figura 5.9.1 se muestran algunas distribuciones ji – cuadrada para varios valores de grados de libertad. En la tabla 1 se dan los percentiles de la distribución ji – cuadrada, designada por la letra griega χ^2. Los encabezados de las columnas dan los valores de χ^2, a la izquierda de los cuales está una proporción del área total bajo la curva igual al subíndice de χ^2. Las denominaciones de los renglones son los grados de libertad.

Para obtener un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para σ^2, se obtiene primero el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para $(n - 1)s^2/\sigma^2$. Para hacer esto, se seleccionan los valores de χ^2 de la tabla I, de tal modo que $\alpha/2$ quede a la izquierda del valor menor y $\alpha/2$ a la derecha del valor mayor. En otras palabras, los dos valores de χ^2 se seleccionan de manera que se divida α en partes iguales entre las dos colas de la distribución. Puede designarse a estos dos valores de χ^2 como $\chi^2\alpha/2$ y $\chi^2_{(1 - \alpha/2)}$, respectivamente. El in-

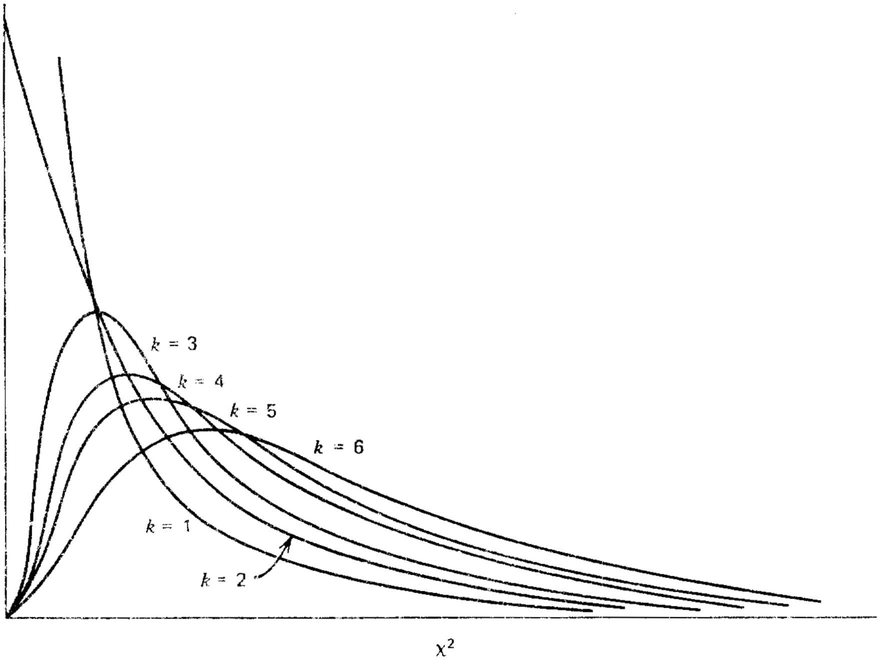


Figura 5.9.1 Distribuciones ji-cuadrada para varios valores de grados de libertad k (Fuente: Paul G. Hoel y Raymond J. Jessen, *Basic Statistics for Business and Economics*, Wiley, 1971. Utilizada con autorización).

tervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para $(n-1)s^2/\sigma^2$ está dado entonces por la expresión

$$\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(1-\alpha/2)}$$

Puede ahora utilizarse esta expresión en tal forma que se obtenga una expresión con σ^2 únicamente como el término de en medio. Primero, divídase cada término entre $(n-1)s^2$ para obtener

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{(n-1)s^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}{(n-1)s^2}$$

Si se toma el recíproco de esta expresión, se tiene que

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} > \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$$

Obsérvese que se cambió el sentido de las desigualdades cuando se tomaron los recíprocos. Si se invierte el orden de los términos, se tiene que

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \tag{5.9.1}$$

que es el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para σ^2. Si se toma la raíz cuadrada de cada término de la expresión 5.9.1, se tiene el siguiente intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para σ, la desviación estándar de la población:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} \tag{5.9.2}$$

Ejemplo 5.9.1

Utilizando como referencia el ejemplo 5.6.1, supóngase que la población de las determinaciones de amilasa en suero, a partir de la cual se extrajo la muestra de tamaño 15, tiene una distribución normal. Constrúyase el intervalo de confianza del 95 por ciento para σ^2.

La muestra proporcionó un valor de $s^2 = 1{,}225$. Los grados de libertad son $n - 1 = 14$. Los valores apropiados de χ^2 de la tabla I son $\chi^2_{(1-\alpha/2)} = 26.119$ y $\chi^2_{\alpha/2} = 5.629$. El intervalo de confianza del 95 por ciento para σ^2 es

$$\frac{(14)(1225)}{26.119} < \sigma^2 < \frac{14(1225)}{5.629}$$

$$656.6101 < \sigma^2 < 3046.7223$$

El intervalo de confianza del 95 por ciento para σ es

$$25.62 < \sigma < 55.20$$

Se dice que se tiene el 95 por ciento de confianza de que los parámetros que se están estimando están dentro de los límites especificados, ya que se sabe que, a la larga, al muestrear varias veces, el 95 por ciento de los intervalos construidos como se ilustra, incluirían a los parámetros respectivos.

Aunque este método de construir intervalos de confianza para σ^2 se utiliza ampliamente no carece de inconvenientes. Primero, la hipótesis de la normalidad de la población, de la cual se extrae la muestra, es crítica, y los resultados pueden ser engañosos si se ignora dicha hipótesis.

Otra dificultad con estos intervalos resulta del hecho de que el estimador no está en el centro del intervalo de confianza, como es el caso con el intervalo de confianza para μ. Esto se debe a que la distribución ji-cuadrada, a diferencia de la normal, no es simétrica. La consecuencia práctica de esto es que el método para la construcción de los intervalos de confianza para σ^2, que se acaba de describir, no conduce a los intervalos de confianza más cortos posibles. Tate y Klett[20] dan tablas que pueden utilizarse para vencer esta dificultad.

Ejercicios

5.9.1 A cada uno de los miembros de una muestra de 51 estudiantes de enfermería se le hizo una prueba estandarizada para medir su nivel de responsabilidad. Se obtuvo un valor de $s^2 = 12$. Construya los intervalos de confianza del 95 por ciento para σ^2 y σ.

5.9.2 El recuento de leucocitos de una muestra de 10 hombres adultos con algún tipo de leucemia dio una variancia de 25,000,000. Construya los intervalos de confianza del 95 por ciento para σ^2 y σ.

5.9.3 Se hicieron determinaciones de la capacidad vital forzada en 20 hombres adultos sanos. La variancia de la muestra fue de 1,000,000. Construya los intervalos de confianza del 90 por ciento para σ^2 y σ.

5.9.4 En un estudio de los tiempos de conducción del miocardio, se obtuvieron los tiempos de conducción en una muestra de 30 pacientes con enfermedad de la arteria coronaria. Se encontró que la variancia de la muestra era de 1.03. Construya los intervalos de confianza del 99 por ciento para σ^2 y σ.

5.9.5 Una muestra de 25 hombres física y mentalmente sanos participó en un experimento sobre el sueño en el cual se registró el porcentaje del tiempo total transcurrido durante el sueño de cada uno de los participantes en cierta etapa del mismo. La variancia calculada a partir de los datos de la muestra fue de 2.25. Construya los intervalos de confianza del 95 por ciento para σ^2 y σ.

5.9.6 Se hicieron determinaciones de hemoglobina en 16 animales expuestos a un compuesto químico nocivo. Se registraron los siguientes valores: 15.6, 14.8, 14.4, 16.6, 13.8, 14.0, 17.3, 17.4, 18.6, 16.2, 14.7, 15.7, 16.4, 13.9, 14.8, 17.5. Construya los intervalos de confianza del 95 por ciento para σ^2 y σ.

5.10 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA RAZÓN DE LAS VARIANCIAS DE DOS POBLACIONES CON DISTRIBUCIÓN NORMAL

Con frecuencia se desea comparar dos variancias, y una manera de hacerlo es formar su razón, σ_1^2/σ_2^2. Si dos variancias son iguales, su razón será igual a 1. Por lo general, no se conocerán las variancias de las poblaciones de interés y, en consecuencia, toda comparación que tenga que hacerse tendrá que basarse en las variancias de las muestras. Para ser específicos, es posible que se desee estimar la razón de las variancias de dos poblaciones. Una vez más, dado que esta es una forma de inferencia, debe confiarse en alguna distribución muestral, en esta ocasión, se utiliza la distribución de $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ siempre que se satisfagan ciertas suposiciones. Las suposiciones son: que se calculen s_1^2 y s_2^2 a partir de muestras independientes de tamaños n_1 y n_2, respectivamente, extraídas de dos poblaciones con distribución normal.

Si se satisfacen las suposiciones, $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ sigue una distribución conocida como *distribución F*. Un estudio más completo de esta distribución se hará en un capítulo posterior, pero nótese que esta distribución depende de dos valores de grados de libertad, uno que corresponde al valor $n_1 - 1$ utilizado al calcular s_1^2 y el otro que corresponde al valor $n_2 - 1$ utilizado al calcular s_2^2. Por lo común, éstos se conocen como *grados de libertad del numerador y grados de libertad del denominador*. La figura 5.10.1 muestra algunas distribuciones F para varias combinaciones de los grados de libertad del numerador y del denominador. La tabla J contiene, para combinaciones específicas de grados de libertad y valores de α, los valores de F a la derecha de los cuales se tiene $\alpha/2$ del área bajo la curva de F.

Para encontrar el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para σ_1^2/σ_2^2, se empezará con la expresión

$$F_{\alpha/2} < \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} < F_{(1-\alpha/2)}$$

donde $F\alpha/2$ y $F_{(1-\alpha/2)}$son los valores de la tabla F a la izquierda y a la derecha de los cuales, respectivamente, está $\alpha/2$ del área bajo la

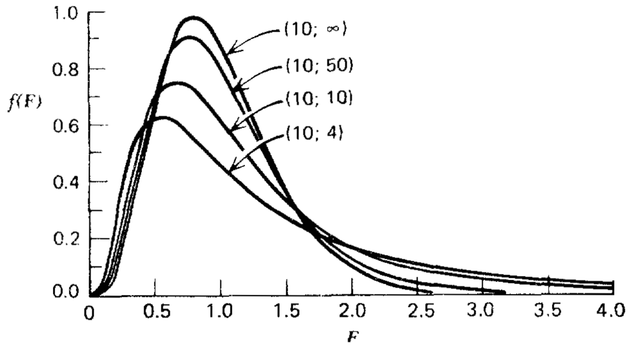


Figura 5.10.1 Distribución F para varios grados de libertad. *(De Documenta Geigy, Scientific Tables* 7a. edición 1970. Por cortesía de Ciba-Geigy Limited, Basilea, Suiza).

curva. Puede volver a escribirse el término central de esta expresión, de modo que la expresión completa es

$$F_{\alpha/2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{(1-\alpha/2)}$$

Si se divide todo entre s_1^2/s_2^2, se tiene que

$$\frac{F_{\alpha/2}}{s_1^2/s_2^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < \frac{F_{(1-\alpha/2)}}{s_1^2/s_2^2}$$

Tomando los recíprocos de los tres términos, da

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}} > \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{(1-\alpha/2)}}$$

y si se invierte el orden, se tiene el siguiente intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para σ_1^2/σ_2^2 :

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{(1-\alpha/2)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}} \tag{5.10.1}$$

Ejemplo 5.10.1

Utilícese como referencia el ejemplo 5.6.2 y calcúlese el intervalo de confianza del 95 por ciento para σ_1^2/σ_2^2. Se tiene la siguiente información:

$$n_1 = 22, \qquad n_2 = 15$$
$$s_1^2 = 1600, \qquad s_2^2 = 1225$$
$$\text{grados de libertad del numerador} = 21$$
$$\text{grados de libertad del denominador} = 14$$
$$\alpha = .05$$
$$F_{.025} = .395 \qquad F_{.975} = 2.84$$

En este punto debe hacerse una laboriosa, pero inevitable, divagación y explicar cómo se obtuvieron los valores $F_{.975} = 2.84$ y $F_{.025} = .395$. Primero, se notará que en la tabla J no se tiene una columna encabezada por el número 21 para los grados de libertad del numerador. Se tomó el valor más próximo, 20. El valor de $F_{.975}$ en la intersección de la columna encabezada por el número 20 y el renglón marcado por el número 14 es de 2.84. Si se tuviera una tabla más amplia de la distribución F, no habría problema para encontrar $F_{.025}$; simplemente se encontraría como se encontró $F_{.975}$. Se tomaría el valor encontrado en la intersección de la columna encabezada por el número 21 y el renglón marcado con el 14. Para incluir todo percentil posible de F, se tendría que hacer una tabla muy larga. Afortunadamente, sin embargo, existe una relación que permite calcular los valores menores de los percentiles a partir de la tabla limitada que aquí se da. Se procede como sigue.

Se intercambian los grados de libertad del numerador y del denominador y se localiza el valor apropiado de F. Para el presente problema, se localiza 2.53, que está en la intersección de la columna encabezada por el número 15 (el valor más próximo a los 14 grados de libertad propuestos) y el renglón marcado con el número 21. Se toma ahora el recíproco de este valor, $1/2.53 = .395$.

Ahora puede obtenerse el intervalo de confianza del 95 por ciento para σ_1^2/σ_2^2, sustituyendo los valores apropiados en la expresión 5.10.1:

$$\frac{1600/1225}{2.84} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1600/1225}{.395}$$

$$.460 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.31$$

A este intervalo se le dan las interpretaciones probabilísticas y prácticas apropiadas.

Los procedimientos alternativos para hacer inferencias sobre la igualdad de dos variancias cuando las poblaciones muestreadas no tienen distribución normal pueden encontrarse en el libro de Daniel.[21]

Ejercicios

5.10.1 Se registraron las concentraciones de oxitocina (picogramos por mililitros) en el líquido amniótico de dos muestras de mujeres. La primera muestra incluyó 25 mujeres parturientas con contracciones de parto. La segunda muestra incluyó 16 mujeres sin contracciones de parto. Las variancias de ambas muestras fueron $s_1^2 = 40{,}000$ y $s_2^2 = 10{,}000$. Construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para la razón de las variancias de las dos poblaciones.

5.10.2 Se hizo una estimación del contenido de nicotina en muestras de orina de dos grupos de hombres adultos. El grupo 1 consistió en 25 fumadores aparentemente sanos y el grupo 2 en 31 fumadores con cáncer de la vejiga urinaria. Las variancias de las muestras fueron $s_1^2 = 1.00$ y $s_2^2 = 3.5$. Construya el intervalo de confianza del 90 por ciento para σ_2^2/σ_1^2.

5.10.3 Se analizaron estadísticamente los valores del índice de latidos del corazón de dos muestras de pacientes que padecían infarto del miocardio. Las variancias de las muestras fueron de 12 y 10. Hubo 21 pacientes en cada muestra. Construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para la razón de las variancias de las dos poblaciones.

5.10.4 Treinta y dos adultos afásicos sometidos a terapia del habla fueron divididos en dos grupos iguales. El grupo 1 recibió el tratamiento 1 y el grupo 2 el tratamiento 2. El análisis estadístico de los resultados de la efectividad de los tratamientos dio las siguientes variancias: $s_1^2 = 8$ y $s_2^2 = 15$. Construya el intervalo de confianza del 90 por ciento para σ_2^2/σ_1^2.

5.10.5 Se calcularon las variancias de las muestras para los volúmenes de ventilación pulmonar (ml) de dos grupos de pacientes que sufren del padecimiento del tabique auricular. Los resultados y tamaños de las muestras fueron los siguientes:

$$n_1 = 31, s_1^2 = 35{,}000$$
$$n_2 = 41, s_2^2 = 20{,}000$$

Construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para la razón de las dos variancias.

5.10.6 Se registraron las respuestas de la glucosa a la glucosa oral para 11 pacientes con la enfermedad de Huntington (grupo 1) y 13 individuos de control (grupo 2). El análisis estadístico de los resultados proporcionó las siguientes variancias de las muestras: $s_1^2 = 105$ y $s_2^2 = 148$. Construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para la razón de las dos variancias.

5.11 RESUMEN

En este capítulo se estudia una de las principales áreas de la inferencia estadística: la estimación. Se estudian las estimaciones puntual y por intervalos. Se ilustraron los conceptos y métodos implícitos en la construcción de los intervalos de confianza de los siguientes parámetros: medias, la diferencia entre dos medias, proporciones, la diferencia entre dos proporciones, variancias y la razón de dos variancias.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. ¿Qué es la inferencia estadística?
2. ¿Por qué es la estimación un importante tipo de inferencia?.
3. ¿Qué es una estimación puntual?.
4. Explique el significado de la característica de ser insesgado
5. Defina lo siguiente:

   a) Coeficiente de confiabilidad
   b) Coeficiente de confianza
   c) Error estándar
   d) Estimador

6. Dé la fórmula general para un intervalo de confianza.
7. Enuncie las interpretaciones probabilística y práctica de un intervalo de confianza.
8. ¿Qué uso tiene el teorema del límite central en la estimación?.
9. Describa la distribución *t*.
10. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan el uso de la distribución *t* al estimar la media de una sola población?.

11. ¿Qué es la corrección por población finita?. ¿Cuándo puede pasarse por alto?.
12. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan el uso de la distribución t al estimar la diferencia entre las medias de dos poblaciones?.
13. Los análisis de los gases de la sangre arterial de una muestra de 15 hombres adultos físicamente activos dieron los siguientes valores de PaO_2 en reposo:

    75, 80, 80, 74, 84, 78, 89, 72, 83, 76, 75, 87, 78, 79, 88

    Calcule el intervalo de confianza del 95 por ciento para la media de la población.
14. En una muestra de 140 pacientes asmáticos, el 35 por ciento tuvo reacciones positivas de la piel al polvo de su casa. Construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para la proporción de la población.
15. Se llevó a cabo una encuesta sobre higiene industrial en un área metropolitana grande. De 70 plantas manufactureras de cierto tipo visitadas, 21 recibieron una mínima calificación en lo que se refiere a las medidas de seguridad. Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para la proporción de la población que muestra una mínima calificación.
16. Utilícese como referencia el problema anterior. ¿Cuán grande debe ser la muestra para estimar la proporción de la población con un intervalo de confianza del 95 por ciento?. (.30 es la mejor estimación disponible de p):

    a) Si puede pasarse por alto la corrección por población finita.
    b) Si no se pasa por alto la corrección por población finita y $N = 1{,}500$.

17. En una encuesta dental conducida por un grupo de salud dental, se les pidió a 500 adultos que dieran la razón de su última visita al dentista. De los 220 que tenían una educación inferior a la secundaria, 44 señalaron que lo habían hecho por razones preventivas. De los restantes 280, quienes tenían la educación secundaria o un nivel superior, 150 señalaron que lo habían hecho por la misma razón. Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para la diferencia entre las proporciones de las dos poblaciones.

18. Un grupo de investigadores del cáncer de mama reunió los siguientes datos en cuanto al tamaño de los tumores:

Tipo de tumor	n	$\overline{x}$	s
A	21	3.85 cm	1.95 cm
B	16	2.80 cm	1.70 cm

Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para la diferencia entre la media de las poblaciones.

19. Se encontró que cierto medicamento es efectivo en el tratamiento de las enfermedades pulmonares en 180 de los 200 casos tratados. Construya el intervalo de confianza del 90 por ciento para la proporción de la población.

20. Setenta pacientes con úlceras de estasis de la pierna fueron divididos al azar en dos grupos iguales. Cada grupo recibió un tratamiento distinto para el edema. Al término del experimento, se estimó la efectividad de los tratamientos en términos de la disminución del edema de la pierna, determinada por el desplazamiento del agua. Las medias y desviaciones estándar de los dos grupos fueron las siguientes:

Grupo (tratamiento)	$\overline{x}$	s
A	95 cc	25
B	125 cc	30

Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para la diferencia entre las medias de las poblaciones.

21. Los siguientes valores son las concentraciones de bilirrubina en suero de una muestra de 10 pacientes admitidos a un hospital para el tratamiento de la hepatitis.

20.5, 14.8, 21.3, 12.7, 15.2, 26.6, 23.4, 22.9, 15.7, 19.2

Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para la media de la población.

22. Se determinaron los niveles del pH de la saliva en dos muestras aleatorias independientes de niños de escuela primaria. Los niños de

la muestra A no tenían caries, mientras que los de la muestra B tenían una alta incidencia de esta afección. Los resultados fueron los siguientes:

A: 7.14, 7.11, 7.61, 7.98, 7.21, 7.16, 7.89, 7.24, 7.86, 7.47, 7.82, 7.37, 7.66, 7.62, 7.65

B: 7.36, 7.04, 7.19, 7.41, 7.10, 7.15, 7.36, 7.57, 7.64, 7.00, 7.25, 7.19

Construya un intervalo de confianza del 90 por ciento para la diferencia entre las medias de las poblaciones. Suponga que las varianzas de las poblaciones son iguales.

23. Se recetó un medicamento A a una muestra aleatoria de 12 pacientes que padecían de insomnio. Una muestra aleatoria independiente de 16 pacientes con el mismo problema recibió un medicamento B. Los números de horas de sueño experimentadas durante la segunda noche después de que se empezó el tratamiento fueron las siguientes:

A: 3.5, 5.7, 3.4, 6.9, 17.8, 3.8, 3.0, 6.4, 6.8, 3.6, 6.9, 5.7

B: 4.5, 11.7, 10.8, 4.5, 6.3, 3.8, 6.2, 6.6, 7.1, 6.4, 4.5, 5.1, 3.2, 4.7, 4.5, 3.0

Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para la diferencia entre las medias de las poblaciones. Suponga que las varianzas de ambas poblaciones son iguales.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. John E. Freund y Ronald E. Walpole, *Mathematical Statistics*, tercera edición, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
2. Alexander M. Mood, Franklin A. Graybill y Duane C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics*, tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1974.
3. Taro Yamane, *Statistics: An Introductory Analysis*, segunda edición, Harper & Row, Nueva York, 1967.
4. W. S. Gosset, ("Student"), "The Probable Error of a Mean," *Biometrika, 6* (1908), 1 – 25.
5. W. V. Behrens, "Ein Beitrag zu Fehlerberechnung bei wenige Beobachtungen," *Landwirtsschaftliche Jahrbücher, 68* (1929), 807 – 837.

6. R. A. Fisher, "The Comparison of Samples with Possibly Unequal Variances," *Annals of Eugenics, 9* (1939), 174 – 180.
7. _____, "The Asymptotic Approach to Behrens' Integral with Further Tables for the *d* Test of Significance," *Annals of Eugenics, 11* (1941), 141 – 172.
8. J. Neyman, "Fiducial Argument and the Theory of Confidence Intervals," *Biometrika, 32* (1941), 128 – 150.
9. H. Scheffé, "On Solutions of the Behrens-Fisher Problem Based on the *t*-Distribution," *The Annals of Mathematical Statistics, 14* (1943), 35 – 44.
10. _____, "A Note on the Behrens-Fisher Problem, " *The Annals of Mathematical Statistics, 15* (1944), 430 – 432.
11. B. L. Welch, "The Significance of the Difference Between Two Means When the Population Variances Are Unequal," *Biometrika, 29* (1937), 350 – 361.
12. ____, "The Generalization of 'Student's' Problem When Several Different Population Variances Are Involved," *Biometrika, 34* (1947), 28 – 35.
13. Alice A. Aspin, "Tables for Use in Comparisons Whose Accuracy Involves Two Variances *s*, Separately Estimated," *Biometrika, 36* (1949), 290 – 296.
14. W. H. Trickett, B. L. Welch y G. S. James, "Further Critical Values for the Two-means Problem," *Biometrika, 43* (1956), 203 – 205.
15. William G. Cochran, "Approximate Significance Levels of the Behrens Fisher Test," *Biometrics, 20* (1964), 191 – 195.
16. George W. Snedecor y William G. Cochran, *Statistical Methods,* sexta edición, The Iowa State University Press, Ames, 1967.
17. Wilfred J. Dixon y Frank J. Massey, Jr., *Introduction to Statistical Analysis*, tercera edición. McGraw-Hill, Nueva York, 1969.
18. Edward E. Cureton, "Unbiased Estimation of the Standard Deviation," *The American Statistician, 22* (febrero de 1968) 22.
19. John Gurland y Ran C. Tripathi, "A Simple Approximation for Unbiased Estimation of the Standard Deviation," *The American Statistician, 25* (octubre de 1971), 30 – 32.
20. R. F. Tate y G. W. Klett, "Optimal Confidence Intervals for the Variance of a Normal Distribution," *Journal of the American Statistical Association, 54* (1959), 674 – 682.
21. Wayne W. Daniel, *Applied Nonparametric Statistics*, Houghton-Mifflin, Boston, 1978.

Otras referencias

1. H. A. Al-Bayyati, "A Rule of Thumb for Determining a Sample Size in Comparing Two Proportions," *Thechnometrics, 13* (1971), 675 – 677.
2. F. F. Ractliffe, "The Effect on the *t* Distribution of Nonnormality in the Sampled Population," *Applied Statistics, 17* (1968), 42 – 48.

6

Pruebas de hipótesis

6.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se estudió un tipo de inferencia estadística, la estimación. El otro tipo, las pruebas de hipótesis, es el tema del presente capítulo. Como ocurre con la estimación, *el propósito de las pruebas de hipótesis es ayudar al médico, investigador o administrador a tomar una decisión en torno a una población, examinando una muestra de ella*. La estimación y las pruebas de hipótesis no son tan distintas como puede parecer por el hecho de que en la mayoría de los libros de texto se dedica un capítulo separado a cada una. Como se explicará posteriormente, pueden utilizarse intervalos de confianza para llegar a las mismas conclusiones que se alcanzan utilizando los procedimientos de pruebas de hipótesis que se estudian en este capítulo.

En esta sección se presentan algunos de los conceptos básicos esenciales para comprender las pruebas de hipótesis. Los detalles específicos de pruebas particulares se darán en las secciones siguientes.

Una *hipótesis* se define simplemente como una *afirmación acerca de una o más poblaciones*. En general, la hipótesis se refiere a los parámetros de las poblaciones acerca de las cuales se hace la afirmación. El administrador de un hospital puede suponer que la duración promedio de internación de los pacientes admitidos al hospital es de cinco días; una enfermera de salud pública puede suponer que un determinado programa educativo hará que mejore la comunicación entre enfermera y paciente; un médico puede suponer que cierto medicamento será eficaz en el 90 por ciento de los casos en los que se utilice. Por medio de las pruebas de hipótesis, se determina si tales proposiciones son compatibles o no con los datos de que se dispone.

Los investigadores tratan con dos tipos de hipótesis: las *hipótesis de investigación* y las *hipótesis estadísticas*. La hipótesis de investigación es la conjetura o suposición que motiva la investigación. Puede ser el resultado de años de observación por parte del investigador. Una enfermera de salud pública, por ejemplo, puede haber notado que ciertos clientes respondieron más rápidamente a un tipo particular de programa de educación sanitaria. Un médico recordará numerosos casos en los cuales ciertas combinaciones de medidas terapéuticas fueron más efectivas que cualquiera de ellas por separado. Los proyectos de investigación suelen resultar del deseo de tales profesionales de la salud de determinar si sus teorías o sospechas pueden ser apoyadas o no cuando se someten a los rigores de la investigación científica.

Las hipótesis de investigación conducen directamente a hipótesis estadísticas. Las hipótesis estadísticas se establecen en tal forma que puedan ser evaluadas a través de técnicas estadísticas apropiadas. En este texto las hipótesis que se estudiarán son de este tipo. Se supondrá que las hipótesis de investigación para los ejemplos y ejercicios ya se han considerado.

Por conveniencia, las pruebas de hipótesis se presentarán como un procedimiento de nueve pasos. Nada hay de sagrado o mágico respecto a este formato particular, aunque de hecho descompone el proceso en una sucesión lógica de acciones y decisiones.

1. *Datos.* Debe comprenderse la naturaleza de los datos que forman la base de los procedimientos de prueba, ya que esto determina la prueba particular que debe utilizarse. Se debe determinar, por ejemplo, si los datos constan de conteos o medidas.
2. *Suposiciones.* Como se aprendió en el capítulo sobre estimación, suposiciones distintas condujeron a modificaciones de los intervalos de confianza. Lo mismo ocurre en las pruebas de hipótesis: un procedimiento general se modifica, dependiendo de las suposiciones. De hecho, las mismas suposiciones que tienen importancia en la estimación son también importantes en las pruebas de hipóte-

sis. Se ha visto que éstas incluyen, entre otras, suposiciones acerca de la normalidad de la distribución de la población, igualdad de las variancias e independencia de las muestras.

3. *Hipótesis.* En las pruebas de hipótesis se trabaja con dos hipótesis estadísticas que deben enunciarse explícitamente. La primera es la *hipótesis que debe probarse*, por lo común conocida como *hipótesis nula*, y que se designa por el símbolo H_0. Esta hipótesis a veces se conoce como *hipótesis de no diferencia*, ya que es una proposición de conformidad con (o no diferencia respecto de) condiciones verdaderas en la población de interés. En general, la hipótesis nula se establece con el propósito expreso de ser rechazada. En consecuencia, el complemento de la conclusión que el investigador desea alcanzar se convierte en el enunciado de la hipótesis nula. En el proceso de prueba, la hipótesis nula se rechaza, o bien, no se rechaza. Si la hipótesis nula no se rechaza, se dirá que los datos sobre los cuales se basa la prueba no proporcionan evidencia suficiente que provoque el rechazo. Si el procedimiento de prueba conduce al rechazo, se concluirá que los datos disponibles no son compatibles con la hipótesis nula, pero son apoyo de alguna otra hipótesis. Esta otra hipótesis se conoce como *hipótesis alternativa* y puede designarse mediante el símbolo H_A.

Debe señalarse que, en general, ni las pruebas de hipótesis ni la inferencia estadística conducen a la prueba de una hipótesis, sino que simplemente indican si ésta es apoyada o no por los datos disponibles. Por lo tanto, cuando no es posible rechazar una hipótesis nula, no se dice que es verdadera, sino que puede ser verdadera. Cuando se habla de aceptar una hipótesis nula, se tiene presente esta limitación y no se desea comunicar la idea de que la aceptación implica la demostración.

4. *Estadística de prueba.* La estadística de prueba es alguna estadística que puede calcularse a partir de los datos de la muestra. Como regla, existen muchos valores posibles que puede tener la estadística de prueba, dependiendo del valor particular observado de la muestra particular extraída. Como se verá, la estadística de prueba sirve como un productor de decisiones, ya que la decisión de rechazar o no la hipótesis nula depende de la magnitud de la estadística de prueba. Un ejemplo de estadística de prueba es la cantidad

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

donde μ_0 es un valor supuesto de la media de una población. Esta estadística de prueba está relacionada con la estadística

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

La siguiente es una fórmula general para una estadística de prueba que se aplicará en muchas de las pruebas de hipótesis que se estudian en este libro:

$$\text{estadística de prueba} = \frac{\text{estadística relevante} - \text{parámetro supuesto}}{\text{error estándar de la estadística relevante}}$$

En el presente ejemplo, $\bar{x}$ es la estadística relevante, μ_0 el parámetro supuesto y $\sigma/\sqrt{n}$ el error estándar de $\bar{x}$, la estadística relevante.

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Se ha señalado que la clave para la inferencia estadística es la distribución muestral. Esto vuelve a recordarse cuando se hace necesario especificar la distribución de probabilidad de la estadística de prueba. Por ejemplo, la distribución de la estadística de prueba,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

sigue la distribución normal unitaria si la hipótesis nula es verdadera y se satisfacen las suposiciones.

6. *Regla de decisión.* Todos los valores posibles que la estadística de prueba puede tener son puntos sobre el eje horizontal de la gráfica de la distribución de tal estadística y se dividen en dos grupos; uno de los grupos constituye lo que se conoce como *región de rechazo* y el otro grupo forma la *región de aceptación*. Los valores de la estadística de prueba que comprenden la región de rechazo son aquellos que tienen la menor probabilidad de suceder si la hipótesis nula es verdadera, mientras que los valores que forman la región de aceptación son los que tienen mayor probabilidad de ocurrir si la hipótesis nula es verdadera. *La regla de decisión señala que se rechace la hipótesis nula si el valor de la estadística de*

prueba que se calcule a partir de la muestra es uno de los valores de la región de rechazo, y que no se rechace (o "acepte") la hipótesis nula si el valor calculado de la estadística de prueba es uno de los valores de la región de aceptación.

La decisión, por lo que respecta a qué valores van hacia la región de rechazo y cuáles a la región de aceptación, se toma en base al *nivel de significación* deseado, que se designa por α. El término nivel de significación refleja el hecho de que, algunas veces, las pruebas de hipótesis reciben el nombre de pruebas de significación y un valor calculado de la estadística de prueba que cae en la región de rechazo se dice que es *significativo.* El nivel de significación, α, especifica el área bajo la curva de la distribución de la estadística de prueba que está por arriba de los valores sobre el eje horizontal que constituyen la región de rechazo. Se ve entonces que α es una probabilidad y, de hecho, es la *probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera.* Dado que el rechazar una hipótesis nula verdadera sería un error, únicamente parece razonable que debe hacerse pequeña la probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera y, en efecto, esto es lo que se hace. Los valores de α que se encuentran con más frecuencia son .01, .05 y .10.

El error que se comete cuando se rechaza una hipótesis nula verdadera se conoce como *error del tipo I.* El *error del tipo II* se comete cuando se acepta una hipótesis nula falsa. La probabilidad de cometer un error del tipo II se designa por β.

Siempre que se rechaza una hipótesis nula se tiene el riesgo concomitante de cometer un error del tipo I, rechazar una hipótesis nula verdadera. Siempre que se "acepta" una hipótesis nula, existe el riesgo de aceptar una hipótesis nula falsa. Se hace pequeño α, pero en general no se ejerce control sobre β, aunque se sabe que en la mayoría de las situaciones prácticas es mayor que α.

Nunca se sabe si se ha cometido o no uno de estos errores cuando se rechaza o se deja de rechazar una hipótesis nula, ya que se desconoce el enunciado verdadero de los asuntos. Si el procedimiento de prueba conduce al rechazo de la hipótesis nula verdadera, puede ser un consuelo el hecho de que se ha hecho menor α y, por lo tanto, fue pequeña la probabilidad de cometer un error del tipo I. Si se "acepta" la hipótesis nula, no se sabe el riesgo concurrente de cometer un error del tipo II, ya que por lo común se desconoce β pero, como se ha señalado, se sabe que, en general, es mayor que α.

7. *Estadística de prueba calculada.* A partir de los datos contenidos en la muestra se calcula un valor de la estadística de prueba y se compara con las regiones de aceptación y de rechazo que ya se han especificado.
8. *Decisión estadística.* La decisión estadística consiste en el rechazo o no rechazo de la hipótesis nula. Se rechaza si el valor calculado de la estadística de prueba cae en la región de rechazo, y no se rechaza si el valor calculado de la estadística de prueba cae en la región de aceptación.
9. *Conclusión.* Si H_0 se rechaza, se concluye que H_A es verdadera. Si no se rechaza H_0, se concluye que H_0 *puede ser verdadera.*

Uno de los propósitos de las pruebas de hipótesis es ayudar a los administradores y clínicos a que tomen decisiones. En general, la decisión clínica o administrativa depende de la decisión estadística. Si se rechaza la hipótesis nula, la decisión clínica o administrativa se refleja por lo general, en el hecho de que la decisión es compatible con la hipótesis alternativa. En general, se cumple lo opuesto si no se rechaza la hipótesis nula. Sin embargo, la decisión administrativa o clínica puede tener otras formas, como una decisión de reunir más datos.

Sin embargo, debe enfatizarse en este punto que el resultado de la estadística de prueba sólo es una parte de la evidencia que influye sobre la decisión administrativa o clínica. La decisión estadística no debe interpretarse como definitiva, sino que debe considerarse junto con toda la demás información importante de que disponga el experimentador.

Con estos comentarios generales como base, se discutirán a continuación pruebas de hipótesis específicas.

6.2 PRUEBAS DE HIPÓTESIS: MEDIA DE UNA SOLA POBLACIÓN

En esta sección se estudia la prueba de una hipótesis en torno a la media de una población bajo tres condiciones distintas: 1) cuando el muestreo se realiza a partir de una población de valores con distribución normal y con variancia conocida, 2) cuando el muestreo se realiza a partir de una población con distribución normal y con variancia desconocida y 3) cuando el muestreo se realiza a partir de una población que no presenta distribución normal. Aunque la teoría para las condiciones 1 y 2 depende de poblaciones con distribución normal, es práctica común aplicar la teoría cuando las poblaciones pertinentes sólo están distribuidas en forma aproximadamente normal. Esto es satisfactorio mientras la desviación de la normalidad sea moderada.]

Muestreo a partir de poblaciones con distribución normal: variancias de las poblaciones conocidas.

Ejemplo 6.2.1

Varios investigadores están interesados en la concentración media de alguna enzima en cierta población. Supóngase que se está planteando la siguiente pregunta: ¿puede concluirse que la concentración media de la enzima en esta población es distinta de 25?

Con base en el conocimiento que se tiene sobre las pruebas de hipótesis, puede concluirse que la concentración media de la enzima es distinta de 25 si puede rechazarse la hipótesis nula de que la media es igual a 25. Utilícese la información del ejemplo 5.2.1 y el procedimiento de pruebas de hipótesis en nueve pasos dado en la sección anterior para ayudar a los investigadores a llegar a una decisión.

1. *Datos*. Los datos de que disponen los investigadores son las determinaciones de la enzima hechas en una muestra de 10 individuos de la población de interés. A partir de esta muestra, se ha calculado una media de $\bar{x} = 22$.
2. *Suposiciones*. Se supone que la muestra proviene de una población de concentraciones de la enzima con distribución normal y con una variancia conocida de $\sigma^2 = 45$.
3. *Hipótesis*. La hipótesis que debe probarse, o hipótesis nula, es que la concentración media de la enzima en la población es igual a 25. La hipótesis alternativa es que la concentración media de la enzima en la población no es igual a 25. Nótese que se está identificando la conclusión que los investigadores desean alcanzar con la hipótesis alternativa, de modo que si los datos permiten el rechazo de la hipótesis nula, su conclusión tendrá más peso, ya que la probabilidad acompañante de rechazar una hipótesis nula verdadera será pequeña. Se tendrá la seguridad de esto asignando un valor pequeño a α, la probabilidad de cometer un error del tipo I.

Puede presentarse la hipótesis pertinente en forma compacta de la manera siguiente:

$$H_0: \mu = 25$$
$$H_1: \mu \neq 25$$

4. *Estadística de prueba.* Dado que se está poniendo a prueba una hipótesis acerca de la media de una población, se supone que la población está distribuida normalmente y se conoce la variancia de la misma, la estadística de prueba es

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* En base al conocimiento que se tiene sobre las distribuciones muestrales y la distribución normal, se sabe que

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

presenta una distribución normal con una media de 0 y una variancia de 1 si H_0 es verdadera. Existen muchos valores posibles de la estadística de prueba que la situación presente puede generar, uno para cada muestra posible de tamaño 10 que se extraiga de la población. Dado que sólo se extrae una muestra, sólo se tiene uno de estos valores posibles sobre el cual basar una decisión.
6. *Regla de decisión.* La regla de decisión señala que se rechace H_0 si el valor calculado de la estadística de prueba cae en la región de rechazo y se acepte H_0 si cae en la región de aceptación. Deben especificarse ahora las regiones de aceptación y de rechazo. Puede empezarse preguntando qué magnitud de los valores de la estadística de prueba provocarán el rechazo de H_0. Si la hipótesis nula es falsa, puede ser porque la media verdadera es menor que 25, o bien, porque es mayor que 25. Por lo tanto, sean los valores de la estadística de prueba extremadamente pequeños o extremadamente grandes causarán el rechazo de la hipótesis nula. Se desea

que estos valores extremos constituyan la región de rechazo. ¿Qué tan extremo debe ser un valor posible de la estadística de prueba para formar parte de la región de rechazo? La respuesta depende del nivel de importancia que se elija, es decir, la magnitud de la probabilidad de cometer un error del tipo I. Supóngase que se desea que la probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera sea de $\alpha = .05$. Dado que la región de rechazo va a consistir de dos partes, los valores extremadamente pequeños y los valores extremadamente grandes de la estadística de prueba, parte de α tendrá que asociarse con los valores grandes y parte con los valores pequeños. Parece razonable que deba dividirse α en partes iguales y considerar a $\alpha/2 = .025$ asociado con los valores extremadamente pequeños y a $\alpha/2 = .025$ asociado con los valores extremadamente grandes.

¿Qué valor de la estadística de prueba es tan grande que, cuando la hipótesis nula es verdadera, la probabilidad de obtener un valor así de grande o mayor es de .025? En otras palabras, ¿cuál es el valor de z a la derecha del cual está .025 del área bajo la distribución normal unitaria? El valor de z a la derecha del cual está .025 del área es el mismo valor entre $-\infty$ y hasta el cual está .975 del área. Se busca en el cuerpo de la tabla F hasta que se encuentre .975 o su valor más próximo y se leen las anotaciones correspondientes en el margen para obtener el valor de z. En el presente ejemplo, el valor de z es de 1.96. Razonando de manera semejante se llegará a encontrar -1.96 como el valor de la estadística de prueba tan pequeño que, cuando la hipótesis nula es verdadera, la probabilidad de obtener un valor así

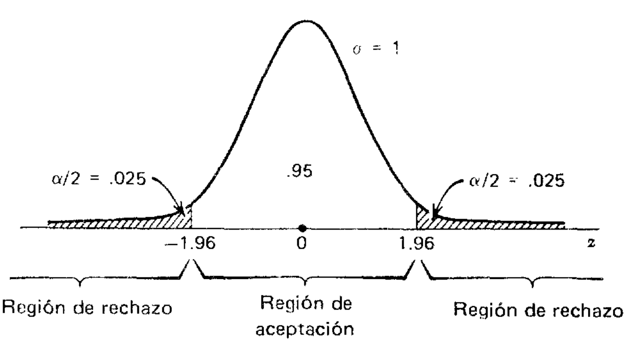


Figura 6.2.1 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.2.1.

de pequeño o menor es de .025. La región de rechazo consta entonces de todos los valores de la estadística de prueba iguales o mayores que 1.96 o menores que o iguales a − 1.96. La región de aceptación consta de todos los valores entre éstos. En la figura 6.2.1 se muestran las regiones de aceptación y de rechazo. En ocasiones, se da el nombre de *valores críticos* de la estadística de prueba a los valores de ésta que separan las regiones de aceptación y de rechazo, y a la región de rechazo se le conoce como *región crítica.*

La regla de decisión establece que se calcule un valor de la estadística de prueba a partir de los datos de la muestra y que se rechace H_0 si se obtiene un valor igual a o mayor que 1.96 o igual a o menor que − 1.96, y que se acepte H_0 si se obtiene cualquier otro valor. El valor de α y, en consecuencia, la regla de decisión, debe establecerse antes de reunir los datos. Esto evita que los resultados de la muestra influyan sobre la decisión que se va a tomar. Esta condición de objetividad es importantísima y debe conservarse en todas las pruebas.

7. *Estadística de prueba calculada.* De la muestra se calcula que

$$z = \frac{22 - 25}{\sqrt{45/10}} = \frac{-3}{2.1213} = -1.41$$

8. *Decisión estadística.* Ateniéndose a la regla de decisión, no se puede rechazar la hipótesis nula ya que − 1.41 no está en la región de rechazo. Puede decirse que el valor calculado de la estadística de prueba no es significativo en el nivel .05.
9. *Conclusión.* Se concluye que *μ puede ser* igual a 25, y se hace que las acciones administrativas o clínicas tomadas estén de acuerdo con esta conclusión.

valores p. En lugar de decir que un valor observado de la estadística de prueba es significativo o no, la mayoría de los autores que escriben en el lenguaje científico prefieren reportar la probabilidad exacta de obtener un valor como el extremo o más extremo que aquel observado si la hipótesis nula es verdadera. En el presente caso, dichos autores darían el valor calculado de la estadística de prueba junto con la afirmación de que $p = .1586$. Esta afirmación significa que la probabilidad de obtener un valor tan extremo como 1.41 en cualquier dirección, cuando la hipótesis nula es verdadera, es de .1586. El valor de .1586 se obtiene de la tabla F y es la probabilidad de observar un $z \geqslant 1.41$ o un $z \leqslant -1.41$ cuando la hipótesis nula es verdadera. Es decir, cuando H_0 es verdadera, la probabilidad de obtener un valor de z tan grande como o mayor que 1.41 es de .0793, y la probabilidad de observar un valor de z tan pequeño como o menor que -1.41 es de .0793. La probabilidad de que ocurra cualquiera de estos casos, cuando H_0 es verdadera, es igual a la suma de las dos probabilidades individuales, y en consecuencia, en el presente ejemplo, se dice que $p = .0793 + .0793 = .1586$. La cantidad p se conoce como el *valor p* de la prueba.

Definición

El valor p *para la prueba de una hipótesis es la probabilidad de obtener, cuando H_0 es verdadera, un valor de la estadística de prueba tan extremo como o más extremo que (en la dirección apropiada) el calculado en realidad.*

El valor p para una prueba puede definirse también como el valor más pequeño de α para el cual la hipótesis nula puede rechazarse.

El reporte de los valores p como parte de los resultados de una investigación proporciona más información al lector que afirmaciones tales como "la hipótesis nula se rechaza en el nivel .05 de significación" o "los resultados no fueron significativos en el nivel .05". El reporte del valor p asociado con una prueba le permite al lector saber con exactitud, qué tan raro o qué tan común es el valor calculado de la estadística de prueba dado que H_0 es verdadera. Pueden consultarse los libros de Gibbons y Pratt,[1] Daniel[2] y Bahn[3] para un estudio más detallado del tema de los valores p.

Prueba de H_0 por medio de un intervalo de confianza. Se señaló en un principio que pueden utilizarse intervalos de confianza para probar hipótesis. En el ejemplo 6.2.1 se utilizó un procedimiento de pruebas de hipótesis para probar $H_0: \mu = 25$ contra la alternativa, $H_A: \mu \neq 25$. No pudo rechazarse H_0 debido a que el valor calculado de la estadística de prueba cayó en la región de aceptación.

Véase ahora cómo podría haberse llegado a esta misma conclusión utilizando un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)$ por ciento. El intervalo de confianza del 95 por ciento para μ es

$$22 \pm 1.96\sqrt{45/10}$$
$$22 \pm 1.96(2.1213)$$
$$22 \pm 4.16$$
$$17.84, 26.16$$

Dado que este intervalo incluye a 25, se dice que 25 es un candidato para la media que se está estimando y, por lo tanto, μ puede ser igual a 25 y H_0 no se rechaza. Esta es la misma conclusión a la que se llegó por medio del procedimiento de pruebas de hipótesis.

Si el parámetro supuesto, 25, no se hubiera incluido en el intervalo de confianza del 95 por ciento, es decir, si el límite inferior del intervalo calculado hubiera sido mayor que 25 o si el límite superior hubiera sido menor que dicho valor, se habría dicho que H_0 se rechaza en el nivel .05 de significación. En general, *cuando se prueba una hipótesis nula por medio de un intervalo de confianza bilateral, se rechaza* H_0 *en el nivel* α *de significación si el parámetro supuesto no está contenido dentro del intervalo de confianza del* 100 $(1-\alpha)$ *por ciento. Si el parámetro supuesto está contenido dentro de dicho intervalo,* H_0 *no puede rechazarse en el nivel* α *de importancia.*

Pruebas de hipótesis unilaterales. La prueba de hipótesis ilustrada por el ejemplo 6.2.1 es un ejemplo de *prueba bilateral,* llamada así porque la región de rechazo se divide entre los dos lados o colas de la distribución de la estadística de prueba. Una prueba de hipótesis puede ser *unilateral,* en cuyo caso toda la región de rechazo está en una u otra cola de la distribución. El que se utilice una prueba unilateral o bilateral depende de la naturaleza de la cuestión planteada por el investigador.

En caso de que los valores tanto pequeños como grandes causen el rechazo de la hipótesis nula, lo indicado es utilizar una prueba bilateral. Cuando únicamente valores suficientemente "pequeños" o suficientemente "grandes" causen el rechazo de la hipótesis nula, lo indicado es utilizar una prueba unilateral.

Ejemplo 6.2.2

Supóngase que en lugar de preguntarse si pudieran concluir que $\mu \neq 25$, los investigadores se hubieran preguntado: ¿se puede concluir que $\mu < 25$? Esta pregunta podría contestarse diciendo que es posible llegar a esa conclusión si se rechaza la hipótesis nula de que $\mu \geqslant 25$. Utilícese ahora el procedimiento de los nueve pasos para llegar a una decisión basada en una prueba unilateral.

1. *Datos*. Véase el ejemplo anterior.
2. *Suposiciones*. Véase el ejemplo anterior.
3. *Hipótesis*.

$$H_0: \mu \geq 25$$
$$H_A: \mu < 25$$

La desigualdad de la hipótesis nula implica que ésta consta de un número infinito de hipótesis. La prueba sólo se hará en el punto de la igualdad, ya que puede demostrarse que si H_0 se rechaza cuando la prueba se hace en el punto de igualdad, se rechazaría si la prueba se hubiera hecho para cualquier otro valor de μ indicado en la hipótesis nula.

4. *Estadística de prueba*.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba*. Véase el ejemplo anterior.
6. *Regla de decisión*. Sea nuevamente $\alpha = .05$. Para determinar dónde colocar la región de rechazo, debe preguntarse qué magnitud de los valores causaría el rechazo de la hipótesis nula. Si se observa la hipótesis, se ve que los valores pequeños causarían el rechazo y que los valores grandes tenderían a reforzar la hipótesis nula. Es de desear que la región de rechazo esté donde están los valores pequeños, en la cola inferior de la distribución. En este caso, dado que se tiene una prueba unilateral, todo α irá en una de las colas de la distribución. Al consultar la tabla F, se encuentra que el valor de z a la izquierda del cual está .05 del área bajo la curva normal unitaria es de -1.645. Se especifican ahora las regiones de aceptación y de rechazo y se muestran en la figura 6.2.2.

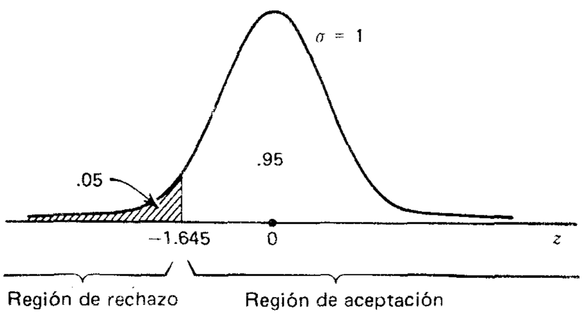


Figura 6.2.2 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.2.2.

La regla de decisión señala que se rechace H_0 si el valor calculado de la estadística de prueba es menor que o igual a -1.645.

7. *Estadística de prueba calculada.* A partir de los datos, se calcula que

$$z = \frac{22 - 25}{\sqrt{45/10}} = -1.41$$

8. *Decisión estadística.* No puede rechazarse la hipótesis nula debido a que $-1.41 > -1.645$.
9. *Conclusión.* Se concluye que la media verdadera puede ser mayor que o igual a 25 y se actúa en consecuencia.

El valor p para esta prueba es .0793, ya que $P(z \leq -1.41)$, cuando H_0 es verdadera, es de .0793, valor que se da en la tabla F cuando se determina la magnitud del área a la izquierda de -1.41 bajo la curva normal unitaria. Puede probarse una hipótesis nula unilateral por medio de un intervalo de confianza unilateral. Sin embargo, en este libro no se cubrirá la construcción e interpretación de este tipo de intervalo de confianza. Se sugiere que el lector consulte el estudio de este tema que hace Daniel[4] en su libro.

Si la pregunta de los investigadores hubiera sido: "¿puede concluirse que la media es mayor que 25?", siguiendo el procedimiento de los nueve pasos, se habría llegado a una prueba unilateral con toda la región de rechazo en la cola superior de la distribución de la prueba estadística y a un valor de $+1.645$.

Muestreo a partir de una población con distribución normal: variancia de la población desconocida. Como ya se ha señalado, se desconoce en general la variancia de la población en situaciones reales que comprenden la inferencia estadística en torno a la media de una población. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento de prueba de hipótesis cuando éste es el caso.

Ejemplo 6.2.3

Varios investigadores recolectaron concentraciones de amilasa en suero de una muestra aleatoria de 15 personas aparentemente sanas. Desean saber si pueden concluir que la media de la población de la cual provino la muestra de determinaciones de amilasa en suero es distinta de 120. Es posible concluir esto si se rechaza la hipótesis nula de que la media verdadera es igual a 120. Esto sugiere una prueba de hipótesis bilateral que se lleva a cabo utilizando los ya conocidos nueve pasos.

1. *Datos.* Los datos consisten en las determinaciones de amilasa en suero hechas en 15 personas aparentemente sanas. La media y la desviación estándar calculadas a partir de la muestra son, respectivamente, 96 y 35 unidades/100 ml.
2. *Suposiciones.* Las 15 determinaciones constituyen una muestra aleatoria de una población de determinaciones con distribución normal. Se desconoce la variancia de la población.
3. *Hipótesis.*

$$H_0: \mu = 120$$
$$H_A: \mu \neq 120$$

4. *Estadística de prueba.* Dado que se desconoce la variancia de la población, la estadística de prueba es

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* La estadística de prueba está distribuida como la t de Student, con $n - 1$ grados de libertad, si H_0 es verdadera.

6. *Regla de decisión*. Sea $\alpha = .05$. Dado que se tiene una prueba bilateral, se pone $\alpha/2 = .025$ en cada cola de la distribución de la estadística de prueba. Los valores de t a la derecha e izquierda de los cuales está .025 del área son 2.1448 y -2.1448. Estos valores se obtienen de la tabla H. Las regiones de aceptación y de rechazo se muestran en la figura 6.2.3.

   La regla de decisión señala que se calcule un valor de la estadística de prueba y que se rechace H_0 si la t calculada es mayor que o igual a 2.1448 o menor que o igual a -2.1448.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$t = \frac{96 - 120}{35/\sqrt{15}} = \frac{-24}{9.04} = -2.65$$

8. *Decisión estadística*. Se rechaza H_0, ya que -2.65 cae en la región de rechazo.
9. *Conclusión*. La conclusión, basada en estos datos, es que la media de la población de la cual provino la muestra no es 120.

El valor p exacto para esta prueba no puede obtenerse de la tabla H debido a que ésta sólo da los valores t para percentiles seleccionados. Sin embargo, el valor p puede considerarse como un intervalo. En el presente ejemplo, -2.65 es menor que -2.624, el valor de t a la izquierda del cual está .01 del área bajo la t con 14 grados de libertad pero mayor que -2.9768, a la izquierda del cual está .005 del área. En consecuencia, cuando H_0 es verdadera, la probabilidad de obtener un valor de t tan pequeño como o más pequeño que -2.65 es menor que .01, pero mayor que .005.

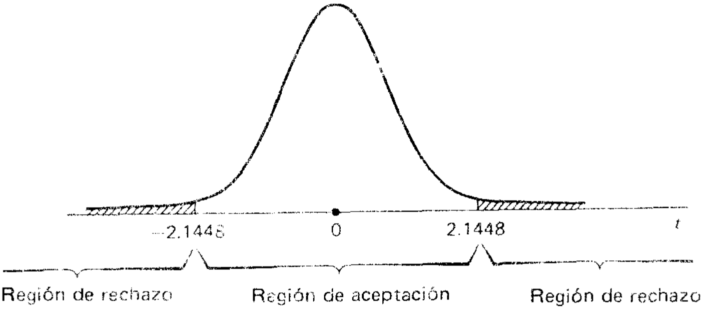


Figura 6.2.3 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.2.3.

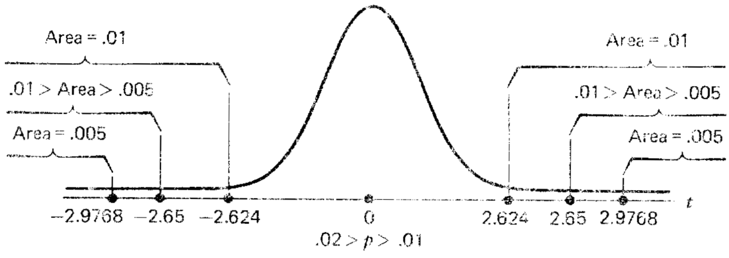


Figura 6.2.4 Determinación del valor de p para el ejemplo 6.2.3.

Es decir, $.005 < P(t \leqslant -2.65) < .01$. Dado que la prueba fue bilateral, debe permitirse la posibilidad de un valor calculado de la estadística de prueba tan grande en la dirección opuesta como el observado. La tabla H revela que $.005 < P(t \geqslant 2.65) < .01$. El valor p, entonces, es de $.01 < p < .02$. La figura 6.2.4 muestra el valor p para este ejemplo.

Si en el ejemplo anterior la hipótesis hubiera sido

$$H_0: \mu \geq 120$$
$$H_A: \mu < 120$$

el procedimiento de prueba habría conducido a una prueba unilateral con toda la región de rechazo en la cola inferior de la distribución; y si la hipótesis hubiera sido

$$H_0: \mu \leq 120$$
$$H_A: \mu > 120$$

se habría tenido una prueba unilateral con toda la región de rechazo en la cola superior de la distribución.

Muestreo a partir de una población que no presenta distribución normal. Si la muestra en la cual se basa la prueba de la hipótesis proviene de una población que no presenta distribución normal y si la muestra es grande, puede sacarse ventaja del teorema del límite central y utilizar $z = (\bar{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ como la estadística de prueba. Si no se conoce la desviación estándar de la población, la práctica mún es utilizar la desviación estándar muestral como una estimación. Lo razonable es que la muestra grande, necesaria para aplicar el teorema del límite central, proporciona una estimación satisfactoria de σ.

Ejemplo 6.2.4

En una encuesta sanitaria de cierta comunidad, se entrevistó a 150 personas. Uno de los detalles de la información obtenida fue el número de recetas médicas que cada persona había tenido que pedir durante el año anterior. El número promedio para las 150 personas fue de 5.8 con una desviación estándar de 3.1. El investigador desea saber si estos datos proporcionan evidencia suficiente como para indicar que la media de la población es mayor que 5. Se dice que los datos proporcionan tal evidencia si puede rechazarse la hipótesis nula de que la media es menor que o igual a 5. Puede llevarse a cabo la siguiente prueba:

1. *Datos*. Los datos constan del número de recetas pedidas por las 150 personas, con $\bar{x} = 5.8$ y $s = 3.1$.
2. *Suposiciones*. Los datos constituyen una muestra aleatoria de una población de forma funcional desconocida.
3. *Hipótesis*.

$$H_0: \mu \leq 5$$
$$H_A: \mu > 5$$

4. *Estadística de prueba*.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Dado que se desconoce σ, se utiliza la desviación estándar de la muestra como una estimación.

5. *Distribución de la estadística de prueba*. En virtud del teorema del límite central, la estadística de prueba muestra una distribución casi normal con $\mu = 0$ si H_0 es verdadera.
6. *Regla de decisión*. Sea $\alpha = .05$. El valor crítico de la estadística de prueba es de 1.645. Las regiones de aceptación y de rechazo se muestran en la figura 6.2.5. Se rechaza H_0 si se calcula $z \geqslant 1.645$.

7. *Estadística de prueba calculada.*

$$z = \frac{5.8 - 5.0}{3.1/\sqrt{150}} = \frac{.8}{.25} = 3.2$$

8. *Decisión estadística*. Se rechaza H_0, ya que $3.2 > 1.645$.
9. *Conclusión*. Se concluye que el número medio de recetas pedidas por persona por año para esta población es mayor que 5.

Si se hubiera conocido la variancia de la población, el procedimiento habría sido idéntico al anterior, excepto que en el denomina-

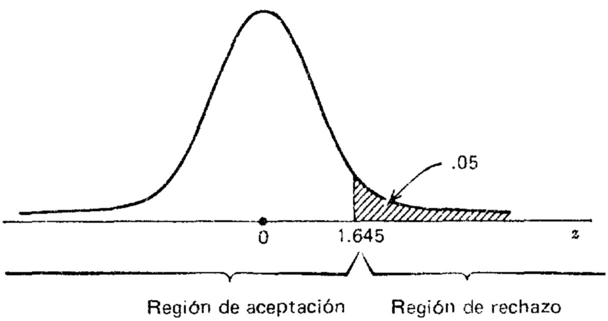


Figura 6.2.5 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.2.4.

dor de la estadística de prueba calculada se habría utilizado el valor de σ conocido en lugar del valor muestral. El valor p para esta prueba es menor que .001.

Dependiendo de lo que los investigadores deseen concluir, utilizando los datos anteriores podría haberse realizado una prueba bilateral, o bien, una prueba unilateral, con la región de rechazo en la cola inferior de la distribución.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes ejercicios, lleve a cabo el procedimiento de nueve pasos de pruebas de hipótesis para el nivel de significación dado. Calcule el valor p para cada prueba.

6.2.1 Como parte de un estudio de tiempos y movimientos conducido en un centro de salud, una muestra de 100 pacientes pasó en promedio 23 minutos en la sala de espera entre su registro y su atención por un miembro del grupo médico. La desviación estándar muestral fue de 10. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente como para indicar que el tiempo medio de permanencia en la sala de espera es mayor que 20 minutos? Sea $\alpha = .05$.

6.2.2 Se llevó a cabo un experimento para estudiar el efecto que tiene en las ratas cierto tipo de cirugía cerebral. Después de la cirugía, las ratas fueron entrenadas para llevar a cabo una serie de tareas. Después del período de entrenamiento, las ratas fueron estimuladas para que llevaran a cabo la tarea y se registró cada una de ellas con base en la calidad de su desempeño. La calificación media para las 16 ratas utilizadas en el experimento fue de 90 con una desviación estándar de 10. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la media de la población es menor de 95? Sea $\alpha = .10$.

6.2.3 Una encuesta de 64 laboratorios médicos reveló que el precio medio cargado para cierta prueba fue de \$12 con una desviación estándar de \$6. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la media de la población es mayor que \$10? Sea $\alpha = .05$.

6.2.4 Se hizo un estudio de una muestra de 25 registros de pacientes de un hospital de enfermedades crónicas tomando como base pacientes externos. El número medio de visitas por paciente fue de 4.8 y la desviación estándar muestral fue de 2. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la media de la población es mayor que cuatro visitas por paciente? Supóngase que la probabilidad de cometer un error del tipo I es de .05.

6.2.5 En una muestra de 49 adolescentes que sirvieron de sujetos en un estudio inmunológico, una variable de interés fue el diámetro de reacción de la piel a una prueba con un antígeno. La media muestral y la desviación estándar fueron, respectivamente, 21 y 11 mm de eritema. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la media de la población es menor que 20? Sea $\alpha = .05$.

6.2.6 Nueve animales de laboratorio fueron infectados con cierta bacteria y luego inmunosuprimidos. El número medio de organismos aislados posteriormente de los tejidos de dichos animales fue de 6.5 (datos codificados) con una desviación estándar de .6. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la media de la población es mayor que 6? Sea $\alpha = .05$.

6.2.7 Una muestra de 25 estudiantes de enfermería de primer año tuvo una calificación media de 77 en una prueba efectuada para medir su actitud hacia el paciente moribundo. La desviación estándar de la muestra fue de 10. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente como para indicar, a un nivel de significación de .05, que la media de la población es menor que 80?

6.2.8 Se llevó a cabo un estudio sobre nutrición en un país en desarrollo. Una muestra de 500 adultos campesinos reportó un consumo medio diario de calorías de 1985 con una desviación estándar de 210. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la media de la población es menor que 2,000? Sea $\alpha = .05$.

6.2.9 Una encuesta de 100 hospitales de tamaño similar reveló un censo medio promedio diario en el servicio de pediatría de 27 con una desviación estándar de 6.5. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente como para indicar que la media de la población es mayor que 25? Sea $\alpha = .05$.

6.2.10 Después de un programa de enseñanza de supervisión con duración de una semana en un hospital, 16 asistentes de administración del hospital obtuvieron una calificación media de 74 en una prueba llevada a cabo como parte de la evaluación del programa. La desviación estándar muestral fue de 12. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la media de la población es mayor que 70? Sea $\alpha = .05$.

6.2.11 Se seleccionó una muestra al azar de 16 reportes de emergencia de los archivos de un servicio de ambulancia. El tiempo medio (calculado a partir de los datos de la muestra) que requieren las ambulancias para llegar a su destino es de 13 minutos. Supóngase que la población de tiempos presenta una distribución normal con una variancia de 9. ¿Puede concluirse al nivel de significación de .05 que la media de la población es mayor que 10 minutos?

6.2.12 Los siguientes datos son los consumos de oxígeno (en ml) durante la incubación de una muestra aleatoria de 15 suspensiones celulares.

14.0, 14.1, 14.5, 13.2, 11.2, 14.0, 14.1, 12.2
11.1, 13.7, 13.2, 16.0, 12.8, 14.4, 12.9

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente al nivel de significación de .05 de que la media de la población no es de 12 ml?

6.2.13 Una muestra aleatoria de 20 profesores universitarios aparentemente sanos proporcionó los siguientes valores de capacidad respiratoria máxima.

132, 33, 91, 108, 67, 169, 54, 203, 190, 133
96, 30, 187, 21, 63, 166, 84, 110, 157, 138

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente como para concluir que la media de la población es distinta de 110? Sea $\alpha = .01$.

6.2.14 Los siguientes valores son las presiones sistólicas sanguíneas (en mm de Hg) de 12 pacientes que experimentan terapia con drogas debido a que padecen de hipertensión.

183, 152, 178, 157, 194, 163, 144, 114, 178, 152, 118, 158

¿Puede concluirse en base a estos datos que la media de la población es menor que 165? Sea $\alpha = .05$.

6.3 PRUEBAS DE HIPÓTESIS: DIFERENCIA ENTRE LAS MEDIAS DE DOS POBLACIONES

La prueba de hipótesis que comprende la diferencia entre la media de dos poblaciones se utiliza con más frecuencia para determinar si es razonable o no concluir que las dos son distintas. En tales casos, se prueba una o las demás de las siguientes hipótesis:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, & H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \\
(2) & H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0, & H_A: \mu_1 - \mu_2 < 0 \\
(3) & H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0, & H_A: \mu_1 - \mu_2 > 0
\end{array}
$$

Sin embargo, es posible probar la hipótesis de que la diferencia es igual a, mayor o igual que, o menor o igual que algún valor distinto de cero.

Como se hizo en la sección anterior, la prueba de hipótesis que comprende la diferencia entre la media de dos poblaciones se discutirá en tres diferentes contextos: 1) cuando el muestreo es a partir de poblaciones con distribución normal y con variancias conocidas, 2) cuando el muestreo es a partir de poblaciones con distribución normal y con variancias desconocidas y 3) cuando el muestreo es a partir de poblaciones que no presentan distribución normal.

Muestreo a partir de poblaciones con distribución normal: variancias de las poblaciones conocidas.

Ejemplo 6.3.1

Varios investigadores desean saber si los datos que reunieron proporcionan evidencia suficiente que indique una diferencia en las concentraciones medias de ácido úrico en suero entre individuos normales e individuos con síndrome de Down. Se dice que los datos proporcionan dicha evidencia si puede rechazarse la hipótesis nula de que las medias son iguales. Se llega entonces a una decisión por medio del procedimiento de nueve pasos de las pruebas de hipótesis.

1. *Datos*. Los datos constan de las lecturas de ácido úrico en el suero de 12 individuos con síndrome de Down y 15 individuos normales. Las medias son $\bar{x}_1 = 4.5$ mg/100 ml y $\bar{x}_2 = 3.4$ mg/100 ml.
2. *Suposiciones*. Los datos constituyen dos muestras aleatorias independientes, cada una extraída de una población con distribución normal y con variancia igual a 1.
3. *Hipótesis*.

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Una forma alternativa de enunciar las hipótesis es la siguiente:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

4. *Estadística de prueba.*

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

   En este caso, el parámetro supuesto se escribiría más correctamente como $(\mu_1 - \mu_2)_0$, donde el subíndice 0 indica que la diferencia es un parámetro supuesto. Sin embargo, para evitar una notación difícil de manejar, se suprime el subíndice de la fórmula para la estadística de prueba.
5. *Distribución de la estadística de prueba.* Cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba sigue una distribución normal unitaria.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. Los valores críticos de z son $\pm$ 1.96. Se rechaza H_0 a menos que $-1.96 < z_{\text{calculada}} < 1.96$. Las regiones de aceptación y de rechazo se muestran en la figura 6.3.1.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$z = \frac{(4.5 - 3.4) - 0}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{15}}} = \frac{1.1}{.39} = 2.82$$

8. *Decisión estadística.* Se rechaza H_0, ya que $2.82 > 1.96$.
9. *Conclusión.* Se concluye que, con base en estos datos, hay una indicación de que las medias no son iguales. Para esta prueba, $p = .0048$.

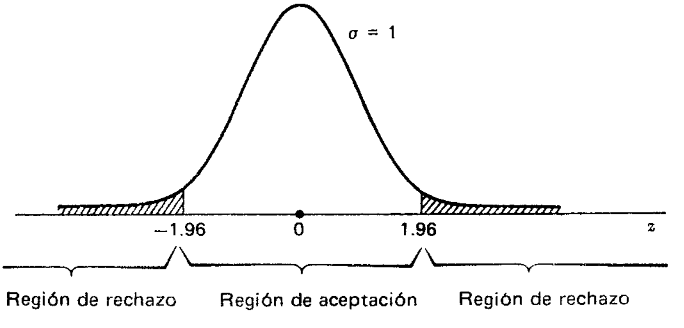


Figura 6.3.1 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.3.1.

En el capítulo anterior se calculó el intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ como .3 a 1.9. Dado que este intervalo no incluye a 0, se dice que 0 no es un candidato para la diferencia verdadera y se concluye que la diferencia no es cero. Así, se llega a la misma conclusión por medio de un intervalo de confianza.

Aunque en este ejemplo las variancias fueron iguales, este no es un requisito cuando se conocen las variancias de las poblaciones, y si hubieran sido distintas, se habría seguido el mismo procedimiento de pruebas de hipótesis.

Muestreo a partir de poblaciones con distribución normal: variancias de las poblaciones desconocidas. Como se ha aprendido, cuando se desconocen las variancias de las poblaciones, existen dos posibilidades. Las variancias de las dos poblaciones pueden ser iguales o bien distintas. Se considerará el primer caso donde se sabe, o es razonable suponer que son iguales. Cuando se desconocen las variancias de las poblaciones, pero se supone que son iguales, se considera, con base en el capítulo 5, que es apropiado combinar las variancias de las muestras por medio de la siguiente fórmula.

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Ejemplo 6.3.2

Un grupo de investigadores reunió los datos de amilasa en suero de una muestra de individuos sanos y de individuos hospitalizados. Desearon saber si sería justificado concluir que las medias de las poblaciones son distintas. Desearon saber también si pueden rechazar la hipótesis nula de que son iguales.

1. *Datos*. Los datos constan de determinaciones de amilasa en suero de $n_2 = 15$ individuos sanos y $n_1 = 22$ individuos hospitalizados. Las medias muestrales y las desviaciones estándar son las siguientes:

$$\bar{x}_1 = 120 \text{ unidades/ml}, \qquad s_1 = 40 \text{ unidades/ml}$$
$$\bar{x}_2 = 96 \text{ unidades/ml} \qquad s_2 = 35 \text{ unidades/ml}$$

2. *Suposiciones*. Los datos constituyen dos muestras aleatorias independientes, cada una extraída de una población con distribución normal. Se desconocen las variancias de las poblaciones, pero se supone que son iguales.
3. *Hipótesis.* $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.
4. *Estadística de prueba.*

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba sigue la distribución t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. Los valores críticos de t son $\pm$ 2.0301. Se rechaza H_0 a menos que $-2.0301 < t_{\text{calculada}} < 2.0301$.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$t = \frac{(120 - 96) - 0}{\sqrt{\frac{1450}{15} + \frac{1450}{22}}} = \frac{24}{12.75} = 1.88$$

8. *Decisión estadística.* No puede rechazarse H_0, ya que $-2.0301 < 1.88 < 2.0301$; es decir, 1.88 cae en la región de aceptación.
9. *Conclusión.* En base a estos datos, no puede concluirse que las medias de las dos poblaciones son distintas. Para esta prueba, $.10 > p > .05$, ya que $1.6896 < 1.88 < 2.0301$.

Ejemplo 6.3.3

En este ejemplo se ilustra el procedimiento de pruebas de hipótesis cuando se desconocen y son distintas las variancias de las poblaciones. Se probará la hipótesis nula de que las medias de las poblaciones son iguales contra la alternativa de que son distintas.

1. *Datos.* Los datos constan de las determinaciones de la actividad total del complemento serológico (C_{H50}) en $n_2 = 20$ personas

aparentemente normales y $n_1 = 10$ personas enfermas. Las medias muestrales y las desviaciones estándar son

$$\bar{x}_1 = 62.6, \qquad s_1 = 33.8$$
$$\bar{x}_2 = 47.2, \qquad s_2 = 10.1$$

2. *Suposiciones.* Los datos constituyen dos muestras aleatorias independientes, cada una extraída de una población con distribución normal. Se desconocen y son distintas las variancias de las poblaciones.
3. *Hipótesis.*

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

4. *Estadística de prueba.*

$$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba está distribuida aproximadamente cono la distribución de Student con los grados de libertad dados por la ecuación 5.6.4.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. El valor de los grados de libertad, calculado mediante la fórmula 5.6.4 es de 10.9, de modo que se utilizan $\pm$ 2.2010, los valores críticos de t para 11 grados de libertad. Se rechaza H_0 a menos que $-2.2010 < t'_{\text{calculada}} < 2.2010$.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$t' = \frac{(62.6 - 47.2) - 0}{\sqrt{\dfrac{(33.8)^2}{10} + \dfrac{(10.1)^2}{20}}} = \frac{15.4}{10.92} = 1.41$$

8. *Decisión estadística.* No puede rechazarse H_0 debido a que $-2.2010 < 1.41 < 2.2010$.

9. *Conclusión.* Con base en estos datos, no puede concluirse que las medias de las poblaciones son distintas.

Muestreo a partir de poblaciones que no presentan distribución normal. Cuando el muestreo se realiza a partir de poblaciones que no presentan distribución normal, pueden utilizarse los resultados del teorema del límite central si los tamaños de las muestras son grandes. Esto permitirá el uso de la teoría normal. Si se conocen las variancias de las poblaciones, se utilizan; pero si se desconocen, se utilizan como estimaciones las variancias muestrales, que necesariamente se basan en muestras grandes. Las variancias de las muestras no están mancomunadas, ya que la igualdad de las variancias de las poblaciones no es una suposición necesaria cuando se utiliza la estadística z.

Ejemplo 6.3.4

El administrador de un hospital desea saber si la población que mantiene a un hospital A tiene un ingreso medio familiar mayor que el de la población que sostiene a un hospital B. La respuesta es sí si puede rechazarse la hipótesis nula de que μ_1 es menor que o igual a μ_2, donde μ_1 y μ_2 son, respectivamente, los parámetros para las poblaciones de los hospitales A y B.

1. *Datos.* Los datos constan de los ingresos familiares de 75 pacientes admitidos al hospital A y de 80 pacientes admitidos al hospital B. Las medias de las muestras son $\bar{x}_1 = \$6,800$ y $\bar{x}_2 = \$5450$.
2. *Suposiciones.* Los datos constituyen dos muestras aleatorias independientes, cada una extraída de una población que no muestra distribución normal y con desviaciones estándar de $\sigma_1 = \$600$ y $\sigma_2 = \$500$.
3. *Hipótesis.*

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_A: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

o, alternativamente:

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$
$$H_A: \mu_1 > \mu_2$$

4. *Estadística de prueba.* Dado que se tienen muestras grandes, el teorema del límite central permite utilizar como estadística de prueba

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba está distribuida aproximadamente como la normal unitaria.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .01$. Esta es una prueba unilateral con un valor crítico de z igual a 2.33. Se rechaza H_0 si $z_{\text{calculada}} \geqslant 2.33$.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$z = \frac{(6800 - 5450) - 0}{\sqrt{\frac{(600)^2}{75} + \frac{(500)^2}{80}}} = \frac{1350}{89} = 15.17$$

8. *Decisión estadística.* Se rechaza H_0 ya que $z = 15.17$ está en la región de rechazo.
9. *Conclusión.* Estos datos indican que la población que sostiene al hospital A tiene un ingreso medio familiar mayor que el de la población que sostiene al hospital B. Para esta prueba, $p < .0001$, ya que $15.17 > 3.89$.

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios, complete el procedimiento de nueve pasos de prueba de la hipótesis y calcule el valor p para cada prueba.

6.3.1 Setenta pacientes que sufren de epilepsia se dividieron al azar en dos grupos iguales. El grupo A recibió un tratamiento que incluía dosis diarias de vitamina D. El grupo B recibió el mismo tratamiento con la excepción de que a este grupo se le dio un placebo en lugar de la vitamina D. Las medias del número de convulsiones observadas durante el período de tratamiento en los dos grupos fueron $\bar{x}_A = 15$ y $\bar{x}_B = 24$. Las variancias muestrales fueron $s_A{}^2 = 8$ y $s_B{}^2 = 12$. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la vitamina D es efectiva para disminuir el número de convulsiones? Sea $\alpha = .05$.

6.3.2 Un epidemiólogo desea comparar dos vacunas para la rabia. Las personas que previamente habían recibido dichas vacunas se dividieron en dos grupos. El grupo 1 recibió una dosis de refuerzo de la vacuna del tipo 1 y el grupo 2 recibió una dosis de refuerzo de la vacuna del tipo 2. Las respuestas de los anticuerpos se registraron dos semanas después. Las medias, desviaciones estándar y tamaño de muestras para los dos grupos fueron los siguientes:

Grupo	Tamaño de la muestra	$\bar{x}$	s
1	10	4.5	2.5
2	9	2.5	2.0

¿Indican estos datos que existe diferencia en la efectividad de las dos vacunas utilizadas para dosis de refuerzo? Sea $\alpha = .05$.

6.3.3 Se registraron los valores medios de la velocidad de conducción de un nervio motor en 10 personas admitidas al centro de control de envenenamientos de un hospital metropolitano con diagnóstico de envenenamiento con metilmercurio. Se hicieron también determinaciones similares en 15 personas aparentemente sanas. Las medias y desviaciones estándar fueron las siguientes:

	$\bar{x}$	s
Grupo envenenado:	55	6
Personas normales:	63	5

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que difieren las medias de las poblaciones representadas por las muestras? Sea $\alpha = .05$.

6.3.4 Una prueba diseñada para estimar la confianza en sí mismo se aplicó a 16 niños crónicamente enfermos y a 21 niños sanos. Las calificaciones medias y desviaciones estándar fueron las siguientes:

	$\bar{x}$	s
Niños enfermos	22.5	4.1
Niños sanos	26.9	3.2

¿Puede concluirse a partir de estos datos que los niños crónicamente enfermos tienden, en promedio, a obtener menores calificaciones en la prueba que los niños sanos? Sea $\alpha = .05$.

6.3.5 Un investigador en enfermería desea saber si los graduados de los programas de enfermería a nivel bachillerato y los graduados de los programas asociados de enfermería difieren en cuanto a las calificaciones medias obtenidas con base en un estudio de personalidad. Una muestra de 50 graduados de bachillerato (grupo A) y una muestra de 60 graduados asociados (grupo B) proporcionaron las siguientes medias y desviaciones estándar.

Grupo	$\bar{x}$	s
A	52.5	10.5
B	49.6	11.2

Con base en estos datos, ¿qué concluiría el investigador? Sea $\alpha = .05$.

6.3.6 Una prueba diseñada para estimar las actitudes de las madres en cuanto a su trabajo y experiencias de ejecución se aplicó a dos grupos de futuras madres. El grupo 1 (atendidas) había asistido a las sesiones sobre cuidados prenatales impartidas en el departamento local de salud. El grupo 2 (no atendidas) no asistió a dichas sesiones. Los tamaños de los grupos y las medias y desviaciones estándar de las calificaciones obtenidas en dicha prueba fueron los siguientes:

Grupo	n	$\bar{x}$	s
1	15	4.75	1.0
2	22	3.00	1.5

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que quienes fueron atendidas, en promedio, obtuvieron mejores calificaciones que quienes no fueron atendidas? Sea $\alpha = .05$.

6.3.7 Se hicieron determinaciones de las concentraciones de cortisol en dos grupos de mujeres parturientas. A las del grupo 1 se les practicó operación cesárea de emergencia después de haberles inducido el parto. Las del grupo 2 dieron a luz mediante operación cesárea o vía vaginal después de presentarse el parto espontáneo. Los tamaños de los grupos, las concentraciones medias de cortisol y las desviaciones estándar fueron los siguientes:

Grupo	n	$\bar{x}$	s
1	10	435	65
2	12	645	80

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que existe una diferencia en las concentraciones medias de cortisol en las poblaciones representadas? Sea $\alpha = .05$.

6.3.8 Se midieron las concentraciones de protoporfirina en dos grupos de individuos. El grupo 1 consistió en 50 hombres adultos alcohólicos con sideroblastos anulares en la médula ósea. El grupo 2 consistió en 40 hombres adultos no alcohólicos aparentemente normales. Las concentraciones medias de protoporfirina y las desviaciones estándar para los dos grupos fueron las siguientes:

Grupo	$\bar{x}$	s
1	340	250
2	45	25

¿Puede concluirse con base en estos datos que las concentraciones de protoporfirina son mayores en la población alcohólica representada que en la población no alcohólica? Sea $\alpha = .01$.

6.3.9 Un investigador está interesado en saber si los niños prematuros con acidosis metabólica tardía y los que no tienen dicha enfermedad difieren en lo que respecta a las concentraciones en la orina de cierto químico. Las concentraciones medias, desviaciones estándar y tamaño de las muestras para ambos grupos estudiados fueron los siguientes:

Grupo	n	$\bar{x}$	s
Infantes enfermos	35	8.5	5.5
Infantes sanos	40	4.8	3.6

¿Qué concluiría el investigador en base a estos resultados? Sea $\alpha = .05$.

6.3.10 Varios investigadores desean saber si pueden concluir que dos poblaciones de niños difieren en cuanto a la edad media a la cual pudieron caminar por sí solos. Se reunieron los datos siguientes (las edades están en meses):

Muestra de la población A:
9.5, 10.5, 9.0, 9.75, 10.0, 13.0, 10.0, 13.5, 10.0, 9.5, 10.0, 9.75

Muestra de la población B:
12.5, 9.5, 13.5, 13.75, 12.0, 13.75, 12.5, 9.5, 12.0, 13.5, 12.0, 12.0

¿Qué concluirían los investigadores? Sea $\alpha = .05$.

6.3.11 Veinte personas voluntarias se dividieron al azar en dos grupos. Las personas del grupo A se sometieron a un período de privación sensorial de 10 días, mientras que las del grupo B sirvieron de control. Al término del período experimental, se registró la frecuencia de la onda alfa componente de los electroencefalogramas de las personas. Los resultados fueron los siguientes:

Grupo A: 10.2, 9.5, 10.1, 10.0, 9.8, 10.9, 11.4, 10.8, 9.7, 10.4
Grupo B: 11.0, 11.2, 10.1, 11.4, 11.7, 11.2, 10.8, 11.6, 10.9, 10.9

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la privación sensorial tiene algún efecto sobre la frecuencia de la onda alfa de las personas? Sea $\alpha = .05$.

6.4 COMPARACIONES EN PAREJAS

En el análisis anterior, referente a la diferencia entre las medias de dos poblaciones, se ha supuesto que las muestras fueron independientes. Un método que suele utilizarse para averiguar la efectividad de un tratamiento o procedimiento experimental es el que utiliza observaciones relacionadas que se obtienen de muestras no independientes. Una prueba de hipótesis basada en este tipo de datos se conoce como prueba de *comparaciones apareadas.*

Sucede con frecuencia que no hay diferencias reales entre dos poblaciones en lo que respecta a la variable de interés, pero la presencia de fuentes extrañas de variación provoca el rechazo de la hipótesis nula de no diferencia. Por otra parte, las diferencias reales pueden también ser enmascaradas por la presencia de factores extraños.

El objetivo en las pruebas de comparaciones apareadas es eliminar un número máximo de fuentes de variación extraña, haciendo a las parejas semejantes con respecto a tantas variables como sea posible.

Las observaciones relacionadas o apareadas pueden obtenerse de varias formas. Los mismos individuos pueden registrarse antes y después de recibir algún tratamiento. Camadas del mismo sexo pueden ser asignadas al azar para que reciban algún tratamiento o bien un placebo. Parejas de gemelos o hermanos pueden ser asignados al azar para que reciban dos tratamientos, de tal manera que los miembros de una sola pareja reciban tratamientos distintos. Al comparar dos métodos de análisis, el material que va a analizarse se divide en partes iguales, de modo que una de las partes se analice mediante un método y la otra por otro método. O bien, se forman parejas combinando individuos respecto a alguna característica, como por ejemplo la destreza en los dedos, que está estrechamente relacionada con la medida de interés, digamos, las calificaciones obtenidas después de algún tratamiento para alguna prueba que requiera manipulación con los dedos.

En lugar de llevar a cabo el análisis con observaciones individuales, se utiliza como variable de interés la diferencia entre pares individuales de observaciones.

Ejemplo 6.4.1

Doce individuos participaron en un experimento para estudiar la efectividad de cierta dieta, combinada con un programa de ejercicio, en la reducción de los niveles de colesterol en suero. La tabla 6.4.1 muestra los niveles de colesterol en suero para los 12 individuos al principio del programa (Antes) y al final del mismo (Después).

Concentrándose en las diferencias, d_i, pueden calcularse las siguientes medidas descriptivas:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{(-1) + (5) + (-5) + \cdots + (8)}{12} = \frac{-242}{12} = -20.17$$

$$s_d^{\,2} = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{n\sum d_i^{\,2} - (\sum d_i)^2}{n(n-1)} = \frac{12(10766) - (-242)^2}{12(11)} = 535.06$$

Nótese que $\bar{d} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$.

La pregunta que se plantea es: ¿proporcionan los datos la evidencia suficiente como para concluir que el programa dieta-ejercicio es efectivo en la reducción de los niveles de colesterol en suero? Se dirá que se tiene dicha evidencia si se rechaza la hipótesis nula de que el cambio promedio verdadero, μ_d, es cero o positivo. Puede llegarse a una decisión por medio del procedimiento de nueve pasos de la prueba de la hipótesis.

1. *Datos.* Los datos constan de los niveles de colesterol en suero en 12 individuos antes y después de un programa experimental de dieta-ejercicio.

Tabla 6.4.1 Niveles de colesterol en suero para 12 individuos antes y después del programa dieta-ejercicio.

	Colesterol en el suero		*Diferencia (después-antes)*
Individuo	*Antes* (X_1)	*Después* (X_2)	d_i
1	201	200	− 1
2	231	236	+ 5
3	221	216	− 5
4	260	233	− 27
5	228	224	− 4
6	237	216	− 21
7	326	296	− 30
8	235	195	− 40
9	240	207	− 33
10	267	247	− 20
11	284	210	− 74
12	201	209	+ 8

2. *Suposiciones.* Las diferencias observadas constituyen una muestra aleatoria de una población con distribución normal de diferencias que pudieron generarse bajo las mismas circunstancias.
3. *Hipótesis.* Las hipótesis nula y alternativa son las siguientes:

$$H_0: \mu_d \geq 0$$
$$H_A: \mu_d < 0$$

4. *Estadística de prueba.* A la luz de las suposiciones, la estadística de prueba apropiada es

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_{\bar{d}}} \qquad (6.4.1)$$

donde $s_{\bar{d}} = s_d / \sqrt{n}$.

Una vez más, el parámetro supuesto de la ecuación 6.4.1 se especificaría más correctamente mediante un símbolo como μ_{d0}. Sin embargo, de nuevo, para evitar una notación compleja se elimina el cero de la fórmula.

Aunque, en cierto sentido, se tienen dos muestras, los niveles antes y después, no hay de qué preocuparse por la igualdad de las variancias, como con las muestras independientes, ya que la variable es la diferencia entre las lecturas en el mismo individuo y, en consecuencia, sólo interviene una variancia.

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Si la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba está distribuida como la t de Student con $n - 1$ grados de libertad.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. El valor crítico de t es de -1.7959. Se rechaza H_0 si la t calculada es menor que el valor crítico. Las regiones de aceptación y de rechazo se muestran en la figura 6.4.1.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$t = \frac{-20.17 - 0}{\sqrt{535.06/12}} = \frac{-20.17}{6.68} = -3.02$$

8. *Decisión estadística.* Se rechaza H_0, ya que -3.02 está en la región de rechazo.
9. *Conclusión.* Puede concluirse que el programa de dieta-ejercicio es efectivo. Para esta prueba, $.01 > p > .005$, ya que $-2.718 > -3.02 > -3.1058$.

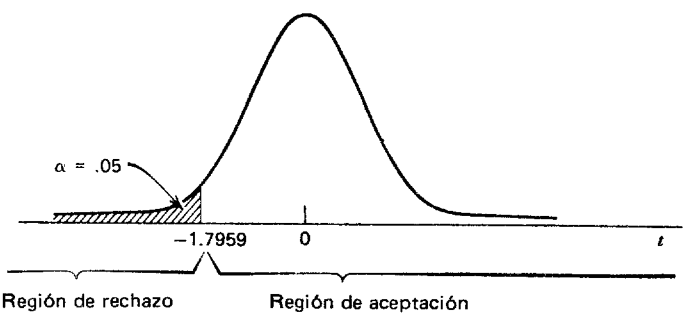


Figura 6.4.1 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.4.1.

Un intervalo de confianza del 95 por ciento para μ_d se obtiene de la manera siguiente:

$$\bar{d} \pm t_{(1-\alpha/2)} s_{\bar{d}}$$
$$-20.17 \pm 2.2010(6.68)$$
$$-20.17 \pm 14.70$$
$$-34.87,\ -5.47$$

Si en el análisis de los datos apareados se conoce, la variancia de las diferencias de la población, la estadística de prueba apropiada es

$$z = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sigma_d/\sqrt{n}} \tag{6.4.2}$$

Es improbable que σ_d se conozca en la práctica.

Si no puede hacerse la suposición de d_i's distribuidas en forma normal, se utiliza el teorema del límite central si n es grande. En tales casos, la estadística de prueba es la ecuación 6.4.2, en la que se ha utilizado a s_d para estimar a σ_d cuando, como suele ser el caso, se desconoce esta última.

El uso de la prueba de las comparaciones apareadas no deja de tener sus problemas. Si se utilizan diferentes individuos y se les asignan al azar dos tratamientos, puede resultar costoso y tardado tratar de formar parejas con los individuos con respecto a una o más variables importantes. Es posible que se pague aún más, porque el uso de comparaciones apareadas hace que se pierdan grados de libertad. Si no se utilizan observaciones apareadas se tienen $2n - 2$ grados de libertad disponibles, comparados con $n - 1$ cuando se utiliza este procedimiento.

En general, al decidir si se utiliza o no el procedimiento de las comparaciones apareadas debe uno guiarse por el aspecto económico, así como por la consideración de las ventajas que se obtienen en términos del control de la variación extraña.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, lleve a cabo el procedimiento de nueve pasos de la prueba de la hipótesis en el nivel de importancia especificado. Determine el valor p de cada prueba.

6.4.1 Diez animales de laboratorio se sometieron a condiciones que simulaban una enfermedad. Se registró el número de latidos del corazón por minuto antes y después del experimento de la manera siguiente:

Latidos por minuto			Latidos por minuto		
Animal	Antes	Después	Animal	Antes	Después
1	70	115	6	100	178
2	84	148	7	110	179
3	88	176	8	67	140
4	110	191	9	79	161
5	105	158	10	86	157

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la condición experimental aumenta el número de latidos del corazón por minuto? Sea $\alpha = .05$.

6.4.2 Se llevó a cabo un estudio para poner a prueba la eficacia de un nuevo procedimiento terapéutico para mejorar la destreza digital de ciertas personas impedidas. Se utilizaron veinticuatro parejas de individuos en el estudio y cada pareja se formó con base en el grado del impedimento, inteligencia y edad. A uno de los miembros de cada pareja se le asignó al azar el nuevo tratamiento, mientras que el otro miembro de la pareja recibió la terapia habitual. Al término del período experimental, se sometió a cada individuo a una prueba de destreza en los dedos, obteniéndose las calificaciones siguientes:

Pareja	Nuevo	Estándar	Pareja	Nuevo	Estándar
1	49	54	13	52	41
2	56	42	14	73	67
3	70	63	15	52	57
4	83	77	16	73	70
5	83	83	17	78	72
6	68	51	18	64	62
7	84	82	19	71	64
8	63	54	20	42	44
9	67	62	21	51	44
10	79	71	22	56	42
11	88	82	23	40	35
12	48	50	24	81	73

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente para concluir, en el nivel de importancia de .05, que la nueva terapia es más efectiva que la estándar?

6.4.3 Un grupo de 15 muchachos de doce años de edad fue medido por dos enfermeras distintas. Los resultados fueron los siguientes:

Individuo	Enfermera 1	Enfermera 2	Individuo	Enfermera 1	Enfermera 2
1	142.9	143.0	9	142.1	142.5
2	150.9	151.5	10	159.9	160.0
3	151.9	152.1	11	141.9	142.0
4	158.1	158.0	12	140.8	141.0
5	151.2	151.5	13	147.1	148.0
6	160.2	160.5	14	143.6	144.0
7	157.8	158.0	15	139.9	141.0
8	150.1	150.0			

¿Justifican estos datos la conclusión de que existe cierta diferencia en la exactitud de las dos enfermeras? Sea $\alpha = .05$. Elabore el intervalo de confianza del 95 por ciento para μ_d.

6.4.4 Diez jóvenes de 16 años de edad fueron medidos al momento de levantarse en la mañana y al acostarse en la noche, obteniéndose los resultados siguientes:

	Estatura (centímetros)			Estatura (centímetros)	
Individuo	Mañana	Noche	Individuo	Mañana	Noche
1	169.7	168.2	6	168.8	166.5
2	168.5	165.5	7	169.2	167.4
3	165.9	164.4	8	167.9	166.3
4	177.7	175.7	9	181.8	179.7
5	179.6	176.6	10	163.3	161.5

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que los jóvenes de 16 años de edad tienen menos estatura en la noche que en la mañana? Elabore el invervalo de confianza del 95 por ciento para μ_d.

6.5 PRUEBA DE LA HIPÓTESIS: PROPORCIÓN DE UNA SOLA POBLACIÓN

La prueba de hipótesis respecto a las proporciones de una población se realizan casi en la misma forma que para las medias cuando se satisfacen las condiciones necesarias para utilizar la curva normal. Pueden efectuarse pruebas unilaterales o bilaterales, dependiendo de la cuestión que se plantee.

Ejemplo 6.5.1

En una encuesta de 300 conductores adultos de automóviles, 123 de ellos dijeron que regularmente utilizaban el cinturón de seguridad del asiento. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que en la población muestreada la proporción de quienes utilizan regularmente el cinturón de seguridad del asiento no es de .50?

1. *Datos.* Los datos se obtienen de las respuestas de los 300 individuos, de los cuales 123 tuvieron la característica de interés, es decir, $\tilde{p} = .41$.
2. *Suposiciones.* La distribución muestral de $\tilde{p}$ presenta una distribución aproximadamente normal de acuerdo con el teorema del límite central. Si H_0 es verdadera, $p = .5$ y el error estándar, $\sigma_{\tilde{p}} = \sqrt{(.5)(.5)/300}$. Nótese que se utiliza el valor hipotético de p para calcular $\sigma_{\tilde{p}}$. Esto se hace debido a que toda la prueba está basada en la suposición de que la hipótesis nula es verdadera. El utilizar la proporción de la muestra, $\tilde{p}$, para calcular $\sigma_{\tilde{p}}$, no sería consistente con este concepto.
3. *Hipótesis,*

$$H_0: p = .50$$
$$H_A: p \neq .50$$

4. *Estadística de prueba.*

$$z = \frac{\tilde{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Si la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba muestra una distribución aproximadamente normal con una media de cero.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. Los valores críticos de z son $\pm$ 1.96. Se rechaza H_0 a menos que $-1.96 < z_{\text{calculada}} < 1.96$.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$z = \frac{.41 - .50}{\sqrt{\frac{(.5)(.5)}{300}}} = \frac{-.09}{.0289} = -3.11$$

8. *Decisión estadística.* Se rechaza H_0, ya que $-3.11 < -1.96$.
9. *Conclusión.* Se concluye que el 50 por ciento de la población no usa regularmente el cinturón de seguridad del asiento. Para esta prueba, $p < .002$, ya que $-3.11 < -3.09$.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes ejercicios, lleve a cabo el procedimiento de nueve pasos de pruebas de hipótesis al nivel de significación designado. Calcule el valor p para cada muestra.

6.5.1 En una muestra de 1,500 residentes de un barrio interior de la ciudad, quienes participaron en un programa de salud, 125 pruebas proporcionaron resultados positivos en cuanto a la anemia de células falciformes. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la proporción de individuos con dicha enfermedad en la población muestreada es mayor que .06? Sea $\alpha = .05$

6.5.2 Una muestra de 100 empleados de un hospital, los cuales habían estado en contacto con sangre o productos de ésta, fue examinada por presentar evidencia serológica de hepatitis B. Se encontró que veintitrés de ellos tuvieron reacción positiva. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la proporción de positivos en la población muestreada es mayor que .15? Sea $\alpha = .05$.

6.5.3 Antes del inicio de un programa de inmunización contra la rubeola en una ciudad metropolitana, una encuesta reveló que 150 integrantes de una muestra de 500 niños de primaria habían sido inmunizados contra esta enfermedad. ¿Son estos datos compatibles con el punto de vista de que el 50 por ciento de los niños de primaria de dicha ciudad habían sido inmunizados contra la rubeola? Sea $\alpha = .05$.

6.6 PRUEBA DE LA HIPÓTESIS: DIFERENCIA ENTRE LAS PROPORCIONES DE DOS POBLACIONES

La prueba relativa a la diferencia entre las proporciones de dos poblaciones que se utiliza con más frecuencia es aquella en la que su diferencia es cero. Sin embargo, es posible probar que dicha diferencia es igual a algún otro valor. Pueden llevarse a cabo pruebas tanto unilaterales como bilaterales.

Cuando la hipótesis nula que va a probarse es $p_1 - p_2 = 0$, está suponiéndose que las proporciones de las dos poblaciones son iguales. Se utiliza esto como justificación para combinar los resultados de las dos muestras y llegar a una estimación mancomunada de la proporción común supuesta. Si se adopta este procedimiento, se calcula

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

donde $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son, respectivamente, el número de la primera y segunda muestra que poseen la característica de interés. Esta estimación mancomunada de $p = p_1 = p_2$ se utiliza para calcular $\hat{\sigma}_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}$.

$$\hat{\sigma}_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_2}}$$

por lo que la estadística de prueba se transforma en

$$z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\hat{\sigma}_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}}$$

que está distribuida aproximadamente como la normal unitaria si la hipótesis nula es verdadera.

Ejemplo 6.6.1

En un estudio diseñado para comparar un nuevo tratamiento para la migraña con el tratamiento estándar, 78 de los 100 individuos que recibieron el tratamiento estándar respondieron favorablemente. De los 100 individuos que recibieron el nuevo tratamiento, 90 de ellos respondieron satisfactoriamente. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que el nuevo tratamiento es más efectivo que el estándar? La respuesta es sí si puede rechazarse la hipótesis nula de que el nuevo tratamiento no es más efectivo que el estándar.

El procedimiento de prueba de la hipótesis para este ejemplo comprende los siguientes pasos.

1. *Datos.* Los datos constan de las respuestas de los 100 individuos al tratamiento estándar y de las respuestas de 100 individuos al nuevo tratamiento. El número de respuestas favorables fue, respectivamente, 78 y 90. Calcúlese ahora $\tilde{p}_1 = 78/100 = .78$, $\tilde{p}_2 = 90/100 = .90$, y

$$\bar{p} = \frac{90 + 78}{100 + 100} = .84$$

2. *Suposiciones.* Se supone que la distribución muestral de $\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1$ presenta una distribución aproximadamente normal con una media $p_2 - p_1 \leqslant 0$ y un error estándar estimado de

$$\hat{\sigma}_{\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_2} + \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_1}}$$

cuando la hipótesis nula es verdadera y las estimaciones muestrales están mancomunadas.

3. *Hipótesis.*

$$H_0: p_2 - p_1 \leq 0$$

$$H_A: p_2 - p_1 > 0$$

4. *Estadística de prueba.* La estadística de prueba es

$$z = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) - (p_2 - p_1)}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_2} + \dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1}}}$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Si la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba está distribuida aproximadamente como la normal unitaria.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. El valor crítico de z es de 1.645. Se rechaza H_0 si la z calculada es mayor que 1.645.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$z = \frac{(.90 - .78) - 0}{\sqrt{\dfrac{(.84)(.16)}{100} + \dfrac{(.84)(.16)}{100}}} = \frac{.12}{.0518} = 2.32$$

8. *Decisión estadística.* Se rechaza H_0, ya que $2.32 > 1.645$.
9. *Conclusión.* Estos datos sugieren que el nuevo tratamiento es más eficaz que el estándar ($p = .0102$).]

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios, utilice el procedimiento de nueve pasos de prueba de la hipótesis. Determine el valor p de cada prueba.

6.6.1 Una muestra de pacientes dados de alta dentro de los seis meses después de su admisión en un hospital estatal para problemas mentales, y una muestra de pacientes que fueron dados de alta al cabo de seis meses pero dentro del año de su admisión, se compararon con respecto a la distancia a que viven del hospital. Los resultados fueron los siguientes:

Duración de la hospitalización	n	Número de personas que viven a más de 20 millas del hospital.
$\leqslant$ 6 meses	100	75
Más de 6 meses	150	90

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la proporción de quienes viven a más de 20 millas del hospital es distinta en las dos poblaciones representadas? Sea $\alpha = .05$.

6.6.2 Un epidemiólogo en un país en desarrollo comparó una muestra de 90 personas adultas que sufren de cierta enfermedad neurológica con una muestra de 100 personas de control comparables pero que no padecen de dicha enfermedad. Se encontró que 69 de las personas que padecen la enfermedad y 67 que servían de control fueron empleadas en labores de subsistencia. ¿Puede concluir el epidemiólogo a partir de estos datos que las dos poblaciones representadas por las muestras difieren con respecto a la proporción utilizada en las ocupaciones de subsistencia? Sea $\alpha = .05$.

6.6.3 Una muestra de niños de un año de edad vistos en cierto grupo de departamentos de salud durante un año se seleccionó de cada uno de los dos grupos étnicos predominantes que constituyen la clientela de los departamentos. Se obtuvo la siguiente información respecto a la anemia.

Grupo étnico	Número en la muestra	Número de anémicos
1	450	105
2	375	120

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que existe una diferencia en las dos poblaciones con respecto a la proporción de quienes son anémicos? Sea $\alpha = .05$.

6.7 PRUEBA DE LA HIPÓTESIS: VARIANCIA DE UNA SOLA POBLACIÓN

En la sección 5.9 se estudia cómo se construye un intervalo de confianza para la variancia de una población con distribución normal. Los principios generales que se presentan en dicha sección pueden utilizarse para probar una hipótesis en cuanto a la variancia de una población.

Ejemplo 6.7.1

Una muestra aleatoria simple de 15 estudiantes de enfermería, quienes participaron en un experimento, hicieron una prueba para medir su destreza manual. La variancia de las observaciones de la muestra fue de 1,225. Se desea saber si puede concluirse a partir de estos datos que la variancia de la población es distinta de 2,500.

1. *Datos.* Los datos constan de las calificaciones obtenidas en la prueba de destreza manual por 15 estudiantes de enfermería. Se calculó que la variancia de la muestra es de $s^2 = 1{,}225$.
2. *Suposiciones.* Los datos constituyen una muestra aleatoria de tamaño 15 de una población con distribución normal.
3. *Hipótesis.*

$$H_0: \sigma^2 = 2500$$
$$H_A: \sigma^2 \neq 2500$$

4. *Estadística de prueba.*

$$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2$$

5. *Distribución de la estadística de prueba.* Cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba está distribuida como χ^2 con $n - 1$ grados de libertad.
6. *Regla de decisión.* Sea $\alpha = .05$. Los valores críticos de χ^2 son 5.629 y 26.119. Se rechaza H_0 a menos que el valor calculado de la estadística de prueba esté entre 5.629 y 26.119. Las regiones de aceptación y de rechazo se muestran en la figura 6.7.1.
7. *Estadística de prueba calculada.*

$$\chi^2 = \frac{(14)(1225)}{2500} = 6.86$$

8. *Decisión estadística.* No se rechaza H_0 ya que $5.629 < 6.86 < 26.119$.

9. *Conclusión*. En base a estos datos, no se concluye que la variancia de la población no es de 2,500.]

Aunque este fue un ejemplo de prueba bilateral, pueden hacerse también pruebas unilaterales mediante la modificación lógica del procedimiento anterior.

La determinación del valor p para esta prueba es complicada por el hecho de que se trata de una prueba bilateral y una distribución de muestreo asimétrica. Cuando se tiene una prueba bilateral y una distribución de muestreo asimétrica como la normal unitaria o la t, puede duplicarse, como ya se ha visto, el valor p unilateral. Los problemas surgen cuando se intenta hacer esto con una distribución muestral asimétrica, como la distribución ji-cuadrada. Gibbons y Pratt[1] sugieren que, en este caso, se reporte el valor p unilateral junto con la dirección de la desviación observada de la hipótesis nula. De hecho, es posible seguir este procedimiento en el caso de distribuciones muestrales simétricas. Sin embargo, lo anterior parece favorecer la duplicación del valor p unilateral cuando la prueba es bilateral y comprende una distribución muestral simétrica.

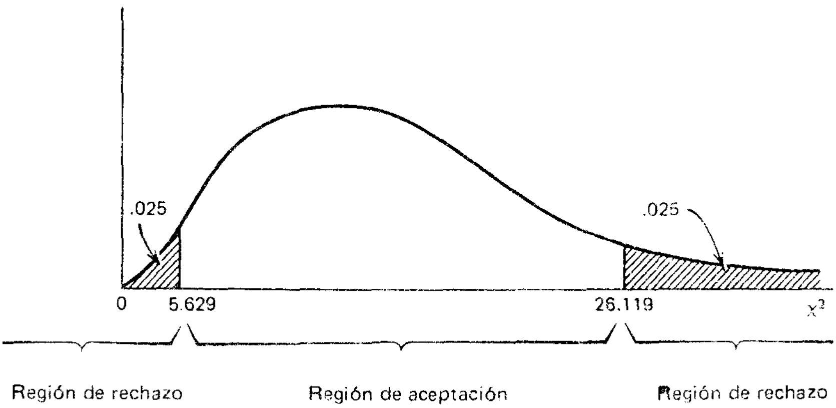


Figura 6.7.1 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.7.1.

Para el presente ejemplo, puede reportarse entonces el valor p como sigue:

$p > .05$ (prueba bilateral). Los datos de la muestra sugieren una variancia de la población menor que 2,500, pero esta hipótesis no es apoyada consistentemente por la prueba.

Si el problema se plantea en términos de la desviación estándar de la población, se eleva al cuadrado la desviación estándar de la muestra y se lleva a cabo la prueba como se indicó anteriormente.

Ejercicios

En cada uno de los ejercicios siguientes, lleve a cabo el procedimiento de prueba de los nueve pasos. Determine el valor p de cada prueba.

6.7.1 Como parte de un proyecto de investigación, se seleccionó una muestra de 25 infantes nacidos en los hospitales de un área metropolitana. La desviación estándar de los pesos de los infantes de la muestra fue de 150 gramos. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la variancia de la población es mayor que 10,000? Sea $\alpha = .05$.

6.7.2 A cada uno de los integrantes de una muestra aleatoria de 30 estudiantes de enfermería, quienes participaron en un proyecto de investigación, se les aplicó una prueba diseñada para estimar su nivel de pensamiento creativo. La desviación estándar de las calificaciones obtenidas fue de 11. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la variancia de la población es menor que 400? Sea $\alpha = .05$.

6.7.3 Se registraron los valores de la capacidad vital de una muestra de diez pacientes con obstrucción crónica en las vías respiratorias. La variancia de las diez observaciones fue de .75. Pruebe la hipótesis nula de que la variancia de la población es de 1.00. Sea $\alpha = .05$.

6.7.4 Se registraron los valores de hemoglobina (en gramos %) de una muestra de 20 niños que formaban parte de un estudio de leucemia aguda. La variancia de las observaciones fue de .5. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la variancia de la población es mayor que 4? Sea $\alpha = .05$.

6.7.5 Una muestra de 25 administradores de grandes hospitales participó en un estudio para investigar la naturaleza y grado de frustración y tensión emocional asociados con el trabajo. A cada participante se le hizo una prueba con el fin de estimar el grado de tensión emocional que experimentaba como resultado de los deberes y obligaciones asociados a su trabajo. La variancia de los resultados obtenidos fue de 30. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la variancia de la población es mayor que 25? Sea $\alpha = .05$.

6.7.6 En un estudio en el cual los individuos fueron 15 pacientes que sufrían de la enfermedad sarcoide pulmonar, se hicieron determinaciones de los gases en sangre. La variancia de los valores de la PaO_2 (en mm de Hg) fue de 450. Pruebe la hipótesis nula de que la variancia de la población es mayor que 250. Sea $\alpha = .05$.

6.8 PRUEBA DE LA HIPÓTESIS: RAZÓN DE LAS VARIANCIAS DE DOS POBLACIONES

Como se ha visto, el uso de la distribución *t* para construir intervalos de confianza y probar las hipótesis de la diferencia entre las medias de dos poblaciones supone que las variancias de estas últimas son iguales. Como regla, las únicas indicaciones de que se dispone acerca de las magnitudes de las variancias respectivas son las variancias calculadas a partir de las muestras extraídas de las poblaciones. Sería deseable saber si la diferencia que, indudablemente, existirá entre las variancias muestrales es indicativa de una diferencia real entre las variancias de las poblaciones, o si dicha diferencia es de magnitud tal que pudiera haber provenido únicamente del azar, cuando las variancias de las poblaciones son iguales.

Dos métodos de análisis químico pueden dar los mismos resultados en promedio. Sin embargo, es posible que los resultados obtenidos por medio de uno de los métodos sean más variables que los resultados del otro. Sería conveniente contar con algún método que permita determinar si es probable que esto sea cierto.

Estos son dos ejemplos de los muchos casos en los que el interés se centra en la cuestión de si las variancias de las poblaciones son iguales o no.

Las decisiones referentes a la comparación de las variancias de dos poblaciones se basan en general en la *prueba de la razón de variancias,* que es una prueba de la hipótesis nula de que las variancias de dos poblaciones son iguales. Cuando se prueba la hipótesis de que las variancias de dos poblaciones son iguales, de hecho se está probando la hipótesis de que su razón es igual a 1.

En el capítulo anterior se aprendió que, cuando se satisfacen ciertas suposiciones, la cantidad $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ está distribuida como F con $n_1 - 1$ grados de libertad del numerador y $n_2 - 1$ grados de libertad del denominador. Si se establece la hipótesis de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, se supone que la hipótesis es verdadera y se anula en la expresión anterior, quedando s_1^2/s_2^2, que sigue la misma distribución F. La razón s_1^2/s_2^2 se designará por R.V., la razón de la variancia.

Para una prueba bilateral, se seguirá la convención de colocar la variancia muestral más grande en el numerador y de obtener el valor crítico de F para $\alpha/2$ y los grados de libertad apropiados. Sin embargo, para una prueba unilateral, se predetermina cuál de las dos variancias muestrales es la que va a colocarse en el numerador a través del enunciado de la hipótesis nula. Por ejemplo, para la hipótesis nula de que $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$, la estadística de prueba apropiada es R.V. $= s_1^2/s_2^2$. Se obtiene el valor crítico de F para α (no para $\alpha/2$) y los grados de libertad apropiados. De modo semejante, si la hipótesis nula es $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$, la estadística de prueba apropiada es R.V. $= s_2^2/s_1^2$. En todos los casos, la regla de decisión es rechazar la hipótesis nula si la R.V. calculada es igual a o mayor que el valor crítico de F.

Ejemplo 6.8.1

Una muestra aleatoria de 22 estudiantes de fisioterapia efectuó la misma prueba de destreza manual que las enfermeras mencionadas en el ejemplo 6.7.1. La variancia muestral de estudiantes de fisioterapia fue de 1,600. Se desea saber si estos datos proporcionan evidencia suficiente para concluir que la variancia de las calificaciones de la prueba de destreza manual efectuada por la población representada por los estudiantes de fisioterapia es mayor que la variancia de la población representada por la muestra de los estudiantes de enfermería.

1. *Datos*. Las variancias muestrales fueron, respectivamente, 1,600 y 1,225.
2. *Suposiciones*. Los datos constituyen muestras aleatorias independientes, cada una extraída de una población con distribución normal. Estas son suposiciones generales que deben satisfacerse para que la siguiente prueba sea válida.

3. *Hipótesis.*

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$$
$$H_A: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

4. *Estadística de prueba.*

$$\text{R. V.} = s_1^2/s_2^2$$

5. ***Distribución de la estadística de prueba.*** Cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística de prueba está distribuida como F con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad.
6. ***Regla de decisión.*** Sea $\alpha = .05$. El valor crítico de F, encontrado en la tabla J, es de 2.39. Nótese que la tabla J no contiene un registro para 21 grados de libertad del numerador y, por lo tanto, 2.39 se obtiene utilizando 20, el valor más próximo al 21 en la tabla. Se rechaza H_0 si R. V. $\geqslant$ 2.39. Las regiones de aceptación y de rechazo se muestran en la figura 6.8.1.

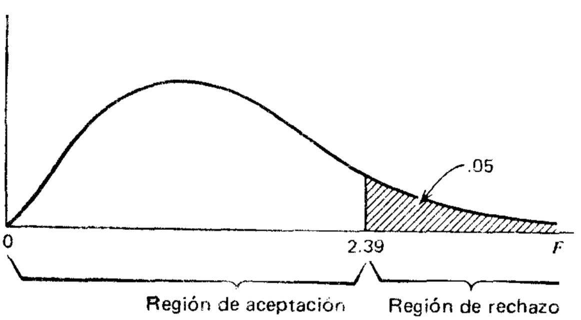


Figura 6.8.1 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 6.8.1.

7. ***Estadística de prueba calculada.***

$$\text{R. V.} = \tfrac{1600}{1225} = 1.31$$

8. ***Decisión estadística.*** No puede rechazarse H_0, ya que $1.31 < 2.39$, es decir, la razón calculada cae en la región de aceptación.

9. *Conclusión*. No puede concluirse que las dos variancias no sean iguales. Dado que la R. V. calculada es de 1.31 es menor que 1.96, el valor p para esta prueba es mayor que .10.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, lleve a cabo la prueba de nueve pasos. Determine el vapor p para cada prueba.

6.8.1 Se analizaron los valores de índice cardiaco (litros/minuto/M^2) en dos grupos de pacientes después de practicarles trasplante de la válvula prostética. Los tamaños muestrales y las variancias fueron las siguientes: $n_1 = 16, s_1{}^2 = 3.75, n_2 = 10, s_2{}^2 = 1.8$. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia en las variancias de las poblaciones? Sea $\alpha = .05$.

6.8.2 Se inyectaron organismos viables del *Toxoplasma gondii* en 21 conejillos de Indias normales y en 21 de estos animales infectados crónicamente con dicho toxoplasma. Veinticuatro horas después se hicieron las mediciones del diámetro del eritema en el sitio de reacción. Las variancias muestrales calculadas a partir de estas observaciones fueron de 10 mm^2 para el grupo infectado y de 3 mm^2 para el grupo normal. ¿Puede concluirse a partir de estos datos que la variancia de la población del grupo infectado es mayor que la del grupo normal? Sea $\alpha = .05$.

6.8.3 Se efectuó una prueba designada para estimar el nivel de ansiedad de una muestra de pacientes hombres y de una muestra de pacientes mujeres un poco antes de practicarles la misma intervención quirúrgica. Los tamaños de las muestras y las variancias calculadas a partir de las calificaciones obtenidas fueron los siguientes:

Hombres: $n = 16, \quad s^2 = 150$

Mujeres: $n = 21, \quad s^2 = 275$

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que en las poblaciones representadas las calificaciones obtenidas por las mujeres son mejores que las obtenidas por los hombres? Sea $\alpha = .05$.

6.8.4 En un experimento para estimar los efectos que tiene en las ratas el humo del cigarro, se expuso a 11 animales al humo de cigarros sin filtro y no se expuso a otros 11 animales de control. Al término del experimento, se midió la frecuencia del movimiento ciliar (batimientos/min a 20°C) en cada animal. La variancia para el grupo expuesto fue de 3,400 y de 1,200 para el grupo no expuesto. ¿Indican estos datos que en las poblaciones representadas las variancias son distintas? Sea $\alpha = .05$.

6.8.5 Se comparó la eficacia de dos medicamentos para aliviar el dolor con base en el lapso que transcurre entre su administración y el cese del dolor. 13 pacientes recibieron el medicamento 1 y otros 13 el medicamento 2. Las variancias muestrales fueron $s_1^2 = 64$ y $s_2^2 = 16$. Pruebe la hipótesis nula de que las variancias de las dos poblaciones son iguales. Sea $\alpha = .05$.

6.8.6 Se hicieron determinaciones del volumen celular en masa en dos grupos de niños con cianosis congénita del corazón. Los tamaños muestrales y las variancias fueron las siguientes:

Grupo	n	s^2
1	10	40
2	16	85

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la variancia de la población 2 es mayor que la variancia de la población 1? Sea $\alpha = .05$.

6.9 RESUMEN

En este capítulo se trataron los conceptos generales de las pruebas de hipótesis. Se sugiere un procedimiento general para llevar a cabo las pruebas de hipótesis, el cual consta de los siguientes nueve pasos.

1. Descripción de los datos.
2. Enunciado de las suposiciones necesarias.
3. Enunciado de las hipótesis nula y alternativa.
4. Especificación de la estadística de prueba.

5. Especificación de la distribución de la estadística de prueba.
6. Enunciado de la regla de decisión.
7. Cálculo de la estadística de prueba a partir de los datos de la muestra.
8. Decisión estadística basada en los resultados de la muestra.
9. Conclusión.

Se describen con detalle cierto número de pruebas de hipótesis específicas y se ilustran con ejemplos apropiados. Estas incluyen pruebas referentes a medias de las poblaciones, diferencia entre las medias de dos poblaciones, comparaciones apareadas, proporciones de las poblaciones, diferencia entre las proporciones de dos poblaciones, variancia de una sola población y la razón de las variancias de dos poblaciones.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. ¿Cuál es el propósito de la prueba de la hipótesis?
2. ¿Qué es una hipótesis?
3. Enumere y explique cada paso del procedimiento de pruebas de hipótesis de nueve pasos.
4. ¿Qué es un error del tipo I?
5. ¿Qué es un error del tipo II?
6. Explique cómo se decide qué proposición va en la hipótesis nula y cuál en la hipótesis alternativa.
7. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan el uso de la estadística t al probar las hipótesis relativas a una sola media? ¿Cuáles a la diferencia entre dos medias?
8. Cuándo puede utilizarse la estadística z para probar hipótesis acerca de

   a) la media de una sola población,
   b) la diferencia entre las medias de dos poblaciones,
   c) la proporción de una sola población,
   d) la diferencia entre las proporciones de dos poblaciones.

9. Al probar una hipótesis acerca de la diferencia entre las medias de dos poblaciones, ¿cuál es la razón que fundamenta el que se mancomunen las variancias de las muestras?

10. Explique las razones que fundamentan el uso de la prueba de comparaciones apareadas.
11. Dé un ejemplo de un campo que le interese, donde resulte apropiada una prueba de comparaciones pareadas. Utilice datos reales o realistas y efectúe una prueba de hipótesis apropiada.
12. Dé un ejemplo de un campo que le interese, donde sea apropiado probar una hipótesis acerca de la diferencia entre las medias de dos poblaciones. Utilice datos reales o realistas y lleve a cabo el procedimiento de prueba de la hipótesis de nueve pasos.
13. Resuelva el ejercicio 12 para la media de una sola población.
14. Resuelva el ejercicio 12 para la proporción de una sola población.
15. Resuelva el ejercicio 12 para la diferencia entre las proporciones de dos poblaciones.
16. Resuelva el ejercicio 12 para la variancia de una población.
17. Resuelva el ejercicio 12 para la razón de las variancias de dos poblaciones.
18. Un estudio sobre salud en adultos que viven en zonas rurales y urbanas, residentes de un país en desarrollo, reveló la siguiente información:

Grupo	Número en la muestra	Número de ciegos
Rural	300	24
Urbano	500	15

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia en la frecuencia de ceguera en las dos poblaciones? Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

19. Durante un experimento en el que se utilizaron animales de laboratorio, se registraron los siguientes datos sobre el flujo sanguíneo cortical renal durante condiciones de control y durante la administración de cierto anestésico.

Número del animal	*Flujo sanguíneo cortical renal (ml/g/min)* Control	*Durante la administración del anestésico*
1	2.35	2.00
2	2.55	1.71
3	1.95	2.22
4	2.79	2.71
5	3.21	1.83
6	2.97	2.14
7	3.44	3.72
8	2.58	2.10
9	2.66	2.58
10	2.31	1.32
11	3.43	3.70
12	2.37	1.59
13	1.82	2.07
14	2.98	2.15
15	2.53	2.05

¿Puede concluirse con base en estos datos que el anestésico retarda el flujo sanguíneo cortical renal? Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

20. Un grupo de investigación en alergia llevó a cabo un estudio en el que se utilizaron dos grupos de individuos. Como parte de la investigación, se hicieron determinaciones de los eosinófilos de la sangre en cada individuo, obteniéndose los resultados siguientes:

Grupo	n	Valor medio de eosinófilos (No. /mm^3)	s
A	14	584	225
B	16	695	185

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que las medias de las poblaciones son distintas? Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

21. Un estudio de 90 mujeres, que habían dado a luz recientemente, de los registros de un departamento de bienestar social reveló que

27 de ellas tuvieron un problema de infección intrapartum o postpartum. Pruebe la hipótesis nula de que la proporción de la población con un problema de infección intrapartum o postpartum es menor que o igual a .25. Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

22. En una muestra de 150 admisiones a un hospital de emergencias con cierto diagnóstico, 128 personas presentaron vómito. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique, al nivel .01 de importancia, que la proporción de la población es menor que .92? Determine el valor p.
23. Un grupo de investigadores midieron el volumen tidal en 15 animales de laboratorio. La media y la desviación estándar fueron, respectivamente, 45 y 5 cc. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la media de la población es mayor que 40 cc? Sea $\alpha = .05$.
24. Una muestra de ocho pacientes admitidos en un hospital con diagnóstico de cirrosis biliar tuvo una concentración media de Ig M de 160.55 unidades por ml. La desviación estándar muestral fue de 50. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la media de la población es mayor que 150? Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.
25. Algunos investigadores han observado una mayor resistencia de las vías respiratorias en fumadores que en no fumadores. Supóngase que un estudio llevado a cabo para comparar el porcentaje de retención traqueobronquial de las partículas en gemelos monocigóticos fumadores discordantes proporcionó los resultados siguientes:

Retención por ciento	
Gemelo fumador	Gemelo no fumador
60.6	47.5
12.0	13.3
56.0	33.0
75.2	55.2
12.5	21.9
29.7	27.9
57.2	54.3
62.7	13.9
28.7	8.9
66.0	46.1
25.2	29.8
40.1	36.2

¿Apoyan estos datos la hipótesis de que la depuración traqueobronquial es más lenta en los fumadores? Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p para esta prueba.

REFERENCIAS

Refernciass citadas

1. Jean D. Gibbons y John W. Pratt, "*P*-values: Interpretation and Methodology," *The American Statistician, 29* (1975), 20-25.
2. Anita K. Bahn, "*P* y the Null Hipothesis," *Annals of Internal Medicine, 76* (1972), 674.
3. Wayne W. Daniel, "What are *p*-values? How are They Calculated? How are they Related to Levels of Significance?" *Nursing Research, 26* (1977), 304-306.
4. Wayne W. Daniel, *Introductory Statistics with Applications,* Houghton Mifflin, Boston, 1977.

Otras referencias, artículos de revistas

1. Arnold Binder, "Further Considerations of Testing the Null Hypothesis and the Strategy and Tactics of Investigating Theoretical Models," *Psychological Review, 70* (1963), 107-115.
2. C. Allen Boneau, "The Effects of Violations of Assumptions Underlying the *t* Test," *Psychological Bulletin, 57* (1960), 49-64.
3. C. J. Burke, "A Brief Note on One-tailed Tests," *Psychological Bulletin, 50* (1953), 384-387.
4. C. J. Burke, "Further Remarks on One-tailed Tests," *Psychological Bulletin, 51* (1954), 587-590.
5. Wayne W. Daniel, "Statistical Significance versus Practical Significance," *Science Education, 61* (1977) 423-427.
6. Eugene S. Edgington, "Statistical Inference and Nonrandom Samples," *Psychological Bulletin, 66* (1966), 485-487.
7. Ward Edwards, "Tactical Note on the Relation Between Scientific and Statistical Hypotheses," *Psychological Bulletin, 63* (1965), 400-402.
8. William E. Feinberg, "Teaching the Type I and Type II Errors: The Judical Process," *The American Statistician, 25* (Jun. 1971), 30-32.
9. I. J. Good, "What Are Degrees of Freedom?" *The American Statistician, 27* (1973), 227-228.

10. David A. Grant, "Testing the Null Hypothesis and the Strategy and Tactics of Investigatin Theoretical Models," *Psychological Review, 69* (1962), 54-61.
11. W. E. Hick, "A Note on One-tailed and Two-tailed Tests," *Psychological Review, 59* (1952), 316-318.
12. L. V. Jones, "Tests of Hypotheses: One-sided vs. Two-sided Alternatives," *Psychological Bulletin, 46* (1949), 43-46.
13. L. V. Jones, "A Rejoinder on One-tailed Tests," *Psychological Bulletin, 51* (1954), 585-586.
14. Sanford Labovitz, "Criteria for Selecting a Significance Level: A Note on the Sacredness of .05," *The American Sociologist, 3* (1968), 220-222.
15. William Lurie, "The Impertinent Questioner: The Scientist's Guide to the Statistician's Mind," *American Scientist, 46* (1958), 57-61.
16. M. R. Marks, "One- and Two-tailed Tests," *Psychological Review, 60* (1953), 207-208.
17. C. A. McGilchrist y J. Y. Harrison, "Testing of Means with Different Alternatives," *Technometrics, 10* (1968), 195-198.
18. Mary G. Natrella, "The Relation Between Confidence Intervals and Tests of Significance," *American Statistician, 14* (1960), 20-22, 33.
19. O. B. Ross, Jr., "Use of Controls in Medical Research," *Journal of the American Medical Association, 145* (1951), 72-75.
20. William W. Rozeboom, "The Fallacy of the Null-Hypothesis Significance Test," *Psychological Bulletin, 57* (1960), 416-428.
21. H. C. Selvin, "A Critique of Tests of Significance in Survey Research," *American Sociological Review, 22* (1957), 519-527.
22. James K. Skipper, Anthony L. Guenther y Gilbert Nass, "The Sacredness of .05: A Note Concerning the Uses of Significance in Social Science," *The American Sociologist, 2* (1967), 16-18.
23. Warren R. Wilson y Howard Miller, "A Note on the Inconclusiveness of Accepting the Null Hypothesis," *Psychological Review, 71* (1964), 238-242.
24. Warren Wilson, Howard L. Miller y Jerold S. Lower, "Much Ado About the Null Hypothesis," *Psychological Bulletin, 67* (1967), 188-196.
25. R. F. Winch y D. T. Campbell, "Proof? No. Evidence? Yes. The Significance of Tests of Significance," *American Sociologist, 4* (1969), 140-143.

Otras referencias, libros

1. W. I. B. Beveridge, *The Art of Scientific Investigation,* tercera edición, W. W. Norton, Nueva York, 1957.
2. Dwight J. Ingle, *Principles of Research in Biology and Medicine,* J. B. Lippincott, Filadelfia, 1958.
3. E. L. Lehman, *Testing Statistical Hypotheses,* Wiley, Nueva York, 1959.

Otras referencias, otras publicaciones

1. David Bakan, "The Test of Significance in Psychological Research," en *On Method: Toward a Reconstruction of Psychological Investigation,* Jossey-Bass, San Francisco, 1967.
2. William H. Kruskal, "Tests of Significance," en *International Encyclopedia of the Social Sciences, 14* (1968), 238-250.

7

Análisis de la variancia

7.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron los conceptos básicos de la estadística que constituyen el fundamento del presente capítulo y los siguientes.

En este capítulo se estudia el *análisis de la variancia*, que puede definirse como *una técnica mediante la cual la variación total presente en un conjunto de datos se distribuye en varios componentes. Asociada con cada uno de estos componentes hay una fuente específica de variación, de modo que en el análisis es posible averiguar la magnitud de las contribuciones de cada una de estas fuentes a la variación total.*

El desarrollo de esta materia se debe principalmente al trabajo del desaparecido R. A. Fisher,[1] cuyas contribuciones a la estadística, que abarcaron los años de 1912 a 1962, han tenido mucha influencia en el pensamiento estadístico moderno.[2,3]

El análisis de la variancia tiene su aplicación más amplia en el análisis de los datos obtenidos a partir de experimentos. Los principios del diseño de experimentos se analizan ampliamente en varios libros, incluyendo los de Cochran y Cox,[4] Cox,[5] Davis,[6] Federer,[7] Finney,[8] Fisher,[1] John,[9] Kempthorne,[10] Li[11] y Mendelhall.[12] No se estudia este tema con detalle porque, para hacerlo así, se requeriría como mínimo un capítulo adicional. Sin embargo, algunos de los conceptos importantes en el diseño experimental resultarán obvios a medida que se vaya estudiando el análisis de la variancia.

La relación que existe entre los dos temas puede resumirse señalando que, cuando se diseñan los experimentos con el análisis en mente, el investigador puede, antes de llevar a cabo el experimento, identificar aquellas fuentes de variación que considere importantes y puede elegir un diseño que le permita medir el grado de contribución de esas fuentes a la variación total. El análisis de la variancia se utiliza con dos fines distintos: 1) estimar y probar las hipótesis acerca de las variancias de las poblaciones y 2) estimar y probar las hipótesis acerca de las medias de las poblaciones. Aquí se hará referencia a este último punto. Sin embargo, como se verá, las conclusiones referentes a las medias dependerán de las magnitudes de las variancias observadas.

Fundamentando el uso válido del análisis de la variancia como herramienta de la inferencia estadística se tiene un conjunto de suposiciones fundamentales. Para un estudio detallado de estas suposiciones, se sugiere que el lector consulte el artículo de Eisenhart.[13] Aunque un experimentador no debe esperar que se satisfagan a la perfección todas las suposiciones, es importante que quien utilice las técnicas del análisis de la variancia esté enterado de las suposiciones básicas y sea capaz de reconocer cuando no se satisfagan sustancialmente. Las consecuencias de que no se satisfagan las suposiciones son estudiadas por Cochran[14] en un artículo que acompaña al de Eisenhart. Dado que son raros los experimentos en los que se satisfacen perfectamente todas las suposiciones, Cochran sugiere que los resultados del análisis de la variancia se consideren como aproximados y no como exactos. Estas suposiciones se señalan en puntos apropiados de las siguientes secciones.

Se estudiará el análisis de la variancia como se utiliza para analizar los resultados de dos diseños experimentales distintos, los diseños completamente aleatorizados y los diseños de bloques completos aleatorizados. Además de éstos, se da el concepto del experimento factorial, a través de su uso en un diseño completamente aleatorizado. Estos no agotan las posibilidades. En las referencias (4-12) se encontrará un estudio de otros diseños.

En la presentación del análisis de la variancia para los diferentes diseños, se sigue el siguiente formato:

1. *Modelo.* El modelo consistirá de una representación simbólica de un valor típico tomado de los datos que se están analizando.
2. *Suposiciones.* Se especificarán las suposiciones que fundamentan el modelo.

3. *Hipótesis*. Se indicarán las hipótesis que pueden probarse de acuerdo al modelo. Se indicarán las hipótesis nula y alternativa apropiadas.
4. *Cálculos*. Se explicarán los cálculos aritméticos necesarios.
5. *Tabla ANDEVA*. Los resultados de los cálculos aritméticos se resumirán en una tabla que permitirá una estimación rápida y conveniente de los resultados.
6. *Decisión*. Se tomará una decisión estadística en lo referente a si debe rechazarse o no una hipótesis nula. Cualquier decisión administrativa o clínica será afectada por la decisión estadística.

Uso de las calculadoras. Los cálculos requeridos por el análisis de la variancia son más tediosos y complicados que los que se han encontrado en los capítulos anteriores. Por esta razón, la calculadora desempeña una importante función en el análisis de la variancia. Todos los ejercicios que aparecen en este capítulo son adecuados para su análisis por medio de una calculadora y pueden utilizarse con los paquetes estadísticos mencionados en el capítulo 1. La información de estos paquetes estadísticos puede variar un poco de los presentados en este capítulo, pero esto no debe presentar un importante problema para quienes utilicen una calculadora para analizar los datos de los ejercicios. Los conceptos básicos del análisis de la variancia que aquí se presentan deben proporcionar el fundamento necesario para comprender la descripción de los programas y su información en cualquiera de los paquetes estadísticos.

7.2 EL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

En el capítulo 6 se vio cómo es posible probar la hipótesis nula de no diferencia entre las medias de dos poblaciones. No es raro que el investigador esté interesado en probar la hipótesis nula de no diferencia entre las medias de varias poblaciones. El estudiante que se enfrentara por primera vez a este problema podría inclinarse a sugerir que deben probarse por separado todas las parejas posibles de medias de las muestras mediante la prueba t de Student. Supóngase que intervienen cinco poblaciones. El número de parejas posibles de medias de las muestras es de $\binom{5}{2} = 10$. Dado que la cantidad de trabajo que implica el llevar a cabo todo este gran número de pruebas t es sustancial, valdría la pena saber si se cuenta con una alternativa más eficiente para llevar a cabo el análisis. Sin embargo, una consecuencia muy importante de realizar todas estas pruebas t posibles es que es muy probable que se llegue a una conclusión falsa.

Supóngase que se extraen cinco muestras de poblaciones que tienen medias iguales. Como se ha visto, se tendrían 10 pruebas si se realizaran por separado cada una de las pruebas posibles. Si se selecciona un nivel de significación de $\alpha = .05$ para cada prueba, la probabilidad de dejar de rechazar una hipótesis de no diferencia sería en cada caso de .95. Mediante la regla de multiplicación de la probabilidad, si las pruebas fueran independientes entre sí, la probabilidad de dejar de rechazar una hipótesis de no diferencia en todos los 10 casos sería de $(.95)^{10} = .5987$. La probabilidad de rechazar, al menos, una hipótesis de no diferencia sería entonces de $1 - .5987 = .4013$. Dado que se sabe que la hipótesis nula es verdadera en cada caso de este ejemplo ilustrativo, al rechazar dicha hipótesis se comete un error del tipo I. A la larga, entonces, al probar todas las parejas posibles de medias calculadas a partir de cinco muestras, se cometería un error de este tipo en un 40 por ciento de las veces. Incluso, en la práctica, el problema se vuelve más complicado, ya que tres o más pruebas t no serían independientes entre sí.

Resulta evidente entonces que se necesita algún otro método para probar una diferencia significativa entre varias medias. El análisis de la variancia proporciona este método y, para ilustrar su uso, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2.1

En un estudio del efecto de la glucosa sobre la liberación de insulina, se trataron muestras de tejido pancreático de animales de laboratorio con cinco estimulantes distintos. Posteriormente, se determinó la cantidad de insulina liberada. Los resultados se muestran en la tabla 7.2.1. El experimentador deseaba saber si debía concluir que existe una diferencia significativa entre las cinco poblaciones con respecto a la cantidad media de insulina liberada.

1. *Modelo*. Con el fin de escribir el modelo para este ejemplo, empiécese por identificar un valor típico del conjunto de datos representados por la muestra indicada en la tabla 7.2.1; y utilícese el símbolo x_{ij} para representar este valor típico. El subíndice ij indica que este valor típico es la i-ésima observación en el grupo j-ésimo.

Tabla 7.2.1 Insulina liberada

	Estimulante					
K =	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	
	1.53	3.15	3.89	8.18	5.86	
	1.61	3.96	3.68	5.64	5.46	
	3.75	3.59	5.70	7.36	5.69	
	2.89	1.89	5.62	5.33	6.49	
	3.26	1.45	5.79	8.82	7.81	
		1.56	5.33	5.26	9.03	
				7.10	7.49	
					8.98	
Total	13.04	15.60	30.01	47.69	56.81	163.15
Media	2.61	2.60	5.00	6.81	7.10	5.10

Alternativamente, dado que los estimulantes representan tratamientos distintos, puede decirse que x_{ij} es la i-ésima observación que recibe el j-ésimo tratamiento. En el presente ejemplo, el subíndice i puede tomar cualquier valor entre 1 y n_j (el número de observaciones en el j-ésimo grupo) y j va de 1 a 5 (el número de grupos o tratamientos).

Dentro de cada grupo (o población) representado por los datos que se da, cualquier valor particular guarda la siguiente relación con la media verdadera, μ_j, de ese grupo: es igual a la media verdadera del grupo más alguna cantidad que puede ser cero, una cantidad positiva o una cantidad negativa. Esto significa que un valor particular en un grupo dado puede ser igual a la media del grupo, o bien mayor o menor que ella. Llámese *error* a la cantidad en la que cualquier valor difiere de la media de su grupo y represéntese este error por el símbolo e_{ij}. El término error no significa equivocación. Este término se utiliza para referirse a la variación no controlada que existe entre los miembros de cualquier población. Dada una población de hombres adultos, por ejemplo, se sabe que las estaturas de algunos individuos están por arriba de la estatura media verdadera de la población, mientras que algunas estaturas muestran lo contrario. Esta variación se debe a miles de factores hereditarios y ambientales. Si a cualquier media de grupo, μ_j, se le agrega un error dado, e_{ij}, el resultado será x_{ij}, la observación que se desvía de la media del grupo por la cantidad e_{ij}.

Puede escribirse esta relación simbólicamente como

$$x_{ij} = \mu_j + e_{ij} \tag{7.2.1}$$

Resolviendo para e_{ij} se tiene que

$$e_{ij} = x_{ij} - \mu_j \tag{7.2.2}$$

Si se tienen k poblaciones (en el presente ejemplo $k = 5$), puede nombrarse a la gran media de todas las observaciones en todas las poblaciones como μ. Dadas k poblaciones, podría calcularse μ, tomando el promedio de las medias de las k poblaciones, es decir,

$$\mu = \frac{\sum \mu_j}{k} \tag{7.2.3}$$

Así como una observación particular dentro de un grupo difiere en general de la media de este último por cierta cantidad, la media de un grupo particular difiere de la gran media por alguna cantidad. La cantidad en la cual la media de un grupo difiere de la gran media se conoce como *efecto del tratamiento*. El j-ésimo efecto del tratamiento puede escribirse como

$$\tau_j = \mu_j - \mu \tag{7.2.4}$$

τ_j es una medida del efecto en μ_j por haber sido calculada a partir de las observaciones que recibieron el j-ésimo tratamiento.

Puede resolverse la ecuación 7.2.4 para μ_j y obtener

$$\mu_j = \mu + \tau_j \tag{7.2.5}$$

Si se sustituye el miembro de la derecha de la ecuación 7.2.5 por μ_j en la ecuación 7.2.1, se tiene que

$$x_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots n_j; \quad j = 1, 2, \ldots k \tag{7.2.6}$$

y el modelo queda especificado.

Observando el modelo, puede apreciarse que una observación típica del conjunto total de datos bajo estudio está compuesta por la gran media, un efecto del tratamiento y un término de error que representa la desviación de la observación de la media de su grupo.

La discusión de este libro está limitada a lo que se conoce como Modelo I o análisis de efectos fijos del modelo de la variancia.

2. *Suposiciones*. El uso del modelo de efectos fijos implica que se está interesado sólo en las k poblaciones representadas por los datos de la muestra. Cualquier inferencia que pueda hacerse se aplica sólo a estas poblaciones. Por ejemplo, si los tratamientos consistieran de tres regímenes para bajar de peso, cualquier inferencia que pudiera hacerse bajo el Modelo I estaría limitada a esos tres regímenes. Las inferencias no podrían ampliarse hasta cualquier conjunto de regímenes más grande para bajar de peso.

La información respecto a otros modelos se encontrará en los artículos escritos por Eisenhart,[13] Wilk y Kempthorne,[15] Crump,[16] Cunningham y Henderson,[17] Henderson,[18] Rutherford,[19] Schultz[20] y Searle.[21]

Las suposiciones para el modelo de efectos fijos son las siguientes :

a) Los k conjuntos de datos observados constituyen k muestras aleatorias independientes de las poblaciones respectivas.
b) Cada una de las poblaciones de las cuales provienen las muestras está distribuida normalmente, con media μ_j y variancia σ_j^2.
c) Cada una de las poblaciones tiene la misma variancia. Es decir, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$, la variancia común.
d) Los τ_j son constantes desconocidas y $\Sigma\tau_j = 0$, ya que la suma de todas las desviaciones de las μ_j respecto de su media, μ, es cero. Tres consecuencias de la relación.

$$e_{ij} = x_{ij} - \mu_j$$

especificada en la ecuación 7.2.2 son:

i) Los e_{ij} tienen una media de 0, ya que la media de x_{ij} es μ_j.
ii) Los e_{ij} tienen una variancia igual a la variancia de los x_{ij}, ya que los e_{ij} y los x_{ij} sólo difieren por una constante, es decir, la variancia del error es igual a σ^2, la variancia común especificada en la suposición 3 anterior.
iii) Los e_{ij} están normalmente (e independientemente) distribuidos.

3. *Hipótesis*. Puede probarse la hipótesis nula de que todas las medias de los grupos (poblaciones) o tratamientos son iguales contra la alternativa de que los miembros de por lo menos una pareja no son iguales. Pueden enunciarse formalmente estas hipótesis como sigue:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$
$$H_A: \text{no todas las } \mu_j \text{ son iguales.}$$

Si las medias de las poblaciones son iguales, cada efecto del tratamiento es igual a cero, de modo que, alternativamente, las hipótesis pueden enunciarse como

$$H_0: \tau_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$
$$H_A: \text{no todos los } \tau_j = 0$$

En este punto, se elige el nivel de importancia, α.
Para el presente ejemplo, se tiene que

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

$$H_A: \text{no todas las } \mu_j \text{ son iguales.}$$

Utilícese un nivel de importancia de .05.

Si H_0 es verdadera y se satisfacen las suposiciones de variancias iguales y poblaciones con distribución normal, la situación de las poblaciones se observa como en la figura 7.2.1. Cuando H_0 es verdadera, todas las medias de las poblaciones son iguales, y las poblaciones se centran en el mismo punto (la media común) sobre el eje horizontal. Si las poblaciones muestran distribución normal con variancias iguales, las distribuciones serán idénticas, de modo que al trazar las gráficas se superponen unas con otras, y sólo una de ellas las representa convenientemente.

Cuando H_0 es falsa, puede serlo debido a que una de las medias de las poblaciones difiere de todas las demás que son iguales entre sí. O bien puede ocurrir que todas las medias de las poblaciones sean distintas. Estas son sólo dos de las posibilidades cuando H_0 es falsa. Hay muchas otras combinaciones posibles de medias iguales y distintas. La figura 7.2.2. muestra la gráfica de las poblaciones cuando se

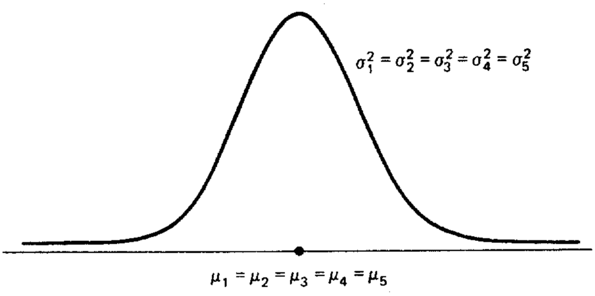


Figura 7.2.1 Gráfica de las poblaciones representadas por el ejemplo 7.2.1 cuando H_0 es verdadera y se cumple la hipótesis.

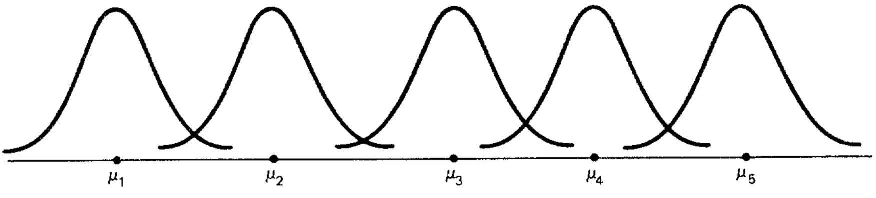


Figura 7.2.2 Gráfica de las poblaciones representadas en el ejemplo 7.2.1 cuando se cumplen las hipótesis de variancias iguales y poblaciones con distribución normal, pero cuando H_0 es falsa debido a que ninguna de las medias de las poblaciones son iguales.

satisfacen las suposiciones, pero H_0 es falsa debido a que no hay dos medias de poblaciones que sean iguales.

4. *Cálculos.* Los cálculos se facilitarán si se prepara una tabla para presentar los datos de la muestra como se hizo en la tabla 7.2.1. En general, dicha tabla contendrá la información que se muestra en la tabla 7.2.2. Los símbolos utilizados en esta tabla se definen como sigue:

x_{ij} = la i-ésima observación que recibe el j-ésimo tratamiento,

$i = 1, 2, \ldots, n_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k$

$T_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ = total de la j-ésima columna

Tabla 7.2.2 Tabla de valores de la muestra para el diseño completamente aleatorizado.

	Tratamiento					
	1	2	3	$\cdots$	k	
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1k}	
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2k}	
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\cdots$	x_{3k}	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	$x_{n_3 3}$	$\cdots$	$x_{n_k k}$	
Total	$T_{.1}$	$T_{.2}$	$T_{.3}$		$T_{.k}$	$T_{..}$
Media	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.3}$		$\bar{x}_{.k}$	$\bar{x}_{..}$

$$\bar{x}_{.j} = \frac{T_{.j}}{n_j} = \text{media de la } j\text{-ésima columna}$$

$$T_{..} = \sum_{j=1}^{k} T_{.j} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} = \text{total de todas las observaciones}$$

$$\bar{x}_{..} = \frac{T_{..}}{N}, \qquad N = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

Se ha definido el análisis de la variancia como un proceso mediante el cual la variación total presente en un conjunto de datos se distribuye en componentes atribuibles a diferentes fuentes. El término *variación* utilizado en este contexto se refiere a *la suma de las desviaciones al cuadrado de las observaciones respecto de su media*, o bien, en forma breve, *la suma de cuadrados.*

Los datos para el ejercicio 7.2.1 se han graficado en la figura 7.2.3. En ella se observa la relación que existe entre $\bar{x}_{..}$, que estima a la μ del modelo; las $\bar{x}_{.j}$, las medias de las muestras; las x_{ij}, las observaciones reales y las $\hat{e}_{ij}$, las estimaciones de las e_{ij} del modelo.

Suma total de cuadrados. Antes de que pueda hacerse partición alguna, primero debe obtenerse la suma total de cuadrados. La suma total de cuadrados es la suma de los cuadrados de las desviaciones de

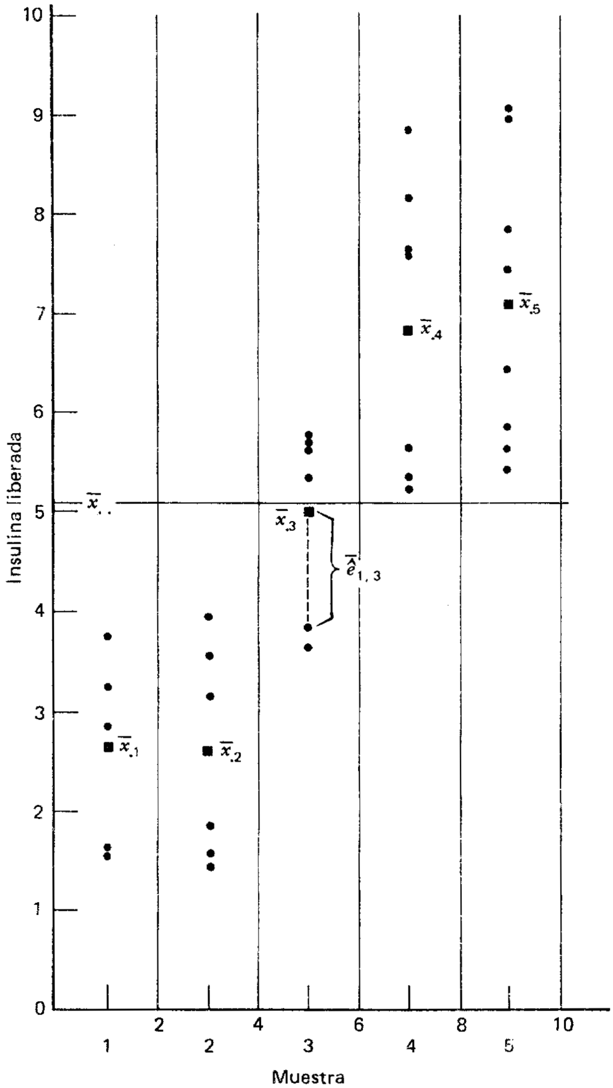


Figura 7.2.3 Gráfica de los datos dados en la tabla 7.2.1 para el ejemplo 7.2.1.

cada observación de la media de todas las observaciones tomadas en conjunto. Esta *suma total de cuadrados* se define como

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 \tag{7.2.7}$$

donde $\sum_{i=1}^{n_j}$ indica que se suman las desviaciones al cuadrado para cada grupo y $\sum_{j=1}^{k}$ señala que se suman los k totales de grupo obtenidos al aplicar $\sum_{i=1}^{n_j}$. El lector reconocerá la ecuación 7.2.7 como el numerador de la variancia que puede calcularse a partir del conjunto completo de observaciones tomadas en conjunto.

Puede volver a escribirse la ecuación 7.2.7 como

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} \tag{7.2.8}$$

que es más conveniente para propósitos de cálculo.

La suma total de cuadrados para el ejemplo ilustrativo es

$$\begin{aligned} SC_{\text{total}} &= (1.53)^2 + (1.61)^2 + \cdots + (8.98)^2 - \frac{(163.15)^2}{32} \\ &= 994.3529 - \frac{26617.923}{32} \\ &= 994.3529 - 831.81008 \\ &= 162.54282 \end{aligned}$$

Se procede ahora con la partición de la suma total de cuadrados. Es posible, sin cambiar su valor, introducir $-\bar{x}_{.j} + \bar{x}_{.j}$ en el paréntesis de la ecuación 7.2.7. El lector reconocerá a esta cantidad como un bien elegido cero que no cambia el valor de la expresión. El resultado de esta adición es

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 \tag{7.2.9}$$

Si se agrupan los términos y se desarrolla, se tiene que

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} [(x_{ij} - \bar{x}_{.j}) + (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + 2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 \qquad (7.2.10)$$

El término de en medio de la expresión anterior puede escribirse como

$$2 \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}) \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j}) \qquad (7.2.11)$$

El examen de la ecuación 7.2.11 revela que este término es igual a cero, ya que la suma de las desviaciones de un conjunto de valores respecto de su media, como en $\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})$, es igual a cero.

Puede ahora escribirse la ecuación 7.2.10 como

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 \qquad (7.2.12)$$

Cuando el número de observaciones es el mismo en cada grupo, puede volver a escribirse el último término de la derecha para dar

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + n \sum_{j=1}^{K} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 \qquad (7.2.13)$$

donde $n = n_1 = n_2 = \cdots = n_k$.

Suma de los cuadrados dentro de los grupos. Ahora está completa la partición de la suma total de cuadrados y se aprecia que, en el presente caso, existen dos componentes. Se investigará ahora la naturaleza y fuente de estos dos componentes de variación.

Si se observa el primer término de la derecha de la ecuación 7.2.12, se observa que el primer paso en el cálculo indicado requiere que se realicen ciertos cálculos *dentro* de cada grupo. Estos cálculos comprenden el cómputo, dentro de cada grupo, de la suma de las desviaciones al cuadrado de las observaciones individuales respecto de su media. Cuando se han llevado a cabo estos cálculos dentro de cada grupo, el símbolo $\sum_{j=1}^{k}$ indica que debe obtenerse la suma de los resultados de cada uno de los grupos. Este componente de variación se conoce como ***suma de cuadrados dentro de los grupos*** y puede designarse por SC_{dentro}. Esta cantidad a veces se conoce como suma de cuadrados *residual* o *de error*. La expresión puede escribirse, en una forma más conveniente para su cómputo, como sigue:

$$SC_{\text{dentro}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{(T_{.j})^2}{n_j} \tag{7.2.14}$$

Utilizando los datos de la tabla 7.2.1, se encuentra que la suma de cuadrados dentro de los grupos para el ejemplo 7.2.1 es

$$\begin{aligned} SC_{\text{dentro}} &= (1.53)^2 + (1.61)^2 + \cdots + (8.98)^2 \\ &\quad - \left[\frac{(13.04)^2}{5} + \frac{(15.60)^2}{6} + \frac{(30.01)^2}{6} + \frac{(47.69)^2}{7} + \frac{(56.81)^2}{8}\right] \\ &= 994.3529 - (34.00832 + 40.56 \\ &\quad + 150.10002 + 324.90516 + 403.42201) \\ &= 994.3529 - 952.99551 \\ &= 41.35739 \end{aligned}$$

Suma de los cuadrados entre los grupos. Ahora se examinará el segundo término a la derecha de la ecuación 7.2.12. La operación requerida por este término es la de obtener, para cada grupo, la desviación al cuadrado de la media del grupo a partir de la gran media y multiplicar el resultado por el tamaño del grupo. Finalmente, deben sumarse estos resultados a todos los grupos. Esta cantidad es una medida de la variación entre los grupos y se conoce como *suma de los cuadrados entre los grupos* o SC_{entre}. La fórmula de cómputo es la siguiente:

$$SC_{\text{entre}} = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - T_{..}^2/N \tag{7.2.15}$$

La SC_{entre} para el ejemplo ilustrativo se calculó de la manera siguiente:

$$SC_{\text{entre}} = \frac{(13.04)^2}{5} + \frac{(15.60)^2}{6} + \frac{(30.01)^2}{6} + \frac{(47.69)^2}{7} + \frac{(56.81)^2}{8} - \frac{(163.15)^2}{32}$$

$$= 952.99551 - 831.81008$$

$$= 121.18543$$

En resumen, entonces, se ha encontrado que la suma total de cuadrados es igual a la suma de la suma de cuadrados entre los grupos y la suma de cuadrados dentro de los grupos. Esta relación se expresa como sigue:

$$SC_{\text{total}} = SC_{\text{entre}} + SC_{\text{dentro}}$$

Para el ejemplo ilustrativo, se tiene que

$$162.54282 = 121.18543 + 41.35739$$

$$162.54282 = 162.54282$$

5. *Análisis de la tabla de variancias.* A partir de las sumas de cuadrados que se acaban de calcular, pueden obtenerse dos estimaciones de la variancia común de la población, σ^2. Puede demostrarse que cuando se satisfacen las suposiciones y todas las medias de las poblaciones son iguales, tanto la suma de cuadrados entre los grupos como la suma de cuadrados dentro de los grupos se dividen entre sus respectivos grados de libertad, proporcionan estimaciones independientes e insesgadas de σ^2.

Primera estimación de σ^2. Dentro de cualquier muestra, la expresión

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2}{n_j - 1}$$

proporciona una estimación insesgada de la variancia verdadera de la población de la cual provino la muestra. Bajo la suposición de que todas las variancias de las poblaciones son iguales, pueden mancomunarse las k estimaciones para obtener la expresión

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2}{\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)} \tag{7.2.16}$$

Esta es la primera estimación de σ^2 y puede llamarse *variancia dentro de los grupos*, ya que es la suma de los cuadrados dentro de los grupos de la ecuación 7.2.14 dividida entre los grados de libertad apropiados. El estudiante reconocerá esto como una extensión hasta k muestras del procedimiento de mancomunar variancias encontrado en los capítulos 5 y 6 cuando se mancomunaron las variancias de dos muestras con el fin de utilizar la distribución t. La cantidad de la ecuación 7.2.16 suele conocerse como el *cuadrado medio* dentro de los grupos, más que la variancia dentro de los mismos. El cuadrado medio dentro de los grupos para el ejemplo ilustrativo es

$$CM_{\text{dentro}} = \frac{SC_{\text{dentro}}}{27} = \frac{41.35739}{27} = 1.5317552$$

El cuadrado medio dentro de los grupos es una estimación válida de σ^2 sólo si las variancias de las poblaciones son iguales. Sin embargo, no es necesario que H_0 sea verdadera para que el cuadrado medio dentro de los grupos sea una estimación válida de σ^2. Es decir, el cuadrado medio dentro de los grupos estima a σ^2 sin importar si H_0 es falsa o verdadera, siempre que las variancias de las poblaciones sean iguales.

Segunda estimación de σ^2. La segunda estimación de σ^2 puede obtenerse a partir de la conocida fórmula para la variancia de las medias de las muestras, $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$. Si se resuelve esta ecuación para σ^2, la variancia de la población de la cual se extrajeron las muestras, se tiene que

$$\sigma^2 = n\sigma_{\bar{x}}^2 \tag{7.2.17}$$

Una estimación insesgada de $\sigma_{\bar{x}}^2$, calculada a partir de los datos de la muestra, es proporcionada por la expresión

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2}{k - 1}$$

Si se sustituye esta cantidad en la ecuación 7.2.17, se obtiene la estimación deseada de σ^2,

$$\frac{n \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2}{k-1} \tag{7.2.18}$$

El lector reconocerá el numerador de la ecuación 7.2.18 como la suma de cuadrados entre los grupos, para el caso especial en que todos los tamaños de muestra son iguales. Cuando se divide esta suma de cuadrados entre los grados de libertad asociados $k - 1$, se obtiene lo que se conoce como *cuadrado medio entre los grupos.*

Cuando no son iguales todos los tamaños de muestra, una estimación de σ^2 basada en la variabilidad entre las medias de las muestras es la proporcionada por la expresión.

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2}{k-1} \tag{7.2.19}$$

Como ejemplo ilustrativo se tiene el siguiente cuadrado medio entre los grupos:

$$CM_{\text{entre}} = \frac{SC_{\text{entre}}}{(5-1)} = \frac{121.18543}{4} = 30.296358$$

Si, además, la hipótesis nula es verdadera, es de esperarse que estas dos estimaciones de σ^2 tengan una magnitud muy semejante. Si la hipótesis nula es falsa, es decir, si todas las medias verdaderas de grupo no son iguales, se esperaría que el cuadrado medio entre los grupos, que se calcula utilizando las desviaciones al cuadrado de esas medias respecto de la media conjunta, fuera mayor que el cuadrado medio dentro de los grupos.

Para comprender el análisis de la variancia, debe tenerse en cuenta que el cuadrado medio entre los grupos proporciona una estimación válida de σ^2 cuando se satisface la suposición de variancias iguales en las poblaciones *y cuando* H_0 es verdadera. Ambas condiciones, una hipótesis nula verdadera y variancias iguales en las poblaciones, deben cumplirse para que el cuadrado medio entre los grupos sea una estimación válida de σ^2.

La razón de variancias. Lo que se necesita ahora es comparar estas dos estimaciones de σ^2 ; esto se hace calculando la razón de variancias siguiente:

$$\text{R. V.} = \frac{\text{cuadrado medio entre los grupos}}{\text{cuadrado medio dentro de los grupos}}$$

Si las dos estimaciones son casi iguales, la razón de variancias (R. V.) es casi igual a 1. Una razón próxima a 1 tiende a apoyar la hipótesis de medias iguales en las poblaciones. Si, por otra parte, el cuadrado medio entre los grupos es considerablemente mayor que el cuadrado medio dentro de los grupos, la R. V. será considerablemente mayor que 1. Un valor de la R. V. considerablemente mayor que 1 ocasionaría dudas sobre la hipótesis de medias iguales en las poblaciones.

Se sabe que debido a la variable del muestreo, aun cuando la hipótesis nula sea verdadera, es improbable que los cuadrados medios entre los grupos y dentro de los mismos sean iguales. Debe decidirse entonces qué tan grande tiene que ser la diferencia observada antes de poder concluir que la diferencia se debe a algo que no es fluctuación del muestreo. En otras palabras, ¿qué tan grande debe ser un valor de la R. V. para poder concluir que la diferencia observada entre las dos estimaciones de σ^2 no es resultado únicamente del azar?

La prueba F. Para responder la pregunta anterior, debe considerarse la distribución muestral de la razón de las variancias de dos muestras. En el capítulo 5 se aprendió que la cantidad $(s_1{}^2/\sigma_1{}^2)/(s_2{}^2/\sigma_2{}^2)$ sigue una distribución conocida como distribución F cuando se calculan las variancias muestrales a partir de muestras aleatorias e independientes extraídas de poblaciones con distribución normal. La distribución F, introducida por R. A. Fisher a principios de 1920, se ha convertido en una de las distribuciones que se utiliza más ampliamente en la estadística moderna. Ya se tiene conocimiento de su uso en la construcción de intervalos de confianza para las variancias de las poblaciones y para probar hipótesis acerca de éstas. En este capítulo se verá que esta es la distribución fundamental para el análisis de la variancia.

En el capítulo 6 se aprendió que cuando las variancias de las poblaciones son iguales, se anulan en la expresión $(s_1{}^2/\sigma_1{}^2)/(s_2{}^2/\sigma_2{}^2)$, quedando $s_1{}^2/s_2{}^2$, que está distribuida como la distribución F. La distribución F es en realidad una familia de distribuciones, y la distribución F particular que se utilice en una situación determinada depende del número de grados de libertad asociado con la variancia muestral en el numerador (*grados de libertad del numerador*) y el número de grados de libertad asociado con la variancia muestral en el denominador (*grados de libertad del denominador*).

Una vez que se ha determinado la distribución F apropiada, el tamaño de la R. V. observada, que provocará el rechazo de la hipótesis de variancias iguales en las poblaciones, depende del nivel de significación elegido. El nivel de significación seleccionado determina el valor crítico de F, el valor que separa la región de aceptación de la región de rechazo.

Como se ha visto, se calcula la R.V. en situaciones de este tipo colocando el cuadrado medio entre los grupos en el numerador y el cuadrado medio dentro de los grupos en el denominador, de modo que el valor de los grados de libertad del numerador es igual al número de grupos menos 1, $(k - 1)$ y el valor de los grados de libertad del denominador es igual a $\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) = \sum_{j=1}^{k} n_j - k = N - k$. Para el presente ejemplo, se tiene que

$$\text{grados de libertad del numerador} = 5 - 1 = 4$$
$$\text{grados de libertad del denominador} = 32 - 5 = 27$$

Tabla 7.2.3 Análisis de variancia para el diseño completamente aleatorizado.

Fuente de variación	*Suma de cuadrados*	*Grados de libertad*	*Cuadrado de la media*	*Razón de la variancia*
Entre los grupos	$SC_{\text{entre}} = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{N}$	$k - 1$	$CM_{\text{entre}} = SC_{\text{entre}}/(k-1)$	$\text{V. R.} = \frac{CM_{\text{entre}}}{CM_{\text{dentro}}}$
Dentro de los grupos	$SC_{\text{dentro}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{(T_{.j})^2}{n_j}$	$N - k$	$CM_{\text{dentro}} = SC_{\text{dentro}}/(N-k)$	
Total	$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$	$N - 1$		

Los cálculos que se han efectuado pueden resumirse y presentarse en una tabla como la tabla 7.2.3, conocida como tabla ANDEVA.

La tabla 7.2.4 es la tabla ANDEVA para el ejemplo ilustrativo.

Tabla 7.2.4 ANDEVA para el ejemplo 7.2.1.

Fuente	*SC*	*g.l.*	*CM*	*R.V.*
Entre los grupos	121.18543	4	30.296358	19.78
Dentro de los grupos	41.35739	27	1.5317552	
Total	162.54282	31		

Obsérvese que en la tabla 7.2.3 el término $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} n_{ij}^2/N = T_{..}^2/N$ se encuentra tanto en la expresión para SC_{entre} como para SC_{total}. Puede ahorrarse tiempo y trabajo en los cálculos si se aprovecha este hecho. Sólo se necesita calcular esta cantidad, que se conoce como término de corrección y se designa por la letra C, una vez y se utiliza cuando sea necesario.

Puede aligerarse la carga de cómputo aun en otra forma. Dado que SC_{total} es igual a la suma de SC_{entre} y SC_{dentro}, y en vista de que es más fácil calcular SC_{entre} que SC_{dentro}, pueden calcularse SC_{total} y SC_{entre} y restar esta última de la primera para obtener SC_{dentro}.

6. *La decisión*. Para llegar a una decisión, debe compararse la R. V. calculada con el valor crítico de F, que se obtiene consultando la tabla J con 4 y 27 grados de libertad. Si se elige un nivel de significación de .05, se encuentra que el valor de F es de 2.73. Las regiones de aceptación y de rechazo resultantes se muestran en la figura 7.2.4.

Dado que el valor calculado de la R. V., 19.78, es mayor que el valor crítico de F, 2.73, debe intentarse explicar esta diferencia. Hay dos explicaciones posibles.

Si la hipótesis nula es verdadera, es decir, si las dos variancias muestrales son estimaciones de una variancia común, se sabe que la probabilidad de obtener un valor tan grande o mayor que 2.73 es de .05. Se obtuvo un valor mucho mayor que 2.73, lo cual, se consideraría

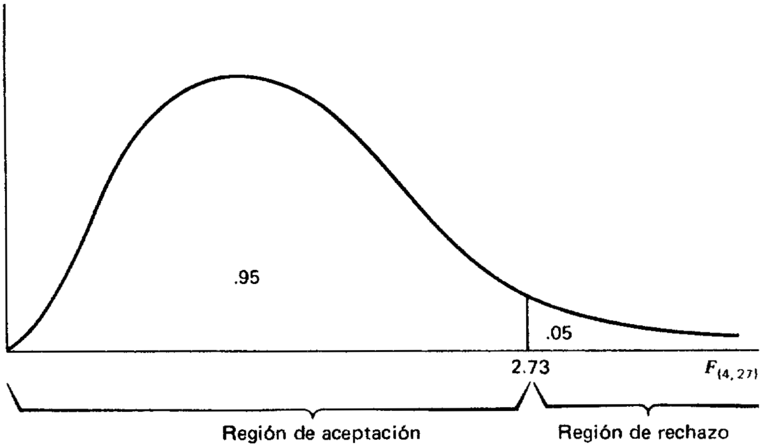


Figura 7.2.4 Regiones de aceptación y de rechazo para el ejemplo 7.2.1.

como un evento muy raro si la hipótesis nula fuera verdadera. Si se desea, es posible concluir que la hipótesis nula es verdadera y suponer que, debido al azar, se obtuvo un conjunto de datos que dieron lugar a un evento raro. Por otra parte, puede preferirse tomar la posición de que el valor grande de la R. V, calculada no representa un evento raro producido por el azar sino que, por el contrario, refleja el hecho de que está actuando algo que no es el azar. Se concluye que ese otro algo es una hipótesis nula falsa.

Es esta última explicación la que por lo general se da para los valores calculados de la R. V. que exceden del valor crítico de F. En otras palabras, si el valor calculado de la R. V. es mayor que el valor crítico de F, se rechaza la hipótesis nula. Dado que, en el presente ejemplo, 19.78 es mayor que 2.73, se rechaza la hipótesis de que las variancias muestrales observadas son estimaciones de una variancia común. Para esta prueba, se tiene que $p < .005$, ya que $19.78 > F_{.995} = 4.74$.

Se recordará que la hipótesis original que se planteó con el fin de ser probada fue

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

¿El rechazo de la hipótesis acerca de las variancias implica un rechazo de la hipótesis de medias iguales en las poblaciones? La respuesta es sí. Un valor grande de la R. V. resultó del hecho de que el cuadrado medio entre los grupos era considerablemente mayor que el cuadrado medio dentro de los grupos. Dado que el cuadrado medio entre los grupos está basado en la dispersión de las medias muestrales en torno a su media, esta cantidad será grande cuando exista una gran discrepancia entre los tamaños de las medias muestrales. Debido a esto, entonces, un valor significativo de la R. V. indica que se rechace la hipótesis nula de que todas las medias de las poblaciones son iguales. En el presente ejemplo, la decisión es rechazar la hipótesis nula y concluir que no todas las medias de las poblaciones son iguales.

Esta sección se refiere al análisis de la variancia que resulta apropiado para el *diseño experimental completamente aleatorizado*. Se ha utilizado lo que se conoce como *análisis de variancia unilateral* (debido a que las observaciones se clasifican de acuerdo a un solo criterio: el grupo de tratamiento al cual pertenecen) para analizar los datos a partir de un diseño experimental completamente aleatorizado. Este tipo de análisis de variancia es una extensión a tres o más medias poblacionales de la prueba t de dos muestras independientes para probar la igualdad de las medias de dos poblaciones.

Un diseño completamente aleatorizado es un diseño en el que los tratamientos se asignan aleatoriamente a las unidades experimentales, o bien, en el que las unidades experimentales se asignan al azar a los tratamientos. El diseño es simple y, por lo tanto, se utiliza ampliamente. Sin embargo, sólo debe utilizarse cuando las unidades que reciben los tratamientos son homogéneas. Si las unidades experimentales no son homogéneas, el investigador debe considerar un diseño alternativo, como uno de los que se discutirán posteriormente en este capítulo.

Aunque, en el ejemplo ilustrativo, los tamaños de las muestras no fueron iguales, este no es un requisito, ya que puede utilizarse el diseño completamente aleatorizado y su análisis cuando los tamaños de las muestras son iguales.

En el ejemplo ilustrativo, los cinco tratamientos son tratamientos en el sentido usual de la palabra. Sin embargo, este no siempre es el caso, ya que el término, como se utiliza en el diseño experimental, es bastante general. Por ejemplo, podría desearse estudiar la respuesta al mismo tratamiento (en el sentido usual de la palabra) en varias razas de animales. Sin embargo, se indicaría a la raza del animal como el "tratamiento".

Debe señalarse también que, aun cuando las técnicas de análisis de variancia se aplican con más frecuencia a los datos que resultan de experimentos controlados, las técnicas pueden utilizarse también para analizar datos reunidos a través de una encuesta, siempre que se satisfagan razonablemente las suposiciones fundamentales.

Prueba para diferencias significativas entre parejas individuales de medias. Siempre que el análisis de variancia conduce al rechazo de la hipótesis nula de no diferencia entre las medias de las poblaciones, surge naturalmente la pregunta que se refiere precisamente a qué parejas de medias son distintas. De hecho, lo que con frecuencia no se desea hacer es llevar a cabo una prueba de significación en cada una y todas las parejas de medias de los tratamientos. En el ejemplo 7.2.1, en el cual se tienen cinco tratamientos, se ve que es posible que se desee saber, después de rechazar $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$, cuál de las 10 hipótesis individuales posibles debe rechazarse. Sin embargo, el investigador debe tener precaución al probar las diferencias significativas entre las medias individuales, y siempre debe tener la certeza de que su procedimiento es válido. El punto crítico en el procedimiento es el nivel de significación. Aunque se haga pequeña la probabilidad, α, de rechazar una hipótesis nula verdadera para la prueba como un todo, como se ha visto, la probabilidad de rechazar, por lo menos, una hipótesis verdadera cuando se prueban varias parejas de medias, es mayor que α.

Durante varios años se han sugerido diversos procedimientos para hacer comparaciones individuales. El procedimiento más antiguo, y quizá el que se utilizó más ampliamente en el pasado, es el procedimiento de la *mínima diferencia significativa* (MDS) debido a Fisher, quien lo discutió por primera vez en la edición de 1935 de su libro, *The Desing of Experiments.*[1] Este procedimiento, que es una prueba *t* de Student que utiliza una variancia mancomunada del error, sólo es válido cuando se hacen comparaciones independientes o comparaciones que se planean antes de que se analicen los datos. Una diferencia entre dos medias cualesquiera que exceda a una mínima diferencia significativa se considera como significativa en el nivel de significación utilizado al calcular la MDS. Por lo común, sólo se utiliza el procedimiento MDS cuando el análisis de variancia en conjunto conduce a una R. V. significativa. Para un ejemplo del uso de la MDS, véase a Steel y Torrie.[22]

Duncan[23-26] ha realizado innumerables investigaciones sobre el tema de las comparaciones múltiples con el resultado de que, en la actualidad, un procedimiento que se utiliza ampliamente es el de la ***nueva prueba de amplitud múltiple de Duncan.*** La aplicación de esta prueba al caso de tamaños de muestras distintos se puede estudiar en Kramer.[27]

Cuando el objetivo de un experimento es comparar varios tratamientos con un control, y no entre sí, se sigue por lo común un procedimiento debido a Dunnett[28,29] para comparar el control con cada uno de los otros tratamientos.

Otros procedimientos de comparación múltiple que se utilizan son los propuestos por Tukey[30,31], Newman,[32] Keuls[33] y Scheffé.[34,35] Las ventajas y desventajas de dos diversos procedimientos son discutidas por Bancroft,[36] Daniel y Coogler[37] y Winer.[38] Daniel[39] ha preparado una bibliografía sobre procedimientos de comparación múltiple.

Prueba de DVS de Tukey. Un procedimiento de comparación múltiple desarrollado por Tukey[31] se utiliza con frecuencia para probar las hipótesis nulas de que todas las parejas posibles de medias de los tratamientos son iguales cuando las muestras son del mismo tamaño. Cuando se utiliza esta prueba, se selecciona un nivel de importancia total de α. La probabilidad es, entonces, de α de que una o más de las hipótesis nulas sean falsas.

La prueba de Tukey, que se conoce en general como la prueba de DVS (*diferencia verdaderamente significativa*), utiliza un solo valor con el cual se comparan todas las diferencias. Este valor, llamado la DVS, está dado por la expresión

$$\text{DVS} = q_{\alpha,k,N-k}\sqrt{\frac{CM_{\text{residual}}}{n}} \tag{7.2.20}$$

donde α es el nivel de significación elegido, k el número de medias en el experimento, N el número total de observaciones en el experimento, n el número de observaciones en el tratamiento, CM_{residual} el cuadrado medio residual o del error de la tabla ANDEVA y q, que se obtiene consultando la tabla K del apéndice con α, k y $N - k$.

Se calculan todas las diferencias posibles entre las parejas de medias y cualquier diferencia que proporcione un valor absoluto que exceda de la DVS se considera como significativa.

Cuando todas las muestras no son del mismo tamaño, como en el caso indicado en el ejemplo 7.2.1, no se aplica la prueba de DVS de Tukey dada por la ecuación 7.2.20. Sin embargo, Spjøtvoll y Stoline[40] han extendido el procedimiento de Tukey al caso donde los tamaños de las muestras son distintos. Su procedimiento, que se aplica a experimentos que comprenden tres o más tratamientos y niveles de significación de .05 o menos, consiste en sustituir n en la ecuación 7.2.20

por n_j^*, el más pequeño de los tamaños de muestra asociado con las muestras cuyas medias van a compararse. Si se designa la nueva cantidad por DVS*, se tiene como nuevo criterio de prueba la expresión

$$\text{DVS}^* = q_{\alpha, k, N-k} \sqrt{\frac{CM_{\text{residual}}}{n_j^*}} \tag{7.2.21}$$

Cualquier valor absoluto de la diferencia entre las medias de dos muestras, una de las cuales se calcula a partir de una muestra de tamaño n_j^* (que es más pequeña que la muestra a partir de la cual se calcula la otra media) que excede de DVS*, se considera como significativo.

Ejemplo 7.2.2

A continuación se ilustra el uso de la prueba de DVS con los datos del ejemplo 7.2.1. El primer paso es preparar una tabla de todas las diferencias posibles entre las medias. Los resultados de este paso para el presente ejemplo se muestran en la tabla 7.2.5.

Supóngase que $\alpha = .05$. Consultando la tabla K en $\alpha = .05$, $k = 5$ y $N - k = 27$, se encuentra que, si se interpola, q tiene un valor de casi 4.14. En la tabla 7.2.4 se tiene que $\text{CM}_{\text{residual}} = 1.5317552$.

Las hipótesis que pueden probarse, el valor de DVS* y la decisión estadística para cada prueba, se muestran en la tabla 7.2.6.

Los resultados de las pruebas de hipótesis mostrados en la tabla 7.2.6 pueden resumirse mediante una técnica sugerida por Duncan.[26] Las medias muestrales se despliegan en una línea aproximadamente a escala. Dos cualesquiera que no sean significativamente distintas son subrayadas por la misma línea. Dos cualesquiera que no sean subraya-

Tabla 7.2.5 Diferencias entre las medias (valor absoluto) para el ejemplo 7.2.2 (las medias se han tomado de la tabla 7.2.1).

	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.3}$	$\bar{x}_{.4}$	$\bar{x}_{.5}$
$\bar{x}_{.2} = 2.60$	—	.01	2.40	4.21	4.50
$\bar{x}_{.1} = 2.61$		—	2.39	4.20	4.49
$\bar{x}_{.3} = 5.00$			—	1.81	2.10
$\bar{x}_{.4} = 6.81$				—	.29
$\bar{x}_{.5} = 7.10$					—

Tabla 7.2.6 Pruebas de comparación múltiple utilizando los datos del ejemplo 7.2.1 y DVS*.

Hipótesis	*DVS**	*Decisión estadística*
$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{5}} = 2.29$	No se rechaza H_0 debido a que $.01 < 2.29$
$H_0: \mu_1 = \mu_3$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{5}} = 2.29$	Se rechaza H_0 debido a que $2.39 > 2.29$.
$H_0: \mu_1 = \mu_4$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{5}} = 2.29$	Se rechaza H_0 debido a que $4.20 > 2.29$
$H_0: \mu_1 = \mu_5$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{5}} = 2.29$	Se rechaza H_0 debido a que $4.49 > 2.29$
$H_0: \mu_2 = \mu_3$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{6}} = 2.09$	Se rechaza H_0 debido a que $2.40 > 2.09$
$H_0: \mu_2 = \mu_4$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{6}} = 2.09$	Se rechaza H_0 debido a que $4.21 > 2.09$
$H_0: \mu_2 = \mu_5$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{6}} = 2.09$	Se rechaza H_0 debido a que $4.50 > 2.09$
$H_0: \mu_3 = \mu_4$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{6}} = 2.09$	No se rechaza H_0 debido a que $1.81 < 2.09$
$H_0: \mu_3 = \mu_5$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{6}} = 2.09$	Se rechaza H_0 debido a que $2.10 > 2.09$
$H_0: \mu_4 = \mu_5$	$\text{DVS*} = 4.14\sqrt{\frac{1.5317552}{7}} = 1.94$	No se rechaza H_0 debido a que $.29 < 1.94$

das por la misma línea, son significativamente distintas. Así, para el presente ejemplo, puede escribirse

2.60 2.61 5.00 6.81 7.10

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios, aplique los seis pasos del análisis de variancia. Determine el valor p para cada prueba.

7.2.1 Cuatro grupos de pacientes de fisioterapia se sometieron a diferentes regímenes de tratamiento. Al término de un período especificado, cada uno se sometió a una prueba con el fin de estimar la efectividad del tratamiento. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Tratamiento			
1	2	3	4
64	76	58	95
88	70	74	90
72	90	66	80
80	80	60	87
79	75	82	88
71	82	75	85

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia entre los tratamientos? Sea $\alpha = .05$.

7.2.2 Se llevó a cabo un experimento para comparar tres métodos de empaque de cierto alimento congelado. El criterio fue el contenido de ácido ascórbico (mg/100 mg) después de cierto período especificado. Se obtuvieron los siguientes datos.

Método de empaque		
A	B	C
14.29	20.06	20.04
19.10	20.64	26.23
19.09	18.00	22.74
16.25	19.56	24.04
15.09	19.47	23.37
16.61	19.07	25.02
19.63	18.38	23.27

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia entre los métodos de empaque a un nivel de significación de .01?

7.2.3 Se utilizaron tres grupos de animales en un experimento para comparar los tiempos de respuesta, en segundos, a tres diferentes estímulos. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Estímulo I	II	III
16	6	8
14	7	10
14	7	9
13	8	10
13	4	6
12	8	7
12	9	10
17	6	9
17	8	11
17	6	11
19	4	9
14	9	10
15	5	9
20	5	5

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia verdadera entre las medias de los grupos?. Sea $\alpha = .05$.

7.2.4 Se hicieron determinaciones de azúcar en sangre (mg/100 ml) en 10 especímenes de cada una de cinco razas de cierto animal de laboratorio, obteniéndose los siguientes resultados.

Raza A	B	C	D	E
124	111	117	104	142
116	101	142	128	139
101	130	121	130	133
118	108	123	103	120
118	127	121	121	127
120	129	148	119	149
110	122	141	106	150
127	103	122	107	149
106	122	139	107	120
130	127	125	115	116

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia en el nivel medio de azúcar en sangre entre las razas?. Sea α = .05.

7.2.5 Se deseó comparar a tres médicos respecto a la duración de la internación en el hospital de sus pacientes que se sometieron a cierto procedimiento quirúrgico menor sin complicaciones. Se seleccionó una muestra de ocho expedientes de los correspondientes a cada médico y se observaron los siguientes períodos de hospitalización.

Médico		
A	B	C
4	4	5
5	5	3
5	4	3
4	3	3
6	4	3
6	5	3
4	3	4
5	3	5

¿Sugieren estos datos una diferencia en la duración promedio de la hospitalización entre los tres médicos? Sea α = .01.

7.2.6 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.1 y aplique la prueba DVS de Tukey. Sea α = .01.

7.2.7 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.2 y aplique la prueba DVS de Tukey. Sea α = .05.

7.2.8 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.3 y aplique la prueba DVS de Tukey. Sea α = .05.

7.2.9 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.4 y aplique la prueba DVS de Tukey. Sea α = .01.

7.2.10 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.5 y aplique la prueba DVS de Tukey. Sea α = .01.

7.2.11 Los siguientes valores son los pesos de cierto órgano como porcentaje del peso corporal para 30 animales de laboratorio. Los cuatro tratamientos son las diferentes dietas con que se alimentó a los animales. Pruebe la hipótesis nula de no diferencia en los efectos de la dieta y pruebe si existen diferencias significativas entre todas las parejas de medias posibles. Sea $\alpha = .05$.

Dieta

A	B	C	D
4.34	4.47	4.72	4.48
4.73	4.65	4.99	5.02
4.84	4.62	5.24	4.58
4.57	4.41	5.00	4.89
4.72	4.43	4.82	4.90
4.55	4.23	4.95	4.81
	4.54	5.28	5.26
	4.45	4.90	
		4.98	

7.3 DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS ALEATORIZADOS

De todos los diseños experimentales que se utilizan en la actualidad, parece ser que el diseño de *bloques completos aleatorizados* es el que hasta ahora se utiliza con mayor frecuencia. Este diseño fue desarrollado por el año de 1925 por R. A. Fisher,[3,41] quien estaba buscando métodos para mejorar los experimentos en el campo de la agricultura. El nombre del diseño refleja su origen en los experimentos agrícolas, donde la tierra se dividía en *bloques* y éstos en *parcelas* que recibían los tratamientos bajo investigación.

El diseño en bloques completos aleatorizados es un diseño en el que las unidades (llamadas *unidades experimentales*), a las que se les aplican los tratamientos, se subdividen en grupos homogéneos llamados *bloques*, de modo que el número de unidades experimentales en un bloque es igual al número (o a algún múltiplo del mismo) de tratamientos que se están estudiando. Se asignan entonces al azar los tratamientos a las unidades experimentales dentro de cada bloque. Debe tenerse en cuenta que cada tratamiento aparece en todos los bloques y que cada bloque recibe todos los tratamientos.

El objetivo de utilizar el diseño en bloques completos aleatorizados es aislar y eliminar del término de error la variación atribuible a los bloques, a la vez que se asegura que las medias de los tratamientos estén libres de los efectos de bloque. La efectividad del diseño depende de la habilidad para lograr bloques homogéneos de unidades experimentales. La habilidad para formar bloques homogéneos depende del conocimiento del investigador sobre el material experimental. Cuando el diseño se utiliza apropiadamente, disminuye el cuadrado medio del error en la tabla ANDEVA, aumenta la R. V. y mejora la oportunidad de rechazar la hipótesis nula.

En experimentos con animales, si se tiene la sensación de que las diferentes razas de animales responderán de manera distinta al mismo tratamiento, la raza del animal puede utilizarse como factor para formar bloques. Las camadas pueden utilizarse también como bloques, caso en el cual un animal de cada camada recibe un tratamiento. En experimentos en los que intervienen seres humanos, si se desean eliminar las diferencias que resultan de la edad, pueden agruparse entonces los individuos de acuerdo con su edad, de modo que una persona de cada edad reciba cada tratamiento. El diseño en bloques completos aleatorizados puede utilizarse también convenientemente cuando un experimento debe llevarse a cabo en más de un laboratorio (bloque) o cuando se requieren varios días (bloques) para concluirlo.

Algunas de las ventajas del diseño en bloques completos aleatorizados comprenden el hecho de que es fácil de comprender y sencillo de calcular. Además, ciertas complicaciones que pueden surgir en el curso de un experimento se resuelven fácilmente cuando se utiliza este diseño.

Es conveniente señalar aquí que el análisis de comparaciones apareadas que se presentó en el capítulo 6 es un caso especial del diseño en bloques completos aleatorizados. El ejemplo 6.4.1 puede tratarse como un diseño de bloques completos aleatorizados en el cual los dos niveles de colesterol son los efectos del tratamiento y los 12 individuos a quienes se toman las mediciones son los bloques.

En general, los datos de un experimento que utilice el diseño de bloques completos aleatorizados pueden presentarse en una tabla como la tabla 7.3.1. Debe observarse la siguiente notación nueva que aparece en esta tabla:

$$\text{el total del } i\text{-ésimo bloque} = T_{i.} = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$$

$$\text{la media del } i\text{-ésimo bloque} = \bar{x}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{ij}}{k}$$

$$\text{y el gran total} = T_{..} = \sum_{j=1}^{k} T_{.j} = \sum_{i=1}^{n} T_{i.}$$

Tabla 7.3.1 Tabla de valores de la muestra para el diseño de bloques completos aleatorizados.

	Tratamientos						
Bloques	1	2	3	$\cdots$	k	*Total*	*Media*
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1k}	$T_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2k}	$T_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\cdots$	x_{3k}	$T_{3.}$	$\bar{x}_{3.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$\cdots$	x_{nk}	$T_{n.}$	$\bar{x}_{n.}$
Total	$T_{.1}$	$T_{.2}$	$T_{.3}$	$\cdots$	$T_{.k}$	$T_{..}$	
Media	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.3}$	$\cdots$	$\bar{x}_{.k}$		$\bar{x}_{..}$

lo cual indica que puede obtenerse el gran total ya sea sumando los totales de los renglones o sumando los totales de las columnas.

La técnica para analizar los datos a partir de un diseño de bloques completos aleatorizados se conoce como *análisis de variancia bilateral*, ya que una observación se cataloga con base en dos criterios: el bloque al cual pertenece y el grupo de tratamiento del cual forma parte.

Ejemplo 7.3.1

Un fisioterapeuta deseaba comparar tres métodos para enseñar a los pacientes el uso de cierto aparato protético. Tenía la sensación de que la rapidez de aprendizaje sería distinta para los pacientes de diferentes edades y deseaba diseñar un experimento en el que pudiera tomar en cuenta el efecto de la edad. El diseño en bloques completos aleatorizados es el apropiado para lograr este objetivo. En consecuencia, se seleccionaron tres pacientes de cada uno de los cinco grupos de

Tabla 7.3.2 Tiempo (en días) requerido para aprender el uso de cierto aparato prostético.

	Método de enseñanza				
Grupo de edades	*A*	*B*	*C*	*Total*	*Media*
Menos de 20	7	9	10	26	8.67
20 a 29	8	9	10	27	9.00
30 a 39	9	9	12	30	10.00
40 a 49	10	9	12	31	10.33
50 y más	11	12	14	37	12.33
Total	45	48	58	151	
Media	9.0	9.6	11.6		10.07

1. *El modelo.* Siguiendo una línea de razonamiento semejante a la utilizada en la sección 7.2 para obtener el modelo para el diseño completamente aleatorizado, puede desarrollarse el siguiente modelo para el diseño en bloques completos aleatorizados:

$$x_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij} \qquad (7.3.1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

En este modelo

- x_{ij} es un valor típico de la población total.
- μ es una constante desconocida.
- β_i representa un efecto de bloque que refleja el hecho de que la unidad experimental cayó en el i-ésimo bloque.
- τ_j representa un efecto de tratamiento, que refleja el hecho de que la unidad experimental recibió el j-ésimo tratamiento.
- e_{ij} es un componente residual que representa todas las fuentes de variación que no sean los tratamientos o los bloques.

Para el ejemplo ilustrativo, puede decirse que el valor de una observación particular es el resultado de la existencia de un paciente en el estudio, más el efecto del método de tratamiento, más el efecto de su edad, más otros factores que no se toman en cuenta.

2. *Suposiciones*. Se hacen las siguientes suposiciones:

   a) Cada x_{ij} que se observa constituye una muestra aleatoria independiente de tamaño 1 de una de las kn poblaciones representadas.
   b) Cada una de estas kn poblaciones muestra una distribución normal, con media μ_{ij} y la misma variancia σ^2. Esto implica que los e_{ij} muestran una distribución normal e independiente con una media de 0 y una variancia σ^2.
   c) Los efectos de bloque y de tratamiento son aditivos. Puede interpretarse que esta suposición significa que no existe *interacción* entre los tratamientos y los bloques. En otras palabras, una combinación bloque-tratamiento particular no produce un efecto que sea mayor o menor que la suma de sus efectos individuales. Puede demostrarse que cuando se satisface esta suposición

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$$

   Las consecuencias de una violación de esta suposición son resultados engañosos. Anderson y Bancroft[42] sugieren que no es necesario interesarse en la violación de la suposición de adición, a menos que la media mayor sea más del 50 por ciento más grande que la menor. El problema de la no aditividad lo tratan también Tukey[43] y Mandel.[44]

Cuando estas suposiciones son verdaderas, los τ_j y β_i son un conjunto de constantes fijas y se tiene una situación que se ajusta al modelo de efectos fijos.

3. *Hipótesis*. Puede probarse que

$$H_0: \tau_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

contra la alternativa

$$H_A: \text{no todos los } \tau_j = 0$$

En general, la prueba de una hipótesis referente a los efectos de bloque no se lleva a cabo bajo las suposiciones del modelo de efectos fijos por dos razones. Primero, el interés principal se centra en los efectos de tratamiento, siendo el propósito usual de los bloques proporcionar un medio de eliminar una fuente extraña de variación. Segundo, aunque las unidades experimentales se asignan aleatoriamente a los tratamientos, los bloques se obtienen en una forma no aleatoria.

Para el ejemplo ilustrativo, se tienen las siguientes hipótesis:

$H_0: \tau_j = 0, \qquad j = 1, 2, 3$
H_A: no todos los $\tau_j = 0$
Sea $\alpha = .05$

4. *Cálculos*. Puede demostrarse que la suma total de cuadrados para el diseño en bloques completos aleatorizados puede partirse en tres componentes, cada una atribuible a los tratamientos ($SC_{\text{trat.}}$), bloques ($SC_{\text{bloq.}}$) y error (SC_{residual}). El álgebra es un tanto tediosa, por lo que se omitirá. La partición de la suma de cuadrados puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})^2 \tag{7.3.2}$$

es decir,

$$SC_{\text{total}} = SC_{\text{bloq.}} + SC_{\text{trat.}} + SC_{\text{residual}} \tag{7.3.3}$$

Las fórmulas de cálculo para las cantidades expresadas en las ecuaciones 7.3.2 y 7.3.3 son las siguientes:

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - C \tag{7.3.4}$$

$$SC_{\text{bloq.}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{T_{i.}^2}{k} - C \tag{7.3.5}$$

$$SC_{\text{trat.}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{T_{.j}^2}{n} - C \tag{7.3.6}$$

$$SC_{\text{residual}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{bloq.}} - SC_{\text{trat}} \tag{7.3.7}$$

Se recordará que C es un término de corrección, y en la presente situación se calcula como sigue:

$$C = \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right)^2 \Big/ kn$$
$$= T_{..}^{\,2}/kn \tag{7.3.8}$$

Los grados de libertad apropiados para cada componente de la ecuación 7.3.3 son

$$\begin{array}{ccccccc} \text{total} & & \text{bloques} & & \text{tratamientos} & & \text{residuales (error)} \\ kn - 1 & = & (n-1) & + & (k-1) & + & (n-1)(k-1) \end{array}$$

Los grados de libertad residuales, al igual que la suma de cuadrados residual, puede obtenerse restando como sigue:

$$(kn-1) - (n-1) - (k-1) = kn - 1 - n + 1 - k + 1$$
$$= n(k-1) - 1(k-1) = (n-1)(k-1)$$

Para el ejemplo ilustrativo, se calculan las sumas de cuadrados siguientes:

$$C = \frac{(151)^2}{(3)(5)} = \frac{22801}{15} = 1520.0667$$

$$SC_{\text{total}} = 7^2 + 9^2 + \cdots + 14^2 - 1520.0667 = 46.9333$$

$$SC_{\text{bloq.}} = \frac{26^2 + 27^2 + \cdots + 37^2}{3} - 1520.0667 = 24.9333$$

$$SC_{\text{trat.}} = \frac{45^2 + 48^2 + 58^2}{5} - 1520.0667 = 18.5333$$

$$SC_{\text{residual}} = 46.9333 - 24.9333 - 18.5333 = 3.4667$$

Los grados de libertad son: total $= (3)(5) - 1 = 14$, bloques $= 5 - 1 = 4$, tratamientos $= 3 - 1 = 2$ y residuales $= (5-1)(3-1) = 8$.

5. *La tabla ANDEVA*. Los resultados de los cálculos para el diseño en bloques completos aleatorizados pueden presentarse en una tabla de análisis de variancia como la tabla 7.3.3.

Tabla 7.3.3 ANDEVA para el diseño de bloques completos aleatorizados.

Fuente	*SC*	*g. l.*	*CM*	*R. V.*
Tratamientos	$SC_{\text{trat.}}$	$(k-1)$	$CM_{\text{trat.}} = SC_{\text{trat.}}/(k-1)$	$CM_{\text{trat.}}/CM_{\text{residual}}$
Bloques	$SC_{\text{trat.}}$	$(n-1)$	$CM_{\text{bloq.}} = SC_{\text{bloq}}/(n-1)$	
Residuo	SC_{residual}	$(n-1)(k-1)$	$CM_{\text{residual}} = SC_{\text{residual}}/(n-1)(k-1)$	
Total	SC_{total}	$kn-1$		

Tabla 7.3.4 ANDEVA para el ejemplo 7.3.1.

Fuente	*SC*	*g. l.*	*CM*	*R. V.*
Tratamientos	18.5333	2	9.26665	21.38
Bloques	24.9333	4	6.233325	
Residuo	3.4667	8	.4333375	
Total	46.9333	14		

Para el ejemplo ilustrativo, se tiene la tabla ANDEVA mostrada en la tabla 7.3.4.

6. *Decisión*. Puede demostrarse que cuando se aplica el modelo de efectos fijos y es verdadera la hipótesis nula de no efectos de tratamiento (todos los $\tau_i = 0$), tanto el cuadrado medio del error, o residual, como el cuadrado medio de los tratamientos son estimaciones de la variancia común σ^2. Por lo tanto, cuando la hipótesis nula es verdadera la cantidad

$$CM_{\text{trat.}}/CM_{\text{residual}}$$

está distribuida como F con $k-1$ grados de libertad del numerador y $(n-1)(k-1)$ grados de libertad del denominador. Por lo tanto, se compara la razón de variancias calculada con el valor crítico de F. Si la razón de variancias calculada es mayor que el valor crítico de F, la hipótesis nula se rechaza.

Para el ejemplo ilustrativo, el valor crítico de F con 2 y 8 grados de libertad y $\alpha = .05$ es de 4.46. Dado que la razón de variancias calculada, 21.38, es mayor que 4.46, se rechaza la hipótesis nula de no efectos de tratamiento sobre la suposición de que dicho valor grande de la R.V. refleja el hecho de que los dos cuadrados medios de las muestras no están estimando la misma cantidad. La única explicación distinta de este valor grande de la R.V. sería que la hipótesis nula es en realidad verdadera y que sólo se ha observado un conjunto raro de resultados. Se excluye la segunda explicación en favor de la primera.

Por lo tanto, se concluye que no todos los efectos de tratamiento son iguales a cero o, lo que es equivalente, que no todas las medias de los tratamientos son iguales. Para esta prueba, $p < .005$.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes ejercicios, lleve a cabo el análisis de variancia siguiendo el procedimiento de seis pasos. Determine el valor p para cada ejercicio.

7.3.1 Se estudiaron tres métodos ~~sistemas~~ para el servicio de alimentación en cinco hospitales. La variable de interés fue el tiempo (en minutos) utilizado por comida servida. En cada hospital, se sirvió la comida de mediodía por cada método, obteniéndose los siguientes resultados.

Hospital	Método A	Método B	Método C
1	7.56	9.68	11.65
2	9.98	9.69	10.69
3	7.23	10.49	11.77
4	8.22	8.55	10.72
5	7.59	8.30	12.36

Después de eliminar los efectos propios del hospital, ¿sugieren estos datos una diferencia entre los métodos en el tiempo medio utilizado por comida servida?. Sea $\alpha = .05$.

7.3.2 Dieciséis personas excedidas de peso participaron en un estudio para comparar cuatro regímenes para bajar de peso. Las personas se agruparon de acuerdo con el peso inicial y cada una de las cuatro personas de cada grupo de peso inicial fue asignada al azar a uno de los cuatro regímenes reductores. Al término del período experimental, se registraron las siguientes pérdidas de peso, en libras.

Peso inicial (libras)	Régimen A	B	C	D
150 a 174	12	26	24	23
175 a 199	15	29	23	25
200 a 225	15	27	25	24
Más de 225	18	38	33	31

Después de eliminar las diferencias debidas al peso inicial, ¿proporcionan estos datos la evidencia suficiente que indique una diferencia en los efectos de los regímenes?. Sea $\alpha = .01$.

7.3.3 Un grupo de remotivación de un hospital psiquiátrico llevó a cabo un experimento con el fin de comparar cinco métodos para remotivar a los pacientes. Estos últimos se agruparon de acuerdo con el nivel de motivación inicial. Los pacientes de cada grupo se asignaron al azar a los cinco métodos. Al término del período experimental, se evaluaron los pacientes a través de un equipo compuesto por un psiquiatra, un psicólogo, una enfermera y una trabajadora social, ninguno de los cuales tenía conocimiento del método al que habían sido asignados los pacientes. El equipo asignó a cada paciente una calificación compuesta como una medida de su nivel de motivación. Los resultados fueron los siguientes.

Nivel de Motivación | Método de remotivación

7.3.4 La enfermera supervisora de un departamento de salud local deseaba estudiar el efecto de la hora del día en la duración de las visitas domiciliarias realizadas por el personal de enfermería. Tenía la sensación de que las diferencias individuales entre las enfermeras podría ser grande, de manera que utilizó a la enfermera como un factor de formación de bloques. Reunió además los siguientes datos.

Enfermera	Duración de la visita domiciliaria por horas del día Temprano por la mañana	Tarde por la mañana	Temprano por la tarde	Tarde por la tarde
A	27	28	30	23
B	31	30	27	20
C	35	38	34	30
D	20	18	20	14

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia en la duración de la visita domiciliaria entre las diferentes horas del día?. Sea $\alpha = .05$.

7.3.5 Analice los datos del ejercicio 6.4.1 como un diseño de bloques aleatorizado.

7.4 EL EXPERIMENTO FACTORIAL

En los diseños experimentales que se han considerado hasta este punto, el interés se ha centrado sólo en los efectos de una variable, los tratamientos. Sin embargo, suele suceder que se desee estudiar, simultáneamente, los efectos de dos o más variables. Se nombrará aquí a las variables que se deseen como *factores.* El experimento en el que se investigan dos o más factores simultáneamente se conoce como *experimento factorial.*

Las diferentes categorías designadas de los factores se conocen como *niveles*. Supóngase, por ejemplo, que se está estudiando el efecto de tres dosis de cierto medicamento sobre el tiempo de reacción. Se dice entonces que el factor medicamento ocurre en los tres niveles. Supóngase que el segundo factor de interés en el estudio es la edad, y que se tiene la sensación de que deben incluirse dos grupos de edades, de menos de 65 años y de 65 años y más. Se tienen entonces dos niveles del factor edad. En general, se dice que el factor A ocurre en los niveles a y que el factor B en los niveles b.

En un experimento factorial no sólo pueden estudiarse los efectos de los factores individuales sino, si el experimento se lleva a cabo apropiadamente, puede estudiarse también la *interacción* entre los factores. Para ilustrar el concepto de interacción, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.4.1

Supóngase, en términos del efecto sobre el tiempo de reacción, que se conoce la verdadera relación que existe entre tres niveles de dosis de cierto medicamento y la edad de las personas que toman dicho medicamento. Supóngase además que la edad ocurre en dos niveles: "jóvenes" (menores de 65 años) y "viejos" (de 65 años y más). Si se conoce la verdadera relación que existe entre estos dos factores, se conocerá, para los tres niveles de dosis, el efecto medio sobre el tiempo de reacción de las personas en los dos grupos de edades. Supóngase que el efecto se mide en términos de la reducción en el tiempo de reacción a algún estímulo. Supóngase que las medias son como las que se muestran en la tabla 7.4.1.

Deben notarse las siguientes características importantes de los datos de la tabla 7.4.1:

1. Para ambos niveles del factor A, la diferencia entre las medias para dos niveles cualesquiera del factor B es la misma. Es decir, para ambos niveles del factor A, la diferencia entre las medias para los niveles 1 y 2 es de 5, para los niveles 2 y 3 es de 10 y para los niveles 1 y 3 es de 15.

Tabla 7.4.1 Reducción media del tiempo de reacción (en milisegundos) de individuos de dos grupos de edad a tres niveles de dosis de un medicamento.

	Factor B—dosis del medicamento		
Factor A—edad	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Jóvenes ($i = 1$)	$\mu_{11} = 5$	$\mu_{12} = 10$	$\mu_{13} = 20$
Viejos($i = 2$)	$\mu_{21} = 10$	$\mu_{22} = 15$	$\mu_{23} = 25$

2. Para todos los niveles del factor B, la diferencia entre las medias para los dos niveles del factor A es la misma. En el presente caso, la diferencia es de 5 en los tres niveles del factor B.
3. Destaca una tercera característica cuando los datos se grafican como en la figura 7.4.1. Se observa que todas las curvas que corresponden a los diferentes niveles de un factor son paralelas.

Cuando los datos de la población poseen las tres características anteriores, se dice que no existe interacción.

La presencia de interacción entre dos factores puede afectar las características de los datos en varias formas dependiendo de la naturaleza de la interacción. A continuación se ilustra el efecto de un tipo de interacción alterando los datos de la tabla 7.4.1 como se muestra en la tabla 7.4.2.

Las características importantes de los datos de la tabla 7.4.2 son las siguientes:

1. La diferencia entre las medias para dos niveles cualesquiera del factor B no es la misma para ambos niveles del factor A. Se nota

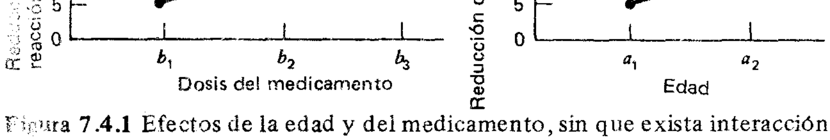


Figura 7.4.1 Efectos de la edad y del medicamento, sin que exista interacción.

Tabla 7.4.2 Datos de la tabla 7.4.1 alterados para mostrar el efecto de un tipo de interacción.

Factor A—edad	*Factor B—dosis del medicamento* $j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Jóvenes ($i = 1$)	$\mu_{11} = 5$	$\mu_{12} = 10$	$\mu_{13} = 20$
Viejos ($i = 2$)	$\mu_{21} = 15$	$\mu_{22} = 10$	$\mu_{23} = 5$

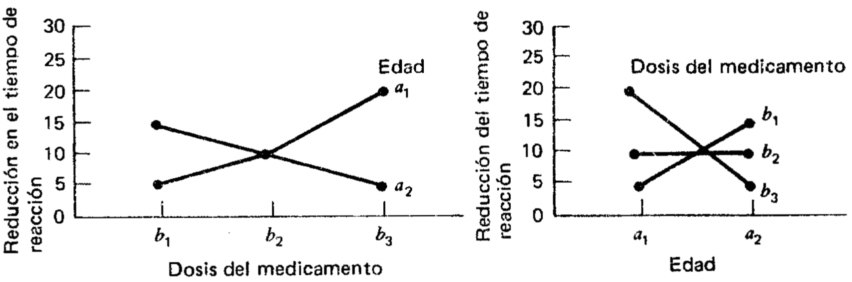


Figura 7.4.2 Efectos de la edad y del medicamento, cuando hay interacción.

en la tabla 7.4.2, por ejemplo, que la diferencia entre los niveles 1 y 2 del factor B es de -5 para el grupo joven de edades y de $+5$ para el grupo viejo de edades.

2. La diferencia entre las medias para ambos niveles del factor A no es la misma en todos los niveles del factor B. Las diferencias entre las medias del factor A son de -10, 0 y 15 para los niveles 1, 2 y 3, respectivamente, del factor B.
3. Las curvas de los niveles de los factores no son paralelas como se muestra en la figura 7.4.2.

Cuando los datos de la población presentan las características que se ilustran en la tabla 7.4.2 y la figura 7.4.2, se dice que existe interacción entre los dos factores. Se enfatiza que el tipo de interacción ilustrado por el presente ejemplo es sólo uno de los muchos tipos de interacción que pueden existir entre dos factores.

En resumen, entonces, puede decirse que *existe interacción entre dos factores si un cambio en uno de los factores produce un cambio en respuesta a un nivel del otro factor distinto del producido en otros niveles de este factor.*

Las ventajas del experimento factorial incluyen las siguientes:

1. Puede estudiarse la interacción de los factores.
2. Se ahorra tiempo y esfuerzo.

En el experimento factorial, todas las observaciones pueden utilizarse para estudiar los efectos de cada uno de los factores sobre la investigación. Cuando se están investigando dos factores, la alternativa sería llevar a cabo dos experimentos distintos, uno para estudiar cada uno de los dos factores. Si se hiciera esto, algunas de las observacio-

Tabla 7.4.3 Datos de la muestra de un experimento completamente aleatorizado de dos factores.

Factor A.	*Factor B*				*Totales*	*Medias*
	1	2	$\cdots$	b		
1	x_{111} $\vdots$ x_{11n}	x_{121} $\vdots$ x_{12n}	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	x_{1b1} $\vdots$ x_{1bn}	$T_{1..}$	$\bar{x}_{1..}$
2	x_{211} $\vdots$ x_{21n}	x_{221} $\vdots$ x_{22n}	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	x_{2b1} $\vdots$ x_{2bn}	$T_{2..}$	$\bar{x}_{2..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	x_{a11} $\vdots$ x_{a1n}	x_{a21} $\vdots$ x_{a2n}	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$	x_{ab1} $\vdots$ x_{abn}	$T_{a..}$	$\bar{x}_{a..}$
Totales	$T_{.1.}$	$T_{.2.}$	$\cdots$	$T_{.b.}$	$T_{...}$	
Medias	$\bar{x}_{.1.}$	$\bar{x}_{.2.}$	$\cdots$	$\bar{x}_{1b1}$		$\bar{x}_{...}$

nes proporcionarían información sólo de uno de los factores y el resto proporcionaría información sólo del otro factor. Para lograr el nivel de exactitud del experimento factorial, se necesitarían más unidades experimentales si se estudiaran los factores a través de dos experimentos. Se ve entonces que un experimento de dos factores es más accesible que dos experimentos de un factor.

3. Dado que los diversos factores se combinan en un experimento, los resultados tienen un campo de aplicación más amplio.

Un arreglo factorial puede estudiarse con cualquiera de los diseños que se han explicado. Se ilustrará el análisis de un experimento factorial por medio de un diseño completamente aleatorizado de dos factores.

Los resultados de un diseño completamente aleatorizado de dos factores pueden presentarse en forma tabular como se muestra en la tabla 7.4.3.

Se tienen aquí a niveles del factor A, b niveles del factor B y n observaciones para cada combinación de niveles. Cada una de las ab combinaciones de los niveles de un factor A con los niveles de un factor B es un tratamiento. Además de los totales y las medias que se muestran en la tabla 7.4.3, se observa que el total y la media de la ij-ésima celda son, respectivamente, $\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}$ y $\bar{x}_{ij.} = T_{ij.}/n$. El subíndice i va de 1 a a y j de 1 a b. El número total de observaciones es nab.

Para demostrar que la tabla 7.4.3 representa los datos de un diseño completamente aleatorizado, se considera que cada combinación de niveles de los factores es un tratamiento y que se tienen n observaciones para cada tratamiento. Se obtendría un arreglo alternativo de los datos enumerando las observaciones de cada tratamiento en una columna separada. Puede utilizarse también la tabla 7.4.3 para presentar los datos de un diseño de bloques aleatorizado de dos factores si se considera la primera observación en cada celda como parte del bloque 1, la segunda observación de cada celda como parte del bloque 2 y así sucesivamente, hasta la n-ésima observación de cada celda, que puede considerarse como parte del bloque n.

Nótese la semejanza que existe entre los datos presentados para el experimento factorial, como se muestra en la tabla 7.4.3, y los datos del bloque completo aleatorizado, presentados en la tabla 7.3.1. Para que el experimentador pueda probar que existe interacción, el experimento factorial requiere de por lo menos dos observaciones por celda, mientras que el diseño de bloque completo aleatorizado requiere sólo una observación por celda. Se utiliza el análisis de variancia bilateral para analizar los datos de un experimento factorial del tipo presentado aquí.

Ejemplo 7.4.2

En un estudio del tiempo transcurrido durante las visitas domiciliarias individuales realizadas por enfermeras de salud pública, se obtuvieron los datos de la duración de la visita, en minutos, tabulados en forma cruzada en términos del grupo de edades de las enfermeras y del tipo de paciente, como se muestra en la tabla 7.4.4.

Para analizar estos datos, supóngase un modelo de efectos fijos y un diseño completamente aleatorizado de dos factores y sígase el ya familiar procedimiento de seis pasos.

Tabla 7.4.4 Duración de visita domiciliaria en minutos realizada por enfermeras de salud pública por grupos de edades de las enfermeras y tipo de paciente.

	Niveles del factor B (grupos de edades de las enfermeras)					
Niveles del factor A (tipo de paciente)	1 (20 *a* 29)	2 (30 *a* 39)	3 (40 *a* 49)	4 (50 *y* *más*)	*Totales*	*Medias*
1 (Cardíacos)	20	25	24	28		
	25	30	28	31		
	22	29	24	26	534	26.70
	27	28	25	29		
	21	30	30	32		
2 (Con cáncer)	30	30	39	40		
	45	29	42	45		
	30	31	36	50	765	38.25
	35	30	42	45		
	36	30	40	60		
3 (Con enfermedad cardio-vascular)	31	32	41	42		
	30	35	45	50		
	40	30	40	40	766	38.30
	35	40	40	55		
	30	30	35	45		
4 (Tuberculosos)	20	23	24	29		
	21	25	25	30		
	20	28	30	28	509	25.45
	20	30	26	27		
	19	31	23	30		
Totales	557	596	659	762	2574	
Medias	27.85	29.8	32.95	38.10		32.18

Celda	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4
Totales	115	142	131	146	176	150	199	240
Medias	23.0	28.4	26.2	29.2	35.2	30.0	39.8	48.0

Celda	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	a_3b_4	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	a_4b_4
Totales	166	167	201	232	100	137	128	144
Medias	33.2	33.4	40.2	46.4	20.0	27.4	25.6	28.8

1. *El modelo*. El modelo de efectos fijos para el diseño completamente aleatorizado de dos factores puede escribirse como

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk},$$
$$i = 1, 2, \ldots, a; \qquad j = 1, 2, \ldots, b; \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{7.4.1}$$

donde x_{ijk} es una observación típica, μ una constante, α representa un efecto debido al factor A, β un efecto debido al factor B, $(\alpha\beta)$ un efecto debido a la interacción de los factores A y B, y e_{ijk} el error experimental.

2. *Suposiciones.*

   a) Las observaciones en cada una de las *ab* celdas constituyen una muestra aleatoria independiente de tamaño *n* extraída de la población definida por la combinación particular de los niveles de los dos factores. En el ejemplo ilustrativo, se tiene una muestra de 16 poblaciones.
   b) Cada una de las *ab* poblaciones está normalmente distribuida.
   c) Todas las poblaciones tienen la misma variancia.

3. *Hipótesis.*
   Pueden probarse las siguientes hipótesis.

(1) $H_0: \alpha_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, a$
H_A: no todos los $\alpha_i = 0$

(2) $H_0: \beta_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, b$
H_A: no todos los $\beta_j = 0$

(3) $H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, a; \qquad j = 1, 2, \ldots, b$
H_A: no todos los $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

Antes de reunir sus datos, el investigador tal vez decida probar sólo una de las hipótesis posibles. En este caso, selecciona la hipótesis que desea probar, elige un nivel de significación, α, y procede en la forma sencilla ya conocida. Este procedimiento no tiene las complicaciones que surgen si el investigador desea probar las tres hipótesis.

Cuando se prueban las tres hipótesis, la situación se complica por el hecho de que las tres pruebas no son independientes en el sentido de la probabilidad. Si se supone que α es el nivel de significación asociado con la prueba como un todo y α', α'' y α''' los niveles de significación asociados con las hipótesis 1, 2 y 3, respectivamente, Kimball[45] ha demostrado que

$$\alpha < 1 - (1 - \alpha')(1 - \alpha'')(1 - \alpha''') \qquad (7.4.2)$$

Si $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = .05$, entonces $\alpha < 1 - (.95)^3$, o $\alpha < .143$. Esto significa que la probabilidad de rechazar una o más de las tres hipótesis es algo menor que .143 cuando se ha elegido un nivel de significación de .05 para las hipótesis y todas son verdaderas. Para demostrar el procedimiento de pruebas de hipótesis para cada caso, se llevan a cabo las tres pruebas. Sin embargo, el lector debe darse cuenta del problema que implica el interpretar los resultados. El problema se puede consultar en Dixon y Massey[46] y en Guenther.[47]

Para el ejemplo ilustrativo, pueden probarse las siguientes hipótesis sujetas a las condiciones mencionadas anteriormente.

(1) $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$
H_A: no todos los $\alpha_i = 0$

(2) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$
H_A: no todos los $\beta_j = 0$

(3) $H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$
H_A: no todos los $(\alpha\beta)_{ij} = 0$
Sea $\alpha = .05$

4. *Cálculos.* Mediante una adaptación del procedimiento utilizado al particionar la suma total de cuadrados para el diseño completamente aleatorizado, puede demostrarse que la suma total de cuadrados bajo el presente modelo puede partirse en dos términos como se indica a continuación:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2 \qquad (7.4.3)$$

o

$$SC_{\text{total}} = SC_{\text{trat.}} + SC_{\text{residual}} \qquad (7.4.4)$$

La suma de cuadrados para los tratamientos puede partirse en tres términos, como se muestra a continuación:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{...})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2$$
$$+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{.j.}-\bar{x}_{...})^2$$
$$+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{.j.}+\bar{x}_{...})^2 \qquad (7.4.5)$$

o

$$SC_{\text{trat.}}=SCA+SCB+SCAB$$

Las fórmulas de cálculo para los diversos componentes son las siguientes:

$$SC_{\text{total}}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}^2-C \qquad (7.4.6)$$

$$SC_{\text{trat.}}=\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}T_{ij.}^2}{n}-C \qquad (7.4.7)$$

$$SC_{\text{residual}}=SC_{\text{total}}-SC_{\text{trat.}} \qquad (7.4.8)$$

$$SCA=\frac{\sum_{i=1}^{a}T_{i..}^2}{bn}-C \qquad (7.4.9)$$

$$SCB=\frac{\sum_{j=1}^{b}T_{.j.}^2}{an}-C \qquad (7.4.10)$$

y

$$SCAB=SC_{\text{trat.}}-SCA-SCB \qquad (7.4.11)$$

En las ecuaciones anteriores

$$C=\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2\bigg/abn \qquad (7.4.12)$$

Para el ejemplo ilustrativo, se tiene que

$$C=(2574)^2/80=82818.45$$

$$SC_{\text{total}} = (20^2 + 25^2 + \cdots + 30^2) - 82818.45 = 5741.55$$

$$SC_{\text{trat.}} = \frac{115^2 + 142^2 + \cdots + 144^2}{5} - 82818.45 = 4801.95$$

$$SCA = \frac{534^2 + 765^2 + 766^2 + 509^2}{20} - 82818.45 = 2992.45$$

$$SCB = \frac{557^2 + 596^2 + 659^2 + 762^2}{20} - 82818.45 = 1201.05$$

$$SCAB = 4801.95 - 2992.45 - 1201.05 = 608.45$$

$$SC_{\text{residual}} = 5741.55 - 4801.95 = 939.60$$

Tabla 7.4.5 Análisis de variancia para un experimento completamente aleatorizado de dos factores (modelo de efectos fijos).

Fuente	*SC*	*g. l.*	*CM*	*R. V.*
A	SCA	$a-1$	$CMA = SCA/(a-1)$	CMA/CM_{residual}
B	SCB	$b-1$	$CMB = SCB/(b-1)$	CMB/CM_{residual}
AB	$SCAB$	$(a-1)(b-1)$	$CMAB = SCAB/(a-1)(b-1)$	$CMAB/CM_{\text{residual}}$
Tratamientos	$SC_{\text{trat.}}$	$ab-1$		
Residuo	SC_{residual}	$ab(n-1)$	$CM_{\text{residual}} = \dfrac{SC_{\text{residual}}}{ab(n-1)}$	
Total	SC_{total}	$abn-1$		

5. *La tabla de análisis de variancia.* Los resultados de los cálculos para el modelo de efectos fijos para un experimento completamente aleatorizado de dos factores, en general, puede presentarse como se muestra en la tabla 7.4.5.

   Los resultados para el ejemplo ilustrativo se presentan en la tabla 7.4.6.
6. *Decisión.* Si se cumplen las suposiciones que se enuncian al principio y si cada hipótesis es verdadera, puede demostrarse que cada una de las razones de variancias que se muestran en la tabla 7.4.5

Tabla 7.4.6 ANDEVA para el ejemplo 7.4.1.

Fuente	*SC*	*g. l.*	*CM*	*R. V.*
A	2992.45	3	997.48	67.95
B	1201.05	3	400.35	27.27
AB	608.45	9	67.61	4.61
Tratamientos	4801.95	15		
Residuo	939.60	64	14.68	
Total	5741.55	79		

sigue una distribución F con los grados de libertad indicados. Los valores críticos de F para probar las tres hipótesis del ejemplo ilustrativo son, respectivamente, 2.76, 2.76 y 2.04. Dado que en la tabla J no se muestran los grados de libertad del denominador iguales a 64, se utilizó 60 como los grados de libertad del denominador. Se observa que se rechazarían cada una de las tres hipótesis en el nivel de significación de .05. Una vez más se le hace la observación al lector de que si se hacen simultáneamente las tres pruebas, la probabilidad de rechazar, al menos, una hipótesis cuando todas son verdaderas, es un poco mayor que .05. Correspondiendo a las hipótesis planteadas en el paso 3 anterior, se tiene que $p_1 < .005$, $p_2 < .005$ y $p_3 < .005$.

Cuando se rechaza $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, se concluye que existen diferencias entre los niveles de A, es decir, diferencias en el tiempo promedio que transcurre durante las visitas domiciliarias con diferentes tipos de paciente. De modo semejante, cuando se rechaza $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$, se concluye que existen diferencias entre los niveles de B, o diferencias en el tiempo promedio que transcurre durante las visitas domiciliarias entre las diferentes enfermeras cuando se agrupan por edades. Cuando se rechaza H_0: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$, se concluye que los factores A y B interactúan, es decir, diferentes combinaciones de los niveles de los dos factores producen efectos distintos. Cuando se rechaza la hipótesis de no interacción, el interés en los niveles de los factores A y B se subordina por lo general al interés en los efectos de interacción. En otras palabras, se tiene más interés en saber qué combinaciones de los niveles son significativamente distintas.

Sólo se ha tratado el caso en el que el número de observaciones en cada celda es el mismo. Cuando el número de observaciones por celda no es el mismo para todas las celdas, el análisis se hace más complejo. Muchas de las referencias que se han citado cubren el análisis apropiado para tales situaciones, por lo que se sugiere que el lector las consulte para una mayor información.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes ejercicios, lleve a cabo el análisis de variancia al nivel de significación indicado y determine el valor p asociado con cada hipótesis probada.

7.4.1 En un tratamiento de desarrollo para personas con retraso mental, se llevó a cabo un experimento con el fin de comparar tres métodos distintos para enseñar las habilidades básicas del cuidado personal y tres sistemas distintos de recompensa. Al término del período experimental, se hizo que todas las personas se sometieran a una prueba diseñada para estimar el grado al cual habían aprendido la habilidad. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

	Métodos		
Recompensas	A	B	C
Ninguna	52	58	58
	76	56	24
	60	68	32
	58	74	39
Elogio	60	60	56
	78	70	66
	75	74	54
	72	77	49
Tangible	98	76	72
	94	80	74
	96	84	76
	98	80	70

a) Lleve a cabo un análisis de variancia de estos datos y pruebe las hipótesis de que los efectos de las recompensas son cero, los efectos de los métodos son cero y los efectos de interacción también son cero. Sea $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = .01$.

b) ¿Cuál es la magnitud de α, el nivel de significación para la prueba como un todo?

7.4.2 Un grupo de salud mental en un departamento de salud local condujo un estudio sobre la comprensión de las madres acerca de las instrucciones que recibían sobre el cuidado del niño, rerentes a sus hijos cuando habían sido examinados en la clínica de diagnóstico y evaluación de salud mental. Se compararon tres métodos de consulta, el procedimiento de consulta rutinario y dos procedimientos experimentales. Se identificaron madres de tres grupos socioeconómicos. Después de las consultas, las madres fueron entrevistadas por un segundo grupo de profesionales, quienes asignaron a cada madre una calificación diseñada para estimar su nivel de comprensión de las instrucciones para el cuidado del niño proporcionadas por el primer grupo. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Grupo socioeconómico	Método de consulta: Rutinario		A		B	
I	56	46	47	28	28	42
	29	33	28	30	53	42
II	51	21	59	47	68	75
	36	27	45	53	77	84
III	45	41	55	71	44	68
	31	37	76	85	77	76

a) Realice un análisis de variancia de estos datos y pruebe las tres hipótesis posibles. Sea $\alpha' = .01$, $\alpha'' = .05$ y $\alpha''' = .01$.

b) ¿Cuál es la magnitud de α, el nivel de significación para la prueba como un todo?.

7.4.3 En un estudio de los efectos de diferentes dietas y la terapia de grupo para ayudar a las personas excedidas de peso a bajar de peso, participaron 40 mujeres excedidas de peso, quienes fueron cuidadosamente agrupadas en relación con tantas variables pertinentes como fuera posible, como la edad, el peso inicial y la condición física. Las personas fueron agrupadas al azar en cuatro grupos de 10 cada uno y a cada grupo de 10 se le asignó una dieta distinta. Cada grupo de 10 fue dividido además al azar en dos grupos. Uno de estos dos grupos participó en una sesión de terapia de grupo dos veces a la semana, mientras que el otro grupo no lo hizo. Al término del período experimental, se registro la pérdida de peso por persona, como se muestra en la tabla. Realice un análisis de variancia de estos grupos y pruebe las tres hipótesis posibles. Sea $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = .05$.

	Dieta			
Terapia de grupo	I	II	III	IV
Sí	15	25	19	22
	12	19	24	22
	18	21	18	18
	16	22	16	19
	13	19	21	15
No	9	13	13	33
	9	15	13	30
	13	12	15	31
	7	15	18	27
	9	12	15	28

7.4.4 Se llevó a cabo un estudio a fin de comparar las capacidades de tres medicamentos para retardar el tiempo de reacción de animales de laboratorio a cierto estímulo. La misma raza de animales fue entrenada a responder por medio de tres métodos distintos y se utilizaron tres animales por cada combinación método de entrenamiento/medicamento. La siguiente tabla muestra el tiempo de respuesta en segundos después de la administración del medicamento.

Método de	Medicamento		
entrenamiento	A	B	C
I	5	8	10
	8	8	12
	7	10	10

Método de entrenamiento	Medicamento A	B	C
	6	10	15
II	8	12	14
	6	11	14
	7	12	16
III	8	12	16
	10	14	18

Lleve a cabo un análisis de variancia de estos datos y prube las tres hipótesis posibles. Sea $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = .05$.

7.5 TEMAS DIVERSOS

Un texto general de introducción no puede empezar por cubrir cada aspecto de cada tema incluido. Aunque este capítulo, por ejemplo, ha cubierto los conceptos principales del análisis de variancia, no se han tratado muchos temas por el interés de ser breves. Para proporcionar cierto conocimiento de algunos de los problemas que pueden encontrarse y de algunos de los análisis adicionales que son posibles en el análisis de variancia, se dan aquí breves comentarios sobre algunos temas adicionales de importancia. Para una mayor información, consúltense los textos sobre el diseño experimental y el análisis de variancia que se incluyen en la bibliografía. La mayoría de ellos contiene un material más completo de uno o más de estos temas.

Datos faltantes. Aun cuando un experimento puede llevarse a cabo con el mayor de los cuidados, pueden ocurrir accidentes que conduzcan a la falta de algunas de las observaciones cuando llega el momento de realizar el análisis. Pueden tenerse observaciones faltantes en experimentos con animales al morir un animal. En experimentos relacionados con seres humanos, un individuo tal vez no participe en parte del experimento debido a alguna enfermedad. En experimentos de laboratorio, pueden destruirse los cultivos y soluciones porque se rompieron los recipientes que los contenían. Un experimento puede concluirse sin contratiempos, pero algunos de los resultados registrados pueden perderse o destruirse.

En general, puede seguirse uno de los tres procedimientos siguientes cuando se encuentra que faltan datos:

a) En algunos casos, puede procederse al análisis en la forma habitual. Si en un diseño de bloques completos aleatorizados, por ejemplo, falta un bloque completo o bien un tratamiento completo, puede llevarse a cabo el análisis habitual sobre los datos restantes, siempre que queden al menos dos bloques y dos tratamientos.

b) Pueden analizarse los datos restantes por medio de métodos apropiados para el caso de números distintos de subclases. Estos procedimientos, que son más complejos que los métodos presentados en este capítulo, se pueden consultar en algunas de las referencias.

c) Sin embargo, en general, es preferible estimar los datos faltantes. Generalmente se emplea uno de dos métodos con este fin.

Uno de los métodos comprende la estimación de los valores faltantes, de modo que se minimice la suma de cuadrados de error experimental cuando se lleve a cabo el análisis habitual. Una desventaja de este método es que conduce a una suma de cuadrados de los tratamientos sesgada, la cual tiene que corregirse. Ostle[48] da un ejemplo numérico de este método. Los valores faltantes se estiman también con frecuencia por medio de una técnica conocida como *análisis de covariancia*. Una ventaja del uso del análisis de covariancia es que da una suma de cuadrados de los tratamientos insesgada, así como una suma residual de cuadrados mínima. Este método lo ilustran Steel y Torrie.[22] Federer[7] da una extensa lista de referencias sobre valores faltantes. Las referencias no citadas por Federer incluyen los artículos escritos por Glenn y Kramer,[49] Kramer y Glass[50] y Baird y Kramer.[51]

Transformaciones. Ocasionalmente, las suposiciones que fundamentan el análisis de variancia no se cumplen en los datos. Cuando esto sucede, un procedimiento alternativo es realizar una transformación de los datos, de modo que se cumplan las suposiciones con más aproximación. Por transformación se entiende un cambio en la escala de medición.

Tres objetivos frecuentes en el empleo de las transformaciones son hacer que la variancia sea independiente de la media, lograr la normalidad y lograr la aditividad de los efectos (eliminar la interacción). Con frecuencia, una sola transformación logrará simultáneamente dos o más objetivos. Algunas de las transformaciones que se utilizan con mayor frecuencia incluyen las siguientes.

1. *La transformación logarítmica*. Cuando se utiliza esta transformación, se toman los logaritmos (generalmente logaritmos comunes) de las mediciones. Se utiliza esta transformación cuando la media está correlacionada positivamente con la variancia.
2. *La transformación raíz cuadrada*. Con esta transformación se toman las raíces cuadradas de las mediciones. Se utiliza cuando los datos consisten en conteos, como el número de muertes que ocurren en varios grupos de animales de laboratorio. Si se encuentran conteos de cero, se agrega .5 a cada conteo antes de que se tome la raíz cuadrada.
3. *La transformación arcseno*. Esta transformación se utiliza cuando los datos son proporciones o porcentajes. La transformación da θ = arcseno $\sqrt{p}$, donde θ es la medida transformada y p la medida original.
4. *La transformación recíproca*. Cuando la variancia crece como la cuarta potencia de la media, puede utilizarse la transformación recíproca. Cada observación original, θ, se reemplaza por su recíproco, $1/\theta$.

En la mayoría de los libros de texto de estadística general y diseño experimental que ya se mencionaron, se tratan las transformaciones. Además, el tema se estudia con más detalle en los libros escritos por Quenouille,[52] Sokal y Rohlf[53] y Pearce,[54] y en un artículo escrito por Bartlett.[55] Federer[7] da algunas otras referencias.

Alternativas no paramétricas. Un procedimiento alternativo que puede seguirse cuando no se satisfacen las suposiciones para el análisis de variancia es utilizar lo que se conoce como método *no paramétrico* de análisis. Estos métodos, en general, se estudian más detalladamente en el capítulo 11, donde se dan alternativas no paramétricas apropiadas para algunos de los diseños experimentales que se han explicado.

Eficiencia. Por lo general, resulta interesante saber cuánta mejora puede esperarse en el experimento como un todo si se utiliza un tipo de diseño en lugar de otro. Por ejemplo, un investigador puede preguntarse si vale la pena el esfuerzo de utilizar un diseño de bloques completos aleatorizados en lugar de un diseño completamente aleatorizado. Incluso, si no es posible, o conveniente, elegir entre varios diseños, es posible que el investigador desee saber los méritos de aumentar el tamaño de la muestra o el número de muestras. Las comparaciones como éstas se juzgan con base en la *eficiencia* o *eficiencia relativa*. Básicamente, la eficiencia es una razón de las variancias que resultan del uso de los diseños que se están comparando y, por lo general, se expresa como un porcentaje. Este tema se trata más a fondo en Cochran y Cox,[4] Steel y Torrie,[22] Scheffé,[34] Ostle[48] y Sokal y Rohlf.[53]

Otros diseños. Los dos diseños experimentales que se consideraron en este capítulo de ningún modo son los únicos que se utilizan. La condensación necesaria en un libro de texto de introducción general no permite que se traten en forma más completa los diseños que se encuentran con mayor frecuencia. El lector que desee investigar las posibilidades debe consultar los textos de diseño experimental que se enumeran en la bibliografía. Los diseños adicionales que se estudian en estas referencias incluyen los siguientes.

1. *Diseño de cuadrado latino*. Cuando es posible, y conveniente, identificar y aislar dos fuentes extrañas de variación en un experimento, puede utilizarse una extensión del diseño de bloques completos aleatorizados conocido como *diseño de cuadrado latino*. El término cuadrado latino fue utilizado por primera vez en un contexto de análisis de variancia por R. A. Fisher,[41] quien lo tomó del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).
   En el diseño de cuadrado latino, se asigna una de las fuentes de variación extraña a las columnas del cuadrado; la segunda fuente de variación extraña se asigna a los renglones del cuadrado; por último, los tratamientos, que por lo general se designan mediante letras latinas, se asignan de tal manera que cada tratamiento ocurra una vez, y sólo una vez, en cada renglón y en cada columna. El número de renglones, columnas y tratamientos es igual en todos los casos.
2. *Diseño de cuadrado grecolatino*. Esta es una extensión del diseño de cuadrado latino que permite la identificación y el aislamiento de tres fuentes extrañas de variación. Este diseño toma su nombre del hecho de que se sobrepone otra variable, representada por letras griegas, a las letras latinas (tratamientos) de un cuadrado latino, de modo que cada letra griega ocurre una vez en cada renglón, una vez en cada columna y una vez con cada letra latina.
3. *Diseño de bloque incompleto*. Si debe incluirse un gran número de tratamientos en un experimento, puede ser que no sea posible el diseño de bloques completos aleatorizados. Una alternativa es

incluir en un bloque sólo una parte del tratamiento. Los bloques que resultan de este procedimiento se conocen como *bloques incompletos*.

4. *Diseño de parcelas divididas.* El diseño de parcelas divididas es un tipo especial de diseño de bloque incompleto que suele utilizarse en experimentos factoriales. Se aplican niveles de uno o más factores a las *parcelas completas* que se dividen en *subparcelas*, a las cuales se aplican los niveles de uno o más factores adicionales.

7.6 RESUMEN

El objetivo de este capítulo es iniciar al estudiante en las ideas y técnicas básicas del análisis de variancia. Se tratan, con considerable detalle, dos diseños experimentales, el completamente aleatorizado y el de bloques completos aleatorizados. Además, se introduce el concepto de experimento factorial, como se utiliza con el diseño completamente aleatorizado. Se estudian brevemente algunos otros temas. Quien desee continuar con cualquier aspecto del análisis de variancia, encontrará las referencias más útiles al final del capítulo. La extensa bibliografía dada por Herzberg y Cox[56] indica más lecturas.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. Defina análisis de variancia.
2. Para cada uno de los siguientes diseños, describa una situación en su campo particular de interés en la que el diseño sea un diseño experimental apropiado. Utilice datos reales o realísticos y haga el análisis de variancia apropiado para cada uno:

   a) Diseño completamente aleatorizado.
   b) Diseño de bloques completos aleatorizados.
   c) Diseño completamente aleatorizado con un experimento factorial.

3. Se midió la frecuencia cardiaca (latidos por minuto) en cuatro grupos de adultos: controles normales (A), pacientes con angina (B), individuos hipersensibles (C) y pacientes con infarto del miocardio recuperados (D). Los resultados fueron los siguientes:

A	B	C	D
83	81	75	61
61	65	68	75
80	77	80	78
63	87	80	80
67	95	74	68
89	89	78	65
71	103	69	68
73	89	72	69
70	78	76	70
66	83	75	79
57	91	69	61

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia en la frecuencia cardiaca media entre estos cuatro tipos de personas?. Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

4. Se seleccionaron muestras aleatorias de cada uno de tres tipos de individuos: empleados de una empresa fabricante de plaguicidas con un alto grado de exposición, agricultores expuestos al plaguicida por varias semanas cada año y personas sin exposición conocida al plaguicida. Se hicieron determinaciones de la acetilcolinesterasa en muestras de sangre de cada persona, obteniéndose los siguientes resultados.

Empleados	Agricultores	No expuestos
6.4	6.5	7.3
6.6	6.8	7.5
6.8	7.0	7.8
6.9	7.1	7.9
9.5	9.7	10.8
6.1	6.2	6.9
7.5	7.7	8.5
8.2	8.4	9.4
4.1	4.2	4.6
5.5	5.6	6.3

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia, en promedio, entre los tres grupos de personas?. Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

5. Se registró la frecuencia respiratoria (respiraciones por minuto) en ocho animales de laboratorio bajo tres niveles de exposición al monóxido de carbono. Los resultados fueron los siguientes:

	Nivel de exposición		
Animal	Bajo	Moderado	Alto
1	36	43	45
2	33	38	39
3	35	41	33
4	39	34	39
5	41	28	33
6	41	44	26
7	44	30	39
8	45	31	29

Con base en estos datos, ¿puede concluirse que los tres niveles de exposición, en promedio, tienen un efecto diferencial sobre la frecuencia respiratoria?. Sea $\alpha = .05$. Determine el valor p.

6. Se llevó a cabo un experimento para estudiar los efectos de tres medicamentos distintos y tres tipos de situaciones de *stress* causantes de ansiedad en adolescentes. La siguiente tabla muestra la diferencia entre los registros antes y después del tratamiento de 18 personas que participaron en el experimento.

Situación de *stress* (Factor A)	Medicamento (Factor B)		
	A	B	C
I	4	1	1
	5	3	0
II	6	6	6
	6	6	3
III	5	7	4
	4	4	5

Realice un análisis de variancia de estos datos y pruebe las tres hipótesis posibles. Sea $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = .05$. Determine los valores p.

7. La siguiente tabla muestra los resultados de madurez emocional de 27 jóvenes de sexo masculino clasificados por edad y el grado al cual fuman la mariguana.

Edad (Factor A)	Uso de la mariguana (Factor B) Nunca	Ocasionalmente	Diariamente
	25	18	17
15–19	28	23	24
	22	19	19
	28	16	18
20–24	32	24	22
	30	20	20
	25	14	10
25–29	35	16	8
	30	15	12

Haga un análisis de variancia de estos datos. Sea $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = .05$. Calcule los valores p.

8. Los siguientes valores son las cantidades de cierto compuesto químico presente en una cantidad uniforme de tejido de 25 animales de laboratorio representando cuatro especies distintas. Pruebe la hipótesis nula de que, en promedio, las cuatro especies contienen la misma cantidad del compuesto químico y pruebe que existe una diferencia significativa entre todas las parejas posibles de medias de las muestras. Sea $\alpha = .05$.

Especies

1	2	3	4
65.7	186.7	86.8	139.1
70.3	176.0	102.6	147.5
76.1	188.5	84.4	130.0
78.3	178.9	90.3	150.1
68.7	180.2	98.0	142.1
72.1		88.5	144.4
76.1			138.3
80.2			

9. Se llevó a cabo un experimento para probar el efecto de cuatro medicamentos distintos sobre el tiempo de coagulación de la sangre (en minutos). Se extrajeron muestras de sangre de 10 personas y se dividieron igualmente en cuatro partes que se asignaron al azar a uno de los cuatro medicamentos. Los resultados fueron los siguientes.

	Medicamento			
Persona	W	X	Y	Z
A	1.5	1.8	1.7	1.9
B	1.4	1.4	1.3	1.5
C	1.8	1.6	1.5	1.9
D	1.3	1.2	1.2	1.4
E	2.0	2.1	2.2	2.3
F	1.1	1.0	1.0	1.2
G	1.5	1.6	1.5	1.7
H	1.5	1.5	1.5	1.7
I	1.2	1.0	1.3	1.5
J	1.5	1.6	1.6	1.9

Con base en estos datos, ¿puede concluirse que los medicamentos tienen efectos distintos?. Sea $\alpha = .05$.

10. Las determinaciones de la aldolasa en el suero de tres muestras de niños dieron los siguientes resultados.

Controles	Niños con distrofia muscular progresiva	Niños con poliomielitis
.30	14.00	1.50
.30	5.50	1.10
.30	12.00	.80
.40	7.10	1.30
.40	8.00	.90
.40	4.20	.60
.50	6.30	.50
.50	3.00	
.50	6.00	
.50		

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que las tres poblaciones representadas difieren con respecto a los niveles medios de la aldolasa en el suero? Sea $\alpha = .01$. Pruebe que existe una diferencia significativa entre todas las parejas posibles de medias de las muestras.

11. La siguiente tabla muestra las concentraciones arteriales de epinefrina en plasma (nanogramos por mililitro) encontradas en 10 animales de laboratorio durante tres tipos de anestesia.

	Animal									
Anestesia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	.28	.50	.68	.27	.31	.99	.26	.35	.38	.34
B	.20	.38	.50	.29	.38	.62	.42	.87	.37	.43
C	1.23	1.34	.55	1.06	.48	.68	1.12	1.52	.27	.35

A partir de estos datos, ¿puede concluirse que los tres tipos de anestesia, en promedio, tienen diferentes efectos?. Sea $\alpha = .05$.

12. Se estimó el valor nutritivo de cierto fruto comestible en un total de 72 unidades que representaban a 6 frutos de cada una de cuatro variedades cultivadas en cada una de tres regiones grográficas. Los resultados fueron los siguientes:

	Variedad			
Región geográfica	W	X	Y	Z
A	6.9	11.0	13.1	13.4
	11.8	7.8	12.1	14.1
	6.2	7.3	9.9	13.5
	9.2	9.1	12.4	13.0
	9.2	7.9	11.3	12.3
	6.2	6.9	11.0	13.7
B	8.9	5.8	12.1	9.1
	9.2	5.1	7.1	13.1
	5.2	5.0	13.0	13.2
	7.7	9.4	13.7	8.6
	7.8	8.3	12.9	9.8
	5.7	5.7	7.5	9.9

Variedad

Región geográfica	W	X	Y	Z
	6.8	7.8	8.7	11.8
	5.2	6.5	10.5	13.5
	5.0	7.0	10.0	14.0
C	5.2	9.3	8.1	10.8
	5.5	6.6	10.6	12.3
	7.3	10.8	10.5	14.0

Demuestre que existe una diferencia entre las variedades, una diferencia entre las regiones, e interacción. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

13. Se seleccionó una muestra al azar de los registros de nacimientos de cada una de cuatro poblaciones. Los pesos (en gramos) de los bebés al nacer fueron los siguientes.

Muestra

A	B	C	D
2946	3186	2300	2286
2913	2857	2903	2938
2280	3099	2572	2952
3685	2761	2584	2348
2310	3290	2675	2691
2582	2937	2571	2858
3002	3347		2414
2408			2008
			2850
			2762

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique, al nivel de significación de .05, que las cuatro poblaciones difieren con respecto al peso medio al nacer?. Demuestre que existe una diferencia significativa entre todas las parejas posibles de medias.

14. La siguiente tabla muestra los valores de agresión de 30 animales de laboratorio mantenidos en tres condiciones distintas. Se asignó al azar un animal de cada una de 10 camadas a cada una de las tres condiciones de crianza.

Condición de crianza

Camada	Extremadamente amontonados	Moderadamente amontonados	No amontonados
1	30	20	10
2	30	10	20
3	30	20	10
4	25	15	10
5	35	25	20
6	30	20	10
7	20	20	10
8	30	30	10
9	25	25	10
10	30	20	20

¿Porporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que el nivel de amontonamiento tiene un efecto sobre la agresión?. Sea $\alpha = .05$.

15. La siguiente tabla muestra las estimaciones de la capacidad vital de 60 hombres adultos clasificados por ocupación y grupo de edades.

Ocupación

Grupo de edades	A	B	C	D
	4.31	4.68	4.17	5.75
	4.89	6.18	3.77	5.70
1	4.05	4.48	5.20	5.53
	4.44	4.23	5.28	5.97
	4.59	5.92	4.44	5.52
	4.13	3.41	3.89	4.58
	4.61	3.64	3.64	5.21
2	3.91	3.32	4.18	5.50
	4.52	3.51	4.48	5.18
	4.43	3.75	4.27	4.15
	3.79	4.63	5.81	6.89
	4.17	4.59	5.20	6.18
3	4.47	4.90	5.34	6.21
	4.35	5.31	5.94	7.56
	3.59	4.81	5.56	6.73

Demuestre que existen diferencias entre las ocupaciones, diferencias entre los grupos de edades y que no existe interacción. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. R. A. Fisher, *The Design of Experiments*, octava edición, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1966.
2. R. A. Fisher, *Contributions to Mathematical Statistics*, Wiley, Nueva York, 1950.
3. Ronald A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, décimatercera edición, Hafner, Nueva York, 1958.
4. William G. Cochran y Gertrude M. Cox, *Experimental Designs*, Wiley, Nueva York, 1957.
5. D. R. Cox, *Planning of Experiments*, Wiley, Nueva York, 1958.
6. Owen L. Davies (ed.), *The Design and Analysis of Experiments*, Hafner, Nueva York, 1960.
7. Walter T. Federer, *Experimental Design*, Macmillan, Nueva York, 1955.
8. D. J. Finney, *Experimental Design and its Statistical Basis*, The University of Chicago Press, Chicago, 1955.
9. Peter W. M. John, *Statistical Design and Analysis of Experiments* Macmillan, Nueva York, 1971.
10. Oscar Kempthorne, *The Design and Analysis of Experiments*, Wiley, Nueva York, 1952.
11. C.C. Li, *Introduction to Experimental Statistics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1964.
12. William Mendenhall, *Introduction to Linear Models and the Design and Analysis of Experiments*, Wadsworth, Belmont, Cal., 1968.
13. Churchill Eisenhart, "The Assumptions Underlying the Analysis of Variance," *Biometrics, 21* (1947), 1-21.
14. W. G. Cochran, "Some Consequences When the Assumptions for the Analysis of Variance Are Not Satisfied," *Biometrics, 3* (1947), 22-38.
15. M. B. Wilk y O. Kempthorne, "Fixed, Mixed and Random Models," *Journal of the American Statistical Association, 50* (1955), 1144-1167.

16. S. L. Crump, "The Estimation of Variance Components in Analysis of Variance," *Biometrics, 2* (1946), 7-11.
17. E. P. Cunningham y C. R. Henderson, "An Iterative Procedure for Estimating Fixed Effects and Variance Components in Mixed Model Situations," *Biometrics, 24* (1968), 13-25.
18. C. R. Henderson, "Estimation of Variance and Covariance Components," *Biometrics, 9* (1953), 226-252.
19. J. R. Rutherford, "A Note on Variances in the Components of Variance Model," *The American Statistician, 25* (junio 1971), 1, 2.
20. E. F. Schultz, Jr., "Rules of Thumb for Determining Expectations of Mean Squares in Analysis of Variance," *Biometrics, 11* (1955), 123-135.
21. S. R. Searle, "Topics in Variance Component Estimation," *Biometrics, 27* (1971), 1-76.
22. Robert G. D. Steel y James H. Torrie, *Principles and Procedures of Statistics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1960.
23. David B. Duncan, *Significance Tests for Differences Between Ranked Variates Drawn from Normal Populations*, Tesis de doctorado (1949), Iowa State College, 117 págs.
24. David B. Duncan, "A Significance Test for Differences Between Ranked Treatments in an Analysis of Variance," *Virginia Journal of Science, 2* (1951), 171-189.
25. David B. Duncan, "On the Properties of the Multiple Comparisons Test," *Virginia Journal of Science, 3* (1952), 50-67.
26. David B. Duncan, "Multiple Range and Multiple-*F* Tests," *Biometrics, 11* (1955), 1-42.
27. C. Y. Kramer, "Extension of Multiple Range Tests to Group Means with Unequal Numbers of Replications," *Biometrics, 12* (1956) 307-310.
28. C. W. Dunnett, "A Multiple Comparisons Procedure for Comparing Several Treatments with a Control," *Journal of the American Statistical Association, 50* (1955), 1096-1121.
29. C. W. Dunnett, "New Tables for Multiple Comparisons with a Control," *Biometrics, 20* (1964), 482-491.
30. J. W. Tukey, "Comparing Individual Means in the Analysis of Variance," *Biometrics, 5* (1949), 99-114.
31. J. W. Tukey, "The Problem of Multiple Comparisons," Ditto, Princeton University, 1953; citado en Roger E. Kirk, *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences*, Brooks/Cole, Belmont, California, 1968.

32. D. Newman, "The Distribution of the Range in Samples from a Normal Population in Terms of an Independent Estimate of Standard Deviation," *Biometrika, 31* (1939), 20-30.
33. M. Keuls, "The Use of the Studentized Range in Connection with the Analysis of Variance," *Euphytica, 1* (1952), 112-122.
34. Henry Scheffé, "A Method for Judging All Contrasts in the Analysis of Variance," *Biometrika, 40* (1953), 87-104.
35. Henry Scheffé, *Analysis of Variance*, Wiley, Nueva York (1959).
36. T. A. Bancroft, *Topics in Intermediate Statistical Methods*, Volumen I. The Iowa State University Press, Ames, 1968.
37. Wayne W. Daniel y Carol E. Coogler, "Beyond Analysis of Variance: A Comparison of Some Multiple Comparison Procedures," *Physical Therapy, 55* (1975), 144-150.
38. B. J. Winer, *Statistical Principles in Experimental Design*, segunda edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1971.
39. Wayne W. Daniel, *Multiple Comparison Procedures: A Selected Bibliography*, Vance Bibliografía, Monticello, Illinois, junio 1980.
40. Emil Spjøtvoll Michael R. Stoline, "An Extension of the T-Method of Multiple Comparison to Include the Cases With Unequal Sample Sizes," *Journal of the American Statistical Association, 68* (1973), 975-978.
41. R. A. Fisher, "The Arrangement of Field Experiments," *Journal of Ministry of Agriculture, 33* (1926), 503-513.
42. R. L. Anderson y T. A. Bancroft, *Statistical Theory in Research*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
43. J. W. Tukey, "One Degree of Freedom for Non-Additivity," *Biometrics, 5* (1949), 232-242.
44. John Mandel, "A New Analysis of Variance Model for Non-Additive Data," *Technometrics, 13* (1971), 1-18.
45. A. W. Kimball, "On Dependent Tests of Significance in the Analysis of Variance," *Annals of Mathematical Statistics, 22* (1951), 600-602.
46. Wilfred J. Dixon y Frank J. Massey, *Introduction to Statistical Analysis*, tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1969.
47. William C. Guenther, *Analysis of Variance*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
48. Bernard Ostle, *Statistics in Research*, segunda edición, The Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1963.
49. William Alexander Glenn y Clyde Young Kramer, "Analysis of Variance of a Randomized Block Design with Missing Observations," *Applied Statistics, 7* (1958), 173-185.

50. Clyde Young Kramer y Suzanne Glass, "Analysis of Variance of a Latin Square Design with Missing Observations," *Applied Statistics, 9* (1960), 43-50.
51. Hugh Robert Baird y Clyde Young Kramer, "Analysis of Variance of a Balanced Incomplete Block Design with Missing Observations," *Applied Statistics, 9* (1960), 189-198.
52. M. H. Quenoille, *Introductory Statistics*, Pergamon, Londres, 1950.
53. Robert R. Sokal y F. James Rohlf, *Biometry*, W. H. Freeman, San Francisco, 1969.
54. S. C. Pearce, *Biological Statistics: An Introduction*, McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
55. M. S. Bartlett, "The Use of Transformations," *Biometrics, 3* (1947), 39-52.
56. Agnes M. Herzberg y D. R. Cox, "Recent Work on the Design of Experiments: A Bibliography and a Review," *Journal of the Royal Statistical Society* (Serie A), *132* (1969), 29-67.

Otras referencias, libros

1. Geoffrey M. Clarke, *Statistics and Experimental Design*, American Elsevier, Nueva York, 1969.
2. D. J. Finney, *An Introduction to the Theory of Experimental Design*, The University of Chicago Press, Chicago, 1960.
3. E. G. Olds, T. B. Mattson y R. E. Odeh: *Notes on the Use of Transformations in the Analysis of Variance*, WADC Tech Rep 56-308, 1956, Wright Air Development Center.

Otras referencias, artículos de revistas

1. Benjamín A. Barnes, Elinor Pearson y Eric Reiss, "The Analysis of Variance: A Graphical Representation of a Statistical Concept," *Journal of the American Statistical Association, 50* (1955), 1064-1072.
2. David B. Duncan, "Bayes Rules for a Common Multiple Comparisons Problem and Related Student-*t* Problems," *Annals of Mathematical Statistics, 32* (1961), 1013-1033.
3. David B. Duncan, "A Bayesian Approach to Multiple Comparisons," *Technometrics, 7* (1965), 171-222.
4. Ray A. Waller y David B. Duncan, "A Bayes Rule for the Symmetric Multiple Comparisons Problem," *Journal of the American Statistical Association, 64* (1969) 1484-1503.

5. Alva R. Feinstein, "Clinical Biostatistics II Statistics Versus Science in the Design of Experiments," *Clinical Pharmacology and Therapeutics, 11* (1970), 282-292.
6. B. G. Greenberg, "Why Randomize?" *Biometrics, 7* (1951), 309-322.
7. M. Harris, D. G. Horvitz y A. M. Mood, "On the Determination of Sample Sizes in Designing Experiments," *Journal of the American Statistical Association, 43* (1948), 391-402.
8. H. Leon Harter, "Multiple Comparison Procedures for Interactions," *The American Statistician, 24* (diciembre 1970), 30-32.
9. Carl E. Hopkins y Alan J. Gross, "Significance Levels in Multiple Comparison Tests," *Health Services Research, 5* (verano de 1970), 132-140.
10. Richard J. Light y Barry H. Margolin, "An Analysis of Variance for Categorical Data," *Journal of the American Statistical Association, 66* (1971), 534-544.
11. Ken Sirotnik, "On the Meaning of the Mean in ANOVA (or the Case of the Missing Degree of Freedom)," *The American Statistician, 25* (octubre, 1971), 36-37.

8

Regresión y correlación lineales simples

8.1 INTRODUCCIÓN

Al analizar los datos para las disciplinas de las ciencias de la salud, se encuentra con frecuencia que resulta conveniente saber algo acerca de la relación que existe entre dos variables. Por ejemplo, es posible que se tenga interés en estudiar la relación que existe entre la presión sanguínea y la edad, la estatura y el peso, la concentración de un medicamento inyectado a la frecuencia cardiaca, el nivel de consumo de algún nutriente y la ganancia de peso, la intensidad de un estímulo y el tiempo de reacción, o bien, el ingreso total familiar y los gastos médicos. La naturaleza e intensidad de las relaciones entre variables como éstas puede estudiarse por medio del análisis de *regresión* y *correlación,* dos técnicas estadísticas que, aunque relacionadas, tienen finalidades distintas.

El análisis de regresión es útil para averiguar la forma probable de la relación entre las variables y, cuando se utiliza este método de análisis, el objetivo final es por lo general *predecir* o *estimar* el valor de una variable que corresponde a un valor determinado de otra variable. Las ideas de la regresión fueron elucidadas por primera vez por el científico inglés Sir Francis Galton (1822-1911) en los reportes de sus investigaciones sobre la herencia, primero en los chícharos y, después, en la estatura humana.[1-3] Describió una tendencia del hijo adulto, que tiene padres bajos o altos, a regresar hacia la estatura promedio de la población general. Primero, utilizó la palabra *reversión* y después la de *regresión* para referirse a este fenómeno.

Por otra parte, el análisis de correlación se refiere a la medición de la intensidad de la relación entre las variables. Cuando se calculan medidas de correlación a partir de un conjunto de datos, el interés se centra en el grado de *correlación* entre las variables. El origen de los conceptos y la terminología del análisis de correlación se deben a Galton, quien utilizó primero la palabra *correlación* en 1888.[4]

Este capítulo se limita al examen de la relación que existe entre dos variables. Se estudian primero los conceptos y métodos de la regresión, empezando en la siguiente sección. En la sección 8.6 se introducen las ideas y técnicas de la correlación. En el capítulo siguiente se estudia el caso donde el interés se centra en las relaciones que existen entre tres o más variables.

Los análisis de regresión y de correlación son temas en los cuales se aprecia realmente la velocidad y precisión de una computadora. Por lo tanto, los datos de los ejercicios de este capítulo se presentan en una forma que los hace accesibles para que se procesen con computadora. Como siempre, los requisitos de información de entrada y las características de salida de los programas particulares que van a utilizarse deben estudiarse cuidadosamente.

8.2 EL MODELO DE REGRESIÓN

En el problema típico de regresión, como en la mayoría de los problemas de la estadística aplicada, el investigador cuenta, para el análisis, con una muestra de observaciones de alguna población real o hipotética. En base a los resultados de los análisis de los datos de la muestra, tiene interés en llegar a decisiones acerca de la población de la cual se supone se ha extraído la muestra. Por lo tanto, es importante que el investigador comprenda la naturaleza de la población en la que está interesado. Debe conocer lo suficiente acerca de la población para poder elaborar un modelo matemático que la represente, o bien, determinar si se ajusta razonablemente a algún modelo ya establecido. El investigador que va a analizar un conjunto de datos por medio de los métodos de regresión lineal simple, por ejemplo, debe tener la seguridad de que el modelo de regresión lineal simple es, al menos, una representación aproximada de su población. Es improbable que el modelo sea un retrato perfecto de la situación real, ya que esta característica se encuentra rara vez en los modelos de valor práctico. Un modelo elaborado de modo que corresponda precisamente con los detalles de la situación, es generalmente demasiado complicado como para proporcionar alguna información de valor. Por otra parte, los resultados que se obtienen del análisis de datos que se han forzado a un modelo al que no se ajustan tampoco tienen valor. Por fortuna, no se requiere un modelo que se ajuste perfectamente para obtener resultados útiles. El investigador debe ser capaz entonces de distinguir entre el caso en que su elección del modelo y los datos son lo suficientemente compatibles como para que pueda proceder y cuando deba rechazarse su modelo elegido.

Suposiciones que fundamentan la regresión lineal simple. Para el modelo de regresión lineal simple son importantes dos variables, X y Y. La variable X se conoce por lo general como *variable independiente,* ya que con frecuencia se encuentra bajo el control del investigador, es decir, los valores de X pueden ser seleccionados por el investigador y, correspondiendo a cada valor preseleccionado de esta variable, se obtienen uno o más valores de Y. En consecuencia, la otra variable, Y, se conoce como *variable dependiente:* y se habla de la regresión de Y sobre X. Los siguientes puntos son las suposiciones que fundamentan el modelo de regresión lineal simple.

1. Se dice que los valores de la variable independiente X son "fijos". Esto significa que los valores de X son preseleccionados por el investigador, de modo que en la recolección de los datos, no se permite que varíen de estos valores preseleccionados. En este modelo, algunos autores le dan a X el nombre de variable no *aleatoria* y otros el de variable *matemática.* Debe señalarse en este momento que el enunciado de esta suposición clasifica al modelo como el *modelo de regresión clásico.* El análisis de regresión puede también llevarse a cabo en base a datos en los cuales X es una variable aleatoria.
2. La variable X se mide sin error. Dado que ningún procedimiento de medición es perfecto, esto significa que se desprecia la magnitud del error de medición en X.
3. Para cada valor de X existe una subpoblación de valores de Y. Para que sean válidos los procedimientos comunes de inferencia estadística de estimación y prueba de la hipótesis, estas subpoblaciones deben tener una distribución normal. Para que puedan presentarse estos procedimientos, en los ejemplos y ejercicios que siguen se supondrá que los valores de Y están distribuidos normalmente.

4. Todas las variancias de las subpoblaciones de Y son iguales.
5. Todas las medias de las subpoblaciones de Y están sobre la misma línea recta. Esto se conoce como la *suposición de linealidad.* Esta suposición puede expresarse simbólicamente como

$$\mu_{y|x} = \alpha + \beta x \tag{8.2.1}$$

donde $\mu_{y|x}$ es la media de la subpoblación de valores de Y para un valor particular de X y α y β se conocen como coeficientes de regresión de la población. Desde el punto de vista geométrico, α y β representan, respectivamente, la ordenada al origen y la pendiente de la recta sobre la cual se supone están todas las medias.
6. Los valores de Y son estadísticamente independientes. En otras palabras, el extraer la muestra, se supone que los valores de Y obtenidos para un valor de X de ninguna manera dependen de los valores de Y elegidos para otro valor de X.

Estas suposiciones pueden resumirse por medio de la siguiente ecuación, conocida como modelo de regresión:

$$y = \alpha + \beta x + e \tag{8.2.2}$$

donde y es un valor típico de una de las subpoblaciones de Y, α y β son como se definen en la ecuación 8.2.1 y e se conoce como término de error. Si se despeja e en la ecuación 8.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned} e &= y - (\alpha + \beta x) \\ &= y - \mu_{y|x} \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

y se observa que e indica la cantidad con la que y se desvía de la media de la subpoblación formada por los valores de Y a partir de la cual se extrae. Como consecuencia de la suposición de que las subpoblaciones de los valores de Y están distribuidos normalmente, con variancias iguales, las e para cada subpoblación están distribuidas normalmente con una variancia igual a la variancia común de las subpoblaciones de los valores de Y.

En la figura 8.2.1 se ilustra con una representación gráfica el modelo de regresión.

8.3 ECUACIÓN DE REGRESIÓN DE LA MUESTRA

En la regresión lineal simple, el objeto de interés del investigador es la ecuación de regresión de la población, que describe la relación real en-

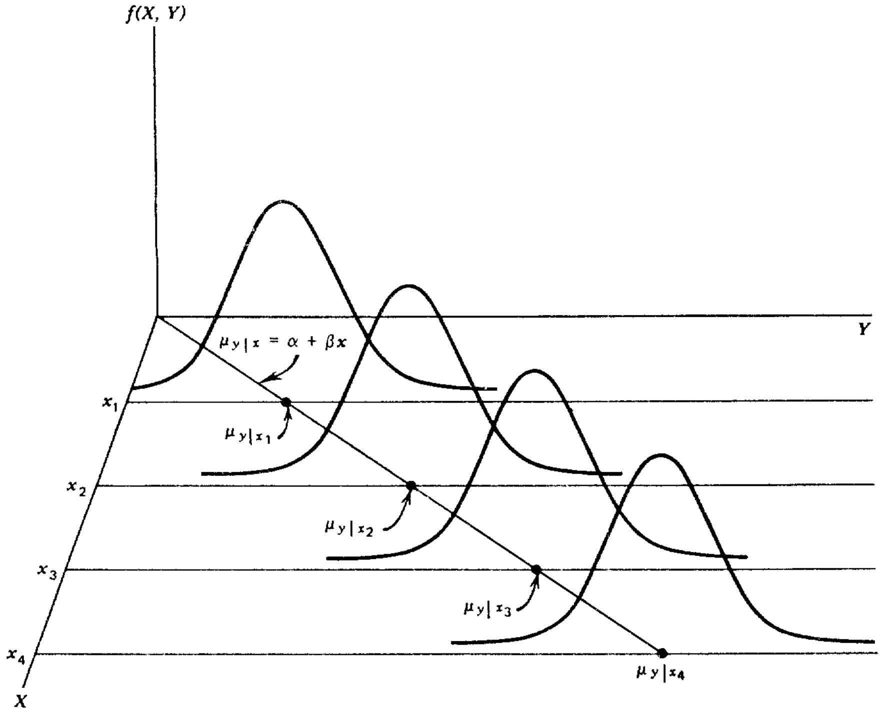


Figura 8.2.1 Representación del modelo de regresión lineal simple.

tre la variable dependiente Y y la variable independiente X. En un esfuerzo por llegar a una decisión sobre la forma probable de esta relación, el investigador extrae una muestra de la población de interés y, utilizando los datos resultantes, calcula una ecuación de regresión de la muestra que forma la base para llegar a conclusiones acerca de la ecuación desconocida de regresión de la población.

Ejemplo 8.3.1

Un grupo de profesionales especialistas en salud mental de un hospital psiquiátrico, donde los pacientes permanecen mucho tiempo, deseaba estimar el nivel de respuesta de pacientes retraídos en un programa de terapia de remotivación. Con este fin, se contaba con una prueba estandarizada, pero era incosteable y tardada para administrarla. Para superar este obstáculo, el grupo desarrolló una prueba que era mucho más fácil de aplicar. Para probar la utilidad del nuevo

Tabla 8.3.1 Calificaciones obtenidas por los pacientes en las pruebas nueva y estandarizada, ejemplo 8.3.1.

Número del paciente	*Calificación obtenida en la nueva prueba (X)*	*Calificación obtenida en la prueba estandarizada (Y)*
1	50	61
2	55	61
3	60	59
4	65	71
5	70	80
6	75	76
7	80	90
8	85	106
9	90	98
10	95	100
11	100	114

instrumento para medir el nivel de respuesta del paciente, el grupo decidió estudiar la relación entre las calificaciones obtenidas con la nueva prueba y las calificaciones obtenidas con la prueba estandarizada. El objetivo era utilizar la nueva prueba si podía demostrarse que era un buen elemento para pronosticar la calificación de un paciente con respecto a la prueba estandarizada. El grupo estaba interesado sólo en llevar a cabo el análisis de las calificaciones estandarizadas entre 50 y 100, ya que una calificación por debajo de 50 no representaba un nivel significativo de respuesta y las calificaciones superiores a 100, aunque posibles, rara vez eran alcanzadas por el tipo de paciente en estudio. El grupo observó también que el uso de calificaciones incrementadas a intervalos de 5 cubriría bien el rango de las calificaciones entre 50 y 100. En consecuencia, se seleccionaron 11 pacientes que habían obtenido calificaciones de 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95 y 100, respectivamente en la nueva prueba, para que hicieran la prueba estandarizada. Las variables independiente y dependiente son respectivamente las calificaciones obtenidas en la nueva prueba y en la prueba estandarizada. Los resultados que se obtuvieron se presentan en la tabla 8.3.1.

El lector observará que, en este ejemplo, se satisface la suposición de valores fijos de X. Los valores de X se seleccionaron con anterioridad y no se permitió que variaran, como hubiera sido el caso de haberse seleccionado los pacientes al azar, antes de efectuar las pruebas.

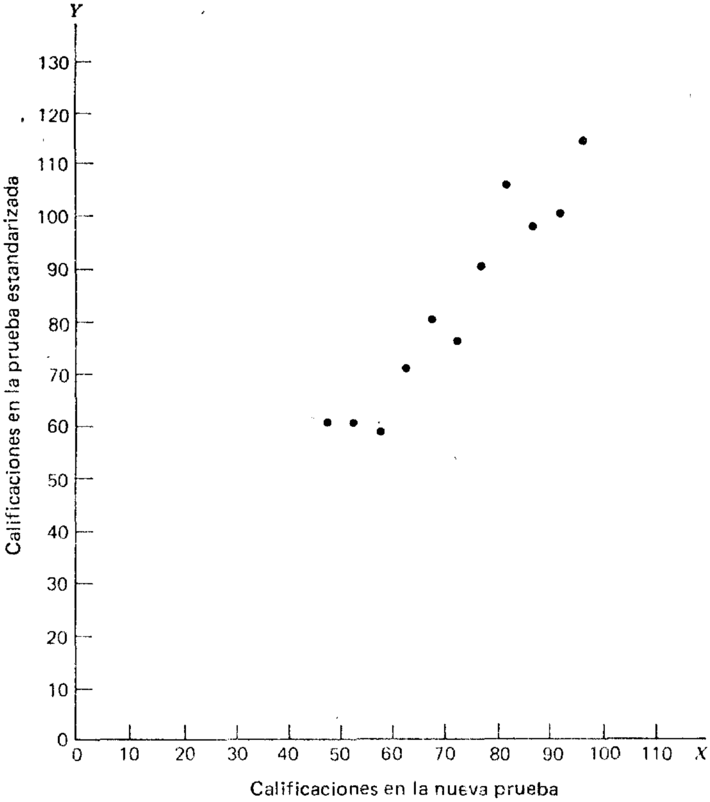


Figura 8.3.1 Diagrama de dispersión de los datos mostrados en la tabla 8.3.1.

El primer paso que suele ser útil para estudiar la relación entre dos variables es preparar un *diagrama de dispersión* de los datos, como se muestra en la figura 8.3.1. Los puntos se grafican asignando los valores de la variable independiente X al eje horizontal, y los valores de la variable dependiente Y al eje vertical.

El patrón obtenido mediante los puntos graficados en el diagrama de dispersión sugiere por lo general la naturaleza básica de la relación entre dos variables. Como puede observarse en la figura 8.3.1, por ejemplo, los puntos parecen estar distribuidos en torno a una línea recta invisible. El diagrama de dispersión muestra también que, en general, los pacientes que obtuvieron calificaciones altas en la nueva prueba obtuvieron asimismo altas calificaciones en la prueba estandarizada. Estos resultados sugieren que la relación entre las calificaciones de las dos pruebas puede representarse mediante una línea recta que cruce al eje Y cerca del origen y que forme aproximadamente un ángulo de 45 grados con el eje X. Se ve como si fuera sencillo trazar, a pulso, por los puntos de los datos, la línea que representa la relación entre X y Y. Sin embargo, es poco probable que las rectas trazadas por dos personas cualesquiera fueran exactamente la misma. En otras palabras, cada persona que trazara esa recta a ojo, a pulso, obtendría una recta ligeramente distinta. Surge entonces la cuestión de cuál recta describe mejor la relación entre las variables. No puede obtenerse una respuesta para esta pregunta al observar las rectas. De hecho, no es probable que alguna de las rectas trazadas a través de los datos sea la que describa mejor la relación entre X y Y, ya que las rectas trazadas a mano reflejarán cualquier defecto de visión o de juicio que pueda poseer la persona que las trace. Asimismo, cuando se juzgue cuál de dos rectas describe mejor la relación, la evaluación subjetiva está expuesta a las mismas deficiencias.

Lo que se necesita es algún método para obtener la recta deseada, que no esté sujeto a estas deficiencias.

La recta de los mínimos cuadrados. El método que se utiliza por lo común para obtener la recta deseada se conoce como *método de mínimos cuadrados* y la recta resultante se conoce como *recta de mínimos cuadrados*. En el siguiente análisis se explicará la razón del porqué se le da este nombre al método.

Recuérdese, del álgebra, que la ecuación general de una recta está dada por la expresión

$$y = a + bx \tag{8.3.1}$$

donde y es un valor sobre el eje vertical, x un valor sobre el eje horizontal, a el punto donde la recta cruza el eje vertical y b indica la cantidad con la cual y cambia por cada unidad de cambio en x. a se conoce como la *ordenada al origen* y b como la *pendiente* de la recta. Para trazar una recta en base a la ecuación 8.3.1, se necesitan los valores numéricos de las constantes a y b. Dadas estas constantes, pueden sustituirse varios valores de x en la ecuación para obtener los correspondientes valores de y. Luego, pueden graficarse los puntos resultantes. Dado que dos parejas cualesquiera de esas coordenadas determinan una recta, pueden seleccionarse dos cualesquiera, localizarse en sistema coordenado y unirse para obtener la recta correspondiente a la ecuación. Puede demostrarse, mediante matemáticas que están fuera del alcance de este libro, que a y b pueden obtenerse resolviendo si-

Tabla 8.3.2 Cálculos intermedios para las ecuaciones normales, ejemplo 8.3.1.

Calificación obtenida en la nueva prueba	*Calificación obtenida en la prueba estandarizada*			
x	y	x^2	y^2	xy
50	61	2500	3721	3050
55	61	3025	3721	3355
60	59	3600	3481	3540
65	71	4225	5041	4615
70	80	4900	6400	5600
75	76	5625	5776	5700
80	90	6400	8100	7200
85	106	7225	11236	9010
90	98	8100	9604	8820
95	100	9025	10000	9500
100	114	10000	12996	11400
Total 825	916	64625	80076	71790

multáneamente las dos ecuaciones siguientes, conocidas como *ecuaciones normales* para un conjunto de datos:

$$\sum y_i = na + b\sum x_i \tag{8.3.2}$$

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 \tag{8.3.3}$$

En la tabla 8.3.2 se tienen los valores necesarios para sustituirlos en las ecuaciones normales.

Sustituyendo los valores apropiados de la tabla 8.3.2 en las ecuaciones 8.3.2 y 8.3.3, se tiene que

$$916 = 11a + 825b$$

$$71790 = 825a + 64625b$$

Pueden resolverse estas ecuaciones por cualquier método conocido, para obtener

$$a = -.9973 \quad \text{y} \quad b = 1.1236$$

La ecuación lineal para la recta de mínimos cuadrados que describe la relación entre las calificaciones obtenidas en la prueba estandarizada y las obtenidas en la nueva prueba puede escribirse entonces como:

$$y_c = -.9973 + 1.1236x \tag{8.3.4}$$

Esta ecuación indica que, dado que a es negativa, la línea cruza el eje Y debajo del origen y que dado que b, la pendiente, es positiva, la recta se extiende de la parte inferior izquierda de la gráfica a la parte superior derecha de la misma. Se observa además que, para cada unidad de incremento en x, y aumenta en una cantidad igual a 1.1236. Se ha agregado el subíndice c a y para indicar que es un valor calculado a partir de la ecuación, más que un valor observado de Y.

Sustituyendo dos valores convenientes de X en la ecuación 8.3.4, pueden obtenerse las coordenadas necesarias para trazar la recta. Supóngase, primero, que $X = 50$, de lo que se obtiene

$$y_c = -.9973 + 1.1236(50) = 55.1827$$

Si se supone que $X = 100$, se tiene que

$$y_c = -.9973 + 1.1236(100) = 111.3627$$

La recta, junto con los datos originales, se muestra en la figura 8.3.2.

Los valores numéricos de a y b pueden obtenerse mediante otras fórmulas que no implican directamente las ecuaciones normales. Las fórmulas son las siguientes:

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \tag{8.3.5}$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n} \tag{8.3.6}$$

Para el presente ejemplo, se tiene que

$$b = \frac{11(71790) - (825)(916)}{11(64625) - (825)^2} = 1.1236$$

$$a = \frac{916 - 1.1236(825)}{11} = -.9973$$

Así, se observa que las ecuaciones 8.3.5 y 8.3.6 dan los mismos resultados que se obtienen también al resolver las ecuaciones normales.

Ahora que se ha obtenido lo que se conoce como la "mejor" recta para describir la relación que existe entre las dos variables, se necesita determinar bajo qué criterio se considera mejor. Antes de que se enuncie el criterio, obsérvese la figura 8.3.2. Se observa que la recta de los mínimos cuadrados no pasa por punto alguno de los que se graficaron en el diagrama de dispersión. En otras palabras, los puntos observados *se desvían* de la recta en diversas cantidades.

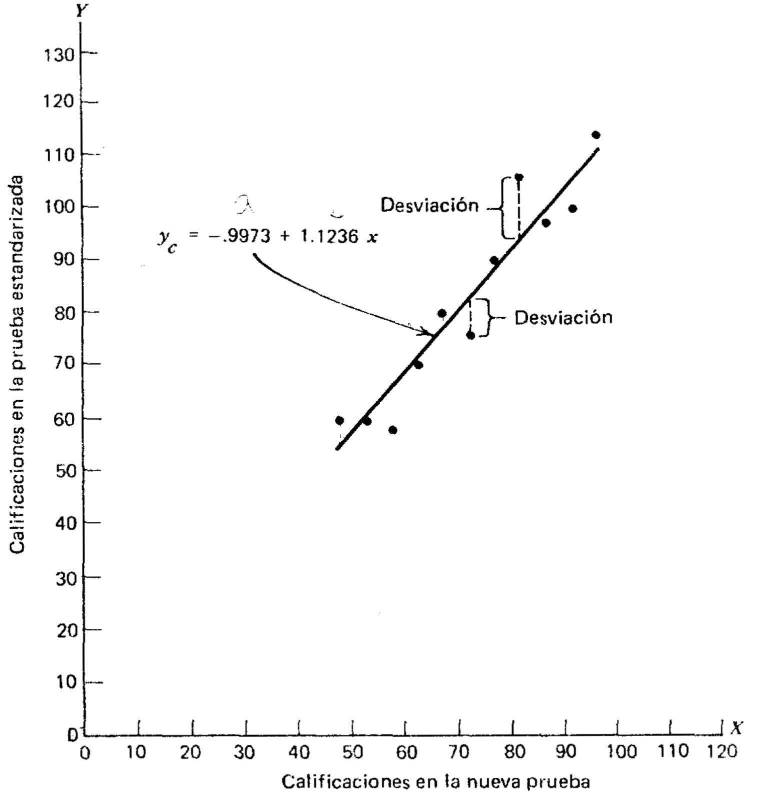


Figura 8.3.2 Datos originales y recta de mínimos cuadrados para el ejemplo 8.3.1.

La recta que se ha trazado a través de los puntos es mejor en este sentido:

> *La suma de las desviaciones verticales, elevadas al cuadrado, de los puntos correspondientes a los datos observados* (y_i) *con respecto a la recta de los mínimos cuadrados es menor que la suma de las desviaciones verticales, elevadas al cuadrado, de los puntos de los datos que forman cualquier otra recta.*

En otras palabras, si se eleva al cuadrado la distancia vertical desde cada punto observado (y_i) hasta la recta de los mínimos cuadrados y se suman los valores obtenidos para todos los puntos, el total resultante será menor que el total calculado en forma semejante para cualquier otra recta que pueda trazarse a través de los puntos. Por es-

Nivel de concentración (*X*)	*Densidad óptica* (*Y*)
160	.18
200	.21
240	.28
280	.28
320	.38
360	.40
400	.42
440	.50
480	.52
520	.60

8.3.3 El administrador de un hospital reunió los siguientes datos sobre el costo por comida de una comida estándar a diferentes volúmenes de preparación.

Número de comidas servidas (*X*)	*Costo por comida* (*Y*)
30	$1.15
35	1.10
40	.98
45	1.01
50	.97
55	.90
60	.89
70	.85
75	.78
80	.70
65	.80

8.3.4 Se llevó a cabo un experimento para estudiar la relación entre una medición objetiva de la ansiedad y la frecuencia cardiaca en adultos. Se obtuvieron los siguientes resultados en 12 adultos normales.

Frecuencia cardiaca por minuto (*X*)	*Medición objetiva de la ansiedad* (*Y*)
50	48
55	41

Frecuencia cardiaca por minuto (X)	*Medición objetiva de la ansiedad (Y)*
60	45
65	41
70	42
75	36
80	38
85	36
90	30
95	32
100	34
105	25

8.3.5 Se reunieron los siguientes datos en un estudio de la relación entre la inteligencia y el tamaño de la familia.

Número de niños en la familia	*Calificación promedio de la inteligencia medida para todos los niños en la familia*
1	105
2	102
3	104
4	100
5	97
6	101
7	95
8	93
9	97
10	88

8.4 EVALUACIÓN DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN

Una vez que se ha obtenido la ecuación de regresión, debe evaluarse para determinar si describe adecuadamente la relación entre las dos variables y si puede utilizarse convenientemente con fines de predicción y estimación.

El coeficiente de determinación. Una forma de evaluar la ecuación de regresión es comparar la dispersión de los puntos en torno a la rec-

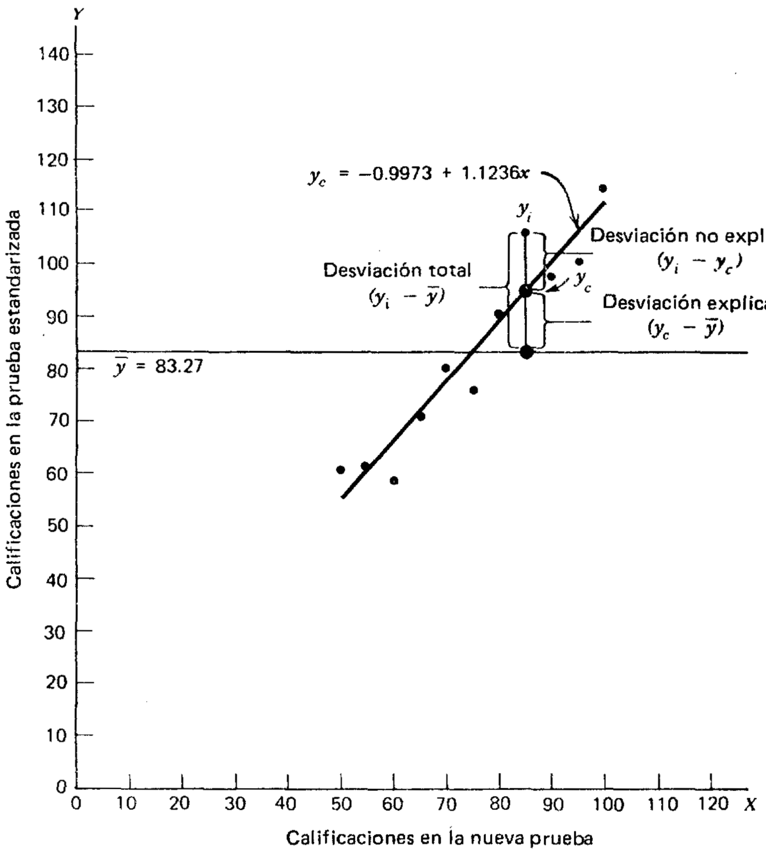


Figura 8.4.1 Diagrama de dispersión que muestra las desviaciones total, explicada e inexplicada para un valor seleccionado de Y, ejemplo 8.3.1.

ta de regresión con la dispersión alrededor de $\bar{y}$, la media de los valores de la muestra de Y. Si se toma el diagrama de dispersión para el ejemplo 8.3.1 y se traza a través de los puntos una recta que intersecte el eje Y en $\bar{y}$ y sea paralela al eje X, puede obtenerse una impresión visual de las magnitudes relativas de la dispersión de los puntos en torno a esta recta y la recta de regresión. Esto se ha hecho en la figura 8.4.1.

Parece más bien obvio, al observar la figura 8.4.1, que la dispersión de los puntos alrededor de la recta de regresión es mucho menor que la dispersión en torno a la recta $\bar{y}$. Sin embargo, no es posible que se decida que la ecuación es útil sólo en base a esto. La situación puede no ser siempre tan evidente, de modo que sería mucho más conveniente una medida objetiva de algún tipo. El llamado *coeficiente de determinación* es dicha medida.

Antes de definir el coeficiente de determinación, debe justificarse su uso examinando la lógica en que se basa su cálculo. Empiécese por considerar el punto correspondiente a cualquier valor observado, y_i, y continúese midiendo la distancia vertical entre dicho punto y la recta $\bar{y}$. A esto se le da el nombre de *desviación total* y se designa por $(y_i - \bar{y})$.

Si se mide la distancia vertical entre la recta de regresión y la recta $\bar{y}$, se obtiene $(y_c - \bar{y})$, que se conoce como *desviación explicada,* ya que muestra en cuánto disminuye la desviación total cuando la recta de regresión se ajusta a los puntos.

Finalmente, se mide la distancia vertical entre el punto observado y la recta de regresión para obtener $(y_i - y_c)$, que se conoce como *desviación inexplicada,* ya que representa la porción de la desviación total que no está "explicada" o tomada en cuenta por la introducción de la recta de regresión. Estas tres cantidades se ilustran para un valor característico de Y en la figura 8.4.1.

Se ve entonces que la desviación total para una y_i particular es igual a la suma de las desviaciones explicada e inexplicada. Esto puede escribirse simbólicamente como

$$\underset{\substack{\textit{desviación}\\ \textit{total}}}{(y_i - \bar{y})} = \underset{\substack{\textit{desviación}\\ \textit{explicada}}}{(y_c - \bar{y})} + \underset{\substack{\textit{desviación}\\ \textit{inexplicada}}}{(y_i - y_c)} \tag{8.4.1}$$

Si se miden estas desviaciones para cada valor de y_i y y_c, se eleva al cuadrado cada desviación y se suman las desviaciones elevadas al cuadrado, se tiene que

$$\underset{\substack{\textit{suma total}\\ \textit{de cuadrados}}}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \underset{\substack{\textit{suma explicada}\\ \textit{de cuadrados}}}{\sum(y_c - \bar{y})^2} + \underset{\substack{\textit{suma inexplicada}\\ \textit{de cuadrados}}}{\sum(y_i - y_c)^2} \tag{8.4.2}$$

Puede escribirse esta relación todavía en otra forma como

$$SC_T = SCE_x + SCI_n$$

Estas cantidades pueden considerarse como medidas de dispersión o de variabilidad. La *suma de cuadrados total,* por ejemplo, es una medida de la dispersión de los valores observados de Y en torno a su media $\bar{y}$, es decir, este término es una medida de la variación total en los valores observados de Y. El lector se dará cuenta que este término es el numerador de la fórmula bien conocida de la variancia muestral.

La *suma de cuadrados explicada* mide la parte de la variabilidad total en los valores observados de Y que se toma en cuenta mediante la relación lineal entre los valores observados de X y Y. Esta cantidad se conoce también como la *suma de cuadrados debida a la regresión lineal.*

La *suma de cuadrados inexplicada* es una medida de la dispersión de los valores de Y observados en torno a la recta de regresión y, algunas veces, se conoce como *suma de error de cuadrados* o *suma residual de cuadrados.* Es la cantidad que se minimiza cuando se obtiene la recta de mínimos cuadrados.

Los cálculos necesarios para obtener la suma de cuadrados total, la explicada y la inexplicada para el ejemplo ilustrativo se muestran en la tabla 8.4.1.

Para el ejemplo ilustrativo se tiene que

$$\begin{aligned} SST &= SSEx + SSU \\ 3798.1822 &\approx 3471.8116 + 326.1455 \\ 3798.1822 &\approx 3797.9571 \end{aligned}$$

La falla en los dos términos a la derecha de la igualdad para dar como suma el total de la izquierda se debe al redondeo.

Puede calcularse la suma de cuadrados total mediante la fórmula más adecuada

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \tag{8.4.3}$$

y la suma de cuadrados explicada puede calcularse mediante la expresión

$$\sum(y_c - \bar{y})^2 = b^2\sum(x_i - \bar{x})^2 = b^2[\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n] \tag{8.4.4}$$

La suma de cuadrados inexplicada se obtiene en forma más adecuada restando. Para el ejemplo ilustrativo se tiene que

$$\text{SCT} = 61^2 + 61^2 + \cdots + 114^2 - \frac{(916)^2}{11} = 3798.1818$$

$$\begin{aligned} \text{SCE}x &= (1.1236)^2\left[50^2 + 55^2 + \cdots + 100^2 - \frac{(825)^2}{11}\right] \\ &= 3471.8116 \end{aligned}$$

Tabla 8.4.1 Cálculo de las sumas de cuadrados total, explicada e inexplicada.

Número del paciente	*Calificaciones obtenidas en la prueba estandarizada* (y_i)	$y_c = -.9973 + 1.1236x$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - y_c)$	$(y_i - y_c)^2$	$(y_c - \bar{y})$	$(y_c - \bar{y})^2$
1	61	55.1827	−22.2727	496.0732	5.8173	33.8410	−28.0900	789.0481
2	61	60.8007	−22.2727	496.0732	.1993	.0397	−22.4720	504.9908
3	59	66.4187	−24.2727	589.1640	−7.4187	55.0371	−16.8540	284.0573
4	71	72.0367	−12.2727	150.6192	−1.0367	1.0747	−11.2360	126.2477
5	80	77.6547	−3.2727	10.7106	2.3453	5.5004	−5.6180	31.5619
6	76	83.2727	−7.2727	52.8922	−7.2727	52.8922	0.0000	0.0000
7	90	88.8907	6.7273	45.2566	1.1093	1.2305	5.6180	31.5619
8	106	94.5087	22.7273	516.5302	11.4913	132.0500	11.2360	126.2477
9	98	100.1267	14.7273	216.8934	−2.1267	4.5229	16.8540	284.0573
10	100	105.7447	16.7273	279.8026	−5.7447	33.0016	22.4720	504.9908
11	114	111.3627	30.7273	944.1670	2.6373	6.9554	28.0900	789.0481
Total $\bar{y} = 83.2727$	916			$SST = 3798.1822$		$SSEx = 326.1455$		$SSU = 3471.8116$

y

$$
\begin{aligned}
SCIn &= SCT - SCEx \\
&= 3798.1818 - 3471.8116 \\
&= 326.3702
\end{aligned}
$$

Los resultados que se obtienen utilizando las fórmulas más adecuadas para el cálculo son los mismos que se muestran en la tabla 8.4.1, excepto por el redondeo.

Intuitivamente, es razonable suponer que, si una ecuación de regresión es apropiada para describir la relación entre dos variables, la suma de cuadrados explicada debe constituir una gran proporción de la suma de cuadrados total. Sería interesante determinar entonces la magnitud de dicha proporción calculando la razón de la suma de cuadrado explicada respecto de la suma de cuadrados total. Esto es exactamente lo que se hace al evaluar una ecuación de regresión basada en los datos de la muestra y el resultado se conoce como *coeficiente de*

reacción a algún estímulo. Supóngase que las medias son como las que se muestran en la tabla 7.4.1.

Deben notarse las siguientes características importantes de los datos de la tabla 7.4.1:

1. Para ambos niveles del factor A, la diferencia entre las medias para

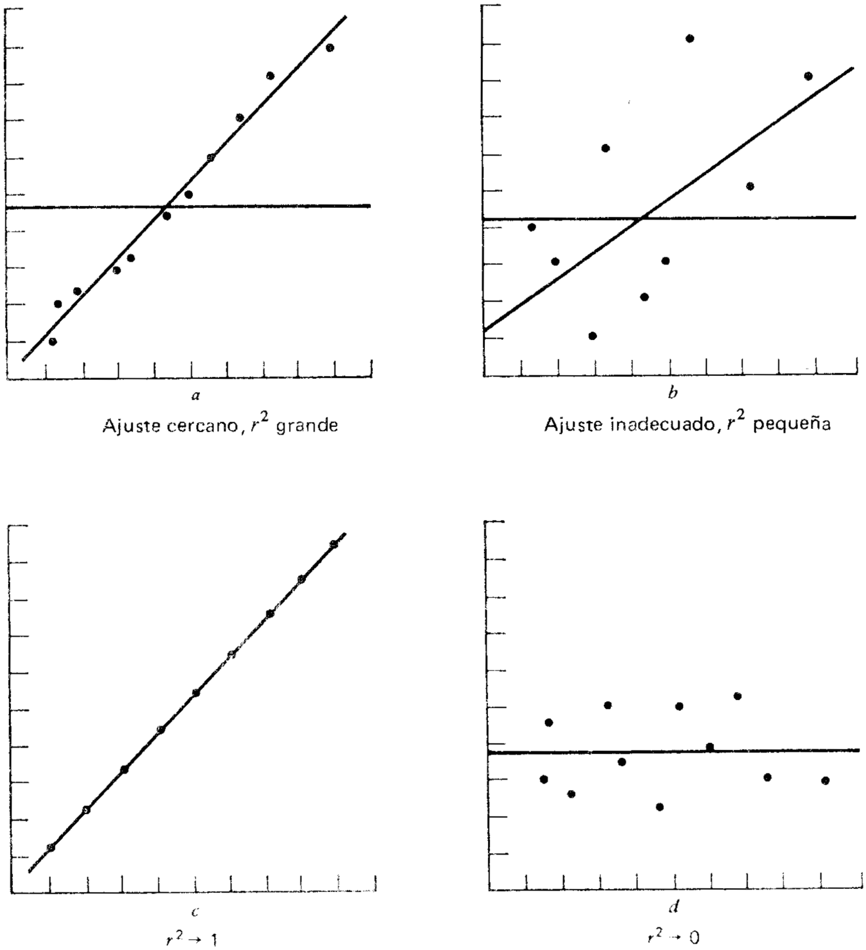


Figura 8.4.2 r^2 como medida de la proximidad del ajuste de la recta de regresión de la muestra a las observaciones de la muestra.

En la figura 8.4.2*b* se ilustra un caso donde los y_i están ampliamente dispersos en torno a la recta de regresión y, por lo tanto, se supone que r^2 es pequeño. El r^2 calculado para los datos es de .403, es decir, menos del 50 por ciento de la variación total en los y_i es explicada por la regresión.

El valor máximo que puede tomar r^2 es de 1, un resultado que se obtiene cuando toda la variación en los y_i es explicada por la regresión. Cuando $r^2 = 1$, todas las observaciones caen sobre la recta de regresión. Esta situación se muestra en la figura 8.4.2*c*.

El límite inferior de r^2 es 0. Este resultado se obtiene cuando coinciden la recta de regresión y la recta trazada a través de $\bar{y}$. En esta situación, ninguna de las variaciones en los y_i es explicada por la regresión. La figura 8.4.2*d* ilustra un caso donde r^2 se aproxima a cero.

Cuando r^2 es grande, entonces, la regresión ha explicado una gran proporción de la variabilidad total en los valores observados de Y, y se acepta la ecuación de regresión. Por otra parte, un r^2 pequeño, que indica una falla de la regresión para explicar una gran proporción de la variación total en los valores observados de Y, tiende a arrojar dudas sobre la utilidad de la ecuación de regresión. Sin embargo, la ecuación se somete a un juicio final hasta que haya sido sometida a una prueba estadística objetiva. Dicha prueba se lleva a cabo por medio del análisis de variancia, que permite probar las hipótesis nulas de no relación lineal entre X y Y.

A partir de los tres términos de la suma de cuadrados y sus grados de libertad asociados, puede construirse la tabla de análisis de variancia que se indica en la tabla 8.4.2.

En general, los grados de libertad asociados con la suma de cuadrados debida a la regresión son iguales al número de constantes de la ecuación de regresión menos 1. En el caso lineal simple, se tienen dos constantes, a y b, por lo que los grados de libertad para la regresión son $2 - 1 = 1$. Puede demostrarse que cuando la hipótesis de la no relación lineal entre X y Y es verdadera, y cuando se satisfacen las suposiciones que fundamentan la regresión, la razón que se obtiene dividiendo el cuadrado medio de regresión entre el cuadrado medio residual está distribuida como F con 1 y $n - 2$ grados de libertad. La R.V. calculada se compara entonces con el valor crítico de F, y si la primera es mayor que la última, se rechaza la hipótesis nula de que no existe relación lineal entre X y Y.

Tabla 8.4.2 Tabla ANDEVA para la regresión lineal simple.

Fuente de variación	*SC*	*g.l.*	*CM*	*R.V.*
Regresión lineal	$SC_{\text{explicada}}$	1	$SC_{\text{explicada}/1}$	$CM_{\text{explicada}}/CM_{\text{inexplicada}}$
Residual	$SC_{\text{inexplicada}}$	$n-2$	$SC_{\text{inexplicada}/(n-2)}$	
Total	SC_{total}	$n-1$		

Para el ejemplo ilustrativo, supóngase que se establecen las siguientes hipótesis:

H_0: X y Y no están relacionadas linealmente
H_A: X y Y están relacionadas linealmente
$\alpha = .05$

Sustituyendo los valores numéricos apropiados en la tabla 8.4.2, se obtiene la tabla 8.4.3. Dado que 95.74 es mayor que 5.12, el valor crítico de F para 1 y 9 grados de libertad, se rechaza la hipótesis nula de no relación lineal entre X y Y y se concluye que las dos variables están relacionadas linealmente. Para esta prueba, dado que $95.74 > 13.61$, se tiene que $p < .005$.

El coeficiente de determinación de la muestra proporciona una estimación puntual de ρ^2, el *coeficiente de determinación de la población*. Este coeficiente tiene la misma función relativa a la población como la que tiene r^2 con la muestra. Indica qué proporción de la variación total de la población en Y es explicada por la regresión de Y sobre X. Cuando el número de grados de libertad es pequeño, r^2 está sesgada positivamente. Es decir, r^2 tiende a ser grande. Un estimador insesgado de ρ^2 lo proporciona

$$\tilde{r}^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - y_c)^2/(n-2)}{\sum(y_i - \bar{y})^2/(n-1)} \tag{8.4.5}$$

Obsérvese que el numerador de la fracción en la ecuación 8.4.5 es el cuadrado medio inexplicado y que el denominador es el cuadrado medio total. Estas cantidades están incluidas en la tabla de análisis de variancia. Para el ejemplo ilustrativo se tiene que, utilizando los datos de la tabla 8.4.2,

$$\tilde{r}^2 = 1 - \frac{326.3702/9}{3798.1818/10} = 1 - \frac{36.2634}{379.81818} = .9045$$

Se observa que este valor es ligeramente menor que

$$r^2 = 1 - \frac{326.3702}{3798.1818} = 1 - .08593 = .91407$$

Se observa que la diferencia entre r^2 y $\tilde{r}^2$ se debe al factor $(n-1)/(n-2)$. Cuando n es grande, este factor se aproxima a 1 y la diferencia entre r^2 y $\tilde{r}^2$ tiende a cero.

Tabla 8.4.3 Tabla ANDEVA para el ejemplo 8.3.1.

Fuente de variación	*SC*	*g.l.*	*CM*	*R.V.*
Regresión lineal	3471.8116	1	3471.8116	95.74
Residual	326.3702	9	36.2634	
Total	3798.1818	10		

Prueba de hipótesis para β. Una alternativa para probar la hipótesis nula de no relación lineal entre dos variables, está basada en b, la pendiente de la ecuación de regresión de la muestra.

Cuando se satisfacen las suposiciones establecidas en la sección 8.2, a y b son estimadores puntuales insesgados de los parámetros correspondientes α y β y; dado que bajo estas suposiciones, las subpoblaciones de los valores de Y están distribuidos normalmente, pueden formarse también intervalos de confianza para α y β y probar hipótesis acerca de ellos.

Cuando se cumplen las suposiciones de la sección 8.2, cada una de las distribuciones muestrales de a y b está distribuida normalmente con las siguientes medias y variancias:

$$\mu_a = \alpha \tag{8.4.6}$$

$$\sigma_a{}^2 = \frac{\sigma^2_{y|x} \sum x_i{}^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \tag{8.4.7}$$

$$\mu_b = \beta \tag{8.4.8}$$

y

$$\sigma_b{}^2 = \frac{\sigma^2_{y|x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \tag{8.4.9}$$

En las ecuaciones 8.4.7 y 8.4.9, $\sigma^2_{y/x}$ es la variancia inexplicada de las subpoblaciones de los valores de Y.

Con el conocimiento de las distribuciones muestrales de a y b, pueden formarse los intervalos de confianza y probar las hipótesis relativas a α y β en la forma acostumbrada. En general, las inferencias respecto a α no son de interés. Por otra parte, una gran parte del interés se centra en los procedimientos de inferencia respecto a β. La

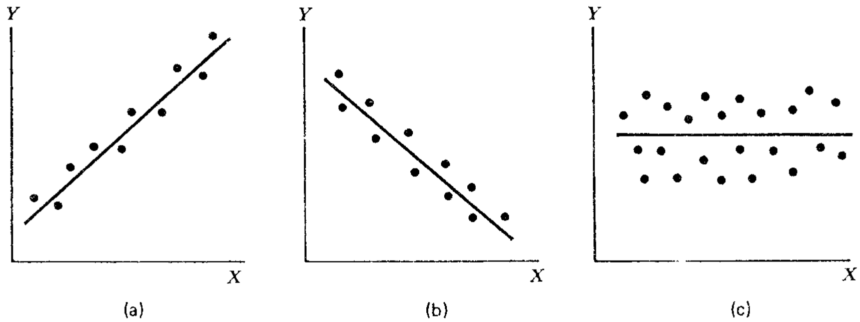


Figura 8.4.3 Diagramas de dispersión en los que se muestran las relaciones directa e inversa y no relación lineal entre X y Y. *a*) Relación lineal directa. *b*) Relación lineal inversa. *c*) No relación lineal.

razón de esto es el hecho de que β dice mucho acerca de la forma de la relación entre X y Y. Una β positiva indica que, en general, Y aumenta a medida que X aumenta, y se dice que existe una *relación lineal directa* entre X y Y. Una β negativa indica que los valores de Y tienden a disminuir a medida que aumentan los valores de X, y se dice que hay una *relación lineal inversa* entre X y Y. Cuando no hay una relación lineal entre X y Y, β es igual a cero. Estas tres situaciones se presentan en la figura 8.4.3.

Cuando no se conoce el valor real de β, que es la situación más común pueden obtenerse sólo inferencias acerca de él a partir de los datos de la muestra. Específicamente, puede tenerse interés en determinar si los datos de la muestra proporcionan evidencia suficiente que indique que β no es igual a cero. Puede concluirse que β no es igual a cero si puede rechazarse la hipótesis nula de que $\beta = 0$. Si se rechaza esta hipótesis nula, puede concluirse, con probabilidad α (nótese que α, como aquí se utiliza, se refiere a un nivel de significación seleccionado y no a la ordenada al origen de la ecuación de regresión verdadera) de estar equivocado, que existe una relación lineal entre X y Y. Para decidir si esta relación lineal sugerida es directa o inversa, la guía será el signo de b, el estimador de β.

La estadística de prueba cuando $\sigma^2_{y|x}$ se conoce es:

$$z = \frac{b - \beta_0}{\sigma_b} \tag{8.4.10}$$

donde β_0 es el valor de β establecido en la hipótesis. El valor de β establecido en la hipótesis no tiene que ser cero, pero en la práctica, con más frecuencia de lo que se supone, la hipótesis nula de interés es que $\beta = 0$.

Como regla, $\sigma^2_{y|x}$ se desconoce. Cuando éste es el caso, la estadística de prueba es:

$$t = \frac{b - \beta_0}{s_b} \tag{8.4.11}$$

donde s_b es una estimación de σ_b y t está distribuida como la t de Student con $n - 2$ grados de libertad. Para obtener s_b, primero debe estimarse $\sigma^2_{y|x}$. Un estimador insesgado de este parámetro lo proporciona la variancia inexplicada que se calcula a partir de los datos de la muestra. Es decir,

$$s^2_{y|x} = \frac{\sum(y_i - y_c)^2}{n - 2} \qquad (8.4.12$$

es un estimador insesgado de $\sigma^2_{y|x}$. Este es el cuadrado medio inexplicado que aparece en la tabla de análisis de variancia.

Los términos $(y_i - y_c)$ de la ecuación 8.4.12 se conocen como *residuales.* Algunos programas por computadora para el análisis de regresión dan por lo común los residuales como parte de la información de salida. Cuando éste es el caso, puede obtenerse $s^2_{y|x}$ elevando al cuadrado los residuales, sumando los términos elevados al cuadrado y dividiendo el resultado entre $n - 2$. Otra fórmula para $s^2_{y|x}$ es:

$$s^2_{y|x} = \frac{n - 1}{n - 2}(s_y{}^2 - b^2 s_x{}^2) \qquad (8.4.13$$

donde $s_y{}^2$ y $s_x{}^2$ son las variancias de las observaciones de y y de x, respectivamente. Para el ejemplo ilustrativo se tiene que

$$s_y{}^2 = 379.8182 \qquad \text{y} \qquad s_x{}^2 = 275.0000$$

de modo que

$$s^2_{y|x} = \frac{10}{9}[379.8182 - (1.1236)^2(275.0000)] = 36.2634$$

un resultado que concuerda con el cuadrado medio residual de la tabla 8.4.3.

La raíz cuadrada de $s^2_{y|x}$, $s_{y|x}$ es la desviación estándar de las observaciones en torno a la recta de regresión ajustada y mide la dispersión de esos puntos en torno a la recta. Cuanto mayor es $s_{y|x}$ menor es el ajuste de la recta respecto de los datos observados.

Cuando $s^2_{y|x}$ se utiliza para estimar a $\sigma^2_{y|x}$, puede obtenerse el estimador deseado e insesgado de $\sigma_b{}^2$ mediante la expresión

$$s_b{}^2 = \frac{s^2_{y|x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \tag{8.4.14}$$

Puede escribirse la ecuación 8.4.13 en la forma siguiente, más conveniente para el cálculo:

$$s_b{}^2 = \frac{s^2_{y|x}}{\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2/n} \tag{8.4.15}$$

Si la probabilidad de observar un valor tan extremoso como el valor de la estadística de prueba calculada mediante la ecuación 8.4.11, cuando la hipótesis nula es verdadera, es menor que $\alpha/2$ (dado que se tiene una prueba bilateral), se rechaza la hipótesis nula.

Se utilizará ahora el ejemplo ya conocido para ilustrar el procedimiento de prueba de la hipótesis nula de que $\beta = 0$. Primero, se enuncian las hipótesis y se decide un nivel de significación.

$$H_0: \beta = 0$$
$$H_A: \beta \neq 0$$
$$\alpha = .05$$

En seguida, se calcula $s_b{}^2$. A partir de la tabla 8.4.3, se tiene que $s^2_{y|x} = 36.2634$, de manera que puede calcularse.

$$s_b{}^2 = \frac{36.2634}{[50^2 + 55^2 + \cdots + 100^2] - \dfrac{(825)^2}{11}} = .013$$

Puede calcularse la estadística de prueba

$$t = \frac{1.1236 - 0}{\sqrt{.013}} = 9.85$$

La probabilidad de que se obtenga un valor de t así o más extremo cuando la hipótesis nula es verdadera, es menor que 0.01, ya que la probabilidad de obtener un valor de t tan grande como o mayor que 3.2498 es de .005, y la probabilidad de obtener un valor de t tan pequeño como o más pequeño que -3.2498 es también de 0.005. Dado que 9.85 es mayor que 3.2498, la probabilidad de observar un valor de t tan grande como o mayor que 9.85, cuando la hipótesis nula es verdadera, es menor que 0.005.

Dicho de otra manera, puede seguirse el criterio de la regla de decisión y notar que los valores críticos de t para una prueba bilateral, cuando $\alpha = .05$ y teniéndose $(n - 2) = 9$ grados de libertad, son de $\pm$ 2.2622. Dado que la t calculada de 9.85 es mayor que 2.2622, se dice que es significativa, se rechaza H_0 y se concluye que la pendiente de la recta de regresión verdadera no es cero. La implicación práctica es que puede concluirse que existe una relación lineal entre X y Y. El hecho de que b sea positivo conduce a pensar que β es positivo y que la relación entre X y Y es una relación lineal directa. Como ya se ha mencionado, la ecuación 8.4.11 puede utilizarse para probar la hipótesis nula de que β es igual a algún valor distinto de cero. El valor que se establece en la hipótesis para β, β_0, se sustituye en la ecuación en lugar de 0. Todas las demás cantidades, así como los cálculos, son iguales a los del ejemplo ilustrativo. Los grados de libertad y el método para determinar el nivel de significación son también los mismos.

Intervalo de confianza para β. Una vez que se ha determinado que es improbable, a la luz de la evidencia de la muestra, que β sea cero, el investigador puede interesarse en obtener una estimación de intervalo de β. Puede utilizarse la fórmula general para un intervalo de confianza,

estimador $\pm$ (factor de confiabilidad)(error estándar de la estimación)

Cuando se obtiene un intervalo de confianza para β, el estimador es b, el factor de confiabilidad es algún valor de z o t (dependiendo de si se conoce o no $\sigma^2_{y|x}$) y el error estándar del estimador es:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma^2_{y|x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

Cuando $\sigma^2_{y|x}$ se desconoce, σ_b se estima mediante la expresión

$$s_b = \sqrt{\frac{s^2_{y|x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

por lo que en la mayoría de las situaciones prácticas, el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para β es:

$$b \pm t_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{s^2_{y|x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \tag{8.4.16}$$

Para el ejemplo ilustrativo, se obtiene el siguiente intervalo de confianza del 95 por ciento para β:

$$1.1236 \pm 2.2622\sqrt{.013}$$
$$1.1236 \pm .2579$$
$$.8657, 1.3815$$

Este intervalo se interpreta en la forma común. Desde el punto de vista probabilístico, se dice que al repetir el muestreo, el 95 por ciento de los intervalos obtenidos de esta forma incluirán a β. La interpretación práctica es que se tiene el 95 por ciento de confianza de que el único intervalo obtenido incluya a β.

Resulta útil observar que el intervalo de confianza que se construyó no incluye a cero, de manera que este valor no es un candidato para el parámetro que se está estimando. Se supone entonces que es improbable que $\beta = 0$. Esto es compatible con los resultados de la prueba de la hipótesis en la que se rechazó la hipótesis nula de que $\beta = 0$. En realidad, siempre puede probarse $H_0 : \beta = 0$ en el nivel de importancia α al construir el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para β, y puede rechazarse o dejar de rechazar la hipótesis en base a si el intervalo incluye o no el cero. Si el intervalo incluye el cero, la hipótesis nula no se rechaza; y si ocurre lo contrario, dicha hipótesis se rechaza.

Debe quedar claro en este punto que el no rechazar la hipótesis nula de que $\beta = 0$ no significa que X y Y no estén relacionadas. No sólo es posible que se haya cometido un error del tipo II, sino que puede ser que X y Y estén relacionadas en alguna forma no lineal. Por otra parte, cuando se rechaza la hipótesis nula de que $\beta = 0$, no puede concluirse que la relación *verdadera* entre X y Y sea lineal. Una vez más, puede ser que aunque los datos se ajusten al modelo de regresión lineal bastante bien (como lo demuestra el hecho de que se rechace la hipótesis nula de que $\beta = 0$), exista algún otro método no lineal que proporcione un ajuste aún mejor. En consecuencia, cuando se rechaza la H_0 de que $\beta = 0$, lo mejor que puede decirse es que pueden obtenerse resultados más útiles (que se analizan a continuación) al tomar en cuenta la regresión de Y sobre X que ignorándola.

Ejercicios

8.4.1a 8.4.5 Utilizando como referencia los ejercicios 8.3.1 a 8.3.5 y para cada uno de ellos, lleve a cabo lo siguiente:

a) Calcule el coeficiente de determinación.
b) Prepare una tabla ANDEVA y pruebe la hipótesis nula de no relación lineal entre las dos variables.
c) Demuestre la hipótesis nula de que $\beta = 0$ utilizando un nivel de significación de .05.
d) Determine el valor p para cada prueba de hipótesis.
e) Saque sus conclusiones en términos del problema.
f) Obtenga el intervalo de confianza del 95 por ciento para β.

8.5 USO DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN

Si los resultados al evaluar la ecuación de regresión de la muestra indican que existe una relación entre las dos variables de interés, puede darse un uso práctico a dicha ecuación. Hay dos formas en las que puede utilizarse la ecuación. Puede utilizarse para *predecir* el valor probable de Y, dado un valor particular de X. Cuando se satisfacen las suposiciones planteadas en la sección 8.2, puede obtenerse un *intervalo de predicción* para este valor pronosticado de Y.

Puede utilizarse también la ecuación de regresión para *estimar* la media de la subpoblación de los valores de Y que se supone existen para algún valor particular de X. Una vez más, si se cumplen las suposiciones establecidas anteriormente, puede construirse un intervalo de confianza para este parámetro. El valor pronosticado de Y y la estimación de punto de la media de la subpoblación de Y serán numéricamente iguales a cualquier valor particular de X, pero, como se verá, el intervalo de predicción será más amplio que el intervalo de confianza.

Predicción de Y para una X dada. Supóngase, en el ejemplo ilustrativo, que se tiene un paciente que obtiene una calificación de 70 en la nueva prueba y que se desea predecir su calificación en la prueba estandarizada. Para obtener el valor pronosticado, se sustituye x por 70 en la ecuación de regresión de la muestra para obtener

$$
\begin{aligned}
y_c &= -.9973 + 1.1236(70) \\
&= 78
\end{aligned}
$$

redondeada hasta el entero más próximo.

Si se decide aplicar al paciente la prueba estandarizada, se pronosticaría que su calificación es de 78. Dado que no se tiene confianza en esta predicción, sería preferible un intervalo con un nivel de confianza correspondiente. Si se sabe, o se inclina a suponer, que se satisfacen las suposiciones de la sección 8.2, y cuando se desconoce $\sigma^2_{y|x}$, el intervalo de predicción del $100(1 - \alpha)$ por ciento para Y está dado por la expresión

$$y_c \pm t_{(1-\alpha/2)} s_{y|x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \tag{8.5.1}$$

donde x_p es el valor particular de x en el que se desea obtener un intervalo de predicción para Y y los grados de libertad utilizados para seleccionar t son $n - 2$. Para el ejemplo ilustrativo, puede construirse el siguiente intervalo de predicción del 95 por ciento:

$$78 \pm 2.2622\sqrt{36.2634}\sqrt{1 + \frac{1}{11} + \frac{(70 - 75)^2}{2750}}$$

$$78 \pm 2.2622(6.02)(1.0488)$$

$$78 \pm 14$$

$$64, 92$$

La interpretación de un intervalo de predicción es similar a la interpretación de un intervalo de confianza. Si se extraen muestras repetidamente, se lleva a cabo un análisis de regresión y se construyen los intervalos de predicción para los pacientes que obtienen 70 de calificación en la nueva prueba, casi el 95 por ciento de ellos incluirán la calificación de dichos pacientes en la prueba estandarizada. Esta es la interpretación probabilística. La interpretación práctica es que se tiene el 95 por ciento de confianza en que el único intervalo de predicción construido incluya la calificación de los pacientes en la prueba estandarizada.

Estimación de la media de Y para una X dada. Si, en el ejemplo ilustrativo, se tiene interés en calcular la media de la subpoblación hipotética formada por las calificaciones obtenidas en la prueba estandarizada, constituida por los pacientes que obtienen una calificación de 70 en la nueva prueba, nuevamente se calcularía.

$$\begin{aligned} y_c &= -.9973 + 1.1236(70) \\ &= 78 \end{aligned}$$

El intervalo de confianza de $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_{y|x}$, cuando se desconoce $\sigma^2_{y|x}$, está dado por la expresión

$$y_c \pm t_{(1-\alpha/2)} s_{y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \tag{8.5.2}$$

Puede obtenerse el siguiente intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_{y|x=70}$ del presente ejemplo haciendo las sustituciones apropiadas:

$$\begin{aligned} &78 \pm 2.2622\sqrt{36.2634}\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{(70-75)^2}{2750}} \\ &78 \pm 4 \\ &74,\ 82 \end{aligned}$$

Si se extrajeran repetidamente muestras de la población de pacientes, se lleva a cabo un análisis de regresión y se estima $\mu_{y|x=70}$ con un intervalo de confianza construido en forma similar, casi el 95 por ciento de dichos intervalos incluiría a la media verdadera. Por esta razón, se tiene el 95 por ciento de confianza en que el único intervalo construido contenga a la media verdadera.

Si se construyen intervalos de confianza para las medias de varias subpoblaciones y se grafican los límites inferior y superior sobre el mismo diagrama de dispersión con la recta de regresión, puede obtenerse una *banda de confianza* uniendo todos los límites superiores con una curva y todos los límites inferiores con otra. La tabla 8.5.1 contiene los límites de confianza superior e inferior del 95 por ciento para $\mu_{y|x}$ para cada valor de X en el ejemplo ilustrativo, y la figura 8.5.1 muestra la banda de confianza del 95 por ciento que resulta cuando se grafican dichos valores.

Nótese que la banda de confianza es más ancha en sus extremos que en su parte media. En efecto, la banda de confianza es más angosta para $x_p = \bar{x} = 75$. La razón es que cuando se sustituye x_p por $\bar{x} = 75$ en la ecuación 8.5.2, la cantidad en el radical es un mínimo que resulta en el intervalo de confianza más angosto. A medida que

Tabla 8.5.1 Límites de confianza del 95 por ciento para $\mu_{y|x}$ para cada valor de X, Ejemplo 8.3.1.

x	y_c	*Límite inferior*	*Límite superior*
50	55.1827	47.5009	62.8645
55	60.8007	54.1798	67.4216
60	66.4187	60.7588	72.0786
65	72.0367	67.1783	76.8951
70	77.6547	73.3482	81.9612
75	83.2727	79.1666	87.3788
80	88.8907	84.5842	93.1972
85	94.5087	89.6503	99.3671
90	100.1267	94.4668	105.7866
95	105.7447	99.1238	112.3656
100	111.3627	103.6809	119.0445

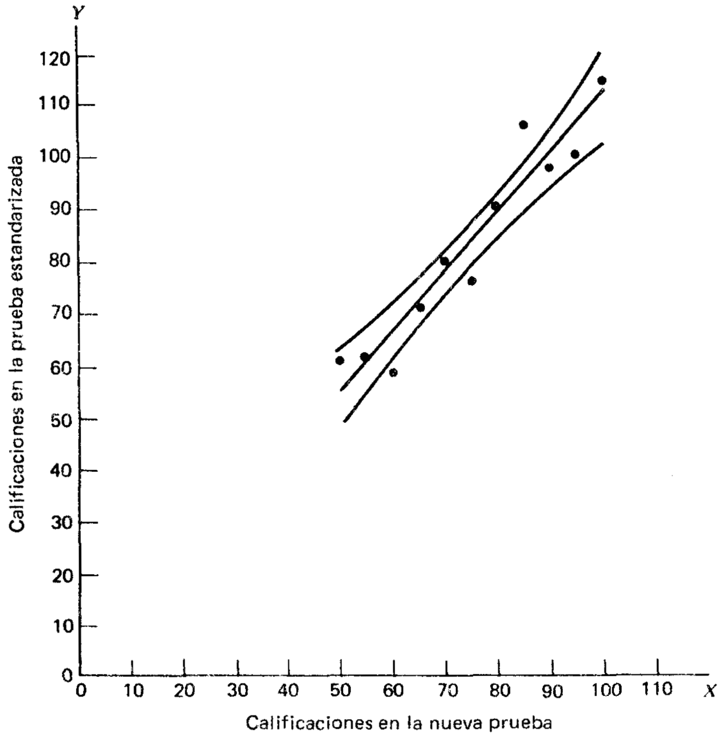


Figura 8.5.1 Banda de confianza del 95 por ciento para $\mu_{y|x}$, ejemplo 8.3.1.

x_p aumenta o disminuye, la cantidad bajo el radical se hace más grande, como sucede también con los intervalos de confianza asociados.

Graybill y Bowden[5] presentan un método para construir bandas de confianza que sean rectas. Sugieren que posiblemente sean preferibles las bandas de este tipo a las del tipo curvilíneo que se dieron anteriormente, ya que son más fáciles de calcular y de graficar, y tienen un ancho promedio menor.

Dunn,[6] quien ha elaborado una banda de confianza que afirma es preferible a la de Graybill y Bowden, sugiere que debe preferirse la banda de confianza curvilínea común sobre cualquiera de la variedad recta. Este tema es también analizado por Hoel,[7] Gafarian,[8] Halperin y Gurian[9] y Elston y Grizzle.[10]

En forma similar, pueden elaborarse bandas de predicción graficando los intervalos de predicción a varios valores de X.

Ejercicios

En cada uno de los ejercicios 8.5.1 a 8.5.5, utilice como referencia el ejercicio apropiado y, para el valor de X indicado, *a*) construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para $\mu_{y|x}$ y *b*) construya el intervalo de predicción del 95 por ciento para y_p.

8.5.1 Utilice como referencia el ejercicio 8.3.1 y sea $X = 2$.
8.5.2 Utilice como referencia el ejercicio 8.3.2 y sea $X = 400$.
8.5.3 Utilice como referencia el ejercicio 8.3.3 y sea $X = 50$.
8.5.4 Utilice como referencia el ejercicio 8.3.4 y sea $X = 100$.
8.5.5 Utilice como referencia el ejercicio 8.3.5 y sea $X = 5$.
8.5.6 Construya la banda de confianza del 95 por ciento para $\mu_{y|x}$ para el ejercicio 8.3.5.

8.6 EL MODELO DE CORRELACIÓN

En el modelo clásico de regresión, que ha sido el modelo fundamental en el estudio hasta este punto, sólo Y, a la que se le ha llamado la variable dependiente, es aleatoria. La variable X se define como una variable fija (no aleatoria o matemática) y recibe el nombre de variable independiente. Recuérdese también que se han descrito las observaciones como se obtienen mediante la preselección de los valores de X y determinando los valores correspondientes de Y.

Cuando tanto Y como X son variables aleatorias, se tiene lo que se conoce como el *modelo de correlación.* Típicamente, bajo el modelo de correlación, se obtienen observaciones de la muestra seleccionando una muestra al azar de las *unidades de asociación* (que pueden ser personas, lugares, animales, puntos en el tiempo o cualquier otro elemento sobre el cual se toman las dos medidas) y tomando una medida de X y una medida de Y sobre cada una. En este procedimiento, los valores de X no se preseleccionan, sino que son al azar, dependiendo de la unidad de asociación seleccionada en la muestra.

Aunque no puede llevarse a cabo con sentido el análisis de correlación bajo el modelo clásico de regresión, el análisis de regresión puede llevarse a cabo bajo el modelo de correlación. La correlación, que comprende dos variables, implica una correlación entre las variables que pone a ambas sobre un mismo terreno y no las distingue, refiriéndose a una como la variable dependiente y a la otra como la variable independiente. En efecto, en los procedimientos básicos de cálculo, que son los mismos que para el modelo de regresión, puede ajustarse una recta a los datos, ya sea minimizando $\Sigma (y_i - y_c)^2$, o bien, minimizando $\Sigma (x_i - x_c)^2$. En otras palabras, puede hacerse una regresión de X sobre Y, así como una regresión de Y sobre X. En general, las rectas ajustadas en los dos casos serán distintas y surge una pregunta lógica: ¿cuál recta ajustar?

Si el objetivo es únicamente obtener una medida de la intensidad de la relación entre las dos variables, no importa qué recta se ajuste, ya que la medida que por lo general se calcula será la misma en cualquier caso. Sin embargo, si se desea utilizar la ecuación que describe la relación entre las dos variables para los propósitos estudiados en las secciones anteriores, sí importa qué recta se ajuste. La variable para la que se desean estimar las medias o hacer predicciones debe tratarse como la variable dependiente, es decir, debe realizarse la regresión de esta variable sobre la otra variable.

Bajo el modelo de correlación, se supone que X y Y varían juntas en lo que se conoce como *distribución conjunta.* Si la forma de esta distribución conjunta tiene una distribución normal, se conoce como *distribución normal bivariada.* Pueden hacerse inferencias sobre esta población en base a los resultados de las muestras extraídas apropiadamente de ella. Si, por otra parte, se sabe que la distribución conjunta es no normal, o si se desconoce la forma y no existe justificación para suponer que existe normalidad, se invalidan los procedimientos inferenciales, aunque bien pueden calcularse medidas descriptivas.

Deben cumplirse las siguientes suposiciones para que sean válidas las inferencias acerca de la población, cuando se muestrea a partir de una distribución bivariada.

1. Para cada valor de X, existe una subpoblación de valores de Y normalmente distribuida.
2. Para cada valor de Y, existe una subpoblación de valores de X normalmente distribuida.

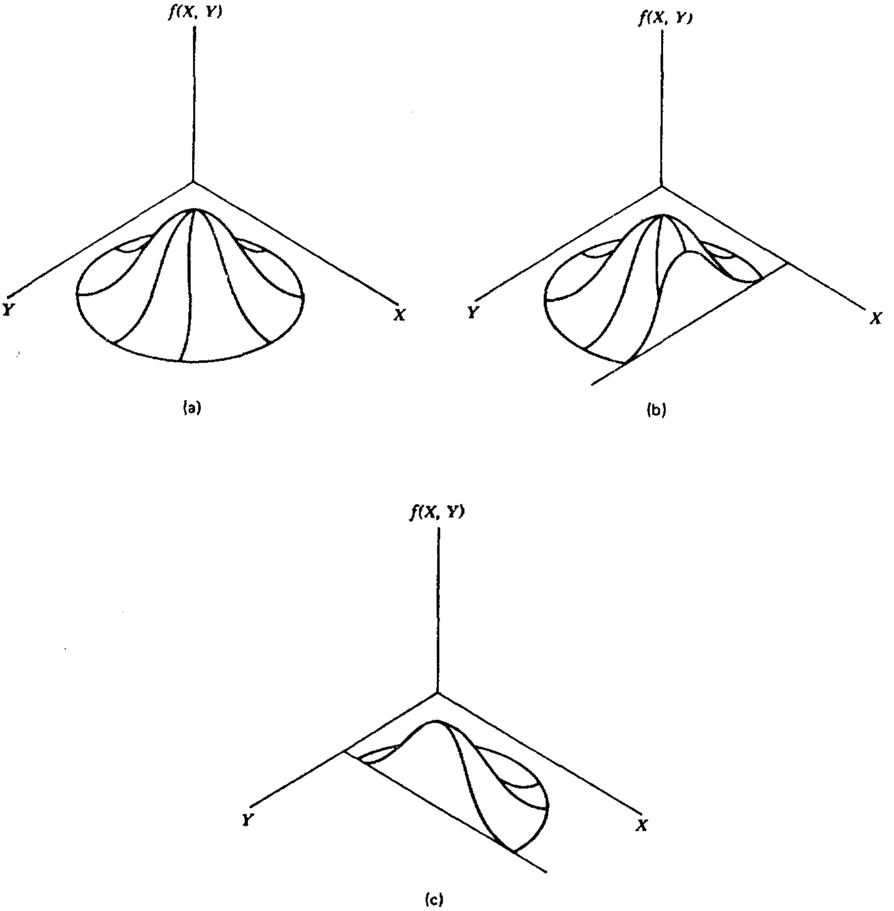


Figura 8.6.1 Distribución normal bivariada. *a*) Distribución normal bivariada. *b*) Corte mostrando la subpoblación distribuida normalmente de Y para una X dada. *c*) Corte mostrando la subpoblación distribuida normalmente de X para una Y dada.

3. La distribución conjunta de X y Y es una distribución normal llamada *distribución normal bivariada.*
4. Todas las subpoblaciones de los valores de Y tienen la misma variancia.
5. Todas las subpoblaciones de los valores de X tienen la misma variancia.

La distribución normal bivariada se representa gráficamente en la figura 8.6.1. En esta ilustración, se observa que si se corta el montículo en forma paralela a Y en algún valor de X, el corte revela la distribución normal correspondiente de Y. Asimismo, un corte paralelo a X en algún valor de Y revela la subpoblación correspondiente de X con distribución normal.

8.7 EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

La distribución normal bivariada analizada en la sección 8.6 tiene cinco parámetros, σ_x, σ_y, μ_x, μ_y y ρ. Los primeros cuatro son respectivamente las desviaciones estándar y las medias asociadas con las distribuciones individuales. El otro parámetro, ρ, se conoce como *coeficiente de correlación* de la población y mide la intensidad de la relación lineal entre X y Y.

El coeficiente de correlación de la población es la raíz cuadrada de ρ^2, el coeficiente de determinación de la población que se estudió anteriormente, y dado que éste toma valores entre 0 y 1 inclusive, ρ puede tomar cualquier valor entre -1 y $+1$. Si $\rho = 1$, existe una correlación lineal directa perfecta entre las dos variables, mientras que cuando $\rho = -1$, indica una correlación lineal inversa perfecta. Si $\rho = 0$, las dos variables no están correlacionadas. El signo de ρ siempre será igual al signo de β, la pendiente de la recta de regresión para X y Y.

El coeficiente de correlación de la muestra, r, describe la relación entre las observaciones de la muestra, en dos variables, de la misma forma que ρ describe la relación en una población.

Las figuras 8.4.2*d* y 8.4.2*c* muestran respectivamente diagramas de dispersión típicos, donde $r \rightarrow 0$ ($r^2 \rightarrow 0$) y $r = +1$ ($r^2 = 1$). La figura 8.7.1 es un diagrama de dispersión típico, donde $r = -1$.

Por lo general, se tiene interés en saber si puede concluirse que $\rho \neq 0$, es decir, si X y Y están correlacionados. Dado que, por lo general,

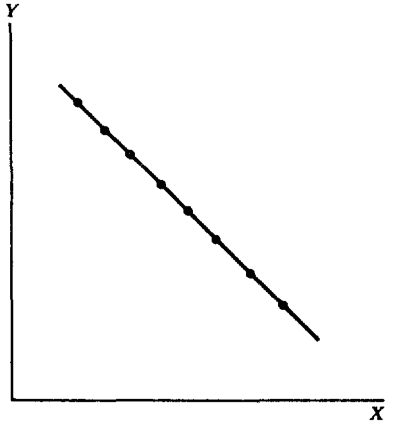


Figura 8.7.1 Diagrama de dispersión para $r = -1$.

se desconoce ρ, se extrae una muestra aleatoria de la población de interés, se calcula r, el estimador de ρ y se prueba la hipótesis de que $H_0: \rho = 0$ contra la alternativa $\rho \neq 0$. En el siguiente ejemplo, se ilustrará el procedimiento.

Ejemplo 8.7.1

Se obtuvieron las lecturas de la presión sanguínea mediante dos métodos distintos, en 25 pacientes con hipertensión esencial. Las lecturas sistólicas obtenidas por los dos métodos se indican en la tabla 8.7.1.

El médico deseaba investigar la intensidad de la relación entre las dos mediciones. El diagrama de dispersión y la recta de regresión de los mínimos cuadrados se muestran en la figura 8.7.2.

Los cálculos previos necesarios para obtener la recta de regresión de los mínimos cuadrados se muestran en la tabla 8.7.2. Dado que el investigador desea obtener una ecuación de regresión y utilizarla para estimar y predecir propósitos, se obtendrá el coeficiente de correlación de la muestra mediante los métodos estudiados bajo el modelo de regresión.

Las lecturas del método I se tomaron como variable independiente, ya que el médico anticipó que podría desear y predecir una lectura del método II, dada una lectura del método I.

Tabla 8.7.1 Lecturas de la presión sistólica sanguínea (mm Hg) mediante dos métodos en 25 pacientes con hipertensión esencial.

Número del paciente	*Método I*	*Método II*
1	132	130
2	138	134
3	144	132
4	146	140
5	148	150
6	152	144
7	158	150
8	130	122
9	162	160
10	168	150
11	172	160
12	174	178
13	180	168
14	180	174
15	188	186
16	194	172
17	194	182
18	200	178
19	200	196
20	204	188
21	210	180
22	210	196
23	216	210
24	220	190
25	220	202

Sustituyendo lo obtenido en la tabla 8.7.2 en las ecuaciones 8.3.2 y 8.3.3, se obtienen las siguientes ecuaciones normales:

$$4172 = 25a + 4440b$$
$$757{,}276 = 4440a + 808408b$$

Cuando se resuelven estas ecuaciones, se tiene que

$$a = 20.8928$$
$$b = .8220$$

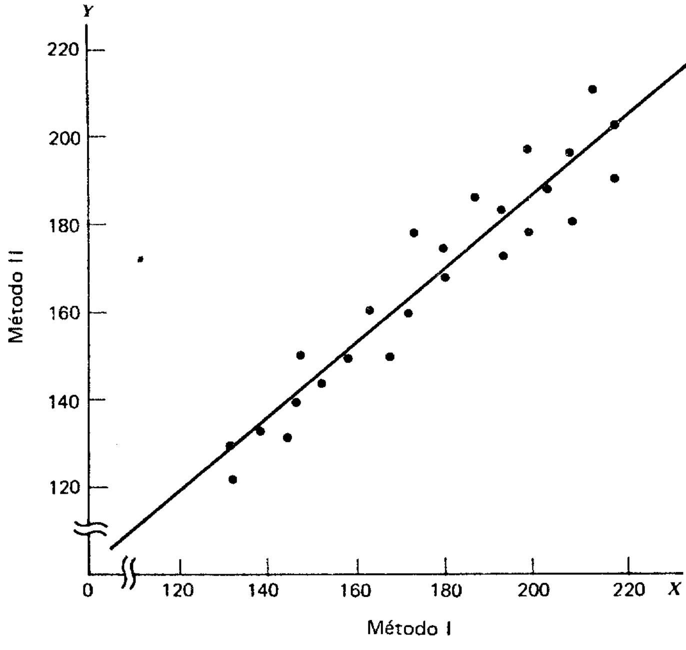


Figura 8.7.2 Lecturas de la presión sistólica sanguínea (mm Hg) en 25 pacientes con hipertensión esencial.

La ecuación de los mínimos cuadrados es

$$y_c = 20.8928 + .8220x$$

El coeficiente de determinación, que es igual a la suma de cuadrados explicada dividida entre la suma total de cuadrados, es (utilizando las ecuaciones 8.4.3 y 8.4.4)

$$r^2 = \frac{b^2[\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n]}{\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n} \tag{8.7.1}$$

Sustituyendo los valores de la tabla 8.7.2 y la ecuación de regresión en la ecuación 8.7.1 se tiene que

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{(.8220)^2[808{,}408 - (4440)^2/25]}{710{,}952 - (4172)^2/25} \\ &= .9112713 \end{aligned}$$

Tabla 8.7.2 Cálculos preliminares para obtener la recta de regresión de mínimos cuadrados, ejemplo 8.7.1.

Método I (x)	*Método II (y)*	x^2	y^2	xy
132	130	17424	16900	17160
138	134	19044	17956	18492
144	132	20736	17424	19008
146	140	21316	19600	20440
148	150	21904	22500	22200
152	144	23104	20736	21888
158	150	24964	22500	23700
130	122	16900	14884	15860
162	160	26244	25600	25920
168	150	28224	22500	25200
172	160	29584	25600	27520
174	178	30276	31684	30972
180	168	32400	28224	30240
180	174	32400	30276	31320
188	186	35344	34596	34968
194	172	37636	29584	33368
194	182	37636	33124	35308
200	178	40000	31684	35600
200	196	40000	38416	39200
204	188	41616	35344	38352
210	180	44100	32400	37800
210	196	44100	38416	41160
216	210	46656	44100	45360
220	190	48400	36100	41800
220	202	48400	40804	44440
Total 4440	4172	808408	710952	757276

Finalmente, el coeficiente de correlación es:

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{.9112713} = .954605 \approx .95$$

Otra fórmula para calcular r es la expresión

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} \tag{8.7.2}$$

Una ventaja de esta fórmula es que puede calcularse r sin calcular primero b. Este es el procedimiento deseable cuando no se prevé que se utilizará la ecuación de regresión. Sustituyendo los valores de la tabla 8.7.2 en la ecuación 8.7.2, se tiene que

$$r = \frac{25(757{,}276) - (4440)(4172)}{\sqrt{25(808{,}408) - (4440)^2}\sqrt{25(710{,}952) - (4172)^2}}$$
$$= .95$$

Para ver si este valor de r es de magnitud suficiente como para indicar que las dos variables de interés están correlacionadas, se prueba la hipótesis

$$H_0: \rho = 0$$

contra la alternativa

$$H_A: \rho \neq 0$$

Cuando $\rho = 0$, puede demostrarse que

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \qquad (8.7.3)$$

está distribuida como la distribución t de Student con $n - 2$ grados de libertad.

Si se supone que $\alpha = .05$, los valores críticos de t en el presente ejemplo son ± 2.0687. Si, a partir de los datos, se calcula un valor de t mayor que o igual a $+2.0687$ o menor que o igual a -2.0687, se rechazará la hipótesis nula. El valor calculado de t es:

$$t = .954605\sqrt{\frac{23}{1 - .9112713}}$$
$$= 15.37$$

y dado que este valor es mayor que el valor crítico de t, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las dos variables están correlacionadas. Dado que $15.37 > 2.8073$, se tiene para esta prueba que $p < .01$.

El uso de la estadística t calculada en la prueba anterior es apropiado para probar sólo $H_0: \rho = 0$. Si se desea probar $H_0: \rho = \rho_0$, donde ρ_0 es algún valor distinto de cero, debe utilizarse otro procedimiento. Fisher[11] sugiere que r debe transformarse en z_r como sigue:

$$z_r = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \qquad (8.7.4)$$

donde ln es un logaritmo natural. Puede demostrarse que z_r tiene una distribución aproximadamente normal con una media de $z_p = \frac{1}{2} \ln\{(1 + \rho)/(1 - \rho)\}$ y una desviación estándar estimada.

$$\frac{1}{\sqrt{n-3}} \tag{8.7.5}$$

Para probar la hipótesis nula de que ρ es igual a algún valor distinto de cero, la estadística de prueba es

$$Z = \frac{z_r - z_\rho}{1/\sqrt{n-3}} \tag{8.7.6}$$

la cual sigue aproximadamente la distribución normal unitaria.

Para determinar z_r para un r observado y z_p para un ρ establecido en la hipótesis, se consulta la tabla L, evitando así el uso directo de los logaritmos naturales.

Supóngase que en el presente ejemplo se desea probar que

$$H_0: \rho = .98$$

contra la alternativa

$$H_A: \rho \neq .98$$

al nivel de significación de .05. Consultando la tabla L, se encuentra que para

$$r = .95, \qquad z_r = 1.83178$$

y para

$$\rho = .98, \qquad z_\rho = 2.29756$$

La estadística de prueba es entonces

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1.83178 - 2.29756}{1/\sqrt{25-3}} \\ &= -2.18 \end{aligned}$$

Dado que -2.18 es menor que el valor crítico de $z = -1.96$, debe rechazarse H_0 y concluir que el coeficiente de correlación de la población no es de .98.

Para tamaños de muestra menores que 25, debe utilizarse con precaución la transformación Z de Fisher. Puede utilizarse un procedimiento alternativo debido a Hotelling[12] para tamaños de muestra iguales o mayores de 10. En este procedimiento, se utiliza la siguiente transformación de r

$$z^* = z_r - \frac{3z_r + r}{4n} \tag{8.7.7}$$

La desviación estándar de z^* es

$$\sigma_{z^*} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \tag{8.7.8}$$

La estadística de prueba es

$$Z^* = \frac{z^* - \zeta^*}{1/\sqrt{n-1}} = (z^* - \zeta^*)\sqrt{n-1} \tag{8.7.9}$$

donde

$$\zeta^* \text{ (llamada zeta)} = z_\rho - \frac{(3z_\rho + \rho)}{4n}$$

Los valores críticos para fines de comparación se obtienen a partir de la distribución normal unitaria.

En el presente ejemplo, para probar $H_0: \rho = .98$ contra la alternativa $H_A: \rho \neq .98$ ($\alpha = .05$), utilizando la transformación de Hotelling, se tiene que

$$z^* = 1.83178 - \frac{3(1.83178) + .95}{4(25)} = 1.76733$$

$$\zeta^* = 2.29756 - \frac{3(2.29756) + .98}{4(25)} = 2.21883$$

$$\begin{aligned} Z^* &= (1.76733 - 2.21883)\sqrt{25-1} \\ &= -2.21 \end{aligned}$$

Dado que -2.21 es menor que -1.96, se rechaza la hipótesis nula y se llega a la misma conclusión que cuando se utilizó la transformación de Fisher.

Intervalo de confianza para ρ. Puede utilizarse la transformación de Fisher para construir intervalos de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para ρ. Se utiliza la fórmula general para un intervalo de confianza,

$$\text{estimador} \pm (\text{factor de confiabilidad})(\text{error estándar})$$

Se convierte primero el estimador, r, en z_r, se construye un intervalo de confianza en torno a z_p y se reconvierten entonces los límites para obtener un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para ρ. La fórmula general se convierte entonces en

$$z_r \pm z(1/\sqrt{n-3}) \tag{8.7.10}$$

Para el presente ejemplo, el intervalo de confianza del 95 por ciento para z_p está dado por

$$1.83178 \pm 1.96(1/\sqrt{25-3})$$
$$1.83178 \pm .41787$$
$$1.41391, 2.24965$$

Convirtiendo estos límites, que son valores de z_r, en valores de r, se tiene que

z_r	r
1.41391	.890
2.24965	.975

Se tiene entonces el 95 por ciento de confianza de que ρ esté contenido en el intervalo de .890 a .975. Debido a los valores limitados de la tabla, estos límites deben considerarse sólo como aproximados.

Otro método para construir intervalos de confianza para ρ es utilizar las tablas especiales preparadas por David.[13]

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios:

a) Prepare un diagrama de dispersión.
b) Calcule el coeficiente de correlación de la muestra.
c) Pruebe que $H_0 : \rho = 0$ al nivel de significación de .05 y saque sus conclusiones.
d) Determine el valor p para la prueba.
e) Construya el intervalo de confianza del 95 por ciento para ρ.

8.7.1 Una muestra aleatoria de los expedientes de cierto hospital proporcionó la siguiente información sobre la duración del internado en días y el ingreso familiar anual (redondeado hasta los $500 más próximos) de 15 pacientes dados de alta.

Ingreso familiar anual (x)	*Duración del internado (y)*
$2000	11
2500	12
3000	9
3500	8
4000	9
4500	10
5000	7
5500	8
6000	4
6500	7
7000	5
7500	6
8000	3
8500	4
9000	4

$$\sum x_i = 82{,}500$$
$$\sum x_i^2 = 523{,}750{,}000$$
$$\sum y_i = 107$$
$$\sum y_i^2 = 871$$
$$\sum x_i y_i = 510{,}500$$

8.7.2 La siguiente tabla muestra las presiones sanguíneas sistólicas en cada una de 25 parejas de gemelos idénticos.

Primer gemelo (X)	*Segundo gemelo (Y)*
118	115
116	119
118	116
120	119
122	118
122	138
122	124
120	128
124	126

Primer gemelo(X)	*Segundo gemelo(Y)*
125	130
138	130
140	125
142	164
144	160
145	158
162	145
180	184
180	190
182	188
185	180
170	174
172	170
150	160
152	155
155	160

$$\sum x_i = 3{,}604 \qquad \sum x_i^2 = 532{,}832$$
$$\sum y_i = 3{,}676 \qquad \sum y_i^2 = 555{,}618$$
$$\sum x_i y_i = 543{,}120$$

8.7.3 Se compararon dos métodos para medir el gasto cardiaco en 10 animales de laboratorio obteniéndose los siguientes resultados.

Gasto cardiaco (1./min) Método I(X)	Método II(Y)
.8	.5
1.0	1.2
1.3	1.1
1.4	1.3
1.5	1.1
1.4	1.8
2.0	1.6
2.4	2.0
2.7	2.4
3.0	2.8

8.7.4 Los valores siguientes son 15 lecturas sobre la congestión del tráfico y la concentración de monóxido de carbono efectuadas en un sitio de muestreo para determinar la calidad del aire de cierta ciudad.

Congestión del tráfico (automóviles por hora) (X)	*CO(ppm)* (Y)
100	8.8
110	9.0
125	9.5
150	10.0
175	10.5
190	10.5
200	10.5
225	10.6
250	11.0
275	12.1
300	12.1
325	12.5
350	13.0
375	13.2
400	14.5

$\sum x_i = 3{,}550 \qquad \sum y_i = 167.8$

$\sum x_i^2 = 974{,}450 \qquad \sum y_i^2 = 1{,}915.36$

$\sum x_i y_i = 41{,}945$

8.7.5 Una muestra aleatoria de 25 enfermeras seleccionadas de un registro estatal de enfermeras proporcionó la siguiente información sobre la calificación obtenida por cada una de ellas en el examen de la dirección estatal y su calificación final obtenida en la escuela. Ambas calificaciones se relacionan con el área de especialización de la enfermera.

Calificación final (X)	*Calificación obtenida en el examen de la dirección estatal* (Y)
87	440
87	480
87	535
88	460
88	525
89	480
89	510
89	530
89	545

Calificación final (X)	*Calificaciones obtenidas en el examen de la dirección estatal*
89	600
90	495
90	545
90	575
91	525
91	575
91	600
92	490
92	510
92	575
93	540
93	595
94	525
94	545
94	600
94	625

$$\sum x_i = 2{,}263 \qquad \sum y_i = 13{,}425$$
$$\sum x_i^2 = 204{,}977 \qquad \sum y_i^2 = 7{,}264{,}525$$
$$\sum x_i y_i = 1{,}216{,}685$$

8.8 ALGUNAS PRECAUCIONES

Los análisis de regresión y de correlación son herramientas estadísticas bastante útiles cuando se utilizan apropiadamente. Sin embargo, su uso inapropiado sólo puede conducir a la obtención de resultados sin sentido. Con el fin de ayudar al lector en el uso apropiado de estas técnicas, se hacen las siguientes sugerencias.

1. Antes de reunir los datos, deben revisarse cuidadosamente las suposiciones que fundamentan los análisis de regresión y de correlación. Aunque es raro encontrar que se cumplan las suposiciones a la perfección, el médico debe tener alguna idea acerca de la magnitud de la brecha que existe entre los datos que van a analizarse y las suposiciones del modelo propuesto, de modo que pueda decidir si debe elegir otro modelo; procédase con el análisis, pero tomando precauciones con la interpretación de los resultados; o bien, utilícese con confianza el modelo elegido.

2. En la regresión lineal simple y el análisis de correlación, las dos variables de interés se miden sobre la misma entidad, llamada unidad de asociación. Si se tiene interés en la relación entre la estatura y el peso, por ejemplo, estas dos medidas se hacen en el mismo individuo. En general, carece de sentido hablar de correlación, por así decirlo, entre las estaturas de un grupo de individuos y el peso de otro grupo.
3. Sin importar qué tan grande es la indicación de una relación entre dos variables, no debe interpretarse esto como un caso de causa y efecto. Si, por ejemplo, se observa un coeficiente notable de correlación de la muestra entre las dos variables X y Y, puede significar una de varias cosas:

   a) X causa Y.
   b) Y causa X.
   c) Algún tercer factor, sea directa o indirectamente, causa tanto a X como a Y.

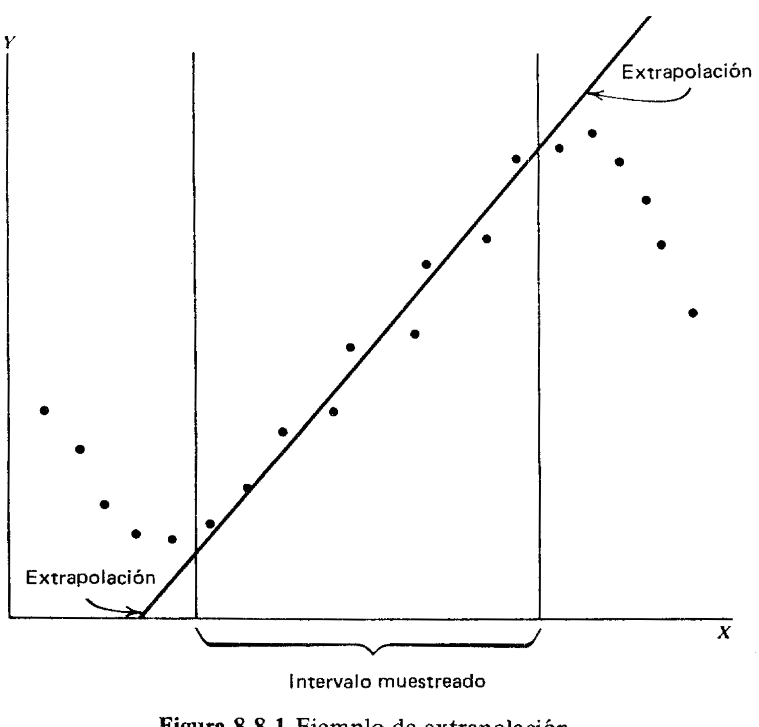


Figura 8.8.1 Ejemplo de extrapolación.

d) Ha ocurrido un evento improbable y se ha obtenido por casualidad un gran coeficiente de correlación de la muestra a partir de una población en la que, en efecto, X y Y no están correlacionadas.

e) La correlación es sencillamente disparatada, una situación que puede surgir cuando las mediciones de X y Y no se hacen sobre una unidad común de asociación.

4. La ecuación de regresión de la muestra no debe utilizarse para predecir o estimar fuera del intervalo de valores de la variable independiente representado en la muestra. Esta práctica, llamada *extrapolación,* tiene sus riesgos. La verdadera relación entre dos variables, aun cuando sea lineal sobre un intervalo de la variable independiente, a veces puede describirse mejor como una curva fuera de este intervalo. Si, por casualidad, se extrae la muestra sólo del intervalo donde la relación es lineal, se tiene únicamente una representación limitada de la población, por lo que proyectar los resultados de la muestra más allá del intervalo representado por ella puede conducir a conclusiones falsas. La figura 8.8.1 ilustra una de las trampas de la extrapolación.

8.9 RESUMEN

En este capítulo se examinan dos importantes herramientas del análisis estadístico, la regresión lineal simple y la correlación. Se ha sugerido el siguiente esquema para la aplicación de dichas técnicas.

1 *Identificación del modelo.* El médico debe saber si el modelo de regresión o el de correlación es el apropiado para dar respuesta a sus preguntas.
2. *Revisión de las suposiciones.* Se ha señalado varias veces que la validez de las conclusiones depende de qué tan bien se ajusten los datos analizados al modelo elegido.
3. *Obtención de la ecuación de regresión.* Se ha visto cómo se obtiene la ecuación de regresión mediante el método de los mínimos cuadrados. Aunque los cálculos, cuando se hacen a mano, son un tanto largos, complicados y sujetos a error, éste no es ahora el problema como lo fue en el pasado. Las computadoras electrónicas se utilizan ahora tan ampliamente que se siente uno tentado

a decir que las personas que se dedican al estudio de la estadística o el investigador sin acceso a una de ellas es la excepción, más que la regla. No es necesario hablar en defensa del investigador que tiene que realizar largos cálculos si dispone de una computadora.

4. *Evaluación de la ecuación.* Se ha visto que la utilidad de la ecuación de regresión para fines de estimación y predicción se determina por medio del análisis de variancia, el cual prueba el significado del cuadrado medio de la regresión. Se valora la intensidad de la relación entre dos variables bajo el modelo de correlación probando la hipótesis nula de que no existe correlación en la población. Si puede rechazarse esta hipótesis, puede concluirse, al nivel de significación elegido, que las dos variables están correlacionadas.
5. *Uso de la ecuación.* Una vez que se ha determinado que es probable que la ecuación de regresión describa adecuadamente la relación entre las dos variables, X y Y, puede utilizarse para cualquiera de dos fines:

   a) predecir qué valor es probable que tenga Y, dado un valor particular de X, o bien,
   b) estimar la media de la subpoblación de los valores de Y para un valor particular de X.

Este estudio necesariamente abreviado, de la regresión y correlación lineales simples puede haber dado lugar a más preguntas que las que ha contestado. Se le puede haber ocurrido al lector, por ejemplo, que una variable dependiente puede pronosticarse con más precisión utilizando dos o más variables independientes en lugar de una sola. O, quizá, puede tener la sensación de que conocer la intensidad de la relación entre varias variables podría ser más interesante que si se sabe la relación entre sólo dos variables. La exploración de estas posibilidades es el tema del capítulo siguiente, por lo que la curiosidad del lector en este sentido debe quedar, al menos, parcialmente satisfecha.

Para quienes deseen ampliar su conocimiento sobre el tema, al final del capítulo se da cierto número de excelentes referencias, además de las ya citadas.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan el análisis de regresión lineal simple cuando uno de los objetivos es hacer inferencias

acerca de la población de la cual se extrajeron los datos de la muestra?

2. ¿Por qué a la ecuación de regresión se le da el nombre de ecuación de mínimos cuadrados?
3. Explique el significado de a en la ecuación de regresión de la muestra.
4. Explique el significado de b en la ecuación de regresión de la muestra.
5. Explique los siguientes términos:

   a) Suma total de cuadrados.
   b) Suma de cuadrados explicada.
   c) Suma de cuadrados inexplicada.

6. Explique el significado del coeficiente de determinación y el método para calcularlo.
7. ¿Cuál es la función del análisis de variancia en el análisis de regresión?
8. Describa dos formas en las que se pueda probar la hipótesis nula de que $\beta = 0$.
9. ¿Cuáles son los dos fines para los que puede utilizarse una ecuación de regresión?
10. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan al análisis de correlación simple cuando la inferencia es un objetivo?
11. ¿Qué se entiende por unidad de asociación en el análisis de regresión y de correlación?
12. ¿Cuáles son las explicaciones posibles para un coeficiente de correlación significativa de la muestra.
13. Explique por qué existen riesgos en utilizar una ecuación de regresión de la muestra para predecir o estimar fuera del intervalo de valores de la variable independiente representada en la muestra.
14. Describa una situación en su área de interés particular donde sería útil un análisis de regresión simple. Utilice datos reales o realistas y haga un análisis de regresión completo.
15. Describa una situación en su área de interés particular donde sería útil un análisis de correlación simple. Utilice datos reales o realistas y haga un análisis de correlación completo.

En cada uno de los siguientes ejercicios, lleve a cabo el análisis requerido y pruebe las hipótesis con los niveles de significación indicados. Calcule el valor p para cada prueba.

16. Los siguientes valores son los niveles de testosterona en el plasma y la edad de los prisioneros que sufrían su primera condena por crímenes violentos y agresión y que fueron tomados de una muestra de prisioneros jóvenes.

Nivel de testosterona	*Edad en la primera condena*	*Nivel de testosterona*	*Edad en la primera condena*
1305	11	710	17
1000	12	1150	18
1175	13	605	20
1495	14	690	21
1060	15	700	23
800	16	625	24
1005	16	610	27
		450	30

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que las dos variables están correlacionadas al nivel de significación de .05?

17. Algunos investigadores de la salud han reportado que existe una relación inversa entre las malformaciones del sistema nervioso central y la dureza relacionada con los suministros de agua. Supóngase que los siguientes datos se obtuvieron de una muestra de 20 zonas geográficas obteniéndose los siguientes resultados.

Tasa de malformación del S.N.C. (por cada 1000 nacimientos)	*Dureza del agua (p.p.m.)*	*Tasa de malformación del S.N.C. (por cada 1000 nacimientos)*	*Dureza del agua (p.p.m.)*
7.2	50	6.3	160
8.1	25	12.5	50
11.2	15	15.0	45
9.3	75	6.5	60
9.4	100	8.0	100
5.0	150	10.0	155
5.8	180	5.3	200
3.3	250	4.9	240
3.6	275	7.2	40
4.8	220	11.9	65

Construya un diagrama de dispersión y calcule r. ¿Cuáles son sus conclusiones? Sea $\alpha = .05$.

18. Se registraron la presión sistólica sanguínea media durante una intervención quirúrgica y el volumen de sangre perdido para 16 pacientes.

Presión sistólica sanguínea media durante la intervención quirúrgica (mm Hg)	*Pérdida de sangre (ml)*	*Presión sistólica sanguínea media durante la intervención quirúrgica (mm Hg)*	*Pérdida de sangre (ml)*
95	274	80	190
90	170	110	'288
125	352	90	205
105	317	105	150
110	171	90	175
105	150	110	64
90	245	110	276
90	120	140	318

Prepare un diagrama de dispersión, calcule r y haga la prueba de significación al nivel de .05.

19. En un estudio del efecto de un componente de la dieta sobre la composición de los lípidos del plasma, se obtuvieron los siguientes datos en una muestra de 15 animales experimentales:

Medida del componente de la dieta (X)	*Medida de la concentración de lípidos en el plasma (Y)*
18	38
21	40
28	47
35	54
47	66
33	52
40	59
41	60
28	47
21	40
30	49
46	65
44	63
38	57
19	38

Obtenga la ecuación de regresión para estos datos, calcule r^2 y pruebe $H_0 : \beta = 0$ tanto para la prueba F como para la prueba t.

20. Los siguientes valores son el flujo sanguíneo pulmonar (FSP) y el volumen sanguíneo pulmonar (VSP) registrados para 16 bebés y niños con enfermedad congénita del corazón.

Y VSP (ml/M^2)	X FSP$(L/min/M^2)$
168	4.31
280	3.40
391	6.20
420	17.30
303	12.30
429	13.99
605	8.73
522	8.90
224	5.87
291	5.00
233	3.51
370	4.24
531	19.41
516	16.61
211	7.21
439	11.60

Encuentre la ecuación de regresión que describa la relación lineal entre las dos variables, calcule r^2 y pruebe $H_0 : \beta = 0$ tanto para la prueba F como para la prueba t. Sea $\alpha = .05$.

21. Se compararon mediante dos métodos quince muestras de suero de sangre con el anticuerpo tuberculina. Los logaritmos de los resultados obtenidos mediante los dos métodos fueron los siguientes:

Método $A(X)$	$B(Y)$
3.31	4.09
2.41	3.84
2.72	3.65
2.41	3.20
2.11	2.97
2.11	3.22

Método A(X)	Método B(Y)
3.01	3.96
2.13	2.76
2.41	3.42
2.10	3.38
2.41	3.28
2.09	2.93
3.00	3.54
2.08	3.14
2.11	2.76

Encuentre la ecuación de regresión que describa la relación entre las dos variables, calcule r^2 y pruebe $H_0: \beta = 0$ tanto para la prueba F como para la prueba t.

22. La siguiente tabla ilustra los valores del consumo de metil mercurio y la cantidad total de mercurio en la sangre de 12 individuos expuestos a la primera sustancia por haber consumido peces contaminados.

X Consumo de metil mercurio (μg Hg/día)	Y Mercurio en la sangre (ng/g)
180	90
200	120
230	125
410	290
600	310
550	290
275	170
580	375
105	70
250	105
460	205
650	480

Encuentre la ecuación de regresión que describa la relación lineal entre las dos variables, calcule r^2 y pruebe la hipótesis $H_0: \beta = 0$ tanto con la prueba F como con la prueba t. Sea $\alpha = .05$. Construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para β.

23. Los valores siguientes son los pesos (en kg) y los niveles de glucosa en la sangre (en mg/100 ml) de 16 hombres adultos aparentemente sanos.

Peso (X)	*Glucosa (Y)*
64.0	108
75.3	109
73.0	104
82.1	102
76.2	105
95.7	121
59.4	79
93.4	107
82.1	101
78.9	85
76.7	99
82.1	100
83.9	108
73.0	104
64.4	102
77.6	87

Encuentre la ecuación de regresión lineal simple y pruebe la hipótesis $H_0 : \beta = 0$ utilizando la tabla ANDEVA y la prueba t. Pruebe $H_0 : \rho = 0$ y construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para ρ. ¿Cuál es el nivel de glucosa pronosticado para un hombre que pesa 95 kg? Construya el intervalo de predicción del 95 por ciento para este peso. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

24. La tabla siguiente indica las edades (en años) y las presiones sistólicas sanguíneas (PSS) de 20 adultos aparentemente sanos.

Edad (X)	*PSS(Y)*	*Edad(X)*	*PSS(Y)*
20	120	46	128
43	128	53	136
63	141	70	146
26	126	20	124
53	134	63	143
31	128	43	130
58	136	26	124
46	132	19	121
58	140	31	126
70	144	23	123

Encuentre la ecuación de regresión lineal simple y pruebe la hipótesis $H_0 : \beta = 0$ utilizando la tabla ANDEVA y la prueba t. Pruebe la hipótesis $H_0 : \rho = 0$ y construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para ρ. Encuentre el intervalo de predicción del 95 por ciento para la presión sistólica sanguínea de una persona de 25 años de edad. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

25. Se reunieron los siguientes datos durante un experimento en el cual se inoculó un animal de laboratorio con un patógeno. Las variables son el tiempo, en horas, después de la inoculación y la temperatura en grados Celsius.

Tiempo	*Temperatura*	*Tiempo*	*Temperatura*
24	38.8	44	41.1
28	39.5	48	41.4
32	40.3	52	41.6
36	40.7	56	41.8
40	41.0	60	41.9

Encuentre la ecuación de regresión lineal simple y pruebe la hipótesis $H_0 : \beta = 0$ utilizando la tabla ANDEVA y la prueba t. Pruebe la hipótesis $H_0 : \rho = 0$ y construya un intervalo de confianza del 95 por ciento para ρ. Construya el intervalo de predicción del 95 por ciento para la temperatura a 50 horas después de la inoculación. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. Francis Galton, *Natural Inheritance,* Macmillan, Londres, (1899).
2. Francis Galton, *Memories of My Life,* Methuen, Londres, 1908.
3. Karl Pearson, *The Life, Letters and Labours of Francis Galton,* Volumen III A, Cambridge en the University Press, 1930.
4. Francis Galton, "Co-relations and Their Measurement, Chiefly from Anthropometric Data," *Proceedings of the Royal Society, XLV* (1888), 135-145.
5. F. A. Graybill y D. C. Bowden, "Linear Segment Confidence Bands for Simple Linear Models," *Journal of the American Statistical Association, 62* (1967), 403-408.

6. Olive Jean Dunn, "A Note on Confidence Bands for a Regression Line Over a Finite Range," *Journal of the American Statistical Association, 63* (1968), 1028-1033.
7. P. G. Hoel, "Confidence Regions for Linear Regression," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* University of California Press, Berkeley, 1951, pp. 75–81.
8. A. V. Gafarian, "Confidence Bands in Straight Line Regression," *Journal of the American Statistical Association, 59* (1964), 182-213.
9. M. Halperin y J. Gurian, "Confidence Bands in Linear Regression with Constraints in the Independent Variables," *Journal of the American Statistical Association, 63* (1968), 1020-1027.
10. R. C. Elston y J. E. Grizzle, "Estimation of Time Response Curves and their Confidence Bands," *Biometrics,18* (1962), 148-159.
11. R. A. Fisher, "On the Probable Error of a Coefficient of Correlation Deduced from a Small Sample," *Metron, 1* (1921), 3-21.
12. H. Hotelling, "New Light on the Correlation Coefficient and its Transforms," *Journal of the Royal Statistical Society,* Ser B, *15* (1953), 193-232.
13. F. N. David, *Tables of the Ordinates and Probability Integral of the Distribution of the Correlation Coefficient in Small Samples,* Cambridge University Press, Cambridge, 1938.

Otras referencias, libros

1. F. S. Acton, *Analysis of Straight Line Data,* Wiley, Nueva York, 1959.
2. Andrew R. Baggaley, *Intermediate Correlational Methods,* Wiley, Nueva York, 1964.
3. Cuthbert Daniel y Fred S. Wood, *Fitting Equations to Data,* Wiley-Interscience, Nueva York, 1971.
4. N. R. Draper y H. Smith, *Applied Regression Analysis,* segunda edición, Wiley, Nueva York, 1981.
5. Mordecai Ezekiel y Karl A. Fox, *Methods of Correlation and Regression Analysis,* tercera edición, Wiley, Nueva York, 1959.
6. Arthur S. Goldberger, *Topics in Regression Analysis,* Macmillan, Toronto, 1968.
7. David G. Kleinbaum y Lawrence L. Kupper, *Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods,* Duxbury Press, North Scituate, Mass., 1978.

8. R. L. Plackett, *Principles of Regression Analysis,* Oxford University Press, Londres, 1960.
9. K. W. Smillie, *An Introduction to Regression and Correlation,* Academic Press, Nueva York, 1966.
10. Peter Sprent, *Models in Regression,* Methuen, Londres, 1969.
11. E. J. Williams, *Regression Analysis,* Wiley, Nueva York, 1959.
12. Stephen Wiseman, *Correlation Methods,* Manchester University Press, Manchester, 1966.
13. Mary Sue Younger, *Handbook for Linear Regression,* Duxbury Press, North Scituate, Mass., 1979.

Otras referencias, artículos de revistas

1. R. G. D. Allen, "The Assumptions of Linear Regression," *Economica, 6 N.S.* (1939), 191-204.
2. M. S. Bartlett, "The Fitting of Straight Lines if Both Variables Are Subject to Error," *Biometrics, 5* (1949), 207-212.
3. J. Berkson, "Are There Two Regressions?" *Journal of the American Statistical Association, 45* (1950), 164-180.
4. Dudley J. Cowden, "A Procedure for Computing Regression Coefficients," *Journal of the American Statistical Association, 53* (1958), 144-150.
5. A. S. C. Ehrenberg, "Bivariate Regression Is Useless," *Applied Statistics, 12* (1963), 161-179.
6. M. G. Kendall, "Regression, Structure, and Functional Relationship, Parte I," *Biometrika, 28* (1951), 11-25.
7. M. G. Kendall, "Regression, Structure and Functional Relationship II," *Biometrika, 39* (1952), 96-108.
8. D. V. Lindley, "Regression Lines and the Linear Functional Relationship," *Journal of the Royal Statistical Society* (Sumplemento), *IX* (1947), 218-244.
9. A. Madansky, "The Fitting of Straight Lines When Both Variables Are Subject to Error," *Journal of the American Statistical Association, 54* (1959), 173-205.
10. A. Wald, "The Fitting of Straight Lines if Both Variables Are Subjet to Error," *Annals of Mathematical Statistics, 11* (1940), 284-300.
11. W. G. Warren, "Correlation or Regression: Bias or Precision," *Applied Statistics, 20* (1971), 148-164.
12. Charles P. Winsor, "Which Regression?" *Biometrics, 2* (1946), 101-109.

9

Regresión y correlación múltiples

9.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 8 se examinaron los conceptos y técnicas para analizar y utilizar la relación entre dos variables. Se observó que este análisis puede conducir a una ecuación que puede utilizarse para predecir el valor de alguna variable dependiente dado el valor de una variable independiente asociada.

La intuición señala que, en general, debe tenerse la capacidad de mejorar la habilidad para predecir al incluir más variables independientes en dicha ecuación.

Por ejemplo, un investigador encuentra que las calificaciones de inteligencia de las personas pueden predecirse a partir de factores físicos como el orden del nacimiento, el peso al nacer y la duración de la gestación, junto con ciertos factores hereditarios y ambientales. La duración de la hospitalización de una persona en un hospital de enfermedades crónicas puede depender de la edad del paciente, estado civil, sexo e ingresos, no sin mencionar el factor obvio del diagnóstico. La respuesta de un animal de laboratorio a algún medicamento puede depender del tamaño de la dosis y de la edad y peso del animal. Una enfermera supervisora desea saber la intensidad de la relación entre la eficiencia de una enfermera en el trabajo, su calificación en el examen de la dirección estatal, sus antecedentes escolares y su calificación en alguna prueba de habilidad o aptitud. O bien, el administrador de un hospital, al estudiar las admisiones de diversas comunidades servidas por su hospital, desea determinar qué factores parecen ser los que influyen en las diferencias que se observan en las tasas de admisión.

Los conceptos y técnicas para analizar la asociación entre varias variables son extensiones naturales de los que se estudiaron en los capítulos anteriores. Los cálculos, como es de esperar, son más complejos y tediosos. Sin embargo, como se señaló en el capítulo 8, esto no constituye un problema real siempre que se disponga de una computadora electrónica. No es raro encontrar investigadores que estudien las relaciones existentes entre una docena de variables o más. Para quienes tienen acceso a una computadora, la decisión acerca de cuántas variables incluir en un análisis se basa no en la complejidad y lo largo de los cálculos, sino en consideraciones tales como su importancia, el costo de su inclusión y la importancia de su contribución.

En este capítulo se sigue estrictamente la secuencia del capítulo anterior. Primero se estudia el modelo de regresión, seguido por un análisis del modelo de correlación. Al considerar el modelo de regresión, se cubren los siguientes puntos: una descripción del modelo, los métodos para obtener la ecuación de regresión, la evaluación de la ecuación y los usos que pueden hacerse de ella. En ambos modelos se estudian los procedimientos inferenciales posibles y sus suposiciones fundamentales.

9.2 EL MODELO DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

En el modelo de regresión múltiple, se supone que existe una relación lineal entre alguna variable Y, a la cual se da el nombre de variable dependiente, y k variables independientes, $X_1, X_2, \ldots X_k$. A veces, las variables independientes se conocen como *variables explicativas* debido a que se utilizan para explicar la variación en Y, y como *variables de predicción,* por su uso en predecir Y.

Las suposiciones acompañantes son las siguientes.

1. Las X_i son variables no aleatorias (fijas). Esta suposición distingue al modelo de regresión múltiple del modelo de correlación múltiple, el cual se estudiará en la sección 9.6. Esta condición indica que cualquier inferencia que se haga de los datos de la muestra sólo se aplica al conjunto de valores de X observados y no a algún conjunto mayor de X. Bajo el modelo de regresión, el análisis de correlación carece de significado. Bajo el modelo de correlación,

que se estudiará posteriormente, pueden aplicarse las siguientes técnicas de regresión.

2. Para cada conjunto de valores de X_i, existe una subpoblación de valores de Y. Para construir ciertos intervalos de confianza y probar hipótesis, debe saberse, o el investigador debe inclinarse a suponer, que estas subpoblaciones de valores de Y tienen distribución normal. Ya que se deseará demostrar estos procedimientos inferenciales, se hará la suposición de normalidad en los ejemplos y ejercicios de este capítulo.
3. Todas las variancias de las subpoblaciones de Y son iguales.
4. Los valores de Y son independientes. Es decir, Los valores de Y seleccionados para un conjunto de valores de X no dependen de los valores de Y seleccionados en otro conjunto de valores de X.

Estas suposiciones pueden enunciarse en forma más concreta como

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \cdots + \beta_k x_{kj} + e_j \tag{9.2.1}$$

donde y_j es un valor típico de una de las subpoblaciones de los valores de Y, los β_i se conocen como coeficientes de regresión, x_{1j}, x_{2j}, . . . , x_{kj} son, respectivamente, los valores particulares de las variables independientes X_1, X_2, . . . , X_k, y e_j es una variable aleatoria con media de 0 y variancia σ^2, que es la variancia común de las subpoblaciones de los valores de Y. Para construir intervalos de confianza para los coeficientes de regresión y probar hipótesis acerca de ellos, se supone que los e_j tienen distribución normal e independiente. Las afirmaciones referentes a los e_j son consecuencia de las suposiciones referentes a las distribuciones de los valores de Y. La ecuación 9.2.1 se conoce como el *modelo de regresión múltiple.*

Cuando la ecuación 9.2.1 consta de una variable dependiente y dos variables independientes, es decir, cuando el modelo se escribe como

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + e_j \tag{9.2.2}$$

puede ajustarse un *plano* en el espacio tridimensional a los puntos de los datos, como se muestra en la figura 9.2.1. Cuando el modelo contiene más de dos variables independientes, se describe geométricamente como un *hiperplano.*

En la figura 9.2.1, el observador debe imaginar algunos de los puntos como si estuvieran localizados por arriba del plano y otros como

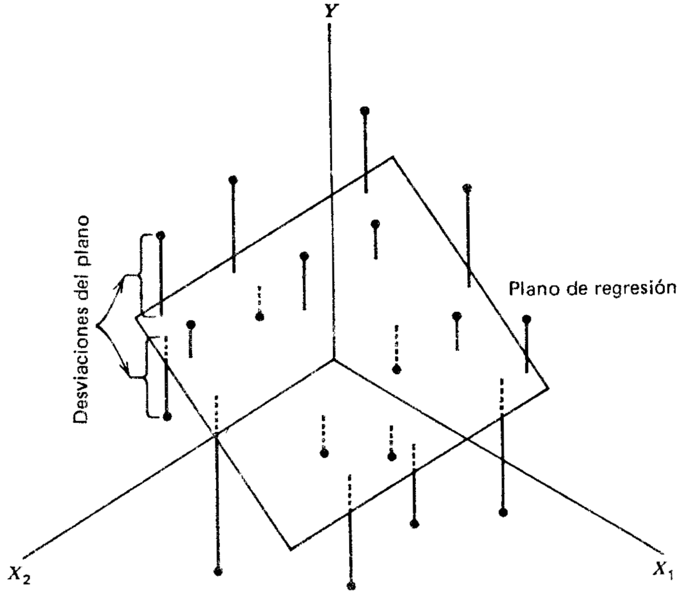


Figura 9.2.1 Plano de regresión múltiple y dispersión de los puntos.

si estuvieran por debajo. La desviación de un punto respecto del plano está representada por la expresión

$$e_j = y_j - \beta_0 - \beta_1 x_{1j} - \beta_2 x_{2j} \tag{9.2.3}$$

En la ecuación 9.2.2, β_0 representa el punto donde el plano corta al eje Y, es decir, representa la ordenada al origen del plano. β_1 mide el cambio promedio en Y para un cambio unitario en X_1 cuando X_2 permanece sin cambios, y β_2 mide el cambio promedio en Y para un cambio unitario en X_2 cuando X_1 permanece sin cambios. Por esta razón, β_1 y β_2 se conocen como *coeficientes de regresión parcial.*

9.3 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

Las estimaciones insesgadas de los parámetros $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ del modelo especificado en la ecuación 9.2.1 se obtienen mediante el método de los mínimos cuadrados. Esto significa que se minimiza la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado de los valores observados de Y respecto de la superficie de regresión resultante. En el caso de tres variables, como se muestra en la figura 9.2.1, la suma de las desviaciones al cuadrado de las observaciones, respecto del plano, es un mínimo cuando se estiman β_0, β_1 y β_2 por el método de los mínimos cuadrados. En otras palabras, por el método de los mínimos cuadrados, se seleccionan estimaciones de $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ de la muestra en tal forma que se minimice la cantidad

$$\sum e_j^2 = \sum (y_j - \beta_0 x_{1j} - \beta_1 x_{2j} - \cdots - \beta x_{kj})$$

Esta cantidad, conocida como suma de los cuadrados de los residuales, puede escribirse también como

$$\sum (y_j - y_c)^2 \tag{9.3.1}$$

indicando el hecho de que se minimiza la suma de cuadrados de las desviaciones de los valores observados de Y respecto de los valores de esta variable calculados a partir de la ecuación estimada.

Las estimaciones $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ de los coeficientes de regresión se obtienen resolviendo la siguiente serie de ecuaciones normales:

$$\left.\begin{array}{r}
nb_0 + b_1\sum x_{1j} + b_2\sum x_{2j} + \cdots + b_k\sum x_{kj} = \sum y_j \\
b_0\sum x_{1j} + b_1\sum x_{1j}^2 + b_2\sum x_{1j}x_{2j} + \cdots + b_k\sum x_{1j}x_{kj} = \sum x_{1j}y_j \\
b_0\sum x_{2j} + b_1\sum x_{2j}x_{1j} + b_2\sum x_{2j}^2 + \cdots + b_k\sum x_{2j}x_{kj} = \sum x_{2j}y_j \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
b_0\sum x_{kj} + b_1\sum x_{kj}x_{1j} + b_2\sum x_{kj}x_{2j} + \cdots + b_k\sum x_{kj}^2 = \sum x_{kj}y_j
\end{array}\right\} \tag{9.3.2}$$

A continuación se hace el cálculo de la ecuación de regresión estimada y se indican sus usos para el caso donde se tiene una variable dependiente y dos variables independientes.

Cuando el modelo contiene sólo dos variables independientes, la ecuación de regresión de la muestra es

$$y_{cj} = b_0 + b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j} \tag{9.3.3}$$

Ejemplo 9.3.1

En un estudio de la duración de la hospitalización para los pacientes que estaban en un hospital de enfermedades crónicas, un investigador deseaba saber cómo podría predecir la duración del internado (Y), dadas las variables independientes, número de admisiones previas (X_1) y edad (X_2). Los datos de la tabla 9.3.1 se obtuvieron de una muestra de $n = 15$ pacientes.

Para obtener la ecuación de los mínimos cuadrados, deben resolverse las siguientes ecuaciones normales para los coeficientes de regresión de la muestra:

$$\left.\begin{aligned} nb_0 + b_1\sum x_{1j} + b_2\sum x_{2j} &= \sum y_j \\ b_0\sum x_{1j} + b_1\sum x_{1j}^2 + b_2\sum x_{1j}x_{2j} &= \sum x_{1j}y_j \\ b_0\sum x_{2j} + b_1\sum x_{1j}x_{2j} + b_2\sum x_{2j}^2 &= \sum x_{2j}y_j \end{aligned}\right\} \tag{9.3.4}$$

Tabla 9.3.1 Duración de la hospitalización en días, edad en años y número de admisiones previas de 15 pacientes admitidos a un hospital de enfermedades crónicas.

Duración de la hospitalización (Y)	*Número de admisiones previas* (X_1)	*Edad* (X_2)
15	0	21
15	0	18
21	0	22
28	1	24
30	1	25
35	1	25
40	1	26
35	2	34
30	2	25
45	2	38
50	3	44
60	3	51
45	4	39
60	4	54
50	5	55

Nótese que el número de ecuaciones es igual al número de los parámetros que van a estimarse. Pueden resolverse las tres ecuaciones como están, o bien, pueden reducirse a un conjunto de dos ecuaciones transformando cada valor en una desviación respecto de su media. Si se designan estas desviaciones por y'_j, x'_{1j} y x'_{2j}, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} y'_j &= y_j - \bar{y} \\ x'_{1j} &= x_{1j} - \bar{x}_1 \\ x'_{2j} &= x_{2j} - \bar{x}_2 \end{aligned}\right\} \tag{9.3.5}$$

Si se resta la ecuación original de regresión de la muestra (ecuación 9.3.3) en términos de estas transformaciones, se tiene que

$$y'_{cj} = b'_0 + b'_1 x'_{1j} + b'_2 x'_{2j} \tag{9.3.6}$$

donde b'_0, b'_1 y b'_2 son los coeficientes apropiados para las variables transformadas. La relación entre los dos conjuntos de coeficientes puede determinarse sustituyendo las desviaciones de las medias de las variables originales en la ecuación 9.3.6 y simplificando entonces. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} y_{cj} - \bar{y} &= b'_0 + b'_1(x_{1j} - \bar{x}_1) + b'_2(x_{2j} - \bar{x}_2) \\ y_{cj} &= \bar{y} + b'_0 + b'_1 x_{1j} - b'_1 \bar{x}_1 + b'_2 x_{2j} - b'_2 \bar{x}_2 \\ y_{cj} &= b'_0 + \bar{y} - b'_1 \bar{x}_1 - b'_2 \bar{x}_2 + b'_1 x_{1j} + b'_2 x_{2j} \end{aligned} \tag{9.3.7}$$

Cuando se establecen los coeficientes de términos iguales en las ecuaciones 9.3.3 y 9.3.7, iguales entre sí, se tiene que

$$\begin{aligned} b_1 &= b'_1 \\ b_2 &= b'_2 \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$b_0 = b'_0 + \bar{y} - b'_1 \bar{x}_1 - b'_2 \bar{x}_2 = b'_0 + \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 \tag{9.3.8}$$

Un nuevo conjunto de ecuaciones normales basado en la ecuación 9.3.6 es

$$\begin{aligned} nb'_0 + b'_1 \sum x'_{1j} + b'_2 \sum x'_{2j} &= \sum y'_j \\ b'_0 \sum x'_{1j} + b'_1 \sum x'^2_{1j} + b'_2 \sum x'_{1j} x'_{2j} &= \sum x'_{1j} y_j \\ b'_0 \sum x'_{2j} + b'_1 \sum x'_{1j} x'_{2j} + b'_2 \sum x'^2_{2j} &= \sum x'_{2j} y_j \end{aligned}$$

Utilizando las transformaciones de la ecuación 9.3.5 y la propiedad de que $\Sigma\ (x_i - \bar{x}) = 0$, se obtiene

$$nb'_0 + b'_1(0) + b'_2(0) = 0$$
$$b'_0(0) + b'_1\sum(x_{1j} - \bar{x}_1)^2 + b'_2\sum(x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) = \sum(x_{1j} - \bar{x}_1)(y_j - \bar{y})$$
$$b'_0(0) + b'_1\sum(x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) + b'_2\sum(x_{2j} - \bar{x}_2)^2 = \sum(x_{2j} - \bar{x}_2)(y_j - \bar{y})$$

Nótese que $b'_0 = 0$. Así, mediante la ecuación 9.3.8, se tiene que

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

y cuando se sustituyen b_1 y b_2 por b'_1 y b'_2, respectivamente, las ecuaciones normales se condensan en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} b_1\sum x'^2_{1j} + b_2\sum x'_{1j}x'_{2j} &= \sum x'_{1j}y'_j \\ b_1\sum x'_{1j}x'_{2j} + b_2\sum x'^2_{2j} &= \sum x'_{2j}y'_j \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.9)$$

La tabla 9.3.2 contiene las sumas de cuadrados y los productos cruzados de los valores originales necesarios para calcular las sumas de cuadrados y productos cruzados de y'_j, x'_{1j} y x'_{2j}.

Utilizando los datos de la tabla 9.3.2, se calcula lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum x'^2_{1j} &= \sum(x_{1j} - \bar{x}_1)^2 = \sum x_{1j}{}^2 - (\sum x_{1j})^2/n \\ &= 91 - (29)^2/15 = 34.93 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum x'^2_{2j} &= \sum(x_{2j} - \bar{x}_2)^3 = \sum x_{2j}{}^2 - (\sum x_{2j})^2/n \\ &= 18{,}975 - (501)^2/15 = 2241.60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum x'_{1j}x'_{2j} &= \sum(x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) = \sum x_{1j}x_{2j} - \sum x_{1j}\sum x_{2j}/n \\ &= 1226 - (29)(501)/15 = 257.40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum x'_{1j}y'_j &= \sum(x_{1j} - \bar{x}_1)(y_j - \bar{y}) = \sum x_{1j}y_j - \sum x_{1j}\sum y_j/n \\ &= 1353 - (29)(559)/15 = 272.27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum x'_{2j}y'_j &= \sum(x_{2j} - \bar{x}_2)(y_j - \bar{y}) = \sum x_{2j}y_j - \sum x_{2j}\sum y_j/n \\ &= 21{,}039 - (501)(559)/15 = 2368.40 \end{aligned}$$

Cuando se sustituyen estos valores en las ecuaciones 9.3.9, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} 34.93b_1 + 257.40b_2 &= 272.27 \\ 257.40b_1 + 2241.60b_2 &= 2368.40 \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.10)$$

Tabla 9.3.2 Sumas de cuadrados y sumas de productos cruzados para el ejemplo 9.3.1.

	y_j	x_{1j}	x_{2j}	$x_{1j}x_{2j}$	$x_{1j}y_j$	$x_{2j}y_j$	x_{1j}^2	x_{2j}^2	y_j^2
	15	0	21	0	0	315	0	441	225
	15	0	18	0	0	270	0	324	225
	21	0	22	0	0	462	0	484	441
	28	1	24	24	28	672	1	576	784
	30	1	25	25	30	750	1	625	900
	35	1	25	25	35	875	1	625	1225
	40	1	26	26	40	1040	1	676	1600
	35	2	34	68	70	1190	4	1156	1225
	30	2	25	50	60	750	4	625	900
	45	2	38	76	90	1710	4	1444	2025
	50	3	44	132	150	2200	9	1936	2500
	60	3	51	153	180	3060	9	2601	3600
	45	4	39	156	180	1755	16	1521	2025
	60	4	54	216	240	3240	16	2916	3600
	50	5	55	275	250	2750	25	3025	2500
Totales	559	29	501	1,226	1,353	21,039	91	18,975	23,775
Medias	37.27	1.93	33.40						

Estas ecuaciones pueden resolverse por cualquier método estándar para obtener

$$b_1 = .06$$
$$b_2 = 1.05$$

b_0 se obtiene a partir de la relación:

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 \tag{9.3.11}$$

Para el presente ejemplo, se tiene que

$$\begin{aligned} b_0 &= 37.27 - (.06)(1.93) - (1.05)(33.40) \\ &= 2.08 \end{aligned}$$

La ecuación de regresión múltiple de la muestra es entonces,

$$y_c = 2.08 + .06x_{1j} + 1.05x_{2j} \tag{9.3.12}$$

Se ha utilizado un ejemplo que contiene sólo tres variables para facilitar la comprensión del tema. A medida que aumenta el número de variables, las manipulaciones algebraicas y los cálculos aritméticos se hacen más tediosos y sujetos a error, aun cuando sean extensiones naturales de los procedimientos dados en el presente ejemplo.

Snedecor y Cochran[1] y Steel y Torrie[2] dan ejemplos numéricos para cuatro variables, y Anderson y Bancroft[3] ilustran los cálculos que intervienen cuando se tienen cinco variables. Las técnicas utilizadas por estos autores se aplican a cualquier número de variables.

Afortunado es el investigador que, viendo necesario utilizar las técnicas del análisis de regresión múltiple, tiene acceso a una computadora electrónica y a programas ya elaborados que incluyen un gran número de variables. Puede olvidarse de las complejidades algebraicas y aritméticas de sus problemas y concentrarse en la evaluación de lo adecuado de sus modelos y en la interpretación de sus resultados.

Una vez que se ha obtenido la ecuación de regresión múltiple, el siguiente paso comprende su evaluación e interpretación. Esta es la faceta del análisis que se cubre en la siguiente sección.

Ejercicios

Obtenga la ecuación de regresión para cada uno de los siguientes conjuntos de datos.

9.3.1 En un estudio diseñado para descubrir qué factores podrían estar relacionados con el peso al nacer, se obtuvieron los siguientes datos en 10 niños recién nacidos.

Peso al nacer en gramos (Y)	*Estimación del nivel socioeconómico* (X_1)	*Orden de nacimiento* (X_2)
1361	8	4
1588	7	3
1815	4	4
2087	5	3
2268	5	2
2404	4	2
3402	3	2
3629	3	1
3765	2	1
4083	1	1
26402	42	23

$\sum x_{1j}^2 = 218$ $\quad \sum x_{2j}^2 = 65$ $\quad \sum y_j^2 = 78{,}536{,}258$

$\sum x_{1j}x_{2j} = 114$ $\quad \sum x_{1j}y_j = 93{,}361$ $\quad \sum x_{2j}y_j = 51{,}354$

9.3.2 Un investigador reunió los siguientes datos en 15 niños.

Calificación de inteligencia (Y)	*Orden de nacimiento* (X_1)	*Edad de la madre al nacimiento del niño* (X_2)
110	1	25
115	1	24
120	1	22
118	1	24
110	2	20
108	2	20
105	2	20
104	3	24
98	3	25
99	4	30
98	4	24
100	5	29
90	5	30
93	5	30
90	6	28
Totales 1558	45	375

$\sum x_{1j}^2 = 177$ $\sum x_{2j}^2 = 9563$ $\sum y_j^2 = 163{,}112$

$\sum x_{1j}x_{2j} = 1191$ $\sum x_{1j}y_j = 4458$ $\sum x_{2j}y_j = 38{,}620$

9.3.3 En un estudio de los factores que se pensaba estaban relacionados con los patrones de admisión a un hospital general grande, el administrador de un hospital obtuvo estos datos en 10 comunidades en el área de trabajo del hospital:

Comunidad	*Personas admitidas por cada 1,000 de la población durante el período de estudio* (Y)	*Indice de disponibilidad de otros servicios de salud* (X_1)	*Indice de inteligencia* (X_2)
1	61.6	6.0	6.3
2	53.2	4.4	5.5
3	65.5	9.1	3.6
4	64.9	8.1	5.8
5	72.7	9.7	6.8

Comunidad	*Personas admitidas por cada 1:000 de la población durante el período de estudio (Y)*	*Indice de disponibilidad de otros servicios de salud (X_1)*	*Indice de inteligencia (X_2)*
6	52.2	4.8	7.9
7	50.2	7.6	4.2
8	44.0	4.4	6.0
9	53.8	9.1	2.8
10	53.5	6.7	6.7
Total	571.6	69.9	55.6

$\sum x_{1j}^2 = 525.73$ $\quad \sum x_{2j}^2 = 331.56$ $\quad \sum y_j^2 = 33,349.92$

$\sum x_{1j}x_{2j} = 374.31$ $\quad \sum x_{1j}y_j = 4104.32$ $\quad \sum x_{2j}y_j = 3183.57$

9.3.4 El administrador de un hospital general obtuvo los siguientes datos en 20 pacientes de cirugía durante un estudio para determinar qué factores parecen estar relacionados con la duración de la hospitalización.

Duración del internado postoperatorio en días (Y)	*Número de problemas médicos comunes (X_1)*	*Duración del internado preoperatorio en días (X_2)*
6	1	1
6	2	1
11	2	2
9	1	3
16	3	3
16	1	5
4	1	1
8	3	1
11	2	2
13	3	2
13	1	4
9	1	2
17	3	3
17	2	4
12	4	1
6	1	1

Duración del internado postoperatorio en días (Y)	Número de problemas médicos comunes (X_1)	Duración del internado preoperatorio en días (X_2)
5	1	1
12	3	2
8	1	2
9	2	2
Total 208	38	43

$\sum x_{1j}^2 = 90$ $\sum x_{2j}^2 = 119$ $\sum y_j^2 = 2478$

$\sum x_{1j}x_{2j} = 79$ $\sum x_{1j}y_j = 430$ $\sum x_{2j}y_j = 519$

9.3.5 Utilice como referencia el ejercicio 8.7.5. El investigador dispuso de información adicional sobre la calificación obtenida por cada enfermera en una prueba de aptitud realizada cuando la enfermera ingresó a la escuela. Los datos completos son los siguientes.

Calificación obtenida en el examen de la dirección estatal (Y)	Calificación final (X_1)	Calificación obtenida en la prueba de aptitud (X_2)
440	87	92
480	87	79
535	87	99
460	88	91
525	88	84
480	89	71
510	89	78
530	89	78
545	89	71
600	89	76
495	90	89
545	90	90
575	90	73
525	91	71
575	91	81
600	91	84
490	92	70
510	92	85

Calificación obtenida en el examen de la dirección estatal (*Y*)	*Calificación final* (X_1)	*Calificación obtenida en la prueba de aptitud* (X_2)
575	92	71
540	93	76
595	93	90
525	94	94
545	94	94
600	94	93
625	94	73
Total 13,425	2263	2053
$\sum x_{1j}^2 = 204{,}977$	$\sum x_{2j}^2 = 170{,}569$	$\sum y_j^2 = 7{,}264{,}525$
$\sum x_{1j}x_{2j} = 185{,}838$	$\sum x_{1j}y_j = 1{,}216{,}685$	$\sum x_{2j}y_j = 1{,}101{,}220$

9.4 EVALUACIÓN DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

Antes de utilizar una ecuación de regresión múltiple, es conveniente determinar primero si, de hecho, vale la pena utilizarla. Al estudiar la regresión lineal simple, se ha aprendido que puede evaluarse la utilidad de una ecuación de regresión considerando el coeficiente de determinación de la muestra y la pendiente estimada. Al evaluar la ecuación de regresión múltiple, la atención se centra en el *coeficiente de determinación múltiple* y los coeficientes de regresión parciales.

El coeficiente de determinación múltiple. En el capítulo 8 se estudió con bastante detalle el coeficiente de determinación. El concepto se extiende lógicamente hacia el caso de la regresión múltiple. Puede dividirse la variación total presente en los valores de *Y* en dos componentes: la variación explicada, que mide la cantidad de la variación total que es explicada por la superficie de regresión ajustada, y la variación inexplicada, que es aquella parte de la variación total que no es explicada por el ajuste de la superficie de regresión. La medida de la variación en cada caso es una suma de desviaciones elevadas al cuadrado. La variación total es la suma de las desviaciones al cuadrado de cada observación de *Y* a partir de la media de las observaciones y se designa por $\Sigma(y_j - \bar{y})^2$. La variación explicada, designada por $\Sigma(y_c - \bar{y})^2$, es la suma de las desviaciones al cuadrado de los valores calculados a partir de la media de los valores de *Y* observados. Esta suma de desviaciones al cuadrado a veces se conoce como *suma de cuadrados debida a la regresión.* La variación inexplicada, escrita como $\Sigma(y_j - y_c)^2$, es la suma de las desviaciones al cuadrado de las observaciones originales a partir de los valores calculados. Esta cantidad se conoce a veces como la *suma de cuadrados en torno a la regresión.* Puede resumirse la relación entre las tres sumas de cuadrados mediante la siguiente ecuación:

$$\sum(y_j - \bar{y})^2 = \sum(y_c - \bar{y})^2 + \sum(y_j - y_c)^2 \qquad (9.4.1)$$
$$SC_{\text{total}} = SC_{\text{exp.}} + SC_{\text{inexp.}}$$

suma de cuadrados total = suma de cuadrados explicada
+ suma de cuadrados inexplicada

Las sumas de cuadrados total, explicada e inexplicada, se calculan de la manera siguiente:

$$SC_{\text{total}} = \sum(y_j - \bar{y})^2 = \sum y_j^2 - (\sum y_j)^2/n \qquad (9.4.2)$$
$$SC_{\text{exp.}} = \sum(y_c - \bar{y})^2$$
$$= b_1\sum x'_{1j}y'_j + b_2\sum x'_{2j}y'_j + \cdots + b_k\sum x'_{kj}y'_j \qquad (9.4.3)$$
$$SC_{\text{inexp.}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{exp.}} \qquad (9.4.4)$$

Para el ejemplo ilustrativo, se tiene que (utilizando los datos de la tabla 9.3.2 y algunos cálculos anteriores)

$$SC_{\text{total}} = 23{,}775 - (559)^2/15 = 2942.93$$
$$SC_{\text{exp.}} = (.06)(272.27) + (1.05)(2368.40) = 2503.16$$
$$SC_{\text{inexp.}} = 2942.93 - 2503.16 = 439.77$$

El coeficiente de determinación múltiple, $R^2_{y.12\ldots k}$, se obtiene dividiendo la suma de cuadrados explicada entre la suma total de cuadrados. Es decir,

$$R^2_{y.12\ldots k} = \frac{\sum(y_c - \bar{y})^2}{\sum(y_j - \bar{y})^2} \qquad (9.4.5)$$

El subíndice $y.12 \ldots k$ indica que en el análisis Y se trata como la variable dependiente y las variables X, de X_1 a X_k, se tratan como las variables independientes. El valor de $R^2_{y.12\ldots k}$ indica qué proporción de la variación total en los valores de Y observados es explicada por la regresión de Y sobre $X_1, X_2, \ldots, X_k$. En otras palabras, puede decirse que $R^2_{y.12\ldots k}$ es una medida de la bondad del ajuste de la superficie de regresión. Esta cantidad es análoga a r^2, que se calculó en el capítulo 8.

Para el presente ejemplo, se tiene que

$$R^2_{y.12} = \frac{2503.16}{2942.93} = .85$$

Se dice que el 85 por ciento de la variación total en los valores de Y es explicada por el plano de regresión ajustado.

Para determinar si la regresión en conjunto es significativa, puede llevarse a cabo un análisis de variancia. Al hacerlo, se prueba la hipótesis nula de que $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$, es decir, que ninguna variable independiente tiene valor al explicar la variación en los valores de Y. La tabla ANDEVA general se muestra en la tabla 9.4.1. En esta tabla, CMR representa el cuadrado medio debido a la regresión y CME el cuadrado medio en torno a la regresión o, como algunas veces se conoce, el cuadrado medio de error.

Para el ejemplo ilustrativo, el análisis de variancia se muestra en la tabla 9.4.2.

Cuando se consulta la tabla J con 2 y 12 grados de libertad, se encuentra que la R.V. calculada de 34.15 es significativa al nivel de .005 (es decir, $p < .005$). Por lo tanto, se concluye que la regresión explica una proporción significativa de la variación total en Y. En otras palabras, se concluye que el plano ajustado da un buen ajuste de los datos.

Tabla 9.4.1 Tabla ANDEVA para la regresión múltiple.

Fuente	*SC*	*g.l.*	*CM*	*R.V.*
Debida a la regresión	$SC_{\text{exp.}}$	k	$CMR = SC_{\text{exp.}}/k$	CMR/CME
En torno a la regresión	$SC_{\text{inexp.}}$	$n - k - 1$	$CMR = SC_{\text{inexp.}}/n - k - 1$	
Total	SC_{total}	$n - 1$		

Tabla 9.4.2 Tabla ANDEVA para el ejemplo 9.3.1.

Fuente	*SC*	*g.l.*	*CM*	*R.V.*
Debida a la regresión	2503.16	2	1251.58	34.15
En torno a la regresión	439.77	12	36.65	
Total	2942.93	14		

Inferencias referentes a β's individuales. Un procedimiento alternativo para evaluar la intensidad de la relación lineal entre Y y las variables independientes es probar la hipótesis nula de que $\beta_i = 0$ contra la alternativa $\beta_i \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, k)$. La validez de este procedimiento descansa en las suposiciones enunciadas al principio: que, para cada combinación de valores de X_i, existe una subpoblación de valores de Y con distribución normal y variancia σ^2. Cuando se cumplen estas suposiciones, puede demostrarse que cada una de las estimaciones de la muestra, b_i, tiene distribución normal con media β_i y variancia $c_{ii}\sigma^2$. Dado que se desconoce σ^2, tiene que estimarse. Una estimación la proporciona el cuadrado medio en torno a la regresión, el cual se muestra en la tabla ANDEVA. En general, puede designarse a esta cantidad como $s^2_{y.12\ldots k}$. Para el ejemplo ilustrativo se tiene, que, a partir de la tabla 9.4.2, $s^2_{y.12} = 36.65$ y $s_{y.12} = 6.05$. Sin embargo, debe divagarse brevemente en este punto para explicar el cálculo de c_{ii}.

Cálculo de los c_{ii}. Los valores c_{ii} se conocen como *multiplicadores de Gauss.* Para quienes están familiarizados con el álgebra de matrices, puede ser ilustrativo señalar que pueden obtenerse invirtiendo la matriz de las sumas de los cuadrados y productos cruzados que pueden construirse utilizando los términos de la izquierda de las ecuaciones normales dadas en la ecuación 9.3.5. Las c's pueden encontrarse sin utilizar el álgebra de matrices resolviendo las siguientes dos series de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} c_{11}\sum x'^2_{1j} + c_{12}\sum x'_{1j}x'_{2j} &= 1 \\ c_{11}\sum x'_{1j}x'_{2j} + c_{12}\sum x'^2_{2j} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.4.6)$$

$$\left.\begin{aligned} c_{21}\sum x'^2_{1j} + c_{22}\sum x'_{1j}x'_{2j} &= 0 \\ c_{21}\sum x'_{1j}x'_{2j} + c_{22}\sum x'^2_{2j} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (9.4.7)$$

En las ecuaciones anteriores, $c_{12} = c_{21}$. Nótese también que las sumas de cuadrados y los productos cruzados son los mismos que los encontrados en las ecuaciones normales (ecuación 9.3.5).

Cuando el análisis comprende más de dos variables independientes, las c's se obtienen desarrollando las ecuaciones 9.4.6 y 9.4.7, de modo que haya una serie de ecuaciones para cada variable independiente. Cada conjunto de ecuaciones contiene también tantas ecuaciones individuales como variables independientes se tengan. El 1 se coloca a la derecha del signo de igualdad en todas las ecuaciones que contengan un término de la forma $c_{ii}\Sigma x_i'^2$. Por ejemplo, en la ecuación 9.4.6, un 1 está a la derecha del signo de igualdad en la ecuación que contiene a $c_{11}\Sigma x_{1j}'^2$. Ezekiel y Fox[4] han escrito las ecuaciones para el caso de tres variables independientes y, al igual que Snedecor y Cochran,[1] Steel y Torrie[2] y Anderson y Bancroft,[3] han demostrado el uso del método abreviado de Doolittle[5] para obtener las c's, así como los coeficientes de regresión. Anderson y Bancroft[3] dan un ejemplo numérico para cuatro variables independientes.

Cuando se sustituyen los datos del ejemplo ilustrativo en las ecuaciones 9.4.6 y 9.4.7, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} 34.93c_{11} + 257.40c_{12} &= 1 \\ 257.40c_{11} + 2241.60c_{12} &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} 34.93c_{21} + 257.40c_{22} &= 0 \\ 257.40c_{21} + 2241.60c_{22} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

La solución de estas ecuaciones da

$$c_{11} = .1861$$
$$c_{12} = c_{21} = -.0213711$$
$$c_{22} = .0029001$$

Ahora se puede regresar al problema de los procedimientos de inferencia referentes a los coeficientes individuales de regresión parcial. Para probar la hipótesis nula de que β_i es igual a algún valor particular, por ejemplo, β_{i0}, puede calcularse la siguiente estadística t:

$$t = \frac{b_i - \beta_{i0}}{s_{bi}} \tag{9.4.8}$$

donde los grados de libertad son iguales a $n - k - 1$, y

$$s_{bi} = s_{y.12\ldots k}\sqrt{c_{ii}} \tag{9.4.9}$$

El error estándar de la diferencia entre dos coeficientes de regresión parciales está dado por la expresión

$$s_{(bi-bj)} = \sqrt{s^2_{y.12\ldots k}(c_{ii} + c_{jj} - 2c_{ij})} \tag{9.4.10}$$

de modo que puede probarse $H_0: \beta_i = \beta_j$ al calcular

$$t = \frac{b_i - b_j}{s_{(bi-bj)}} \tag{9.4.11}$$

el cual tiene $n - k - 1$ grados de libertad. Los intervalos de confianza para β_i y $\beta_i - \beta_j$ pueden construirse en la forma habitual utilizando un valor de la distribución t para el factor de confiabilidad y los errores estándar dados anteriormente.

Para el ejemplo de la duración de la hospitalización, se probará la hipótesis nula de que el número de admisiones previas carece de importancia para predecir la duración de la hospitalización. Se procede como sigue:

$$H_0: \beta_1 = 0$$
$$H_A: \beta_1 \neq 0$$
$$\text{Sea } \alpha = .05$$
$$t = \frac{b_1 - 0}{s_{b_1}} = \frac{.06}{6.05\sqrt{.1861}} = \frac{.06}{2.609928} = .023$$

No se rechaza la hipótesis nula, ya que el valor calculado de t, .023, está entre -2.1788 y $+2.1788$, los valores críticos de t para una prueba bilateral cuando $\alpha = .05$ y se tienen 12 grados de libertad. Se concluye entonces que puede no haber una relación lineal significativa entre Y y X_1 cuando X_2 permanece constante. Al menos, estos datos no proporcionan evidencia de dicha relación. En otras palabras, los datos de la presente muestra no proporcionan evidencia suficiente que indique que el número de admisiones previas, cuando se utiliza en una ecuación de regresión junto con la edad, es una variable útil para predecir la duración de la hospitalización. [Para esta prueba, $p > 2(.10) = .20.$]

Se realizará ahora una prueba similar para el segundo coeficiente de regresión parcial, β_2.

$$H_0: \beta_2 = 0$$
$$H_A: \beta_2 \neq 0$$
$$\alpha = .05$$

$$t = \frac{b_2 - 0}{s_{b_2}} = \frac{1.05}{6.05\sqrt{.0029001}} = \frac{1.05}{.325808} = 3.223$$

En este caso, se rechaza la hipótesis nula, ya que 3.223 es mayor que 2.1788. Se concluye que existe una relación lineal entre X_2 y Y cuando X_1 permanece constante, y que la edad, utilizada de esta manera, es una variable útil para predecir la duración de la hospitalización. [Para esta prueba, $p < 2(.005) = .01.$]

Cuando el investigador ha llegado a concluir que un coeficiente de regresión parcial no es de 0, puede ser que se interese en obtener un intervalo para este β_i. Un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para un β_i está dado por la expresión

$$b_i \pm t_{(1-\alpha/2, n-k-1)} s_{y.12\ldots k} \sqrt{c_{ii}}$$

Para el ejemplo ilustrativo, puede calcularse el siguiente intervalo de confianza del 95 por ciento para β_2:

$$1.05 \pm (2.1788)(6.05)\sqrt{.0029001}$$
$$1.05 \pm .71$$
$$.34,\ 1.76$$

Pueden darse a este intervalo las interpretaciones probabilista y práctica habituales. Se tiene el 95 por ciento de confianza de que β_2 esté contenido en el intervalo de .34 a 1.75 ya que, al repetir el muestreo, el 95 por ciento de los intervalos que pueden construirse de esta forma incluirán el parámetro verdadero.

Debe tenerse conocimiento de los problemas que se presentan al llevar a cabo pruebas de hipótesis múltiples y al construir intervalos de confianza múltiples a partir de los mismos datos de la muestra. El efecto sobre α de llevar a cabo pruebas de hipótesis múltiples a partir de los mismos datos se estudia en la sección 7.6. Surge un problema similar cuando se desean construir intervalos de confianza para dos o más coeficientes de regresión parciales. Los intervalos no serán independientes, de modo que, en general, no se aplica el coeficiente de confianza tabulado. En otras palabras, todos estos intervalos no serían intervalos de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento. Durand[6] da un procedimiento que puede seguirse cuando se desean obtener intervalos de confianza para más de un coeficiente de regresión parcial.

Otro problema que a veces se encuentra en la aplicación de la regresión múltiple es la incompatibilidad en los resultados de las diferentes pruebas de significación que pueden llevarse a cabo. En un problema dado, para cierto nivel de significación, puede observarse una de las siguientes situaciones.

1. R^2 y todos los b_i significativos.
2. R^2 y algunos pero no todos los b_i significativos.
3. R^2 significativo pero ningún b_i significativo.
4. Todos los b_i significativos pero no R^2.
5. Algunos de los b_i significativos, pero no todos ni R^2.
6. Ni R^2 ni ningún b_i significativo.

Geary y Leser[7] identifican estas seis situaciones y, después de señalar que las situaciones 1 y 6 no presentan problema alguno (ya que ambas implican resultados compatibles), explican con cierto detalle cada una de las demás situaciones.

Nótese que la situación 2 existe en el ejemplo ilustrativo, donde se tiene un R^2 significativo pero sólo uno de los dos coeficientes de regresión significativos. Geary y Leser[7] señalan que esta situación es muy común, especialmente cuando se ha incluido un gran número de variables independientes en la ecuación de regresión, y que el único problema es decidir si se eliminan o no del análisis una o más de las variables asociadas a coeficientes no significativos.

Ejercicios

9.4.1 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.1. *a*) Calcule el coeficiente de determinación múltiple; *b*) lleve a cabo un análisis de variancia; *c*) pruebe la significación de cada $b_i (i > 0)$. Sea $\alpha = .05$

para todas las pruebas de significación. Determine el valor p para todas las pruebas.

9.4.2 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.2. Haga el análisis sugerido en 9.4.1.

9.4.3 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.3. Haga el análisis sugerido en 9.4.1.

9.4.4 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.4. Haga el análisis sugerido en 9.4.1.

9.4.5 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.5. Haga el análisis sugerido en 9.4.1.

9.5 USO DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

Como se aprendió en el capítulo anterior, puede utilizarse una ecuación de regresión para obtener un valor calculado de Y, y_c, cuando se da un valor particular de X. Asimismo, puede utilizarse la ecuación de regresión múltiple para obtener un valor y_c cuando se dan valores particulares de las dos o más variables X presentes en la ecuación.

Tal como fue el caso en la regresión lineal simple, en la regresión múltiple puede interpretarse un valor y_c en una de dos formas. Primero, y_c puede interpretarse como una estimación de la media de la subpoblación de valores de Y que se supone existen para combinación particulares de los valores X_i. Con esta interpretación, y_c es una estimación y, cuando se utiliza con este fin, se considera la ecuación como una *ecuación de estimación.* Con la segunda interpretación, y_c es el valor más probable que tomará Y para los valores dados de las X_i. En este caso, y_c recibe el nombre de *valor pronosticado* de Y, y la ecuación se conoce como *ecuación de predicción.* En ambos casos, pueden construirse intervalos en torno al valor de y_c cuando se cumplen las suposiciones de la sección 9.2. Cuando y_c se interpreta como una estimación de la media de una población, el intervalo se conoce como *intervalo de confianza* y, cuando se interpreta como un valor pronosticado de Y, el intervalo recibe el nombre de *intervalo de predicción.* Véase ahora cómo se construye cada uno de estos intervalos.

Intervalo de confianza para la media de una subpoblación de valores de Y dados valores particulares de las X_i. Se ha visto que puede construirse un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para un parámetro mediante el procedimiento general de sumar y restar del estimador una cantidad igual al factor de confiabilidad que corresponda a $1 - \alpha$ multiplicado por el error estándar del estimador. Se ha visto también que, en esta situación, el estimador es

$$y_c = b_0 + b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j} + \cdots + b_k x_{kj} \tag{9.5.1}$$

El error estándar de este estimador, para el caso de dos variables independientes, está dado por la expresión

$$s_{y.12}\sqrt{\frac{1}{n} + c_{11}x'^2_{1j} + c_{22}x'^2_{2j} + 2c_{12}x'_{1j}x'_{2j}} \tag{9.5.2}$$

donde los valores x'_{ij} son valores particulares de las X_i expresados como desviaciones de su media. La expresión 9.5.2 se generaliza fácilmente para cualquier número de variables independientes. Véase, por ejemplo, a Anderson y Bancroft.[3] El intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para el caso de tres variables es entonces el que sigue:

$$y_c \pm t_{(1-\alpha/2,\, n-k-1)} s_{y.12}\sqrt{\frac{1}{n} + c_{11}x'^2_{1j} + c_{22}x'^2_{2j} + 2c_{12}x'_{1j}x'_{2j}} \tag{9.5.3}$$

Para el ejemplo ilustrativo, supóngase que se desea estimar la duración media de la hospitalización para todos los pacientes de 25 años con dos admisiones previas. En otras palabras, dados $x_{1j} = 2$ y $x_{2j} = 25$, ¿cuál es la estimación de la media de las subpoblaciones correspondientes de los valores de Y? Para obtener una estimación puntual, se sustituyen $x_{1j} = 2$ y $x_{2j} = 25$ en la ecuación 9.3.8:

$$\begin{aligned} y_c &= 2.08 + .06(2) + 1.05(25) \\ &= 28.45 \end{aligned}$$

Para calcular el error estándar, se obtiene primero $x'_{1j} = (x_{1j} - \bar{x}_1) = (2 - 1.93) = .07$ y $x'_{2j} = (x_{2j} - \bar{x}_2) = (25 - 33.40) = -8.40$. Sustituyendo éstos y otros valores apropiados en la expresión 9.5.3, se tiene que

$$28.45 \pm (2.1788)(6.05)$$
$$\times \sqrt{\tfrac{1}{15} + (.1861)(.07)^2 + (.0029001)(-8.40)^2 + 2(-.0213711)(.07)(-8.40)}$$
$$28.45 \pm 7.19$$
$$21.26,\ 35.64$$

Este intervalo se interpreta en las formas habituales. Se tiene el 95 por ciento de confianza de que el intervalo de 21.26 a 35.64 incluya la media de la subpoblación de los valores de Y para la combinación especificada de los valores X_i, ya que este parámetro quedaría incluido en aproximadamente el 95 por ciento de los intervalos que pueden construirse en la forma mostrada.

Intervalo de predicción para un valor particular de Y dados valores particulares de las X_i. Cuando y_c se interpreta como el valor más probable que toma Y cuando se observan valores particulares de las X_i, puede construirse un intervalo de predicción de la misma forma en que se construyó el intervalo de confianza. La única diferencia en los dos es el error estándar. El error estándar de la predicción es un poco mayor que el error estándar de la estimación, lo cual hace que el intervalo de predicción sea más amplio que el intervalo de confianza.

El error estándar de la predicción para el caso de tres variables está dado por la expresión

$$s_{y.12}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + c_{11}x_{1j}'^2 + c_{22}x_{2j}'^2 + 2c_{12}x_{1j}'x_{2j}'} \tag{9.5.3}$$

de modo que el intervalo de predicción del $100(1-\alpha)$ por ciento es

$$y_c \pm t_{(1-\alpha/2,\, n-k-1)} s_{y.12}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + c_{11}x_{1j}'^2 + c_{22}x_{2j}'^2 + 2c_{12}x_{1j}'x_{2j}'} \tag{9.5.4}$$

Supóngase, para el ejemplo ilustrativo, que se admite un paciente de 25 años con dos admisiones previas. ¿Por cuánto tiempo es probable que quede hospitalizado? La mejor predicción puntual se encuentra al calcular y_c. Es decir,

$$\begin{aligned} y_c &= 2.08 + .06(2) + 1.05(25) \\ &= 28.45 \end{aligned}$$

el mismo valor obtenido anteriormente cuando y_c se interpretó como una estimación puntual de la media de la subpoblación.

Puede obtenerse el siguiente intervalo de predicción del 95 por ciento utilizando la expresión 9.5.4:

$$28.45 \pm (2.1788)(6.05)$$
$$\times \sqrt{1 + \tfrac{1}{15} + (.1861)(.07)^2 + (.0029001)(-8.40)^2 + 2(-.0213711)(.07)(-8.40)}$$
$$28.45 \pm 15.01$$
$$13.44, 43.46$$

Se tiene el 95 por ciento de confianza de que dicho paciente permanezca hospitalizado entre 13.44 y 43.46 días.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes ejercicios, calcule el valor de y_c y construya *a*) un intervalo de confianza del 95 por ciento y *b*) un intervalo de predicción del 95 por ciento para los valores especificados de las X_i.

9.5.1 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.1 y sea $x_{1j} = 5$ y $x_{2j} = 3$.
9.5.2 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.2 y sea $x_{1j} = 2$ y $x_{2j} = 20$.
9.5.3 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.3 y sea $x_{1j} = 5$ y $x_{2j} = 6$.
9.5.4 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.4 y sea $x_{1j} = 1$ y $x_{2j} = 2$.
9.5.5 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.5 y sea $x_{1j} = 90$ y $x_{2j} = 80$.

9.6 EL MODELO DE CORRELACIÓN

En el capítulo anterior se señaló que, mientras que el análisis de regresión se refiere a la forma de la relación entre las variables, el objetivo del análisis de correlación es adquirir conocimientos acerca de la intensidad de la relación. Esto ocurre también en el caso de varias variables, y en esta sección se investigan los métodos para medir la intensidad de la relación entre varias variables. Sin embargo, deben definirse primero el modelo y las suposiciones sobre los cuales se basa el análisis.

Puede escribirse el modelo de correlación como

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \cdots + \beta_k x_{kj} + e_j \tag{9.6.1}$$

Donde y_j es un valor típico de la población de valores de la variable, Y, los β's los coeficientes de regresión definidos en la sección 9.2 y los x_{ij} los valores particulares (conocidos) de las variables aleatorias X_i. Este modelo es semejante al modelo de regresión múltiple, pero existe una diferencia importante entre ellos. En el modelo de regresión múltiple, dado en la ecuación 9.2.1, las X_i son variables no aleatorias, pero en el modelo de correlación múltiple, las X_i son variables aleatorias. En otras palabras, en el modelo de correlación existe una distribución conjunta de Y y las X_i conocida como *distribución multivariada.* En este modelo, las variables ya no se consideran como dependientes o independientes, ya que, lógicamente, son intercambiables y cualquiera de las X_i puede desempeñar la función de Y.

Típicamente, se extraen muestras aleatorias de unidades de asociación de una población de interés y se llevan a efecto mediciones de Y y las X_i.

Un plano o hiperplano de mínimos cuadrados se ajusta a los datos de la muestra a través de los métodos descritos en la sección 9.3 y pueden hacerse los mismos usos de la ecuación resultante. Pueden hacerse inferencias acerca de la población de la cual se extrajo la muestra si puede suponerse que la distribución fundamental es normal, es decir, si puede suponerse que la distribución conjunta de Y y las X_i es una *distribución normal multivariada.* Además, pueden calcularse medias muestrales del grado de relación entre las variables y, con la suposición de que el muestreo se realiza a partir de una distribución de este tipo, pueden estimarse los parámetros correspondientes por medio de intervalos de confianza y pueden llevarse a cabo pruebas de hipótesis. Específicamente, puede calcularse una estimación del *coeficiente de correlación múltiple* que mide la dependencia entre Y y las X_i. Esta es una extensión directa del concepto de correlación entre dos variables que se estudió en el capítulo 8. Pueden calcularse también los *coeficientes de correlación parcial,* que miden la intensidad de la relación entre dos variables cualesquiera cuando se ha eliminado el efecto de todas las demás variables.

Para ilustrar los conceptos y técnicas del análisis de correlación, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.6.1

Las mediciones que se presentan en la tabla 9.6.1 se hicieron en 11 hombres aparentemente normales con edades entre 14 y 24 años. El investigador que reunió los datos deseaba saber la naturaleza e intensidad de la relación entre las tres variables.

Tabla 9.6.1 Medidas tomadas en 11 hombres aparentemente normales con edades entre 14 y 24 años.

Colesterol en suero mg/100 cc (Y)	*Peso en kilogramos (X_1)*	*Presión sistólica sanguínea (X_2)*
162.2	51.0	108
158.0	52.9	111
157.0	56.0	115
155.0	56.5	116
156.0	58.0	117
154.1	60.1	120
169.1	58.0	124
181.0	61.0	127
174.9	59.4	122
180.2	56.1	121
174.0	61.2	125

El coeficiente de correlación múltiple. Como primer paso al analizar las relaciones entre las variables, debe observarse el coeficiente de correlación múltiple.

El coeficiente de correlación múltiple es la raíz cuadrada del coeficiente de determinación y, en consecuencia, el valor muestral puede calcularse sacando la raíz cuadrada de la ecuación 9.4.5. Es decir,

$$R_{y.12\ldots k} = \sqrt{R^2_{y.12\ldots k}} = \sqrt{\frac{\sum(y_c - \bar{y})^2}{\sum(y_j - \bar{y})^2}} \qquad (9.6.2)$$

El numerador del término bajo el radical en la ecuación 9.6.2, que es la suma de cuadrados explicada, está dado por la ecuación 9.4.3 que, como se recordará, contiene a b_1 y b_2, los coeficientes de regresión parcial de la muestra. Estos se calculan por los métodos de la sección 9.3.

Primero, deben calcularse las diversas sumas, sumas de cuadrados y sumas de productos cruzados. Se procede de la siguiente manera:

$$\sum x_{1j} = 630.20 \qquad \sum x_{2j} = 1306.00 \qquad \sum y_j = 1821.50$$
$$\sum x_{1j}^2 = 36{,}209.68 \qquad \sum x_{2j}^2 = 155{,}410.00 \qquad \sum y_j^2 = 302{,}723.51$$
$$\sum x_{1j}x_{2j} = 74{,}995.80 \qquad \sum x_{1j}y_j = 104{,}485.19 \qquad \sum x_{2j}y_j = 216{,}682.00$$

Cuando se calculan las sumas de cuadrados y productos cruzados de

$$y'_j = (y_j - \bar{y})$$
$$x'_{1j} = (x_{1j} - \bar{x}_1) \qquad \text{y} \qquad x'_{2j} = (x_{2j} - \bar{x}_2)$$

se tiene que

$$\sum x'^2_{1j} = 36{,}209.68 - (630.20)^2/11 = 104.95$$
$$\sum x'^2_{2j} = 155{,}410.00 - (1306.00)^2/11 = 352.18$$
$$\sum y'^2_j = 302{,}723.51 - (1821.5)^2/11 = 1099.67$$
$$\sum x'_{1j}x'_{2j} = 74{,}995.8 - (630.20)(1306.00)/11 = 173.87$$
$$\sum x'_{1j}y'_j = 104{,}485.19 - (630.20)(1821.50)/11 = 129.80$$
$$\sum x'_{2j}y'_j = 216{,}682.00 - (1306.00)(1821.50)/11 = 420.27$$

Las ecuaciones normales, por las ecuaciones 9.3.9, son las siguientes

$$104.95b_1 + 173.87b_2 = 129.80$$
$$173.87b_1 + 352.18b_2 = 420.27$$

La solución simultánea de estas ecuaciones da $b_1 = -4.06$, $b_2 = 3.20$. b_0 se obtiene sustituyendo los valores apropiados en la ecuación 9.3.11:

$$b_0 = 165.59 - (-4.06)(57.29) - (3.20)(118.73) = 18.25$$

La ecuación de mínimos cuadrados es entonces,

$$y_c = 18.25 - 4.06x_{1j} + 3.20x_{2j}$$

Esta ecuación puede utilizarse con fines de estimación y predicción y puede evaluarse por medio de los métodos descritos en la sección 9.4.

Ahora se tienen las cantidades necesarias para calcular el coeficiente de correlación múltiple. Se calcula primero la suma de cuadrados explicada mediante la ecuación 9.4.3:

$$SC_{\text{exp.}} = (-4.06)(129.80) + (3.20)(420.27)$$
$$= 817.876$$

La suma de cuadrados total por la ecuación 9.4.2 es

$$SC_{\text{total}} = 302{,}723.51 - (1821.5)^2/11$$
$$= 1{,}099.669$$

El coeficiente de determinación múltiple es entonces,

$$R^2_{y.12} = \frac{817.876}{1099.669} = .7437$$

y el coeficiente de correlación múltiple es

$$R_{y.12} = \sqrt{.7437} = .86$$

$R_{y.12}$ se interpreta como una medida de la correlación entre el nivel de colesterol en suero, el peso y la presión sistólica sanguínea en la muestra de hombres aparentemente normales con edades entre 14 y 24 años. Si los datos constituyen una muestra aleatoria de la población de dichas personas, puede utilizarse $R_{y.12}$ como una estimación de $\rho_{y.12}$, el coeficiente de correlación múltiple verdadero de la población. $R_{y.12}$ puede interpretarse también como el coeficiente de correlación simple entre y_i y y_c, respectivamente, los valores observado y calculado de la variable "dependiente". La correspondencia perfecta entre los valores observados y calculados de Y dará por resultado un coeficiente de correlación de 1, mientras que la falta completa de una relación lineal entre dichos valores da un coeficiente de correlación de 0. El coeficiente de correlación múltiple siempre tiene signo positivo.

Puede probarse la hipótesis nula $\rho_{y.12\ldots k} = 0$ al calcular

$$F = \frac{R^2_{y.12\ldots k}}{1 - R^2_{y.12\ldots k}} \cdot \frac{n-k-1}{k} \tag{9.6.3}$$

El valor numérico obtenido a partir de la ecuación 9.6.3 se compara con el valor tabulado de F con k y $n - 1$ grados de libertad. El lector recordará que esto es idéntico a la prueba de H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ descrita en la sección 9.4.

Para este ejemplo, se probará la hipótesis nula $p_{y.12} = 0$ contra la alternativa $\rho_{y.12} \neq 0$. Se calcula

$$F = \frac{.7437}{(1 - .7437)} \cdot \frac{(11 - 2 - 1)}{2} = 11.61$$

Dado que 11.61 es mayor que 11.04, $p < .005$, de modo que puede rechazarse la hipótesis nula al nivel de significación de .005 y concluir que el nivel de colesterol en suero está linealmente correlacionado con el peso y la presión sistólica sanguínea en la población muestreada.

Pueden encontrarse más comentarios sobre el significado de los coeficientes de correlación múltiple observados en Ezekiel y Fox,[4] quienes analizan un trabajo sobre el tema escrito por R. A. Fisher[8] y presentan gráficas para construir intervalos de confianza cuando el número de variables es de ocho o menos. Kramer[9] presenta tablas para construir límites de confianza cuando el número de variables es mayor de ocho.

Correlación parcial. Es posible que el investigador desee tener una medida de la intensidad de la relación lineal entre dos variables cuando se ha eliminado la influencia de las variables restantes. Dicha medida la proporciona el coeficiente de *correlación parcial*. Por ejemplo, el coeficiente de correlación parcial, $\rho_{y1.2}$, es una medida de la correlación entre Y y X_1 cuando X_2 permanece constante.

Los coeficientes de correlación parcial pueden calcularse a partir de los *coeficientes de correlación simple*. Estos últimos miden la correlación entre dos variables cuando no se ha hecho esfuerzo alguno por controlar otras variables. En otras palabras, son los coeficientes para cualquier par de variables que se obtendrían mediante los métodos de correlación simple tratados en el capítulo 8.

Para tres variables, pueden obtenerse estos coeficientes de correlación simple:

r_{y1}, la correlación simple entre Y y X_1,
r_{y2}, la correlación simple entre Y y X_2,
r_{12}, la correlación simple entre X_1 y X_2.

Estos pueden calcularse como sigue:

$$r_{y1} = \sum x'_{1j}y'_j / \sqrt{\sum x'^2_{1j} \sum y'^2_j} \tag{9.6.4}$$

$$r_{y2} = \sum x'_{2j}y'_j / \sqrt{\sum x'^2_{2j} \sum y'^2_j} \tag{9.6.5}$$

$$r_{12} = \sum x'_{1j}x'_{2j} / \sqrt{\sum x'^2_{1j} \sum x'^2_{2j}} \tag{9.6.6}$$

Para el ejemplo ilustrativo, pueden utilizarse las cantidades previamente calculadas para obtener

$$r_{y1} = 129.80/\sqrt{(104.95)(1099.67)} = .382$$
$$r_{y2} = 420.27/\sqrt{(352.18)(1099.67)} = .675$$
$$r_{12} = 173.87/\sqrt{(104.95)(352.18)} = .904$$

Los coeficientes de correlación parcial de la muestra que pueden calcularse en el caso de tres variables son los siguientes

1. La correlación parcial entre Y y X_1 cuando X_2 se mantiene constante:

$$r_{y1.2} = (r_{y1} - r_{y2}r_{12})/\sqrt{(1 - r_{y2}^2)(1 - r_{12}^2)} \tag{9.6.7}$$

2. La correlación parcial entre Y y X_2 cuando X_1 se mantiene constante:

$$r_{y2.1} = (r_{y2} - r_{y1}r_{12})/\sqrt{(1 - r_{y1}^2)(1 - r_{12}^2)} \tag{9.6.8}$$

3. La correlación parcial entre X_1 y X_2 cuando Y se mantiene constante:

$$r_{12.y} = (r_{12} - r_{y1}r_{y2})/\sqrt{(1 - r_{y1}^2)(1 - r_{y2}^2)} \tag{9.6.9}$$

Si se utilizan los coeficientes de correlación simple ya calculados, se obtienen los siguientes coeficientes de correlación parcial para el ejemplo ilustrativo:

$$r_{y1.2} = [.382 - (.675)(.904)]/\sqrt{(1 - .675^2)(1 - .904^2)} = -.723$$
$$r_{y2.1} = [.675 - (.382)(.904)]/\sqrt{(1 - .382^2)(1 - .904^2)} = .834$$
$$r_{12.y} = [.904 - (.382)(.675)]/\sqrt{(1 - .382^2)(1 - .675^2)} = .948$$

Puede probarse la hipótesis nula de que el coeficiente de correlación parcial de la población que corresponde a cualquiera de los anteriores coeficientes es 0 por medio de la prueba t. Por ejemplo, para probar $H_0: \rho_{y1.2\ldots k} = 0$, se calcula

$$t = r_{y1.2\ldots k}\sqrt{\frac{n - k - 1}{1 - r_{y1.2\ldots k}^2}} \tag{9.6.10}$$

que está distribuido como la t de Student con $n - k - 1$ grados de libertad.

A continuación se ilustra el procedimiento para el ejemplo ilustrativo probando $H_0: \rho_{12.y} = 0$ contra la alternativa $H_A: \rho_{12.y} \neq 0$. La t calculada es

$$t = .948 \sqrt{\frac{11 - 2 - 1}{1 - .948^2}}$$

$$= 8.425$$

Dado que la t calculada de 8.425 es mayor que la t tabulada de 3.5554 para 8 grados de libertad y $\alpha = .01$ para una prueba bilateral, puede rechazarse H_0 al nivel de significación de .01 y concluir que existe una correlación significativa entre la presión sistólica sanguínea y el peso cuando el nivel de colesterol en suero se mantiene constante. Las pruebas de significación para los otros coeficientes de correlación parcial se dejarán como ejercicio para el lector.

Aun cuando la situación considerada del análisis de correlación se limita al caso de tres variables, los conceptos y técnicas se aplican lógicamente al caso de cuatro o más variables. El número y complejidad de los cálculos aumentan rápidamente a medida que aumenta el número de variables.

Ejercicios

9.6.1 Se obtuvieron los siguientes datos de 12 varones con edades

	Estatura (Y)	*Longitud del radio* (X_1)	*Longitud del fémur* (X_2)
	149.0	21.00	42.50
	152.0	21.79	43.70
	155.7	22.40	44.75
	159.0	23.00	46.00
	163.3	23.70	47.00
	166.0	24.30	47.90
	169.0	24.92	48.95
	172.0	25.50	49.90
	174.5	25.80	50.30
	176.1	26.01	50.90
	176.5	26.15	50.85
	179.0	26.30	51.10
Total	1992.1	290.87	573.85

$\sum x_{1j}^2 = 7087.6731$ $\quad\sum x_{2j}^2 = 27541.8575$ $\quad\sum y_j^2 = 331851.09$

$\sum x_{1j}x_{2j} = 13970.5835$ $\quad\sum x_{1j}y_j = 48492.886$ $\quad\sum x_{2j}y_j = 95601.09$

entre 12 y 18 años (todas las medidas están en centímetros):

a) Encuentre el coeficiente de correlación múltiple de la muestra y pruebe la hipótesis nula de que $\rho_{y.12} = 0$

b) Encuentre cada uno de los coeficientes de correlación parcial y pruebe cada uno respecto al nivel de significación. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

c) Determine el valor p para cada prueba.

d) Saque sus conclusiones.

9.6.2 Los siguientes datos se recopilaron de 15 muchachas obesas.

	Peso en kilogramos (Y)	*Peso del cuerpo delgado* (X_1)	*Ingestión media diaria de calorías* (X_2)
	79.2	54.3	2670
	64.0	44.3	820
	67.0	47.8	1210
	78.4	53.9	2678
	66.0	47.5	1205
	63.0	43.0	815
	65.9	47.1	1200
	63.1	44.0	1180
	73.2	44.1	1850
	66.5	48.3	1260
	61.9	43.5	1170
	72.5	43.3	1852
	101.1	66.4	1790
	66.2	47.5	1250
	99.9	66.1	1789
Total	1087.9	741.1	22739

$\sum x_{1j}^2 = 37{,}439.95$ $\quad \sum x_{2j}^2 = 39{,}161{,}759$ $\quad \sum y_j^2 = 81{,}105.63$

$\sum x_{1j}x_{2j} = 1{,}154{,}225.2$ $\quad \sum x_{1j}y_j = 55{,}021.31$ $\quad \sum x_{2j}y_j = 1{,}707{,}725.3$

a) Encuentre el coeficiente de correlación múltiple y pruébelo respecto al nivel de significación.

b) Encuentre cada uno de los coeficientes de correlación parcial y pruebe cada uno respecto al nivel de significación. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.

c) Determine el valor p para cada prueba.

d) Saque sus conclusiones.

9.6.3 Utilice como referencia el ejercicio 9.3.5. Suponga que los datos se ajustan al modelo de correlación.

a) Calcule el coeficiente de correlación múltiple y pruébelo respecto al nivel de significación.
b) Calcule cada uno de los coeficientes de correlación parcial y pruebe cada uno respecto al nivel de significación. Sea $\alpha = .05$ para todas las pruebas.
c) Determine el valor p para cada prueba.
d) ¿Cuáles son sus conclusiones?

9.6.4 Utilice como referencia el ejemplo 9.6.1. Pruebe $r_{y1.2}$ y $r_{y2.1}$ para el nivel de significación de .05. Determine el valor p para cada prueba.

9.7 ELECCIÓN DE VARIABLES INDEPENDIENTES PARA LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

Uno de los problemas más tediosos en el uso del análisis de regresión múltiple es decidir qué variables independientes deben incluirse en la ecuación. En la mayoría de los casos, la decisión final es el resultado de consideraciones tanto estadísticas como no estadísticas.

En las etapas iniciales de la determinación de la ecuación de regresión, el investigador se guiará por lo que sepa respecto a las variables relevantes y las que probablemente serán más útiles para los fines de predicción y estimación. Tomará también en cuenta los costos relativos y la facilidad para obtener las mediciones correspondientes.

En esta era de las computadoras, el volumen y complejidad de los cálculos relacionados con un gran número de variables no plantean el problema que alguna vez provocaron. Aun así, por lo general resulta conveniente (particularmente desde el punto de vista del costo y de la conveniencia para obtener las mediciones) incluir en la ecuación final menos variables independientes de las que se tengan. Es en este punto donde el investigador puede utilizar el análisis estadístico con el fin de que pueda llegar a una decisión. Se pueden seguir varios procedimientos. El método más completo, pero también el más tedioso y tardado incluso con la ayuda de una computadora, es el de realizar la regresión Y sobre todo subconjunto de las X_i, es decir, se realiza la regresión de Y sobre cada X, a continuación sobre cada pareja de X's, después sobre cada grupo de tres X's, y así sucesivamente. La mejor de estas ecuaciones de regresión, de acuerdo con algún criterio estadístico, será la seleccionada, a menos que alguna consideración no estadística, como el costo, necesite un ajuste. Debido a la magnitud de los cálculos, este método no se utiliza con frecuencia.

Un segundo procedimiento, llamado método de ascenso o hacia adelante, consiste en introducir variables independientes, una a la vez, en la regresión y, en cada etapa, evaluar estadísticamente la "bondad" de la ecuación. El procedimiento continúa hasta que, de acuerdo con algún criterio estadístico, se obtiene una ecuación satisfactoria.

Un tercer método, llamado método de descenso o hacia atrás, es lo opuesto al método anterior. Mediante este método, se lleva a cabo la regresión de Y sobre todas las X_i y se eliminan entonces las variables independientes, una a la vez, hasta que se haya obtenido una ecuación satisfactoria.

Para más información acerca de estos y otros métodos para determinar qué variables independientes deben incluirse en el análisis se pueden consultar los libros y artículos escritos por Allen,[10] Beale y colaboradores,[11] Draper y Smith,[12] Garside,[13] Gorman y Toman,[14] Hocking y Leslie,[15] Larson y Bancroft,[16] Lindley,[17] Schultz y Goggans,[18] Smillie,[19] Sprent[20] y Summerfield y Lubin.[21]

9.8 RESUMEN

En este capítulo se examina la manera en que los conceptos y técnicas de los análisis de regresión lineal simple y de correlación se aplican al caso de varias variables. Se presenta e ilustra el método de los mínimos cuadrados para obtener la ecuación de regresión. Este capítulo trata también del cálculo de las medidas descriptivas, pruebas de significación y los usos que se hacen de la ecuación de regresión múltiple. Además, se describen los métodos y conceptos del análisis de correlación, incluyendo la correlación parcial. Para quienes deseen ampliar sus conocimientos acerca de los análisis de regresión y correlación múltiples, las referencias que se dan al final del capítulo proporcionan un buen principio.

Cuando no se satisfacen las suposiciones que sirven de fundamento para los métodos de regresión y correlación presentados en este y los anteriores capítulos, el investigador debe utilizar técnicas alternativas. Una alternativa es utilizar un método no paramétrico, como el que describe Daniel.[22, 23]

Preguntas y ejercicios de repaso

1. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan el análisis de regresión múltiple cuando se desea inferir acerca de la población de la cual se ha extraído la muestra?
2. ¿Cuáles son las suposiciones que fundamentan el modelo de correlación cuando el objetivo es la inferencia?
3. Explique completamente los siguientes términos:

   a) Coeficiente de determinación múltiple
   b) Coeficiente de correlación múltiple
   c) Coeficiente de correlación simple
   d) Coeficiente de correlación parcial

4. Describa una situación en su área particular de interés donde sería útil el análisis de regresión múltiple. Utilice datos reales o realistas y lleve a cabo un análisis de regresión completo.
5. Describa una situación en su área particular de interés donde sería útil el análisis de correlación múltiple. Utilice datos reales o realistas y lleve a cabo un análisis de correlación completo.

En los siguientes ejercicios, efectúe el análisis indicado y pruebe las hipótesis a los niveles de significación indicados. Calcule el valor *p* para cada prueba.

6. La siguiente tabla muestra algunos de los valores de la función pulmonar observados en 10 pacientes hospitalizados.

X_1 *Capacidad vital (litros)*	X_2 *Capacidad pulmonar total (litros)*	Y *Volumen expiratorio forzado (litros) por segundo*
2.2	2.5	1.6
1.5	3.2	1.0
1.6	5.0	1.4
3.4	4.4	2.6
2.0	4.4	1.2
1.9	3.3	1.5
2.2	3.2	1.6
3.3	3.3	2.3
2.4	3.7	2.1
.9	3.6	.7

Calcule el coeficiente de correlación múltiple y pruebe su significación al nivel de .05.

7. La siguiente tabla muestra el peso y los niveles totales de colesterol y triglicéridos en 15 pacientes con hiperlipoproteinemia primaria de tipo II justo antes de iniciarse el tratamiento.

Y Peso (kg)	X_1 *Colesterol total (mg/100 ml)*	X_2 *Triglicéridos (mg/100 ml)*
76	302	139
97	336	101
83	220	57
52	300	56
70	382	113
67	379	42
75	331	84
78	332	186
70	426	164
99	399	205
75	279	230
78	332	186
70	410	160
77	389	153
76	302	139

Calcule el coeficiente de correlación múltiple y pruebe su significación al nivel de .05.

8. En un estudio de la relación entre la excreción de creatinina, la estatura y el peso, se recopilaron los datos de la siguiente tabla a partir de 20 recién nacidos.

Infante	*Excreción de creatinina (mg/día)* Y	*Peso (kg)* X_1	*Estatura (cm)* X_2
1	100	9	72
2	115	10	76
3	52	6	59
4	85	8	68
5	135	10	60
6	58	5	58
7	90	8	70

Infante	*Excreción de creatinina (mg/día)* Y	*Peso (kg)* X_1	*Estatura (cm)* X_2
8	60	7	65
9	45	4	54
10	125	11	83
11	86	7	64
12	80	7	66
13	65	6	61
14	95	8	66
15	25	5	57
16	125	11	81
17	40	5	59
18	95	9	71
19	70	6	62
20	120	10	75

a) Encuentre la ecuación de regresión múltiple que describa la relación entre estas variables.

b) Calcule R^2 y efectúe un análisis de variancia.

c) Sea $X_1 = 10$ y $X_2 = 60$ y encuentre el valor pronosticado de Y.

9. Se llevó a cabo un estudio para examinar aquellas variables que se pensaba estaban relacionadas con la satisfacción por el trabajo de los empleados no profesionistas de un hospital. Una muestra aleatoria de 15 empleados dio los siguientes resultados:

Calificación obtenida en la prueba de aptitud en el trabajo (Y)	*Calificación obtenida por inteligencia* (X_1)	*Indice de ajuste personal* (X_2)
54	15	8
37	13	1
30	15	1
48	15	7
37	10	4
37	14	2
31	8	3
49	12	7
43	1	9
12	3	1
30	15	1
37	14	2

Calificación obtenida en la prueba de aptitud en el trabajo *(Y)*	*Calificación obtenida por inteligencia* *(X_1)*	*Indice de ajuste personal* *(X_2)*
61	14	10
31	9	1
31	4	5

a) Encuentre la ecuación de regresión múltiple que describa la relación que existe entre estas variables.

b) Calcule el coeficiente de determinación múltiple y efectúe un análisis de variancia.

c) Sea $X_1 = 10$ y $X_2 = 5$ y encuentre el valor pronosticado de Y.

10. Un grupo de médicos investigadores obtuvo el índice de adiposidad, la insulina basal y los valores de glucosa basal en 21 personas normales. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Los investigadores deseaban estudiar la intensidad de la asociación entre estas variables.

Indice de adiposidad Y	*Insulina basal* *(μU/ml)* X_1	*Glucosa basal* *(mg/100 ml)* X_2
90	12	98
112	10	103
127	14	101
137	11	102
103	10	90
140	38	108
105	9	100
92	6	101
92	8	92
96	6	91
114	9	95
108	9	95
160	41	117
91	7	101
115	9	86
167	40	106
108	9	84

Indice de adiposidad Y	*Insulina basal* $(\mu U/ml)$ X_1	*Glucosa basal* $(mg/100ml)$ X_2
156	43	117
167	17	99
165	40	104
168	22	85

Calcule el coeficiente de correlación múltiple y pruebe su significación al nivel de .05.

11. Como parte de un estudio para investigar la relación que existe entre el *stress* y varias otras variables, se recopilaron los siguientes datos de una muestra aleatoria simple de quince ejecutivos asociados.

Medida del stress (Y)	*Medida de la importancia de la empresa* (X_1)	*Número de años en la presente posición* (X_2)	*Salario anual* $(\times 1{,}000)$ (X_3)	*Edad* (X_4)
101	812	15	\$30	38
60	334	8	20	52
10	377	5	20	27
27	303	10	54	36
89	505	13	52	34
60	401	4	27	45
16	177	6	26	50
184	598	9	52	60
34	412	16	34	44
17	127	2	28	39
78	601	8	42	41
141	297	11	84	58
11	205	4	31	51
104	603	5	38	63
76	484	8	41	30

a) Encuentre la ecuación de regresión de mínimos cuadrados para estos datos.

b) Construya la tabla de análisis de variancia y pruebe la hipótesis nula de no relación entre las cinco variables.

c) Pruebe la hipótesis nula de que cada pendiente del modelo de regresión es igual a cero.

d) Encuentre el coeficiente de determinación múltiple y el coeficiente de correlación múltiple. Sea $\alpha = .05$ y encuentre el valor *p* para cada prueba.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. George W. Snedecor y William G. Cochran, *Statistical Methods,* sexta edición, The Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1967.
2. Robert G. D. Steel y James H. Torrie, *Principles and Procedures of Statistics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1960.
3. R. L. Anderson y T. A. Bancroft, *Statistical Theory in Research,* McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
4. Mordecai Ezekiel y Karl A. Fox, *Methods of Correlation and Regression Analysis,* tercera edición, Wiley, Nueva York, 1959.
5. M. H. Doolittle, "Method Employed in the Solution of Normal Equation and the Adjustment of a Triangulation," *U.S. Coast and Geodetic Survey Report,* 1878.
6. David Durand, "Joint Confidence Region for Multiple Regression Coefficients," *Journal of the American Statistical Association, 49* (1954), 130–146.
7. R. C. Geary y C. E. V. Leser, "Significance Tests in Multiple Regression," *The American Statistician, 22* (febrero, 1968), 20–21.
8. R. A. Fisher, "The General Sampling Distribution of the Multiple Correlation Coefficient," *Proceedings of the Royal Society* A. *121* (1928), 654–673.
9. K. H. Kramer, "Tables for Constructing Confidence Limits on the Multiple Correlation Coefficient," *Journal of the American Statistical Association, 58* (1963), 1082–1085.
10. David M. Allen, "Mean Square Error of Prediction as a Criterion for Selecting Variables," *Technometrics, 13* (1971), 469–475.
11. E. M. L. Beale, M. G. Kendall y D. W. Mann, "The Discarding of Variables in Multivariate Analysis," *Biometrika, 54* (1967), 357–366.
12. N. R. Draper y H. Smith, *Applied Regression Analysis,* segunda edición, Wiley, Nueva York, 1981.
13. M. J. Garside, "The Best Sub-Set in Multiple Regression Analysis," *Applied Statistics, 14* (1965), 196–200.

14. J. W. Gorman y R. J. Toman, "Selection of Variables for Fitting Equations to Data," *Technometrics, 8* (1966), 27–52.
15. R. R. Hocking y R. N. Leslie, "Selection of the Best Sub-Set in Regression Analysis," *Technometrics, 9* (1967), 531–540.
16. H. J. Larson y T. A. Bancroft, "Sequential Model Building for Prediction in Regression Analysis I," *Annals of Mathematical Statistics, 34* (1963), 462–479.
17. D. V. Lindley, "The Choice of Variables in Multiple Regression," *Journal of the Royal Statistical Society* B, *30* (1968), 31–66.
18. E. F. Schultz, Jr. y J. F. Goggans, "A Systematic Procedure for Determining Potent Independent Variables in Multiple Regression and Discriminant Analysis," Agri. Exp. Sta. Bull. 336, Auburn University, 1961.
19. K. W. Smillie, *An Introduction to Regression and Correlation*, Academic Press, Nueva York, 1966.
20. Peter Sprent, *Models in Regression*, Methuen, Londres, 1969.
21. A. Summerfield y A. Lubin, "A Square Root Method of Selecting a Minimum Set of Variables in Multiple Regression: I. The Method," *Psychometrika, 16* (3): 271 (1951).
22. Wayne W. Daniel, *Applied Nonparametric Stratistics*, Houghton Mifflin, Boston, 1978.
23. Wayne W. Daniel, *Nonparametric, Distribution-Free, and Robust Procedures in Regression Analysis: A Selected Bibliography*, Vance Bibliographies, Monticello, Ill., junio, 1980.

Otras referencias, libros

1. Frank Andrews, James Morgan y John Sonquist, *Multiple Classification Analysis*, Ann Arbor, Survey Research Center, 1967.
2. T. W. Anderson, *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley, Nueva York, 1958.
3. Cuthbert Daniel y Fred S. Wood, *Fitting Equations to Data*, segunda edición, Wiley-Interscience, Nueva York, 1979.
4. Alan E. Treloar, *Correlation Analysis*, Burgess, Minneapolis, 1949.

Otras referencias, artículos de revistas

1. R. G. Newton y D. J. Spurrell, "A Development of Multiple Regression for the Analysis of Routine Data," *Applied Statistics, 16* (1967), 51–64.

2. Potluri Rao, "Some Notes on Misspecification in Multiple Regression," *The American Statistician, 25* (diciembre, 1971), 37–39.
3. Neil S. Weiss, "A Graphical Representation of the Relationships Between Multiple Regression and Multiple Correlation," *The American Statistician, 24* (abril, 1970), 25–29.
4. E. J. Williams, "The Analysis of Association Among Many Variates," *Journal of the Royal Statistical Society, 29* (1967), 199–242.

Otras referencias, otras publicaciones

1. R. L. Bottenbery y Y. H. Ward, Jr., *Applied Multiple Linear Regression,* U.S. Department of Commerce, Office of Technical Services, AD 413128, 1963.
2. Wayne W. Daniel, *Ridge Regression: A Selected Bibliography,* Vance Bibliographies, Monticello, Ill., octubre, 1980.
3. Wayne W. Daniel, *The Use of Dummy Variables in Regression Analysis: A Selected Bibliography With Annotations,* Vance Bibliographies, Monticello, Ill., noviembre, 1979.
4. Wayne W. Daniel, *Outliers in Research Data: A Selected Bibliography,* Vance Bibliographies, Monticello, Ill., julio, 1980.
5. Jean Draper, *Interpretation of Multiple Regression Analysis Part I, Problems of Interpreting Large Samples of Data,* The University of Arizona, College of Business and Public Administration, Division of Economics and Business Research, 1968.

10

La distribución ji-cuadrada y el análisis de frecuencias

10.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos que tratan de la estimación y pruebas de hipótesis se menciona brevemente la distribución ji–cuadrada cuando se trata de la obtención de intervalos de confianza para la variancia de una población y de probar la hipótesis acerca de la misma. Esta distribución, que es una de las que se utilizan más en las aplicaciones estadísticas, tiene muchos otros usos. Algunos de los más comunes se presentan en este capítulo junto con un estudio más completo de la propia distribución, que se trata en la sección siguiente.

10.2 PROPIEDADES MATEMÁTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN JI–CUADRADA

La distribución ji–cuadrada puede deducirse a partir de distribuciones normales. Supóngase que a partir de una variable aleatoria Y distribuida normalmente con media μ y variancia σ^2 se seleccionan aleatoria e independientemente muestras de tamaño $n = 1$. Cada valor seleccionado puede transformarse en la variable normal unitaria z a través de la ya conocida fórmula:

$$z = \frac{y_i - \mu}{\sigma} \qquad (10.2.1)$$

Cada valor de z puede elevarse al cuadrado para obtener z^2. Cuando se estudia la distribución muestral de z^2, se encuentra que sigue una distribución ji–cuadrada con un grado de libertad. Es decir,

$$\chi^2_{(1)} = \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^2 = z^2$$

Supóngase ahora que se seleccionan aleatoria e independientemente muestras de tamaño $n = 2$ de la población de valores de Y con distribución normal. Dentro de cada muestra, puede transformarse cada valor de y en la variable normal unitaria z y elevarla al cuadrado como antes. Si se suman los valores resultantes de z^2 para cada muestra, puede designarse esta suma por

$$\chi^2_{(2)} = \left(\frac{y_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - \mu}{\sigma}\right)^2 = z_1^2 + z_2^2$$

ya que sigue la distribución ji–cuadrada con dos grados de libertad, el número de términos independientes elevados al cuadrado que se sumaron.

Puede repetirse el procedimiento para cualquier tamaño de muestra n. En cada caso, la suma de los valores z^2 resultantes se distribuirá como una distribución ji–cuadrada, con n grados de libertad. En general, se tiene entonces que

$$\chi^2_{(n)} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \qquad (10.2.2)$$

sigue la distribución χ^2 con n grados de libertad. La forma matemática de la distribución ji–cuadrada es la siguiente:

$$f(u) = \frac{1}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} \frac{1}{2^{k/2}} u^{(k/2)-1} e^{-(u/2)}, \qquad u > 0 \qquad (10.2.3)$$

donde e es el número irracional 2.71828. . . y k es el número de grados de libertad. La variable u se designa por lo general por la letra griega ji (χ) y, en consecuencia, la distribución se conoce como distribución χ^2. Como se señaló en el capítulo 5, la distribución χ^2 se ha tabulado en la tabla I. En las siguientes secciones se mencionan otros usos de esta tabla conforme se van necesitando.

La media y la variancia de la distribución χ^2 son, respectivamente, k y $2k$. El valor modal de esta distribución es $k - 2$ para valores de k mayores que o iguales a 2 y es de cero para $k = 1$.

La forma de la distribución χ^2 para varios valores de k se señalan en la figura 5.9.1. En esta figura se observa que las formas para $k = 1$ y $k = 2$ son bastante distintas de la forma general de la distribución para $k > 2$. En esta figura se observa también que χ^2 toma valores entre 0 y el infinito. No puede tomar valores negativos, ya que es la suma de valores que se han elevado al cuadrado.

Una característica final de la distribución χ^2 que vale la pena destacar es que la suma de dos o más variables χ^2 independientes también sigue una distribución χ^2. En este capítulo se utiliza la distribución χ^2 al probar hipótesis donde los datos disponibles para el análisis están en la forma de frecuencias. Estos procedimientos de prueba de la hipótesis se estudian bajo el encabezado de *pruebas de bondad de ajuste, pruebas de independencia y pruebas de homogeneidad.* Se observará que, en cierto sentido, todas las pruebas χ^2 que se utilizan pueden imaginarse como pruebas de bondad del ajuste con las que se prueba este concepto en las frecuencias observadas con respecto a las frecuencias que se esperarían si los datos se obtuvieran bajo alguna hipótesis o teoría particular. Sin embargo, se reserva la expresión "bondad de ajuste" para utilizarla en un sentido más estricto. Se utiliza esta frase para referirse a la comparación de la distribución de una muestra con alguna distribución teórica que se supone describe la población de la cual provino la muestra. La justificación del uso de la distribución en estos casos se debe a Karl Pearson,[1] quien demostró que puede utilizarse la distribución χ^2 como una prueba de la concordancia entre la observación y la hipótesis siempre que los datos estén en la forma de frecuencias.

Un extenso estudio de la distribución χ^2 se encuentra en el libro escrito por Lancaster.[2]

10.3 PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Como se ha señalado, resulta apropiada una prueba de bondad de ajuste cuando se desea decidir si una distribución observada de frecuencias es incompatible con alguna distribución preconcebida o establecida en una hipótesis.

Por ejemplo, tal vez sea necesario determinar si una muestra de valores observados de alguna variable aleatoria es compatible o no con la hipótesis de que se extrajo de una población de valores con distribución normal. El procedimiento para llegar a una decisión consiste en colocar los valores en categorías o intervalos de clase mutuamente excluyentes y observar la frecuencia de ocurrencia de los valores en cada categoría. Puede aplicarse entonces lo que se sabe acerca de las distribuciones normales para determinar las frecuencias que podrían esperarse para cada categoría si la muestra hubiera provenido de una distribución normal. Si la discrepancia entre lo que se observó y lo que era de esperar, dado que el muestreo fue a partir de una distribución normal, es demasiado grande como para ser atribuida al azar, se concluye que la muestra no provino de una distribución normal. Si la discrepancia es de tal magnitud que pudo haberse debido al azar, se concluye que la muestra puede haber provenido de una distribución normal. De manera semejante, pueden llevarse a cabo pruebas de bondad de ajuste en casos donde la distribución planteada en la hipótesis es la de tipo binomial, de Poisson o cualquier otra distribución. A continuación, se ilustra esto con más detalle mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 10.3.1 La distribución normal

Supóngase que un grupo de investigadores, que están realizando un estudio de hospitales en los Estados Unidos, reúne datos en una muestra de 250 hospitales, los cuales permiten calcular, para cada uno de los últimos, la razón del tiempo en que los pacientes permanecen internados, una variable que muestra, para un período de 12 meses, la razón del censo diario promedio respecto del número promedio de camas mantenidas. Supóngase que la muestra proporcionó la distribución de razones (expresadas como porcentajes) que se muestran en la tabla 10.3.1.

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la muestra no provino de una población con distribución normal? La pregunta sugiere una prueba de la hipótesis nula, H_0, de que los datos se extrajeron de una población con distribución normal, contra la alternativa, H_A, de que dichos datos no se extrajeron de una población de este tipo.

Dado que no se especifican la media y la variancia de la distribución supuesta en la hipótesis, deben utilizarse los datos de la muestra para estimarlas. Estos parámetros, o sus estimaciones, se necesitarán para calcular la frecuencia que se esperaría en cada intervalo de clase

Tabla 10.3.1 Resultados del estudio descrito en el ejemplo 10.3.1

Razón del tiempo que el paciente permanece internado	*Número de hospitales*
0.0 *a* 39.9	16
40.0 *a* 49.9	18
50.0 *a* 59.9	22
60.0 *a* 69.9	51
70.0 *a* 79.9	62
80.0 *a* 89.9	55
90.0 *a* 99.9	22
100.0 *a* 109.9	4
Total	250

cuando la hipótesis nula es verdadera. La media y la desviación estándar calculadas a partir de los datos agrupados de la tabla 10.3.1 con los métodos de las secciones 1.7 y 1.8 son las siguientes:

$$\bar{x} = 69.91$$

$$s = 19.02$$

Como paso siguiente en el análisis, debe obtenerse, para cada intervalo de clase, la frecuencia de ocurrencia de los valores que se esperarían si la hipótesis nula fuera verdadera, es decir, si, en efecto, la muestra hubiera sido extraída de una población de valores con distribución normal. Para hacerlo, primero se determina la frecuencia relativa esperada de ocurrencia de los valores para cada intervalo de clase y, a continuación, se multiplican estas frecuencias relativas esperadas por el número total de valores para obtener el número de valores esperado para cada intervalo.

Se recordará que, del estudio de la distribución normal, la frecuencia de ocurrencia de los valores iguales a o menores que algún valor especificado, por decir x_0, de la variable aleatoria X con distribución normal, es igual al área bajo la curva y a la izquierda de x_0, tal como se representa mediante el área sombreada de la figura 10.3.1. El valor numérico de esta área se obtiene convirtiendo x_0 en una variable normal estándar mediante la fórmula $z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma$ y encontrando el valor apropiado en la tabla F. Este procedimiento se

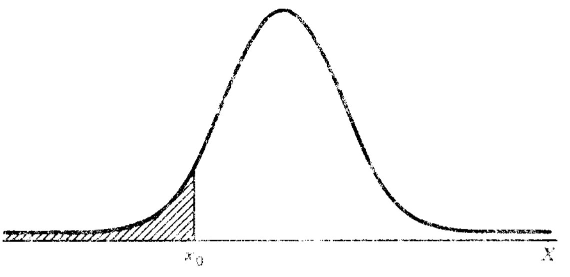


Figura 10.3.1 Distribución normal que muestra la frecuencia relativa de ocurrencia de valores menores que o iguales a x_0. El área sombreada representa la frecuencia relativa de ocurrencia de valores iguales a o menores que x_0.

utiliza para obtener las frecuencias relativas esperadas que corresponden a cada uno de los intervalos de clase de la tabla 10.3.1 μ y σ se estiman con $\bar{x}$ y s, tal y como se calculan a partir de los datos agrupados de la muestra. El primer paso consiste en obtener los valores de z correspondientes al límite inferior de cada intervalo de clase. El área entre dos valores de z sucesivos dará la frecuencia relativa esperada de ocurrencia de los valores para el correspondiente intervalo de clase.

Por ejemplo, para obtener la frecuencia relativa esperada de ocurrencia de los valores en el intervalo de 40.0 a 49.9, se procede como sigue:

El valor de z correspondiente a $X = 40.0$ es $z = \dfrac{40.0 - 69.91}{19.02} = -1.57$

El valor de z correspondiente a $X = 50.0$ es $z = \dfrac{50.0 - 69.91}{19.02} = -1.05$

En la tabla F se encuentra que el área a la izquierda de −1.05 es de .1469, y que el área a la izquierda de −1.57 es de .0582. El área entre −1.05 y −1.57 es igual a .1469 −.0582 = .0887, que es igual a la frecuencia relativa esperada de ocurrencia de los valores de las razones del tiempo en que el paciente permanece internado dentro del intervalo de 40.0 a 49.9. Esto indica que si la hipótesis nula es verdadera, es decir, si los valores de la razón del tiempo de internado tienen distribución normal, debería esperarse que el 8.9 por ciento de los valores en la muestra estén entre 40.0 y 49.9. Cuando se multiplica el tamaño total de la muestra, 250, por .0887, se encuentra que la frecuencia esperada para el intervalo es de 22.18. Cálculos similares

Tabla 10.3.2 Intervalos de clase y frecuencias esperadas para el ejemplo 10.3.1

Intervalo de clase	$z = (x_i - \bar{x})/S$ *en el límite inferior del intervalo*	*Frecuencia relativa esperada*	*Frecuencia esperada*
<40.0		.0582	14.55
40.0 a 49.9	−1.57	.0887	22.18
50.0 a 59.9	−1.05	.1546	38.65
60.0 a 69.9	−.52	.1985	49.62
70.0 a 79.9	.00	.2019	50.48
80.0 a 89.9	.53	.1535	38.38
90.0 a 99.9	1.06	.0875	21.88
100.0 a 109.9	1.58	.0397	9.92
110.0 y mayores	2.11	.0174	4.35
Total		1.0000	250.00

dan las frecuencias esperadas para los demás intervalos, las que se ilustran en la tabla 10.3.2.

Se tiene interés ahora en examinar las magnitudes de las discrepancias entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas, ya que se observa que los dos conjuntos de frecuencias no concuerdan. Se sabe que, aun cuando la muestra se extrajera de una población normal de valores, la variabilidad del muestreo por sí sola haría bastante improbable que las frecuencias observadas y esperadas concordaran perfectamente. Surge entonces la pregunta de si las discrepancias entre las frecuencias observadas y esperadas son lo suficientemente pequeñas como para tener la sensación de que es razonable que puedan haber ocurrido únicamente como resultado del azar cuando la hipótesis nula es verdadera. Si son de esta magnitud, uno no se inclinará a rechazar la hipótesis nula de que la muestra provino de una población con distribución normal.

Si las discrepancias son tan grandes que no parece razonable que puedan haberse producido únicamente como resultado del azar, cuando la hipótesis nula es verdadera, será de desearse que se rechace la hipótesis nula. El criterio contra el cual se juzga si las discrepancias son "grandes" o "pequeñas" lo proporciona la distribución χ^2.

Puede demostrarse que cuando la hipótesis nula es verdadera, la estadística

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{10.3.1}$$

está distribuida aproximadamente como una χ^2 con $k - r$ grados de libertad.

En la ecuación 10.3.1, O_i se refiere a la i–ésima frecuencia observada y E_i a la i–ésima frecuencia esperada. Al determinar los grados de libertad, k es igual al número de grupos para los cuales se cuenta con frecuencias observadas y esperadas, y r es el número de restricciones impuestas sobre la comparación dada. Se impone una restricción cuando la suma de las frecuencias esperadas se fuerza a ser igual a la suma de las frecuencias observadas, y se impone una restricción adicional para cada parámetro que se estima a partir de la muestra. Para un estudio completo de la justificación teórica de restar un grado de libertad para cada parámetro estimado, véase a Cramer.[3]

La cantidad $\Sigma\ [(O_i - E_j)^2/E_i]$ será pequeña si las frecuencias observadas y esperadas tienen valores próximos y será grande si las diferencias son grandes.

El valor calculado de X^2 se compara con el valor tabulado de χ^2 con $k - r$ grados de libertad. Si X^2 es mayor que la χ^2 tabulada para cualquier valor de α, puede rechazarse la hipótesis nula al nivel de significación indicado.

A continuación se ilustra el procedimiento con los datos del ejemplo que se está tratando. En la tabla 10.3.3 se muestran las frecuencias observadas y esperadas, junto con cada valor de $(O_i - E_i)^2/E_i$. El primer valor de la última columna, por ejemplo, se calcula a partir de $(16 - 14.55)^2/14.55 = .145$. Los otros valores de $(O_i - E_i)^2/E_i$ se calculan de manera semejante.

En la tabla 10.3.3 se ve que $X^2 = \Sigma\ [(O_i - E_i)^2/E_i] = 25.854$. Los grados de libertad apropiados son 9 (el número de grupos o intervalos de clase) $-$ 3 (por las tres restricciones: que $\Sigma E_i = \Sigma O_i$ y estimar a μ y σ a partir de los datos de la muestra) = 6. Cuando se compara $X^2 = 25.854$ con los valores de χ^2 de la tabla I, se ve que es mayor que $\chi^2_{.995} = 18.548$, de tal manera que puede rechazarse la hipótesis nula de que la muestra provino de una población con distribución normal al nivel de significación de 005. En otras palabras, la probabilidad de obtener un valor de X^2 tan grande como 25.854, cuando la hipótesis nula es verdadera, es menor que 5 en 1000 ($p < .005$). Se dice entonces que tal evento raro no se producirá debido sólo al azar,

Tabla 10.3.3 Frecuencias observada y esperada y $(O_i - E_i)^2/E_i$ para el ejemplo 10.3.1

Intervalo de clase	*Frecuencia observada* (O_i)	*Frecuencia esperada* (E_i)	$(O_i - E_i)^2/E_i$
<40.0	16	14.55	.145
40.0 a 49.9	18	22.18	.788
50.0 a 59.9	22	38.65	7.173
60.0 a 69.9	51	49.62	.038
70.0 a 79.9	62	50.48	2.629
80.0 a 89.9	55	38.38	7.197
90.0 a 99.9	22	21.88	.001
100.0 a 109.9	4	9.92	3.533
110.0 y mayores	0	4.35	4.350
Total	250	250.00	25.854

cuando H_0 es verdadera, por lo que se busca otra explicación. La otra explicación es que la hipótesis nula es falsa.

Algunas veces, los parámetros se especifican en la hipótesis nula. Debe tenerse en cuenta que si se hubieran especificado la media y la variancia de la población como parte de la hipótesis nula, no se hubiera tenido que estimarlas a partir de la muestra y los grados de libertad hubieran sido $9 - 1 = 8$.

Si los parámetros se estiman a partir de datos no agrupados de la muestra en lugar de los datos agrupados como en el ejemplo, es posible que la distribución de X^2 podría no ser lo suficientemente aproximada por la distribución ji–cuadrada para dar resultados satisfactorios. Este problema es analizado por Dahiya y Gurland[4] y Watson.[5,6,7] El mismo problema se encuentra cuando se estiman los parámetros independientemente de la muestra, como lo estudia Chase.[8]

Frecuencias esperadas pequeñas. Con frecuencia, en las aplicaciones de la prueba ji–cuadrada, las frecuencias esperadas para una o más categorías serán pequeñas, tal vez mucho menores que 1. En la literatura sobre el tema se señala con frecuencia que la aproximación de X^2 a χ^2 no es estrictamente válida cuando algunas de las frecuencias esperadas son pequeñas. Sin embargo, existe una controversia entre los autores sobre qué magnitud de las frecuencias esperadas son permisibles antes de hacer algún ajuste o abandonar χ^2 en favor de alguna otra prueba alternativa. Algunos autores, especialmente los primeros que abordaron el tema, sugieren límites inferiores de 10, mientras que otros sugieren que todas las frecuencias esperadas no deben ser menores que 5. Cochran,[9,10] quien escribió a principios de la década de 1950, sugiere que, para las pruebas de bondad de ajuste de distribuciones unimodales (como la normal), la frecuencia mínima esperada puede ser tan pequeña como 1. Si, en la práctica, se encuentran una o más frecuencias esperadas menores que 1, pueden combinarse categorías adyacentes para lograr el mínimo requerido. La combinación reduce el número de categorías y, por lo tanto, el número de grados de libertad. Tal parece que las sugerencias de Cochran han sido seguidas por casi todos los médicos en los últimos años. Investigaciones más recientes sobre el tema de las frecuencias esperadas pequeñas comprenden las de Roscoe y Byars,[11] Yarnold,[12] Tate y Hyer,[13] Slakter[14,15] y Lewontin y Felsenstein.[16]

Aunque suele encontrarse en la literatura el uso de la ji-cuadrada para probar la normalidad esta no es la prueba más apropiada para utilizarse cuando la distribución planteada en la hipótesis es continua. La prueba de Kolmogorov-Smirnov, descrita en el capítulo 11, fue diseñada especialmente para pruebas de bondad de ajuste que comprenden distribuciones continuas.

Ejemplo 10.3.2 La distribución binomial

En un estudio diseñado para determinar la aceptación por parte de los pacientes a un nuevo analgésico, 100 médicos seleccionaron, cada uno, una muestra de 25 pacientes para participar en el estudio. Cada paciente, después de haber tomado el nuevo analgésico durante un período especificado, fue interrogado para saber si prefería éste o el que había tomado regularmente con anterioridad.

Los resultados del estudio se muestran en la tabla 10.3.4.

Figura 7.4.1 Efectos de la edad y del medicamento, sin que exista interacción.

Tabla 7.4.2 Datos de la tabla 7.4.1 alterados para mostrar el efecto de un tipo de interacción.

	Factor B—dosis del medicamento		
Factor A—edad	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$

Tabla 10.3.4 Resultados del estudio descrito en el ejemplo 10.3.2

Número de pacientes de 25, que prefieren el nuevo analgésico	*Número de doctores que reportaron esta cantidad*	*Número total de pacientes que prefieren el nuevo analgésico recetado por el doctor*
0	5	0
1	6	6
2	8	16
3	10	30
4	10	40
5	15	75
6	17	102
7	10	70
8	10	80
9	9	81
10 ó más	0	0
Total	100	500

el nuevo analgésico, de modo que la estimación puntual de p es $\hat{p} = 500/2500 = .20$. Puede obtenerse la frecuencia relativa esperada evaluando la función binomial

$$f(x) = \binom{25}{x} .2^x .8^{25-x}$$

para $x = 0, 1, \ldots 25$. Por ejemplo, para encontrar la probabilidad de que de una muestra de 25 pacientes ninguno de ellos prefiera el nuevo analgésico cuando, en la población total la proporción verdadera de los que prefieren el nuevo analgésico es de .2, se calcularía.

$$f(0) = \binom{25}{0} .2^0 .8^{25-0}$$

Esto puede hacerse con mayor facilidad consultando la tabla C, donde se observa que $P(X = 0) = .0038$. La frecuencia relativa de ocurrencia de muestras de tamaño 25 en las que ningún paciente prefiera el nuevo analgésico es de .0038. Para obtener la frecuencia esperada correspondiente, se multiplica .0038 por 100 para obtener .38. Cálculos semejantes proporcionan las frecuencias esperadas restantes

Tabla 10.3.5 Cálculos para el ejemplo 10.3.2

Cantidad de pacientes, de 25, que prefieren el nuevo analgésico	*Cantidad de doctores que reportaron este número (Frecuencia observada, O_i)*	*Frecuencia relativa esperada*	*Frecuencia esperada, E_i*
0	$\left.\begin{matrix}5\\6\end{matrix}\right\}$ 11	.0038	$\left.\begin{matrix}.38\\2.36\end{matrix}\right\}$ 2.74
1		.0236	
2	8	.0708	7.08
3	10	.1358	13.58
4	10	.1867	18.67
5	15	.1960	19.60
6	17	.1633	16.33
7	10	.1109	11.09
8	10	.0623	6.23
9	9	.0295	2.95
10 ó más	0	.0173	1.73
Total	100	1.0000	100.00

que, junto con las frecuencias esperadas, se muestran en la tabla 10.3.5. En esta tabla se observa que la primera frecuencia esperada es menor que 1, de modo que se sigue la sugerencia de Cochran y se combina este grupo con el segundo. Cuando se hace esto, todas las frecuencias esperadas son mayores que 1.

A partir de los datos, se calcula

$$X^2 = \frac{(11 - 2.74)^2}{2.74} + \frac{(8 - 7.08)^2}{7.08} + \cdots + \frac{(0 - 1.73)^2}{1.73} = 47.624$$

Los grados de libertad apropiados son 10 (el número de grupos que quedan después de combinar los dos primeros) menos 2 u 8. Se pierde un grado de libertad porque el total de las frecuencias esperadas se fuerza a ser igual a las frecuencias totales observadas y se sacrifica un grado de libertad porque se estima p a partir de los datos de la muestra.

Se compara la X^2 calculada con la χ^2 tabulada con 8 grados de libertad y se encuentra que es significativa al nivel de significación de .005. Se rechaza la hipótesis nula de que los datos provinieron de una distribución binomial.

Tabla 10.3.6 Cantidad de admisiones de emergencia a un hospital durante un período de 90 días

Día	*Admisiones de emergencia*	*Día*	*Admisiones de emergencia*	*Día*	*Admisiones de emergencia*	*Día*	*Admisiones de emergencia*
1.	2	24.	5	47.	4	70.	3
2.	3	25.	3	48.	2	71.	5
3.	4	26.	2	49.	2	72.	4
4.	5	27.	4	50.	3	73.	1
5.	3	28.	4	51.	4	74.	1
6.	2	29.	3	52.	2	75.	6
7.	3	30.	5	53.	3	76.	3
8.	0	31.	1	54.	1	77.	3
9.	1	32.	3	55.	2	78.	5
10.	0	33.	2	56.	3	79.	2
11.	1	34.	4	57.	2	80.	1
12.	0	35.	2	58.	5	81.	7
13.	6	36.	5	59.	2	82.	7
14.	4	37.	0	60.	7	83.	1
15.	4	38.	6	61.	8	84.	5
16.	4	39.	4	62.	3	85.	1
17.	3	40.	4	63.	1	86.	4
18.	4	41.	5	64.	3	87.	4
19.	3	42.	1	65.	1	88.	9
20.	3	43.	3	66.	0	89.	2
21.	3	44.	1	67.	3	90.	3
22.	4	45.	2	68.	2		
23.	3	46.	3	69.	1		

Ejemplo 10.3.3 La distribución de Poisson

El administrador de un hospital desea probar la hipótesis nula de que las admisiones de emergencia siguen una distribución de Poisson con $\lambda = 3$. Supóngase que durante un período de 90 días, el número de admisiones de emergencia fue como se señala en la tabla 10.3.6.

Los datos de la tabla 10.3.6 se resumen en la tabla 10.3.7.

Para obtener las frecuencias esperadas, se obtienen primero las frecuencias relativas esperadas al calcular la función de Poisson dada por la ecuación 3.4.1 para cada valor de la columna de la izquierda de la tabla 10.3.7. Por ejemplo, la primera frecuencia relativa esperada se obtiene al calcular

$$f(0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!}$$

Tabla 10.3.7 Resumen de los datos presentados en la tabla 10.3.6

Cantidad de admisiones de emergencia en un día	*Cantidad de días en que se presentó esta cantidad de admisiones de emergencia*
0	5
1	14
2	15
3	23
4	16
5	9
6	3
7	3
8	1
9	1
10 ó más	0
Total	90

Tabla 10.3.8 Frecuencias observada y esperada y elementos de X^2 para el ejemplo 10.3.3

Cantidad de admisiones de emergencia	*Número de días en que ocurrió esta cantidad, O_i*	*Frecuencia relativa esperada*	*Frecuencia esperada*	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0	5	.050	4.50	.056
1	14	.149	13.41	.026
2	15	.224	20.16	1.321
3	23	.224	20.16	.400
4	16	.168	15.12	.051
5	9	.101	9.09	.001
6	3	.050	4.50	.500
7	3	.022	1.98	.525
8	1 } 2	.008	.72 } 1.08	.784
9	1	.003	.27	
10 ó más	0	.001	.09	
Total	90	1.000	90.00	3.664

Puede utilizarse la tabla E del apéndice para encontrar ésta y todas las demás frecuencias relativas esperadas necesarias. Cada una de las frecuencias relativas esperadas se multiplica por 90 para obtener las frecuencias esperadas correspondientes. Estos valores, junto con las frecuencias observadas y esperadas y los componentes de X^2, $(O_i - E_i)^2/E_i$, se muestran en la tabla 10.3.8.

En la tabla 10.3.8 se observa que

$$X^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(5 - 4.50)^2}{4.50} + \cdots + \frac{(2 - 1.08)^2}{1.08} = 3.664$$

Se observa también que las tres últimas frecuencias esperadas son menores que 1, de tal manera que deben combinarse para evitar tener frecuencias esperadas menores que 1. Esto significa que se tienen sólo nueve categorías eficaces para calcular los grados de libertad. Dado que se especificó el parámetro, λ, en la hipótesis nula, no se pierde un grado de libertad por razones de estimación, de modo que los grados de libertad apropiados son $9 - 1 = 8$. Al consultar la tabla I del apéndice, se encuentra que el valor crítico de χ^2 para 8 grados de libertad y $\alpha = .05$ es de 15.507, de manera que no puede rechazarse la hipótesis nula al nivel de significación de .05 o cualquier otro nivel de significación razonable ($p > .10$). Se concluye, por lo tanto, que las admisiones de emergencia en este hospital pueden seguir una distribución de Poisson con $\lambda = 3$. Al menos, los datos observados no arrojan duda alguna sobre dicha hipótesis.

Ejercicios

10.3.1 La siguiente tabla muestra la distribución de las determinaciones de ácido úrico en 250 pacientes. Pruebe la bondad de ajuste de estos datos a una distribución normal con $\mu = 5.74$ y $\sigma = 2.01$. Sea $\alpha = .01$

Determinación del ácido úrico	Frecuencia observada
< 1	1
1 a 1.99	5
2 a 2.99	15
3 a 3.99	24
4 a 4.99	43
5 a 5.99	50

Determinación del ácido úrico	Frecuencia observada
6 a 6.99	45
7 a 7.99	30
8 a 8.99	22
9 a 9.99	10
10 ó más	5
Total	250

10.3.2 Se reunieron los siguientes datos de 300 niñas de ocho años de edad. Pruebe, al nivel de significación de .05, la hipótesis nula de que los datos se extrajeron de una población con distribución normal. Utilice los métodos del capítulo 1 para calcular la media y desviación estándar de la muestra a partir de los datos agrupados.

Estatura en centímetros	Frecuencia observada
114 a 115.9	5
116 a 117.9	10
118 a 119.9	14
120 a 121.9	21
122 a 123.9	30
124 a 125.9	40
126 a 127.9	45
128 a 129.9	43
130 a 131.9	42
132 a 133.9	30
134 a 135.9	11
136 a 137.9	5
138 a 139.9	4
	300

10.3.3 La carátula de los expedientes de pacientes internados en un departamento de salud local contiene 10 datos. Una muestra de 100 expedientes reveló la siguiente distribución de datos erróneos.

Datos erróneos por cada 10	Número de expedientes
0	8
1	25
2	32
3	24
4	10
5 ó más	1
	100

Pruebe la bondad de ajuste de estos datos a una distribución

10.3.5 Los siguientes datos son las cantidades de un organismo particular que se han encontrado en 100 muestras de agua tomadas de un estanque.

Número de organismos por muestra	Frecuencias
0	15
1	30
2	25
3	20
4	5
5	4
6	1
7	0
	100

Pruebe la hipótesis nula de que estos datos fueron extraídos de una distribución de Poisson. Determine el valor p para esta prueba.

10.4 PRUEBAS DE INDEPENDENCIA

Otro uso, y quizá el más frecuente, de la distribución ji–cuadrada es probar la hipótesis nula de que dos criterios de clasificación, cuando se aplican al mismo conjunto de entidades, son independientes. Se dice que dos criterios de clasificación son independientes si la distribución de uno es la misma, sin importar cuál sea la distribución del otro. Por ejemplo, si el estado socioeconómico y área de residencia de los habitantes de cierta ciudad son independientes, se esperaría encontrar la misma proporción de familias en los grupos socioeconómicos bajo, medio y alto en todas las áreas de la ciudad.

La clasificación de un conjunto de entidades, de acuerdo con dos criterios, por decir personas, puede mostrarse mediante una tabla en la que los r renglones representan los diversos niveles de uno de los criterios de clasificación y las c columnas representan los diversos niveles del segundo criterio. Dicha tabla se conoce generalmente como *tabla de contingencia.* En la tabla 10.4.1 se muestra la clasifi-

Tabla 10.4.1 Clasificación con dos criterios de una población finita de entidades

Nivel del segundo criterio de clasificación	*Nivel del primer criterio de clasificación*					
	1	*2*	*3*	...	*c*	*Total*
1	N_{11}	N_{12}	N_{13}	...	N_{1c}	$N_{1.}$
2	N_{21}	N_{22}	N_{23}	...	N_{2c}	$N_{2.}$
3	N_{31}	N_{32}	N_{33}	...	N_{3c}	$N_{3.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	N_{r1}	N_{r2}	N_{r3}	...	N_{rc}	$N_{r.}$
Total	$N_{.1}$	$N_{.2}$	$N_{.3}$	...	$N_{.c}$	N

cación de una población finita de entidades de acuerdo con dos criterios.

Se tiene interés en probar la hipótesis nula de que, en la población, los dos criterios de clasificación son independientes. Si se rechaza la hipótesis, se concluirá que los dos criterios de clasificación no son independientes. Se extraerá una muestra de tamaño n de la población de sucesos y, en una tabla como la 10.4.2, se presentarán la frecuencia de ocurrencia de los sucesos en la muestra correspondiente a las celdas formadas por las intersecciones de los renglones y columnas de la tabla 10.4.1, junto con los totales marginales.

Tabla 10.4.2 Clasificación con dos criterios de una muestra de entidades

Nivel del segundo criterio de clasificación	*Nivel del primer criterio de clasificación*					
	1	*2*	*3*	...	*c*	*Total*
1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2c}	$n_{2.}$
3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3c}	$n_{3.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	...	$n_{.c}$	n

Para cada celda, se calculan las frecuencias esperadas bajo la hipótesis nula de que los dos criterios de clasificación son independientes. Se comparan las frecuencias esperadas y observadas. Si la discrepancia es "pequeña", puede mantenerse la hipótesis nula. Si la discrepancia es "grande", se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los dos criterios de clasificación no son independientes. La decisión de si la discrepancia entre las frecuencias observadas y esperadas es "grande" o "pequeña" se tomará en base a la magnitud de la cantidad calculada cuando se utiliza la ecuación 10.3.1, donde O_i y E_i se refieren respectivamente a las frecuencias observadas y esperadas de las celdas de la tabla 10.4.2. Sería más lógico designar a las frecuencias observadas y esperadas en estas celdas como O_{ij} y E_{ij}, pero para conservar sencilla la notación y evitar introducir otra fórmula, se ha elegido utilizar la notación más sencilla. Resultará útil pensar en las celdas como si estuvieran numeradas desde 1 hasta k, donde 1 se refiere a la celda 11 y k a la celda rc. Puede demostrarse que la X^2 definida de esta forma está distribuida aproximadamente como una χ^2 con $(r - 1)(c - 1)$ grados de libertad cuando la hipótesis nula es verdadera. Si el valor calculado de X^2 es mayor que el valor tabulado de χ^2 para algún α, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación α. El procedimiento se ilustra con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10.4.1

Un grupo de investigadores, estudiando la relación entre el tipo sanguíneo y la severidad de cierta afección en una población, reunió datos sobre 1500 personas, que se presentan en la tabla de contingencia que se ilustra en la tabla 10.4.3.

Tabla 10.4.3 Mil quinientas personas clasificadas por el grado de la afección y el tipo sanguíneo

Grado de la afección	*Tipo sanguíneo*				
	A	*B*	*AB*	*O*	*Total*
Ninguno	543	211	90	476	1320
Moderado	44	22	8	31	105
Severo	28	9	7	31	75
Total	615	242	105	538	1500

Los investigadores deseaban saber si estos datos eran compatibles con la hipótesis de que el grado de la afección y el tipo sanguíneo son independientes. El primer paso en el análisis es obtener la frecuencia para cada celda que se esperaría si, en efecto, los dos criterios de clasificación fueran independientes. Puede empezarse por calcular estimaciones de las diversas probabilidades marginales a partir de los totales marginales que se muestran en la tabla 10.4.3. La estimación de la probabilidad de que una persona seleccionada al azar, de la población de la cual se extrajo la muestra, no tenga la afección es de 1320/1500 = .88; la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga una forma moderada de la afección se estima que es de 105/1500 = .07; y la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga una forma severa de la afección se estima que es de 75/1500 = .05. Asimismo, se estiman las probabilidades de que una persona seleccionada al azar de la población bajo estudio tenga sangre tipo A, B, AB y O como 615/1500 = .41, 242/1500 = .16, 105/1500 = .07, y 538/1500 = .36, respectivamente.

En el capítulo 2 se aprendió que (véase la ecuación 2.6.4), si dos eventos son independientes, la probabilidad de que ocurran conjuntamente es igual al producto de sus probabilidades individuales. Bajo la hipótesis nula de que el tipo sanguíneo y la severidad de la afección son independientes, se calcularía entonces la probabilidad estimada de que una persona seleccionada al azar no tenga, por ejemplo, la afección y tenga sangre tipo A como sigue:

P (sin la afección $\cap$ sangre tipo A) $= P$ (sin la afección) $\times$ P (sangre tipo A)

$$= \frac{1320}{1500} \cdot \frac{615}{1500}$$
$$= .36080$$

La probabilidad que acaba de calcularse es la estimación de la probabilidad de que una persona seleccionada al azar caiga en la primera celda de la tabla 10.4.3 cuando la hipótesis nula es verdadera. La estimación de la probabilidad de que una persona seleccionada al azar no tenga la afección y tenga sangre tipo B es de

$$\frac{1320}{1500} \cdot \frac{242}{1500} = .141973$$

Las probabilidades asociadas con cada una de las celdas restantes se calculan de igual forma.

Después de calcular las prooabilidades estimadas asociadas con cada celda, pueden obtenerse las frecuencias esperadas correspondientes multiplicando la probabilidad de cada celda por 1500, el tamaño total de la muestra. Por ejemplo, la frecuencia esperada para la primera celda es de (.3608)(1500) = 541.2 y el número esperado de personas, de las 1500, que no tengan la afección y tengan sangre tipo B es de (.141973)(1500) = 212.96.

Al calcular las frecuencias esperadas, puede aplicarse una simplificación que ahorra bastante tiempo. Nótese que la frecuencia esperada para la primera celda puede expresarse como

$$P\text{ (sin la afección} \cap \text{sangre tipo A)}(1500) = \tfrac{1320}{1500} \cdot \tfrac{615}{1500} \cdot 1500$$

Uno de los denominadores 1500 se simplifica con el 1500 del numerador, quedando

$$\frac{(1320)(615)}{1500} = 541.20$$

Esto conduce al procedimiento simplificado de obtener las frecuencias esperadas de las celdas, dividiendo el producto de los totales marginales correspondientes entre el tamaño total de la muestra. Como otro ejemplo, nótese que el número esperado de personas, de las 1500, que no tienen la afección y tienen sangre tipo B es de (242)(1320)/1500 = 212.96. Las frecuencias observadas y esperadas para el ejemplo ilustrativo se muestran en la tabla 10.4.4, donde las frecuencias esperadas están entre paréntesis.

Tabla 10.4.4 Frecuencias observada y esperada para el ejemplo 10.4.1

Grado de la afección	*Tipo sanguíneo*				
	A	*B*	*AB*	*O*	*Total*
Ninguno	543(541.2)	211(212.96)	90(92.40)	476(473.44)	1320
Moderado	44(43.05)	22(16.94)	8(7.35)	31(37.66)	105
Severo	28(30.75)	9(12.10)	7(5.25)	31(26.90)	75
Total	615	242	105	538	1500

A partir de las frecuencias observadas y esperadas, puede calcularse que

$$\begin{aligned}
X^2 &= \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \\
&= \frac{(543 - 541.2)^2}{541.2} + \frac{(211 - 212.96)^2}{212.96} + \cdots + \frac{(31 - 26.90)^2}{26.90} \\
&= .005987 + .018039 + \cdots + .624907 \\
&= 5.12
\end{aligned}$$

El valor calculado de $X^2 = 5.12$ se compara con los calores tabulados de χ^2 con 6 grados de libertad. Se observa que la X^2 calculada no es significativa en cualquier nivel razonable. Por ejemplo, el valor crítico de χ^2 para $\alpha = .10$ y 6 grados de libertad es de 10.645. Se concluye, entonces, que estos datos son compatibles con la hipótesis de que el grado de la afección y el tipo sanguíneo son independientes. Al menos estos datos, debido a la íntima concordancia entre las frecuencias observadas y esperadas, no proporcionan evidencia suficiente que indique una falta de independencia entre los dos criterios de clasificación.

Los grados de libertad se determinan multiplicando el número de renglones, r, menos 1, por el número de columnas, c, menos 1. Es decir, $(r - 1) \times (c - 1) = (3 - 1)(4 - 1) = 6$. El estudiante notará que el número de grados de libertad es igual al número de celdas de frecuencias de la tabla 10.4.1 que podrían llenarse arbitrariamente mientras se mantengan los totales marginales observados. Por ejemplo, dado que 1320 personas no tienen la afección y que 543 de éstos tienen sangre tipo A, 211 tienen sangre tipo B y 90 sangre tipo AB, deben tenerse 476 con sangre tipo O. Esto hace 3 grados de libertad. Aplicando la misma lógica al segundo renglón, se encuentra que sólo pueden llenarse arbitrariamente tres celdas, lo que da tres grados de libertad más. Cuando se intenta llenar las celdas del tercer renglón, se encuentra que estas frecuencias están ya determinadas por las frecuencias de los dos primeros renglones y, por lo tanto, el total de grados de libertad es de 6.

Puede encontrarse el problema de las frecuencias esperadas pequeñas que se estudió en la sección anterior cuando se analizan los datos de las tablas de contingencia. Aunque existe una falta de consenso en la forma de manejar este problema, muchos autores siguen actualmente la regla de Cochran.[10] Este sugiere que, para tablas de contingencia con más de 1 grado de libertad, puede permitirse una esperanza mínima de 1 si no más del 20 por ciento de las celdas tienen frecuencias esperadas de menos de 5. Para satisfacer esta regla, pueden combinarse renglones y columnas adyacentes cuando, al hacerlo, resulta lógico a la luz de otras consideraciones. Si X^2 está basada en menos de 30 grados de libertad, no pueden tolerarse frecuencias esperadas tan pequeñas como 2. En el ejemplo 10.4.1 no se tuvo la experiencia del problema de las frecuencias esperadas pequeñas, ya que todas ellas fueron mayores que 5.

La tabla de contingencia de 2×2. A veces, cada uno de los dos criterios de clasificación puede dividirse en sólo dos categorías, o niveles. Cuando los datos se clasifican cruzados de esta manera, el resultado es una tabla de contingencia que consta de dos renglones y dos columnas. Dicha tabla suele conocerse como tabla de 2×2. Cuando se aplica la regla $(r - 1)(c - 1)$ para encontrar los grados de libertad, a una tabla de 2×2, el resultado es 1 grado de libertad. A continuación se ilustra esto con un ejemplo.

Ejemplo 10.4.2

Una muestra de 500 niños de una cierta escuela primaria, se clasificó en forma cruzada respecto a su estado de nutrición y desempeño académico. Los resultados se muestran en la tabla 10.4.5.

Los investigadores deseaban saber si podrían concluir que existe una relación entre el estado de nutrición y el desempeño académico. Una prueba ji-cuadrada resulta apropiada para llegar a una decisión. Puede calcularse el valor de X^2 calculando primero las frecuencias

Tabla 10.4.5 Estado de nutrición y desempeño académico de 500 niños de escuela primaria

Desempeño académico	*Estado de nutrición*		
	Pobre	*Bueno*	*Total*
Malo	105	15	120
Satisfactorio	80	300	380
Total	185	315	500

Tabla 10.4.6 Tabla de contingencia de 2 X 2

Segundo criterio de clasificación	*Primer criterio de clasificación*		
	1	*2*	*Total*
1	a	b	$a+b$
2	c	d	$c+d$
Total	$a+c$	$b+d$	n

esperadas de las celdas en la forma que se estudió con anterioridad. Sin embargo, en el caso de una tabla de contingencia de 2 X 2, X^2 puede calcularse mediante la siguiente fórmula simplificada:

$$X^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)} \tag{10.4.1}$$

donde a, b, c y d son las frecuencias observadas de las celdas, como se muestra en la tabla 10.4.6. Para el ejemplo ilustrativo, se tiene que

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{500[(105)(300) - (15)(80)]^2}{(185)(315)(120)(380)} \\ &= 172.746 \end{aligned}$$

Cuando se compara el valor calculado de X^2 con los valores tabulados de χ^2 con 1 grado de libertad, se encuentra que la probabilidad de obtener un valor de X^2 tan grande o mayor que 172.746, cuando H_0 es verdadera, es menor que .005. El investigador puede concluir entonces que existe una relación entre las dos características bajo estudio.

En el análisis de tablas de contingencia de 2 X 2, pueden surgir los problemas de cómo manejar las frecuencias esperadas pequeñas y los tamaños totales de muestras pequeñas. Cochran[5] sugiere que no debe utilizarse la prueba χ^2 si $n < 20$ ó si $20 < n < 40$ y si cualquier frecuencia esperada es menor que 5. Cuando $n \geqslant 40$, puede tolerarse una frecuencia esperada de las celdas tan pequeña como 1.

Corrección de Yates. Las frecuencias observadas en una tabla de contingencia son discretas y, de este modo, dan lugar a una estadística discreta, X^2, que es aproximada por la distribución χ^2, que es continua. Yates,[17] en 1934, propuso un procedimiento para corregir esto en el caso de tablas de 2 X 2. La corrección consiste en restar la mitad del número total de observaciones del valor absoluto de la cantidad $ad - bc$ antes de elevar al cuadrado. Es decir,

$$X^2_{\text{corregida}} = \frac{n(|ad - bc| - .5n)^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)} \tag{10.4.2}$$

En general, se ha convenido en que no se necesita corrección alguna para tablas de contingencia más grandes. Aunque la corrección de Yates se había utilizado ampliamente en el caso de tablas de 2 X 2, los investigadores actuales, véase, por ejemplo, a Grizzle,[18] Lancaster,[19] Pearson[20] y Plackett[21] han cuestionado su uso. El trabajo de Grizzle, en particular, ha reforzado el caso contra el uso de esta corrección, basándose en que, con demasiada frecuencia, conduce a una prueba demasiado conservadora; es decir, el uso de la corrección conduce con demasiada frecuencia al no rechazo de la hipótesis nula. Como resultado, algunos médicos están en contra de su uso. Aparentemente, esta es una recomendación que es razonable aceptar.

Como algo interesante, puede aplicarse la corrección de Yates al ejemplo en cuestión. Utilizando la ecuación 10.4.2 y los datos de la tabla 10.4.5, puede calcularse lo siguiente:

$$\begin{aligned} X^2_{\text{corregida}} &= \frac{500\,[|(105)(300) - (15)(80)| - (.5)(500)]^2}{(185)(315)(120)(380)} \\ &= 169.907 \end{aligned}$$

Como podría esperarse, con una muestra de este tamaño, la diferencia entre los dos resultados no es considerable.

Las características de una prueba ji-cuadrada de independencia que la distingue de otras pruebas ji-cuadrada son las siguientes:

1. En general, se selecciona una sola muestra de una población de interés y las personas u objetos se clasifican en forma cruzada en base a las dos variables de interés.
2. El objetivo de calcular las frecuencias esperadas de las celdas está basado en la ley de probabilidad que establece que si dos eventos (aquí, los dos criterios de clasificación) son independientes, la probabilidad de que ocurran conjuntamente es igual al producto de sus probabilidades individuales.

3. Las hipótesis y conclusiones se establecen en términos de la independencia (o falta de ella) de las dos variables.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, lleve a cabo la prueba al nivel de significación indicado y determine el valor p.

10.4.1 Se clasificó en forma cruzada una muestra de 250 médicos en base a su especialidad y a la zona de la comunidad en que estaban trabajando. Los resultados fueron los siguientes:

	Especialidad				
Zona de la comunidad	A	B	C	D	Total
Norte	20	18	12	17	67
Sur	6	22	15	13	56
Este	4	6	14	11	35
Oeste	10	19	23	40	92
Total	40	65	64	81	250

¿Proporcionan estos datos la evidencia suficiente que indique una falta de independencia entre los dos criterios de clasificación? Sea $\alpha = .01$.

10.4.2 Quinientos empleados de una empresa que fabrica cierto producto, que se suponía estaba asociado con alteraciones respiratorias, se clasificaron en forma cruzada en base a su nivel de exposición al producto y si tenían o no los síntomas de tales alteraciones respiratorias. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

	Nivel de exposición			
Presencia de síntomas	Alto	limitado	Sin exposición conocida	Total
Sí	185	33	17	235
No	120	73	72	265
Total	305	106	89	500

¿Proporcionan estos datos la evidencia suficiente que indique, al nivel de significación de .01, una relación entre el nivel de exposición y la presencia de los síntomas de las alteraciones respiratorias?

10.4.3 Quinientos niños de escuela primaria se clasificaron en forma cruzada de acuerdo con el grupo socioeconómico y la presencia o ausencia de cierto defecto en la pronunciación. Los resultados fueron los siguientes.

	Grupo socioeconómico				
Defecto en la pronunciación	Superior	Medio superior	Medio inferior	Inferior	Total
Presente	8	24	32	27	91
Ausente	42	121	138	108	409
Total	50	145	170	135	500

¿Son compatibles estos datos con la hipótesis de que el defecto en la pronunciación no está relacionado con el estado socioeconómico?

10.4.4 A un grupo de 350 adultos, quienes participaron en una encuesta de salud, se les preguntó si llevaban o no una dieta. Las respuestas por sexos fueron las siguientes.

	Sexo		
	Masculino	Femenino	Total
A dieta	14	25	39
Sin dieta	159	152	311
Total	173	177	350

¿Sugieren estos datos que el estar a dieta depende del sexo? Sea $\alpha = .05$.

10.4.5 Una muestra de 500 estudiantes de bachillerato participó en un estudio diseñado con el fin de evaluar el grado de conocimiento respecto a un cierto grupo de enfermedades comunes de los estudiantes de este nivel. La tabla siguiente indica los estudiantes clasificados de acuerdo a su principal campo de estudio y al nivel de conocimiento del grupo de enfermedades.

Principal campo de estudio	Conocimiento de las enfermedades		
	Bueno	Deficiente	Total
Orientación premédica	31	91	122
Otras	19	359	378
Total	50	450	500

¿Sugieren estos datos que existe una relación entre el conocimiento del grupo de enfermedades y el principal campo de estudio de los estudiantes de bachillerato de los cuales se extrajo la presente muestra?

10.5 PRUEBAS DE HOMOGENEIDAD

Una característica de los ejemplos y ejercicios presentados en la última sección es que, en cada caso, se supuso que la muestra total había sido extraída antes de que las entidades se agruparan de acuerdo con los dos criterios de clasificación. Es decir, se determinó el número observado de entidades que caen en cada celda una vez que se extrajo la muestra. Como resultado, los totales de renglones y columnas son cantidades aleatorias que no están bajo el control del investigador. Se supone que la muestra extraída bajo estas condiciones es una sola muestra tomada de una sola población. Sin embargo, en ocasiones, los totales de renglones y columnas pueden estar bajo el control del investigador, es decir, el investigador puede especificar que esas muestras independientes se extraigan de varias poblaciones. En este caso, se dice que un conjunto de totales marginales es *fijo,* mientras que el otro conjunto, que corresponde al criterio de clasificación aplicado a las muestras, es *aleatorio.* Como se ha visto, el primer procedimiento conduce a una prueba ji–cuadrada de independencia. La última situación conduce a una *prueba* ji–cuadrada *de homogeneidad.* Las dos situaciones no sólo comprenden procedimientos de muestreo distintos; también, conducen a preguntas e hipótesis nulas distintas. La prueba de independencia trata la pregunta: ¿son independientes los dos criterios de clasificación? La prueba de homogeneidad trata la pregunta: ¿las muestras extraídas son de poblaciones homogéneas con respecto a algún criterio de clasificación? En el último caso, la hipótesis nula establece que las muestras se extraen de la misma población. A pesar de estas diferencias en concepto y procedimiento de muestreo, las dos pruebas son matemáticamente idénticas, como se aprecia cuando se considera el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10.5.1

Un investigador, estudiando el grado del uso de drogas entre estudiantes de bachillerato, que habían declarado ser adictos a ellas, seleccionó de este grupo una muestra de 150 alumnos del primer año, 135 del segundo año, 125 del tercer año y 100 del último año. Cada estudiante contestó un cuestionario en el que indicaba el grado de su uso de drogas como experimental, casual, o bien, moderado hasta intenso. Los resultados se muestran en la tabla 10.5.1. La manera de seleccionar las muestras, es decir, de seleccionar un número especificado de cada población, tiene el efecto de fijar los totales de los renglones de la tabla.

¿Son compatibles estos datos con la hipótesis de que las cuatro poblaciones son homogéneas con respecto al grado del uso de drogas? La estadística de prueba es la ahora conocida $X^2 = \Sigma\, [(O_i - E_i)^2/E_i]$. Para proceder, se necesitan entonces las frecuencias esperadas para cada una de las celdas de la tabla 10.5.1.

Si las poblaciones son además homogéneas o, lo que es equivalente, si todas las muestras se extraen de la misma población, con respecto al uso de drogas, el mejor cálculo de la proporción en la población combinada de quienes han empleado las drogas sólo experimentalmente es de $215/510 = .4216$. Por lo mismo, si las cuatro poblaciones son homogéneas, esta probabilidad se interpreta como si se aplicara individualmente a cada una de las poblaciones. Por ejemplo, bajo la

Tabla 10.5.1 Grado del uso de fármacos entre 510 estudiantes de bachillerato clasificados según el curso.

	Grado del uso de fármacos			
Curso	*Experimental*	*Casual*	*Moderado a intenso*	*Total*
Primero	57	50	43	150
Segundo	57	58	20	135
Tercero	56	45	24	125
Ultimo	45	22	33	100
Total	215	175	120	510

hipótesis nula, 215/510 es la mejor estimación de la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de entre los adictos a las drogas las tome sólo con el fin de experimentar. Se esperaría encontrar entonces, que $(215/510) \cdot 150 = 63.24$ de los 150 alumnos de primer año las toman con fines experimentales. Asimismo, se esperaría encontrar que $(215/510) \cdot 135 = 56.91$ alumnos de segundo año, $(215/510) \cdot 125 = 52.70$ de tercer año y $(215/510) \cdot 100 = 42.16$ del último año las tomen con el mismo fin.

Una vez más se ve que el procedimiento simplificado de multiplicar los totales marginales apropiados y dividir entre el gran total proporciona las frecuencias esperadas para las celdas. Las frecuencias esperadas que han sido calculadas de esta forma, junto con las frecuencias observadas, se muestran en la tabla 10.5.2. Las frecuencias esperadas están entre paréntesis.

A partir de los datos de la tabla 10.5.2, se calcula la siguiente estadística de prueba:

$$X^2 = \frac{(57 - 63.24)^2}{63.24} + \frac{(50 - 51.47)^2}{51.47} + \cdots + \frac{(33 - 23.53)^2}{23.53} = 19.4$$

Se encuentra que los grados de libertad asociados con este valor son 6 cuando se aplica la regla $(r - 1)(c - 1)$. Consultando la tabla I, se encuentra que la probabilidad de obtener un valor de X^2 tan grande como 19.4 o mayor que él, cuando la hipótesis nula es verdadera, es

Tabla 10.5.2 Frecuencias observada y esperada para el ejemplo 10.5.1

	Grado del uso de fármacos			
Curso	*Experimental*	*Casual*	*Moderado a intenso*	*Total*
Primero	57(63.24)	50(51.47)	43(35.29)	150
Segundo	57(56.91)	58(46.32)	20(31.76)	135
Tercero	56(52.70)	45(42.89)	24(29.41)	125
Ultimo	45(42.16)	22(34.31)	33(23.53)	100
Total	215	175	120	510

menor que .005. La decisión es entonces rechazar la hipótesis nula. Como consecuencia, se concluye que las poblaciones no son homogéneas con respecto al grado del uso de drogas.

Las reglas para las frecuencias esperadas pequeñas, que se dieron en la sección anterior, se aplican cuando se lleva a cabo una prueba de homogeneidad.

Cuando la prueba ji–cuadrada de homogeneidad se utiliza para probar la hipótesis nula de que dos poblaciones son homogéneas, y cuando sólo existen dos niveles del criterio de clasificación, los datos pueden presentarse en una tabla de contingencia de 2 X 2. El análisis es idéntico al análisis de las tablas de 2 X 2 dado en la sección 10.4.

En resumen, la prueba ji–cuadrada de homogeneidad tiene las siguientes características:

1. De antemano, dos o más poblaciones se identifican y, de cada una, se extrae una muestra independiente.
2. Los individuos u objetos de la muestra se colocan en categorías apropiadas de la variable de interés.
3. El cálculo de las frecuencias esperadas de las celdas se basa en el fundamento de que si las poblaciones son homogéneas, como se señaló en la hipótesis nula, la mejor estimación de la probabilidad de que un individuo u objeto caiga en una categoría particular de la variable de interés puede obtenerse juntando los datos de la muestra.
4. Las hipótesis y conclusiones se establecen en términos de la homogeneidad (con respecto a la variable de interés) de las poblaciones.

La prueba ji–cuadrada de homogeneidad para el caso de dos muestras constituye un método alternativo para probar la hipótesis nula de que las proporciones de las dos poblaciones son iguales. Se recordará que en la sección 6.6 se aprendió a probar $H_0 : p_1 = p_2$ contra $H_A : p_1 \neq p_2$ por medio de la estadística

$$z = \frac{(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1} + \dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_2}}}$$

donde $\bar{p}$ se obtiene juntando los datos de las dos muestras independientes disponibles para el análisis.

Supóngase, por ejemplo, que en la prueba $H_0 : p_1 = p_2$ contra $H_A : p_1 \neq p_2$, los datos de la muestra fueron los siguientes: $n_1 = 100$, $\tilde{p}_1 = .60$, $n_2 = 120$, $\tilde{p}_2 = .40$. Cuando se juntan los datos de la muestra se tiene que

$$\bar{p} = \frac{.60(100) + .40(120)}{100 + 120} = \frac{108}{220} = .4909$$

y

$$z = \frac{.60 - .40}{\sqrt{\dfrac{(.4909)(.5091)}{100} + \dfrac{(.4909)(.5091)}{120}}} = 2.95469$$

que es significativa al nivel de .05, ya que es mayor que el valor crítico de 1.96.

Si se desea probar la misma hipótesis utilizando el método de la ji–cuadrada, la tabla de contingencia sería:

	Característica presente		
Muestra	Sí	No	Total
1	60	40	100
2	48	72	120
Total	108	112	220

Mediante la ecuación 10.4.1, se calcula

$$X^2 = \frac{220[(60)(72) - (40)(48)]^2}{(108)(112)(100)(120)} = 8.7302$$

que es significativa al nivel de .05, ya que es mayor que el valor crítico de 3.841. Por lo tanto, se ve que se llega a la misma conclusión utilizando ambos métodos. Esto no es sorprendente ya que, como se explicó en la sección 10.2, $\chi_{(1)} = z^2$. Nótese que $8.7302 = (2.95469)^2$ y que $3.841 = (1.96)^2$.

Ejercicios

En los ejercicios siguientes, lleve a cabo la prueba al nivel de significación indicado y determine el valor *p*.

10.5.1 En un estudio del estado de la caries dental en los niños de seis comunidades con niveles variables de fluoruro en el suministro de agua, se seleccionó una muestra de 125 niños de cada una de las comunidades y se les practicó un examen dental. La tabla siguiente señala el número de niños sin caries de cada muestra.

Comunidad	Número de niños en la muestra	Número de niños sin caries
A	125	38
B	125	8
C	125	30
D	125	44
E	125	64
F	125	32
Total	750	216

¿Son compatibles estos datos con la hipótesis de que las seis poblaciones son homegéneas con respecto a la proporción de niños sin caries dental?

10.5.2 En un estudio diseñado para investigar la relación entre el estado de nutrición y la capacidad para realizar ciertas tareas, 400 animales de laboratorio, que habían sido entrenados para llevar a cabo estas tareas, se dividieron en cuatro grupos. Los cuatro grupos fueron alimentados con dietas distintas, representando diferentes niveles de deficiencias en la nutrición que iban desde una dieta bien balanceada (condición de tratamiento 1) hasta una altamente deficiente en nutrientes esenciales (condición de tratamiento 4). Después de que los animales habían sido sometidos a las dietas durante cierto tiempo, se probó su capacidad para realizar tareas de dificultad variable. Algunos animales fueron capaces sólo de realizar las tareas sencillas, algunos pudieron realizar tareas de dificultad moderada y otros pudieron efectuar las tareas más difíciles. La tabla siguiente muestra los 400 animales clasificados de acuerdo con la condición de tratamiento y el nivel de dificultad de la tarea llevada a cabo.

Dificultad de la tarea realizada	Condición de tratamiento 1	2	3	4	Total
Sencilla	3	12	27	49	91
Moderadamente difícil	13	62	36	48	159
Difícil	84	26	37	3	150
Total	100	100	100	100	400

¿Deben concluir los investigadores que existe una falta de homogeneidad entre los cuatro grupos con respecto a la capacidad para efectuar las tareas de dificultad variable?

10.5.3 Se seleccionó una muestra de los expedientes de un hospital que correspondían a pacientes cada uno de los cuales tenía cinco diagnósticos. Los registros se evaluaron con respecto a lo apropiado de la duración de la hospitalización. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

Diagnóstico	Hospitalización: Duración apropiada	Menos de la necesaria	Más de la necesaria	Total
I	31	6	13	50
II	49	2	4	55

	Hospitalización			
Diagnóstico	Duración apropiada	Menos de la necesaria	Más de la necesaria	Total
III	55	2	3	60
IV	42	9	24	75
V	33	3	9	45
Total	210	22	53	285

¿Sugieren estos datos una falta de homogeneidad entre los grupos de diagnóstico con respecto a la evaluación de la duración del internado? Sea $\alpha = .05$.

10.5.4 En un estudio sobre la contaminación atmosférica realizado en dos comunidades se seleccionó una muestra aleatoria de 200 familias de cada una de ellas. Se interrogó a uno de los miembros de cada familia acerca de si alguien de la familia se sentía afectado por la contaminación atmosférica. Las respuestas fueron las siguientes.

	¿Algún miembro de la familia ha sido afectado por la contaminación atmosférica?		
Comunidad	Sí	No	Total
I	43	157	200
II	81	119	200
Total	124	276	400

¿Pueden concluir los investigadores que las dos comunidades difieren con respecto a la variable de interés?

10.6 RESUMEN

En este capítulo se analizan algunos de los usos de la versátil distribución ji–cuadrada. Se estudian las pruebas ji–cuadrada de bondad de ajuste para las distribuciones normal, binomial y de Poisson. Se observa que el procedimiento consiste en calcular la estadística

$$X^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

la cual mide la discrepancia entre las frecuencias observadas (O_i) y las esperadas (E_i) de ocurrencia de los valores en ciertas categorías discretas. Cuando la hipótesis nula apropiada es verdadera, esta cantidad se distribuye aproximadamente como una χ^2. Cuando X^2 es mayor que el valor tabulado de χ^2 para algún α, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación α.

En este capítulo se analizan también las pruebas de independencia y de homogeneidad. Estas pruebas son matemáticamente equivalentes, pero conceptualmente distintas. Una vez más, estos criterios prueban en esencia la bondad de ajuste de los datos observados con los esperados bajo las hipótesis, respectivamente, de independencia de los dos criterios al clasificar los datos y la homogeneidad de las proporciones entre dos o más grupos.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. Explique cómo puede deducirse la distribución ji–cuadrada.
2. ¿Cuáles son la media y la variancia de la distribución ji–cuadrada?
3. Explique cómo se calculan los grados de libertad para las pruebas ji–cuadrada de bondad de ajuste.
4. Enuncie la regla de Cochran para las frecuencias esperadas pequeñas en las pruebas de bondad de ajuste.
5. ¿Cómo se hace el ajuste en el caso de frecuencias esperadas pequeñas?
6. ¿Qué es una tabla de contingencia?
7. ¿Cómo se calculan los grados de libertad cuando se calcula un valor X^2 a partir de una tabla de contingencia?
8. Explique las razones que fundamentan el método de calcular las frecuencias esperadas en una prueba de independencia.
9. Explique la diferencia que existe entre una prueba de independencia y una prueba de homogeneidad.
10. Explique las razones que justifican el método de calcular las frecuencias esperadas en una prueba de homogeneidad.

11. Un estudio de 190 embarazos proporcionó los siguientes datos sobre la relación que existe entre la hipertensión de la madre y cierta complicación del embarazo.

Cierta complicación en el embarazo	Madre hipersensible Sí	No	Total
Presente	23	55	78
Ausente	12	100	112
Total	35	155	190

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que las dos condiciones no son independientes? Sea $\alpha = .01$. ¿Cuál es el valor p?

12. Una muestra de 150 portadores crónicos de cierto antígeno y una muestra de 500 no portadores reveló la siguiente distribución de grupos sanguíneos.

Grupo sanguíneo	Portadores	No portadores	Total
O	72	230	302
A	54	192	246
B	16	63	79
AB	8	15	23
Total	150	500	650

¿Puede concluirse a partir de estos datos que las dos poblaciones de las cuales se tomaron las muestras difieren con respecto a la distribución de grupos sanguíneos? Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

13. La tabla siguiente muestra a 200 hombres clasificados de acuerdo con su clase social y tipo de dolor de cabeza:

	Clase social			
Muestra de estudio	A	B	C	Total
Sin dolor de cabeza (en el año anterior)	6	30	22	58
Dolor de cabeza simple	11	35	17	63

Muestra de estudio	Clase social A	B	C	Total
Dolor de cabeza unilateral (sin migraña)	4	19	14	37
Migraña	5	25	12	42
Total	26	109	65	200

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que el dolor de cabeza y la clase social están relacionados? Sea $\alpha = .05$.

¿Cuál es el valor p para esta prueba?

14. La tabla siguiente muestra la distribución de frecuencias de las calificaciones obtenidas en una prueba de aptitud por 175 aspirantes a un programa de adiestramiento en fisioterapia:

Calificación	Número de aspirantes
10–14	3
15–19	18
20–24	13
25–29	17
30–34	19
35–39	25
40–44	28
45–49	20
50–54	18
55–59	12
60–64	8
65–69	4
Total	175

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la población de calificaciones no está normalmente distribuida? Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

15. Varios estudios han aportado evidencia para apoyar la hipótesis de que la manipulación o "amansamiento" de las ratas durante las primeras etapas de su vida tiene resultados benéficos. Supóngase un estudio en el cual se compara una muestra de ratas manipuladas y una muestra de ratas sin amansar con respecto al estado total de salud, obteniéndose los siguientes resultados:

Estado de salud	Grupo Amansado	Sin amansar	Total
Favorable	37	23	60
Malo	13	27	40
Total	50	50	100

¿Apoyarían estos datos la hipótesis? Sea $\alpha = .05$.

16. Un departamento local de salud patrocinó un programa de información sobre enfermedades venéreas que fue abierto para estudiantes de bachillerato del penúltimo y último años con edades que fluctuaban entre 16 y 19 años. El director del programa pensó que cada nivel de edades estaba igualmente interesado en saber más acerca de las enfermedades venéreas. Dado que cada nivel de edades estaba casi igualmente representado en el área de estudio, el director supuso que se reflejaría un igual interés en las enfermedades venéreas debido a la igual concurrencia de los estudiantes por nivel de edades durante la presentación del programa. La clasificación por edades de quienes concurrieron al programa fue la siguiente.

Edad	Número de concurrentes
16	26
17	50
18	44
19	40

¿Son incompatibles estos datos con la suposición del director del programa de que los estudiantes de los cuatro niveles de edades están igualmente interesados en el programa sobre enfermedades venéreas? Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor de p para esta prueba?

17. En una encuesta, los niños menores de 15 años de edad que viven en la zona central de una gran ciudad fueron clasificados de acuerdo con el grupo étnico al que pertenecen y el nivel de hemoglobina que poseen. Los resultados fueron los siguientes:

Grupo étnico	Nivel de hemoglobina (gm/100 ml) 10.0 ó mayor	9.0–9.9	<9.0	Total
A	80	100	20	200
B	99	190	96	385
C	70	30	10	110
Total	249	320	126	695

¿Proporcionan estos dados evidencia suficiente que indique, al nivel de significación de .05, que las dos variables están relacionadas? ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

18. Una muestra de los casos reportados de paperas en niños de edad preescolar mostró la siguiente distribución por edades:

Edad (años)	Número de casos
Menos de 1	6
1	20
2	35
3	41
4	48
Total	150

Pruebe la hipótesis de que los casos se presentan con igual frecuencia en las cinco categorías por edades. Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

19. A cada uno de los hombres de una muestra de tamaño 250 extraída de una población que se sospechaba sufría de las articulaciones se le preguntó cuál de tres síntomas era el que más presentaba. La misma pregunta se le hizo a una muestra de 300 mujeres que se sospechaba padecía la misma enfermedad. Los resultados fueron los siguientes:

Síntoma más molesto	Hombres	Mujeres
Rigidez matutina	111	102
Dolor nocturno	59	73
Edema en las articulaciones	80	125
	250	300

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que las dos poblaciones no son homogéneas con respecto a los síntomas principales. Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

Para cada una de las situaciones siguientes, indique si es apropiada una hipótesis nula de homogeneidad o una hipótesis nula de independencia.

20. Un investigador deseaba comparar el estado de tres comunidades con respecto a la inmunidad ante la poliomielitis en niños en edad preescolar. Se extrajo una muestra de esos niños de cada una de las comunidades.
21. En un estudio de la relación que existe entre el fumar y las enfermedades respiratorias, se clasificó una muestra aleatoria de adultos con respecto al consumo de tabaco y el grado de los síntomas respiratorios.
22. Un médico, quien deseaba saber más acerca de la relación entre el fumar y las alteraciones al nacer, estudió los expedientes de salud de una muestra de madres y sus hijos incluyendo, hasta donde fuera posible, los fetos todavía vivos y los que fueron abortados espontáneamente.
23. Un grupo de médicos investigadores piensa que la incidencia de depresión es mayor entre las personas con hipoglicemia que entre las personas que no padecen esta enfermedad.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. Karl Pearson, "On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling," *The London, Edinburgh and Dublin Philo-*

sophical Magazine and Journal of Science, quinta serie, 50 (1900), 157–175. Reimpreso en *Karl Pearson's Early Statistical Papers,* Cambridge University Press, 1948.

2. H. O. Lancaster, *The Chi-Squared Distribution,* Wiley, Nueva York, 1969.
3. Harald Cramer, *Mathematical Methods of Statistics,* Princeton Univesity Press, Princeton, N.J., 1958.
4. Ram C. Dahiya y John Gurland, "Pearson Chi-squared Test of Fit With Random Intervals," *Biometrika, 59* (1972), 147–153.
5. G. S. Watson, "On Chi-Square Goodness-of Fit Tests for Continuous Distributions," *Journal of the Royal Statistical Society, B, 20* (1958), 44–72.
6. G. S. Watson, "The χ^2 Goodness-of-Fit Test for Normal Distributions," *Biometrika, 44* (1957), 336–348.
7. G. S. Watson, "Some Recent Results in Chi-Square Goodness-of-Fit Tests," *Biometrics, 15* (1959), 440–468.
8. G. R. Chase, "On the Chi-Square Test When the Parameters Are Estimated Independently of the Sample," *Journal of the American Statistical Association, 67* (1972), 609–611.
9. William G. Cochran, "The χ^2 Test of Goodness of Fit," *Annals of Mathematical Statistics, 23* (1952), 315–345.
10. William G. Cochran, "Some Methods for Strengthening the Common χ^2 Tests," *Biometrics, 10* (1954), 417–451.
11. John T. Roscoe y Jackson A. Byars, "An Investigation of the Restraints with Respect to Sample Size Commonly Imposed on the Use of the Chi-Square Statistic," *Journal of the American Statistical Association, 66* (1971), 755–759.
12. James K. Yarnold, "The Minimum Expectation in X^2 Goodness-of-Fit Test and the Accuracy of Approximations for the Null Distribution," *Journal of the American Statistical Association, 65* (1970), 864–886.
13. Merle W. Tate y Leon A. Hyer, "Significance Values for an Exact Multinomial Tests and Accuracy of the Chi-Square Approximation," U.S. Department of Health Education, and Welfare, Office of Education Bureau of Research, agosto 1969.
14. Malcolm J. Slakter, "Comparative Validity of the Chi-Square and Two Modified Chi-Square Goodness-of-Fit Tests for Small but Equal Expected Frequencies," *Biometrika, 53* (1966), 619–23.
15. Malcolm J. Slakter, "A Comparison of the Pearson Chi-Square and Kolmogorov Goodness-of-Fit Tests with Respect to Validity,"

Journal of the American Statistical Association, 60 (1965), 854–858.

16. R. C. Lewontin y J. Felsenstein, "The Robustness of Homogeneity Tests in 2 X *N* Tables," *Biometrics, 21* (1965), 19–33.
17. F. Yates, "Contingency Tables Involving Small Numbers and the χ^2 Tests," *Journal of the Royal Statistical Society Supplement, 1* 1934 (Serie B), 217–235.
18. J. E. Grizzle, "Continuity Correction in the χ^2 Test for 2 X 2 Tables," *The American Statistician, 21* (octubre, 1967), 28–32.
19. H.O. Lancaster, "The Combination of Probabilities Arising from Data in Discrete Distributions," *Biometrika, 36* (1949), 370–382.
20. E. S. Pearson, "The Choice of Statistical Test Illustrated on the Interpretation of Data in a 2 X 2 Table," *Biometrika, 34* (1947), 139–167.
21. R. L. Plackett, "The Continuity Correction in 2 X 2 Tables," *Biometrika, 51* (1964), 427–338.

11

Estadísticas no paramétricas y de libre distribución

11.1 INTRODUCCIÓN

Los procedimientos de inferencia estadística que se han estudiado hasta aquí, con una excepción, se clasifican como *estadísticas paramétricas.* La única excepción son los usos de la ji-cuadrada: como una prueba de bondad del ajuste y como una prueba de independencia. Estos usos de la ji-cuadrada vienen bajo el título de *estadísticas no paramétricas.*

La pregunta obvia es ahora: ¿cuál es la diferencia? Como respuesta, recuérdese la naturaleza de los procedimientos de inferencia que se han clasificado como *paramétricos.* En cada caso, el interés se centró en estimar o probar una hipótesis acerca de uno o más parámetros de la población. Además, lo básico de estos procedimientos fue el que se conociera la distribución de la población de la cual se extrajeron las muestras que proporcionan la base para la inferencia.

Un ejemplo de una prueba estadística paramétrica es la ampliamente utilizada prueba t. Los usos más comunes de esta prueba son para probar una hipótesis acerca de la media de una sola población o la diferencia entre las medias de dos poblaciones. Una de las suposiciones que fundamentan el uso válido de esta prueba es que la población o poblaciones muestreadas tengan, al menos, una distribución aproximadamente normal.

Como se aprenderá, los procedimientos que se estudian en este capítulo no se refieren a parámetros de población ni dependen del conocimiento de la población muestreada. Estrictamente hablando, sólo aquellos procedimientos que prueban hipótesis que no son afirmaciones acerca de parámetros de población se clasifican como *no paramétricos,* mientras que aquellos que no hacen suposición alguna acerca de la población muestreada se conocen como procedimientos *a libre distribución.* A pesar de esta diferencia, se acostumbran utilizar los términos *no paramétrico* y *a libre distribución* indistintamente y analizar los diversos procedimientos de ambos tipos bajo el título de *estadísticas no paramétricas.* Se seguirá esta convención. Este punto es tratado por Kendall y Sundrum[1] y Gibbons.[2]

La razón anterior implica las dos ventajas siguientes de las estadísticas no paramétricas.

1. Permiten la prueba de hipótesis que no constituyen afirmaciones acerca de valores de los parámetros poblacionales. Las pruebas ji-cuadrada de bondad de ajuste y de independencia son ejemplos de pruebas que tienen esta ventaja.
2. Las pruebas no paramétricas pueden utilizarse cuando se desconoce la distribución de la población muestreada.

Han sido enumeradas otras ventajas por varios autores, como por ejemplo, Gibbons,[2] Blum y Fattu,[3] Moses[4] y Siegel.[5] Además de las dos ya mencionadas, las siguientes ventajas son las que se dan con más frecuencia.

3. Los procedimientos no paramétricos son más fáciles de calcular y, en consecuencia, se aplican con mayor rapidez que los procedimientos paramétricos. Esta puede ser una característica conveniente en ciertos casos, pero cuando el tiempo no es un factor importante, merece poca prioridad como criterio para elegir una prueba no paramétrica.
4. Los procedimientos no paramétricos pueden aplicarse cuando los datos que se están analizando constan simplemente de categorías o clasificaciones. Es decir, los datos pueden no estar basados en una escala de medición lo suficientemente sólida como para permitir las operaciones aritméticas necesarias para llevar a cabo los procedimientos paramétricos. El tema de las escalas de medición se analizará con más detalle en la sección siguiente.

Aunque las estadísticas no paramétricas tienen ciertas ventajas, también deben reconocerse sus desventajas. Moses[4] ha destacado las siguientes.

1. El uso de procedimientos no paramétricos con datos que pueden manejarse con un procedimiento paramétrico conduce a un desperdicio de información.
2. La aplicación de algunas de las pruebas no paramétricas puede ser laboriosa para muestras grandes.

En un libro de texto de introducción general, la limitación del espacio impide la presentación de más de una muestra de procedimientos no paramétricos. Otros procedimientos estudiados a un nivel introductorio o intermedio pueden encontrarse en los textos escritos por Conover,[6] Siegel,[5] Bradley,[7] Kraft y Van Eeden,[8] Tate y Clelland,[9] Gibbons,[10] Mosteller y Rourke,[11] Pierce,[12] Noether,[13] Hollander y Wolfe,[14] Daniel,[15] Marascuilo y McSweeney[16] y Lehmann.[17] Libros matemáticamente más rigurosos han sido escritos por Gibbons,[2] Hajek[18] y Walsh.[19, 20] Savage[21] ha preparado una bibliografía de estadísticas no paramétricas.

11.2 ESCALAS DE MEDICIÓN

Como se señaló en la sección anterior, una de las ventajas de los procedimientos estadísticos no paramétricos es el hecho de que pueden utilizarse con datos basados en una escala de medición débil. Para comprender completamente el significado de esta afirmación, es necesario entender el significado de medición y de las diversas escalas de medición que se utilizan con más frecuencia. Este aspecto se estudia con considerable detalle en la literatura citada. Consulte, en particular, los escritos de Stevens.[22,23]

Medición. Esta puede definirse como la asignación de números a objetos o eventos de acuerdo con un conjunto de reglas. Las diversas escalas de medición son consecuencia del hecho de que la medición puede llevarse a cabo bajo diferentes series de reglas.

La escala nominal. La escala de medición más baja es la *escala nominal.* Como su nombre lo indica, consiste en "nombrar" las observaciones o clasificarlas en varias categorías mutuamente exclusivas y colectivamente exhaustivas. La práctica de utilizar números para distinguir entre los diversos diagnósticos médicos constituye una medición sobre una escala nominal. Otros ejemplos incluyen dicotomías tales como masculino-femenino, sano-enfermo, de menos de 65 años de edad y de 65 y más, niño-adulto y casado-soltero. Como se ha visto, bajo ciertas condiciones, la prueba ji-cuadrada puede utilizarse para probar hipótesis acerca de la frecuencia de ocurrencia de observaciones en varias categorías nominales.

La escala ordinal. Siempre que las observaciones no sólo difieran de categoría a categoría, sino que puedan clasificarse por rango de acuerdo con algún criterio, se dice que se miden sobre una escala ordinal. Los pacientes convalescientes pueden caracterizarse como no mejorados, mejorados y bastante mejorados. Las personas pueden clasificarse de acuerdo con su estado socioeconómico como pobres, de clase media o ricos. La inteligencia de los niños puede estar por encima del promedio, en el promedio o por debajo de éste. En cada uno de estos ejemplos, todos los miembros de cualquiera de las categorías se consideran iguales, pero los miembros de una categoría se consideran inferiores, peores o menores que los de otra categoría que, a su vez, guardan una relación similar con los de otra categoría. Por ejemplo, un paciente bastante mejorado está en mejor estado de salud que uno clasificado como mejorado, mientras que un paciente que ha mejorado está en mejor condición que uno que no ha mejorado. Por lo común, es imposible inferir que la diferencia entre los miembros de una de las categorías y la categoría inmediata adyacente sea igual a la diferencia entre los miembros de esa categoría y los miembros de la categoría adyacente a ella. El grado de mejoría entre los no mejorados y los mejorados quizá no sea el mismo que el que existe entre los mejorados y los bastante mejorados. La implicación es que si se hiciera una división más fina que conduzca a más categorías, éstas podrían también ordenarse de manera semejante. La función de los números asignados a datos ordinales es la de ordenar (o asignar una categoría según el rango) las observaciones desde las más bajas hasta las más altas, de aquí el término ordinal. Se han desarrollado numerosas pruebas estadísticas no paramétricas para utilizarlas con datos ordinales.

La escala de intervalos. La *escala de intervalos* es una escala más especializada que la nominal o la ordinal en el sentido de que, con esta escala, no sólo es posible ordenar las mediciones, sino que se conoce también la distancia entre dos mediciones cualesquiera. Por decir algo, se sabe que la diferencia entre una medida de 20 y una medida de 30 es igual a la diferencia entre las medidas de 30 y 40. La habilidad para hacer esto implica el uso de una distancia unitaria y un punto cero, los cuales son arbitrarios. El punto seleccionado como cero no es un cero verdadero en el sentido de que no indica una ausencia total de la cantidad que se está midiendo. Quizá el mejor ejemplo de una escala de intervalos sea la forma en que generalmente se mide la temperatura. La unidad de medición es el grado y el punto de comparación es el arbitrariamente seleccionado "cero grados". La escala de intervalos, a diferencia de las escalas nominal y ordinal, es una escala verdaderamente cuantitativa. Cuando se ha logrado la escala de intervalos para la medición y cuando se satisfacen las suposiciones del modelo, pueden utilizarse los procedimientos usuales de estadísticas paramétricas, como la prueba t y la prueba F.

La escala de razones. El nivel más alto de medición es la *escala de razones.* Esta escala se caracteriza por el hecho de que puede determinarse la igualdad de las razones, así como la igualdad de los intervalos. Para esta escala, es fundamental un punto cero verdadero. La medición de rasgos tan familiares como la estatura, el peso y la longitud, hacen uso de este tipo de escala. Cuando se ha logrado la escala de razones para la medición, puede utilizarse cualquier procedimiento estadístico siempre que se satisfagan las suposiciones del modelo particular que se ha utilizado.

Muchos autores, como por ejemplo Conover[6] y Siegel,[5] indican que pruebas estadísticas distintas requieren diferentes escalas de medición. Aunque esta idea parece seguirse en la práctica, Anderson,[24] Gaito,[25] Lord[26] y Armstrong[27] presentan otros puntos de vista interesantes. Este tema es estudiado también por Borgatta y Bohrnstedt.[28]

11.3 LA PRUEBA DEL SIGNO

La conocida prueba t no es estrictamente válida para probar *a*) la hipótesis nula de que la media de una población es igual a algún valor particular, o bien, *b*) la hipótesis nula de que la diferencia entre las medias de dos poblaciones es igual a cero, a menos que se sepa (o el investigador se incline a suponer) que las poblaciones en cuestión están normalmente distribuidas. El caso *b*) se reconocerá como una situación que se analizó mediante la prueba de comparaciones pareadas dada en el capítulo 6. Cuando no pueden hacerse suposiciones de normalidad o cuando los datos disponibles son categorías en lugar de medidas sobre una escala de intervalos o de razones, debe buscarse una prueba alternativa. Aun cuando se sabe que la prueba t es algo insensible a las violaciones de la suposición de normalidad, hay casos en los que es deseable buscar una prueba alternativa.

Una prueba no paramétrica que se utiliza con frecuencia y que no depende de las suposiciones de la prueba t, o de mediciones que exceden la escala ordinal, es la *prueba del signo.* Esta prueba se centra en la mediana, más que en la media, como una medida de tendencia central o de localización. La mediana y la media serán iguales en distribuciones simétricas. La única suposición que fundamenta la prueba es que la distribución de la variable de interés es continua.

La prueba del signo toma su nombre del hecho de que los signos más y menos, más que los valores numéricos, proporcionan los datos en bruto que se utilizan en los cálculos. Se ilustrará el uso de esta prueba primero en el caso de una sola muestra y, a continuación, mediante un ejemplo que implique muestras pareadas.

Ejemplo 11.3.1

En una escuela para retrasados mentales, 10 niñas seleccionadas al azar recibieron instrucción especial sobre el cuidado y aseo personal. Dos semanas después de haber concluido el curso de instrucción, las niñas fueron entrevistadas por una enfermera y una trabajadora social, quienes asignaron a cada niña una calificación basada en su apariencia general. Los investigadores creían que, a lo más, las calificaciones alcanzarían el nivel de una escala ordinal. Tenían la sensación de que aun cuando una calificación de, por decir, 8 representaba una apariencia mejor que una calificación de 6, no se inclinaban a decir que la diferencia entre las calificaciones de 6 y 8 era igual a la diferencia entre, por decir, las calificaciones 8 y 10; o bien, que la diferencia entre las calificaciones de 6 y 8 representaba el doble de mejora que la diferencia entre las calificaciones de 5 y 6. Las calificaciones se muestran en la tabla 11.3.1.

A continuación, se utilizarán estos datos para probar, al nivel de significación de .05, la hipótesis nula de que la calificación mediana de la población hipotética, de la cual se supone se ha extraído la muestra, es 5 contra la alternativa de que la mediana no es 5. Este enunciado de la hipótesis alternativa implica una prueba bilateral.

Tabla 11.3.1 Calificaciones de aspecto general obtenidas por 10 niñas con retraso mental.

Niña	*Calificación*	*Niña*	*Calificación*
1	4	6	6
2	5	7	10
3	8	8	7
4	8	9	6
5	9	10	6

Tabla 11.3.2 Calificaciones por arriba (+) y por debajo (−) de la mediana establecida en la hipótesis en base a los datos del ejemplo 11.3.1.

Niña	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Calificación relativa a la mediana establecida en la hipótesis	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+

Como primer paso en la prueba de la hipótesis, se examinarán los datos de la tabla 11.3.1 para determinar qué calificaciones están por arriba y cuáles por debajo de la mediana de 5 planteada en la hipótesis. Si se asigna un signo más a aquellas calificaciones que están por arriba de la mediana establecida en la hipótesis y un menos a las que caen por debajo, se tienen los resultados que se muestran en la tabla 11.3.2.

Si la hipótesis nula fuera verdadera, es decir, si, en efecto, la mediana fuera 5, se esperaría encontrar que el número de calificaciones que caen por arriba y por debajo de 5 sean aproximadamente iguales. Esta línea de razonamiento sugiere otra forma en la que podría haberse enunciado la hipótesis nula, a saber, que la probabilidad de un signo más es igual a la probabilidad de uno menos, y estas probabilidades son, cada una, iguales a .5. Enunciada simbólicamente, la hipótesis sería

$$H_0: P(+) = P(-) = .5$$

En otras palabras, se esperaría casi el mismo número de signos más que de signos menos en la tabla 11.3.2 cuando H_0 es verdadera. La observación de esta tabla revela que hay más signos más; específicamente, se observan ocho signos más, uno menos y un cero, el cual se asignó a la calificación que cayó exactamente en la mediana. El procedimiento habitual de manejar los ceros es eliminarlos del análisis y reducir n, el tamaño de la muestra de acuerdo con esta eliminación. Si se sigue este procedimiento, el problema se reduce a uno que consta de nueve observaciones, de las cuales ocho son signos más y uno es menos.

Dado que el número de signos más y menos no es el mismo, uno se pregunta si la distribución de los signos es lo suficientemente desproporcionada como para arrojar alguna duda sobre la hipótesis. Diciéndolo de otra forma, uno se pregunta si este pequeño número de signos menos pudo haber sido únicamente resultado del azar cuando la hipótesis nula es verdadera; o bien, si el número es tan pequeño que algo que no es el azar (es decir, una hipótesis nula falsa) es responsable de los resultados.

Con base en lo que se aprendió en el capítulo 3, parece razonable concluir que las observaciones de la tabla 11.3.2 constituyen un conjunto de n variables aleatorias independientes de la población de Bernoulli con parámetro p. Sea k = el número de signos menos, la distribución muestral de k tiene distribución binomial con parámetro $p = .5$, si la hipótesis nula es verdadera.

Puede determinarse la probabilidad de observar x o un menor número de signos menos cuando se da una muestra de tamaño n y parámetro p al calcular la siguiente expresión:

$$P(k \leq x | n, p) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{11.3.1}$$

Para el ejemplo se calcularía

$$\binom{9}{0}(.5)^0(.5)^{9-0} + \binom{9}{1}(.5)^1(.5)^{9-1} = .00195 + .01758 = .0195$$

Puede utilizarse la tabla C y encontrar

$$P(k \leq 1 | 9, .5) = .0195$$

Con una prueba bilateral, un número muy pequeño de signos menos o de signos más provocaría el rechazo de la hipótesis nula. Dado que, en el ejemplo, se tiene un menor número de signos menos, la atención se centra en estos signos más que en los signos más. Asignando a α el valor .05, se está diciendo que si el número de signos menos es tan pequeño que la probabilidad de observar tan pocos o, incluso, menos, es menor que .025 (la mitad de α), se rechazará la hipótesis nula. La probabilidad que se ha calculado, .0195, es menor que .025. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la calificación mediana no es de .5. El valor p para esta prueba es de $2(.0195) = .0390$.

Cuando los datos que van a analizarse constan de observaciones en parejas y no se satisfacen las suposiciones que fundamentan la prueba t, o la escala de medición es débil, puede utilizarse la prueba del signo para probar la hipótesis nula de que la diferencia entre las medianas es de 0. Una alternativa es enunciar la hipótesis nula en la forma siguiente:

$$P(X_i > Y_i) = P(X_i < Y_i) = .5$$

De la pareja de calificaciones, se toma una, digamos Y_i y se resta de la otra calificación, X_i. Si Y_i es menor que X_i, el signo de la diferencia es +, y si Y_i es mayor que X_i, el signo de la diferencia es −. Si la diferencia entre las medianas es 0, se esperaría que una pareja seleccionada al azar tenga precisamente la misma probabilidad de dar un + como un − cuando se hace la resta. Puede enunciarse entonces la hipótesis nula como

$$H_0: P(+) = P(-) = .5$$

En una muestra aleatoria formada por parejas, se esperaría encontrar que el número de signos + y de signos − sea aproximadamente igual. Si se tienen muchos más + o muchos más −, que los que pueden ser atribuidos al azar únicamente, cuando la hipótesis nula es verdadera, se tendrá alguna duda acerca de la veracidad de la hipótesis nula. Mediante la prueba del signo, puede decidirse cuántos de uno de los signos constituyen más de los que pueden ser atribuidos únicamente al azar.

Ejemplo 11.3.2

Se formaron doce parejas de pacientes de una clínica dental clasificándolos por factores tales como la edad, el sexo, la inteligencia y las calificaciones de higiene bucal inicial. Un miembro de cada pareja recibió instrucción acerca de la forma de cepillarse los dientes y otros

Tabla 11.3.3 Calificaciones de higiene oral de 12 personas que recibieron instrucción de higiene oral (X_i) y de 12 personas que no recibieron dicha instrucción (Y_i)

	Calificación	
Número de pareja	*Instruida* (X_i)	*No instruida* (Y_i)
1	1.5	2.0
2	2.0	2.0
3	3.5	4.0
4	3.0	2.5
5	3.5	4.0
6	2.5	3.0
7	2.0	3.5
8	1.5	3.0
9	1.5	2.5
10	2.0	2.5
11	3.0	2.5
12	2.0	2.5

temas de higiene bucal. Seis meses después, se examinaron los 24 individuos y se les asignó una calificación de higiene bucal mediante el examen de un especialista en higiene dental, quien ignoraba qué personas habían recibido la instrucción. Una calificación baja indica un alto nivel de higiene bucal. Los resultados se muestran en la tabla 11.3.3.

El investigador deseaba saber si podía concluir que la instrucción había producido un efecto benéfico. Si así era, este hecho se reflejaría en las calificaciones asignadas a los miembros de cada pareja. Si se toman las diferencias $X_i - Y_i$, es de esperar que se observen más signos $-$ que $+$ si la instrucción ha sido benéfica, ya que una baja calificación indica un nivel más alto de higiene oral. Si, en efecto, la instrucción es benéfica, la mediana de la población hipotética de tales diferencias sería menor que 0, es decir, negativa. Si, por otra parte, la instrucción no ha tenido efecto alguno, la mediana de esta población sería de cero. Las hipótesis nula y la alternativa son entonces,

H_0: la mediana de las diferencias es cero.
H_A : la mediana de las diferencias es negativa.

Utilícese un nivel de significación de 0.5 y procédase a probar la hipótesis nula. Como se verá, el procedimiento es idéntico al procedi-

Tabla 11.3.4 Signos de las diferencias ($X_i - Y_i$) en las calificaciones de higiene oral de 12 personas instruidas (X_i) y 12 personas apareadas no instruidas (Y_i).

Pareja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Signo de las diferencias de las calificaciones obtenidas	−	0	−	+	−	−	−	−	−	−	+	−

miento de una sola muestra una vez que se han obtenido las diferencias de calificaciones para cada pareja. Haciendo las restas y observando los signos, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 11.3.4.

La naturaleza de la hipótesis indica una prueba unilateral, de modo que todo el $\alpha = .05$ se asocia con la región de rechazo que consta de todos los valores de k (donde k es igual al número de signos +) para los cuales la probabilidad de obtener tantos como esos o menos signos de más, debido únicamente al azar cuando H_0 es verdadera, es igual o menor que .05. En la tabla 11.3.4 se ve que el experimento condujo a un cero, dos signos más y nueve signos menos. Al eliminarse el cero, el tamaño efectivo de la muestra es de $n = 11$, con dos signos más y nueve signos menos. En otras palabras, dado que sólo unos pocos signos más provocarán el rechazo de la hipótesis nula, se desea conocer la probabilidad de obtener no más de dos signos más en los once ensayos, cuando la hipótesis nula es verdadera. Como se ha visto, la respuesta se obtiene calculando la expresión binomial apropiada. En este ejemplo, se encuentra que

$$P(k \leq 2 | 11, .5) = \sum_{k=0}^{2} \binom{11}{k} (.5)^k (.5)^{11-k}$$

Consultando la tabla C, se encuentra que esta probabilidad es de .0327. Dado que .0327 es menor que .05, debe rechazarse H_0 y concluir que la diferencia de las medianas es negativa. Es decir, se concluye que la instrucción fue benéfica. Para esta prueba, $p = .0327$.

Como se ha demostrado, la prueba del signo puede utilizarse con una sola muestra o con dos muestras en las cuales cada miembro de una de las muestras se une con uno de los miembros de la otra muestra para formar una muestra de parejas. Se ha visto también que la hipótesis alternativa puede conducir a una prueba unilateral o a una prueba bilateral. En cualquier caso, la atención se centra en el signo que se presenta con menos frecuencia y se calcula la probabilidad de obtener ese número o menos de ese signo.

Se utiliza el signo que se presenta con menos frecuencia como estadística de prueba debido a que las probabilidades binomiales de la tabla C son probabilidades "menores que o iguales a". Utilizando el signo que ocurre con menos frecuencia, puede obtenerse la probabilidad que se necesita saber directamente de la tabla C sin tener que hacer resta alguna. Si las probabilidades de la tabla C fueran probabilidades "mayores que o iguales a", como suelen encontrarse en las tablas de la distribución binomial, se utilizaría como estadística de prueba el signo que ocurriera con más frecuencia para tomar ventaja de la conveniencia de obtener directamente la probabilidad deseada de la tabla sin tener que hacer resta alguna. De hecho, en los presentes ejemplos, puede utilizarse como estadística de prueba el signo que se presente con más frecuencia, pero dado que la tabla C contiene probabilidades "menores que o iguales a", se tendría que hacer una resta para obtener la probabilidad deseada. Como ilustración, considérese el último ejemplo. Si se utiliza como estadística de prueba el signo que ocurre con más frecuencia, que es el signo −, el valor de la estadística es 9. La probabilidad deseada es entonces la probabilidad de 9 ó más signos menos, cuando $n = 11$ y $p = .5$. Es decir, se necesita

$$P(k \geq 9 \mid 11, .5)$$

Sin embargo, dado que la tabla C contiene probabilidades "menores que o iguales a", debe obtenerse esta probabilidad mediante sustracción. Es decir,

$$\begin{aligned} P(k \geq 9 \mid 11, .5) &= 1 - P(k \leq 8 \mid 11, .5) \\ &= 1 - .9673 \\ &= .0327 \end{aligned}$$

que es el resultado obtenido anteriormente.

Tamaño de la muestra. En el capítulo 4 se estudió que, cuando el tamaño de la muestra es grande y p está cercano a .5, la distribución binomial puede ser aproximada por la distribución normal. La regla empírica utilizada fue que resulta apropiada la aproximación normal cuando tanto np como nq son mayores que 5. Cuando $p = .5$, como se estableció en la hipótesis en los dos ejemplos en cuestión, una muestra de tamaño 12 satisfaría la regla empírica. Siguiendo este razonamiento, puede utilizarse la aproximación normal cuando se usa la prueba del signo para probar la hipótesis nula de que la mediana o la diferencia de medianas es 0 y n es igual a, o mayor que 12. Gibbons[2] está de acuerdo con esta sugerencia, aunque Siegel[5] recomienda que n sea, al menos, 25. Dado que el procedimiento implica la aproximación de una distribución continua mediante una distribución discreta, en general, se utiliza la corrección de continuidad de .5. La estadística de prueba es entonces

$$z = \frac{(k \pm .5) - .5n}{.5\sqrt{n}} \tag{11.3.2}$$

la cual se compara con el valor de z de la distribución normal unitaria que corresponde al nivel de significación elegido. En la ecuación 11.3.2, se utiliza $k + .5$ cuando $k < n/2$ y $k - .5$ se utiliza cuando $k > n/2$.

Además de las referencias ya citadas, la prueba del signo se estudia con considerable detalle en Dixon y Mood.[29]

Ejercicios

11.3.1 A una muestra aleatoria de 15 estudiantes de enfermería se les hizo una prueba para medir su nivel de autoritarismo, obteniéndose los siguientes resultados.

Número del estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Calificación de autoritarismo	75	90	85	110	115	95	132	74	82	104	88	124
Número del estudiante	13	14	15									
Calificación de autoritarismo	110	76	98									

Pruebe al nivel de significación de .05 la hipótesis nula de que la mediana de la calificación para la población muestreada es de 100. Determine el valor p.

11.3.2 A un grupo de 20 pacientes que asistían a una clínica de fisioterapia se les sometió a una determinada prueba diseñada para medir su nivel de motivación, antes de que participaran en un programa experimental de remotivación. Al término del programa, los pacientes fueron sometidos a una nueva prueba. Las calificaciones antes y después fueron las siguientes.

	Calificación			Calificación	
Paciente	Antes	Después	Paciente	Antes	Después
1	10	15	11	16	24
2	8	10	12	10	23
3	5	10	13	15	25
4	14	14	14	5	15
5	15	25	15	24	20
6	22	20	16	20	25
7	17	20	17	14	24
8	10	22	18	10	23
9	8	16	19	15	25
10	20	18	20	14	25

¿Se concluiría que el programa de remotivación es eficaz? Sea $\alpha = .05$. Una calificación alta indica un alto nivel de motivación. Determine el valor p.

11.4 LA PRUEBA DE LA MEDIANA

La prueba del signo para dos muestras, dada en la sección anterior, requirió que las muestras estuvieran relacionadas. Con frecuencia, se tiene interés en hacer inferencias basadas en dos muestras que no están relacionadas, es decir, que son independientes. Para probar la hipótesis nula de que dos muestras son extraídas de poblaciones con medias iguales, se utilizan las estadísticas t o z (dependiendo del tamaño de las muestras y de si se conocen o desconocen las variancias de las poblaciones) cuando se satisfacen las condiciones para estas pruebas paramétricas. Una contraparte no paramétrica la proporciona la prueba de la mediana, que puede utilizarse para probar la hipótesis nula de que dos muestras independientes se han extraído de poblaciones con medianas iguales. Esta prueba, atribuida principalmente a Mood[30] y Westenberg,[31] la analizan también Brown y Mood[32] y Moses,[4] así como varias referencias ya citadas.

Las suposiciones que fundamentan esta prueba son *a*) las muestras se seleccionan independientemente y al azar de sus poblaciones respectivas, *b*) las poblaciones tienen la misma ditribución, difiriendo sólo en su localización y *c*) la variable de interés es continua. El nivel de medición debe ser, al menos, ordinal. Las dos muestras no tienen que ser del mismo tamaño. El procedimiento de prueba puede demostrarse mejor mediante un ejemplo.

Ejemplo 11.4.1

Los miembros de una muestra aleatoria de 12 estudiantes varones de una escuela secundaria rural y de una muestra aleatoria independiente de 16 estudiantes varones de una escuela secundaria urbana fueron sometidos a una prueba para estimar su nivel de salud mental. Los resultados se muestran en la tabla 11.4.1.

Se desea determinar si puede concluirse que existe una diferencia en las medianas de las calificaciones de salud mental entre los muchachos de secundaria rural y urbana. Supóngase que se elige un nivel de significación de .05.

El primer paso en el procedimiento es calcular la mediana común de las dos muestras combinadas. Esto se hace ordenando las observaciones en orden ascendente y, dado que el número total de observacio-

Tabla 11.4.1 Calificaciones del nivel de salud mental en estudiantes varones de enseñanza secundaria.

Escuela			
Urbana	*Rural*	*Urbana*	*Rural*
35	29	25	50
26	50	27	37
27	43	45	34
21	22	46	31
27	42	33	
38	47	26	
23	42	46	
25	32	41	

Tabla 11.4.2 Calificaciones del nivel de salud mental en estudiantes varones de enseñanza secundaria.

	Urbana	*Rural*	*Total*
Número de calificaciones por arriba de la mediana	6	8	14
Número de calificaciones por abajo de la mediana	10	4	14
Total	16	12	28

nes es par, obteniendo la media de los dos números de en medio. Para el presente ejemplo, la mediana es de $(33 + 34)/2 = 33.5$.

Ahora, para cada grupo, se determina el número de observaciones que caen por arriba y por debajo de la mediana común. Las frecuencias resultantes se disponen en una tabla de 2×2. Para el presente ejemplo, se obtiene la tabla 11.4.2.

Si, en efecto, las dos muestras provienen de poblaciones con la misma mediana, es de esperar que aproximadamente la mitad de las calificaciones en cada muestra estén por arriba de la mediana combinada y alrededor de la mitad por debajo. Si se satisfacen las condiciones relativas al tamaño de la muestra y a las frecuencias esperadas para una tabla de contingencia de 2×2, como se trató en el capítulo 10, puede utilizarse la prueba ji-cuadrada con 1 grado de libertad a fin de probar la hipótesis nula de medianas iguales de las poblaciones. Por ejemplo, mediante la fórmula 10.4.1 se tiene que

$$X^2 = \frac{28[(6)(4) - (8)(10)]^2}{(16)(12)(14)(14)} = 2.33$$

Dado que $2.33 < 3.841$, el valor crítico de χ^2 con $\alpha = .05$ y 1 grado de libertad, no puede rechazarse la hipótesis nula en base a estos datos. Se concluye entonces que las dos muestras pueden haberse extraído de poblaciones con medianas iguales. Dado que $2.33 < 2.706$, se tiene que $p > .10$.

A veces, uno o más de los valores observados serán exactamente iguales a la mediana calculada y, por lo tanto, no caerán por arriba ni por debajo de ella. Nótese que si $n_1 + n_2$ es impar, al menos un valor siempre será exactamente igual a la mediana. Esto lleva al problema de qué hacer con las observaciones de este tipo. Siegel[5] sugiere eliminarlas del análisis si $n_1 + n_2$ es grande y se tienen sólo unos cuantos valores que caen en la mediana combinada, o bien, dividir las calificaciones en dos grupos: aquellas que son mayores que la mediana y las que no lo son, en cuyo caso, las observaciones que son iguales a la mediana se contarán en la segunda categoría. Senders[33] y Hays y Winkler[34] sugieren otros procedimientos. El problema es analizado con bastante detalle por Bradley.[7]

Antes de utilizar la prueba ji-cuadrada, debe verificar que se satisfacen las condiciones necesarias para una tabla de contingencia de 2×2, estudiadas en el capítulo 10. De no ser así, puede utilizarse un procedimiento conocido como prueba exacta de Fisher.[35] Esta prueba es estudiada e ilustrada por Daniel.[15]

La prueba de la mediana se aplica lógicamente al caso en que se desea probar la hipótesis nula de que $k \geq 3$ muestras son de poblaciones con medianas iguales. Para esta prueba, puede construirse una tabla de contingencia de $2 \times k$ utilizando las frecuencias que caen por arriba y por debajo de la mediana calculada a partir de muestras combinadas. Si se satisfacen las condiciones para el tamaño de la muestra y las frecuencias esperadas, puede calcularse X^2 y compararse con el valor crítico de χ^2 con $k - 1$ grados de libertad. Senders[33] y Conover[6] dan ejemplos numéricos para el caso en que intervienen más de dos muestras.

Ejercicios

11.4.1 Se revisaron quince expedientes de pacientes de dos hospitales y se asignó una calificación diseñada para estimar el nivel de los cuidados recibidos. Las calificaciones fueron las siguientes:

Hospital A: 99, 85, 73, 98, 83, 88, 99, 80, 74, 91, 80, 94, 94, 98, 80
Hospital B: 78, 74, 69, 79, 57, 78, 79, 68, 59, 91, 89, 55, 60, 55, 79

¿Se concluiría, al nivel de significación de .05, que las medianas de las dos poblaciones son distintas? Determine el valor p.

11.4.2 Se obtuvieron los siguientes valores de albúmina en el suero de 17 personas normales y 13 hospitalizadas.

¿Se concluiría, al nivel de significación de .05, que las medianas de las dos poblaciones muestreadas son distintas? Determine el valor p.

Albúmina en suero (g/100 ml)

Personas normales		Personas hospitalizadas	
2.4	3.0	1.5	3.1
3.5	3.2	2.0	1.3
3.1	3.5	3.4	1.5
4.0	3.8	1.7	1.8
4.2	3.9	2.0	2.0
3.4	4.0	3.8	1.5
4.5	3.5	3.5	
5.0	3.6		
2.9			

11.5 LA PRUEBA DE MANN-WHITNEY

La prueba de la mediana analizada en la sección anterior no utiliza toda la información presente en las dos muestras cuando la variable de interés se mide por lo menos en una escala ordinal. Reducir el contenido de información de una observación para concluir si cae o no por arriba o por debajo de la mediana común, es desperdiciar información. Si, para probar la hipótesis deseada, se cuenta con un procedimiento que utilice más de la información inherente en los datos, dicho procedimiento debe utilizarse siempre que sea posible. Este procedimiento no paramétrico que puede utilizarse con frecuencia en lugar de la prueba de la mediana es la prueba de Mann-Whitney.[36] Dado que esta prueba se basa en los rangos de las observaciones, utiliza más información que la prueba de la mediana.

Las suposiciones que fundamentan la prueba de Mann-Whitney son las siguientes:

1. Las dos muestras, de tamaños n y m, respectivamente, que se utilizan para el análisis se han extraído independientemente y al azar de sus poblaciones respectivas.
2. La escala de medición es por lo menos ordinal.
3. Si las poblaciones son diferentes, difieren sólo en lo que respecta a sus medianas.

Cuando se satisfacen estas suposiciones, puede probarse la hipótesis nula de que las dos poblaciones tienen medianas iguales contra cualquiera de tres alternativas posibles: 1) las poblaciones no tienen medianas iguales (prueba bilateral), 2) la mediana de la población 1 es mayor que la mediana de la población 2 (prueba unilateral), o bien, 3) la mediana de la población 1 es menor que la mediana de la población 2 (prueba unilateral). Si las dos poblaciones son simétricas, de modo que dentro de cada población la media y la mediana son las mismas, las conclusiones a las que se llegan respecto a las medias de las dos poblaciones se aplicarán también a las medianas de ambas poblaciones. El siguiente ejemplo ilustra el uso de la prueba de Mann-Whitney.

Ejemplo 11.5.1

En un experimento diseñado para estimar los efectos de la inhalación prolongada de óxido de cadmio, 15 animales de laboratorio sirvieron de sujetos para el experimento, mientras que 10 animales similares sirvieron de controles. La variable de interés fue el nivel de hemoglobina después del experimento. Los resultados se muestran en la tabla 11.5.1. Se desea saber si puede concluirse que la inhalación prolongada de óxido de cadmio disminuye el nivel de hemoglobina.

Tabla 11.5.1 Determinaciones de hemoglobina (gramos) en 25 animales de laboratorio.

Animales expuestos (X)	*Animales no Expuestos (Y)*
14.4	17.4
14.2	16.2
13.8	17.1
16.5	17.5
14.1	15.0
16.6	16.0
15.9	16.9
15.6	15.0
14.1	16.3
15.3	16.8
15.7	
16.7	
13.7	
15.3	
14.0	

Las hipótesis nula y alternativa son las siguientes:

$$H_0: M_X \geq M_Y$$
$$H_A: M_X < M_Y$$

donde M_X es la mediana de una población de animales expuestos al óxido de cadmio y M_Y es la mediana de una población de animales no expuesta a esta sustancia. Supóngase que $\alpha = .05$.

Para calcular la estadística de prueba, se combinan las dos muestras y se acomodan por rangos todas las observaciones, desde las más pequeñas hasta las más grandes, teniendo presente a cual muestra pertenece cada observación. Se asignan observaciones similares a un rango

Tabla 11.5.2 Datos y rangos originales para el ejemplo 11.5.1.

X	*Rango*	Y	*Rango*
13.7	1		
13.8	2		
14.0	3		
14.1	4.5		
14.1	4.5		
14.2	6		
14.4	7		
		15.0	8.5
		15.0	8.5
15.3	10.5		
15.3	10.5		
15.6	12		
15.7	13		
15.9	14		
		16.0	15
		16.2	16
		16.3	17
16.5	18		
16.6	19		
16.7	20		
		16.8	21
		16.9	22
		17.1	23
		17.4	24
		17.5	25
Total	145		

igual a la media de las posiciones del rango para el cual se establecieron. Los resultados de este paso se muestran en la tabla 11.5.2.

La estadística de prueba es

$$T = S - \frac{n(n+1)}{2} \tag{11.5.1}$$

donde n es el número de observaciones de la muestra X y S la suma de los rangos asignados a las observaciones de la muestra de la población de valores de X. La elección de los valores de la muestra que se marcan con X es arbitraria.

Si la mediana de la población X es, en efecto, más pequeña que la mediana de la población Y, como se especifica en la hipótesis alternativa, es de esperar (para muestras de igual tamaño) que la suma de los rangos asignados a las observaciones de la población X sea menor que la suma de los rangos asignados a las observaciones de la población Y. La estadística de prueba está basada en este razonamiento en tal forma que un valor de T suficientemente pequeño causará que se rechace la hipótesis $H_0 : M_X \geq M_Y$.

Para el presente ejemplo, la regla de decisión es:

Se rechaza $\mathrm{H_0 : M_X \geq M_Y}$ *si la* T *calculada es menor que* W_α, *donde* W_α *es el valor crítico de* T *obtenido al consultar la tabla* M *del apéndice con* n, *el número de observaciones de* X; m, *el número de observaciones de* Y; *y* α, *el nivel de significación elegido.*

Para el ejemplo se tiene que, como se muestra en la tabla 11.5.2, $S = 145$, de modo que

$$T = 145 - \frac{15(15+1)}{2} = 25$$

Cuando se entra a la tabla M con $n = 15$, $m = 10$ y $\alpha = .05$, se encuentra que el valor crítico de W_α es de 45. Dado que $25 < 45$, se rechaza H_0, y se concluye que M_X es menor que M_Y. De donde se deduce que la inhalación prolongada de óxido de cadmio sí disminuye el nivel de hemoglobina.

Dado que $22 < 25 < 30$, se tiene para esta prueba que $.005 > p > .001$.

Cuando n o m es mayor que 20, no puede utilizarse la tabla M del apéndice para obtener los valores críticos de la prueba de Mann-Whitney. Cuando este es el caso, puede calcularse lo siguiente

$$z = \frac{T - mn/2}{\sqrt{nm(n + m + 1)/12}} \tag{11.5.2}$$

y se compara el resultado, en significación con los valores críticos de la distribución normal unitaria.

Si se iguala una gran proporción de las observaciones, puede utilizarse un factor de corrección propuesto por Noether.[37]

Si se utiliza el procedimiento de Mann-Whitney para probar que

$$H_0: M_X \leq M_Y$$

contra la alternativa

$$H_A: M_X > M_Y$$

los valores de T lo suficientemente grandes causarán el rechazo de la hipótesis, de modo que la regla de decisión es:

> *Se rechaza* $H_0: M_X \leq M_Y$ *si la* T *calculada es mayor que* $w_{1-\alpha}$, *donde* $W_{1-\alpha} = nm - W_\alpha$.

Para el caso de una prueba bilateral con

$$H_0: M_X = M_Y$$
$$H_A: M_X \neq M_Y$$

los valores de T calculados que sean lo suficientemente grandes o suficientemente pequeños causarán el rechazo de H_0. La regla de decisión para este caso es entonces:

> *Se rechaza* $H_0: M_X = M_Y$ *si el valor de* T *calculado es menor que* $w_{\alpha/2}$ *o mayor que* $w_{1-\alpha/2}$, *donde* $w_{\alpha/2}$ *es el valor crítico de* T *para* n, m *y* $\alpha/2$, *dado en la tabla* M *del apéndice y* $W_{1-\alpha/2} = nm - W_{\alpha/2}$.

Ejercicios

11.5.1 Los siguientes valores son las respuestas de los anticuerpos de personas que han recibido una dosis de refuerzo de uno de dos tipos de vacunas contra la rabia.

Tipo 1 (X): 1.25, 5.30, 1.70, 1.00, 8.50, 3.75, 8.10, 2.25, 5.6, 7.85
Tipo 2 (Y): .57, 3.90, 8.20, 1.20, 1.70, 1.00, 4.55, 5.20, 2.16, 1.90, 4.6

¿Puede concluirse con base en estos datos que los dos tipos de vacuna difieren en sus efectos? Sea $\alpha = .05$ y encuentre el valor p.

11.5.2 Los valores siguientes son los tiempos (en minutos) pasados en la sala de operaciones por 20 personas sometidas al mismo procedimiento quirúrgico. Once de las personas fueron pacientes del hospital A y 9 fueron del hospital B.

Hospital A: 35, 30, 33, 39, 41, 29, 30, 36, 45, 40, 31
Hospital B: 45, 38, 42, 50, 48, 51, 32, 37, 46

Con base en estos datos, ¿puede concluirse que, para el mismo procedimiento quirúrgico, los pacientes del hospital B tienden a permanecer más tiempo en la sala de operaciones que los pacientes del hospital A? Sea $\alpha = .01$ y encuentre el valor p.

11.6 LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

Cuando se desea determinar qué tan bien se conforma la distribución de los datos de la muestra a alguna distribución teórica, una prueba conocida como prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov proporciona una alternativa para la prueba ji-cuadrada de bondad del ajuste, estudiada en el capítulo 10. Esta prueba debe su nombre a A. Kolmogorov y a N. V. Smirnov, dos matemáticos rusos que introdujeron dos pruebas estrechamente relacionadas en la década de 1930.

El trabajo de Kolmogorov[38] se refiere al caso de una muestra, como se analiza aquí. El trabajo de Smirnov[39] trata del caso que comprende dos muestras, en las cuales el interés se centra en probar la hipótesis de que las distribuciones de las dos poblaciones originales son idénticas. La prueba para la primera situación suele conocerse como prueba para una muestra de Kolmogorov-Smirnov. La prueba para el caso de dos muestras, conocida en general como prueba para dos muestras de Kolmogorov-Smirnov, no se estudiará aquí. Quienes estén interesados en este tema deben consultar las referencias de Conover,[6] Gibbons[2,10] y Daniel.[15]

Al utilizar la prueba de bondad del ajuste de Kolmogorov-Smirnov, se hace una comparación entre alguna función de distribución acumulada y teórica, $F_T(x)$, y la función de distribución acumulada de una muestra, $F_S(x)$. La muestra es una muestra aleatoria de una población con función de distribución acumulada, $F(x)$, desconocida. Se recordará (sección 3.2) que una función de distribución acumulada da la probabilidad de que X sea igual a o menor que un valor particular, x. Es decir, por medio de la función de distribución acumulada de la muestra, $F_S(x)$, puede determinarse $P(X \leq x)$. Si existe una estrecha concordancia entre las distribuciones acumuladas teórica y de la muestra, se apoya la hipótesis de que la muestra se extrajo de la población con la función de distribución acumulada que se especifica, $F_T(x)$. Sin embargo, si existe una discrepancia entre las funciones de distribución acumulada teórica y observada, demasiado grande como para ser atribuida únicamente al azar, se rechaza la hipótesis, cuando H_0 es verdadera.

La diferencia entre la función de distribución, acumulada y teórica, $F_T(x)$, y la función de distribución acumulada de la muestra, $F_S(x)$, se mide por medio de la estadística D, que es la distancia vertical máxima entre $F_S(x)$ y $F_T(x)$. Cuando resulta apropiada una prueba bilateral, es decir, cuando las hipótesis son:

$$H_0 : F(x) = F_T(x), \text{ para todo } x \text{ desde } -\infty \text{ hasta } +\infty$$
$$H_A : F(x) \neq F_T(x), \text{ para al menos un } x$$

la estadística es

$$D = \sup_x |F_S(x) - F_T(x)| \qquad (11.6.1)$$

la cual se lee, "D es igual al supremo (máximo) sobre todos los x, del valor absoluto de la diferencia $F_S(x)$ menos $F_T(x)$".

La hipótesis nula se rechaza al nivel de significación α si el valor calculado de D excede al valor mostrado en la tabla N para $1 - \alpha$ (prueba bilateral) y el tamaño de la muestra n. Son posibles las pruebas en las que la alternativa es unilateral. Gibbons[10] y Goodman[40] dan ejemplos numéricos.

Las suposiciones que fundamentan la prueba de Kolmogorov-Smirnov incluyen las siguientes:

1. La muestra es aleatoria.
2. La distribución $F_T(x)$ establecida en la hipótesis es continua.

Noether[41] ha demostrado que cuando los valores de D se basan en una distribución teórica discreta, la prueba es conservadora. Cuando la prueba se utiliza entonces con datos discretos, el investigador debe tener presente que la probabilidad real de cometer un error del tipo I es, al menos, igual a α, el nivel de significación establecido. La prueba es también conservadora si tienen que estimarse uno o más parámetros a partir de los datos de la muestra.

Ejemplo 11.6.1

Las determinaciones de glucosa en sangre de 36 hombres adultos no obesos, en ayunas y aparentemente sanos, se muestran en la tabla 11.6.1. Se desea probar la hipótesis nula de que estos datos provienen de una población distribuida normalmente, con una media de 80 y una desviación estándar de 6. Las hipótesis apropiadas son las siguientes:

$$H_0 : F(x) = F_T(x), \text{ para todo } x \text{ desde } -\infty \text{ hasta } +\infty$$
$$H_A : F(x) \neq F_T(x), \text{ para al menos un } x$$

El primer paso a seguir es calcular los valores de $F_S(x)$ como se muestra en la tabla 11.6.2.

Los valores de $F_T(x)$ se obtienen convirtiendo primero cada valor observado de x a un valor de la variable normal unitaria z. A partir de la tabla F del apéndice se encuentra entonces el área entre $-\infty$ y z. Con estas áreas, pueden calcularse los valores de $F_T(x)$. El proce-

Tabla 11.6.1 Niveles de glucosa en la sangre (mg/100 ml) de 36 hombres adultos no obesos, en ayunas y aparentemente sanos.

75	92	80	80	84	72
84	77	81	77	75	81
80	92	72	77	78	76
77	86	77	92	80	78
68	78	92	68	80	81
87	76	80	87	77	86

Tabla 11.6.2 Valores de $F_S(x)$ para el ejemplo 11.6.1.

x	*Frecuencia*	*Frecuencia acumulada*	$F_S(x)$
68	2	2	.0556
72	2	4	.1111
75	2	6	.1667
76	2	8	.2222
77	6	14	.3889
78	3	17	.4722
80	6	23	.6389
81	3	26	.7222
84	2	28	.7778
86	2	30	.8333
87	2	32	.8889
92	4	36	1.0000
	36		

Tabla 11.6.3 Pasos del cálculo de $F_T(x)$ para el ejemplo 11.6.1.

x	$z = (x - 80)/6$	$F_T(x)$
68	−2.00	.0228
72	−1.33	.0918
75	−.83	.2033
76	−.67	.2514
77	−.50	.3085
78	−.33	.3707
80	.00	.5000
81	.17	.5675
84	.67	.7486
86	1.00	.8413
87	1.17	.8790
92	2.00	.9772

dimiento, que es similar al utilizado para obtener las frecuencias relativas esperadas en la prueba ji-cuadrada de bondad del ajuste, se resume en la tabla 11.6.3.

La estadística de prueba D puede calcularse algebraicamente, o bien, puede determinarse gráficamente midiendo la distancia vertical

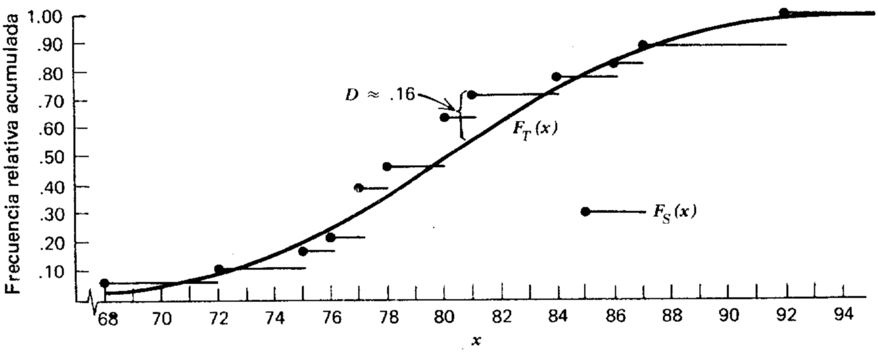


Figura 11.6.1 $F_S(x)$ y $F_T(x)$ para el ejemplo 11.6.1.

máxima entre las curvas de $F_S(x)$ y $F_T(x)$ en una gráfica. Las gráficas de las dos distribuciones se muestran en la figura 11.6.1.

El examen de las gráficas de $F_S(x)$ y $F_T(x)$ revela que $D \approx .16 = (.72 - .56)$. Utilizando como referencia la tabla N se observa que una D compuesta de .16 no es significativa a cualquier nivel razonable. Por lo tanto, no puede rechazarse H_0. La muestra puede haber provenido de la distribución especificada. Dado que se tiene una prueba bilateral, y como $.16 < .174$, se tiene que $p > .20$.

Calcúlese ahora el valor de D algebraicamente. Los valores posibles de $|F_S(x) - F_T(x)|$ se muestran en la tabla 11.6.4. Esta tabla muestra que el valor exacto de D es de .1547.

El lector debe tener en cuenta que al determinar el valor de D, *no siempre es suficiente calcular y elegir de entre los valores posibles de* $|F_S(x) - F_T(x)|$. *La distancia vertical máxima entre* $F_S(x)$ *y* $F_T(x)$ *puede no ser un valor observado,* x, *pero sí algún otro valor de* X. Esta situación se ilustra en la figura 11.6.2. Se observa que si sólo se consideran los valores de $|F_S(x) - F_T(x)|$ de los puntos terminales de la izquierda de las barras horizontales, se calcularía erróneamente el valor de D como $|.2 - .4| = .2$. Sin embargo, puede observarse al examinar la gráfica, que la distancia vertical máxima entre $F_S(x)$ y $F_T(x)$ está en el punto terminal derecho de la barra horizontal que se origina en el punto que corresponde a $x = .4$, por lo que el valor correcto de D es de $|.5 - .2| = .3$.

Puede determinarse algebraicamente el valor correcto de D al

Tabla 11.6.4 Cálculo de $|F_S(x) - F_T(x)|$ para el ejemplo 11.6.1.

x	$F_S(x)$	$F_T(x)$	$\lvert F_S(x) - F_T(x)\rvert$
68	.0556	.0228	.0328
72	.1111	.0918	.0193
75	.1667	.2033	.0366
76	.2222	.2514	.0292
77	.3889	.3085	.0804
78	.4722	.3707	.1015
80	.6389	.5000	.1389
81	.7222	.5675	.1547
84	.7778	.7486	.0292
86	.8333	.8413	.0080
87	.8889	.8790	.0099
92	1.0000	.9772	.0228

calcular, además de las diferencias $|F_S(x) - F_T(x)|$, las diferencias $|F_S(x_{i-1}) - F_T(x_i)|$ para todos los valores de $i = 1,2, \ldots, r + 1$, donde r = el número de diferentes valores de x y $F_S(x_0) = 0$. El valor correcto de la estadística de prueba será entonces

$$D = \underset{1 \leq i \leq r}{\text{máximo}} \{\text{máximo} \left[|F_S(x_i) - F_T(x_i)|, |F_S(x_{i-1}) - F_T(x_i)|\right]\} \quad (11.6.2)$$

Las ventajas y desventajas de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, en comparación con la prueba ji-cuadrada, han sido analizadas por Goodman,[40] Massey,[42] Birnbaum[43] y Slakter.[44] Los siguientes puntos son algunos puntos de comparación importantes.

1. La prueba de Kolmogorov-Smirnov no requiere que las observaciones se agrupen como es el caso con la prueba ji-cuadrada. La consecuencia de esta diferencia es que la prueba de Kolmogorov-Smirnov utiliza toda la información presente en un conjunto de datos.

2. La prueba de Kolmogorov-Smirnov puede utilizarse con cualquier tamaño de muestra. Se recordará que se requieren ciertos tamaños mínimos de las muestras para el uso de la prueba ji-cuadrada.
3. Como se ha hecho notar, la prueba de Kolmogorov-Smirnov no es aplicable cuando los parámetros tienen que estimarse a partir de la muestra. La prueba ji-cuadrada puede utilizarse en estos casos, reduciendo los grados de libertad en 1, para cada parámetro estimado.
4. Ya se ha mencionado el problema de la suposición de una distribución teórica continua.

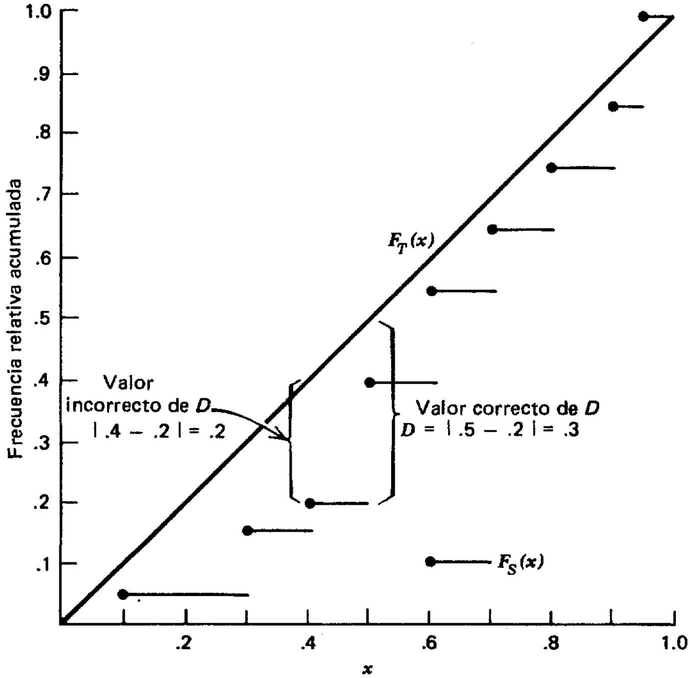


Figura 11.6.2 Gráfica de datos ficticios que indican los cálculos correctos de D.

Ejercicios

11.6.1 Los pesos durante la autopsia, del cerebro de 25 adultos que sufrían de cierta enfermedad, fueron los siguientes:

Peso del cerebro (gramos)

859	1073	1041	1166	1117
962	1051	1064	1141	1202
973	1001	1016	1168	1255
904	1012	1002	1146	1233
920	1039	1086	1140	1348

¿Puede concluirse a partir de estos datos que la población muestreada no está distribuida normalmente con una media de 1050 y una desviación estándar de 50? Determine el valor p para esta prueba.

11.6.2 Los cocientes intelectuales de una muestra de 30 adolescentes arrestados por abuso de drogas en cierta jurisdicción metropolitana fueron los siguientes:

Cociente intelectual

95	100	91	106	109	110
98	104	97	100	107	119
92	106	103	106	105	112
101	91	105	102	101	110
101	95	102	104	107	118

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente de que la población muestreada de las calificaciones de los coeficientes de inteligencia no está distribuida normalmente con media de 105 y desviación estándar de 10? Determine el valor p.

11.6.3 Para una muestra de personas aparentemente sanas que sirvieron de control en un experimento, se registraron las siguientes lecturas de presión sistólica sanguínea al inicio del experimento:

162	177	151	167
130	154	179	146
147	157	141	157
153	157	134	143
141	137	151	161

¿Puede concluirse con base en estos datos que la población de presiones sanguíneas de la cual se extrajo la muestra no está distribuida normalmente con media de 150 y desviación estándar de 12? Determine el valor *p*.

11.7 EL ANÁLISIS DE VARIANCIA, CON UN SOLO CRITERIO DE CLASIFICACIÓN POR RANGOS, DE KRUSKAL-WALLIS

En el capítulo 7 se estudia cómo puede utilizarse el análisis de variancia con un solo criterio de clasificación para probar la hipótesis nula de que las medias de varios grupos son iguales. Cuando no se satisfacen las suposiciones que fundamentan esta técnica, es decir, cuando las poblaciones de las cuales se extraen las muestras no están distribuidas normalmente con variancias iguales, o cuando los datos para el análisis constan sólo de rangos, puede utilizarse una alternativa no paramétrica para el análisis de variancia con un solo criterio de clasificación para probar la hipótesis de parámetros con igual localización. Como se señaló en la sección 11.4, la prueba de la mediana puede ampliarse para acomodar la situación que comprenda más de dos grupos. Sin embargo, una deficiencia de esta prueba es el hecho de que sólo utiliza una pequeña cantidad de la información disponible, es decir, si las observaciones están o no por arriba o por debajo de un solo número, el cual es la mediana de las muestras combinadas. Se cuenta con varias analogías no paramétricas para analizar la variancia, que utilizan más información, tomando en cuenta la magnitud de cada observación relativa a la magnitud de cualquier otra observación. Quizá el más conocido de estos procedimientos es el análisis de variancia con un solo criterio de clasificación por rangos de Kruskal-Wallis.[45]

La aplicación de esta prueba comprende los siguientes pasos.

1. Las $n_1, n_2, \ldots, n_k$ observaciones de los k grupos se combinan en una sola serie de tamaño n y se disponen en orden de magni-

tud desde la más pequeña hasta la más grande. Las observaciones se sustituyen entonces por rangos desde 1, que es el asignado a la observación menor, hasta n, que se asigna a la observación mayor. Cuando dos o más observaciones tienen el mismo valor, a cada una de ellas se le da la media de los rangos con los cuales está relacionado.
2. Los rangos asignados a las observaciones en cada uno de los k grupos se suman por separado para dar k sumas de rangos.
3. Se calcula la estadística de prueba

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1) \tag{11.7.1}$$

En la ecuación 11.7.1,

k = el número de grupos.
n_j = el número de observaciones en el j-ésimo grupo.
n = el número de observaciones en todos los grupos combinados.
R_j = la suma de los rangos en el j-ésimo grupo.

4. Cuando se tienen tres grupos y cinco o menos observaciones en cada grupo, la significación de la H calculada se determina consultando la tabla O del apéndice. Cuando hay más de cinco observaciones en uno o más de los grupos, H se compara con los valores tabulados de la χ^2 con $k - 1$ grados de libertad. Lo adecuado de la aproximación ji-cuadrada para muestras pequeñas es tratado por Gabriel y Lachenbruch.[46]

Ejemplo 11.7.1

Se estudiaron los efectos de dos medicamentos en el tiempo de reacción a cierto estímulo en tres grupos de animales de laboratorio. El grupo III sirvió como control, mientras que los animales del grupo I fueron tratados con el medicamento A y los del grupo II con el medicamento B antes de la aplicación del estímulo. La tabla 11.7.1 muestra los tiempos de reacción, en segundos, de los 13 animales.

¿Puede concluirse que las tres poblaciones representadas por las tres muestras difieren con respecto al tiempo de reacción? Puede llegarse a esa conclusión si puede rechazarse la hipótesis nula de que las tres poblaciones no difieren en sus tiempos de reacción.

Tabla 11.7.1 Tiempo de reacción, en segundos, de 13 animales de laboratorio.

	Grupo	
I	*II*	*III*
17	8	2
20	7	5
40	9	4
31	8	3
35		

Tabla 11.7.2 Datos de la tabla 11.7.1 sustituidos por rangos

	Grupo	
I	*II*	*III*
9	6.5	1
10	5	4
13	8	3
11	6.5	2
12		
$R_1 = 55$	$R_2 = 26$	$R_3 = 10$

Cuando se combinan los tres grupos en una sola serie y se les asigna un rango, puede construirse la tabla de rangos que se muestra en la tabla 11.7.2.

La hipótesis nula implica que las observaciones en las tres muestras constituyen una sola muestra de tamaño 13 de una sola población. Si este es el caso, es de esperar que los rangos estén bien distribuidos entre los tres grupos. En consecuencia es de esperar que la suma total de los rangos esté dividida entre los tres grupos, porporcionalmente al tamaño del grupo. Las desviaciones respecto a estas condiciones se reflejan en la magnitud de la estadística de prueba H. La hipótesis nula se rechazará si el valor calculado de H es tan grande que la probabilidad de obtener un valor de esa magnitud o mayor, cuando H_0 es verdadera, sea igual a, o menor que el nivel de importancia elegido, α.

A partir de los datos de la tabla 11.7.2 y la ecuación 11.7.1 se obtiene que

$$H = \frac{12}{13(13+1)}\left[\frac{(55)^2}{5} + \frac{(26)^2}{4} + \frac{(10)^2}{4}\right] - 3(13+1)$$
$$= 10.68$$

La tabla O muestra que cuando los n_j son 5, 4 y 4, la probabilidad de obtener un valor de $H \geq 10.68$ es menor que .009. Puede rechazarse la hipótesis nula al nivel de significación de .01 y puede concluirse que existe una diferencia en el tiempo promedio de reacción entre las tres poblaciones. Para esta prueba, $p < .009$.

Se notará que a dos valores de la muestra II se le asignó el rango de 6.5. Puede ajustarse el valor de H respecto a esta igualdad numérica dividiéndolo entre

$$1 - \frac{\sum T}{n^3 - n} \qquad (11.7.2)$$

donde $T = t^3 - t$. La letra t se utiliza para designar el número de observaciones iguales en el número en un grupo de valores con igual número. En el presente ejemplo, existe sólo un grupo de valores iguales en número pero en general, puede haber varios grupos de valores iguales en número que conduzcan a varios valores de T. Dado que sólo se tuvieron dos observaciones de igual valor numérico en el grupo, se tiene que $T = 2^3 - 2 = 6$ y $\Sigma\ T = 6$, de modo que la expresión 11.7.2 es

$$1 - \frac{6}{13^3 - 13} = .9973$$

y

$$\frac{H}{1 - \frac{\sum T}{n^3 - n}} = \frac{10.68}{.9973} = 10.71$$

lo cual, de hecho, también es significativo al nivel de significación de .01.

Como es el caso aquí, el efecto del ajuste por empates es por lo general insignificante. Nótese también que el efecto del ajuste es in-

Tabla 11.7.3 Valor neto del capital en equipo por cama por tipo de hospital.

Tipo de hospital				
A	*B*	*C*	*D*	*E*
\$1735(11)	\$5260(35)	\$2790(20)	\$3475(26)	\$6090(40)
1520(2)	4455(28)	2400(12)	3115(22)	6000(38)
1476(1)	4480(29)	2655(16)	3050(21)	5894(37)
1688(7)	4325(27)	2500(13)	3125(23)	5705(36)
1702(10)	5075(32)	2755(19)	3275(24)	6050(39)
2667(17)	5225(34)	2592(14)	3300(25)	6150(41)
1575(4)	4613(30)	2601(15)	2730(18)	5110(33)
1602(5)	4887(31)	1648(6)		
1530(3)		1700(9)		
1698(8)				
$R_1 = 68$	$R_2 = 246$	$R_3 = 124$	$R_4 = 159$	$R_5 = 264$

crementar H, de modo que si la H no ajustada es significativa al nivel de significación elegido, no es necesario aplicar el ajuste.

A continuación, se ilustrará el procedimiento aplicable cuando se tienen más de tres grupos y, al menos, uno de los n_j es mayor que 5.

Ejemplo 11.7.2

La tabla 11.7.3 indica el valor neto del capital en equipo por cama para cada una de las muestras tomadas en cinco hospitales. Se desea determinar, por medio de la prueba de Kruskal-Wallis, si puede concluirse que el valor neto promedio del capital en equipo por cama difiere entre los cinco tipos de hospital. Los rangos de los 41 valores, junto con la suma de los rangos para cada grupo, se presentan en dicha tabla.

A partir de las sumas de los rangos, se tiene que

$$H = \frac{12}{41(41+1)}\left[\frac{(68)^2}{10} + \frac{(246)^2}{8} + \frac{(124)^2}{9} + \frac{(159)^2}{7} + \frac{(264)^2}{7}\right] - 3(41+1)$$
$$= 36.39$$

Consultando la tabla I con $k - 1 = 4$ grados de libertad, se encuentra que la probabilidad de obtener un valor de H tan grande o mayor que 36.39, debido únicamente al azar, cuando no existe diferencia entre los grupos, es menor que .005. Se concluye entonces que existe una diferencia entre los grupos con respecto al valor promedio de la variable de interés.

Ejercicios

Para los ejercicios siguientes, se lleve a cabo la prueba al nivel de importancia indicado y determine el valor p.

11.7.1 La siguiente tabla indica los niveles del residuo de plaguicida (ppb) en las muestras de sangre de cuatro grupos de personas. Utilice la prueba de Kruskal-Wallis para probar, al nivel de significación de .05, la hipótesis nula de que no existe diferencia entre los grupos con respecto al nivel promedio de residuo de plaguicida.

Grupo			
A	B	C	D
10	4	15	7
37	35	5	11
12	32	10	10
31	19	12	8
11	33	6	2
9	18	6	5
44	11	9	4
12	7	11	5
15	32	9	2
42	17	14	6
23	8	15	3

11.7.2 Los siguientes valores son los honorarios diarios promedio cobrados a los pacientes hospitalizados para cierta intervención quirúrgica, obtenidos por muestras de hospitales localizados en tres diferentes partes del país.
¿Puede concluirse al nivel de significación de .05 que los grupos difieren con respecto a los honorarios diarios promedio?

	Grupo	
I	II	III
$80.75	$58.63	$84.21
78.15	72.70	101.76
85.40	64.20	107.74
71.94	62.50	115.30
82.05	63.24	126.15

11.7.3 Utilice como referencia los datos de la tabla 7.2.1 (ejemplo 7.2.1) y aplique la prueba de Kruskal-Wallis. Compare los resultados obtenidos con los que se obtuvieron cuando se utilizó la prueba *F.*

11.7.4 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.1 y aplique la prueba de Kruskal-Wallis.

11.7.5 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.2 y aplique la prueba de Kruskal-Wallis.

11.7.6 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.3 y aplique la prueba de Kruskal-Wallis.

11.7.7 Utilice como referencia el ejercicio 7.2.4 y aplique la prueba de Kruskal-Wallis.

11.8 EL ANÁLISIS DE VARIANCIA, CON DOS CRITERIOS DE CLASIFICACIÓN POR RANGOS DE FRIEDMAN

Así como en alguna ocasión puede tenerse la necesidad de una analogía no paramétrica para el análisis paramétrico de variancia con un solo criterio de clasificación, también puede ser necesario analizar los datos de una clasificación con dos criterios, mediante métodos no paramétricos análogos al análisis de variancia con dos criterios de clasificación. Puede surgir esta necesidad debido a que no se satisfacen las suposiciones necesarias para el análisis paramétrico de la variancia, ya que la escala de medición utilizada es "frágil" o porque los resultados se necesitan rápidamente. Una prueba que suele utilizarse en estos casos es el análisis de variancia con dos criterios de clasificación por rangos, de Friedman.[47, 48] Esta prueba es apropiada siempre que los datos se midan, al menos, en una escala ordinal y puedan disponerse significativamente en una clasificación con dos criterios, como se hace en el experimento en bloques aleatorizados que se estudió en el capítulo 7. El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

Ejemplo 11.8.1

Se pidió a nueve fisioterapeutas que clasificaran tres modelos de estimuladores eléctricos de bajo voltaje según su preferencia. Un rango de 1 indica la primera preferencia. Los resultados se presentan en la tabla 11.8.1.

La hipótesis nula que va a probarse es que no existe diferencia en las preferencias por los modelos. La hipótesis alternativa es que los modelos no son preferidos por igual. Mediante la prueba de Friedman, será posible determinar si resulta razonable suponer que las columnas de rangos se han extraído de la misma población. Si la hipótesis nula es verdadera, debe esperarse que la distribución de los rangos observada dentro de cualquiera de las columnas sea el producto de factores aleatorios y, en consecuencia, debe esperarse que los números 1, 2 y 3 se presenten aproximadamente con la misma frecuencia en cada columna. Si, por otra parte, la hipótesis nula es falsa (es decir, si los modelos no son preferidos igualmente), debe esperarse una preponderancia de rangos relativamente altos (o bajos) por lo menos en una columna. Esta condición se reflejaría en las sumas de los rangos.

Tabla 11.8.1 Rangos asignados por fisioterapeutas a tres modelos de estimulador eléctrico de bajo voltaje.

	Modelo		
Terapeuta	*A*	*B*	*C*
1	2	3	1
2	2	3	1
3	2	3	1
4	1	3	2
5	3	2	1
6	1	2	3
7	2	3	1
8	1	3	2
9	1	3	2
R_j	15	25	14

La prueba de Friedman indicará si las sumas de los rangos que se observan son o no tan distintas que no sea probable que sean un resultado del azar, cuando H_0 es verdadera.

Dado que los datos consisten ya en categorías dentro de los bloques (renglones), el primer paso es sumar los rangos dentro de cada columna (tratamiento). Estas sumas son los R_j que se muestran en la tabla 11.8.1. Una estadística de prueba, denotada por Friedman como χ_r^2, se calcula como sigue:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} (R_j)^2 - 3n(k+1) \qquad (11.8.1)$$

donde n = el número de renglones (bloques) y k = el número de columnas (tratamientos). Los valores críticos para diversos valores de n y k se dan en la tabla P.

Para el ejemplo ilustrativo, se calcula

$$\begin{aligned}\chi_r^2 &= \frac{12}{9(3)(3+1)}[(15)^2 + (25)^2 + (14)^2] - 3(9)(3+1)\\ &= 8.222\end{aligned}$$

Cuando se consulta la tabla P*a* del apéndice, se encuentra que la probabilidad de obtener un valor de χ_r^2 tan grande como 8.222 debido únicamente al azar, cuando la hipótesis nula es verdadera, es de .016. Por lo tanto, puede rechazarse la hipótesis nula, y concluir que los tres modelos de estimulador eléctrico de bajo voltaje no se prefieren igualmente. Para esta prueba, $p = .016$.

Cuando los datos originales consisten en mediciones sobre una escala de intervalos o de razones, en lugar de rangos, se asignan rangos a las mediciones en base a sus magnitudes relativas dentro de los bloques. Si hay valores iguales, a cada valor se le asigna la media de todos los rangos que intervienen.

Cuando los valores de k, n o ambos exceden a los dados en la tabla P del apéndice, el valor crítico de χ_r^2 se obtiene consultando la tabla de χ^2 (tabla I) con el α elegido y los $k - 1$ grados de libertad.

Ejemplo 11.8.2

La tabla 11.8.2 muestra las respuestas, en por ciento de disminución del flujo salival, de 16 animales de laboratorio después de recibir

Tabla 11.8.2 Porcentaje de disminución del flujo salival en animales de laboratorio después de la aplicación de diferentes dosis de atropina.

	Dosis de atropina			
Número del animal	*A*	*B*	*C*	*D*
1	29(1)	48(2)	75(3)	100(4)
2	72(2)	30(1)	100(3.5)	100(3.5)
3	70(1)	100(4)	86(2)	96(3)
4	54(2)	35(1)	90(3)	99(4)
5	5(1)	43(3)	32(2)	81(4)
6	17(1)	40(2)	76(3)	81(4)
7	74(1)	100(3)	100(3)	100(3)
8	6(1)	34(2)	60(3)	81(4)
9	16(1)	39(2)	73(3)	79(4)
10	52(2)	34(1)	88(3)	96(4)
11	8(1)	42(3)	31(2)	79(4)
12	29(1)	47(2)	72(3)	99(4)
13	71(1)	100(3.5)	97(2)	100(3.5)
14	7(1)	33(2)	58(3)	79(4)
15	68(1)	99(4)	84(2)	93(3)
16	70(2)	30(1)	99(3.5)	99(3.5)
R_j	20	36.5	44	59.5

diferentes niveles de dosis de atropina. En la tabla, se dan también los rangos (entre paréntesis) y la suma de éstos. Se desea saber si puede concluirse que los diferentes niveles de dosis producen respuestas distintas. Es decir, se prueba la hipótesis nula de ninguna diferencia en la respuesta entre los cuatro niveles de la dosis.

A partir de los datos, se calcula que

$$\chi_r^2 = \frac{12}{16(4)(4+1)}[(20)^2 + (36.5)^2 + (44)^2 + (59.5)^2] - 3(16)(4+1)$$
$$= 30.32$$

Al consultar la tabla I se encuentra que, con $k - 1 = 3$ grados de libertad, la probabilidad de obtener un valor de χ_r^2 tan grande como 30.32, debido únicamente al azar, es menor que .005. Se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los diferentes niveles de dosis producen respuestas distintas.

Ejercicios

Para los siguientes ejercicios, lleve a cabo la prueba al nivel de importancia indicado y determine el valor p.

11.8.1 La tabla siguiente indica las calificaciones obtenidas por nueve estudiantes de enfermería seleccionadas al azar en los exámenes finales de tres materias distintas.

Número de la estudiante	Materia Fundamentos	Fisiología	Anatomía
1	98	95	77
2	95	71	79
3	76	80	91
4	95	81	84
5	83	77	80
6	99	70	93
7	82	80	87
8	75	72	81
9	88	81	83

Demuestre la hipótesis nula de que las estudiantes de enfermería que constituyen la población de la cual se extrajo la muestra anterior tienen igual aprovechamiento en las tres materias, contra la hipótesis alternativa de que su aprovechamiento es mejor por lo menos en una de las materias. Sea $\alpha = .05$.

11.8.2 A quince estudiantes de fisioterapia seleccionados al azar se les dieron las siguientes instrucciones: "supongan que se van a casar con una persona que tiene alguna de las siguientes incapacidades (se enumeraron las incapacidades y se les designó mediante las letras A a la J). Asignen una categoría a estas incapacidades, desde 1 hasta 10, de acuerdo con su primera, segunda, tercera (y así sucesivamente) elección de la incapacidad que aceptarían en su cónyuge". Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Número del estudiante	Incapacidad A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	3	5	9	8	2	4	6	7	10
2	1	4	5	7	8	2	3	6	9	10
3	2	3	7	8	9	1	4	6	5	10
4	1	4	7	8	9	2	3	6	5	10
5	1	4	7	8	10	2	3	6	5	9
6	2	3	7	9	8	1	4	5	6	10
7	2	4	6	9	8	1	3	7	5	10
8	1	5	7	9	10	2	3	4	6	8
9	1	4	5	7	8	2	3	6	9	10
10	2	3	6	8	9	1	4	7	5	10
11	2	4	5	8	9	1	3	7	6	10
12	2	3	6	8	10	1	4	5	7	9
13	3	2	6	9	8	1	4	7	5	10
14	2	5	7	8	9	1	3	4	6	10
15	2	3	6	7	8	1	5	4	9	10

Pruebe la hipótesis nula de que no existe preferencia respecto de las incapacidades contra la hipótesis alternativa de que algunas incapacidades se prefieren sobre otras. Sea $\alpha = .05$.

11.8.3 Utilice como referencia el ejemplo 7.3.1. Resuelva el ejemplo utilizando la prueba de Friedman y compare los resultados con los obtenidos cuando se utiliza el análisis paramétrico de variancia con dos criterios de clasificación.

11.8.4 Utilice como referencia el ejercicio 7.3.1. Resuelva este ejercicio utilizando la prueba de Friedman.

11.8.5 Utilice la prueba de Friedman para resolver el ejercicio 7.3.2.

11.8.6 Utilice la prueba de Friedman para resolver el ejercicio 7.3.3.

11.8.7 Utilice la prueba de Friedman para resolver el ejercicio 7.3.4.

11.9 EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN POR RANGOS DE SPEARMAN

El investigador cuenta con varias medidas no paramétricas de correlación. Consulte las referencias de Kendall,[49] Kruskal[50] y Hotelling y Pabst[51] para un análisis detallado de los diferentes métodos.

Un procedimiento que suele utilizarse, que es interesante por la sencillez de los cálculos que implica, se debe a Spearman.[52] La medida de correlación que se calcula mediante este método se conoce como coeficiente de correlación por rangos de Spearman y se designa por r_s. Este procedimiento utiliza los dos conjuntos de rangos que pueden asignarse a los valores de las muestras de X y Y, las variables independiente y continua de una distribución en dos variables. Las hipótesis que suelen probarse y sus alternativas son las siguientes:

1. H_0 : X y Y son mutuamente independientes.
   H_A : X y Y no son mutuamente independientes.
2. H_0 : X y Y son mutuamente independientes.
   H_A : Existe una tendencia a formar parejas entre los valores grandes de X y los valores grandes de Y.
3. H_0 : X y Y son mutuamente independientes.
   H_A : Existe una tendencia de que los valores grandes de X formen parejas con los valores pequeños de Y.

Las hipótesis especificadas en el número 1 conducen a una prueba bilateral y se utilizan cuando se desea descubrir cualquier desviación de la independencia. Las pruebas unilaterales indicadas en los números 2 y 3 se utilizan, respectivamente, cuando el investigador desea saber si puede concluir que las variables están directa o inversamente correlacionadas.

El procedimiento de pruebas de hipótesis comprende los siguientes pasos.

1. Se asocia una categoría a los valores de X desde 1 hasta n (el número de parejas de valores de X y Y en la muestra). Se asocia una categoría a los valores de Y desde 1 hasta n.
2. Se calcula d_i para cada pareja de observaciones, restando el rango de Y_i del rango de X_i.
3. Se eleva al cuadrado cada d_i y se calcula $\sum d_i^2$, la suma de los valores al cuadrado.
4. Se calcula

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \tag{11.9.1}$$

5. Si n está entre 4 y 30, se compara el valor calculado de r_s con los valores críticos, r_s^*, de la tabla Q. Para la prueba bilateral, se rechaza H_0 al nivel de importancia α si r_s es mayor que r_s^* o menor que

$-\ r_s^*$, donde r_s^* está en la intersección de la columna encabezada por $\alpha/2$ y el renglón que corresponde a n. Para la prueba unilateral con H_A especificando correlación directa, se rechaza H_0 al nivel de importancia α si r_s es mayor que r_s^* para α y n. La hipótesis nula se rechaza al nivel de importancia α en la otra prueba unilateral si r_s es menor que $-r_s^*$ para α y n.

6. Si n es mayor que 30, puede calcularse

$$z = r_s\sqrt{n-1} \tag{11.9.2}$$

y utilizar la tabla F para obtener los valores críticos.

7. Las observaciones de igual valor numérico plantean un problema. Glasser y Winter[53] señalaron que el uso de la tabla Q es estrictamente válido sólo cuando en los datos no hay dos valores iguales (a menos que se emplee algún procedimiento aleatorio para romper los que sean iguales). Sin embargo, en la práctica, suele utilizarse la tabla después de que se ha utilizado algún otro método para manejar los valores numéricamente iguales. Si el número de valores numéricamente iguales es grande, puede utilizarse la corrección por valores iguales dado en Siegel.[5] Este factor de corrección es el siguiente

$$T = \frac{t^3 - t}{12} \tag{11.9.3}$$

donde t = el número de observaciones de igual valor numérico para algún rango particular. Cuando se utiliza este factor de corrección, r_s se calcula a partir de

$$r_s = \frac{\sum x^2 + \sum y^2 - \sum d_i^2}{2\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}} \tag{11.9.4}$$

en lugar de la ecuación 11.9.1.

En la ecuación 11.9.4 se tiene que

$$\sum x^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \sum T_x$$

$$\sum y^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \sum T_y$$

T_x = la suma de los valores de T para los diversos rangos de valor numérico igual en X, y
T_y = la suma de los valores de T para los diversos rangos de igual valor numérico en Y

Gibbons,[2] así como Siegel,[5] señalan que a menos que sea excesivo el número de cantidades con igual valor numérico, la corrección produce una diferencia muy pequeña en el valor de r_s. Cuando el número de valores iguales es pequeño, puede seguirse el procedimiento habitual de asignar a las observaciones de igual valor numérico la media de los rangos que intervienen y proceder con los pasos anteriores del 2 al 6. Edgington[54] analiza con cierto detalle este problema.

Ejemplo 11.9.1

En un estudio de la relación entre la edad y el electroencefalograma (EEG), se recopilaron datos en 20 personas con edades entre 20 y 60 años. La tabla 11.9.1 muestra las edades y un valor de rendimiento del EEG particular, para cada una de esas 20 personas.

Tabla 11.9.1 Edad y valor del rendimiento del EEG para 20 personas.

Número de la persona	*Edad (X)*	*Valor del rendimiento del EEG (Y)*
1	20	98
2	21	75
3	22	95
4	24	100
5	27	99
6	30	65
7	31	64
8	33	70
9	35	85
10	38	74
11	40	68
12	42	66
13	44	71
14	46	62
15	48	69
16	51	54
17	53	63
18	55	52
19	58	67
20	60	55

El investigador desea saber si puede concluir que este rendimiento particular del EEG está correlacionada inversamente con la edad. Las hipótesis para la prueba unilateral son entonces:

H_0: este rendimiento del EEG y la edad son mutuamente independientes.
H_A : existe una tendencia para este rendimiento del EEG de disminuir con la edad.

Supóngase que $\alpha = .05$.

Cuando se han asignado rangos a los valores de X y Y, se tienen los resultados que se muestran en la tabla 11.9.2.
Los d_i, d_i^2 y $\sum d_i^2$ se muestran en la misma tabla.

Tabla 11.9.2 Rangos para los datos del ejemplo 11.9.1.

Número de la persona	*Rango (X)*	*Rango (Y)*	d_i	d_i^2
1	1	18	−17	289
2	2	15	−13	169
3	3	17	−14	196
4	4	20	−16	256
5	5	19	−14	196
6	6	7	−1	1
7	7	6	1	1
8	8	12	−4	16
9	9	16	−7	49
10	10	14	−4	16
11	11	10	1	1
12	12	8	4	16
13	13	13	0	0
14	14	4	10	100
15	15	11	4	16
16	16	2	14	196
17	17	5	12	144
18	18	1	17	289
19	19	9	10	100
20	20	3	17	289
				$\sum d_i^2 = 2340$

La sustitución de los datos de la tabla 11.9.2 en la ecuación 11.9.1 da

$$r_s = 1 - \frac{6(2340)}{20[(20)^2 - 1]} = -.76$$

Utilizando como referencia la tabla Q, se encuentra que para una prueba unilateral, con $\alpha = .05$ y $n = 20$, el valor crítico de r_s^* es de $-.3789$. Dado que el $r_s = -.76$ calculado es menor que el valor crítico de r_s^*, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que las dos variables están inversamente relacionadas. Dado que $-.76 < -.6586$, se tiene que para esta prueba, $p < .001$.

A continuación se ilustrará el procedimiento para una muestra con $n > 30$ y algunas parejas de observaciones.

Ejemplo 11.9.2

En la tabla 11.9.3 se muestran las edades y las concentraciones (ppm) de cierto mineral en el tejido de 35 personas a quienes se les

Tabla 11.9.3 Edad y concentración de mineral (ppm) en el tejido de 35 personas.

Número de la persona	*Edad (X)*	*Concentración de mineral (Y)*	*Número de la persona*	*Edad (X)*	*Concentración de mineral (Y)*
1	82	169.63	19	50	4.48
2	85	48.94	20	71	46.93
3	83	41.16	21	54	30.91
4	64	63.95	22	62	34.27
5	82	21.09	23	47	41.44
6	53	5.40	24	66	109.88
7	26	6.33	25	34	2.78
8	47	4.26	26	46	4.17
9	37	3.62	27	27	6.57
10	49	4.82	28	54	61.73
11	65	108.22	29	72	47.59
12	40	10.20	30	41	10.46
13	32	2.69	31	35	3.06
14	50	6.16	32	75	49.57
15	62	23.87	33	50	5.55
16	33	2.70	34	76	50.23
17	36	3.15	35	28	6.81
18	53	60.59			

Tabla 11.9.4 Rangos para los datos del ejemplo 11.9.2.

Número de la persona	*Rango (X)*	*Rango (Y)*	d_i	d_i^2	*Número de la persona*	*Rango (X)*	*Rango (Y)*	d_i	d_i^2
1	32.5	35	−2.5	6.25	19	17	9	8	64.00
2	35	27	8	64.00	20	28	25	3	9.00
3	34	23	11	121.00	21	21.5	21	.5	.25
4	25	32	−7	49.00	22	23.5	22	1.5	2.25
5	32.5	19	13.5	182.25	23	13.5	24	−10.5	110.25
6	19.5	11	8.5	72.25	24	27	34	−7	49.00
7	1	14	−13	169.00	25	6	3	3	9.00
8	13.5	8	5.5	30.25	26	12	7	5	25.00
9	9	6	3	9.00	27	2	15	−13	169.00
10	15	10	5	25.00	28	21.5	31	−9.5	90.25
11	26	33	−7	49.00	29	29	26	3	9.00
12	10	17	−7	49.00	30	11	18	−7	49.00
13	4	1	3	9.00	31	7	4	3	9.00
14	17	13	4	16.00	32	30	28	2	4.00
15	23.5	20	3.5	12.25	33	17	12	5	25.00
16	5	2	3	9.00	34	31	29	2	4.00
17	8	5	3	9.00	35	3	16	−13	169.00
18	19.5	30	−10.5	110.25					
									$\sum d_i^2 = 1788.5$

practicó la autopsia como parte de un importante proyecto de investigación.

En la tabla 11.9.4 se muestran los rangos, d_i, d_i^2 y $\Sigma\ d_i^2$. Se probará ahora, al nivel de significación de .05, la hipótesis nula de que X y Y son mutuamente independientes contra la alternativa bilateral de que no son mutuamente independientes.

A partir de los datos de la tabla 11.9.4, se calcula que

$$r_s = 1 - \frac{6(1788.5)}{35[(35^2 - 1]} = .75$$

Para probar la importancia de r_s, se calcula

$$z = .75\sqrt{35 - 1} = 4.37$$

Dado que 4.37 es mayor que $z = 3.09$, $p < 2(.001) = .002$, por lo que se rechaza H_0, y se concluye que las dos variables en estudio no son mutuamente independientes.

Con fines comparativos, a continuación se corregirá por valores iguales utilizando la ecuación 11.9.3 y, en seguida, se calculará r_s utilizando la ecuación 11.9.4.

En los rangos de X, se tuvieron seis grupos de valores iguales que se dividieron asignándoles los valores 13.5, 17, 19.5, 21.5, 23.5 y 32.5. En cinco de los grupos dos observaciones son iguales en valor numérico y, en un grupo, tres. Por lo tanto, se calculan cinco valores de

$$T_x = \frac{2^3 - 2}{12} = \frac{6}{12} = .5$$

y un valor de

$$T_x = \frac{3^3 - 3}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

A partir de estos cálculos, se tiene que $\sum T_x = 5(.5) + 2 = 4.5$, de manera que

$$\sum x^2 = \frac{35^3 - 35}{12} - 4.5 = 3565.5$$

Dado que no se tienen valores iguales en los rangos de Y, se tiene que $\sum T_y = 0$ y que

$$\sum y^2 = \frac{35^3 - 35}{12} - 0 = 3570.0$$

A partir de la tabla 11.9.4, se tiene que $\sum d_i^2 = 1788.5$. A partir de estos datos, puede calcularse ahora, mediante la ecuación 11.9.4, que

$$r_s = \frac{3565.5 + 3570.0 - 1788.5}{2\sqrt{(3565.5)(3570)}} = .75$$

Se observa en este caso que la corrección por los valores iguales no produce diferencia alguna en el valor de r_s.

Ejercicios

Para los siguientes ejercicios, lleve a cabo la prueba al nivel de significación indicado y determine el valor p.

11.9.1 La siguiente tabla muestra 15 regiones geográficas seleccionadas al azar, con rangos asignados respecto a la densidad de población y tasa de mortalidad ajustada por edades. ¿Puede concluirse, al nivel de significación de .05, que la densidad de población y la tasa de mortalidad ajustada por edades no son mutuamente independientes?

	Rango por	
Región	Densidad de población (X)	Tasa de mortalidad ajustada por edades (Y)
1	8	10
2	2	14
3	12	4
4	4	15
5	9	11
6	3	1
7	10	12
8	5	7
9	6	8
10	14	5
11	7	6
12	1	2
13	13	9
14	15	3
15	11	13

11.9.2 La tabla siguiente muestra 10 comunidades con rangos asignados respecto a los dientes con caries, faltantes y obturados (CFO) por cada 100 niños y a la concentración de fluoruro, en ppm, en el suministro público de agua.

Comunidad	Dientes CFO por cada 100 niños (X)	Concentración de fluoruro (Y)
1	8	1
2	9	3
3	7	4
4	3	9
5	2	8
6	4	7
7	1	10
8	5	6
9	6	5
10	10	2

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que el número de dientes CFO por cada 100 niños tiende a aumentar a medida que aumenta la concentración de fluoruro? Sea $\alpha = .05$.

11.9.3 Utilice como referencia el ejemplo 8.7.1. Calcule r_s y pruebe la hipótesis nula de que los dos métodos son mutuamente independientes. Compare los resultados obtenidos con los que se obtuvieron utilizando los métodos del capítulo 8.

11.9.4 Calcule r_s para los datos del ejercicio 8.7.3 y pruebe la hipótesis nula de que las dos variables son mutuamente independientes. Compare los resultados con los obtenidos utilizando los métodos del capítulo 8.

11.9.5 Calcule r_s para los datos del ejercicio 8.7.4. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique que la concentración de CO aumenta conforme aumenta la congestión del tráfico?

11.9.6 Calcule r_s para los datos del ejercicio 8.7.5 y pruebe la hipótesis nula de que las dos variables son mutuamente independientes.

11.10 RESUMEN

En este capítulo se estudian las pruebas estadísticas no paramétricas. Estas pruebas pueden utilizarse cuando no se satisfacen las suposiciones que fundamentan las pruebas paramétricas o cuando los datos que van a analizarse se miden sobre una escala demasiado "frágil" para los procedimientos aritméticos necesarios para las pruebas paramétricas.

Se definen e ilustran las cuatro escalas de medición: nominal, ordinal, de intervalos y de razones.

Por último, se describen e ilustran siete pruebas no paramétricas. Excepto la prueba de bondad del ajuste de Kolmogorov-Smirnov, cada prueba proporciona una alternativa no paramétrica a una prueba paramétrica bien conocida. Hay varias otras pruebas no paramétricas que pueden utilizarse, muchas de las cuales se describen e ilustran en las referencias que se señalan al término de este capítulo.

Preguntas y ejercicios de repaso

1. Defina las estadísticas no paramétricas.
2. ¿Qué se entiende por el término pruebas estadísticas de libre distribución?

3. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar pruebas estadísticas no paramétricas?
4. ¿Cuáles son algunas de las desventajas de las pruebas no paramétricas?
5. Defina el término medición.
6. Enumere en orden de dificultad y describa las cuatro escalas de medición.
7. Describa una situación en su área particular de interés donde pueda utilizarse cada una de las siguientes pruebas. Utilice datos reales o realistas y pruebe una hipótesis apropiada utilizando cada prueba.

   a) La prueba del signo.
   b) La prueba de la mediana.
   c) La prueba de bondad del ajuste de Kolmogorov-Smirnov.
   d) El análisis de variancia con un solo criterio de clasificación por rangos de Kruskal-Wallis.
   e) El análisis de variancia con dos criterios de clasificación por rangos de Friedman.
   f) El coeficiente de correlación por rangos de Spearman.

8. La tabla siguiente indica los rangos de las edades (X) de 20 pacientes de cirugía y la dosis (Y) de un analgésico necesaria para bloquear un segmento espinal.

Rango de edad en años (X)	Rango de requerimiento del analgésico (Y)	Rango de edad en años (X)	Rango de requerimiento del analgésico (Y)
1	1	11	13
2	7	12	5
3	2	13	11
4	4	14	16
5	6	15	20
6	8	16	18
7	3	17	19
8	15	18	17
9	9	19	10
10	12	20	14

Calcule r_s y haga la prueba (unilateral) de importancia. Sea $\alpha =$ .05. Determine el valor p para esta prueba.

9. Se reunieron los siguientes datos sobre funcionamiento pulmonar en niños con distrofia muscular antes y después de un período de terapia respiratoria. Los resultados se expresan como porcentajes de los valores normales pronosticados por estatura, peso y medida de la superficie corporal.

Capacidad vital forzada (litros)

Antes:	74	65	84	89	84	65	78	86	83	82
Después:	79	78	100	92	104	70	81	84	85	90

Utilice la prueba del signo para determinar si puede concluirse o no que la terapia es efectiva. Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p?

10. Se compararon tres métodos para reducir, con el baño, la flora bacteriana de la piel. Los conteos de las bacterias se efectuaron en el pie derecho de personas antes y después del tratamiento. La variable de interés fue el porcentaje de disminución de las bacterias. Veintisiete estudiantes de enfermería voluntarias participaron en el experimento. Los tres métodos de baño del pie fueron agitación en remolino, por ducha y baño de pies. Los resultados fueron los siguientes:

Agitación en remolino		Ducha		Baño de pies	
91	80	18	16	6	10
87	92	22	15	6	12
88	81	20	26	8	5
84	93	29	19	9	9
86		25		13	

¿Puede concluirse con base en estos datos que los tres métodos no son igualmente eficaces? Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

11. Diez personas con asma bronquial participaron en un experimento para estimar la eficacia relativa de tres medicamentos. La si-

guiente tabla muestra el cambio en el VFE_1 (volumen forzado espirado en 1 segundo) (expresado en litros) dos horas después de la administración del medicamento.

	Medicamento		
Persona	A	B	C
1	.00	.13	.26
2	.04	.17	.23
3	.02	.20	.21
4	.02	.27	.19
5	.04	.11	.36
6	.03	.18	.25
7	.05	.21	.32
8	.02	.23	.38
9	.00	.24	.30
10	.12	.08	.30

¿Son estos datos suficientes para indicar una diferencia en la eficacia del medicamento? Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

12. Se estudiaron los sueros de dos grupos de personas, después de haber sufrido una infección por estreptococos, para observar la acción neutralizante de los anticuerpos ante la estreptolisina O (AEO). Los resultados fueron los siguientes:

AEO (medida en unidades Todd)	
Grupo A	Grupo B
324	558
275	108
349	291
604	863
566	303
810	640
340	358
295	503
357	646
580	689
344	250
655	540
380	630
503	190
314	

¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente que indique una diferencia en las medianas de las poblaciones? Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba? Utilice la prueba de la mediana y la prueba de Mann-Whitney y compare los resultados obtenidos.

13. Los siguientes valores son los valores de la $PaCO_2$ (en mm Hg) de 16 pacientes con enfermedad broncopulmonar:

$$39, 40, 45, 48, 49, 56, 60, 75, 42, 48, 32, 37, 32, 33, 33, 36$$

Utilice la prueba de Kolmogorov-Smirnov para probar la hipótesis nula de que los valores de la $PaCO_2$ de la población muestreada están normalmente distribuidos con $\mu = 44$ y $\sigma = 12$.

14. La tabla siguiente muestra los consumos de calorías (cal/día/kg) y de oxígeno, VO_2 (ml/min/kg), de 10 niños.

Consumo de calorías (X)	VO_2 (Y)
50	7.0
70	8.0
90	10.5
120	11.0
40	9.0
100	10.8
150	12.0
110	10.0
75	9.5
160	11.9

Pruebe la hipótesis nula de que las dos variables son mutuamente independientes, contra la alternativa de que están directamente relacionadas. Sea $\alpha = .05$. ¿Cuál es el valor p para esta prueba?

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. M. G. Kendall y R. M. Sundrum, "Distribution-Free Methods and Order Properties," *Review of the International Statistical Institute, 21:3* (1953), 124-134.

2. Jean Dickinson Gibbons, *Nonparametric Statistical Inference,* McGraw-Hill, Nueva York, 1971.
3. J. R. Blum y N. A. Fattu, "Nonparametric Methods," *Review of Educational Research, 24* (1954), 467-487.
4. L. E. Moses, "Nonparametric Statistics for Psychological Research," *Psychological Bulletin, 49* (1952), 122-143.
5. Sidney Siegel, *Nonparametric Statistics for the Behaviorial Sciences,* McGraw-Hill, Nueva York, 1956.
6. W. J. Conover, *Practical Nonparametric Statistics,* segunda edición, Wiley, Nueva York, 1980.
7. James V. Bradley, *Distribution-Free Statistics,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.
8. Charles H. Kraft y Constance Van Eeden, *A Nonparametric Introduction to Statistics,* Macmillan, Nueva York, 1968.
9. Merle W. Tate y Richard C. Clelland, *Nonparametric and Shortcut Statistics in the Social, Biological, and Medical Sciences,* Interstate Printers and Publishers, Danville, Ill., 1957.
10. Jean Dickinson Gibbons, *Nonparametric Methods for Quantitative Analysis,* Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1976.
11. Frederick Mosteller y Robert E. K. Rourke, *Sturdy Statistics: Nonparametric and Order Statistics,* Reading, Mass., Adisson-Wesley, 1973.
12. Albert Pierce, *Fundamentals of Nonparametric Statistics,* Belmont, Cal., Dickensen, 1970.
13. G. E. Noether, *Introduction to Statistics: A Fresh Approach,* Boston, Houghton Mifflin, 1971.
14. Myles Hollander y Douglas A. Wolfe, *Nonparametric Statistical Methods,* Wiley, Nueva York, 1973.
15. Wayne W. Daniel, *Practical Nonparametric Statistics,* Houghton Mifflin, Boston, 1978.
16. Leonard A. Marascuilo y Maryellen McSweeney, *Nonparametric and Distribution-Free Methods for the Social Sciences,* Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1977.
17. E. L. Lehmann, *Nonparametrics, Statistical Methods Based on Ranks,* Holden-Day, San Francisco, 1975.
18. Jaroslav Hajek, *A Course in Nonparametric Statistics,* Holden-Day, San Francisco, 1969.
19. John Edward Walsh, *Handbook of Nonparametric Statistics,* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1962.
20. John E. Walsh, *Handbook of Nonparametric Statistics,* II, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965.

21. I. R. Savage, *Bibliography of Nonparametric Statistics,* Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1962).
22. S. S. Stevens, "On the Theory of Scales of Measurement," *Science, 103* (1946), 677-680.
23. S. S. Stevens, "Mathematics, Measurement and Psychophysics," en S. S. Stevens (editor), *Handbook of Experimental Psychology,* Wiley, Nueva York, 1951.
24. N. H. Anderson, "Scales and Statistics: Parametric and Nonparametric," *Psychological Bulletin, 58* (1961), 305-316.
25. J. Gaito, "Nonparametric Methods in Psychological Research," *Psychological Reports, 5* (1959), 115-125.
26. F. M. Lord, "On the Statistical Treatment of Football Numbers," *American Psychologist, 8* (1953), 750-751.
27. Gordon D. Armstrong, "Parametric Statistics and Ordinal Data: A Pervasive Misconception," *Nursing Research, 30* (1981), 60-62.
28. Edgar F. Borgatta y George W. Bohrnstedt, "Level of Measurement Once Over Again," *Sociological Methods & Research, 9* (1980), 147-160.
29. W. J. Dixon y A. M. Mood, "The Statistical Sign Test," *Journal of the American Statistical Association, 41* (1946), 557-566.
30. A. M. Mood, *Introduction to the Theory of Statistics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1950.
31. J. Westenberg, "Significance Test for Median and Interquartile Range in Samples from Continuous Populations of Any Form," *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen, 51* (1948), 252-261.
32. G. W. Brown y A. M. Mood, "On Median Tests for Linear Hypotheses," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* University of California Press, Berkeley, 1951, págs. 159-166.
33. V. L. Senders, *Measurement and Statistics,* Oxford University Press, Nueva York, 1958.
34. William L. Hays y Robert L. Winkler, *Statistics: Probability, Inference, and Decision,* Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1971.
35. Ronald A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers,* decimatercera edición, Hafner, Nueva York, 1958.
36. H. B. Mann y D. R. Whitney, "On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other," *Annals of Mathematical Statistics, 18* (1947), 50-60.

37. Gottfried E. Noether, *Elements of Nonparametric Statistics,* Wiley, Nueva York, 1967.
38. A. N. Kolmogorov, "Sulla Determinazione Empirica di una Legge di Distribuizione," *Giornale dell' Istitute Italiano degli Altuari, 4* (1933), 83-91.
39. N. V. Smirnov, "Estimate of Deviation Between Empirical Distribution Functions in Two Independent Samples," (en ruso) *Bulletin Moscow University, 2* (1939), 3-16.
40. L. A. Goodman, "Kolmogorov-Smirnov Tests for Psychological Research," *Psychological Bulletin, 51* (1954), 160-168.
41. Gottfried E. Noether, *Elements of Nonparametric Statistics,* Wiley, Nueva York, 1967.
42. F. J. Massey, "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit," *Journal of the American Statistical Association, 46* (1951), 68-78.
43. Z. W. Birnbaum, "Numerical Tabulation of the Distribution of Kolmogorov's Statistic for Finite Sample Size," *Journal of the American Statistical Association, 47* (1952), 425-441.
44. M. J. Slakter, A "Comparison of the Pearson Chi-Square and Kolmogorov Goodness-of-Fit Tests with Respect to Validity," *Journal of the American Statistical Association, 60* (1965), 854-58.
45. W. H. Kruskal y W. A. Wallis, "Use of Ranks in One-Criterion Analysis of Variance," *Journal of the American Statistical Association 47* (1952), 583-621; errata, ibid., *48* (1953), 907-911.
46. K. R. Gabriel y P. A. Lachenbruch, "Nonparametric ANOVA in Small Samples: A Monte Carlo Study of the Adequacy of the Asymptotic Approximation," *Biometrics, 25* (1969), 593-596.
47. M. Friedman, "The Use of Ranks to Avoid the Assumption of Normality Implicit in the Analysis of Variance," *Journal of the American Statistical Association, 32* (1937), 675-701.
48. M. Friedman, "A Comparison of Alternative Tests of Significance for the Problem of *m* Rankings," *Annals of Mathematical Statistics, 11* (1940) 86-92.
49. M. G. Kendall, *Rank Correlation Methods,* segunda edición, Hafner, Nueva York, 1955.
50. W. H. Kruskal, "Ordinal Measures of Association," *Journal of the American Statistical Association, 53* (1958), 814-861.
51. Harold Hotelling y Margaret R. Pabst, "Rank Correlation and Tests of Significance Involving No Assumption of Normality," *Annals of Mathematical Statistics, 7* (1936), 29-43.

52. C. Spearman, "The Proof and Measurement of Association Between Two Things," *American Journal of Psychology, 15* (1904), 72-101.
53. G. J. Glasser y R. F. Winter, "Critical Values of the Coefficient of Rank Correlation for Testing the Hypothesis of Independence," *Biometrika, 48* (1961), 444-448.
54. Eugene S. Edgington, *Statistical Inference: The Distribution-Free Approach,* McGraw-Hill, Nueva York, 1969.

Otras referencias, artículos de revistas

1. Olive Jean Dunn, "Multiple Comparisons Using Rank Sums," *Technometrics, 6* (1964), 241-252.
2. B. J. McDonald y W. A. Thompson, "Rank Sum Multiple Comparisons in One- and Two-Way Classifications," *Biometrika, 54* (1967), 487-498.
3. Wayne W. Daniel y Carol E. Coogler, "Some Quick and Easy Statistical Procedures for the Physical Therapist," *Physical Therapy, 54* (1974), 135-140.
4. Wayne W. Daniel y Beaufort B. Longest, "Some Practical Statistical Procedures," *Journal of Nursing Administration, 5* (1975), 23-27.
5. Wayne W. Daniel, *On Nonparametric and Robust Tests for Dispersion: A Selected Bibliography,* Vance Bibliographies, Monticello, Ill., diciembre, 1979.
6. Wayne W. Daniel, *Goodness-of-fit: A Selected Bibliography for the Statistician and the Researcher,* Vance Bibliographies, Monticello, Ill., mayo, 1980.

12

Estadística demográfica

12.1 INTRODUCCIÓN

El médico particular llega a un diagnóstico y a un plan de tratamiento para un paciente individual por medio de una historia clínica, un examen físico y varias pruebas de laboratorio. Puede considerarse a la comunidad como un complejo organismo viviente, para el cual, el grupo de salud pública es el médico. Para desempeñar satisfactoriamente este papel, el grupo de salud pública debe utilizar también medios y técnicas apropiadas para evaluar el estado de salud de la comunidad. Tradicionalmente, estos medios han consistido en los datos demográficos de la comunidad, que incluyen los conteos de nacimientos, muertes, enfermedades y las diversas tasas y razones que pueden calcularse a partir de ellos.

En las siguientes secciones, se dan algunas de las tasas y razones más útiles y ampliamente utilizadas. Sin embargo, antes de seguir adelante, deben distinguirse los términos *tasa* y *razón*, definiendo cada uno como sigue.

1. *Tasa.* Aun cuando hay algunas excepciones, el término tasa se reserva por lo general para referirse a aquellos cálculos que implican la probabilidad de ocurrencia de algún evento. Una tasa se expresa en la forma

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)k \qquad (12.1.1)$$

donde

a = la frecuencia con la cual se ha presentado un evento durante algún período especificado.
$a + b$ = el número de personas expuestas al riesgo del evento durante el mismo período.
k = algún número tal como 10, 100, 1000, 10,000 ó 100,000.

Como se indica mediante la expresión 12.1.1, el numerador de una tasa es una parte componente del denominador. El propósito del multiplicador, k, llamado base, es evitar resultados que comprendan números muy pequeños que puedan surgir en el cálculo de las tasas, y facilitar la comprensión de estas últimas. El valor elegido para k dependerá de la magnitud del numerador y del denominador.

2. *Razón.* Una razón es una fracción de la forma

$$\left(\frac{c}{d}\right)k \tag{12.1.2}$$

donde k es alguna base, como ya se definió, y tanto c como d se refieren a la frecuencia de ocurrencia de algún evento o artículo. En el caso de una razón, el contrario de la tasa, el numerador no es una parte componente del denominador. Por ejemplo, puede hablarse de la razón de personas-doctores o de la razón personas-camas de hospital de cierta área geográfica. Los valores de k que se utilizan con más frecuencia en las razones son 1 y 100.

12.2 TASAS Y RAZONES DE MORTALIDAD

Las tasas y razones que se estudian en esta sección se refieren a la ocurrencia de la muerte. Las tasas de mortalidad expresan la frecuencia relativa de ocurrencia de muerte dentro de algún intervalo especificado en una población específica. El denominador de una tasa de mortalidad se conoce como población en riesgo. El numerador representa sólo aquellas muertes que ocurrieron en la población especificadas por el denominador.

1. *Tasa bruta de mortalidad anual.* La tasa bruta de mortalidad anual se define como

$$\frac{\text{número total de muertes durante un año (enero 1 a diciembre 31)}}{\text{población total a julio 1}} \cdot k$$

donde, por lo general, se elige 1,000 como el valor de k. Esta es la tasa que se utiliza más ampliamente para estimar la salud global de una comunidad. Comparar las tasas brutas de mortalidad de dos comunidades es riesgoso, a menos que se sepa que las comunidades son comparables con respecto a las muchas características, distintas a las condiciones de salud, que afectan la tasa de mortalidad. Las variables que entran en juego comprenden la edad, raza, sexo y condición socioeconómica. Cuando dos poblaciones deben compararse con base en la tasa de mortalidad, deben hacerse ajustes para conciliar las diferencias entre las poblaciones con respecto a estas variables. Deben tenerse las mismas precauciones al comparar las tasas de mortalidad anual para la misma comunidad, para dos años distintos.

2. *Tasas específicas de mortalidad anual.* En general, es más importante e ilustrativo observar las tasas de mortalidad de subgrupos pequeños, bien definidos, de la población total. Las tasas de este tipo se conocen como *tasas específicas de mortalidad* y se definen como

$$\frac{\text{número total de muertes en un subgrupo específico durante un año}}{\text{población total en el subgrupo específico a julio 1}} \cdot k$$

donde, por lo general, k es igual a 1,000. Los subgrupos para los cuales pueden calcularse las tasas específicas de mortalidad comprenden aquellos grupos que pueden distinguirse en base al sexo, la raza y la edad. Pueden calcularse simultáneamente las tasas específicas para dos o más características. Por ejemplo, puede calcularse la tasa de mortalidad para los varones blancos, obteniendo así una tasa específica de raza-sexo. Pueden calcularse también las tasas específicas de mortalidad por causas, incluyendo en el numerador sólo aquellas muertes debidas a una causa particular, por decir cáncer, enfermedad del corazón o accidentes. Debido a la pequeña fracción que resulta, la base k, para una tasa específica por causa, es por lo general de 100,000 ó 1,000,000.

3. *Tasas de mortalidad ajustadas o estandarizadas.* Como ya se ha señalado, la utilidad de la tasa bruta de mortalidad se restringe por el hecho de que no refleja la composición de la población con respecto a ciertas características por las cuales es afectada. Se ha visto que por medio de las tasas específicas de mortalidad, pueden estudiarse individualmente varios sectores de la población. Sin embargo, si se intenta obtener una impresión global de la salud de una población, observando las tasas específicas de mortalidad individuales, pronto se queda uno abrumado por su gran número.

Lo que se desea es un solo valor que mida la intensidad de la mortalidad en una población, mientras se mantienen constantes uno o más de los factores de ajuste, como la edad, la raza o el sexo. Se cuenta con dicho valor, conocido como *tasa ajustada de mortalidad.* Se obtiene por lo general mediante lo que se conoce como *método directo* de ajuste. Este método consiste esencialmente en aplicar, a una *población*

Tabla 12.2.1 Cálculo de la tasa de mortalidad ajustada por edades para Georgia, 1970, por el método directo.

1 Edad (años)	*2* Población[a]	*3* Muertes[a]	*4* Tasas de mortalidad especificada por edades (por 100,000)	*5* Población estándar basada en la población de los EE.UU. 1970[b]	*6* Número de muertes esperadas en la población estándar
0 a 4	424,600	2,483	584.8	84,416	494
5 a 14	955,000	449	47.0	200,508	94
15 a 24	863,000	1,369	158.6	174,406	277
25 a 34	608,100	1,360	223.6	122,569	274
35 a 44	518,400	2,296	442.9	113,614	503
45 a 54	486,400	4,632	952.3	114,265	1,088
55 a 64	384,400	7,792	2,027.1	91,480	1,854
65 a 74	235,900	9,363	3,969.1	61,195	2,429
75 y más	132,900	12,042	9,060.9	37,547	3,402
Total	4,608,700	41,786[c]		1,000,000	10,415

[a] *Georgia Vital and Morbidity Statistics*, 1970, Georgia Department of Public Health, Atlanta, Georgia.

[b] *1970 Census of Population*, PC(1)-B1, tabla 49.

[c] Excluye a 44 muertes a edad desconocida.

gia, si la composición por edades de la población de Georgia hubiera sido la misma que la de los Estados Unidos en 1970. Los datos necesarios para los cálculos se muestran en la tabla 12.2.1.

El procedimiento para calcular una tasa de mortalidad ajustada por edades comprende los pasos siguientes.

1. Se lista la población de interés (columna 2) de acuerdo con el grupo de edades (columna 1).
2. Se listan las muertes en la población de interés (columna 3) según las edades.
3. Se calculan las tasas específicas de mortalidad por edades (columna 4) para cada grupo, dividiendo la columna 3 entre la columna 2 y multiplicando por 100,000.
4. Se lista la población estándar (columna 5) por grupo de edades.

5. Se calcula el número esperado de muertes en la población estándar para cada grupo (columna 6), multiplicando la columna 4 por la columna 5 y dividiendo entre 100,000. Los valores de la columna 6 son las muertes que se esperarían en la población estándar si las personas de esta población se hubieran expuesto al mismo riesgo de muerte experimentado por la población que se está ajustando.
6. Se suman los valores de la columna 6 para obtener el número total de muertes esperadas en la población estándar.
7. La tasa de mortalidad ajustada por edades se calcula de la misma manera que una tasa bruta de mortalidad. Es decir, la tasa de mortalidad ajustada por edades es igual a

$$\frac{\text{número total de muertes esperadas}}{\text{población estándar total}} \cdot 1000$$

En el presente ejemplo, se tiene una tasa de mortalidad ajustada por edades de

$$\frac{10{,}415}{1{,}000{,}000} \cdot 1000 = 10.4$$

Se observa entonces que la tasa bruta de mortalidad se ha incrementado de un 9.1 por 1,000 a un 10.4 por 1,000 ajustando la población de Georgia en 1970 a la distribución de edades de la población estándar. Este incremento en la tasa de mortalidad, después del ajuste, refleja el hecho de que, en 1970, la población de Georgia era un poco más joven que la población de los Estados Unidos en general. Por ejemplo, sólo el 8 por ciento de la población de Georgia tenía 65 años de edad o más, mientras que el 10 por ciento de la población de los Estados Unidos estaba en ese grupo de edades.

4. *Tasa de mortalidad materna.* Esta tasa se define como

$$\frac{\text{muertes debidas a todas las causas puerperales durante un año}}{\text{total de nacimientos vivos durante el año}} \cdot k$$

donde k se toma como 1,000 ó 100,000. El denominador preferido para esta tasa es el número de mujeres que estuvieron embarazadas durante el año. Sin embargo, es imposible determinar este denominador.

Una muerte debida a una causa puerperal es aquella que puede atribuirse a alguna fase del parto. Debido a la disminución de la tasa de mortalidad maternal en los Estados Unidos, resulta más conveniente utilizar k = 100,000. Sin embargo, en algunos países, k = 1,000 conduce a una tasa más conveniente. La disminución de la tasa de mortalidad materna en Estados Unidos ha tenido también el efecto de reducir su utilidad como discriminador entre las comunidades con cualidades variables de atención médica e instalaciones sanitarias.

Algunas de las limitaciones de la tasa de mortalidad materna incluyen las siguientes:

a) Las muertes fetales no se incluyen en el denominador. Esto conduce a una tasa inflada, ya que una madre puede morir de una causa puerperal sin producir un nacimiento vivo.
b) La muerte de la madre sólo puede contarse una vez, aunque puede haber ocurrido un nacimiento de gemelos o un nacimiento múltiple mayor. Estos casos hacen que el denominador sea demasiado grande y, en consecuencia, se tiene una tasa demasiado pequeña.
c) Algunos nacimientos vivos no se registraron, lo cual conduce a un denominador demasiado pequeño, hace que la tasa sea demasiado grande.
d) La muerte de la madre puede ocurrir en un año posterior al cual ocurrió el nacimiento. Aunque hay excepciones, en la mayoría de los casos la transferencia de muerte materna se balanceará en un determinado año.

5. *Tasa de mortalidad infantil.* Esta tasa se define como

$$\frac{\text{número de muertes de niños menores de 1 año de edad durante un año}}{\text{número total de nacimientos de niños vivos durante el año}} \cdot k$$

donde k se toma generalmente como 1,000. El uso y la interpretación de esta tasa debe hacerse a la luz de sus limitaciones que son semejantes a las que caracterizan a la tasa de mortalidad materna. Muchas de las criaturas que mueren durante un determinado año nacieron durante el año anterior y, de modo semejante, muchos de los niños nacidos durante un determinado año morirán durante el año siguiente. En las poblaciones con una natalidad estable, esto no plantea un problema serio. Sin embargo, en períodos de cambio rápido, deben hacerse algunos ajustes. Una manera de hacer un ajuste es asignar las muertes infantiles al año calendario en el que nacieron las criaturas antes de calcular la tasa.

6. *Tasa de mortalidad neonatal.* En un esfuerzo por comprender mejor la naturaleza de las muertes infantiles, suelen calcularse tasas para períodos menores de un año. De éstas, la que se calcula con mayor frecuencia es la *tasa de mortalidad neonatal,* que se define como

$$\frac{\text{número de muertes de niños menores de 28 días de edad durante un año}}{\text{número total de nacimientos de niños vivos durante el año}} \cdot k$$

   donde $k = 1{,}000$.

7. *Tasa de mortalidad fetal.* Esta tasa se define como

$$\frac{\text{número total de muertes fetales durante un año}}{\text{número total de alumbramientos durante el año}} \cdot k$$

   donde k se toma por lo general como 1,000. Una muerte fetal se define como un producto de concepción que no muestra signos de vida después de concluir el nacimiento. Existen varios problemas asociados con el uso e interpretación de esta tasa. Hay variaciones entre las diferentes regiones que informan con respecto a la duración de la gestación. Algunas regiones reportan todas las muertes fetales sin importar la duración de la gestación, mientras que otras tienen un período de gestación mínimo que debe alcanzarse antes de que se requiera el reporte. Otra objeción a la tasa de mortalidad fetal es que no toma en cuenta el grado al cual una comunidad intenta reproducirse. Se ha propuesto la razón que se considera a continuación para superar esta objeción.

8. *Razón de mortalidad fetal.* Esta razón se define como

$$\frac{\text{número total de muertes fetales durante un año}}{\text{número total de nacimientos de niños vivos durante el año}} \cdot k$$

   donde k se toma como 100 ó 1 000.

   Algunas autoridades han sugerido que en el denominador se incluyan tanto el número de muertes fetales como los nacimientos de niños vivos en un intento por incluir toda clase de preñez en el cálculo de la razón. La objeción a esta sugerencia se apoya en lo incompleto de los datos sobre muertes fetales.

9. *Tasa de mortalidad perinatal.* Ya que, con frecuencia, las muertes fetales que ocurren al final del embarazo y las muertes neonatales tienen las mismas causas fundamentales, se ha sugerido que se combinen las dos para obtener lo que se conoce como *tasa de mortalidad perinatal.* Esta tasa se calcula como

$$\frac{\begin{array}{c}\text{(número de muertes fetales de 28 semanas o más)}\\ + \text{(número de muertes infantiles de menos de 1 semana)}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{(número de muertes fetales de 28 semanas o más)}\\ + \text{(número de nacimientos de niños vivos)}\end{array}} \cdot k$$

donde $k = 1{,}000$.

10. *Razón de causas de defunción.* Esta razón se define como

$$\frac{\begin{array}{c}\text{número de muertes debidas a una enfermedad}\\ \text{específica durante un año}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{número total de muertes debidas a todas las}\\ \text{causas durante el año}\end{array}} \cdot k$$

donde $k = 100$. Esta índice se utiliza para estimar la importancia relativa de una determinada causa de defunción. Debe utilizarse con precaución al comparar una comunidad con otra. Una razón de causa de defunción mayor, en una comunidad que en otra, puede deberse a que la primera comunidad tiene una baja mortalidad debida a otras causas.

11. *Razón de mortalidad proporcional.* Se ha sugerido este índice como una sola medida para comparar las condiciones sanitarias globales de diferentes comunidades. Se define como

$$\frac{\text{número de muertes de personas de 50 años de edad y más}}{\text{número total de muertes}} \cdot k$$

donde $k = 100$. La clase especificada es por lo general un grupo de edades tal como de 50 años y más, o bien, una causa de categoría de muerte, como por accidente. Linder y Grove[1] han destacado que este índice tiene ciertas desventajas.

Ejercicios

12.2.1 Se reportaron los siguientes datos anuales para cierta región geográfica.

		Número de	
	Total	*Blancos*	*No blancos*
Población estimada a julio 1o.	597 500	361 700	235 800
Total de nacimientos de niños vivos	12 437	6 400	6 037
Nacimientos inmaduros	1 243	440	803
Muertes fetales:			
Total	592	365	227
De menos de 20 semanas de gestación	355	269	86
De 20 a 27 semanas de gestación	103	42	61
28 semanas y más	123	49	74
Duración desconocida de gestación	11	5	6
Muertes:			
Total en todas las edades	6 219	3 636	2 583
De menos de un año	267	97	170
De menos de 28 días	210	79	131
Muertes por inmadurez	16	12	4
Muerte de las madres	2	--	2
Causas de muerte:			
Neoplasmas malignos	948	626	322
Corazón isquémico	1 697	1 138	559

Fuente: *Georgia Vital and Morbidity Statistics 1970,* Georgia Department of Public Health, Atlanta, pág. 47.

A partir de estos datos, calcule las siguientes tasas y razones: *a*) tasa bruta de mortalidad, *b*) tasas específicas de mortalidad por razas para blancos y no blancos, *c*) tasa de mortalidad materna, *d*) tasa de mortalidad infantil, *e*) tasa de mortalidad neonatal, *f*) razón de mortalidad fetal y *g*) razones de causas de defunción por neoplasmas malignos y corazón isquémico.

12.2.2 La siguiente tabla muestra las muertes y la población estimada por edades para el estado de Georgia en 1971. Utilice estos datos para calcular la tasa de mortalidad ajustada por edades para Georgia, 1971. Utilice la misma población estándar que se utilizó en el ejemplo 12.2.1.

Edad (años)	*Población estimada*	*Muertes*
0 a 4	423,700	2,311
5 a 14	947,900	480
15 a 24	891,300	1,390
25 a 34	623,700	1,307
35 a 44	520,000	2,137
45 a 54	494,200	4,640
55 a 64	388,600	7,429
65 a 74	243,000	9,389
75 y más	136,000	12,411
Total	4,668,400	41,494[a]

Fuente: Statistics Section, Office of Evaluation and Research, Georgia Department of Human Resources, Atlanta.
[a] Excluye a 42 muertes a edad desconocida.

12.3 MEDIDAS DE FERTILIDAD

El término *fertilidad,* como es utilizado por los demógrafos de los Estados Unidos, se refiere al acto real de dar a luz niños, contrario a la capacidad de concebir niños, fenómeno para el cual se utiliza el término *fecundidad.* Conocer la "tasa" de alumbramientos es una comunidad es importante para quienes se dedican a la salud pública, para planificar los servicios e instalaciones para las madres, bebés y niños. Los siguientes puntos son las seis medidas básicas de la fertilidad.

1. *Tasa bruta de natalidad.* Esta tasa es la medida de fertilidad que se utiliza más ampliamente. Se obtiene a partir de la relación

$$\frac{\text{número total de nacimientos de niños vivos durante un año}}{\text{población total a julio 1}} \cdot k$$

donde $k = 1{,}000$. Para ilustrar el cálculo de ésta y de las otras cinco tasas, véase la tabla 12.3.1.

2. *Tasa general de fertilidad.* Esta tasa se define como

$$\frac{\text{número de nacimientos de niños vivos durante un año}}{\text{número total de mujeres en edad de dar a luz}} \cdot k$$

donde $k = 1{,}000$ y, por lo general, la edad de dar a luz se define como las edades de 15 a 44 años, o bien, de 15 a 49. La característica de interés de esta tasa, cuando se compara con la tasa bruta de natalidad, es el hecho de que el denominador es una aproximación del número de personas que, en realidad, están expuestas al riesgo de dar a luz un niño.

3. *Tasa de fertilidad, especificada por edades.* Dado que la tasa de alumbramientos no es uniforme en todas las edades de dar a luz, resulta conveniente una tasa que permita el análisis de las tasas de fertilidad para intervalos de edad maternal más cortos. La tasa utilizada es la tasa específica de fertilidad por edades que se define como

$$\frac{\text{número de nacimientos para mujeres de cierta edad en un año}}{\text{número total de mujeres de la edad especificada}} \cdot k$$

donde $k = 1{,}000$. Las tasas específicas por edades pueden calcularse para una sola edad o cualquier intervalo de edades. Las que se calculan con más frecuencia son las tasas para grupos de edad de cinco años. Pueden calcularse también las tasas específicas de fertilidad para otros subgrupos de la población, como los definidos por la raza, el nivel socioeconómico y diversas características demográficas.

4. *Tasa total de fertilidad.* Si se suman las tasas específicas de fertilidad por edades, para todas las edades, y se multiplican por el intervalo en el cual se agruparon estas últimas, el resultado se conoce como *tasa total de fertilidad.* El valor resultante es una estimación del número de niños que tendría un grupo de 1,000 mujeres si, durante sus años fértiles, se reprodujeran a las tasas representadas por las específicas por edades, a partir de las cuales se calcula la tasa total.

Tabla 12.3.1 Ilustración del procedimiento para calcular seis medidas básicas de fertilidad, para Georgia, 1970.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Edad de la mujer (años)	*Número de mujeres en la población*[a]	*Número de nacimientos para las mujeres de edad especificada*[b]	*Tasa de natalidad específica por edades para cada 1,000 mujeres*	*Población estándar basada en la población de los EE. UU. en 1970*[c]	*Nacimientos esperados*	*Tasa acumulada de fertilidad*
15 a 19	220,100	21,790	99.0	193,762	19,182	495.0
20 a 24	209,500	37,051	176.9	173,583	30,707	1,379.5
25 a 29	170 100	22,135	130.1	140,764	18,313	2,030.0
30 a 34	139,100	9,246	66.5	119,804	7,967	2,362.5
35 a 39	135,400	3,739	27.6	116.925	3,227	2,500.5
40 a 49	261,700	1,044	4.0	255,162	1,021	2,540.5
Total	1,135,900	95,005		1,000,000	80,417	

Cálculo de las seis tasas básicas:

1) Tasa bruta de natalidad = total de nacimientos dividido entre la población total = (95,584/4,608,700) (1,000) = 21.
2) Tasa general de fertilidad = (95,584/1,135,900) (1,000) = 84.1.
3) Tasas de fertilidad específicas por edades = valores de la columna 3 divididos entre los valores de la columna 2, multiplicados por 1,000 por cada grupo de edades. Los resultados se muestran en la columna 4.
4) Tasa total de fertilidad = la suma de cada tasa específica por edades multiplicada por la amplitud del intervalo de edades = (99.0) (5) + (176.9)(5) + (130.1)(5) + (66.5)(5) + (27.6)(5) + (4.0)(10) = 2,540.5.
5) Tasa acumulada de fertilidad = tasa de natalidad específica por edades multiplicada por la amplitud del intervalo de edades acumulada por edades. Véase la columna 7.
6) Tasa general estandarizada de fertilidad = (80,417/1,000,000) (1,000) = 80.4.

[a] Statistics Section, Office of Evaluation and Research, Georgia Department of Human Resources, Atlanta.

[b] *Georgia Vital and Morbidity Statistics, 1970,* Georgia Department of Public Health, Atlanta.

[c] 1970 Census of Population, PC(1)-B1.

5. *Tasa acumulada de fertilidad.* La tasa acumulada de fertilidad se calcula de la misma manera que la tasa total de fertilidad, excepto que el proceso de sumar puede terminarse al final de cualquier grupo de edades deseado. Los números que se dan en la columna 7 de la tabla 12.3.1 son las tasas acumuladas de fertilidad que comprenden las edades indicadas en la columna 1. El valor final de la columna de la tasa acumulada de fertilidad es la tasa total de fertilidad.
6. *Tasa estandarizada de fertilidad.* Así como la tasa bruta de mortalidad puede estandarizarse o ajustarse, también se estandariza la tasa general de fertilidad. El procedimiento es idéntico al que se analizó en la sección 12.2 para ajustar la tasa bruta de mortalidad. Los cálculos necesarios para calcular la tasa estandarizada de fertilidad por edades se muestran en la tabla 12.3.1.

Ejercicios

12.3.1 Los datos de la tabla siguiente son para el estado de Georgia, para el año de 1971.

Edad de la mujer (años)	*Número de mujeres en la población*	*Número de nacimientos en las mujeres de edad especificada*
15 a 19	225,200	21,834
20 a 24	217,600	35,997
25 a 29	173,400	21,670
30 a 34	143,300	8,935
35 a 39	134,100	3,464
40 a 49	267,800	925[a]

Fuente: Statistics Section, Office of Evaluation and Research, Georgia Department of Human Resources, Atlanta.

[a] Puede incluir algunos nacimientos en mujeres de más de 49 años de edad.

A partir de los datos anteriores, calcule las tasas siguientes:

a) Tasas específicas de fertilidad por edades para cada grupo de edades.

b) Tasa total de fertilidad.
c) Tasa acumulada de fertilidad para cada grupo de edades.
d) Tasa general estandarizada de fertilidad por edades.

Utilice la población estándar mostrada en la tabla 12.3.1.

12.3.2. Hubieron un total de 95,546 nacimientos de niños vivos en Georgia en 1971. La población total estimada a julio 1 de 1971 fue de 4,668,400 y el número de mujeres entre las edades de 15 y 49 años fue de 1,161,400. Utilice estos datos y calcule:

a) La tasa bruta de natalidad.
b) La tasa general de fertilidad.

12.4 MEDIDAS DE MORBILIDAD

Otra área que le interesa al profesionista dedicado a la salud pública que está analizando las condiciones de salud de una comunidad es la *morbilidad.* Como regla general, no se cuenta con tanta facilidad ni en la forma tan completa con datos para el estudio de la morbilidad de una comunidad como para la natalidad y la mortalidad, debido a lo incompleto de los informes y a las diferencias entre los estados en relación con las leyes que requieren el reporte de las enfermedades. Las dos tasas que se utilizan con mayor frecuencia en el estudio de las enfermedades en una comunidad son la *tasa de incidencia* y la *tasa de prevalencia.*

1. *Tasa de incidencia.* Esta tasa se define como

$$\frac{\text{número total de nuevos casos de una enfermedad específica durante un año}}{\text{población total a julio 1}} \cdot k$$

donde el valor de k depende de la magnitud del numerador. Se utiliza una base de 1 000 cuando resulta conveniente, pero puede utilizarse 100 para las enfermedades más comunes, y 10,000 ó 100,000 para aquellas que son menos comunes o raras. Esta tasa, que mide el grado con el cual están ocurriendo nuevos casos en la comunidad, es útil para ayudar a determinar la necesidad de la iniciación de medidas preventivas. Es una medida muy importante tanto para las enfermedades crónicas como para las agudas.

2. *Tasa de prevalencia.* Aunque se menciona como tasa, la *tasa de prevalencia* es en realidad una razón, ya que se calcula a partir de la relación.

$$\frac{\text{número total de casos, nuevos o viejos, que existen en un instante}}{\text{población total en ese instante}} \cdot k$$

donde el valor de k se selecciona mediante los mismos criterios que para la tasa de incidencia. Esta tasa es especialmente útil en el estudio de las enfermedades crónicas, pero puede calcularse también para las enfermedades agudas.

3. *Razón de muertes-casos.* Esta razón es útil para determinar qué tanto éxito está teniendo el programa de tratamiento para cierta enfermedad. Se define como

$$\frac{\text{número total de muertes debidas a una enfermedad}}{\text{número total de casos debidos a la enfermedad}} \cdot k$$

donde $k = 100$. El período abarcado es arbitrario, dependiendo de la naturaleza de la enfermedad, y puede abarcar varios años para una enfermedad endémica. Nótese que esta razón puede interpretarse como la probabilidad de morir al contraer la enfermedad en cuestión y, como tal, revela la gravedad de la enfermedad.

4. *Razón de inmadurez.* Esta razón se define como

$$\frac{\text{número de nacimientos de niños vivos con un peso inferior a los 2,500 gramos durante un año}}{\text{número total de nacimientos de niños vivos durante el año}} \cdot k$$

donde $k = 100$.

5. *Tasa de ataque secundario.* Esta tasa mide la ocurrencia de una enfermedad contagiosa entre personas susceptibles que se han expuesto a un caso primario, y se define como

$$\frac{\text{número de casos adicionales entre contagios de un caso primario dentro del período máximo de incubación}}{\text{número total de contagios susceptibles}} \cdot k$$

donde $k = 100$. Esta tasa se utiliza para estimar la propagación de la infección y se aplica por lo general a grupos cerrados o salones de clase, donde puede suponerse razonablemente que, de hecho, todos los miembros fueron contagiados.

12.5 RESUMEN

Este capítulo trata del cálculo e interpretación de diversas tasas y razones que son útiles en el estudio de la salud de los miembros de una comunidad. Más específicamente, se estudian las tasas y razones más importantes en relación con los nacimientos, muertes y la morbilidad. Quienes deseen saber más acerca de esta área, deben consultar las referencias.

REFERENCIAS

Referencias citadas

1. Forest E. Linder y Robert D. Grove, *Vital Statistics Rates in the United States, 1900-1940,* United States Government Printing Office, Washington, D.C., 1947.

Otras referencias.

1. Donald J. Bogue, *Principles of Demography,* Wiley, Nueva York, 1969.
2. John P. Fox, Carrie E. Hall y Lila R. Elveback, *Epidemiology,* Macmillian, Nueva York, 1970, capítulo 7.
3. Bernard G. Greenberg, "Biostatistics", en Hugh Rodman Leavell y

E. Gurney Clark, *Preventive Medicine,* tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1965.

4. Mortimer Spiegelman, *Introduction to Demography,* edición revisada, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1968.

Apéndice

Lista de tablas

Tabla A Cuadrados y raíces cuadradas.

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$(10n)^2$
1.0	1.00	1.00000	3.16228	100
1.1	1.21	1.04881	3.31662	121
1.2	1.44	1.09545	3.46410	144
1.3	1.69	1.14018	3.60555	169
1.4	1.96	1.18322	3.74166	196
1.5	2.25	1.22474	3.87298	225
1.6	2.56	1.26491	4.00000	256
1.7	2.89	1.30384	4.12311	289
1.8	3.24	1.34164	4.24264	324
1.9	3.61	1.37840	4.35890	361
2.0	4.00	1.41421	4.47214	400
2.1	4.41	1.44914	4.58258	441
2.2	4.84	1.48324	4.69042	484
2.3	5.29	1.51658	4.79583	529
2.4	5.76	1.54919	4.89898	576
2.5	6.25	1.58114	5.00000	625
2.6	6.76	1.61245	5.09902	676
2.7	7.29	1.64317	5.19615	729
2.8	7.84	1.67332	5.29150	784
2.9	8.41	1.70294	5.38516	841
3.0	9.00	1.73205	5.47723	900
3.1	9.61	1.76068	5.56776	961
3.2	10.24	1.78885	5.65685	1024
3.3	10.89	1.81659	5.74456	1089
3.4	11.56	1.84391	5.83095	1156
3.5	12.25	1.87083	5.91608	1225
3.6	12.96	1.89737	6.00000	1296
3.7	13.69	1.92354	6.08276	1369
3.8	14.44	1.94936	6.16441	1444
3.9	15.21	1.97484	6.24500	1521
4.0	16.00	2.00000	6.32456	1600
4.1	16.81	2.02485	6.40312	1681
4.2	17.64	2.04939	6.48074	1764
4.3	18.49	2.07364	6.55744	1849
4.4	19.36	2.09762	6.63325	1936
4.5	20.25	2.12132	6.70820	2025
4.6	21.16	2.14476	6.78233	2116
4.7	22.09	2.16795	6.85565	2209
4.8	23.04	2.19089	6.92820	2304
4.9	24.01	2.21359	7.00000	2401
5.0	25.00	2.23607	7.07107	2500
5.1	26.01	2.25832	7.14143	2601
5.2	27.04	2.28035	7.21110	2704
5.3	28.09	2.30217	7.28011	2809

Tabla A (Continuación).

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$(10n)^2$
5.4	29.16	2.32379	7.34847	2916
5.5	30.25	2.34521	7.41620	3025
5.6	31.36	2.36643	7.48331	3136
5.7	32.49	2.38747	7.54983	3249
5.8	33.64	2.40832	7.61577	3364
5.9	34.81	2.42899	7.68115	3481
6.0	36.00	2.44949	7.74597	3600
6.1	37.21	2.46982	7.81025	3721
6.2	38.44	2.48998	7.87401	3844
6.3	39.69	2.50998	7.93725	3969
6.4	40.96	2.52982	8.00000	4096
6.5	42.25	2.54951	8.06226	4225
6.6	43.56	2.56905	8.12404	4356
6.7	44.89	2.58844	8.18535	4489
6.8	46.24	2.60768	8.24621	4624
6.9	47.61	2.62679	8.30662	4761
7.0	49.00	2.64575	8.36660	4900
7.1	50.41	2.66458	8.42615	5041
7.2	51.84	2.68328	8.48528	5184
7.3	53.29	2.70185	8.54400	5329
7.4	54.76	2.72029	8.60233	5476
7.5	56.25	2.73861	8.66025	5625
7.6	57.76	2.75681	8.71780	5776
7.7	59.29	2.77489	8.77496	5929
7.8	60.84	2.79285	8.83176	6084
7.9	62.41	2.81069	8.88819	6241
8.0	64.00	2.82843	8.94427	6400
8.1	65.61	2.84605	9.00000	6561
8.2	67.24	2.86356	9.05539	6724
8.3	68.89	2.88097	9.11043	6889
8.4	70.56	2.89828	9.16515	7056
8.5	72.25	2.91548	9.21954	7225
8.6	73.96	2.93258	9.27362	7396
8.7	75.69	2.94958	9.32738	7569
8.8	77.44	2.96648	9.38083	7744
8.9	79.21	2.98329	9.43398	7921
9.0	81.00	3.00000	9.48683	8100
9.1	82.81	3.01662	9.53939	8281
9.2	84.64	3.03315	9.59166	8464
9.3	86.49	3.04959	9.64365	8649
9.4	88.36	3.06594	9.69536	8836
9.5	90.25	3.08221	9.74679	9025
9.6	92.16	3.09839	9.79796	9216
9.7	94.09	3.11448	9.84886	9409
9.8	96.04	3.13050	9.89949	9604
9.9	98.01	3.14643	9.94987	9801

Tabla B Logaritmos.

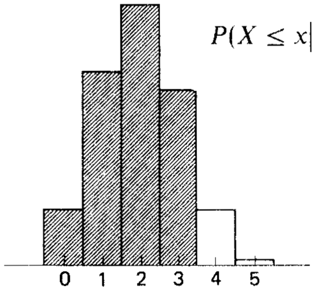
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316

Tabla B (Continuación).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Tabla C Distribución binomial de probabilidad acumulada.

$$P(X \leq x|n, p) = \sum_{X=0}^{x} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$



$P\ (X \leqslant (3|\ 5,\ .40) = .9130$

$n = 5$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9510	.9039	.8587	.8154	.7738	.7339	.6957	.6591	.6240	.5905
1	.9990	.9962	.9915	.9852	.9774	.9681	.9575	.9456	.9326	.9185
2	1.0000	.9999	.9997	.9994	.9988	.9980	.9969	.9955	.9937	.9914
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.5584	.5277	.4984	.4704	.4437	.4182	.3939	.3707	.3487	.3277
1	.9035	.8875	.8708	.8533	.8352	.8165	.7973	.7776	.7576	.7373
2	.9888	.9857	.9821	.9780	.9734	.9682	.9625	.9563	.9495	.9421
3	.9993	.9991	.9987	.9983	.9978	.9971	.9964	.9955	.9945	.9933
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.3077	.2887	.2707	.2536	.2373	.2219	.2073	.1935	.1804	.1681
1	.7167	.6959	.6749	.6539	.6328	.6117	.5907	.5697	.5489	.5282
2	.9341	.9256	.9164	.9067	.8965	.8857	.8743	.8624	.8499	.8369
3	.9919	.9903	.9886	.9866	.9844	.9819	.9792	.9762	.9728	.9692
4	.9996	.9995	.9994	.9992	.9990	.9988	.9986	.9983	.9979	.9976
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.1564	.1454	.1350	.1252	.1160	.1074	.0992	.0916	.0845	.0778
1	.5077	.4875	.4675	.4478	.4284	.4094	.3907	.3724	.3545	.3370
2	.8234	.8095	.7950	.7801	.7648	.7491	.7330	.7165	.6997	.6826
3	.9653	.9610	.9564	.9514	.9460	.9402	.9340	.9274	.9204	.9130
4	.9971	.9966	.9961	.9955	.9947	.9940	.9931	.9921	.9910	.9898
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 5$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0715	.0656	.0602	.0551	.0503	.0459	.0418	.0380	.0345	.0312
1	.3199	.3033	.2871	.2714	.2562	.2415	.2272	.2135	.2002	.1875
2	.6651	.6475	.6295	.6114	.5931	.5747	.5561	.5375	.5187	.5000
3	.9051	.8967	.8879	.8786	.8688	.8585	.8478	.8365	.8247	.8125
4	.9884	.9869	.9853	.9835	.9815	.9794	.9771	.9745	.9718	.9688
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 6$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9415	.8858	.8330	.7828	.7351	.6899	.6470	.6064	.5679	.5314
1	.9985	.9943	.9875	.9784	.9672	.9541	.9392	.9227	.9048	.8857
2	1.0000	.9998	.9995	.9988	.9978	.9962	.9942	.9915	.9882	.9841
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992	.9987
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.4970	.4644	.4336	.4046	.3771	.3513	.3269	.3040	.2824	.2621
1	.8655	.8444	.8224	.7997	.7765	.7528	.7287	.7044	.6799	.6554
2	.9794	.9739	.9676	.9605	.9527	.9440	.9345	.9241	.9130	.9011
3	.9982	.9975	.9966	.9955	.9941	.9925	.9906	.9884	.9859	.9830
4	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987	.9984
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.2431	.2252	.2084	.1927	.1780	.1642	.1513	.1393	.1281	.1176
1	.6308	.6063	.5820	.5578	.5339	.5104	.4872	.4644	.4420	.4202
2	.8885	.8750	.8609	.8461	.8306	.8144	.7977	.7804	.7626	.7443
3	.9798	.9761	.9720	.9674	.9624	.9569	.9508	.9443	.9372	.9295
4	.9980	.9975	.9969	.9962	.9954	.9944	.9933	.9921	.9907	.9891
5	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.1079	.0989	.0905	.0827	.0754	.0687	.0625	.0568	.0515	.0467
1	.3988	.3780	.3578	.3381	.3191	.3006	.2828	.2657	.2492	.2333
2	.7256	.7064	.6870	.6672	.6471	.6268	.6063	.5857	.5650	.5443
3	.9213	.9125	.9031	.8931	.8826	.8714	.8596	.8473	.8343	.8208
4	.9873	.9852	.9830	.9805	.9777	.9746	.9712	.9675	.9635	.9590
5	.9991	.9989	.9987	.9985	.9982	.9978	.9974	.9970	.9965	.9959
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 6$ (Continuación)

$x \backslash p$	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0422	.0381	.0343	.0308	.0277	.0248	.0222	.0198	.0176	.0156
1	.2181	.2035	.1895	.1762	.1636	.1515	.1401	.1293	.1190	.1094
2	.5236	.5029	.4823	.4618	.4415	.4214	.4015	.3820	.3627	.3437
3	.8067	.7920	.7768	.7610	.7447	.7280	.7107	.6930	.6748	.6562
4	.9542	.9490	.9434	.9373	.9308	.9238	.9163	.9083	.8997	.8906
5	.9952	.9945	.9937	.9927	.9917	.9905	.9892	.9878	.9862	.9844
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 7$

$x \backslash p$	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9321	.8681	.8080	.7514	.6983	.6485	.6017	.5578	.5168	.4783
1	.9980	.9921	.9829	.9706	.9556	.9382	.9187	.8974	.8745	.8503
2	1.0000	.9997	.9991	.9980	.9962	.9937	.9903	.9860	.9807	.9743
3	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9993	.9988	.9982	.9973
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash p$	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.4423	.4087	.3773	.3479	.3206	.2951	.2714	.2493	.2288	.2097
1	.8250	.7988	.7719	.7444	.7166	.6885	.6604	.6323	.6044	.5767
2	.9669	.9584	.9487	.9380	.9262	.9134	.8995	.8846	.8687	.8520
3	.9961	.9946	.9928	.9906	.9879	.9847	.9811	.9769	.9721	.9667
4	.9997	.9996	.9994	.9991	.9988	.9983	.9978	.9971	.9963	.9953
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash p$	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.1920	.1757	.1605	.1465	.1335	.1215	.1105	.1003	.0910	.0824
1	.5494	.5225	.4960	.4702	.4449	.4204	.3965	.3734	.3510	.3294
2	.8343	.8159	.7967	.7769	.7564	.7354	.7139	.6919	.6696	.6471
3	.9606	.9539	.9464	.9383	.9294	.9198	.9095	.8984	.8866	.8740
4	.9942	.9928	.9912	.9893	.9871	.9847	.9819	.9787	.9752	.9712
5	.9995	.9994	.9992	.9989	.9987	.9983	.9979	.9974	.9969	.9962
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 7$ (Continuación)

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0745	.0672	.0606	.0546	.0490	.0440	.0394	.0352	.0314	.0280
1	.3086	.2887	.2696	.2513	.2338	.2172	.2013	.1863	.1721	.1586
2	.6243	.6013	.5783	.5553	.5323	.5094	.4866	.4641	.4419	.4199
3	.8606	.8466	.8318	.8163	.8002	.7833	.7659	.7479	.7293	.7102
4	.9668	.9620	.9566	.9508	.9444	.9375	.9299	.9218	.9131	.9037
5	.9954	.9945	.9935	.9923	.9910	.9895	.9877	.9858	.9836	.9812
6	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9992	.9991	.9989	.9986	.9984
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0249	.0221	.0195	.0173	.0152	.0134	.0117	.0103	.0090	.0078
1	.1459	.1340	.1228	.1123	.1024	.0932	.0847	.0767	.0693	.0625
2	.3983	.3771	.3564	.3362	.3164	.2973	.2787	.2607	.2433	.2266
3	.6906	.6706	.6502	.6294	.6083	.5869	.5654	.5437	.5219	.5000
4	.8937	.8831	.8718	.8598	.8471	.8337	.8197	.8049	.7895	.7734
5	.9784	.9754	.9721	.9684	.9643	.9598	.9549	.9496	.9438	.9375
6	.9981	.9977	.9973	.9968	.9963	.9956	.9949	.9941	.9932	.9922
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 8$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9227	.8508	.7837	.7214	.6634	.6096	.5596	.5132	.4703	.4305
1	.9973	.9897	.9777	.9619	.9428	.9208	.8965	.8702	.8423	.8131
2	.9999	.9996	.9987	.9969	.9942	.9904	.9853	.9789	.9711	.9619
3	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9993	.9987	.9978	.9966	.9950
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997	.9996
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.3937	.3596	.3282	.2992	.2725	.2479	.2252	.2044	.1853	.1678
1	.7829	.7520	.7206	.6889	.6572	.6256	.5943	.5634	.5330	.5033
2	.9513	.9392	.9257	.9109	.8948	.8774	.8588	.8392	.8185	.7969
3	.9929	.9903	.9871	.9832	.9786	.9733	.9672	.9603	.9524	.9437
4	.9993	.9990	.9985	.9979	.9971	.9962	.9950	.9935	.9917	.9896
5	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993	.9991	.9988
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 8$ (Continuación)

$x \backslash p$	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.1517	.1370	.1236	.1113	.1001	.0899	.0806	.0722	.0646	.0576
1	.4743	.4462	.4189	.3925	.3671	.3427	.3193	.2969	.2756	.2553
2	.7745	.7514	.7276	.7033	.6785	.6535	.6282	.6027	.5772	.5518
3	.9341	.9235	.9120	.8996	.8862	.8719	.8567	.8406	.8237	.8059
4	.9871	.9842	.9809	.9770	.9727	.9678	.9623	.9562	.9495	.9420
5	.9984	.9979	.9973	.9966	.9958	.9948	.9936	.9922	.9906	.9887
6	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9992	.9990	.9987
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash p$	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0514	.0457	.0406	.0360	.0319	.0281	.0248	.0218	.0192	.0168
1	.2360	.2178	.2006	.1844	.1691	.1548	.1414	.1289	.1172	.1064
2	.5264	.5013	.4764	.4519	.4278	.4042	.3811	.3585	.3366	.3154
3	.7874	.7681	.7481	.7276	.7064	.6847	.6626	.6401	.6172	.5941
4	.9339	.9250	.9154	.9051	.8939	.8820	.8693	.8557	.8414	.8263
5	.9866	.9841	.9813	.9782	.9747	.9707	.9664	.9615	.9561	.9502
6	.9984	.9980	.9976	.9970	.9964	.9957	.9949	.9939	.9928	.9915
7	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9996	.9995	.9993
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash p$	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0147	.0128	.0111	.0097	.0084	.0072	.0062	.0053	.0046	.0039
1	.0963	.0870	.0784	.0705	.0632	.0565	.0504	.0448	.0398	.0352
2	.2948	.2750	.2560	.2376	.2201	.2034	.1875	.1724	.1581	.1445
3	.5708	.5473	.5238	.5004	.4770	.4537	.4306	.4078	.3854	.3633
4	.8105	.7938	.7765	.7584	.7396	.7202	.7001	.6795	.6584	.6367
5	.9437	.9366	.9289	.9206	.9115	.9018	.8914	.8802	.8682	.8555
6	.9900	.9883	.9864	.9843	.9819	.9792	.9761	.9728	.9690	.9648
7	.9992	.9990	.9988	.9986	.9983	.9980	.9976	.9972	.9967	.9961
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 9$

$x \backslash p$	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9135	.8337	.7602	.6925	.6302	.5730	.5204	.4722	.4279	.3874
1	.9966	.9869	.9718	.9522	.9288	.9022	.8729	.8417	.8088	.7748
2	.9999	.9994	.9980	.9955	.9916	.9862	.9791	.9702	.9595	.9470
3	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9994	.9987	.9977	.9963	.9943	.9917
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9995	.9991
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 9$ (Continuación)

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.3504	.3165	.2855	.2573	.2316	.2082	.1869	.1676	.1501	.1342
1	.7401	.7049	.6696	.6343	.5995	.5652	.5315	.4988	.4670	.4362
2	.9327	.9167	.8991	.8798	.8591	.8371	.8139	.7895	.7643	.7382
3	.9883	.9842	.9791	.9731	.9661	.9580	.9488	.9385	.9270	.9144
4	.9986	.9979	.9970	.9959	.9944	.9925	.9902	.9875	.9842	.9804
5	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9983	.9977	.9969
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.1199	.1069	.0952	.0846	.0751	.0665	.0589	.0520	.0458	.0404
1	.4066	.3782	.3509	.3250	.3003	.2770	.2548	.2340	.2144	.1960
2	.7115	.6842	.6566	.6287	.6007	.5727	.5448	.5171	.4898	.4628
3	.9006	.8856	.8696	.8525	.8343	.8151	.7950	.7740	.7522	.7297
4	.9760	.9709	.9650	.9584	.9511	.9429	.9338	.9238	.9130	.9012
5	.9960	.9949	.9935	.9919	.9900	.9878	.9851	.9821	.9787	.9747
6	.9996	.9994	.9992	.9990	.9987	.9983	.9978	.9972	.9965	.9957
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9997	.9996
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0355	.0311	.0272	.0238	.0207	.0180	.0156	.0135	.0117	.0101
1	.1788	.1628	.1478	.1339	.1211	.1092	.0983	.0882	.0790	.0705
2	.4364	.4106	.3854	.3610	.3373	.3144	.2924	.2713	.2511	.2318
3	.7065	.6827	.6585	.6338	.6089	.5837	.5584	.5331	.5078	.4826
4	.8885	.8748	.8602	.8447	.8283	.8110	.7928	.7738	.7540	.7334
5	.9702	.9652	.9596	.9533	.9464	.9388	.9304	.9213	.9114	.9006
6	.9947	.9936	.9922	.9906	.9888	.9867	.9843	.9816	.9785	.9750
7	.9994	.9993	.9991	.9989	.9986	.9983	.9979	.9974	.9969	.9962
8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0087	.0074	.0064	.0054	.0046	.0039	.0033	.0028	.0023	.0020
1	.0628	.0558	.0495	.0437	.0385	.0338	.0296	.0259	.0225	.0195
2	.2134	.1961	.1796	.1641	.1495	.1358	.1231	.1111	.1001	.0898
3	.4576	.4330	.4087	.3848	.3614	.3386	.3164	.2948	.2740	.2539
4	.7122	.6903	.6678	.6449	.6214	.5976	.5735	.5491	.5246	.5000
5	.8891	.8767	.8634	.8492	.8342	.8183	.8015	.7839	.7654	.7461
6	.9710	.9666	.9617	.9563	.9502	.9436	.9363	.9283	.9196	.9102
7	.9954	.9945	.9935	.9923	.9909	.9893	.9875	.9855	.9831	.9805
8	.9997	.9996	.9995	.9994	.9992	.9991	.9989	.9986	.9984	.9980
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 10$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9044	.8171	.7374	.6648	.5987	.5386	.4840	.4344	.3894	.3487
1	.9957	.9838	.9655	.9418	.9139	.8824	.8483	.8121	.7746	.7361
2	.9999	.9991	.9972	.9938	.9885	.9812	.9717	.9599	.9460	.9298
3	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9990	.9980	.9964	.9942	.9912	.9872
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994	.9990	.9984
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.3118	.2785	.2484	.2213	.1969	.1749	.1552	.1374	.1216	.1074
1	.6972	.6583	.6196	.5816	.5443	.5080	.4730	.4392	.4068	.3758
2	.9116	.8913	.8692	.8455	.8202	.7936	.7659	.7372	.7078	.6778
3	.9822	.9761	.9687	.9600	.9500	.9386	.9259	.9117	.8961	.8791
4	.9975	.9963	.9947	.9927	.9901	.9870	.9832	.9787	.9734	.9672
5	.9997	.9996	.9994	.9990	.9986	.9980	.9973	.9963	.9951	.9936
6	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0947	.0834	.0733	.0643	.0563	.0492	.0430	.0374	.0326	.0282
1	.3464	.3185	.2921	.2673	.2440	.2222	.2019	.1830	.1655	.1493
2	.6474	.6169	.5863	.5558	.5256	.4958	.4665	.4378	.4099	.3828
3	.8609	.8413	.8206	.7988	.7759	.7521	.7274	.7021	.6761	.6496
4	.9601	.9521	.9431	.9330	.9219	.9096	.8963	.8819	.8663	.8497
5	.9918	.9896	.9870	.9839	.9803	.9761	.9713	.9658	.9596	.9527
6	.9988	.9984	.9979	.9973	.9965	.9955	.9944	.9930	.9913	.9894
7	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9994	.9993	.9990	.9988	.9984
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0245	.0211	.0182	.0157	.0135	.0115	.0098	.0084	.0071	.0060
1	.1344	.1206	.1080	.0965	.0860	.0764	.0677	.0598	.0527	.0464
2	.3566	.3313	.3070	.2838	.2616	.2405	.2206	.2017	.1840	.1673
3	.6228	.5956	.5684	.5411	.5138	.4868	.4600	.4336	.4077	.3823
4	.8321	.8133	.7936	.7730	.7515	.7292	.7061	.6823	.6580	.6331
5	.9449	.9363	.9268	.9164	.9051	.8928	.8795	.8652	.8500	.8338
6	.9871	.9845	.9815	.9780	.9740	.9695	.9644	.9587	.9523	.9452
7	.9980	.9975	.9968	.9961	.9952	.9941	.9929	.9914	.9897	.9877
8	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989	.9986	.9983
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 10$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0051	.0043	.0036	.0030	.0025	.0021	.0017	.0014	.0012	.0010
1	.0406	.0355	.0309	.0269	.0233	.0201	.0173	.0148	.0126	.0107
2	.1517	.1372	.1236	.1111	.0996	.0889	.0791	.0702	.0621	.0547
3	.3575	.3335	.3102	.2877	.2660	.2453	.2255	.2067	.1888	.1719
4	.6078	.5822	.5564	.5304	.5044	.4784	.4526	.4270	.4018	.3770
5	.8166	.7984	.7793	.7593	.7384	.7168	.6943	.6712	.6474	.6230
6	.9374	.9288	.9194	.9092	.8980	.8859	.8729	.8590	.8440	.8281
7	.9854	.9828	.9798	.9764	.9726	.9683	.9634	.9580	.9520	.9453
8	.9979	.9975	.9969	.9963	.9955	.9946	.9935	.9923	.9909	.9893
9	.9999	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9992	.9990
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 11$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8953	.8007	.7153	.6382	.5688	.5063	.4501	.3996	.3544	.3138
1	.9948	.9805	.9587	.9308	.8981	.8618	.8228	.7819	.7399	.6974
2	.9998	.9988	.9963	.9917	.9848	.9752	.9630	.9481	.9305	.9104
3	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9984	.9970	.9947	.9915	.9871	.9815
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9995	.9990	.9983	.9972
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.2775	.2451	.2161	.1903	.1673	.1469	.1288	.1127	.0985	.0859
1	.6548	.6127	.5714	.5311	.4922	.4547	.4189	.3849	.3526	.3221
2	.8880	.8634	.8368	.8085	.7788	.7479	.7161	.6836	.6506	.6174
3	.9744	.9659	.9558	.9440	.9306	.9154	.8987	.8803	.8603	.8389
4	.9958	.9939	.9913	.9881	.9841	.9793	.9734	.9666	.9587	.9496
5	.9995	.9992	.9988	.9982	.9973	.9963	.9949	.9932	.9910	.9883
6	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9993	.9990	.9986	.9980
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0748	.0650	.0564	.0489	.0422	.0364	.0314	.0270	.0231	.0198
1	.2935	.2667	.2418	.2186	.1971	.1773	.1590	.1423	.1270	.1130
2	.5842	.5512	.5186	.4866	.4552	.4247	.3951	.3665	.3390	.3127
3	.8160	.7919	.7667	.7404	.7133	.6854	.6570	.6281	.5989	.5696
4	.9393	.9277	.9149	.9008	.8854	.8687	.8507	.8315	.8112	.7897
5	.9852	.9814	.9769	.9717	.9657	.9588	.9510	.9423	.9326	.9218
6	.9973	.9965	.9954	.9941	.9924	.9905	.9881	.9854	.9821	.9784
7	.9997	.9995	.9993	.9991	.9988	.9984	.9979	.9973	.9966	.9957
8	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9994
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 11$ (Continuación)

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0169	.0144	.0122	.0104	.0088	.0074	.0062	.0052	.0044	.0036
1	.1003	.0888	.0784	.0690	.0606	.0530	.0463	.0403	.0350	.0302
2	.2877	.2639	.2413	.2201	.2001	.1814	.1640	.1478	.1328	.1189
3	.5402	.5110	.4821	.4536	.4256	.3981	.3714	.3455	.3204	.2963
4	.7672	.7437	.7193	.6941	.6683	.6419	.6150	.5878	.5603	.5328
5	.9099	.8969	.8829	.8676	.8513	.8339	.8153	.7957	.7751	.7535
6	.9740	.9691	.9634	.9570	.9499	.9419	.9330	.9232	.9124	.9006
7	.9946	.9933	.9918	.9899	.9878	.9852	.9823	.9790	.9751	.9707
8	.9992	.9990	.9987	.9984	.9980	.9974	.9968	.9961	.9952	.9941
9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0030	.0025	.0021	.0017	.0014	.0011	.0009	.0008	.0006	.0005
1	.0261	.0224	.0192	.0164	.0139	.0118	.0100	.0084	.0070	.0059
2	.1062	.0945	.0838	.0740	.0652	.0572	.0501	.0436	.0378	.0327
3	.2731	.2510	.2300	.2100	.1911	.1734	.1567	.1412	.1267	.1133
4	.5052	.4777	.4505	.4236	.3971	.3712	.3459	.3213	.2974	.2744
5	.7310	.7076	.6834	.6586	.6331	.6071	.5807	.5540	.5271	.5000
6	.8879	.8740	.8592	.8432	.8262	.8081	.7890	.7688	.7477	.7256
7	.9657	.9601	.9539	.9468	.9390	.9304	.9209	.9105	.8991	.8867
8	.9928	.9913	.9896	.9875	.9852	.9825	.9794	.9759	.9718	.9673
9	.9991	.9988	.9986	.9982	.9978	.9973	.9967	.9960	.9951	.9941
10	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 12$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8864	.7847	.6938	.6127	.5404	.4759	.4186	.3677	.3225	.2824
1	.9938	.9769	.9514	.9191	.8816	.8405	.7967	.7513	.7052	.6590
2	.9998	.9985	.9952	.9893	.9804	.9684	.9532	.9348	.9134	.8891
3	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9978	.9957	.9925	.9880	.9820	.9744
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9991	.9984	.9973	.9957
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9995
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 12$ (Continuación)

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.2470	.2157	.1880	.1637	.1422	.1234	.1069	.0924	.0798	.0687
1	.6133	.5686	.5252	.4834	.4435	.4055	.3696	.3359	.3043	.2749
2	.8623	.8333	.8023	.7697	.7358	.7010	.6656	.6298	.5940	.5583
3	.9649	.9536	.9403	.9250	.9078	.8886	.8676	.8448	.8205	.7946
4	.9935	.9905	.9867	.9819	.9761	.9690	.9607	.9511	.9400	.9274
5	.9991	.9986	.9978	.9967	.9954	.9935	.9912	.9884	.9849	.9806
6	.9999	.9998	.9997	.9996	.9993	.9990	.9985	.9979	.9971	.9961
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0591	.0507	.0434	.0371	.0317	.0270	.0229	.0194	.0164	.0138
1	.2476	.2224	.1991	.1778	.1584	.1406	.1245	.1100	.0968	.0850
2	.5232	.4886	.4550	.4222	.3907	.3603	.3313	.3037	.2775	.2528
3	.7674	.7390	.7096	.6795	.6488	.6176	.5863	.5548	.5235	.4925
4	.9134	.8979	.8808	.8623	.8424	.8210	.7984	.7746	.7496	.7237
5	.9755	.9696	.9626	.9547	.9456	.9354	.9240	.9113	.8974	.8822
6	.9948	.9932	.9911	.9887	.9857	.9822	.9781	.9733	.9678	.9614
7	.9992	.9989	.9984	.9979	.9972	.9964	.9953	.9940	.9924	.9905
8	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987	.9983
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0116	.0098	.0082	.0068	.0057	.0047	.0039	.0032	.0027	.0022
1	.0744	.0650	.0565	.0491	.0424	.0366	.0315	.0270	.0230	.0196
2	.2296	.2078	.1876	.1687	.1513	.1352	.1205	.1069	.0946	.0834
3	.4619	.4319	.4027	.3742	.3467	.3201	.2947	.2704	.2472	.2253
4	.6968	.6692	.6410	.6124	.5833	.5541	.5249	.4957	.4668	.4382
5	.8657	.8479	.8289	.8087	.7873	.7648	.7412	.7167	.6913	.6652
6	.9542	.9460	.9368	.9266	.9154	.9030	.8894	.8747	.8589	.8418
7	.9882	.9856	.9824	.9787	.9745	.9696	.9641	.9578	.9507	.9427
8	.9978	.9972	.9964	.9955	.9944	.9930	.9915	.9896	.9873	.9847
9	.9997	.9996	.9995	.9993	.9992	.9989	.9986	.9982	.9978	.9972
10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

n = 12 (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0018	.0014	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002
1	.0166	.0140	.0118	.0099	.0083	.0069	.0057	.0047	.0039	.0032
2	.0733	.0642	.0560	.0487	.0421	.0363	.0312	.0267	.0227	.0193
3	.2047	.1853	.1671	.1502	.1345	.1199	.1066	.0943	.0832	.0730
4	.4101	.3825	.3557	.3296	.3044	.2802	.2570	.2348	.2138	.1938
5	.6384	.6111	.5833	.5552	.5269	.4986	.4703	.4423	.4145	.3872
6	.8235	.8041	.7836	.7620	.7393	.7157	.6911	.6657	.6396	.6128
7	.9338	.9240	.9131	.9012	.8883	.8742	.8589	.8425	.8249	.8062
8	.9817	.9782	.9742	.9696	.9644	.9585	.9519	.9445	.9362	.9270
9	.9965	.9957	.9947	.9935	.9921	.9905	.9886	.9863	.9837	.9807
10	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989	.9986	.9983	.9979	.9974	.9968
11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 13

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8775	.7690	.6730	.5882	.5133	.4474	.3893	.3383	.2935	.2542
1	.9928	.9730	.9436	.9068	.8646	.8186	.7702	.7206	.6707	.6213
2	.9997	.9980	.9938	.9865	.9755	.9608	.9422	.9201	.8946	.8661
3	1.0000	.9999	.9995	.9986	.9969	.9940	.9897	.9837	.9758	.9658
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9987	.9976	.9959	.9935
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997	.9995	.9991
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.2198	.1898	.1636	.1408	.1209	.1037	.0887	.0758	.0646	.0550
1	.5730	.5262	.4814	.4386	.3983	.3604	.3249	.2920	.2616	.2336
2	.8349	.8015	.7663	.7296	.6920	.6537	.6152	.5769	.5389	.5017
3	.9536	.9391	.9224	.9033	.8820	.8586	.8333	.8061	.7774	.7473
4	.9903	.9861	.9807	.9740	.9658	.9562	.9449	.9319	.9173	.9009
5	.9985	.9976	.9964	.9947	.9925	.9896	.9861	.9817	.9763	.9700
6	.9998	.9997	.9995	.9992	.9987	.9981	.9973	.9962	.9948	.9930
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9988
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

n = 13 (Continuación)

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0467	.0396	.0334	.0282	.0238	.0200	.0167	.0140	.0117	.0097
1	.2080	.1846	.1633	.1441	.1267	.1111	.0971	.0846	.0735	.0637
2	.4653	.4301	.3961	.3636	.3326	.3032	.2755	.2495	.2251	.2025
3	.7161	.6839	.6511	.6178	.5843	.5507	.5174	.4845	.4522	.4206
4	.8827	.8629	.8415	.8184	.7940	.7681	.7411	.7130	.6840	.6543
5	.9625	.9538	.9438	.9325	.9198	.9056	.8901	.8730	.8545	.8346
6	.9907	.9880	.9846	.9805	.9757	.9701	.9635	.9560	.9473	.9376
7	.9983	.9976	.9968	.9957	.9944	.9927	.9907	.9882	.9853	.9818
8	.9998	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987	.9982	.9976	.9969	.9960
9	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0080	.0066	.0055	.0045	.0037	.0030	.0025	.0020	.0016	.0013
1	.0550	.0473	.0406	.0347	.0296	.0251	.0213	.0179	.0151	.0126
2	.1815	.1621	.1443	.1280	.1132	.0997	.0875	.0765	.0667	.0579
3	.3899	.3602	.3317	.3043	.2783	.2536	.2302	.2083	.1877	.1686
4	.6240	.5933	.5624	.5314	.5005	.4699	.4397	.4101	.3812	.3530
5	.8133	.7907	.7669	.7419	.7159	.6889	.6612	.6327	.6038	.5744
6	.9267	.9146	.9012	.8865	.8705	.8532	.8346	.8147	.7935	.7712
7	.9777	.9729	.9674	.9610	.9538	.9456	.9365	.9262	.9149	.9023
8	.9948	.9935	.9918	.9898	.9874	.9846	.9813	.9775	.9730	.9679
9	.9991	.9988	.9985	.9980	.9975	.9968	.9960	.9949	.9937	.9922
10	.9999	.9999	.9998	.9997	.9997	.9995	.9994	.9992	.9990	.9987
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0010	.0008	.0007	.0005	.0004	.0003	.0003	.0002	.0002	.0001
1	.0105	.0088	.0072	.0060	.0049	.0040	.0033	.0026	.0021	.0017
2	.0501	.0431	.0370	.0316	.0269	.0228	.0192	.0162	.0135	.0112
3	.1508	.1344	.1193	.1055	.0929	.0815	.0712	.0619	.0536	.0461
4	.3258	.2997	.2746	.2507	.2279	.2065	.1863	.1674	.1498	.1334
5	.5448	.5151	.4854	.4559	.4268	.3981	.3701	.3427	.3162	.2905
6	.7476	.7230	.6975	.6710	.6437	.6158	.5873	.5585	.5293	.5000
7	.8886	.8736	.8574	.8400	.8212	.8012	.7800	.7576	.7341	.7095
8	.9621	.9554	.9480	.9395	.9302	.9197	.9082	.8955	.8817	.8666
9	.9904	.9883	.9859	.9830	.9797	.9758	.9713	.9662	.9604	.9539
10	.9983	.9979	.9973	.9967	.9959	.9949	.9937	.9923	.9907	.9888
11	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989	.9986	.9983
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 14$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8687	.7536	.6528	.5647	.4877	.4205	.3620	.3112	.2670	.2288
1	.9916	.9690	.9355	.8941	.8470	.7963	.7436	.6900	.6368	.5846
2	.9997	.9975	.9923	.9833	.9699	.9522	.9302	.9042	.8745	.8416
3	1.0000	.9999	.9994	.9981	.9958	.9920	.9864	.9786	.9685	.9559
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9996	.9990	.9980	.9965	.9941	.9908
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992	.9985
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1956	.1670	.1423	.1211	.1028	.0871	.0736	.0621	.0523	.0440
1	.5342	.4859	.4401	.3969	.3567	.3193	.2848	.2531	.2242	.1979
2	.8061	.7685	.7292	.6889	.6479	.6068	.5659	.5256	.4862	.4481
3	.9406	.9226	.9021	.8790	.8535	.8258	.7962	.7649	.7321	.6982
4	.9863	.9804	.9731	.9641	.9533	.9406	.9259	.9093	.8907	.8702
5	.9976	.9962	.9943	.9918	.9885	.9843	.9791	.9727	.9651	.9561
6	.9997	.9994	.9991	.9985	.9978	.9968	.9954	.9936	.9913	.9884
7	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992	.9988	.9983	.9976
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0369	.0309	.0258	.0214	.0178	.0148	.0122	.0101	.0083	.0068
1	.1741	.1527	.1335	.1163	.1010	.0874	.0754	.0648	.0556	.0475
2	.4113	.3761	.3426	.3109	.2811	.2533	.2273	.2033	.1812	.1608
3	.6634	.6281	.5924	.5568	.5213	.4864	.4521	.4187	.3863	.3552
4	.8477	.8235	.7977	.7703	.7415	.7116	.6807	.6490	.6168	.5842
5	.9457	.9338	.9203	.9051	.8883	.8699	.8498	.8282	.8051	.7805
6	.9848	.9804	.9752	.9690	.9617	.9533	.9437	.9327	.9204	.9067
7	.9967	.9955	.9940	.9921	.9897	.9868	.9833	.9792	.9743	.9685
8	.9994	.9992	.9989	.9984	.9978	.9971	.9962	.9950	.9935	.9917
9	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993	.9991	.9988	.9983
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

n = 14 (Continuación)

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0055	.0045	.0037	.0030	.0024	.0019	.0016	.0012	.0010	.0008
1	.0404	.0343	.0290	.0244	.0205	.0172	.0143	.0119	.0098	.0081
2	.1423	.1254	.1101	.0963	.0839	.0729	.0630	.0543	.0466	.0398
3	.3253	.2968	.2699	.2444	.2205	.1982	.1774	.1582	.1405	.1243
4	.5514	.5187	.4862	.4542	.4227	.3920	.3622	.3334	.3057	.2793
5	.7546	.7276	.6994	.6703	.6405	.6101	.5792	.5481	.5169	.4859
6	.8916	.8750	.8569	.8374	.8164	.7941	.7704	.7455	.7195	.6925
7	.9619	.9542	.9455	.9357	.9247	.9124	.8988	.8838	.8675	.8499
8	.9895	.9869	.9837	.9800	.9757	.9706	.9647	.9580	.9503	.9417
9	.9978	.9971	.9963	.9952	.9940	.9924	.9905	.9883	.9856	.9825
10	.9997	.9995	.9994	.9992	.9989	.9986	.9981	.9976	.9969	.9961
11	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9997	.9995	.9994
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001
1	.0066	.0054	.0044	.0036	.0029	.0023	.0019	.0015	.0012	.0009
2	.0339	.0287	.0242	.0203	.0170	.0142	.0117	.0097	.0079	.0065
3	.1095	.0961	.0839	.0730	.0632	.0545	.0468	.0399	.0339	.0287
4	.2541	.2303	.2078	.1868	.1672	.1490	.1322	.1167	.1026	.0898
5	.4550	.4246	.3948	.3656	.3373	.3100	.2837	.2585	.2346	.2120
6	.6645	.6357	.6063	.5764	.5461	.5157	.4852	.4549	.4249	.3953
7	.8308	.8104	.7887	.7656	.7414	.7160	.6895	.6620	.6337	.6047
8	.9320	.9211	.9090	.8957	.8811	.8652	.8480	.8293	.8094	.7880
9	.9788	.9745	.9696	.9639	.9574	.9500	.9417	.9323	.9218	.9102
10	.9951	.9939	.9924	.9907	.9886	.9861	.9832	.9798	.9759	.9713
11	.9992	.9990	.9987	.9983	.9978	.9973	.9966	.9958	.9947	.9935
12	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9997	.9996	.9994	.9993	.9991
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 15$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8601	.7386	.6333	.5421	.4633	.3953	.3367	.2863	.2430	.2059
1	.9904	.9647	.9270	.8809	.8290	.7738	.7168	.6597	.6035	.5490
2	.9996	.9970	.9906	.9797	.9638	.9429	.9171	.8870	.8531	.8159
3	1.0000	.9998	.9992	.9976	.9945	.9896	.9825	.9727	.9601	.9444
4	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9986	.9972	.9950	.9918	.9873
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997	.9993	.9987	.9978
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 15$ (Continuación)										
x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1741	.1470	.1238	.1041	.0874	.0731	.0611	.0510	.0424	.0352
1	.4969	.4476	.4013	.3583	.3186	.2821	.2489	.2187	.1915	.1671
2	.7762	.7346	.6916	.6480	.6042	.5608	.5181	.4766	.4365	.3980
3	.9258	.9041	.8796	.8524	.8227	.7908	.7571	.7218	.6854	.6482
4	.9813	.9735	.9639	.9522	.9383	.9222	.9039	.8833	.8606	.8358
5	.9963	.9943	.9916	.9879	.9832	.9773	.9700	.9613	.9510	.9389
6	.9994	.9990	.9985	.9976	.9964	.9948	.9926	.9898	.9863	.9819
7	.9999	.9999	.9998	.9996	.9994	.9990	.9986	.9979	.9970	.9958
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0291	.0241	.0198	.0163	.0134	.0109	.0089	.0072	.0059	.0047
1	.1453	.1259	.1087	.0935	.0802	.0685	.0583	.0495	.0419	.0353
2	.3615	.3269	.2945	.2642	.2361	.2101	.1863	.1645	.1447	.1268
3	.6105	.5726	.5350	.4978	.4613	.4258	.3914	.3584	.3268	.2969
4	.8090	.7805	.7505	.7190	.6865	.6531	.6190	.5846	.5500	.5155
5	.9252	.9095	.8921	.8728	.8516	.8287	.8042	.7780	.7505	.7216
6	.9766	.9702	.9626	.9537	.9434	.9316	.9183	.9035	.8870	.8689
7	.9942	.9922	.9896	.9865	.9827	.9781	.9726	.9662	.9587	.9500
8	.9989	.9984	.9977	.9969	.9958	.9944	.9927	.9906	.9879	.9848
9	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989	.9985	.9979	.9972	.9963
10	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0038	.0031	.0025	.0020	.0016	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005
1	.0296	.0248	.0206	.0171	.0142	.0117	.0096	.0078	.0064	.0052
2	.1107	.0962	.0833	.0719	.0617	.0528	.0450	.0382	.0322	.0271
3	.2686	.2420	.2171	.1940	.1727	.1531	.1351	.1187	.1039	.0905
4	.4813	.4477	.4148	.3829	.3519	.3222	.2938	.2668	.2413	.2173
5	.6916	.6607	.6291	.5968	.5643	.5316	.4989	.4665	.4346	.4032
6	.8491	.8278	.8049	.7806	.7548	.7278	.6997	.6705	.6405	.6098
7	.9401	.9289	.9163	.9023	.8868	.8698	.8513	.8313	.8098	.7869
8	.9810	.9764	.9711	.9649	.9578	.9496	.9403	.9298	.9180	.9050
9	.9952	.9938	.9921	.9901	.9876	.9846	.9810	.9768	.9719	.9662
10	.9991	.9988	.9984	.9978	.9972	.9963	.9953	.9941	.9925	.9907
11	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 15$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000
1	.0042	.0034	.0027	.0021	.0017	.0013	.0010	.0008	.0006	.0005
2	.0227	.0189	.0157	.0130	.0107	.0087	.0071	.0057	.0046	.0037
3	.0785	.0678	.0583	.0498	.0424	.0359	.0303	.0254	.0212	.0176
4	.1948	.1739	.1546	.1367	.1204	.1055	.0920	.0799	.0690	.0592
5	.3726	.3430	.3144	.2869	.2608	.2359	.2125	.1905	.1699	.1509
6	.5786	.5470	.5153	.4836	.4522	.4211	.3905	.3606	.3316	.3036
7	.7626	.7370	.7102	.6824	.6535	.6238	.5935	.5626	.5314	.5000
8	.8905	.8746	.8573	.8385	.8182	.7966	.7735	.7490	.7233	.6964
9	.9596	.9521	.9435	.9339	.9231	.9110	.8976	.8829	.8667	.8491
10	.9884	.9857	.9826	.9789	.9745	.9695	.9637	.9570	.9494	.9408
11	.9975	.9968	.9960	.9949	.9937	.9921	.9903	.9881	.9855	.9824
12	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989	.9986	.9982	.9977	.9971	.9963
13	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 16$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8515	.7238	.6143	.5204	.4401	.3716	.3131	.2634	.2211	.1853
1	.9891	.9601	.9182	.8673	.8108	.7511	.6902	.6299	.5711	.5147
2	.9995	.9963	.9887	.9758	.9571	.9327	.9031	.8688	.8306	.7892
3	1.0000	.9998	.9989	.9968	.9930	.9868	.9779	.9658	.9504	.9316
4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9991	.9981	.9962	.9932	.9889	.9830
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9995	.9990	.9981	.9967
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997	.9995
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1550	.1293	.1077	.0895	.0743	.0614	.0507	.0418	.0343	.0281
1	.4614	.4115	.3653	.3227	.2839	.2487	.2170	.1885	.1632	.1407
2	.7455	.7001	.6539	.6074	.5614	.5162	.4723	.4302	.3899	.3518
3	.9093	.8838	.8552	.8237	.7899	.7540	.7164	.6777	.6381	.5981
4	.9752	.9652	.9529	.9382	.9209	.9012	.8789	.8542	.8273	.7982
5	.9947	.9918	.9880	.9829	.9765	.9685	.9588	.9473	.9338	.9183
6	.9991	.9985	.9976	.9962	.9944	.9920	.9888	.9847	.9796	.9733
7	.9999	.9998	.9996	.9993	.9989	.9984	.9976	.9964	.9949	.9930
8	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9993	.9990	.9985
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 16$ (Continuación)

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0230	.0188	.0153	.0124	.0100	.0081	.0065	.0052	.0042	.0033
1	.1209	.1035	.0883	.0750	.0635	.0535	.0450	.0377	.0314	.0261
2	.3161	.2827	.2517	.2232	.1971	.1733	.1518	.1323	.1149	.0994
3	.5582	.5186	.4797	.4417	.4050	.3697	.3360	.3041	.2740	.2459
4	.7673	.7348	.7009	.6659	.6302	.5940	.5575	.5212	.4853	.4499
5	.9008	.8812	.8595	.8359	.8103	.7831	.7542	.7239	.6923	.6598
6	.9658	.9568	.9464	.9342	.9204	.9049	.8875	.8683	.8474	.8247
7	.9905	.9873	.9834	.9786	.9729	.9660	.9580	.9486	.9379	.9256
8	.9979	.9970	.9959	.9944	.9925	.9902	.9873	.9837	.9794	.9743
9	.9996	.9994	.9992	.9988	.9984	.9977	.9969	.9959	.9945	.9929
10	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989	.9984
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0026	.0021	.0016	.0013	.0010	.0008	.0006	.0005	.0004	.0003
1	.0216	.0178	.0146	.0120	.0098	.0079	.0064	.0052	.0041	.0033
2	.0856	.0734	.0626	.0533	.0451	.0380	.0319	.0266	.0222	.0183
3	.2196	.1953	.1730	.1525	.1339	.1170	.1018	.0881	.0759	.0651
4	.4154	.3819	.3496	.3187	.2892	.2613	.2351	.2105	.1877	.1666
5	.6264	.5926	.5584	.5241	.4900	.4562	.4230	.3906	.3592	.3288
6	.8003	.7743	.7469	.7181	.6881	.6572	.6254	.5930	.5602	.5272
7	.9119	.8965	.8795	.8609	.8406	.8187	.7952	.7702	.7438	.7161
8	.9683	.9612	.9530	.9436	.9329	.9209	.9074	.8924	.8758	.8577
9	.9908	.9883	.9852	.9815	.9771	.9720	.9659	.9589	.9509	.9417
10	.9979	.9972	.9963	.9952	.9938	.9921	.9900	.9875	.9845	.9809
11	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987	.9983	.9977	.9970	.9962	.9951
12	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 16$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0026	.0021	.0016	.0013	.0010	.0008	.0006	.0005	.0003	.0003
2	.0151	.0124	.0101	.0082	.0066	.0053	.0042	.0034	.0027	.0021
3	.0556	.0473	.0400	.0336	.0281	.0234	.0194	.0160	.0131	.0106
4	.1471	.1293	.1131	.0985	.0853	.0735	.0630	.0537	.0456	.0384
5	.2997	.2720	.2457	.2208	.1976	.1759	.1559	.1374	.1205	.1051
6	.4942	.4613	.4289	.3971	.3660	.3359	.3068	.2790	.2524	.2272
7	.6872	.6572	.6264	.5949	.5629	.5306	.4981	.4657	.4335	.4018
8	.8381	.8168	.7940	.7698	.7441	.7171	.6889	.6596	.6293	.5982
9	.9313	.9195	.9064	.8919	.8759	.8584	.8393	.8186	.7964	.7728
10	.9766	.9716	.9658	.9591	.9514	.9426	.9326	.9214	.9089	.8949
11	.9938	.9922	.9902	.9879	.9851	.9817	.9778	.9732	.9678	.9616
12	.9988	.9984	.9979	.9973	.9965	.9956	.9945	.9931	.9914	.9894
13	.9998	.9998	.9997	.9996	.9994	.9993	.9990	.9987	.9984	.9979
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 17$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8429	.7093	.5958	.4996	.4181	.3493	.2912	.2423	.2012	.1668
1	.9877	.9554	.9091	.8535	.7922	.7283	.6638	.6005	.5396	.4818
2	.9994	.9956	.9866	.9714	.9497	.9218	.8882	.8497	.8073	.7618
3	1.0000	.9997	.9986	.9960	.9912	.9836	.9727	.9581	.9397	.9174
4	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9988	.9974	.9949	.9911	.9855	.9779
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9985	.9973	.9953
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1379	.1138	.0937	.0770	.0631	.0516	.0421	.0343	.0278	.0225
1	.4277	.3777	.3318	.2901	.2525	.2187	.1887	.1621	.1387	.1182
2	.7142	.6655	.6164	.5676	.5198	.4734	.4289	.3867	.3468	.3096
3	.8913	.8617	.8290	.7935	.7556	.7159	.6749	.6331	.5909	.5489
4	.9679	.9554	.9402	.9222	.9013	.8776	.8513	.8225	.7913	.7582
5	.9925	.9886	.9834	.9766	.9681	.9577	.9452	.9305	.9136	.8943
6	.9986	.9977	.9963	.9944	.9917	.9882	.9837	.9780	.9709	.9623
7	.9998	.9996	.9993	.9989	.9983	.9973	.9961	.9943	.9920	.9891
8	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992	.9988	.9982	.9974
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 17$ (Continuación)

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0182	.0146	.0118	.0094	.0075	.0060	.0047	.0038	.0030	.0023
1	.1004	.0849	.0715	.0600	.0501	.0417	.0346	.0286	.0235	.0193
2	.2751	.2433	.2141	.1877	.1637	.1422	.1229	.1058	.0907	.0774
3	.5073	.4667	.4272	.3893	.3530	.3186	.2863	.2560	.2279	.2019
4	.7234	.6872	.6500	.6121	.5739	.5357	.4977	.4604	.4240	.3887
5	.8727	.8490	.8230	.7951	.7653	.7339	.7011	.6671	.6323	.5968
6	.9521	.9402	.9264	.9106	.8929	.8732	.8515	.8279	.8024	.7752
7	.9853	.9806	.9749	.9680	.9598	.9501	.9389	.9261	.9116	.8954
8	.9963	.9949	.9930	.9906	.9876	.9839	.9794	.9739	.9674	.9597
9	.9993	.9989	.9984	.9978	.9969	.9958	.9943	.9925	.9902	.9873
10	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9982	.9976	.9968
11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0018	.0014	.0011	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002
1	.0157	.0128	.0104	.0083	.0067	.0054	.0043	.0034	.0027	.0021
2	.0657	.0556	.0468	.0392	.0327	.0272	.0225	.0185	.0151	.0123
3	.1781	.1563	.1366	.1188	.1028	.0885	.0759	.0648	.0550	.0464
4	.3547	.3222	.2913	.2622	.2348	.2094	.1858	.1640	.1441	.1260
5	.5610	.5251	.4895	.4542	.4197	.3861	.3535	.3222	.2923	.2639
6	.7464	.7162	.6847	.6521	.6188	.5848	.5505	.5161	.4818	.4478
7	.8773	.8574	.8358	.8123	.7872	.7605	.7324	.7029	.6722	.6405
8	.9508	.9405	.9288	.9155	.9006	.8841	.8659	.8459	.8243	.8011
9	.9838	.9796	.9746	.9686	.9617	.9536	.9443	.9336	.9216	.9081
10	.9957	.9943	.9926	.9905	.9880	.9849	.9811	.9766	.9714	.9652
11	.9991	.9987	9983	.9977	.9970	.9960	.9949	.9934	.9916	.9894
12	.9998	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989	.9985	.9981	.9975
13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	9998	.9997	.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 17$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0016	.0013	.0010	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001
2	.0100	.0080	.0065	.0052	.0041	.0032	.0025	.0020	.0015	.0012
3	.0390	.0326	.0271	.0224	.0184	.0151	.0123	.0099	.0080	.0064
4	.1096	.0949	.0817	.0699	.0596	.0505	.0425	.0356	.0296	.0245
5	.2372	.2121	.1887	.1670	.1471	.1288	.1122	.0972	.0838	.0717
6	.4144	.3818	.3501	.3195	.2902	.2623	.2359	.2110	.1878	.1662
7	.6080	.5750	.5415	.5079	.4743	.4410	.4082	.3761	.3448	.3145
8	.7762	.7498	.7220	.6928	.6626	.6313	.5992	.5665	.5333	.5000
9	.8930	.8764	.8581	.8382	.8166	.7934	.7686	.7423	.7145	.6855
10	.9580	.9497	.9403	.9295	.9174	.9038	.8888	.8721	.8538	.8338
11	.9867	.9835	.9797	.9752	.9699	.9637	.9566	.9483	.9389	.9283
12	.9967	.9958	.9946	.9931	.9914	.9892	.9866	.9835	.9798	.9755
13	.9994	.9992	.9989	.9986	.9981	.9976	.9969	.9960	.9950	.9936
14	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9988
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 18$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8345	.6951	.5780	.4796	.3972	.3283	.2708	.2229	.1831	.1501
1	.9862	.9505	.8997	.8393	.7735	.7055	.6378	.5719	.5091	.4503
2	.9993	.9948	.9843	.9667	.9419	.9102	.8725	.8298	.7832	.7338
3	1.0000	.9996	.9982	.9950	.9891	.9799	.9667	.9494	.9277	.9018
4	1.0000	1.0000	.9998	.9994	.9985	.9966	.9933	.9884	.9814	.9718
5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9995	.9990	.9979	.9962	.9936
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9994	.9988
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1227	.1002	.0815	.0662	.0536	.0434	.0349	.0281	.0225	.0180
1	.3958	.3460	.3008	.2602	.2241	.1920	.1638	.1391	.1176	.0991
2	.6827	.6310	.5794	.5287	.4797	.4327	.3881	.3462	.3073	.2713
3	.8718	.8382	.8014	.7618	.7202	.6771	.6331	.5888	.5446	.5010
4	.9595	.9442	.9257	.9041	.8794	.8518	.8213	.7884	.7533	.7164
5	.9898	.9846	.9778	.9690	.9581	.9449	.9292	.9111	.8903	.8671
6	.9979	.9966	.9946	.9919	.9882	.9833	.9771	.9694	.9600	.9487
7	.9997	.9994	.9989	.9983	.9973	.9959	.9940	.9914	.9880	.9837
8	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992	.9987	.9980	.9971	.9957
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9996	.9994	.9991
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 18$ (Continuación)

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0144	.0114	.0091	.0072	.0056	.0044	.0035	.0027	.0021	.0016
1	.0831	.0694	.0577	.0478	.0395	.0324	.0265	.0216	.0176	.0142
2	.2384	.2084	.1813	.1570	.1353	.1161	.0991	.0842	.0712	.0600
3	.4586	.4175	.3782	.3409	.3057	.2728	.2422	.2140	.1881	.1646
4	.6780	.6387	.5988	.5586	.5187	.4792	.4406	.4032	.3671	.3327
5	.8414	.8134	.7832	.7512	.7174	.6824	.6462	.6093	.5719	.5344
6	.9355	.9201	.9026	.8829	.8610	.8370	.8109	.7829	.7531	.7217
7	.9783	.9717	.9637	.9542	.9431	.9301	.9153	.8986	.8800	.8593
8	.9940	.9917	.9888	.9852	.9807	.9751	.9684	.9605	.9512	.9404
9	.9986	.9980	.9972	.9961	.9946	.9927	.9903	.9873	.9836	.9790
10	.9997	.9996	.9994	.9991	.9988	.9982	.9975	.9966	.9954	.9939
11	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993	.9990	.9986
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0013	.0010	.0007	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0114	.0092	.0073	.0058	.0046	.0036	.0028	.0022	.0017	.0013
2	.0502	.0419	.0348	.0287	.0236	.0193	.0157	.0127	.0103	.0082
3	.1432	.1241	.1069	.0917	.0783	.0665	.0561	.0472	.0394	.0328
4	.2999	.2691	.2402	.2134	.1886	.1659	.1451	.1263	.1093	.0942
5	.4971	.4602	.4241	.3889	.3550	.3224	.2914	.2621	.2345	.2088
6	.6889	.6550	.6202	.5849	.5491	.5133	.4776	.4424	.4079	.3743
7	.8367	.8122	.7859	.7579	.7283	.6973	.6651	.6319	.5979	.5634
8	.9280	.9139	.8981	.8804	.8609	.8396	.8165	.7916	.7650	.7368
9	.9736	.9671	.9595	.9506	.9403	.9286	.9153	.9003	.8837	.8653
10	.9920	.9896	.9867	.9831	.9788	.9736	.9675	.9603	.9520	.9424
11	.9980	.9973	.9964	.9953	.9938	.9920	.9898	.9870	.9837	.9797
12	.9996	.9995	.9992	.9989	.9986	.9981	.9974	.9966	.9956	.9942
13	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 18$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0010	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
2	.0066	.0052	.0041	.0032	.0025	.0019	.0015	.0011	.0009	.0007
3	.0271	.0223	.0182	.0148	.0120	.0096	.0077	.0061	.0048	.0038
4	.0807	.0687	.0582	.0490	.0411	.0342	.0283	.0233	.0190	.0154
5	.1849	.1628	.1427	.1243	.1077	.0928	.0795	.0676	.0572	.0481
6	.3418	.3105	.2807	.2524	.2258	.2009	.1778	.1564	.1368	.1189
7	.5287	.4938	.4592	.4250	.3915	.3588	.3272	.2968	.2678	.2403
8	.7072	.6764	.6444	.6115	.5778	.5438	.5094	.4751	.4409	.4073
9	.8451	.8232	.7996	.7742	.7473	.7188	.6890	.6579	.6258	.5927
10	.9314	.9189	.9049	.8893	.8720	.8530	.8323	.8098	.7856	.7597
11	.9750	9693	.9628	.9551	.9463	.9362	.9247	.9117	.8972	.8811
12	.9926	.9906	.9882	.9853	.9817	.9775	.9725	.9666	.9598	.9519
13	.9983	.9978	.9971	.9962	.9951	.9937	.9921	.9900	.9875	.9846
14	.9997	.9996	.9994	.9993	.9990	.9987	.9983	.9977	.9971	.9962
15	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 19$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8262	.6812	.5606	.4604	.3774	.3086	.2519	.2051	.1666	.1351
1	.9847	.9454	.8900	.8249	.7547	.6829	.6121	.5440	.4798	.4203
2	.9991	.9939	.9817	.9616	.9335	.8979	.8561	.8092	.7585	.7054
3	1.0000	.9995	.9978	.9939	.9868	.9757	.9602	.9398	.9147	.8850
4	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9980	.9956	.9915	.9853	.9765	.9648
5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9986	.9971	.9949	.9914
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9991	.9983
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9997
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1092	.0881	.0709	.0569	.0456	.0364	0290	.0230	.0182	.0144
1	.3658	.3165	.2723	.2331	.1985	.1682	.1419	.1191	.0996	.0829
2	.6512	.5968	.5432	.4911	.4413	.3941	.3500	.3090	.2713	.2369
3	.8510	.8133	.7725	.7292	.6841	.6380	.5915	.5451	.4995	.4551
4	.9498	.9315	.9096	.8842	.8556	.8238	.7893	.7524	.7136	.6733
5	.9865	.9798	.9710	.9599	.9463	.9300	.9109	.8890	.8643	.8369
6	.9970	.9952	.9924	.9887	.9837	.9772	.9690	.9589	.9468	.9324
7	.9995	.9991	.9984	.9974	.9959	.9939	.9911	.9874	.9827	.9767
8	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992	.9986	.9979	.9968	.9953	.9933
9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9996	.9993	.9990	.9984
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 19$ (Continuación)

$x \backslash p$	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0113	.0089	.0070	.0054	.0042	.0033	.0025	.0019	.0015	.0011
1	.0687	.0566	.0465	.0381	.0310	.0251	.0203	.0163	.0131	.0104
2	.2058	.1778	.1529	.1308	.1113	.0943	.0795	.0667	.0557	.0462
3	.4123	.3715	.3329	.2968	.2631	.2320	.2035	.1776	.1542	.1332
4	.6319	.5900	.5480	.5064	.4654	.4256	.3871	.3502	.3152	.2822
5	.8071	.7749	.7408	.7050	.6677	.6295	.5907	.5516	.5125	.4739
6	.9157	.8966	.8751	.8513	.8251	.7968	.7664	.7343	.7005	.6655
7	.9693	.9604	.9497	.9371	.9225	.9059	.8871	.8662	.8432	.8180
8	.9907	.9873	.9831	.9778	.9713	.9634	.9541	.9432	.9306	.9161
9	.9977	.9966	.9953	.9934	.9911	.9881	.9844	.9798	.9742	.9674
10	.9995	.9993	.9989	.9984	.9977	.9968	.9956	.9940	.9920	.9895
11	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9993	.9990	.9985	.9980	.9972
12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash p$	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
1	.0083	.0065	.0051	.0040	.0031	.0024	.0019	.0014	.0011	.0008
2	.0382	.0314	.0257	.0209	.0170	.0137	.0110	.0087	.0069	.0055
3	.1144	.0978	.0831	.0703	.0591	.0495	.0412	.0341	.0281	.0230
4	.2514	.2227	.1963	.1720	.1500	.1301	.1122	.0962	.0821	.0696
5	.4359	.3990	.3634	.3293	.2968	.2661	.2373	.2105	.1857	.1629
6	.6294	.5927	.5555	.5182	.4812	.4446	.4087	.3739	.3403	.3081
7	.7909	.7619	.7312	.6990	.6656	.6310	.5957	.5599	.5238	.4878
8	.8997	.8814	.8611	.8388	.8145	.7884	.7605	.7309	.6998	.6675
9	.9595	.9501	.9392	.9267	.9125	.8965	.8787	.8590	.8374	.8139
10	.9863	.9824	.9777	.9720	.9653	.9574	.9482	.9375	.9253	.9115
11	.9962	.9949	.9932	.9911	.9886	.9854	.9815	.9769	.9713	.9648
12	.9991	.9988	.9983	.9977	.9969	.9959	.9946	.9930	.9909	.9884
13	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993	.9991	.9987	.9983	.9977	.9969
14	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 19$ (Continuación)

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
2	.0043	.0033	.0026	.0020	.0015	.0012	.0009	.0007	.0005	.0004
3	.0187	.0151	.0122	.0097	.0077	.0061	.0048	.0037	.0029	.0022
4	.0587	.0492	.0410	.0340	.0280	.0229	.0186	.0150	.0121	.0096
5	.1421	.1233	.1063	.0912	.0777	.0658	.0554	.0463	.0385	.0318
6	.2774	.2485	.2213	.1961	.1727	.1512	.1316	.1138	.0978	.0835
7	.4520	.4168	.3824	.3491	.3169	.2862	.2570	.2294	.2036	.1796
8	.6340	.5997	.5647	.5294	.4940	.4587	.4238	.3895	.3561	.3238
9	.7886	.7615	.7328	.7026	.6710	.6383	.6046	.5701	.5352	.5000
10	.8960	.8787	.8596	.8387	.8159	.7913	.7649	.7369	.7073	.6762
11	.9571	.9482	.9379	.9262	.9129	.8979	.8813	.8628	.8425	.8204
12	.9854	.9817	.9773	.9720	.9658	.9585	.9500	.9403	.9291	.9165
13	.9960	.9948	.9933	.9914	.9891	.9863	.9829	.9788	.9739	.9682
14	.9991	.9988	.9984	.9979	.9972	.9964	.9954	.9940	.9924	.9904
15	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987	.9983	.9978
16	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 20$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8179	.6676	.5438	.4420	.3585	.2901	.2342	.1887	.1516	.1216
1	.9831	.9401	.8802	.8103	.7358	.6605	.5869	.5169	.4516	.3917
2	.9990	.9929	.9790	.9561	.9245	.8850	.8390	.7879	.7334	.6769
3	1.0000	.9994	.9973	.9926	.9841	.9710	.9529	.9294	.9007	.8670
4	1.0000	1.0000	.9997	.9990	.9974	.9944	.9893	.9817	.9710	.9568
5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9991	.9981	.9962	.9932	.9887
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9994	.9987	.9976
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 20$ (Continuación)

$x \backslash p$	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.0972	.0776	.0617	.0490	.0388	.0306	.0241	.0189	.0148	.0115
1	.3376	.2891	.2461	.2084	.1756	.1471	.1227	.1018	.0841	.0692
2	.6198	.5631	.5080	.4550	.4049	.3580	.3146	.2748	.2386	.2061
3	.8290	.7873	.7427	.6959	.6477	.5990	.5504	.5026	.4561	.4114
4	.9390	.9173	.8917	.8625	.8298	.7941	.7557	.7151	.6729	.6296
5	.9825	.9740	.9630	.9493	.9327	.9130	.8902	.8644	.8357	.8042
6	.9959	.9933	.9897	.9847	.9781	.9696	.9591	.9463	.9311	.9133
7	.9992	.9986	.9976	.9962	.9941	.9912	.9873	.9823	.9759	.9679
8	.9999	.9998	.9995	.9992	.9987	.9979	.9967	.9951	.9929	.9900
9	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9996	.9993	.9989	.9983	.9974
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9996	.9994
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash p$	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0090	.0069	.0054	.0041	.0032	.0024	.0018	.0014	.0011	.0008
1	.0566	.0461	.0374	.0302	.0243	.0195	.0155	.0123	.0097	.0076
2	.1770	.1512	.1284	.1085	.0913	.0763	.0635	.0526	.0433	.0355
3	.3690	.3289	.2915	.2569	.2252	.1962	.1700	.1466	.1256	.1071
4	.5858	.5420	.4986	.4561	.4148	.3752	.3375	.3019	.2685	.2375
5	.7703	.7343	.6965	.6573	.6172	.5765	.5357	.4952	.4553	.4164
6	.8929	.8699	.8442	.8162	.7858	.7533	.7190	.6831	.6460	.6080
7	.9581	.9464	.9325	.9165	.8982	.8775	.8545	.8293	.8018	.7723
8	.9862	.9814	.9754	.9680	.9591	.9485	.9360	.9216	.9052	.8867
9	.9962	.9946	.9925	.9897	.9861	.9817	.9762	.9695	.9615	.9520
10	.9991	.9987	.9981	.9972	.9961	.9945	.9926	.9900	.9868	.9829
11	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9986	.9981	.9973	.9962	.9949
12	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 20$ (Continuación)

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0060	.0047	.0036	.0028	.0021	.0016	.0012	.0009	.0007	.0005
2	.0289	.0235	.0189	.0152	.0121	.0096	.0076	.0060	.0047	.0036
3	.0908	.0765	.0642	.0535	.0444	.0366	.0300	.0245	.0198	.0160
4	.2089	.1827	.1589	.1374	.1182	.1011	.0859	.0726	.0610	.0510
5	.3787	.3426	.3082	.2758	.2454	.2171	.1910	.1671	.1453	.1256
6	.5695	.5307	.4921	.4540	.4166	.3803	.3453	.3118	.2800	.2500
7	.7409	.7078	.6732	.6376	.6010	.5639	.5265	.4892	.4522	.4159
8	.8660	.8432	.8182	.7913	.7624	.7317	.6995	.6659	.6312	.5956
9	.9409	.9281	.9134	.8968	.8782	.8576	.8350	.8103	.7837	.7553
10	.9780	.9721	.9650	.9566	.9468	.9355	.9225	.9077	.8910	.8725
11	.9931	.9909	.9881	.9846	.9804	.9753	.9692	.9619	.9534	.9435
12	.9982	.9975	.9966	.9955	.9940	.9921	.9898	.9868	.9833	.9790
13	.9996	.9994	.9992	.9989	.9985	.9979	.9972	.9963	.9951	.9935
14	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9991	.9988	.9984
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
2	.0028	.0021	.0016	.0012	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002
3	.0128	.0102	.0080	.0063	.0049	.0038	.0029	.0023	.0017	.0013
4	.0423	.0349	.0286	.0233	.0189	.0152	.0121	.0096	.0076	.0059
5	.1079	.0922	.0783	.0660	.0553	.0461	.0381	.0313	.0255	.0207
6	.2220	.1959	.1719	.1499	.1299	.1119	.0958	.0814	.0688	.0577
7	.3804	.3461	.3132	.2817	.2520	.2241	.1980	.1739	.1518	.1316
8	.5594	.5229	.4864	.4501	.4143	.3793	.3454	.3127	.2814	.2517
9	.7252	.6936	.6606	.6264	.5914	.5557	.5196	.4834	.4474	.4119
10	.8520	.8295	.8051	.7788	.7507	.7209	.6896	.6568	.6229	.5881
11	.9321	.9190	.9042	.8877	.8692	.8489	.8266	.8024	.7762	.7483
12	.9738	.9676	.9603	.9518	.9420	.9306	.9177	.9031	.8867	.8684
13	.9916	.9893	.9864	.9828	.9786	.9735	.9674	.9603	.9520	.9423
14	.9978	.9971	.9962	.9950	.9936	.9917	.9895	.9867	.9834	.9793
15	.9996	.9994	.9992	.9989	.9985	.9980	.9973	.9965	.9954	.9941
16	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9990	.9987
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 25$

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.7778	.6035	.4670	.3604	.2774	.2129	.1630	.1244	.0946	.0718
1	.9742	.9114	.8280	.7358	.6424	.5527	.4696	.3947	.3286	.2712
2	.9980	.9868	.9620	.9235	.8729	.8129	.7466	.6768	.6063	.5371
3	.9999	.9986	.9938	.9835	.9659	.9402	.9064	.8649	.8169	.7636
4	1.0000	.9999	.9992	.9972	.9928	.9850	.9726	.9549	.9314	.9020
5	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9988	.9969	.9935	.9877	.9790	.9666
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995	.9987	.9972	.9946	.9905
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9995	.9989	.9977
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9995
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.0543	.0409	.0308	.0230	.0172	.0128	.0095	.0070	.0052	.0038
1	.2221	.1805	.1457	.1168	.0931	.0737	.0580	.0454	.0354	.0274
2	.4709	.4088	.3517	.3000	.2537	.2130	.1774	.1467	.1204	.0982
3	.7066	.6475	.5877	.5286	.4711	.4163	.3648	.3171	.2734	.2340
4	.8669	.8266	.7817	.7332	.6821	.6293	.5759	.5228	.4708	.4207
5	.9501	.9291	.9035	.8732	.8385	.7998	.7575	.7125	.6653	.6167
6	.9844	.9757	.9641	.9491	.9305	.9080	.8815	.8512	.8173	.7800
7	.9959	.9930	.9887	.9827	.9745	.9639	.9505	.9339	.9141	.8909
8	.9991	.9983	.9970	.9950	.9920	.9879	.9822	.9748	.9652	.9532
9	.9998	.9996	.9993	.9987	.9979	.9965	.9945	.9917	.9878	.9827
10	1.0000	.9999	.9999	.9997	.9995	.9991	.9985	.9976	.9963	.9944
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994	.9990	.9985
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9996
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla C (Continuación).

$n = 25$ (Continuación)

x \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0028	.0020	.0015	.0010	.0008	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001
1	.0211	.0162	.0123	.0093	.0070	.0053	.0039	.0029	.0021	.0016
2	.0796	.0640	.0512	.0407	.0321	.0252	.0196	.0152	.0117	.0090
3	.1987	.1676	.1403	.1166	.0962	.0789	.0642	.0519	.0417	.0332
4	.3730	.3282	.2866	.2484	.2137	.1826	.1548	.1304	.1090	.0905
5	.5675	.5184	.4701	.4233	.3783	.3356	.2956	.2585	.2245	.1935
6	.7399	.6973	.6529	.6073	.5611	.5149	.4692	.4247	.3817	.3407
7	.8642	.8342	.8011	.7651	.7265	.6858	.6435	.6001	.5560	.5118
8	.9386	.9212	.9007	.8772	.8506	.8210	.7885	.7535	.7162	.6769
9	.9760	.9675	.9569	.9440	.9287	.9107	.8899	.8662	.8398	.8106
10	.9918	.9883	.9837	.9778	.9703	.9611	.9498	.9364	.9205	.9022
11	.9976	.9964	.9947	.9924	.9893	.9852	.9801	.9736	.9655	.9558
12	.9994	.9990	.9985	.9977	.9966	.9951	.9931	.9904	.9870	.9825
13	.9999	.9998	.9996	.9994	.9991	.9986	.9979	.9970	.9957	.9940
14	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9992	.9988	.9982
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0011	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
2	.0068	.0051	.0039	.0029	.0021	.0016	.0011	.0008	.0006	.0004
3	.0263	.0207	.0162	.0126	.0097	.0074	.0056	.0043	.0032	.0024
4	.0746	.0610	.0496	.0400	.0320	.0255	.0201	.0158	.0123	.0095
5	.1656	.1407	.1187	.0994	.0826	.0682	.0559	.0454	.0367	.0294
6	.3019	.2657	.2321	.2013	.1734	.1483	.1258	.1060	.0886	.0736
7	.4681	.4253	.3837	.3439	.3061	.2705	.2374	.2068	.1789	.1536
8	.6361	.5943	.5518	.5092	.4668	.4252	.3848	.3458	.3086	.2735
9	.7787	.7445	.7081	.6700	.6303	.5896	.5483	.5067	.4653	.4246
10	.8812	.8576	.8314	.8025	.7712	.7375	.7019	.6645	.6257	.5858
11	.9440	.9302	.9141	.8956	.8746	.8510	.8249	.7964	.7654	.7323
12	.9770	.9701	.9617	.9515	.9396	.9255	.9093	.8907	.8697	.8462
13	.9917	.9888	.9851	.9804	.9745	.9674	.9588	.9485	.9363	.9222
14	.9974	.9964	.9950	.9931	.9907	.9876	.9837	.9788	.9729	.9656
15	.9993	.9990	.9985	.9979	.9971	.9959	.9944	.9925	.9900	.9868
16	.9998	.9998	.9996	.9995	.9992	.9989	.9984	.9977	.9968	.9957
17	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9988
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

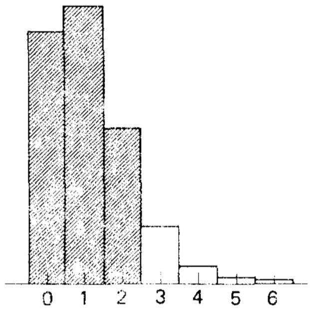
Tabla C (Continuación).

$n = 25$ (Continuación)										
$x \backslash p$	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0017	.0013	.0009	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001
4	.0073	.0055	.0042	.0031	.0023	.0017	.0012	.0009	.0006	.0005
5	.0233	.0184	.0144	.0112	.0086	.0066	.0050	.0037	.0028	.0020
6	.0606	.0495	.0401	.0323	.0258	.0204	.0160	.0124	.0096	.0073
7	.1308	.1106	.0929	.0773	.0639	.0523	.0425	.0342	.0273	.0216
8	.2407	.2103	.1823	.1569	.1340	.1135	.0954	0795	.0657	.0539
9	.3849	.3465	.3098	.2750	.2424	.2120	.1840	.1585	.1354	.1148
10	.5452	.5044	.4637	.4235	.3843	.3462	.3098	.2751	.2426	.2122
11	.6971	.6603	.6220	.5826	.5426	.5022	.4618	.4220	.3829	.3450
12	.8203	.7920	.7613	.7285	.6937	.6571	.6192	.5801	.5402	.5000
13	.9059	.8873	.8664	.8431	.8173	.7891	.7587	.7260	.6914	.6550
14	.9569	.9465	.9344	.9203	.9040	.8855	.8647	.8415	.8159	.7878
15	.9829	.9780	.9720	.9647	.9560	.9457	.9337	.9197	.9036	.8852
16	.9942	.9922	.9897	.9866	.9826	.9778	.9719	.9648	.9562	.9461
17	.9983	.9977	.9968	.9956	.9942	.9923	.9898	.9868	.9830	.9784
18	.9996	.9994	.9992	.9988	.9984	.9977	.9969	.9959	.9945	.9927
19	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9992	.9989	9985	.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla D Funciones exponenciales.

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
.00	1.000	1.000	3.10	22.198	.045
.10	1.105	.905	3.20	24.533	.041
.20	1.221	.819	3.30	27.113	.037
.30	1.350	.741	3.40	29.964	.033
.40	1.492	.670	3.50	33.115	.030
.50	1.649	.607	3.60	36.598	.027
.60	1.822	.549	3.70	40.447	.025
.70	2.014	.497	3.80	44.701	.022
.80	2.226	.449	3.90	49.402	.020
.90	2.460	.407	4.00	54.598	.018
1.00	2.718	.368	4.10	60.340	.017
1.10	3.004	.333	4.20	66.686	.015
1.20	3.320	.301	4.30	73.700	.014
1.30	3.669	.273	4.40	81.451	.012
1.40	4.055	.247	4.50	90.017	.011
1.50	4.482	.223	4.60	99.484	.010
1.60	4.953	.202	4.70	109.947	.009
1.70	5.474	.183	4.80	121.510	.008
1.80	6.050	.165	4.90	134.290	.007
1.90	6.686	.150	5.00	148.413	.007
2.00	7.389	.135	5.10	164.022	.006
2.10	8.166	.122	5.20	181.272	.006
2.20	9.025	.111	5.30	200.337	.005
2.30	9.974	.100	5.40	221.406	.005
2.40	11.023	.091	5.50	244.692	.004
2.50	12.182	.082	5.60	270.426	.004
2.60	13.464	.074	5.70	298.867	.003
2.70	14.880	.067	5.80	330.300	.003
2.80	16.445	.061	5.90	365.037	.003
2.90	18.174	.055	6.00	403.429	.002
3.00	20.086	.050			

Tabla E Distribución acumulada de Poisson, $P(X \leqslant x/\lambda)$ 1,000 veces la probabilidad de x o menos ocurrencias del evento que tiene un número promedio de ocurrencias igual a λ.



$P(X \leqslant 2 \mid \lambda = 1.00) = .920$

x \ λ	.02	.04	.06	.08	.10	.15	.20	.25
0	980	961	942	923	905	861	819	779
1	1000	999	998	997	995	990	982	974
2		1000	1000	1000	1000	999	999	998
3						1000	1000	1000

x \ λ	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65
0	741	705	670	638	607	577	549	522
1	963	951	938	925	910	894	878	861
2	996	994	992	989	986	982	977	972
3	1000	1000	999	999	998	998	997	996
4			1000	1000	1000	1000	1000	999
5								1000

x \ λ	.70	.75	.80	.85	.90	.95	1.0	1.1
0	497	472	449	427	407	387	368	333
1	844	827	809	791	772	754	736	699
2	966	959	953	945	937	929	920	900
3	994	993	991	989	987	984	981	974
4	999	999	999	998	998	997	996	995
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	999	999
6							1000	1000

x \ λ	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0	301	273	247	223	202	183	165	150
1	663	627	592	558	525	493	463	434
2	879	857	833	809	783	757	731	704
3	966	957	946	934	921	907	891	875
4	992	989	986	981	976	970	964	956
5	998	998	997	996	994	992	990	987
6	1000	1000	999	999	999	998	997	997
7			1000	1000	1000	1000	999	999
8							1000	1000

x \ λ	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
0	135	111	091	074	061	050	041	033
1	406	355	308	267	231	199	171	147
2	677	623	570	518	469	423	380	340
3	857	819	779	736	692	647	603	558
4	947	928	904	877	848	815	781	744
5	983	975	964	951	935	916	895	871
6	995	993	988	983	976	966	955	942
7	999	998	997	995	992	988	983	977
8	1000	1000	999	999	998	997	994	992
9			1000	1000	999	999	998	997
10					1000	1000	1000	999
11								1000

x \ λ	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
0	027	022	018	015	012	010	008	007
1	126	107	092	078	066	056	048	040
2	303	269	238	210	185	163	143	125
3	515	473	433	395	359	326	294	265
4	706	668	629	590	551	513	476	440
5	844	816	785	753	720	686	651	616
6	927	909	889	867	844	818	791	762
7	969	960	949	936	921	905	887	867
8	988	984	979	972	964	955	944	932
9	996	994	992	989	985	980	975	968
10	999	998	997	996	994	992	990	986
11	1000	999	999	999	998	997	996	995
12		1000	1000	1000	999	999	999	998
13					1000	1000	1000	999
14								1000

Tabla E (Continuación).

x \ λ	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6
0	006	005	004	003	002	002	002	001
1	034	029	024	021	017	015	012	010
2	109	095	082	072	062	054	046	040
3	238	213	191	170	151	134	119	105
4	406	373	342	313	285	259	235	213
5	581	546	512	478	446	414	384	355
6	732	702	670	638	606	574	542	511
7	845	822	797	771	744	716	687	658
8	918	903	886	867	847	826	803	780
9	960	951	941	929	916	902	886	869
10	982	977	972	965	957	949	939	927
11	993	990	988	984	980	975	969	963
12	997	996	995	993	991	989	986	982
13	999	999	998	997	996	995	994	992
14	1000	999	999	999	999	998	997	997
15		1000	1000	1000	999	999	999	999
16					1000	1000	1000	999
17								1000

x \ λ	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.5
0	001	001	001	001	001	000	000	000
1	009	007	006	005	004	004	003	002
2	034	030	025	022	019	016	014	009
3	093	082	072	063	055	048	042	030
4	192	173	156	140	125	112	100	074
5	327	301	276	253	231	210	191	150
6	480	450	420	392	365	338	313	256
7	628	599	569	539	510	481	453	386
8	755	729	703	676	648	620	593	523
9	850	830	810	788	765	741	717	653
10	915	901	887	871	854	835	816	763
11	955	947	937	926	915	902	888	849
12	978	973	967	961	954	945	936	909
13	990	987	984	980	976	971	966	949
14	996	994	993	991	989	986	983	973
15	998	998	997	996	995	993	992	986
16	999	999	999	998	998	997	996	993
17	1000	1000	999	999	999	999	998	997
18			1000	1000	1000	1000	999	999
19							1000	999
20								1000

Tabla E (Continuación).

x \ λ	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
1	001	001	000	000	000	000	000	000
2	006	004	003	002	001	001	001	000
3	021	015	010	007	005	003	002	002
4	055	040	029	021	015	011	008	005
5	116	089	067	050	038	028	020	015
6	207	165	130	102	079	060	046	035
7	324	269	220	179	143	114	090	070
8	456	392	333	279	232	191	155	125
9	587	522	458	397	341	289	242	201
10	706	645	583	521	460	402	347	297
11	803	752	697	639	579	520	462	406
12	876	836	792	742	689	633	576	519
13	926	898	864	825	781	733	682	628
14	959	940	917	888	854	815	772	725
15	978	967	951	932	907	878	844	806
16	989	982	973	960	944	924	899	869
17	995	991	986	978	968	954	937	916
18	998	996	993	988	982	974	963	948
19	999	998	997	994	991	986	979	969
20	1000	999	998	997	995	992	988	983
21		1000	999	999	998	996	994	991
22			1000	999	999	998	997	995
23				1000	1000	999	999	998
24						1000	999	999
25							1000	999
26								1000

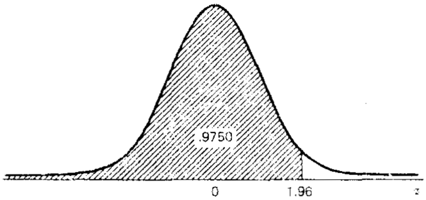
Tabla E (Continuación).

x \ λ	13.0	13.5	14.0	14.5	15	16	17	18
3	001	001	000	000	000	000	000	000
4	004	003	002	001	001	000	000	000
5	011	008	006	004	003	001	001	000
6	026	019	014	010	008	004	002	001
7	054	041	032	024	018	010	005	003
8	100	079	062	048	037	022	013	007
9	166	135	109	088	070	043	026	015
10	252	211	176	145	118	077	049	030
11	353	304	260	220	185	127	085	055
12	463	409	358	311	268	193	135	092
13	573	518	464	413	363	275	201	143
14	675	623	570	518	466	368	281	208
15	764	718	669	619	568	467	371	287
16	835	798	756	711	664	566	468	375
17	890	861	827	790	749	659	564	469
18	930	908	883	853	819	742	655	562
19	957	942	923	901	875	812	736	651
20	975	965	952	936	917	868	805	731
21	986	980	971	960	947	911	861	799
22	992	989	983	976	967	942	905	855
23	996	994	991	986	981	963	937	899
24	998	997	995	992	989	978	959	932
25	999	998	997	996	994	987	975	955
26	1000	999	999	998	997	993	985	972
27		1000	999	999	998	996	991	983
28			1000	999	999	998	995	990
29				1000	1000	999	997	994
30						999	999	997
31						1000	999	998
32							1000	999
33								1000

Tabla E (Continuación).

x \ λ	19	20	21	22	23	24	25
6	001	000	000	000	000	000	000
7	002	001	000	000	000	000	000
8	004	002	001	001	000	000	000
9	009	005	003	002	001	000	000
10	018	011	006	004	002	001	001
11	035	021	013	008	004	003	001
12	061	039	025	015	009	005	003
13	098	066	043	028	017	011	006
14	150	105	072	048	031	020	012
15	215	157	111	077	052	034	022
16	292	221	163	117	082	056	038
17	378	297	227	169	123	087	060
18	469	381	302	232	175	128	092
19	561	470	384	306	238	180	134
20	647	559	471	387	310	243	185
21	725	644	558	472	389	314	247
22	793	721	640	556	472	392	318
23	849	787	716	637	555	473	394
24	893	843	782	712	635	554	473
25	927	888	838	777	708	632	553
26	951	922	883	832	772	704	629
27	969	948	917	877	827	768	700
28	980	966	944	913	873	823	763
29	988	978	963	940	908	868	818
30	993	987	976	959	936	904	863
31	996	992	985	973	956	932	900
32	998	995	991	983	971	953	929
33	999	997	994	989	981	969	950
34	999	999	997	994	988	979	966
35	1000	999	998	996	993	987	978
36		1000	999	998	996	992	985
37			999	999	997	995	991
38			1000	999	999	997	994
39				1000	999	998	997
40					1000	999	998
41						999	999
42						1000	999
43							1000

Tabla F Areas de la curva normal $P(z \leqslant z_0)$ los valores en el cuerpo de la tabla son áreas entre $-\infty$ y z.



z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	0.00	z
−3.80	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.80
−3.70	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.70
−3.60	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	−3.60
−3.50	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	−3.50
−3.40	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	−3.40
−3.30	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0005	.0005	.0005	−3.30
−3.20	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007	−3.20
−3.10	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010	−3.10
−3.00	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013	−3.00
−2.90	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019	−2.90
−2.80	.0019	.0020	.0021	.0021	.0022	.0023	.0023	.0024	.0025	.0026	−2.80
−2.70	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0033	.0034	.0035	−2.70
−2.60	.0036	.0037	.0038	.0039	.0040	.0041	.0043	.0044	.0045	.0047	−2.60
−2.50	.0048	.0049	.0051	.0052	.0054	.0055	.0057	.0059	.0060	.0062	−2.50
−2.40	.0064	.0066	.0068	.0069	.0071	.0073	.0075	.0078	.0080	.0082	−2.40
−2.30	.0084	.0087	.0089	.0091	.0094	.0096	.0099	.0102	.0104	.0107	−2.30
−2.20	.0110	.0113	.0116	.0119	.0122	.0125	.0129	.0132	.0136	.0139	−2.20
−2.10	.0143	.0146	.0150	.0154	.0158	.0162	.0166	.0170	.0174	.0179	−2.10
−2.00	.0183	.0188	.0192	.0197	.0202	.0207	.0212	.0217	.0222	.0228	−2.00
−1.90	.0233	.0239	.0244	.0250	.0256	.0262	.0268	.0274	.0281	.0287	−1.90
−1.80	.0294	.0301	.0307	.0314	.0322	.0329	.0336	.0344	.0351	.0359	−1.80
−1.70	.0367	.0375	.0384	.0392	.0401	.0409	.0418	.0427	.0436	.0446	−1.70
−1.60	.0455	.0465	.0475	.0485	.0495	.0505	.0516	.0526	.0537	.0548	−1.60
−1.50	.0559	.0571	.0582	.0594	.0606	.0618	.0630	.0643	.0655	.0668	−1.50
−1.40	.0681	.0694	.0708	.0721	.0735	.0749	.0764	.0778	.0793	.0808	−1.40
−1.30	.0823	.0838	.0853	.0869	.0885	.0901	.0918	.0934	.0951	.0968	−1.30
−1.20	.0985	.1003	.1020	.1038	.1056	.1075	.1093	.1112	.1131	.1151	−1.20
−1.10	.1170	.1190	.1210	.1230	.1251	.1271	.1292	.1314	.1335	.1357	−1.10
−1.00	.1379	.1401	.1423	.1446	.1469	.1492	.1515	.1539	.1562	.1587	−1.00
−0.90	.1611	.1635	.1660	.1685	.1711	.1736	.1762	.1788	.1814	.1841	−0.90
−0.80	.1867	.1894	.1922	.1949	.1977	.2005	.2033	.2061	.2090	.2119	−0.80
−0.70	.2148	.2177	.2206	.2236	.2266	.2296	.2327	.2358	.2389	.2420	−0.70
−0.60	.2451	.2483	.2514	.2546	.2578	.2611	.2643	.2676	.2709	.2743	−0.60
−0.50	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981	.3015	.3050	.3085	−0.50
−0.40	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336	.3372	.3409	.3446	−0.40
−0.30	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707	.3745	.3783	.3821	−0.30
−0.20	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090	.4129	.4168	.4207	−0.20
−0.10	.4247	.4286	.4325	.4364	.4404	.4443	.4483	.4522	.4562	.4602	−0.10
0.00	.4641	.4681	.4721	.4761	.4801	.4840	.4880	.4920	.4960	.5000	0.00

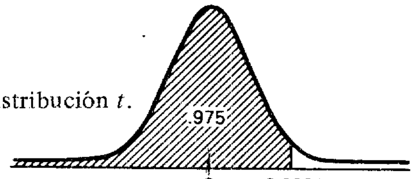
Tabla F (Continuación).

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	0.00
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.10
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.20
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.30
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.40
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.50
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.60
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.70
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.80
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.90
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.00
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.10
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	1.20
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	1.30
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319	1.40
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441	1.50
1.60	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545	1.60
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	1.70
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	1.80
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	1.90
2.00	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817	2.00
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	2.10
2.20	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	2.20
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	2.30
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	2.40
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952	2.50
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964	2.60
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974	2.70
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981	2.80
2.90	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986	2.90
3.00	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990	3.00
3.10	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993	3.10
3.20	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	3.20
3.30	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	3.30
3.40	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	3.40
3.50	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	3.50
3.60	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.60
3.70	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.70
3.80	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.80

Tabla G Números aleatorios.

85967	73152	14511	85285	36009	95892	36962	67835	63314	50162
07483	51453	11649	86348	76431	81594	95848	36738	25014	15460
96283	01898	61414	83525	04231	13604	75339	11730	85423	60698
49174	12074	98551	37895	93547	24769	09404	76548	05393	96770
97366	39941	21225	93629	19574	71565	33413	56087	40875	13351
90474	41469	16812	81542	81652	45554	27931	93994	22375	00953
28599	64109	09497	76235	41383	31555	12639	00619	22909	29563
25254	16210	89717	65997	82667	74624	36348	44018	64732	93589
28785	02760	24359	99410	77319	73408	58993	61098	04393	48245
84725	86576	86944	93296	10081	82454	76810	52975	10324	15457
41059	66456	47679	66810	15941	84602	14493	65515	19251	41642
67434	41045	82830	47617	36932	46728	71183	36345	41404	81110
72766	68816	37643	19959	57550	49620	98480	25640	67257	18671
92079	46784	66125	94932	64451	29275	57669	66658	30818	58353
29187	40350	62533	73603	34075	16451	42885	03448	37390	96328
74220	17612	65522	80607	19184	64164	66962	82310	18163	63495
03786	02407	06098	92917	40434	60602	82175	04470	78754	90775
75085	55558	15520	27038	25471	76107	90832	10819	56797	33751
09161	33015	19155	11715	00551	24909	31894	37774	37953	78837
75707	48992	64998	87080	39333	00767	45637	12538	67439	94914
21333	48660	31288	00086	79889	75532	28704	62844	92337	99695
65626	50061	42539	14812	48895	11196	34335	60492	70650	51108
84380	07389	87891	76255	89604	41372	10837	66992	93183	56920
46479	32072	80083	63868	70930	89654	05359	47196	12452	38234
59847	97197	55147	76639	76971	55928	36441	95141	42333	67483
31416	11231	27904	57383	31852	69137	96667	14315	01007	31929
82066	83436	67914	21465	99605	83114	97885	74440	99622	87912
01850	42782	39202	18582	46214	99228	79541	78298	75404	63648
32315	89276	89582	87138	16165	15984	21466	63830	30475	74729
59388	42703	55198	80380	67067	97155	34160	85019	03527	78140
58089	27632	50987	91373	07736	20436	96130	73483	85332	24384
61705	57285	30392	23660	75841	21931	04295	00875	09114	32101
18914	98982	60199	99275	41967	35208	30357	76772	92656	62318
11965	94089	34803	48941	69709	16784	44642	89761	66864	62803
85251	48111	80936	81781	93248	67877	16498	31924	51315	79921
66121	96986	84844	93873	46352	92183	51152	85878	30490	15974
53972	96642	24199	58080	35450	03482	66953	49521	63719	57615
14509	16594	78883	43222	23093	58645	60257	89250	63266	90858
37700	07688	65533	72126	23611	93993	01848	03910	38552	17472
85466	59392	72722	15473	73295	49759	56157	60477	83284	56367
52969	55863	42312	67842	05673	91878	82738	36563	79540	61935
42744	68315	17514	02878	97291	74851	42725	57894	81434	62041
26140	13336	67726	61876	29971	99294	96664	52817	90039	53211
95589	56319	14563	24071	06916	59555	18195	32280	79357	04224
39113	13217	59999	49952	83021	47709	53105	19295	88318	41626
41392	17622	18994	98283	07249	52289	24209	91139	30715	06604
54684	53645	79246	70183	87731	19185	08541	33519	07223	97413
89442	61001	36658	57444	95388	36682	38052	46719	09428	94012
36751	16778	54888	15357	68003	43564	90976	58904	40512	07725
98159	02564	21416	74944	53049	88749	02865	25772	89853	38714

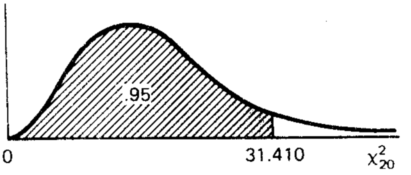
Tabla H Percentiles de la distribución t.



$P(t_{10} \leqslant 2.2281) = .975$

g.l.	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	3.078	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	1.341	1.7530	2.1315	2.602	2.9467
16	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.438	2.7239
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.423	2.7045
45	1.3007	1.6794	2.0141	2.412	2.6896
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.403	2.6778
60	1.2959	1.6707	2.0003	2.390	2.6603
70	1.2938	1.6669	1.9945	2.381	2.6480
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.374	2.6388
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.368	2.6316
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.364	2.6260
120	1.2887	1.6577	1.9799	2.358	2.6175
140	1.2876	1.6558	1.9771	2.353	2.6114
160	1.2869	1.6545	1.9749	2.350	2.6070
180	1.2863	1.6534	1.9733	2.347	2.6035
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.345	2.6006
∞	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576

Tabla I Percentiles de la distribución ji-cuadrada.

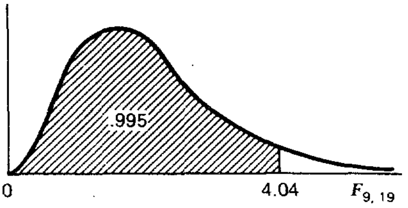


$P(\chi^2_{20} \leqslant 31.410) = .95$

g.l.	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
1	.0000393	.000982	.00393	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0506	.103	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.0717	.216	.352	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.484	.711	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.831	1.145	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	.676	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	4.404	5.226	18.549	21.026	23.336	26.217	28.300
13	3.565	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	11.688	13.091	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	14.573	16.151	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	16.047	17.708	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	24.433	26.509	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	28.366	30.612	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	57.153	60.391	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	74.222	77.929	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Tabla J Percentiles de la distribución F

$F_{.995}$



$P(F_{9,\,19} \leq 4.04) = .995$

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62

Tabla J (Continuación).

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

Tabla J (Continuación).

$F_{.99}$

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

Tabla J (Continuación).

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabla J (Continuación).

$F_{.975}$

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11

Tabla J (*Continuación*).

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Tabla J (Continuación).

$F_{.95}$

Grados de libertad del denominador	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Grados de libertad del numerador								
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Tabla J (Continuación).

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabla J (Continuación).

$F_{.90}$

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.34	1.90	1.87
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63

Tabla J (Continuación).

Grados de libertad del denominador	Grados de libertad del numerador 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Tabla K Puntos de porcentaje del rango Student de 2 a 20 tratamientos. Puntos del 5% superior.

Error g. l.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47

Error g. l.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96

Tabla K (Continuación).

Error g. l.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
16	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

Puntos del 1% superior

Error g. l.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16

Tabla K (Continuación).

g.l.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57
10	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39
15	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05
18	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

Tabla L Transformación de r a z. En la tabla se incluyen los valores de $z = .5[\ln(1 + r)/(1 - r)] = \tan h^{-1} r$ para los valores correspondientes de r, el coeficiente de correlación.

r	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.00000	.01000	.02000	.03001	.04002	.05004	.06007	.07012	.08017	.09024
.1	.10034	.11045	.12058	.13074	.14093	.15114	.16139	.17167	.18198	.19234
.2	.20273	.21317	.22366	.23419	.24477	.25541	.26611	.27686	.28768	.29857
.3	.30952	.32055	.33165	.34283	.35409	.36544	.37689	.38842	.40006	.41180
.4	.42365	.43561	.44769	.45990	.47223	.48470	.49731	.51007	.52298	.53606
.5	.54931	.56273	.57634	.59014	.60415	.61838	.63283	.64752	.66246	.67767
.6	.69315	.70892	.72500	.74142	.75817	.77530	.79281	.81074	.82911	.84795
.7	.86730	.88718	.90764	.92873	.95048	.97295	.99621	1.02033	1.04537	1.07143
.8	1.09861	1.12703	1.15682	1.18813	1.22117	1.25615	1.29334	1.33308	1.37577	1.42192
.9	1.47222	1.52752	1.58902	1.65839	1.73805	1.83178	1.94591	2.09229	2.29756	2.64665

Tabla M Cuantiles de la estadística de prueba de Mann-Whitney.

n	p	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
	.025	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	.05	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	.10	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	.005	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
3	.01	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6
	.025	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	.05	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
	.10	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
	.005	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9
4	.01	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	9	8	9	10	10	11
	.025	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15
	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	.10	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23
	.001	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8
	.005	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
5	.01	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	.025	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
	.05	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26
	.10	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31

Tabla M Cuantiles de la estadística de prueba de Mann-Whitney (continuación).

n	*p*	*m* = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	.005	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19
6	.01	0	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23
	.025	0	2	3	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28
	.05	1	3	4	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33
	.10	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39
	.001	0	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
	.005	0	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25
7	.01	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29
	.025	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
	.05	1	3	5	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40
	.10	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	42	44	47
	.001	0	0	0	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22
	.005	0	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
8	.01	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35
	.025	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42
	.05	2	4	6	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48
	.10	3	6	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.001	0	0	0	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27
	.005	0	1	2	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37
9	.01	0	2	4	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41
	.025	1	3	5	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49
	.05	2	5	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.10	3	6	10	13	16	19	23	26	29	32	36	39	42	46	49	53	56	59	63
	.001	0	0	1	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33
	.005	0	1	3	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43
10	.01	0	2	4	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48
	.025	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56
	.05	2	5	8	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63
	.10	4	7	11	14	18	22	25	29	33	37	40	44	48	52	55	59	63	67	71

Tabla M Cuantiles de la estadística de prueba de Mann-Whitney (continuación).

n	p	m = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38
	.005	0	1	3	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
11	.01	0	2	5	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54
	.025	1	4	7	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63
	.05	2	6	9	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70
	.10	4	8	12	16	20	24	28	32	37	41	45	49	53	58	62	66	70	74	79
	.001	0	0	1	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43
	.005	0	2	4	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55
12	.01	0	3	6	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61
	.025	2	5	8	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
	.05	3	6	10	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78
	.10	5	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	64	68	73	78	82	87
	.001	0	0	2	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49
	.005	0	2	4	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61
13	.01	1	3	6	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
	.025	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77
	.05	3	7	11	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85
	.10	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	75	80	85	90	95
	.001	0	0	2	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55
	.005	0	2	5	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68
14	.01	1	3	7	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74
	.025	2	6	10	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84
	.05	4	8	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93
	.10	5	11	16	21	26	32	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103
	.001	0	0	2	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60
	.005	0	3	6	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74
15	.01	1	4	8	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81
	.025	2	6	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91
	.05	4	8	13	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101
	.10	6	11	17	23	28	34	40	46	52	58	64	69	75	81	87	93	99	105	111

Tabla M Cuantiles de la estadística de prueba de Mann-Whitney (continuación).

n	p	m = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66
	.005	0	3	6	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80
16	.01	1	4	8	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88
	.025	2	7	12	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99
	.05	4	9	15	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108
	.10	6	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120
	.001	0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71
	.005	0	3	7	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87
17	.01	1	5	9	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94
	.025	3	7	12	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
	.05	4	10	16	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116
	.10	7	13	19	26	32	39	46	53	59	66	73	80	86	93	100	107	114	121	128
	.001	0	1	4	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77
	.005	0	3	7	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93
18	.01	1	5	10	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101
	.025	3	8	13	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113
	.05	5	10	17	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124
	.10	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	78	85	92	99	107	114	121	129	136
	.001	0	1	4	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83
	.005	1	4	8	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100
19	.01	2	5	10	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108
	.025	3	8	14	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120
	.05	5	11	18	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131
	.10	8	15	22	29	37	44	52	59	67	74	82	90	98	105	113	121	129	136	144
	.001	0	1	4	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89
	.005	1	4	9	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106
20	.01	2	6	11	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115
	.025	3	9	15	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128
	.05	5	12	19	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139
	.10	8	16	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	120	128	136	144	152

Tabla N Cuantiles de la estadística de prueba de Kolmogorov.

Prueba unilateral					
	$p = .90$	.95	.975	.99	.995
Prueba bilateral					
	$p = .80$	.90	.95	.98	.99
$n =$ 1	.900	.950	.975	.990	.995
2	.684	.776	.842	.900	.929
3	.565	.636	.708	.785	.829
4	.493	.565	.624	.689	.734
5	.447	.509	.563	.627	.669
6	.410	.468	.519	.577	.617
7	.381	.436	.483	.538	.576
8	.358	.410	.454	.507	.542
9	.339	.387	.430	.480	.513
10	.323	.369	.409	.457	.489
11	.308	.352	.391	.437	.468
12	.296	.338	.375	.419	.449
13	.285	.325	.361	.404	.432
14	.275	.314	.349	.390	.418
15	.266	.304	.338	.377	.404
16	.258	.295	.327	.366	.392
17	.250	.286	.318	.355	.381
18	.244	.279	.309	.346	.371
19	.237	.271	.301	.337	.361
20	.232	.265	.294	.329	.352
21	.226	.259	.287	.321	.344
22	.221	.253	.281	.314	.337
23	.216	.247	.275	.307	.330
24	.212	.242	.269	.301	.323
25	.208	.238	.264	.295	.317
26	.204	.233	.259	.290	.311
27	.200	.229	.254	.284	.305
28	.197	.225	.250	.279	.300
29	.193	.221	.246	.275	.295
30	.190	.218	.242	.270	.290
31	.187	.214	.238	.266	.285
32	.184	.211	.234	.262	.281
33	.182	.208	.231	.258	.277
34	.179	.205	.227	.254	.273
35	.177	.202	.224	.251	.269
36	.174	.199	.221	.247	.265
37	.172	.196	.218	.244	.262
38	.170	.194	.215	.241	.258
39	.168	.191	.213	.238	.255
40	.165	.189	.210	.235	.252
Aproximación para $n > 40$	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Tabla O Valores críticos de la estadística de prueba de Kruskal-Wallis.

Tamaño de las muestras			Valor	
n_1	n_2	n_3	crítico	α
2	1	1	2.7000	.500
2	2	1	3.6000	.200
2	2	2	4.5714	.067
			3.7143	.200
3	1	1	3.2000	.300
3	2	1	4.2857	.100
			3.8571	.133
3	2	2	5.3572	.029
			4.7143	.048
			4.5000	.067
			4.4643	.105
3	3	1	5.1429	.043
			4.5714	.100
			4.0000	.129
3	3	2	6.2500	.011
			5.3611	.032
			5.1389	.061
			4.5556	.100
			4.2500	.121
3	3	3	7.2000	.004
			6.4889	.011
			5.6889	.029
			5.6000	.050
			5.0667	.086
			4.6222	.100
4	1	1	3.5714	.200
4	2	1	4.8214	.057
			4.5000	.076
			4.0179	.114
4	2	2	6.0000	.014
			5.3333	.033
			5.1250	.052
			4.4583	.100
			4.1667	.105
4	3	1	5.8333	.021
			5.2083	.050
			5.0000	.057
			4.0556	.093
			3.8889	.129

Tabla O (Continuación).

Tamaño de las muestras			Valor crítico	α
n_1	n_2	n_3		
4	3	2	6.4444	.008
			6.3000	.011
			5.4444	.046
			5.4000	.051
			4.5111	.098
			4.4444	.102
4	3	3	6.7455	.010
			6.7091	.013
			5.7909	.046
			5.7273	.050
			4.7091	.092
			4.7000	.101
4	4	1	6.6667	.010
			6.1667	.022
			4.9667	.048
			4.8667	.054
			4.1667	.082
			4.0667	.102
4	4	2	7.0364	.006
			6.8727	.011
			5.4545	.046
			5.2364	.052
			4.5545	.098
			4.4455	.103
4	4	3	7.1439	.010
			7.1364	.011
			5.5985	.049
			5.5758	.051
			4.5455	.099
			4.4773	.102
4	4	4	7.6538	.008
			7.5385	.011
			5.6923	.049
			5.6538	.054
			4.6539	.097
			4.5001	.104
5	1	1	3.8571	.143
5	2	1	5.2500	.036
			5.0000	.048
			4.4500	.071
			4.2000	.095
			4.0500	.119

Tabla O (Continuación).

Tamaño de las muestras			Valor crítico	α
n_1	n_2	n_3		
5	2	2	6.5333	.008
			6.1333	.013
			5.1600	.034
			5.0400	.056
			4.3733	.090
			4.2933	.122
5	3	1	6.4000	.012
			4.9600	.048
			4.8711	.052
			4.0178	.095
			3.8400	.123
5	3	2	6.9091	.009
			6.8218	.010
			5.2509	.049
			5.1055	.052
			4.6509	.091
			4.4945	.101
5	3	3	7.0788	.009
			6.9818	.011
			5.6485	.049
			5.5152	.051
			4.5333	.097
			4.4121	.109
5	4	1	6.9545	.008
			6.8400	.011
			4.9855	.044
			4.8600	.056
			3.9873	.098
			3.9600	.102
5	4	2	7.2045	.009
			7.1182	.010
			5.2727	.049
			5.2682	.050
			4.5409	.098
			4.5182	.101
5	4	3	7.4449	.010
			7.3949	.011
			5.6564	.049
			5.6308	.050

Tabla O (Continuación).

Tamaño de las muestras			Valor crítico	α
n_1	n_2	n_3		
			4.5487	.099
			4.5231	.103
5	4	4	7.7604	.009
			7.7440	.011
			5.6571	.049
			5.6176	.050
			4.6187	.100
			4.5527	.102
5	5	1	7.3091	.009
			6.8364	.011
			5.1273	.046
			4.9091	.053
			4.1091	.086
			4.0364	.105
5	5	2	7.3385	.010
			7.2692	.010
			5.3385	.047
			5.2462	.051
			4.6231	.097
			4.5077	.100
5	5	3	7.5780	.010
			7.5429	.010
			5.7055	.046
			5.6264	.051
			4.5451	.100
			4.5363	.102
5	5	4	7.8229	.010
			7.7914	.010
			5.6657	.049
			5.6429	.050
			4.5229	.099
			4.5200	.101
5	5	5	8.0000	.009
			7.9800	.010
			5.7800	.049
			5.6600	.051
			4.5600	.100
			4.5000	.102

Tabla Pa Distribución exacta de χ_r^2 para tablas con de 2 a 9 conjuntos de tres rangos. (k = 3; n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). P es la probabilidad de obtener un valor de χ_r^2 tan grande o mayor que el valor correspondiente de χ_r^2.

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
χ_r^2	P	χ_r^2	P	χ_r^2	P	χ_r^2	P
0	1.000	.000	1.000	.0	1.000	.0	1.000
1	.833	0.667	.944	.5	.931	.4	.954
3	.500	2.000	.528	1.5	.653	1.2	.691
4	.167	2.667	.361	2.0	.431	1.6	.522
		4.667	1.94	3.5	.273	2.8	.367
		6.000	.028	4.5	.125	3.6	.182
				6.0	.069	4.8	.124
				6.5	.042	5.2	.093
				8.0	.0046	6.4	.039
						7.6	.024
						8.4	.0085
						10.0	.00077

$n = 6$		$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$	
.00	1.000	.000	1.000	.00	1.000	.000	1.000
0.33	.956	.286	.964	.25	.967	.222	.971
1.00	.740	.857	.768	.75	.794	.667	.814
1.33	.570	1.143	.620	1.00	.654	.889	.865
2.33	.430	2.000	.486	1.75	.531	1.556	.569
3.00	.252	2.571	.305	2.25	.355	2.000	.398
4.00	.184	3.429	.237	3.00	.285	2.667	.328
4.33	.142	3.714	.192	3.25	.236	2.889	.278
5.33	.072	4.571	.112	4.00	.149	3.556	.187
6.33	.052	5.429	.085	4.75	.120	4.222	.154
7.00	.029	6.000	.052	5.25	.079	4.667	.107
8.33	.012	7.143	.027	6.25	.047	5.556	.069
9.00	.0081	7.714	.021	6.75	.038	6.000	.057
9.33	.0055	8.000	.016	7.00	.030	6.222	.048
10.33	.0017	8.857	.0084	7.75	.018	6.889	.031
12.00	.00013	10.286	.0036	9.00	.0099	8.000	.019
		10.571	.0027	9.25	.0080	8.222	.016
		11.143	.0012	9.75	.0048	8.667	.010
		12.286	.00032	10.75	.0024	9.556	.0060
		14.000	.000021	12.00	.0011	10.667	.0035
				12.25	.00086	10.889	.0029
				13.00	.00026	11.556	.0013
				14.25	.000061	12.667	.00066
				16.00	.0000036	13.556	.00035
						14.000	.00020
						14.222	.000097
						14.889	.000054
						16.222	.000011
						18.000	.0000006

Tabla Pb Distribución exacta de χ_r^2 para tablas con de 2 a 4 conjuntos de cuatro rangos. ($k = 4$; $n = 2, 3, 4$). P es la probabilidad de obtener un valor de χ_r^2 tan grande o mayor que el valor correspondiente de χ_r^2.

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$			
χ_r^2	P	χ_r^2	P	χ_r^2	P	χ_r^2	P
.0	1.000	.2	1.000	.0	1.000	5.7	.141
.6	.958	.6	.958	.3	.992	6.0	.105
1.2	.834	1.0	.910	.6	.928	6.3	.094
1.8	.792	1.8	.727	.9	.900	6.6	.077
2.4	.625	2.2	.608	1.2	.800	6.9	.068
3.0	.542	2.6	.524	1.5	.754	7.2	.054
3.6	.458	3.4	.446	1.8	.677	7.5	.052
4.2	.375	3.8	.342	2.1	.649	7.8	.036
4.8	.208	4.2	.300	2.4	.524	8.1	.033
5.4	.167	5.0	.207	2.7	.508	8.4	.019
6.0	.042	5.4	.175	3.0	.432	8.7	.014
		5.8	.148	3.3	.389	9.3	.012
		6.6	.075	3.6	.355	9.6	.0069
		7.0	.054	3.9	.324	9.9	.0062
		7.4	.033	4.5	.242	10.2	.0027
		8.2	.017	4.8	.200	10.8	.0016
		9.0	.0017	5.1	.190	11.1	.00094
				5.4	.158	12.0	.000072

Tabla Q Valores críticos de la estadística de prueba de Spearman. Valores críticos aproximados de la cola superior, r_S^*, donde $P(r_s > r_S^*) \leqslant \alpha$; $n = 4(1)30$. Nivel de importancia, α.

n	.001	.005	.010	.025	.050	.100
4	—	—	—	—	.8000	.8000
5	—	—	.9000	.9000	.8000	.7000
6	—	.9429	.8857	.8286	.7714	.6000
7	.9643	.8929	.8571	.7450	.6786	.5357
8	.9286	.8571	.8095	.7143	.6190	.5000
9	.9000	.8167	.7667	.6833	.5833	.4667
10	.8667	.7818	.7333	.6364	.5515	.4424
11	.8364	.7545	.7000	.6091	.5273	.4182
12	.8182	.7273	.6713	.5804	.4965	.3986
13	.7912	.6978	.6429	.5549	.4780	.3791
14	.7670	.6747	.6220	.5341	.4593	.3626
15	.7464	.6536	.6000	.5179	.4429	.3500
16	.7265	.6324	.5824	.5000	.4265	.3382
17	.7083	.6152	.5637	.4853	.4118	.3260
18	.6904	.5975	.5480	.4716	.3994	.3148
19	.6737	.5825	.5333	.4579	.3895	.3070
20	.6586	.5684	.5203	.4451	.3789	.2977
21	.6455	.5545	.5078	.4351	.3688	.2909
22	.6318	.5426	.4963	.4241	.3597	.2829
23	.6186	.5306	.4852	.4150	.3518	.2767
24	.6070	.5200	.4748	.4061	.3435	.2704
25	.5962	.5100	.4654	.3977	.3362	.2646
26	.5856	.5002	.4564	.3894	.3299	.2588
27	.5757	.4915	.4481	.3822	.3236	.2540
28	.5660	.4828	.4401	.3749	.3175	.2490
29	.5567	.4744	.4320	.3685	.3113	.2443
30	.5479	.4665	.4251	.3620	.3059	.2400

Nota: el valor crítico correspondiente de la parte inferior para r_S es $-r_S^*$.

CRÉDITOS POR LAS TABLAS

G. De *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates,* de The Rand Corporation, The Free Press, Glencoe, Illinois, 1955. Reimpresa con autorización.

H. Reproducida de *Documenta Geigy, Scientific Tables,* séptima edición, 1970, por cortesía de CIBA-Geigy Limited, Basilea, Suiza.

I. De A. Hald y S. A. Sinkbaek, "A Table of Percentage Points of the χ^2 Distribution", *Skandinavisk Aktuarietidskrift, 33* (1950), 168-175. Utilizada con autorización.

J. De *Biometrika Tables for Statisticians,* tercera edición, Vol. I, Bentley House, Londres, 1970. Reimpresa con autorización.

K. De *Biometrika Tables for Statisticians,* tercera edición, Vol. I, Bentley House, Londres, 1970. Utilizada con autorización.

M. Adaptada de L. R. Verdooren, "Extended Tables of Critical Values for Wilcoxon's Test Statistic", *Biometrika, 50* (1963), 177-186. Utilizada con autorización del autor y de E. S. Pearson on behalf of the Biometrika Trustees. La adaptación se debe a W. J. Conover, *Practical Nonparametric Statistics,* Nueva York: John Wiley, 1971, 384-388.

N. De L. H. Miller, "Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics", *Journal of the American Statistical Association", 51* (1956), 111-121. Reimpresa con autorización de la American Statistical Association. La tabla que se imprime aquí sigue el formato encontrado en W. J. Conover, *Practical Nonparametric Statistics,* © 1971, por John Wiley & Sons, Inc.

O. De W. H. Kruskal y W. A. Wallis, "Use of Ranks in One-Criterion Analysis of Variance", *Journal of the American Statistical Association, 47* (1952), 583-621; errata, íbidem, *48* (1953), 907-911. Reimpresa con autorización de la American Statistical Association.

P. De M. Friedman, "The Use of Ranks to Avoid the Assumption of Normality Implicit in the Analysis of Variance", *Journal of the American Statistical Association, 32* (1937), 675-701. Reimpresa con autorización.

Q. De Gerald J. Glasser y Robert F. Winter, "Critical Values of the Coefficient of Rank Correlation for Testing the Hypothesis of Independence", *Biometrika 48* (1961), 444-448. Utilizada con autorización. La tabla que se reimprime aquí incluye las correcciones dadas en W. J. Conover, *Practical Nonparametric Statistics,* © 1971, por John Wiley & Sons, Inc.

Respuestas a los ejercicios de número impar

Capítulo 1

1.4.1. Intervalos de clase sugeridos:55–59, 60–64, . . . , 80–84.
1.4.3. Intervalos de clase sugeridos:80–89, 90–99, . . . , 140–149.
1.4.5. Intervalos de clase sugeridos:0–2, 3–5, 6–8, 9–11, 12–14, 15–17.
1.5.1. (a) 65.1 (b) 65 (c) 65.
1.5.3. (a) 9.4 (b) 11.
1.5.5. Pollo.
1.6.1. (a) 16 (b) 19.66 (c) 4.4.
1.6.3. (a) 12 (b) 17.83 (c) 4.2 (d) 44.68.
1.8.1. (a) 66.9 (b) 66.6 (c) 65–69 (d) 46.45 (e) 6.8.
1.8.3. (a) 117.33 (b) 116.46 (c) 110–119 (d) 217.26 (e) 14.7.
1.8.5. (a) 6.53 (b) 5.85 (c) 15.1182 (d) 3.89

Ejercicios de repaso

21. $\bar{x} = 23.07$ Mediana = 22 $s^2 = 54.92$ $s = 7.4$.
23. $\bar{x} = 9.42$ Mediana = 9.45 $s^2 = 2.90$ $s = 1.7$.
25. $\bar{x} = 35.23$ Mediana = 35.64 $s^2 = 168.0360$ $s = 12.96$.

Capítulo 2

2.4.1. (a) 160 (b) 26 (c) 688 (d) 308 (e) 1025 (f) 263.
2.5.1. (a) 30 (b) 210 (c) 30,240 (d) 15 (e) 35 (f) 252 (g) 56 (h) 126 (i) 10.
2.5.3. 120.
2.5.5. 6.
2.5.7. 4.
2.5.9. 560.
2.6.1. (a) .16 (b) .03 (c) .67 (d) .30 (e) .995 (f) .26.
2.6.3. (a) .45 (b) .41 (c) .10 (d) .04.
2.6.5. .95.

Ejercicios de repaso

11. (a) 30 (b) 54 (c) 33 (d) 85 (e) 100 (f) 77 (g) 7 (h) 80.
13. .64.
15. .49.

Capítulo 3

3.3.1. (a) .1484 (b) .8915 (c) .1085 (d) .2012.
3.3.3. (a) .9729 (b) .9095 (c) .7827 (d) .0271.

3.4.1. (a) .176 (b) .384 (c) .440 (d) .427.
3.4.3. (a) .105 (b) .032 (c) .007 (d) .440.
3.6.1. .4236
3.6.3. .2912.
3.6.5. .0099.
3.6.7. .95.
3.6.9. .901.
3.6.11. (a) .6826 (b) .6915 (c) .5675.
3.6.13. (a) .3446 (b) .3446 (c) .5762.
3.6.15. (a) .3413 (b) .1056 (c) .0062 (d) .3830.

Ejercicios de repaso

15. .1719.
17. (a) .0916 (b) .0905 (c) .9095 (d) .1845 (e) .2502.
19. (a) .762 (b).238 (c) .065
21. (a) .0668 (b) .6247 (c) .6826.
23. (a) .0013 (b) .0668 (c) .8931.
25. 57.10.

Capítulo 4

4.4.1. (a) .9772 (b) .9544 (c) .0082 (d) .0082.
4.4.3. (a) .1814 (b) .8016 (c) .0643.
4.4.5. (a) .5 (b) .7333 (c) .9772.
4.4.7. $\mu_{\bar{x}} = 5$; $\sigma_{\bar{x}}^2 = 3$
4.5.1. .1379.
4.5.3. .0038.
4.6.1. (a) .0808 (b) .8384 (c) .2005.
4.6.3. .0823.
4.6.5. (a) .1539 (b) .3409 (c) .5230.
4.7.1. .008.

Ejercicios de repaso

13. .8664.
15. .0011.
17. .0082.
19. .8882.
21. .0019.

Capítulo 5

5.2.1. (a) 88, 92 (b) 87, 93 (c) 86, 94.
5.2.3. (a) 7.63, 8.87 (b) 7.51, 8.99 (c) 7.28, 9.22.
5.3.1. (a) −2.0, 13.0 (b) −3.5, 14.5 (c) −6.3, 17.3.

5.3.3. (a) 4, 10 (b) 3.5, 10.5 (c) 2.3, 11.7.
5.4.1. .04, .12; .03, .13; .01, .15.
5.4.3. .14, .34; .12, .36; .08, .40.
5.5.1. −.02, .10; −.03, .11; −.06, .14.
5.5.3. −.07, .19; −.09, .21; −.14, .26.
5.6.1. 5.76, 8.24; 5.46, 8.54; 4.76, 9.24.
5.6.3. 69.58, 76.42; 68.87, 77.13; 67.41, 78.59.
5.6.5. −4.33, 7.33; −5.50, 8.50; −7.86, 10.86. Use 40 df.
5.6.7. 2.1, 4.5; 1.8, 4.8; 1.3, 4.8.
5.6.9. d.f. ≈ 26; 24.7, 33.3.
5.7.1. 27, 16.
5.7.3. 19.
5.8.1. 683, 1068.
5.8.3. 385, 289.
5.9.1. $8.40 < \sigma^2 < 18.54$; $2.90 < \sigma < 4.31$.
5.9.3. $630{,}307.86 < \sigma^2 < 1{,}878{,}027.08$; $793.92 < \sigma < 1{,}370.41$.
5.9.5. $1.37 < \sigma^2 < 4.35$; $1.17 < \sigma < 2.09$.
5.10.1. $1.48 < (\sigma_2{}^2/\sigma_1{}^2) < 9.76$.
5.10.3. $.49 < (\sigma_1{}^2/\sigma_2{}^2) < 2.95$.
5.10.5. $.90 < (\sigma_1{}^2/\sigma_2{}^2) < 3.52$.

Ejercicios de repaso

13. $\bar{x} = 79.87$ $s^2 = 28.1238$ $s = 5.30$ 76.93, 82.81.
15. $\tilde{p} = .30$ .19, .41.
17. $\tilde{p}_1 = .20$ $\tilde{p}_2 = .54$ .26, .42.
19. $\tilde{p} = .90$ .87, .93.
21. $\bar{x} = 19.23$ $s^2 = 20.2268$ 16.01, 22.45.
23. −12.219, −7.215

Capítulo 6

6.2.1. Sí, $z = 3$ $p = .0013$.
6.2.3. Sí,, $z = 2.67$ $p = .0038$
6.2.5. Sí,, $z = -5.73$ $p < 0.0001$
6.2.7. No, $t = -1.5$ $.05 < p < .10$
6.2.9. Sí, $z = 3.08$ $p = .0010$
6.2.11. $t = 4$, $p < .005$.
6.2.13. $t = .1271$, $p > .20$
6.3.1. Sí, $z = -11.91$ $p \approx 0$
6.3.3. $s_p{}^2 = 29.30$, $t = -3.62$ Se rechaza H_0 $p < 2(.005) = .01$.
6.3.5. No se rechaza H_0 $z = 1.40$ $p = 2(.0808) = .1616$.
6.3.7. $s_p{}^2 = 5421.25$ $t = -6.66$ Se rechaza H_0 $p < 2(.005) = .010$.

6.3.9. $z = 3.39$ Se rechaza H_0 $p = 2(1 - .9997) = .0006$
6.3.11. $t = -3.3567, p < .005$.
6.4.1. Sí, $t = 16.63$ $p < .005$.
6.4.3. Se rechaza H_0 $t = -3.45; -.5, -.1$ $p < 2(.005) = .010$.
6.5.1. Se rechaza H_0 $z = 3.26$ $p < .0010$.
6.5.3. Sí, $z = -8.94$ $p < .0010$.
6.6.1. $\bar{p} = .66$ $z = 2.45$ Se rechaza H_0
$p = .0142$.
6.6.3. $\bar{p} = .27$ $z = 2.90$ Se rechaza H_0
$p = .0038$.
6.7.1. Sí, $\chi^2 = 54$ $p < .005$.
6.7.3. $\chi^2 = 6.75$ No se rechaza H_0 $p > .05$ (prueba bilateral)
6.7.5. $\chi^2 = 28.8$ No se rechaza H_0 $p > .10$.
6.8.1. No R. V. $= 2.08$ $p > .10$.
6.8.3. No R. V. $= 1.83$ $p > .10$.
6.8.5. Se rechaza H_0 R. V. $= 4$ $.01 < p < .025$.

Ejercicios de repaso

19. $\bar{d} = .40$ $s_d^2 = .2871$ $s_d = .54$ $t = 2.869$ $.005 < p < .01$.
21. $z = 1.095$ $1379 > p > .1357$.
23. $t = 3.873$ $p < .005$.
25. $\bar{d} = 11.49$ $s_d^2 = 256.6790$ $s_d = 16.02$ $t = 2.485$ $.025 > p > .01$.

Capítulo 7

7.2.1. Sí, R. V. $= 6.03$ $p < .005$.
7.2.3. Sí, R. V. $= 67.80$ $p < .005$.
7.2.5. No R. V. $= 4.70$ $.025 > p > .01$.
7.2.7. $\bar{x}_A - x_C$ y $\bar{x}_B - \bar{x}_C$ son significativos.
7.2.9. $\bar{x}_D - \bar{x}_E$ y $\bar{x}_A - \bar{x}_E$ son significativos
7.2.11. R. V. $= 11.5808, p < .005$. $\bar{x}_A - \bar{x}_C$ significativo; $\bar{x}_B - \bar{x}_C$ significativo; $\bar{x}_B - \bar{x}_D$ significativo.
7.3.1. Sí, R. V. $= 13.17$ $p < .005$.
7.3.3. Sí, R. V. $= 30.22$ $p < .005$.
7.3.5. R. V. $= 276.64$ $p < .005$.
7.4.1. (a) R. V. $(A) = 38.78$, R. V. $(B) = 21.57$, R. V. $(AB) = 2.24$
(b) $\alpha < .03$ $p(A) < .005$ $p(B) < .005$ $.10 > p(AB) > .05$.
7.4.3. R. V. $(A) = 5.84$, R. V. $(B) = 44.34$, R. V. $(AB) = 30.09$
$.025 > p(A) > .01$ $p(B) < .005$ $p(AB) < .005$.

Ejercicios de repaso

3. R. V. $= 8.042$ Se rechaza H_0 $p < .005$.
5. R. V. $= .825$ No se rechaza H_0 $p > .10$.

7. R. V. $(A) = 6.325$ $.005 < p(A) < .01$ $p(B) < .005$
$.01 > p(AB) > .005$; R. V. $(B) = 38.856$; R. V. $(AB) = 4.970$.
9. R. V. $= 14.4364, p < .005$.
11. R. V. $= 6.32049, .01 > p > .005$.
13. R. V. $= 3.1187, .05 > p > .025$. No hay diferencias significativas entre los pares de medias individuales.
15. R. V. $(A) = 29.4021, p < .005$; R. V.$(B) = 31.4898, p < .005$; R. V. $(AB) = 7.11596, p < .005$.

Capítulo 8

8.3.1. $y_c = 7.05 + 4.09x$.
8.3.3. $y_c = 1.36 - .008x$.
8.3.5. $y_c = 106.67 - 1.54x$.
8.4.1. (a) .90 (b) R. V. $= 103.41$ $(p < .005)$ (c) $t = 10.17$ $(p < .01)$
(f) 3.21, 4.97.
8.4.3. (a) .94 (b) R. V. $= 152.42$ $(p < .005)$ (c) $t = -12.29$ $(p < .01)$
(f) $-.009, -.007$.
8.4.5. (a) .78 (b) R. V. $= 28.91$ $(p < .005)$ (c) $t = -5.38$ $(p < .01)$
(f) $-2.2, -.88$.
8.5.1. (a) $15.23 \pm (2.2010)(1.3558)(.2774)$
(b) $15.23 \pm (2.2010)(1.3558)(1.0377)$.
8.5.3. (a) $.96 \pm (2.2622)(.0341)(.3162)$
(b) $.96 \pm (2.2622)(.0341)(1.0488)$.
8.5.5. (a) $98.97 \pm (2.3060)(2.6004)(.3210)$
(b) $98.97 \pm (2.3060)(2.6004)(1.0503)$.
8.7.1. (b) .90 (c) $t = 7.44$ $(p < .01)$ .719, .966.
(Se utilizó interpolación lineal)
8.7.3. (b) .93 (c) $t = 7.16$ $(p < .01)$ .725, .983.
(Se utilizó interpolación lineal)
8.7.5. (b) .54 (c) $t = 3.08$ $(p < .01)$ .184, .771.
(Se utilizó interpolación lineal)

Ejercicios de repaso

17. $r = -.74$ $t = -4.67$
19. $y_c = 19.41 + .9895x$ $r^2 = .9994$ $t = 144.89$.

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.
Regresión	1364.4880	1	1364.4880	20,992.123
Residual	.8453	13	.0650	
Total	1365.3333	14		

21. $y_c = 1.2714 + .8533$ $r^2 = .6878$ $t = 5.35$.

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.
Regresión	1.6498	1	1.6498	28.64
Residual	.7489	13	.0576	
Total	2.3987	14		

23. $y_c = 61.8819 + .509687x$; R. V. $= 4.285$; $.10 > p > .05$; $t = 2.07$; $.10 > p > .05$; intervalo de confianza aproximado del 95% para ρ: $-.03, .79$; 110.3022; 87.7773, 132.8271.

25. $y_c = 37.4559 + .0798579x$; R. V. $= 3.957$; $p < .005$; $t = 8.6013$; $p < .01$; intervalo de confianza aproximado del 95% para ρ: .80, .99; 40.6150, 42.2826.

Capítulo 9

9.3.1. $y_c = 4639.56 - 244.43x_1 - 422.93x_2$.

9.3.3. $y_c = 13.45 + 4.02x_1 + 2.81x_2$.

9.3.5. $y_c = -422.00 + 11.17x_1 - .63x_2$.

9.4.1. (a) .93.

(b)

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.	p
Regresión	8,247,389.5	2	4,123,694.80	49.57	$< .005$
Residual	582,308.5	7	83,186.93		
Total	8,829,698.0	9			

(c) $t(b_1) = -3.45$, $t(b_2) = -3.22$ ($.01 < p < .02$ para ambas pruebas)

9.4.3. (a) .67.

(b)

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.	p
Regresión	452.56	2	226.28	7.05	$.01 < p < .025$
Residual	224.70	7	32.10		
Total	677.26	9			

(c) $t(b_1) = 3.75$; ($p < .01$); $t(b_2) = 2.04$, ($.05 < p < .10$)

9.4.5. (a) .31.

(b)

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.	p
Regresión	17,023.01	2	8,511.505	4.89	$.01 < p < .025$
Residual	38,276.99	22	1,739.86		
Total	55,300.00	24			

(c) $t(b_1) = 3.05, (p < .01)$; $t(b_2) = -.67, (p > .20)$.

9.5.1. (a) $2148.62 \pm (2.3646)(288.42)$
$$\times \sqrt{\tfrac{1}{10} + (.060319)(.8)^2 + (.207378)(-.7)^2 + 2(-.086740)(.8)(-.7)}.$$
(b) Sume 1 dentro del radical

9.5.3. (a) $50.41 \pm (2.3646)(5.67)$
$$\times \sqrt{\tfrac{1}{10} + (.035757)(-1.99)^2 + (.059206)(.44)^2 + 2(.022857)(-1.99)(.44)}.$$
(b) Sume 1 dentro del radical

9.5.5. (a) $532.90 \pm 2.0739(41.71)$
$$\times \sqrt{\tfrac{1}{25} + (.007678)(-.52)^2 + (.000506)(-2.12)^2 + 2(-.000002)(-.52)(-2.12)}.$$
(b) Sume 1 dentro del radical

9.6.1. (a) $b_0 = 36.5323$, $b_1 = 6.4758$, $b_2 = -.5749$, $R_{y.12} = .9976$,
$F = 933$ $(p < .005)$
(b) $r_{y1.2} = .505$, $t = 1.755$ $(.20 > p > .10)$
$r_{y2.1} = -.084$, $t = -.253$ $(p > .20)$
$r_{12.y} = .902$, $t = 6.268$ $(p < .01)$.

9.6.3. (a) $b_0 = -422.00$, $b_1 = 11.17$, $b_2 = -.63$, $R_{y.12} = .5548$
$F = 4.89$ $(.01 < p < .025)$
(b) $r_{y1.2} = .546$, $t = 3.056$ $(p < .01)$
$r_{y2.1} = -.142$, $t = -.673$ $(p > .20)$
$r_{12.y} = .078$, $t = .367$ $(p > .20)$.

Ejercicios de repaso

7. $R = .3496$ $F = .83$ $(p > .10)$.

9. (a) $y_c = 11.43 + 1.26x_1 + 3.11x_2$
(b) $R^2 = .92$.
(c)

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.	p
Regresión	1827.004659	2	913.50	69.048	$< .005$
Residual	158.728641	12	13.23		
	1985.7333	14			

(d) $y_c = 11.43 + 1.26(10) + 3.11(5) = 39.56$.

11. (a) $y_c = -126.487 + .176285x_1 - 1.56304x_2 + 1.5745x_3 + 1.62902x_4$

(b)

Fuente	SC	g. l.	CM	R. V.	p
Regresión	30873.80	4	7718.440	13.655	$<.005$
Residual	5774.92	10	577.492		
	36648.72	14			

(c) $t_1 = 4.3967$; $t_2 = -.77684$; $t_3 = 3.53284$; $t_4 = 2.59102$
(d) $R^2_{y.1234} = .8424255$; $R_{y.1234} = .911784$

Capítulo 10

10.3.1. $X^2 = 2.072 \quad p > .995$.
10.3.3. $X^2 = 3.417 \quad p > .10$.
10.3.5. $X^2 = 2.21 \quad p > .10$.
10.4.1. $X^2 = 27.272 \quad p < .005$.
10.4.3. $X^2 = .765 \quad p > .10$.
10.4.5. $X^2 = 42.579 \quad p < .005$.
10.5.1. $X^2 = 65.855 \quad p < .005$.
10.5.3. $X^2 = 32.754 \quad p < .005$.

Ejercicios de repaso

11. $X^2 = 10.7827 \quad p < .005$.
13. $X^2 = 3.4505 \quad p > .10$.
15. $X^2 = 8.1667 \quad p < .005$.
17. $X^2 = 67.8015 \quad p < .005$.
19. $X^2 = 7.2577 \quad .05 > p > .025$.
21. Independencia.
23. Homogeneidad.

Capítulo 11

11.3.1. $P = .3036 \quad p = .3036$.
11.4.1. $X^2 = 16.13 \quad p < .005$.
11.5.1. $T = 71 \quad p > .20$.
11.6.1. $D = .3241 \quad p < .01$.
11.6.3. $D = .1319 \quad p > .20$.
11.7.1. $H = 19.55 \quad p < .005$.
11.7.3. $H = 23.0375 \quad p < .005$.
11.7.5. $H = 13.86 \quad p < .005$.
11.7.7. $H = 14.75 \quad .01 > p > .005$.

11.8.1. $\chi_r^2 = 8.67 \quad p = .01.$
11.8.3. $\chi_r^2 = 13.74 \quad p < .005.$
11.8.5. $\chi_r^2 = 11.1 \quad p = .00094.$
11.8.7. $\chi_r^2 = 7.28 \quad p \approx .054.$
11.9.1. $r_s = -0.07 \quad p > .20.$
11.9.3. r_s(corregida por empates $= .95.$ $p < .002.$
11.9.5. $r_s = .99 \quad p < .001$

Ejercicios de repaso

9. $P(X \leq 1 \mid 10, .5) = 1 - .9893 = .0107 \quad p = .0127.$
11. $\chi_r^2 = 16.2 \quad p < .005.$
13. $D = .1587 \quad p > .20.$

Capítulo 12

12.2.1. (a) 10.4 (b) 10.1, 11.0 (c) 16.1 (d) 21.5 (e) 16.9 (f) 47.6 (g) 15.2, 27.3.
12.3.1. (a) 97.0, 165.4, 125.0, 62.4, 25.8, 3.5. (b) 2413 (c) 485; 1312; 1937; 2249; 2378; 2413. (d) 76.5.

Indice

E

F

G

H

I

L

M

N

O

P

R

S

T

—o0o—

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
27 DE FEBRERO DE 1991, EN LOS TALLERES DE
TECNOIMPRESOS LARC, AHUEHUETES 69
COL. SAN BARTOLO ATEPEHUACAN
MÉXICO, D.F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 4 000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN