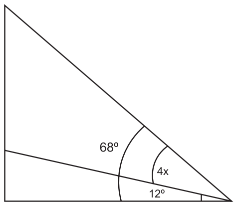
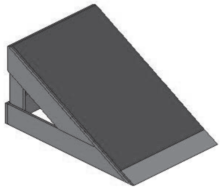
SITUACIÓN DIDÁCTICA

Rampas para patinar

Felipe está construyendo dos rampas rectas de *skate* como las de la siguiente figura. Si coloca una sobre otra tendrán ángulos de elevación de 12° y de 4x° respectivamente y la suma de los dos ángulos es de 68°.





¿Podrías ayudarle a encontrar el valor del ángulo de elevación de la rampa superior?

PUNTOS Y RECTAS

Un punto tiene ubicación, pero no tamaño. Se utilizan mayúsculas para nombrar un punto.

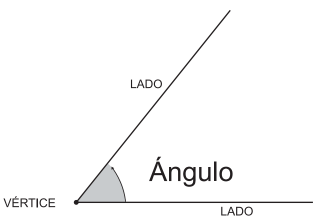
Una recta es un conjunto infinito de puntos. La distancia entre cualesquier dos puntos en una recta se puede medir. Una recta *AB*, representada simbólicamente mediante $\overleftrightarrow{AB}$.

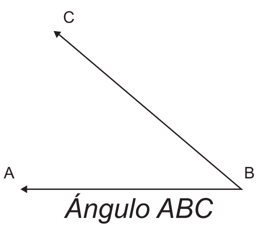
DEFINICIÓN DE ÁNGULOS

Un ángulo es la abertura formada por dos semirrectas unidas en un solo punto llamado vértice.

A los lados del ángulo se les conoce como lado inicial y lado final, los cuales se determinan, siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura, en cuyo caso decimos que el sentido es positivo; en caso contrario, el sentido será negativo.

Convencionalmente, la manera de nombrar un ángulo es de la forma *ABC*, siendo *B* la letra que corresponde al punto que es el vértice. El ángulo $\angle ABC$, también se conoce como $\angle B$ (utilizando sólo el vértice).

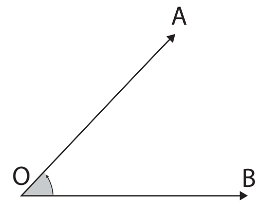
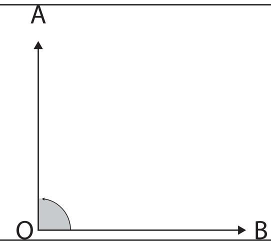
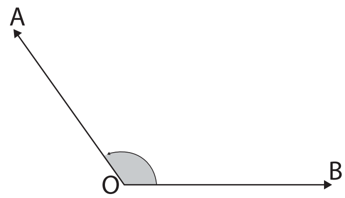
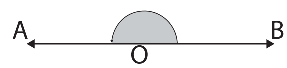
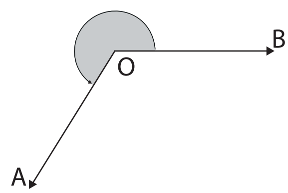
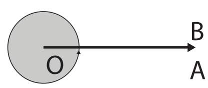




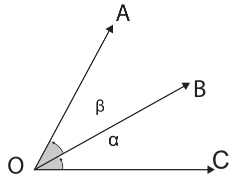
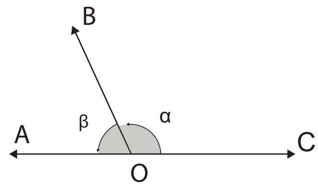
El tamaño de un ángulo es independiente de la medida de sus lados, ya que sólo depende de la medida de la abertura que se forma al mover uno de sus lados.

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

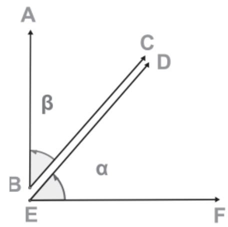
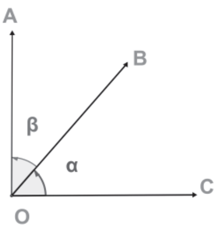
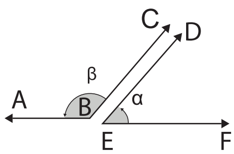
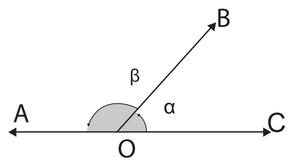
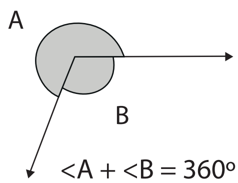
A) Por la magnitud de su abertura, los triángulos se clasifican de la siguiente manera:

Nombre	Característica	Figura
Ángulo agudo	Es menor de 90°	
Ángulo recto	Mide exactamente 90°	
Ángulo obtuso	Es mayor de 90° pero menor de 180°	
Ángulo llano	Mide exactamente 180°	
Ángulo entrante	Es mayor de 180° pero menor de 360°	
Ángulo perigonal	Mide exactamente 360°	

B) Por la posición de sus lados

Consecutivos	Son aquellos que tienen un lado y el vértice común.	
Adyacentes	Son aquellos que tienen un lado y el vértice en común, y los lados no comunes son colineales, es decir, se encuentran sobre la misma recta.	

C) Por la suma de sus medidas

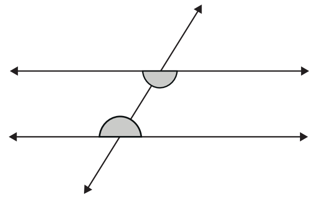
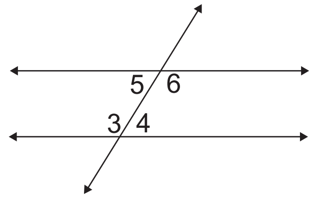
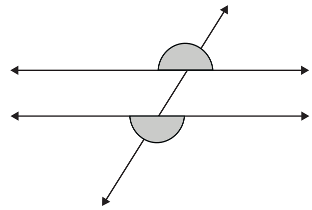
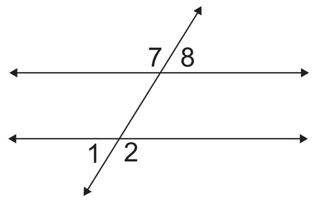
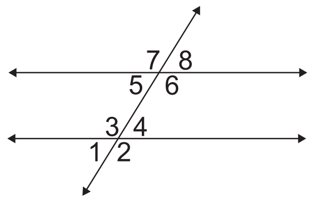
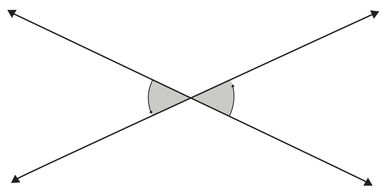
Complementarios	Si suman 90°, pueden ser adyacentes o no.	 
Suplementarios	Si suman 180°, pueden ser adyacentes o no.	 
Ángulos conjugados	Son ángulos que sumados dan 360°.	 <A + <B = 360º

ACTIVIDAD 1 Completa la siguiente tabla utilizando solamente ángulos positivos.

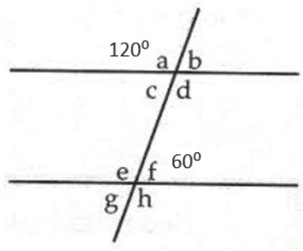
Ángulo	Complemento	Suplemento
$\angle 1 = 29°$		
$\angle 2 = 58°$		
$\angle 3 = 166°$		
$\angle 4 = 158°$		

A) Ángulos formados por la posición entre dos rectas paralelas y una secante.

- Si dos rectas son perpendiculares y forman entre ellas ángulos de 90°, se escribe: $L_1 \perp L_2$.
- Si dos rectas son paralelas, es decir, nunca se cortan, se escribe: $L_1 \parallel L_2$

Ángulos internos	Quedan dentro de las dos rectas paralelas que son cortadas por una secante.	
Ángulos alternos internos	Están dentro de las paralelas, a uno y otro lado de la secante pero no son adyacentes. Estos ángulos son iguales: $\angle 3$ y $\angle 6$ $\angle 4$ y $\angle 5$	
Ángulos externos	Quedan fuera de las dos rectas paralelas.	
Ángulos alternos externos	Se encuentran fuera de las paralelas, a uno y otro lado de la secante pero no son adyacentes. Estos ángulos son iguales: $\angle 1$ y $\angle 8$ $\angle 2$ y $\angle 7$	
Ángulos correspondientes	Están situados del mismo lado de la secante, uno de los cuales es interno y el otro externo. Podemos ubicar cuatro parejas de ángulos que tienen la propiedad de ser iguales. $\angle 1$ y $\angle 5$ $\angle 3$ y $\angle 7$ $\angle 2$ y $\angle 6$ $\angle 4$ y $\angle 8$	
Ángulos opuestos por el vértice	Se forman al intersectarse dos rectas, pero que no son adyacentes. Se encuentran uno frente al otro. Otra forma de definirlos es: aquellos ángulos en los que uno se forma con la prolongación de los lados del otro, y que comparten el vértice. Son iguales.	

Para expresar los ángulos descritos antes, realizaremos el siguiente ejemplo:



Los ángulos *a* y d, son ángulos opuestos por el vértice, por lo tanto:

$$< a =< d = 120°$$

Y el ángulo *f* y el ángulo *c* son ángulos alternos internos, por lo tanto:

$$< c =< f = 60°$$

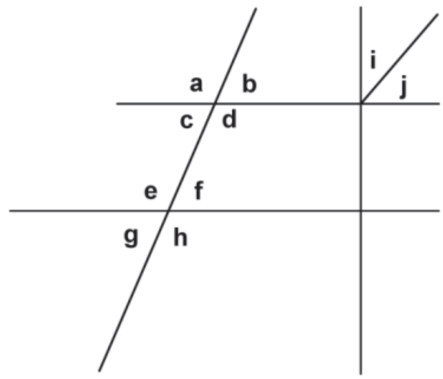
Por lo que el ángulo *c* y el ángulo *g* son correspondientes, por lo tanto:

$$< c =< g = 60°$$

ACTIVIDAD 2 Escribe en la línea la letra o letras que correspondan a las definiciones de ángulos entre paralelas dadas, según corresponda con la figura.

Ángulos:

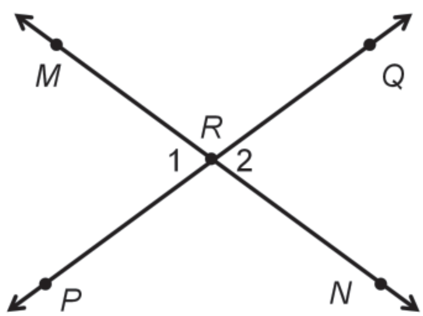
1. Alternos internos (,) (,)
2. Alternos externos (,) (,)
3. Correspondientes (,) (,) (,) (,)
4. Opuestos por el vértice (,) (,) (,) (,)
5. Adyacentes (,) (,) (,) (,)
6. Complementarios (,)
7. Suplementarios (,) (,) (,) (,)
8. Consecutivos (,)



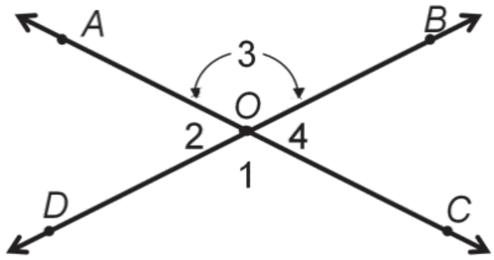
ACTIVIDAD 3 De manera individual realiza un ***collage*** con imágenes donde identifiques, remarques y nombres los distintos tipos de los ángulos estudiados. Busquen al menos 10 imágenes.

ACTIVIDAD 4

1.- Cuando dos rectas se cruzan (intersectan), tienen exactamente un punto en común. En el dibujo, ¿cuál es el punto de intersección? ¿A qué clasificación corresponden según sus características los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$?



En los ejercicios 2 al 5 utiliza el esquema siguiente:



2) Si $\angle 1=125°$, encuentra $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$.

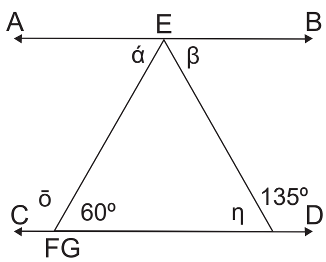
3) Si $\angle 2=47°$, encuentra $\angle 1$, $\angle 3$ y $\angle 4$.

4) Si $\angle 1= 3x+10$ y $\angle 3=4x-30$, encuentra x y el $\angle 1$.

5) Si $\angle 2= \frac{x}{2}-10$ y $\angle 3 = \frac{x}{3} + 40$, encuentra x y el $\angle 2$.

6) Calcula los valores de los ángulos en la siguiente gráfica. Considera que las rectas AB y CD son paralelas.

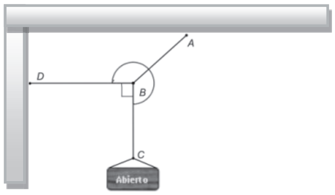
α= β= δ= η=



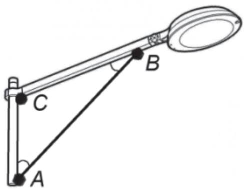
7) Un reloj marca las 03:00 horas. ¿Qué valor tiene el ángulo que forman las manecillas? Escribe tu resultado considerando el ángulo positivo y negativo.

8) Encuentra las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo, de tal manera que uno de sus ángulos sea 36° mayor que el otro.

9) En el anuncio suspendido los tres ángulos ($\angle$ABD, $\angle$ABC Y $\angle$DBC) en el vértice B suman 360°. Si m$\angle$DBC=90° y $\overline{BA}$ bisecta (mitad del ángulo) el ángulo reflejo indicado, encuentra $\angle$ABC.



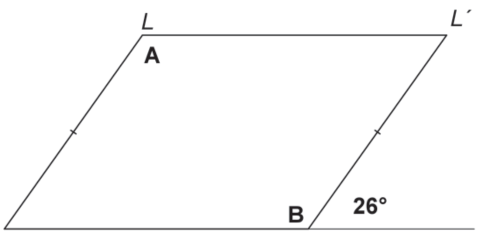
10) Un poste de alumbrado tiene un diseño tal que $\angle$C=110° y $\angle A \cong \angle B$. Encuentra $\angle$A y $\angle$B.



ACTIVIDAD 5 Dadas las siguientes figuras, obtén el valor de las incógnitas, usando las propiedades de los ángulos. Justifica tus respuestas.

a)

Dado $L \parallel L'$

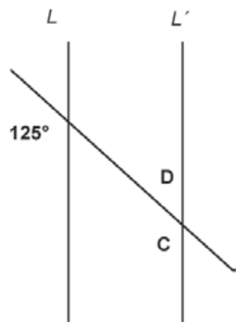


$\angle$A =_________

$\angle$B =_________

b)

Dado $L \parallel L'$

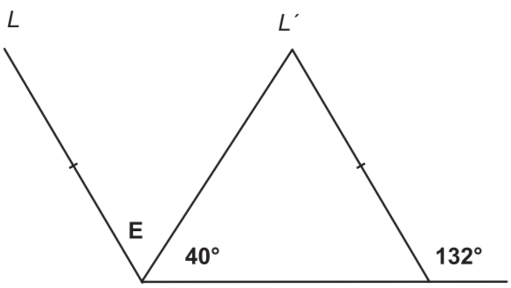


$\angle$C =_________

$\angle$D =_________

c)

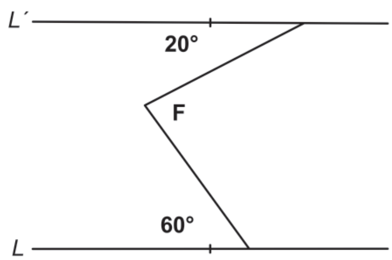
Dado $L \parallel L'$



$\angle$E =_________

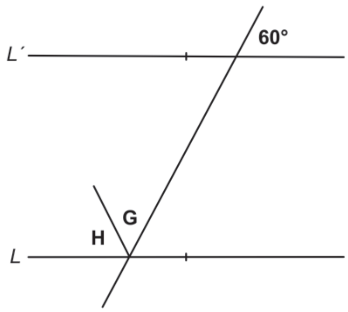
d)

Dado $L \parallel L'$



$\angle$F =_________

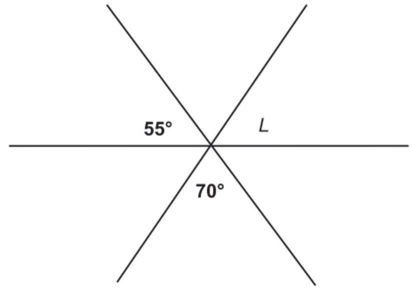
e)



Supón ∠ G = ∠ H y que L ‖ L´

∠ G =_________

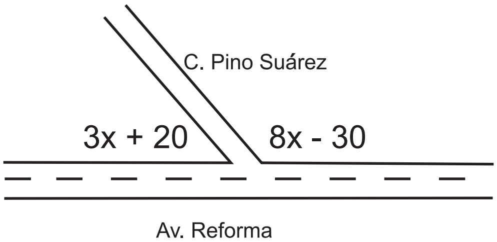
f)



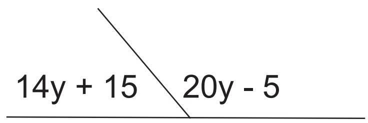
∠ L=_________

ACTIVIDAD 6 Resuelve los siguientes ejercicios de ángulos.

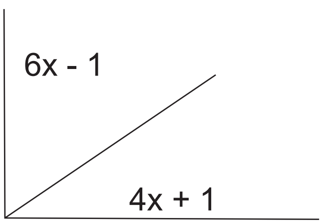
a)



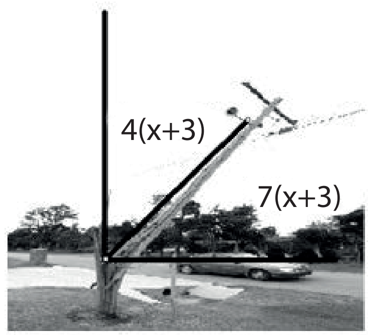
b)



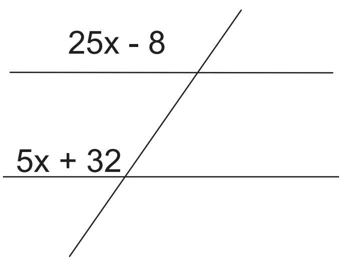
c)



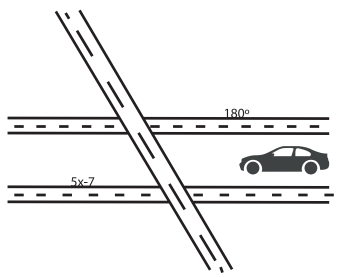
d)



e)



f)



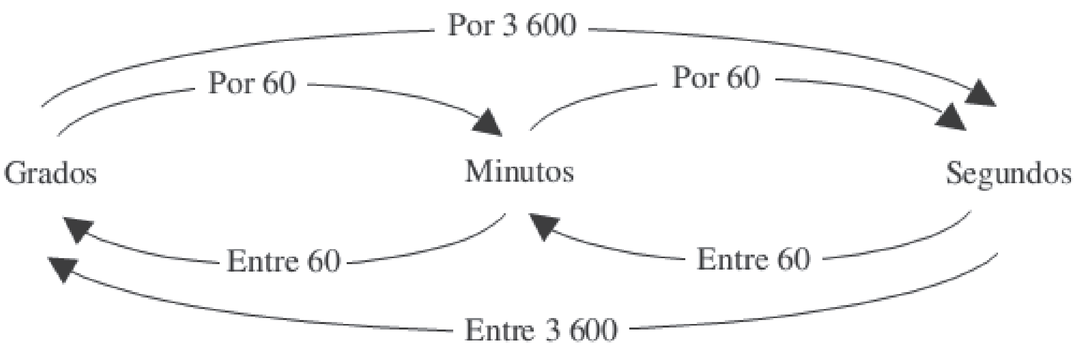
SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Para medir la magnitud de un ángulo generalmente se utilizan dos sistemas: el sexagesimal y el circular.

Sistema sexagesimal

La unidad de medida del sistema sexagesimal es el *grado*, que se obtiene de la siguiente manera: Se divide la circunferencia en 360 partes iguales; cada una de estas divisiones se llama GRADO. Cada grado se puede dividir en 60 partes iguales llamadas minutos y a su vez cada minuto se divide en otras 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos que se utilizan para estas unidades son:

GRADOS: º Ejemplo: 50º
MINUTOS: ‘ 50º 10’
SEGUNDOS: “ 50º 10’ 5”



ACTIVIDAD 7 Convertir grados decimales a sexagesimales y viceversa.

Decimal a sexagesimal

a) 37.42º =

b) 20.83º =

c) 280.025º =

d) 12.25º =

e) 1.5º =

Sexagesimal a decimal

f) 25º10’ =

g) 350º59’60’ =

h) 37º25’12”=

i) 21º13’14”=

j) J) 20°1´1”=

Situación didáctica

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Algunas casas antiguas sobre todo en Europa, cuentan con techos en forma triangular. Observa las imágenes:

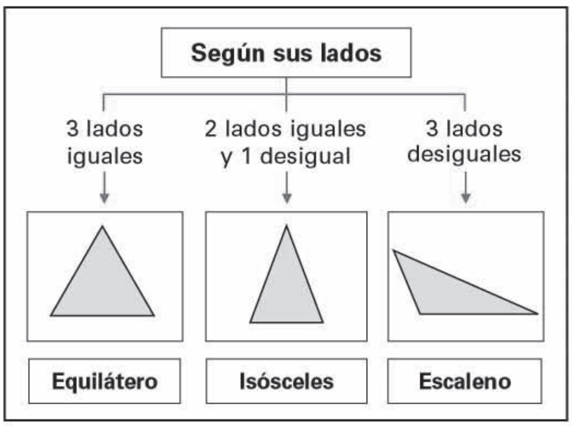

Casa 1

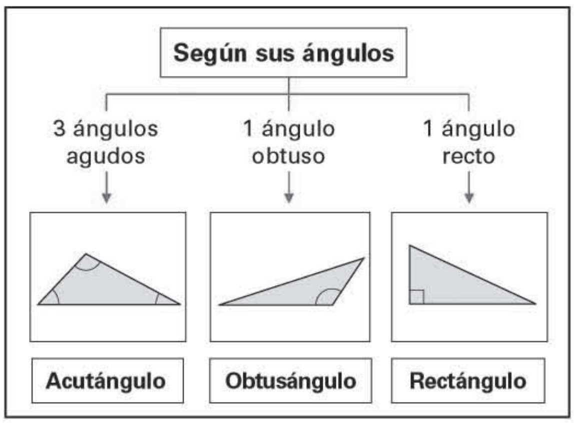

Casa 2


Casa 3

Un triángulo es la región limitada por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos.

Los triángulos, de acuerdo a la congruencia de sus lados, se clasifican en:



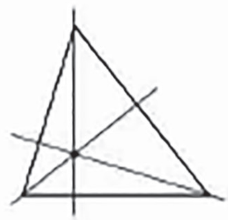


De acuerdo a las dos clasificaciones, ¿con qué triángulo relacionas el techo de cada casa?

Casa\Clasificación	Por la medida de sus lados	Por la medida de sus ángulos
1		
2		
3		

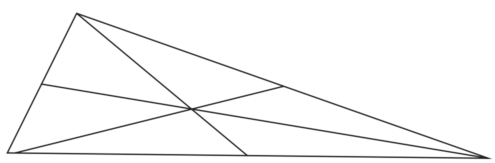
RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

En un triángulo existen elementos como las rectas y puntos que se describen a continuación para su estudio.

Mediatrices	Bisectrices
Llamamos **mediatrices** de un triángulo a las mediatrices de sus lados. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto denominado **circuncentro.** 	Llamamos **bisectrices** de un triángulo a las bisectrices de sus ángulos. Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto denominado **incentro.** 
Medianas	**Alturas**
Llamamos **medianas** de un triángulo a las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto denominado **baricentro.** 	Llamamos **alturas** de un triángulo a las rectas perpendiculares a cada uno de los lados (o a sus prolongaciones) desde el vértice opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto denominado **ortocentro.** 

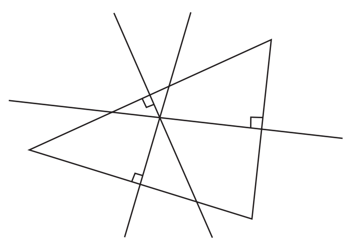
ACTIVIDAD 8 Hay cuatro puntos notables en un triángulo: ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro. Escribe debajo de cada uno de estos triángulos el punto notable que está dibujado. Indica también las rectas notables en cada caso.

a)



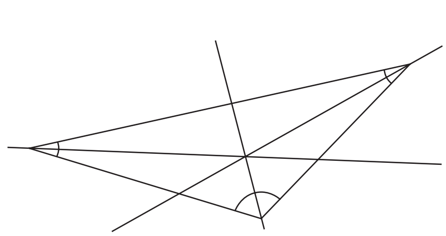
____

b)



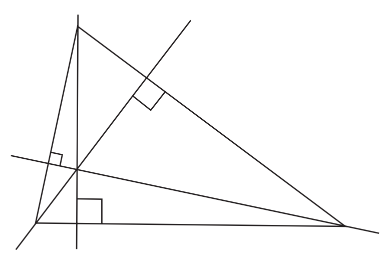
____

c)



____

d)

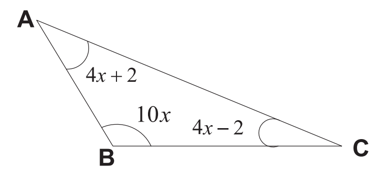


____

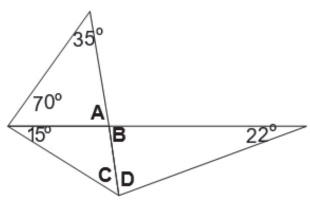
PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS

- La suma de sus ángulos internos es igual a 180º
- La suma de los ángulos agudos en un ángulo rectángulo es igual a 90º
- La medida de un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él.
- La suma de los ángulos externos es igual a 360º.

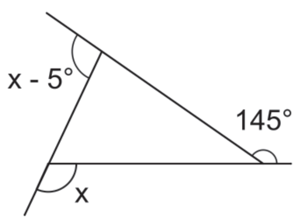
ACTIVIDAD 9 Responde correctamente las siguientes preguntas tomando en cuenta las figuras que se te presentan.



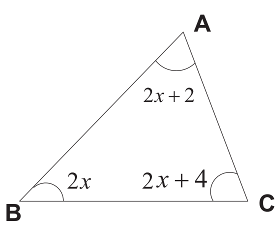
1. ¿Cuál es el valor de x?
2. ¿Cuál es el valor del ángulo A, B y C?



3. ¿Cuánto mide el ángulo A?
4. ¿Cuánto mide el ángulo C?
5. ¿Cuánto mide el ángulo D?



6. ¿Cuál es el valor de x?
7. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo?



8. ¿Cuál es el valor de x?
9. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo?

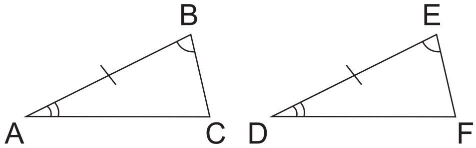
Criterios de congruencia en triángulos

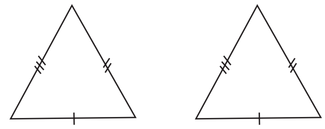
<u>Criterio LAL (Lado-ángulo-lado).</u> El criterio LAL nos dice que si, en una correspondencia de triángulos, dos lados de uno y el ángulo comprendido entre ellos son iguales a sus correspondientes elementos en el otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

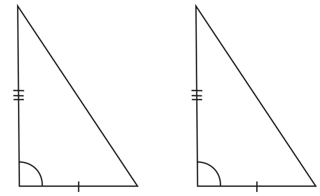
<u>Criterio LLL (Lado-lado-lado).</u> Este criterio afirma que si en una correspondencia de triángulos los lados correspondientes son iguales, entonces los triángulos serán congruentes.

<u>Criterio ALA (Ángulo-lado-ángulo).</u> Si en una correspondencia de triángulos, dos ángulos en uno de ellos y el lado común son iguales a sus correspondientes del otro triángulo, entonces los triángulos serán congruentes.

Ejercicio. Identifica los diferentes postulados de congruencia que se muestran en cada figura.





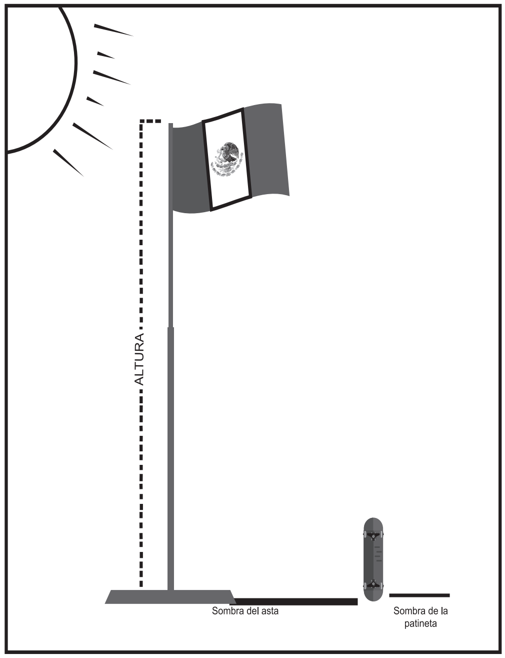


________________ ________________ ________________

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Altura del asta bandera

Josué está patinando cerca del asta bandera de su ciudad y se da cuenta que el asta proyecta una sombra de aproximadamente 12 m. Su patineta mide 0.7 m. y Josué la coloca verticalmente en el piso y observa que ésta proyecta una sombra de aproximadamente 0.6 m. ¿Crees que sea posible que Josué calcule la altura aproximada del asta bandera con estos datos?



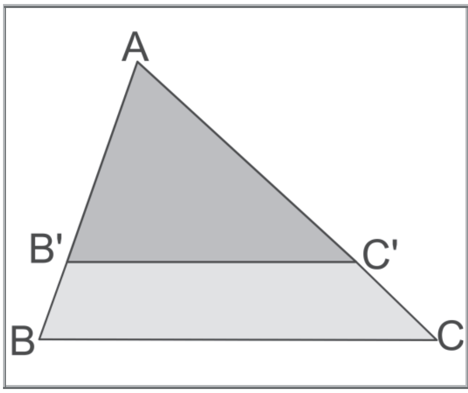
ACTIVIDAD 10 Abre la página interactiva sobre el Teorema de Tales.

http://www.librosvivos.net/smtc/hometc.asp?temaclave=1224

Elabora una **reflexión** sobre lo que viste en el video haciendo énfasis en la utilización del Teorema de Tales.

Teorema de Tales:

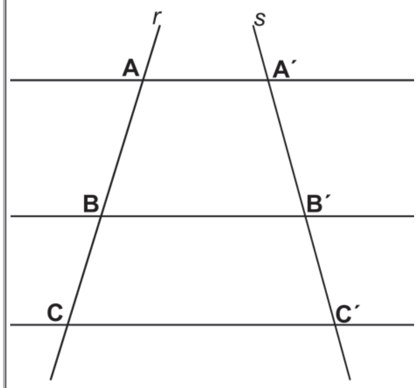
Como definición previa al enunciado del teorema, es necesario establecer *que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales entre sí.*



Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'**, cuyos **lados** son **proporcionales** a los del **triángulo ABC**.

Lo que se traduce en la fórmula:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

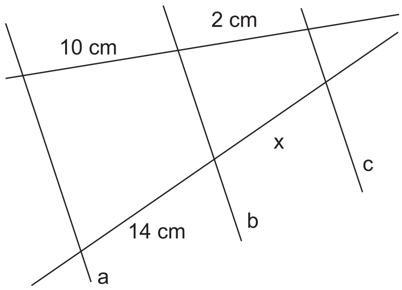


Del primer teorema de Tales se deduce además lo siguiente (realmente es otra variante de dicho teorema, y, a su vez, consecuencia del mismo):

Si dos rectas cualesquiera (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA', BB', CC') los segmentos determinados en una de las rectas (AB, BC) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra (A'B', B'C').

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Observa el siguiente ejemplo donde se aplica el Teorema de Tales.



$$\frac{14}{10} = \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{14 \cdot 2}{10} = 2{,}8 \text{ cm}$$

ACTIVIDAD 11 Después de haber leído lo anterior acerca del Teorema de Tales, responde:

1) Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivos __________ y sus lados correspondientes _____________________.

2) Establece la diferencia entre Congruencia y Semejanza.______________________________

____

3) Encuentra los valores de “x” en cada proporción:

a) $\frac{x}{6} = \frac{3}{x}$

e) $\frac{x-2}{x-5} = \frac{2x+1}{x-1}$

b) $\frac{x-5}{3} = \frac{2x-3}{7}$

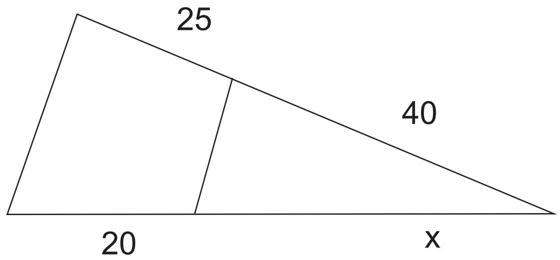
f) $\frac{x(x+5)}{4x+4} = \frac{9}{5}$

c) $\frac{6}{x+4} = \frac{2}{x+2}$

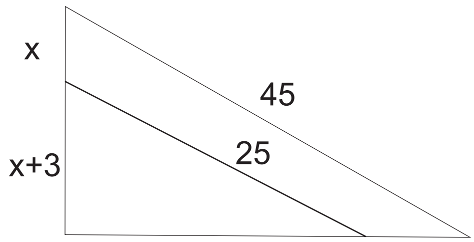
g) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{10}{3x-2}$

4) Aplicando el Teorema de Tales, calcula el valor de “x” y la medida de cada lado en los siguientes triángulos semejantes. Resuelve los problemas.

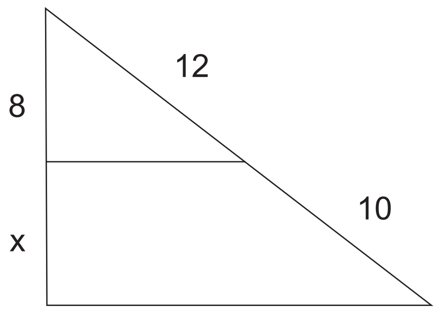
a)



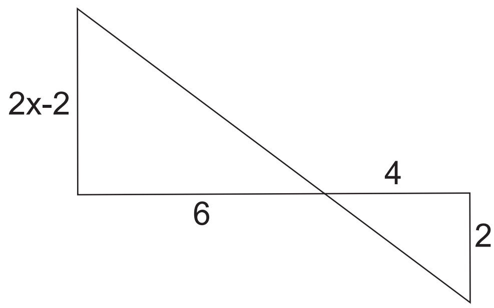
b)



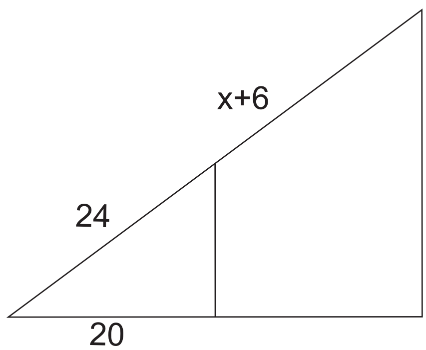
c)



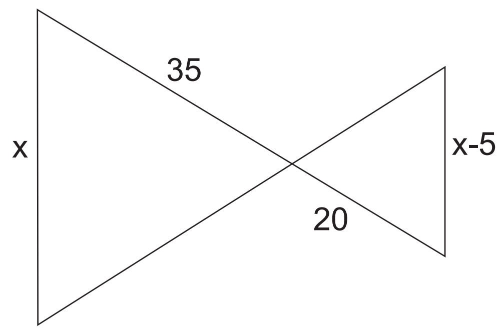
d)



e)

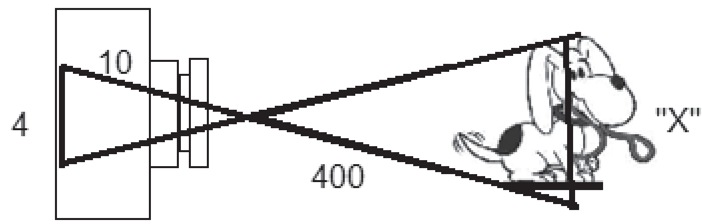


f)

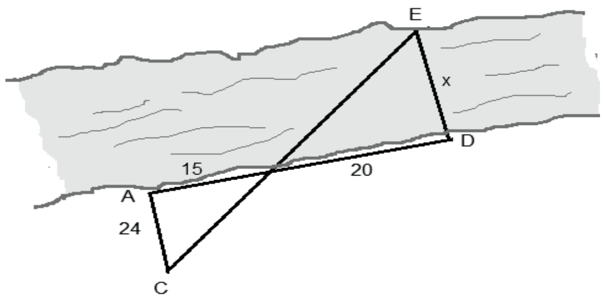


5) La sombra de un árbol de 1.56 m de altura es de 2.5 m; en ese mismo momento, otro árbol proyecta una sombra de 1.23 m. Encuentra su altura.

6) Cuando se toma una fotografía, la imagen que se forma en el negativo es semejante a la que se fotografía. Encuentra la dimensión real del objeto según los datos proporcionados.



7) Un ingeniero tomó las medidas indicadas en la figura para calcular el ancho de un río. Si AC y DE son perpendiculares a AD. ¿Cuál es el ancho del río?



8) Dos personas observan un automóvil desde dos edificios que se encuentran a 24 m de distancia uno del otro. El edificio de uno de los observadores mide 9 m de altura y el del otro observador 12 m. ¿A qué distancia se encuentra el automóvil de ambos observadores?

TEOREMA DE PITÁGORAS

ACTIVIDAD 12 Lee con atención la página sobre el Teorema de Pitágoras y realiza la actividad correspondiente:

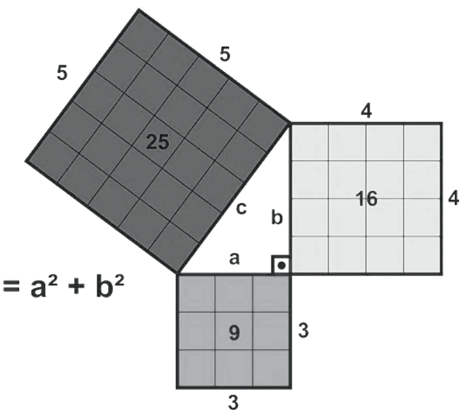
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html

a) En parejas, recorten dibujos o imágenes que tengan relación con un triángulo rectángulo.

b) De 5 de esos recortes, midan los tres lados y comprueben que cumplen con el Teorema de Pitágoras.

c) ¿Cómo podrías definir la hipotenusa y los catetos?

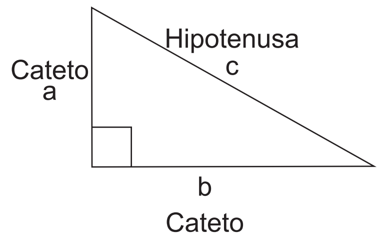
$c^2 = a^2 + b^2$



ACTIVIDAD 13

Resuelve los siguientes ejercicios, en forma individual, usando el Teorema de Pitágoras y usando de referencia la siguiente imagen:

a) En un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b, hallar la hipotenusa cuando:



a) $a = 5$, $b = 12$.
b) $a = 8$, $b = 15$.
c) $a = 4$, $b = 5$.
d) $a = 15$, $b = 20$.
e) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$.

b) En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es c, hallar el cateto desconocido cuando:

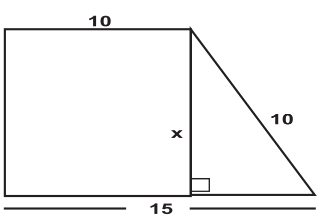
a) $a = 8$, $c = 10$
b) $b = 10$, $c = 26$
c) $a = 20$, $c = 25$
d) $b = 21$, $c = 29$
e) $a = 5$, $c = 5\sqrt{2}$

c) Hallar la altura de un triángulo isósceles si sus lados iguales miden 10 unidades y su base es:

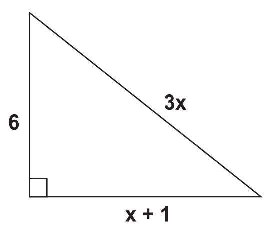
a) 12
b) 16
c) 10
d) 18

d) Calcula x para cada figura:

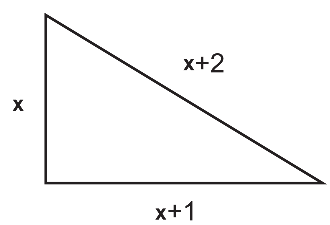
I)



II)



III)



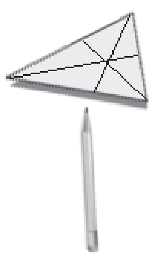
ACTIVIDAD 14 Resuelve en pares o en equipos de tres integrantes los siguientes problemas, aplicando el Teorema de Pitágoras.

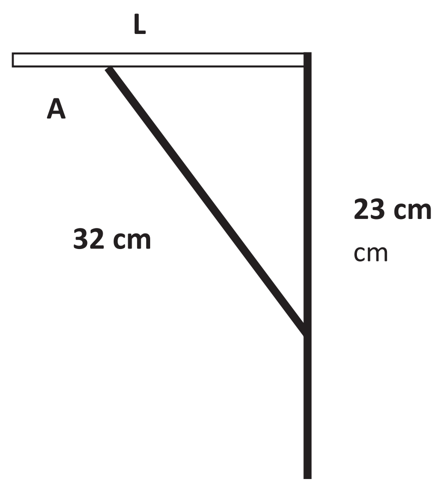
a) Una escalera de 8 m de largo está apoyada sobre una pared, a cierta altura de la pared hay una ventana y la escalera está exactamente debajo de la ventana. Si la escalera está apoyada en el piso a 2.5 m de la base de la pared, ¿cuál es la altura a la que está la ventana?

b) Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 14 cm de longitud. Suponiendo que los catetos son iguales, obtén la longitud de cada cateto.

c) Una repisa está sostenida por un soporte de metal, como se muestra en la figura. Si A = 7 cm, obtén el valor de la longitud L de la repisa.

Descubre:
Toma una pieza de cartón o papel grueso. Traza un triángulo y recórtalo. Ahora utiliza una regla para marcar los puntos medios de cada lado y traza las medianas para ubicar el centroide. Coloca la punta de un bolígrafo o lápiz en el centroide del triángulo y observa qué tan bien puede equilibrar la región triangular.





BLOQUE II

PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS

Competencias genéricas

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

- **CG2.1** Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

- **CG4.1** Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **CG4.5** Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- **CG5.2** Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **CG5.3** Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

Competencias disciplinares

CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

CDBM 4 Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

CDBM 6 Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean

BLOQUE II PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS

Propósito del bloque

Propone el uso de los polígonos, valorando su utilidad para la solución de problemas en su contexto.

Interdisciplinariedad

- ✓ Química I
- ✓ Informática I
- ✓ Ética I

Ejes transversales

- ✓ Eje transversal social
- ✓ Eje transversal de la salud
- ✓ Eje transversal ambiental
- ✓ Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Desarrolla estrategias colaborativamente, para la solución de problemas utilizando los elementos y propiedades de polígonos y poliedros que le permitan cuantificar el espacio en situaciones de su contexto.

- Examina las figuras geométricas en diferentes expresiones artísticas.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
➢ Polígonos. • Elementos y clasificación. • Ángulo central. • Ángulo interior. • Ángulo exterior. • Suma de ángulos interiores, exteriores. • Diagonales. • Perímetros y áreas. ➢ Poliedros. • Elementos y clasificación. • Volúmenes.	➢ Clasifica polígonos y representa los elementos que los conforman. ➢ Argumenta cuáles elementos de los polígonos deberían utilizarse para solucionar problemas de su entorno. ➢ Identifica perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos planos y en el espacio. ➢ Describe figuras geométricas en las diferentes representaciones artísticas.	➢ Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. ➢ Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. ➢ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ➢ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Situación didáctica

La pizzería "La Misionera", vende pizzas a la leña. Para llamar la atención de sus clientes, utiliza para sus entregas un nuevo diseño de caja como se muestra en la figura:

Al colocar la pizza dentro de la caja, la circunferencia de la pizza queda "inscrita" en el polígono formado por la caja.

a) ¿Cuál es el nombre del polígono representado por la caja?

____

b) ¿A qué crees que se refiera cuando se dice que la circunferencia de la pizza queda "inscrita" en el polígono?

____

c) ¿Qué tipo de ángulos se forman en el interior de la caja: agudos, obtusos o rectos? ¿Cuál crees que sea su medida?

____

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

Los polígonos se pueden clasificar con base en tres criterios:

* Dependiendo del número de lados
* De acuerdo a sus ángulos
* Por la relación entre lados y ángulos

Según su número de lados:

Lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono

Según sus ángulos:

Los polígonos tienen tantos ángulos como lados, por lo tanto dependiendo de la medida de sus ángulos podemos tener polígonos **cóncavos** o **convexos**.

- Los polígonos convexos son aquellos que tienen sus ángulos interiores menores a 180 grados, se caracterizan porque cualquier línea que una dos puntos interiores del polígono se contendrá dentro de éste.

- En los polígonos cóncavos al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180 grados, se caracterizan porque cualquier línea que una dos vértices de polígono no se contendrá dentro de éste.

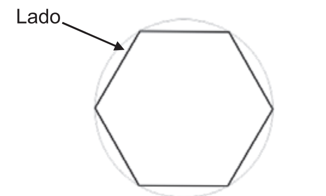
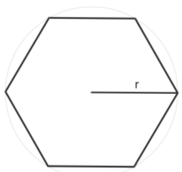
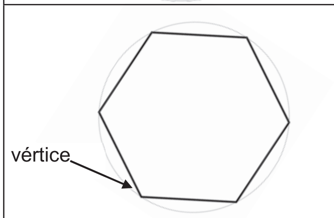
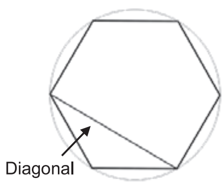
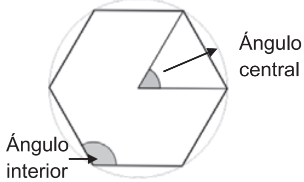

cuadrilátero cóncavo


cuadrilátero convexo

Por la relación entre lados y ángulos:

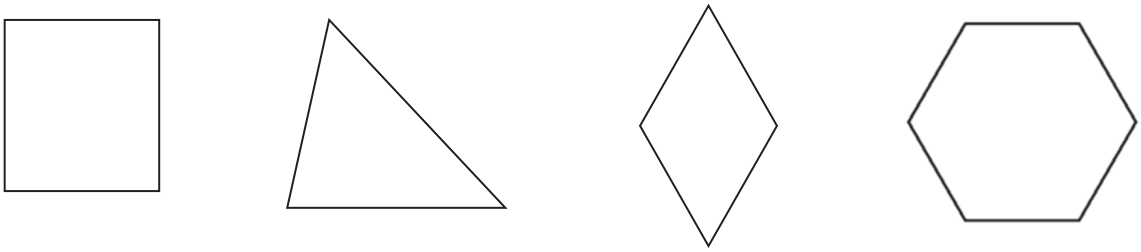
Si un polígono tiene todos sus lados y ángulos iguales entonces es un polígono regular de otra manera es un polígono irregular.

Elementos de un polígono:

	*Lado*: Es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
	*Radio* (r) de un polígono es el segmento de recta que une el centro del polígono con uno de sus vértices.
	*Apotema (a):* Segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.
	*Vértice*: El punto de unión de dos lados consecutivos.
	*Diagonal*: El segmento que une dos vértices no consecutivos.
	*Centro*: El punto equidistante de todos los vértices y lados.
	*Ángulo central*: El ángulo central de un polígono regular está formado por dos radios consecutivos. *Ángulo interior*: Se forma por la unión de dos lados consecutivos.

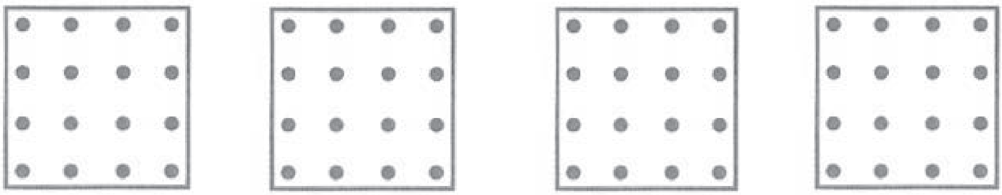
ACTIVIDAD 1 Realiza de manera individual lo que se le pide a continuación:

1. Observa detenidamente las figuras de diferentes polígonos.



   a) ¿Cuál polígono es regular y cuál es irregular?________________________________
   b) ¿Cómo identificas a un polígono regular?___________________________________
   c) ¿Cómo identificas a un polígono irregular? __________________________________

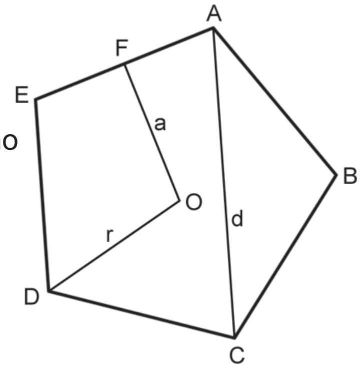
2. En las siguientes figuras, une los puntos para generar polígonos regulares e irregulares con la cantidad de lados que se te indican.



4 lados 6 lados 7 lados 8 lados

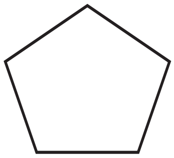
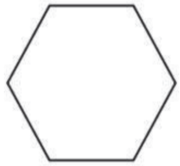
   a) ¿Cómo identificas a un polígono convexo? De los polígonos que dibujaste, ¿cuál es convexo?____
   b) ¿Cómo identificas a un polígono cóncavo? De los polígonos que dibujaste, ¿cuál es cóncavo?____

3. En la siguiente figura, identifiquen en parejas los elementos de un polígono regular.



   a) ¿Cuál segmento es la apotema y cómo lo reconoces?
   ____
   b) ¿Por qué crees que el apotema sólo está presente en un polígono regular?________________________________
   c) ¿Cuál segmento es el radio y cómo lo reconoces?
   ____
   d) ¿Cuál es la característica de una diagonal?
   ____

4. Contesta las preguntas relacionadas con las siguientes figuras:

(a)  (b) 

a) En la figura "a", ¿cuántas diagonales puedes trazar desde un sólo vértice? ___________

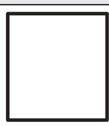
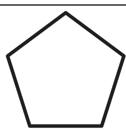
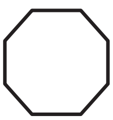
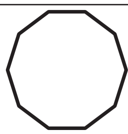
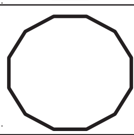
____

b) En la figura "a", encuentra una fórmula para obtener la cantidad de diagonales desde un sólo vértice:____

c) En la figura "b", ¿cuántas diagonales puedes trazar desde todos los vértices?________

d) En la figura "b", encuentra una fórmula para obtener la cantidad de diagonales totales de un polígono:____

ACTIVIDAD 2 Encuentra la cantidad de triángulos interiores en cada polígono y la suma de ángulos interiores.

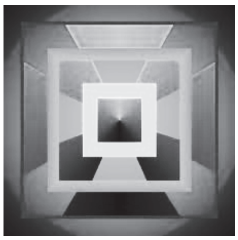
Número de lados (*n*)	**Figura**	**Diagonales desde un vértice**	**Diagonales desde todos los vértices**	**Número de triángulos**	**Suma de ángulos interiores**	**Valor de cada ángulo interior**
						
						
						
						
						

Arte y matemáticas:
CUBISMO

El **cubismo** es un movimiento artístico que se manifestó sobre todo en la pintura, aunque también se dio en otras artes como la literatura o la escultura. El objetivo principal del cubismo era el de alejarse de la representación naturalista y conseguir plasmar de modo simultáneo sobre la superficie del cuadro un objeto visto desde varios ángulos, adoptando así la llamada «perspectiva múltiple”.

El cubismo trata las formas de la naturaleza por medio de figuras geométricas, fragmentando líneas y superficies. Se representan todas las partes de un objeto en un mismo plano.

Ejemplos de cubismo en pintura:

ACTIVIDAD 3 Realicen un retrato, mural o pintura cubista empleando polígonos e identificando los tipos de polígonos que se representan.

PERÍMETROS Y ÁREAS

ACTIVIDAD 4 Recuerda con tus compañeros las fórmulas para obtener perímetro y área de cada una de las figuras y completa la tabla:

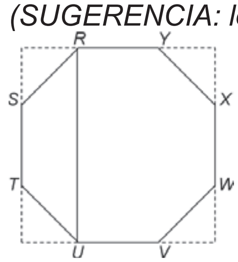
FIGURA	PERÍMETRO	ÁREA
Cuadrado		
Rectángulo		
Triángulo		
Polígono regular		
Rombo		
Trapecio isósceles		

ACTIVIDAD 5 Resuelve los siguientes ejercicios de áreas y perímetros.

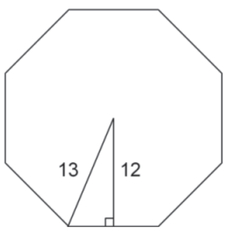
1) Se compró un terreno rectangular cuyas medidas son las siguientes, de largo 12.5 metros y de ancho 6 metros. Realiza el esquema del problema y encuentra su perímetro.

2) El perímetro de un triángulo equilátero es de 15 km. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

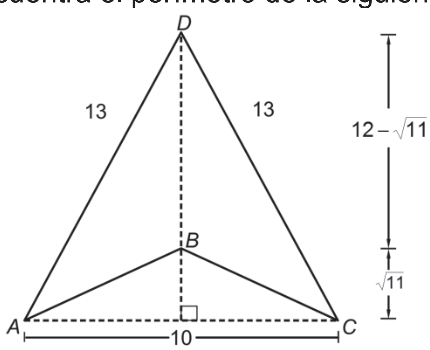
3) Dado el octágono regular *RSTUVXY* con cada lado de longitud 4, encuentra la longitud *RU. (SUGERENCIA: los lados extendidos, como se muestra, forman un cuadrado).*



4) Para un octágono regular la longitud de la apotema es aproximadamente 12 cm y la longitud del radio es aproximadamente 13 cm. Hasta el centímetro más cercano, encuentra el perímetro del octágono regular.

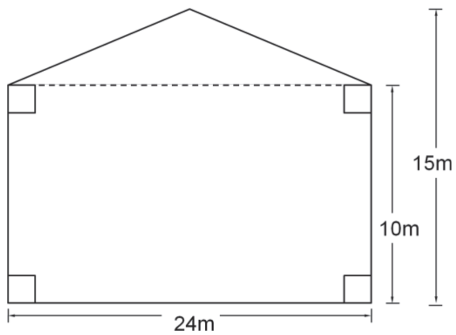


5) Encuentra el perímetro de la siguiente figura. Considera que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$



5) El muro exterior (el extremo a dos aguas de la casa que se muestra) se pintará.

a) ¿Cuál es el área del muro exterior?
b) Si cada galón de pintura cubre aproximadamente 105 m^2, ¿cuántos galones se deben comprar?
c) Si cada galón de pintura está en oferta a $80.80, ¿cuál es el costo total de la pintura?



POLIEDROS

La palabra poliedro viene del griego clásico polyedron, de la raíz polys «muchas» y de edra «base», «asiento», «cara». Es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos y encierran un volumen finito, son elementos sólidos y tridimensionales. Los poliedros regulares son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y concurren el mismo número de ellas en cada vértice.

Dentro de los poliedros podemos distinguir dos *casos especiales*:

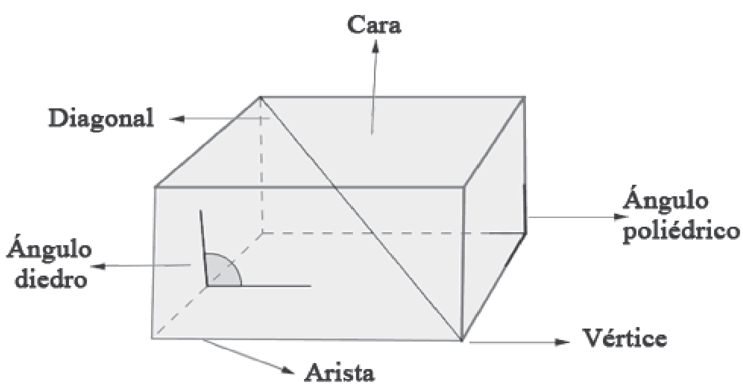
- **PRISMAS**: Son poliedros que tienen dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y sus caras laterales son paralelogramos. Lógicamente tendrá tantas caras laterales como lados tenga la base.

- **PIRÁMIDES**: Son poliedros en los que una de sus caras (llamada base) es un polígono y las caras laterales son triángulos que tienen un vértice común.

Los poliedros se clasifican de la siguiente forma:

- Poliedros
  - Regulares
    - Tetraedro
    - Cubo
    - Octaedro
    - Dodecaedro
    - Icosaedro
  - Prismas
    - Triangular
    - Cuadrangular
    - Pentagonal
    - Hexagonal
  - Pirámides
    - Triangular
    - Cuadrangular
    - Pentagonal
    - Hexagonal

Los elementos que los conforman son:



ACTIVIDAD 6 En **equipos**, con base en la clasificación de poliedros del diagrama anterior, realiza un collage de imágenes identificando sus elementos en cada uno, para ser presentado ante tu grupo.

VOLUMEN DEL POLIEDRO

El volumen o capacidad de un poliedro es el espacio tridimensional que ocupa el objeto.

ACTIVIDAD 7 Completa la tabla por medio de las fórmulas para determinar el volumen de los diferentes poliedros.

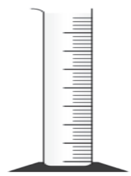
NOMBRE	FIGURA GEOMÉTRICA	FÓRMULA DE VOLUMEN
Prisma		
Pirámide		
Cubo		
Cono		
Cilindro		
Esfera		

ACTIVIDAD 8 Determina el volumen de las siguientes situaciones.

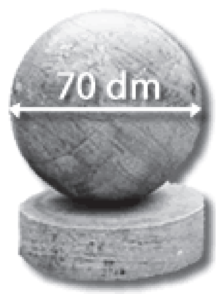
1. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. ¿Cuantos m^3 de agua serán necesarios para llenarla?

2. Por lo general las famosas pirámides de Egipto son pirámides cuadrangulares. La pirámide de Keops es una de las más famosas, aproximando sus medidas podemos afirmar que tiene por base un cuadrado de lado 230.35 m y una altura de 146.61 m. calcula el volumen que ocupa dicha pirámide.

3. En tu plantel tienes conos para beber agua. Si tiene una altura de 9.5 cm y 6.5 cm de diámetro. Calcula el volumen de agua que podrías beber con él.



4. En una probeta de 6 cm de radio se echan 4 cubitos de hielo de 4 cm de arista, ¿a qué altura llegará el agua cuando se derritan los cubitos?



5. En un parque de mi ciudad han construido el siguiente monumento con forma de esfera. Indica el volumen de esta esfera de 70 dm de diámetro, redondeando a dos cifras decimales.

BLOQUE III

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

CG4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

CG6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares

CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

CDBM 4 Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

CDBM 6 Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

BLOQUE III ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Propósito del bloque

Resuelve situaciones de su entorno usando los elementos de la circunferencia valorando su utilidad.

Interdisciplinariedad

- ✓ Química I
- ✓ Informática I
- ✓ Ética I

Ejes transversales

- ✓ Eje transversal social
- ✓ Eje transversal de la salud
- ✓ Eje transversal ambiental
- ✓ Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas de su entorno usando la circunferencia y círculo, y las diferentes figuras asociadas con estas.

- Propone de manera colaborativa diferentes estrategias de solución a problemas de áreas y perímetros para representar espacios y objetos de su entorno.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
➢ Circunferencia y círculo. • Concepto de círculo y circunferencia. • Segmentos y rectas de la circunferencia. • Ángulos en la circunferencia. • Perímetro de la circunferencia. • Área del círculo. • Secciones de un círculo (corona, sector y trapecio circular). • Área de regiones sombreadas.	➢ Identifica la diferencia entre círculo y circunferencia. ➢ Reconoce los diferentes tipos de segmentos, rectas, ángulos y figuras asociado con la circunferencia. ➢ Aplica los elementos del círculo y la circunferencia en la solución de situaciones cotidianas.	➢ Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. ➢ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ➢ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Situación didáctica

Crianza de caballos

Don Ignacio se dedica a la crianza y entrenamiento de caballos que son utilizados para las carreras. En esta ocasión, desea reforzar unos de sus corrales con alambre de un calibre más resistente, además pondrá sobre la superficie un piso de arena de silicio mezclada con fibras sintéticas, la misma que es utilizada en algunos hipódromos. El radio de dicho corral es de 6.5 metros.

a) ¿Cuál es la cantidad de alambre que necesita comprar para cercar el corral?

b) ¿Cuál es la superficie del corral que se quiere cubrir con arena mezclada?

La circunferencia

La circunferencia es una línea curva, cerrada y plana, cuyos puntos están todos a la misma distancia de otro punto fijo, llamado centro. Como tal, esta línea curva tiene como longitud o perímetro el valor de: $P=\pi d$ o bien $P=2\pi r$ donde d es el diámetro y r es el radio.

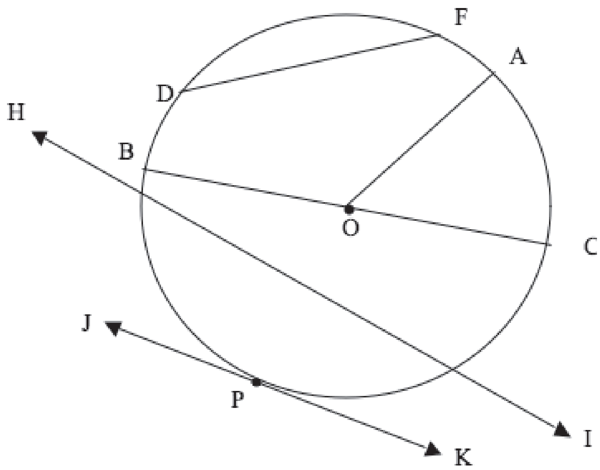
El círculo es la superficie plana limitada por una circunferencia.
Al ser una figura plana tiene superficie y por lo tanto tiene área, cuya fórmula es: $A=\pi r^2$.

Una circunferencia contiene los siguientes elementos:

- **Centro:** punto fijo de la circunferencia del que equidistan todos los demás puntos de la misma, es decir que están a la misma distancia de él.
- **Radio:** segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro:** es una cuerda que pasa por el centro. Es la cuerda de mayor tamaño.
- **Tangente:** es una recta que toca un solo punto de la circunferencia.
- **Punto de tangencia:** es el punto donde la recta tangente toca a la circunferencia.
- **Arco:** es la porción de circunferencia limitada por dos puntos de la misma.
- **Secante:** es una recta que atraviesa a la circunferencia, la corta de lado a lado.

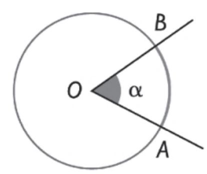
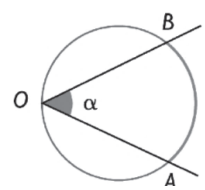
ACTIVIDAD 1 Identifica los segmentos y rectas contenidas en una circunferencia.

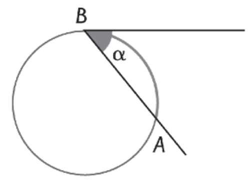
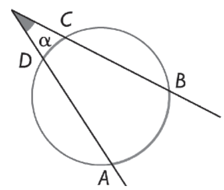
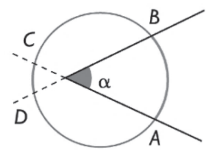
Elemento	Segmento, recta o punto
Radio	
Diámetro	
Centro	
Cuerda	
Secante	
Tangente	
Punto de tangencia	
Arco	



Ángulos en la circunferencia:

Los siguientes ángulos se relacionan con una circunferencia.

Nombre	Definición	Figura	Fórmula
Ángulo central	Es el ángulo que tiene su vértice en el centro y sus lados lo forman dos radios. La medida de un arco central es la misma que la de su ángulo central correspondiente.		$\angle\alpha = \overset{\frown}{AB}$
Ángulo inscrito	Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son rectas secantes. La medida de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca.		$\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Ángulo semi-inscrito	Es aquel que tiene su vértice en un punto de la circunferencia, siendo un lado tangente y el otro secante a ella. La medida de un ángulo semi-inscrito es la mitad del arco que abarca.		$\angle\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$
Ángulo exterior	Es el que tiene su vértice fuera de la circunferencia y está formado por dos secantes, una secante y una tangente o bien, dos tangentes.		$\angle\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$
Ángulo interno	Es un ángulo que tiene su vértice en el interior de un círculo.		$\angle\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$

ACTIVIDAD 2 Contesta los siguientes ejercicios.

I. Contesta las preguntas relacionadas con las siguientes figuras:

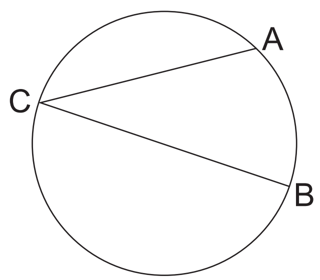


Figura a

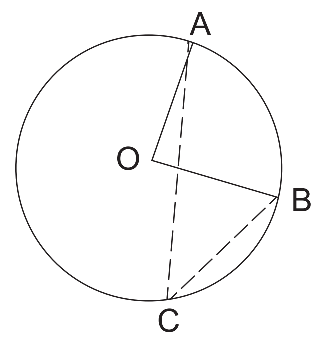


Figura b

a. En la figura “a”, ¿cómo se llama al ángulo $\angle ACB$?

b. En la figura “b”, ¿cómo se llama al ángulo $\angle AOB$?

c. En la figura “a”, si el arco $\overset{\frown}{AB} = 70^o$ ¿cuánto vale el ángulo $\angle ACB$?

d. En la figura “a”, si el ángulo $\angle ACB = 25^o$ ¿cuánto vale el arco $\overset{\frown}{AB}$?

e. En la figura “b”, si el ángulo $\angle AOB = 80^o$ ¿cuánto vale el ángulo $\angle ACB$?

f. En la figura “b”, si el ángulo $\angle ACB = 35^o$ ¿cuánto vale el arco $\overset{\frown}{AB}$?

II. Contesta las preguntas relacionadas con las siguientes figuras:

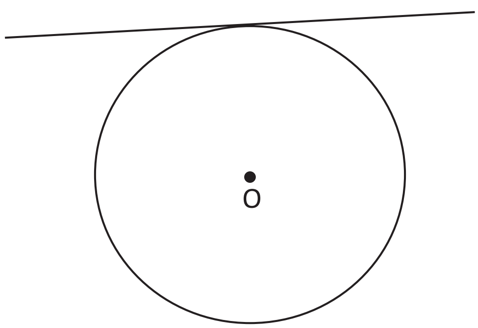


Figura a

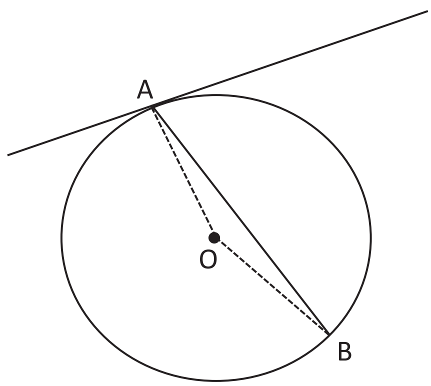


Figura b

a) En la figura “a”, si conoces a la recta tangente y el centro de una circunferencia, ¿cómo se encuentra su punto de tangencia?

b) En la figura "a", una vez que encuentres el punto de tangencia, traza un ángulo semi-inscrito.

c) En la figura "b", si el arco, $\overset{\frown}{AB} = 110^o$, ¿cuánto vale el ángulo semi-inscrito formado por la tangente que pasa por A y el segmento AB?

d) En la figura "b", si el arco, $\overset{\frown}{AB} = 110^o$, ¿cuánto vale el ángulo $\angle AOB$?

ACTIVIDAD 3 Perímetros y áreas.

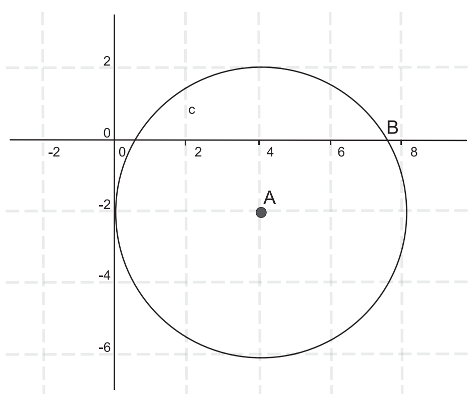
a) Calcula la longitud de la circunferencia cuyo radio es de 15 cm.

b) Calcula el área del círculo cuyo diámetro es de 12.6 cm.

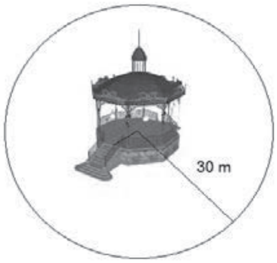
c) ¿Cuánto mide el radio de una circunferencia cuyo perímetro es de 18 m?

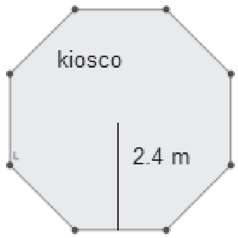
d) ¿Cuánto mide el diámetro del círculo que tiene un área de 50 m^2?

e) Observa la figura en el plano cartesiano. Calcula su perímetro y área:



f) En el kiosco del parque se va a presentar una banda local. Se piensa colocar una valla temporal en forma circular como se muestra en la figura, con el fin de concentrar a la gente alrededor. El kiosco tiene forma octagonal de 2 m de largo cada lado y su apotema mide 2.4 metros, la distancia del centro a la valla será de 30 m. ¿Cuál es el área que podrán ocupar los asistentes en la presentación?

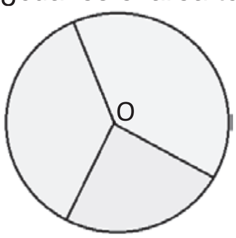




g) En una cancha se va a pintar la circunferencia central que tiene un diámetro de 5 m. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

h) Un estanque tiene una forma circular con un área de 78.5 m^2. ¿De qué longitud es el muro que rodea al estanque?

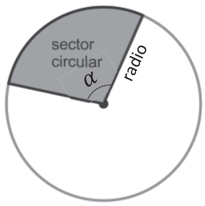
i) En un campo se han sembrado trigo en tres regiones circulares. Si en total se usaron 126 m de malla ciclónica para delimitar las tres regiones, cercando sólo el interior del campo de cultivo, ¿cuál es el área total sembrada?



j) Mariana quiere construir un hula-hula, necesita tubo flexible para formar la circunferencia. Se sabe que el hula-hula debe tener un diámetro de la mitad de la estatura de la persona que lo vaya a utilizar. Mariana mide 1.60 m, ¿cuántos metros de tubo deberá comprar?

Secciones de un círculo

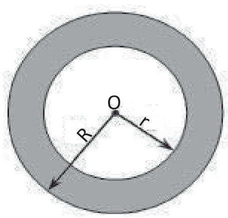
La parte de círculo limitada por dos radios y el arco comprendido se llama **Sector circular.**



El área de un sector circular de n grados se obtiene multiplicando $\frac{\pi r^2}{360°}$ por α.

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$$

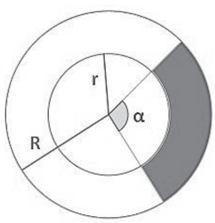
Corona circular es la parte de plano limitada por dos circunferencias concéntricas.



El área de una corona circular de radios R y r es igual al producto de π por la diferencia de los cuadrados de dichos radios.

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

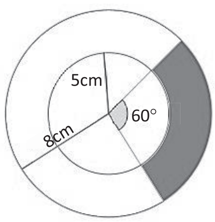
Trapecio circular es la superficie plana generada entre dos círculos concéntricos al girar la diferencia de los radios un ángulo α.



El área del trapecio circular es una parte de la corona circular, parte directamente proporcional al ángulo α que gira.

$$A = \frac{\pi(R^2 - r^2)\alpha}{360°}$$

Ejemplo: Determina el área de la región sombreada de un trapecio circular, cuya longitud de r es de 5 cm y de R es de 8 cm, los radios que lo delimitan forman un ángulo de 60°.



$$A = \frac{\pi(R^2 - r^2)\alpha}{360°}$$

$$A = \frac{(3.1416)((8)^2 - (5)^2)(60°)}{360°}$$

$$A = \frac{3.1416(64 - 25)60°}{360°}$$

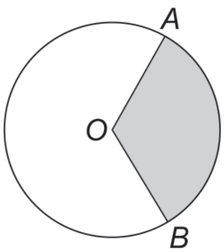
$$A = \frac{3.1416(39)60°}{360°}$$

$$A = 29.42\ cm^2$$

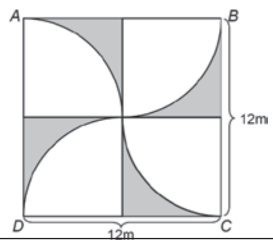
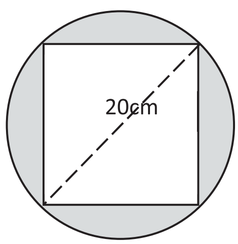
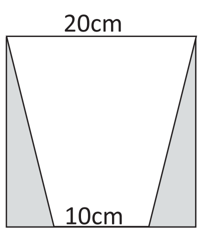
Video sugerido de área de trapecio circular
https://youtu.be/vl2NF0wFINk
Video de área del círculo y perímetro de circunferencia
https://youtu.be/tAcDoiUtX94
Video de área de corona circular
https://youtu.be/NVlTPDzDVCg

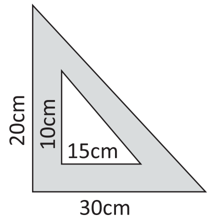
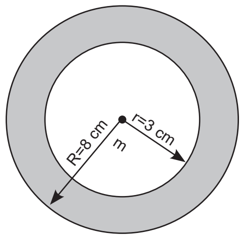
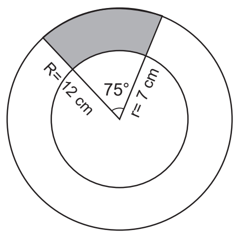
ACTIVIDAD 4 Áreas de regiones sombreadas

I. En el círculo, la longitud del radio es 10 cm y la longitud de $\widehat{AB}$ es 14 cm. ¿Cuál es el área del sector sombreado si el ángulo que se forma entre sus radios es de 110°?



II. Determina las áreas de las regiones sombreadas.

<table>
<tr><td>a)

</td><td></td></tr>
<tr><td>b)

</td><td></td></tr>
<tr><td>c)

</td><td></td></tr>
</table>

d) 	
e) 	
f) 	

MIS NOTAS:

BLOQUE IV

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

CG4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

CG4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

CG8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 6 Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

BLOQUE IV RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Propósito del bloque

Resuelve problemas con razones trigonométricas en triángulos rectángulos presentes en su vida cotidiana.

Interdisciplinariedad

- ✓ Taller de Lectura y Redacción I
- ✓ Informática I
- ✓ Ética I

Ejes transversales

- ✓ Eje transversal social
- ✓ Eje transversal de la salud
- ✓ Eje transversal ambiental
- ✓ Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Propone, de manera creativa, solución a problemas que involucran triángulos rectángulos, valorando su uso en la vida cotidiana.

- Elige razones trigonométricas para proponer alternativas en la solución de triángulos rectángulos en situaciones de su entorno.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
➢ Razones trigonométricas de ángulos agudos. ➢ Valores de las razones trigonométricas para ángulos notables (30°, 45°, 60°). ➢ Solución de triángulos rectángulos.	Establece las relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Interpreta modelos para calcular el valor de las razones trigonométricas. Aplica razones trigonomé-tricas para la solución de triángulos rectángulos	➢ Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. ➢ Aporta ideas en la solución de problemas promoviendo su creatividad. ➢ Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. ➢ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ➢ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Situación didáctica

La arquitectura moderna

Observa las siguientes imágenes de construcciones en el mundo y **remarca** los triángulos que localices en ellas.

De acuerdo con lo anterior contesta las siguientes preguntas

a) ¿Qué tipo de triángulo predomina?

b) ¿Cuáles son las formas que conoces para calcular la longitud de los lados en este tipo de triángulo?

c) Si solamente conocieras la longitud de un lado y un ángulo, ¿de qué manera podrías calcular la longitud de los lados faltantes?

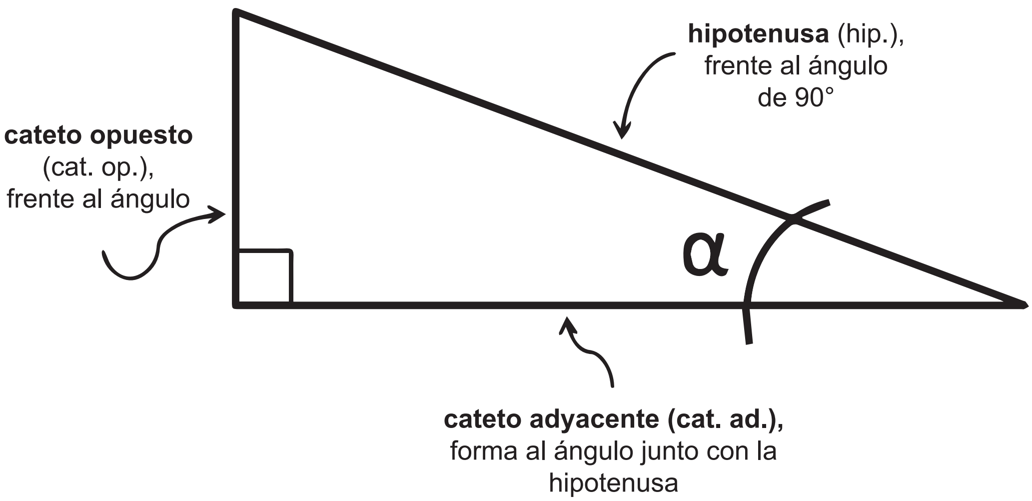
d) Aporta algunas imágenes de estructuras donde se observen triángulos.

Funciones trigonométricas

La Trigonometría estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

En un *triángulo rectángulo* es necesario que conozcamos el nombre de los lados que lo conforman, los cuales dependen del ángulo que se toma como referencia.

A las proporciones que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo se les conoce como *razones* o *relaciones* trigonométricas.

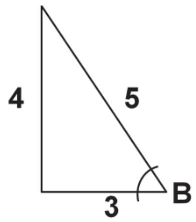


Razones trigonométricas:

sen=seno	csc=cosecante	sen A= $\frac{Cat.Op.}{Hip.}$	csc A= $\frac{Hip.}{Cat.Op.}$
cos=coseno	sec=secante	cos A= $\frac{Cat.Ad.}{Hip.}$	sec A= $\frac{Hip.}{Cat.Ad.}$
tan=tangente	cot=cotangente	tan A= $\frac{Cat.Op.}{Cat.Ad.}$	cot A= $\frac{Cat.Ad.}{Cat.Op.}$

ACTIVIDAD 1 Obtén los valores de las seis funciones trigonométricas para los siguientes triángulos:

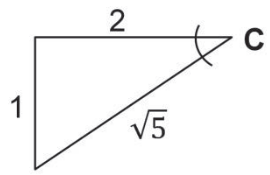
A)



sen B= cos B= tan B=

csc B= sec B= cot B=

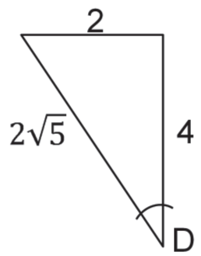
B)



sen C= cos C= tan C=

csc C= sec C= cot C=

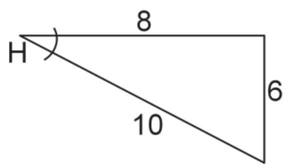
C)



sen D= cos D= tan D=

csc D= sec D= cot D=

D)



sen H= cos H= tan H=

csc H= sec H= cot H=

De los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, ¿qué se puede observar en los valores de seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente, respectivamente?
R: ____

Debido a esto, a cada par de estas funciones se les llama **recíprocas.**

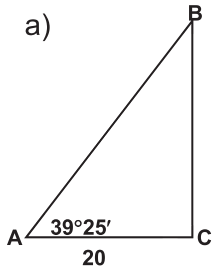
ACTIVIDAD 2 Usando calculadora, obtén los valores de las funciones dadas.

Nota: Asegúrate que tu calculadora se encuentre en el modo D (degree=grado).

sen 25º=	tan 48º=	cos 50º=	cos 30º=
sen 10º=	tan 82º=	sen 22º=	tan 6º=
cos 15º=	cos 41º=	sen 57º=	tan 64º=

ACTIVIDAD 3 Resuelve los siguientes triángulos utilizando las funciones trigonométricas.

a)

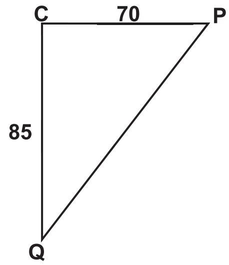


$\angle B =$ __________

c = __________

a = __________

b)

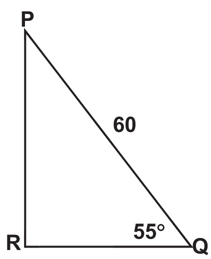


$\angle P =$ __________

$\angle Q =$ __________

c = __________

c)

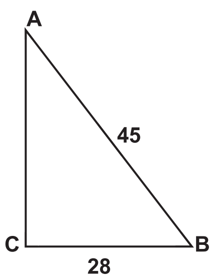


$\angle P =$ __________

p = __________

q = __________

d)



$\angle A =$ __________

$\angle B =$ __________

b = __________

ACTIVIDAD 4 Dadas las siguientes situaciones, haz el diagrama correspondiente, indica la función trigonométrica que ayudará a solucionar el problema y despeja la incógnita que se busca.

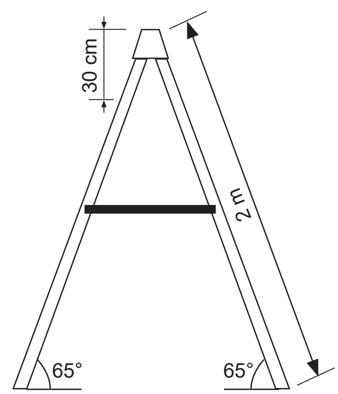
A) Una escalera está apoyada en la pared, el ángulo en la base es de 50º, la escalera mide 4m. ¿A qué distancia de la base hacia la pared está la escalera?

B) Una persona observa una torre desde una distancia de 100 m con un ángulo de elevación de 70°, ¿con qué función trigonométrica obtendrías la altura de la torre? Calcula la altura de la torre.

C) Shakira se presentará en la Ruta del Vino, y para ello su anuncio ha aparecido en un espectacular por la Avenida Reforma, si la letra A aparece en el letrero, y el ángulo en la parte superior de la letra es de 40º y su base es de 60 cm, ¿cuál es la altura de la letra?

D) En un hospital, hay una rampa para discapacitados en la entrada. Tiene una altura de 40 cm y una longitud horizontal de 3 m. ¿Qué función trigonométrica te ayudaría a encontrar el ángulo de inclinación de la rampa respecto al piso? ¿Cuál es la longitud de la rampa?

E) El Sr. López necesita una escalera para podar sus árboles de naranjas. Le dice al herrero que necesita alcanzar una altura de 3 m sin estirar los brazos. El herrero sabe que el Sr. López mide 1.70 m, y sabe que por seguridad, una persona no debe subir más arriba del penúltimo peldaño de la escalera. El herrero le vende una escalera como la que se muestra.



Comprueba que el herrero vendió al Sr. López la escalera que necesita.

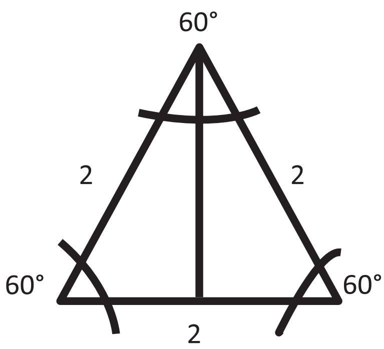
Los 30 cm que se muestran en la figura indican la distancia entre la altura máxima de la escalera y donde está el penúltimo peldaño, es decir, hasta donde puede subirse el Sr. López con seguridad.

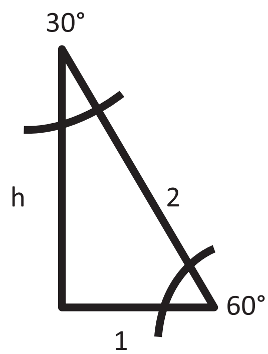
Valores exactos de las funciones trigonométricas.

A continuación, se presenta la forma de obtener los valores exactos de los ángulos de 30º, 45º y 60º. ¿Qué significan "valores exactos"? Que para estos ángulos, con base en ciertos valores de un triángulo rectángulo (para 30º y 60º) o isósceles (45º), se puede resolver un triángulo para alguna incógnita sin necesidad de usar las funciones de la calculadora.

Para los ángulos de 30º y 60º

Considera un triángulo equilátero de lado 2. Se divide en dos partes y se forman dos triángulos rectángulos de lados 2, 1 y $\sqrt{3}$. Este último valor se obtiene de aplicar el teorema de Pitágoras.





Del teorema de Pitágoras: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Prueba que h = $\sqrt{3}$

Es claro que al dividir el triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos, el ángulo superior se divide y queda un ángulo de 30º, y el lado inferior se reduce a 1.

Ahora bien:

- Para **30º**, las funciones quedan definidas como:

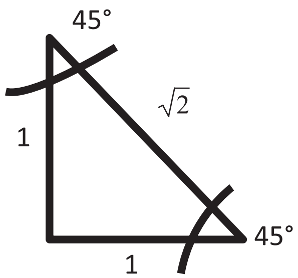
$$\text{sen } 30º = \frac{1}{2} \quad \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30º = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Para **60º**, las funciones quedan definidas como:

$$\text{sen } 60º = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60º = \frac{1}{2} \quad \tan 60º = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Para el ángulo de 45º

Considera un triángulo rectángulo con catetos iguales. Si los catetos son de longitud 1, por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $\sqrt{2}$ y puesto que los catetos son iguales, los ángulos agudos son de 45º.



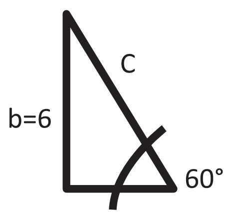
sen 45º = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

cos 45º = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

tan 45º = $\frac{1}{1}$ =1

Ejemplos:

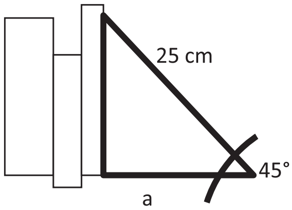
a) Una escalera está apoyada sobre una pared exactamente en la base de una ventana situada a 6 m de altura.
Si la escalera forma un ángulo de 60º con el piso, calcula la longitud de la escalera.

Datos:	**Diagrama:**	**Fórmula:**	**Despeje:**
Ángulo = 60º b = 6 m c = longitud de la escalera		**Como** b=cateto opuesto c= hipotenusa La función que se usa es seno sen 60º= $\frac{6}{c}$	c= $\frac{6}{\text{sen } 60º}$ De los valores exactos para las funciones sabemos que: sen 60º= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sustitución:

$$c = \frac{6}{\sqrt{3}/2} = \frac{\frac{6}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(6)(2)}{(\sqrt{3})(1)} = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

b) Un objeto con un lado en forma de triángulo se usa en un escritorio para sostener libros, como se muestra en la figura.

Datos	**Fórmula**	**Despeje**	**Sustitución**
¿Cuál es la base del objeto?  	a=cateto adyacente 25= hipotenusa la función que se usa es coseno cos 45º $= \frac{a}{25}$	a=25 cos45º De los valores exactos para 45º sabemos que cos 45º= $\frac{1}{\sqrt{2}}$	a=25 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a= $\frac{25}{\sqrt{2}}$

ACTIVIDAD 5 Determina el valor para cada ejercicio, usando los valores exactos de los ángulos de 30º, 45º y 60º.

1.	20 sen 30º	
2.	$\frac{8}{tan\ 60^o}$	
3.	15 cos 45º	

BLOQUE V

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Competencias genéricas

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

CG1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

CG4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

CG6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

CG7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Competencias disciplinares

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

CDBM 6 Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

CDBM 8 Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

BLOQUE V FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Propósito del bloque

Propone soluciones que involucren funciones trigonométricas en el plano cartesiano, permitiéndole resolver distintas problemáticas relacionadas con fenómenos naturales y sociales.

Interdisciplinariedad

- ✓ Taller de Lectura y Redacción I
- ✓ Informática I
- ✓ Ética I

Ejes transversales

- ✓ Eje transversal social
- ✓ Eje transversal de la salud
- ✓ Eje transversal ambiental
- ✓ Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

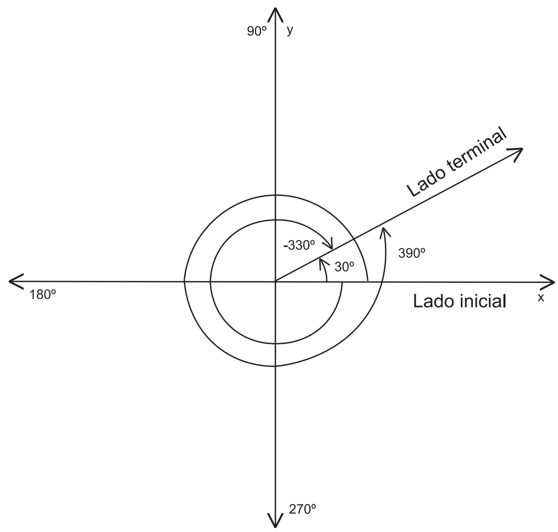
- Desarrolla estrategias de manera colaborativa para obtener los valores de las funciones trigonométricas utilizando el ángulo de referencia, tablas o calculadora, con la finalidad de interpretar fenómenos sociales y naturales.

- Explica de forma crítica, la gráfica de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, relacionándola con el comportamiento de fenómenos de su entorno.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
➢ Funciones trigonométricas en el plano cartesiano. • Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes. • Gráficas. ➢ Círculo unitario. • Identidades trigonométricas. - Recíprocas - Pitagóricas - Ángulo doble	➢ Identifica y representa en el plano cartesiano las funciones trigonométricas y sus signos en los cuadrantes. ➢ Describe la relación entre las funciones trigonométricas y el círculo unitario. ➢ Explica las identidades trigonométricas.	➢ Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. ➢ Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. ➢ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ➢ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Ángulos dirigidos

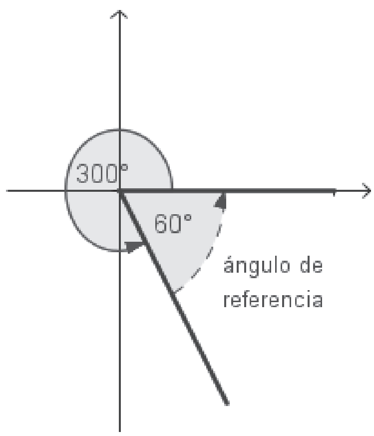
En trigonometría se trabajan con ángulos positivos y negativos, según la dirección en que gire el lado terminal de un ángulo en posición normal respecto al sentido de las manecillas del reloj y el criterio adoptado. Los ángulos positivos son los que giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj ; así mismo si gira en dirección de las manecillas del reloj al cambiar su posición inicial y coincide con el eje negativo se habrá generado un ángulo negativo.



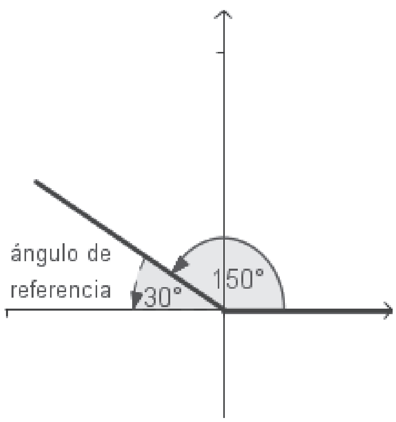
Ángulos de referencia

El ángulo de referencia para 300°, 150° y 225° es el ángulo agudo formado por el lado terminal y el eje horizontal.

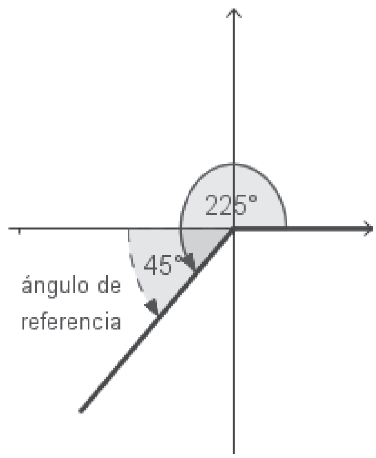
a)



b)

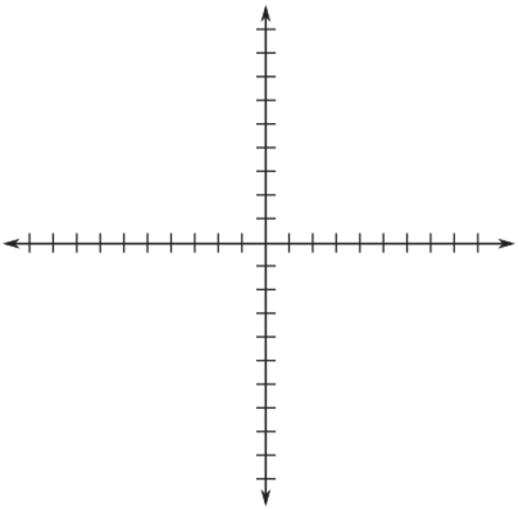


c)

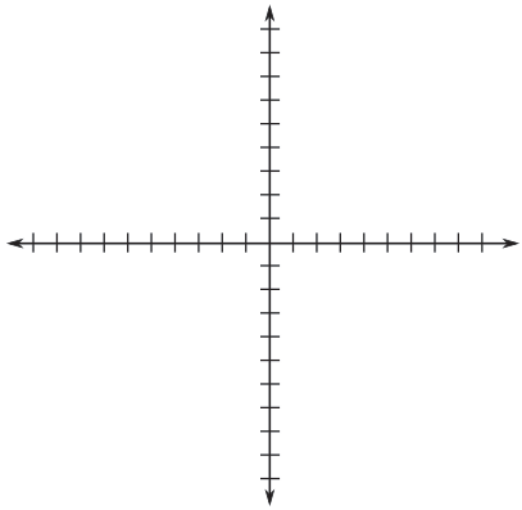


ACTIVIDAD 1 Obtén el ángulo agudo de referencia para los siguientes ángulos.

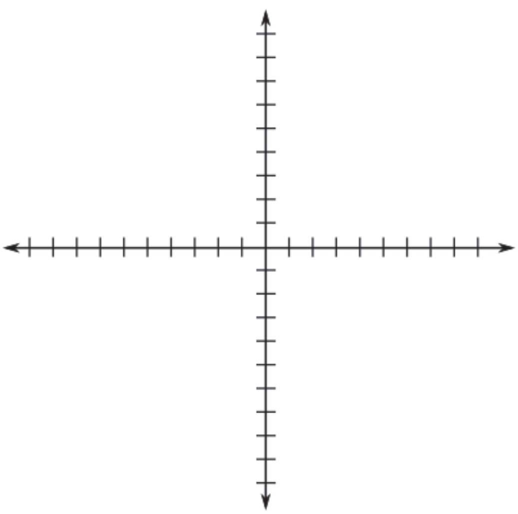
a) 135°



b) 260°

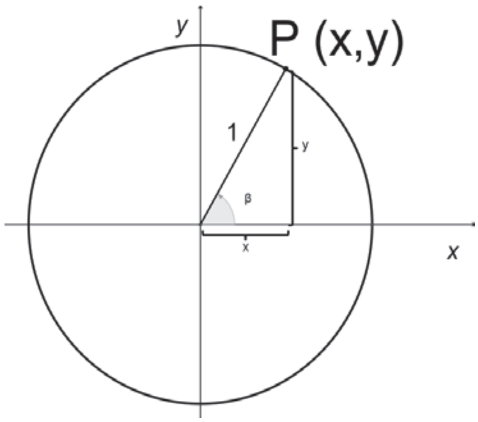


c) $\frac{9\pi}{5}$



d) Explica por qué los ángulos cuadrantales no tienen ángulos de referencia.

Círculo unitario



$x^2 + y^2 = 1 = radio = hipotenusa$

La **circunferencia unitaria** es una circunferencia con radio de longitud igual a uno, con centro en el origen (0,0) de un sistema de coordenadas cartesianas.

Dicha circunferencia se utiliza con el fin de poder estudiar fácilmente las razones trigonométricas, mediante la representación de triángulos rectángulos auxiliares.

Si (x, y) es un punto de la circunferencia unitaria del primer cuadrante, entonces x e y son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud 1.

Se observa que el **cateto opuesto** corresponde al eje “y” y el **cateto adyacente** al eje “x”, considerando esto en relación con el ángulo β se obtiene:

$$sen\beta = \frac{co}{h} \qquad \cos\beta = \frac{ca}{h}$$

$$sen\beta = \frac{y}{1} \qquad \cos\beta = \frac{x}{1}$$

$$sen\beta = y \qquad \beta = x$$

Signos del círculo unitario

Ejemplo:

El *sen* de 30° es positivo y el *cos* de 30° es positivo.
El *sen* de 135° es positivo y el *cos* de 135° es negativo.
El *sen* de 225° es negativo y el *cos* de 225° es negativo.
El *sen* de 315° es negativo y el *cos* de 315° es positivo.

Grados y radianes

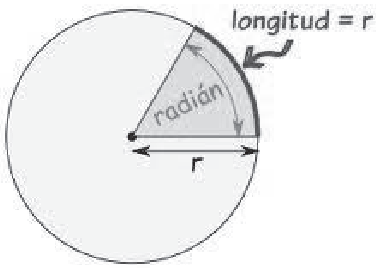
En la medición de ángulos, se utilizan dos tipos de unidades fundamentalmente, los **grados** y los **radianes**.

Si se imagina un círculo, y uno de sus radios se moviera respecto al centro y diera una vuelta completa, éste recorrería 360º, o bien, se dice que se desplazó 2π radianes. De lo anterior se concluye que:

360º = 2π radianes

De donde π rad = $\frac{360}{2}$

1 rad = $\frac{180}{\pi}$



¿A cuántos radianes equivalen 180º? ¿Y 90º? ¿Y 60° o 45°?

Nota*:* los ángulos se manejarán en términos de π y en decimales.

Ejemplo: 30º = $\frac{\pi}{6}$, pero si π = 3.1416, entonces 30º = $\frac{3.1416}{6}$ = 0.5236 radianes

Ejemplo de conversiones:

i) Convertir 200º a radianes

Usando la equivalencia 180º = π, se tiene que:

a) $200º\left(\frac{\pi}{180º}\right) = \frac{20\pi}{18} = \frac{10\pi}{9}$ = 3.49 radianes *ii) Convertir 1.3 radianes a grados.*

Usando la misma equivalencia, se tiene que

a) $1.3\left(\frac{180^{\circ}}{\pi}\right) = \frac{1.3(180^{\circ})}{3.1416} = 74.48^{\circ}$

b) $\frac{3\pi}{4}\left(\frac{180^{\circ}}{\pi}\right) = \frac{540}{4} = 135^{\circ}$

ACTIVIDAD 2 Realiza las siguientes conversiones de grados a radianes y viceversa.

De Grados a Radianes	De Radianes a Grados
a) 50° =	a) 3π rad =
b) 110° =	b) $\frac{\pi}{4}$ rad =
c) 300° =	c) $\frac{5\pi}{6}$ rad =
d) 250° =	d) $\frac{4\pi}{3}$ rad =
e) 500° =	e) 0.67 rad =
f) 225° =	f) 1.8 rad =
g) 64° =	g) 2.5 rad =

La rueda de la fortuna

Es casi seguro que cuando eras niño alguna vez te subiste a la rueda de la fortuna, como la que se muestra en la imagen. Observa que la estructura metálica que sostiene a cada uno de los asientos es una circunferencia, y los brazos metálicos son radios de la misma.

¿Qué estrategias utilizarías para calcular de manera aproximada el valor del ángulo que existe entre cada brazo?

____

____

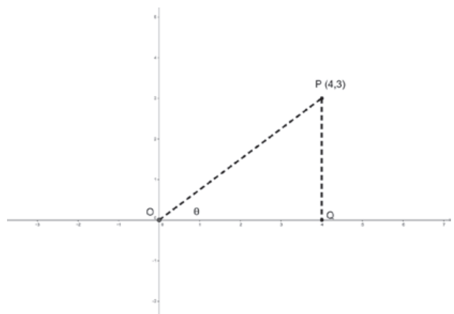
¿Cuál es el valor del ángulo?

____

¿Cuál será el ángulo formado por la estructura metálica que sostiene la palabra “Chicago”?

____

Con las **funciones trigonométricas** podemos establecer la relación que existe entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, cualquier punto P(a,b) lo podemos graficar en un plano cartesiano. Por ejemplo el punto P(4,3) lo graficamos como en la figura.



En la figura se observa que se puede trazar el triángulo rectángulo ΔOPQ. Además tenemos que se forma un ángulo θ entre las líneas $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$. Sobre el triángulo rectángulo ΔOPQ podemos calcular las razones trigonométricas seno, coseno y tangente como sigue:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PQ}{OP} \qquad \cos\theta = \frac{QO}{OP} \qquad \tan\theta = \frac{PQ}{QO}$$

Si se observa con detenimiento el punto P(4,3) nos indica que $QO = 4$ y $PQ = 3$, y aplicando el Teorema de Pitágoras deducimos que $OP = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

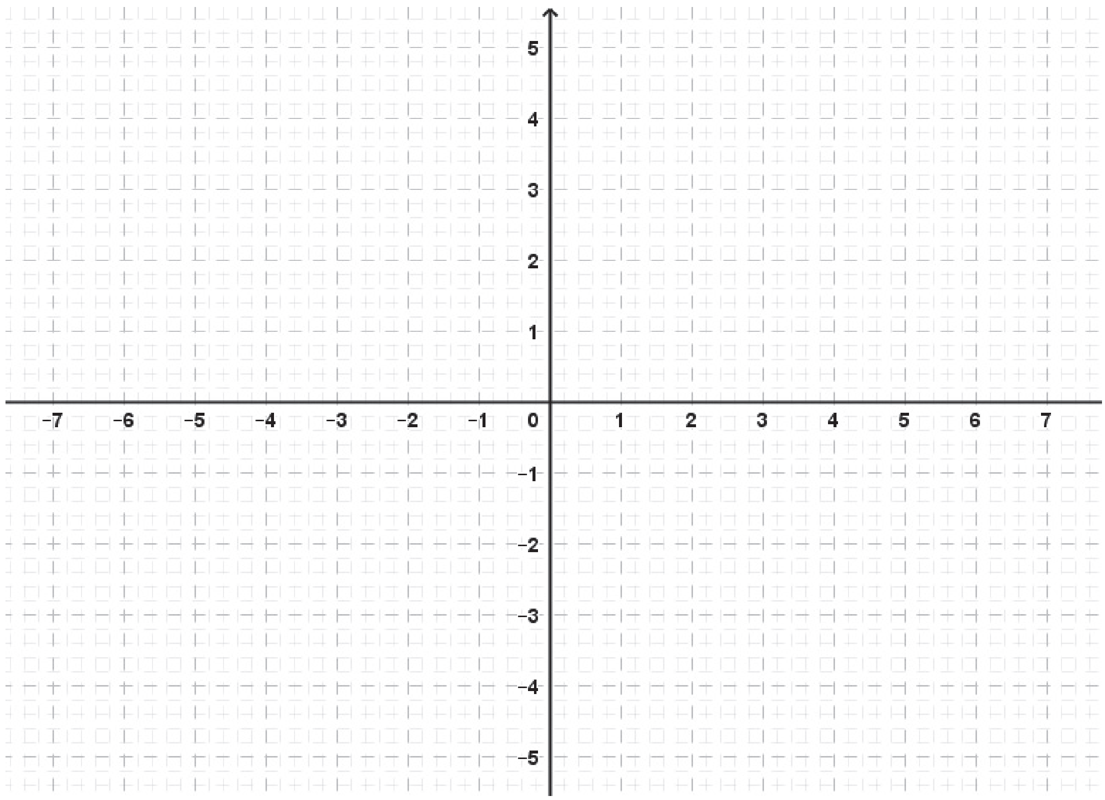
Así deducimos que:

$$\text{Sen } \theta = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \text{Cos } \theta = \frac{4}{5} = 0.8 \qquad \text{Tan } \theta = \frac{3}{4} = 0.75$$

ACTIVIDAD 3

I. En el siguiente plano cartesiano grafica los puntos dados a continuación y calcula el valor de las funciones seno, coseno y tangente:

1) $P_1(2,5)$ **2)** $P_2(-4,3)$ **3)** $P_3(3,-4)$ **4)** $P_4(-2,-2)$

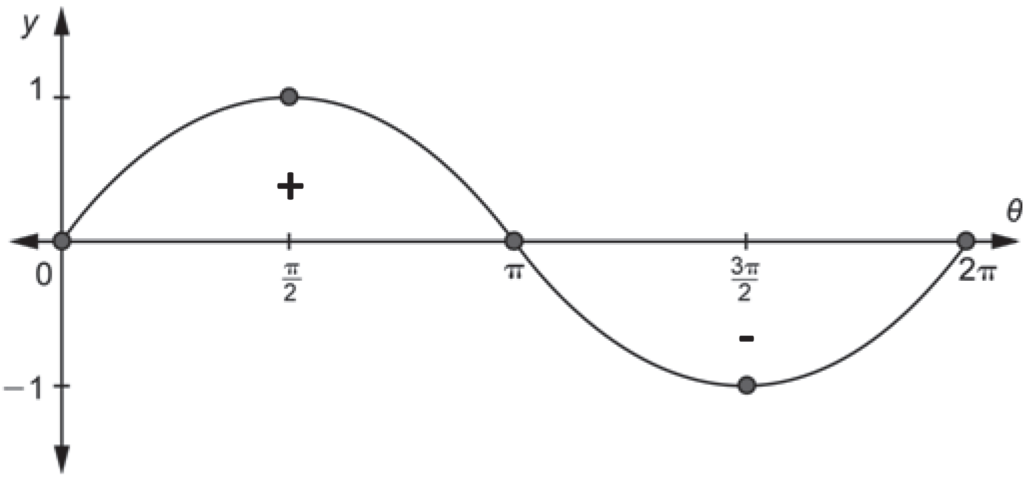


Resuelve en tu cuaderno el siguiente problema:

II. A Julia le gustan mucho los papalotes por lo que un amigo le regaló uno en su cumpleaños. Esa misma tarde se encuentra volando su papalote y observa que el largo del lazo que sujeta el papalote es de 20 metros, el papalote se encuentra a una distancia horizontal de 16 metros y a una altura de 12 metros. **Calcula** las razones trigonométricas **seno, coseno y tangente** del ángulo que forma el lazo del papalote con la horizontal.

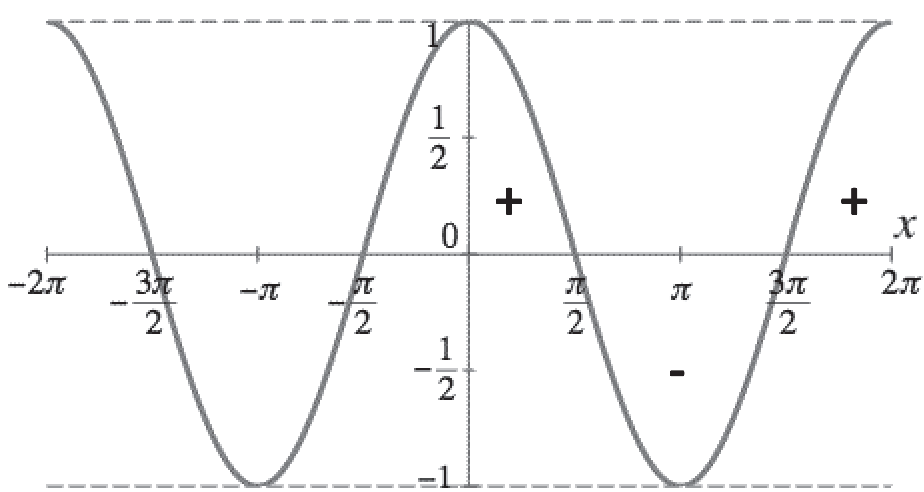
Gráfica de la función seno

En la siguiente gráfica de la función *sen* θ, se observa que en el intervalo $[0, \pi]$ el *sen* θ es positivo, mientras que $[\pi, 2\pi]$ el *sen* θ es negativo.



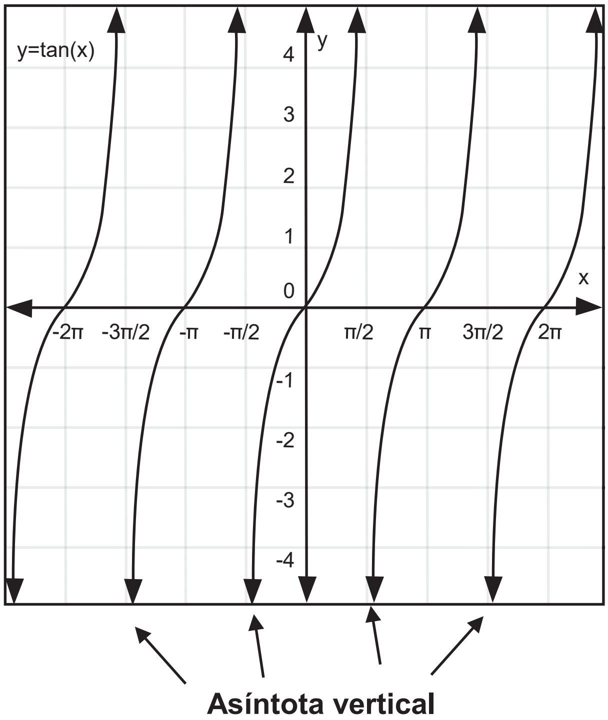
Gráfica de la función coseno

En la siguiente gráfica de la función *cos* θ, se observa que en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, el *cos* θ es positivo, mientras que el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ el *cos* θ es negativo.



Gráfica de la función tangente

Ya que $\tan x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, la función tangente no está definida en cos x = 0. Por lo tanto, la función tangente tiene una *asíntota vertical*.



Amplitud, periodo y frecuencia de una función trigonométrica

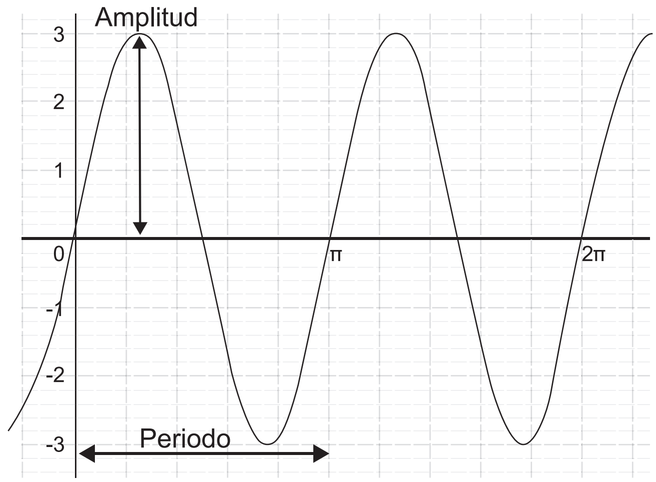
- **Amplitud $|A|$:** máxima altura que alcanza a partir del eje horizontal, es decir, qué tanto se extiende la función hacia arriba o hacia abajo.
- **Periodo:** es lo que tarda la función en repetirse.
  En una función: $y = A\ sen\ Bx$ o $y = A\ cos\ Bx$

  Periodo = $\frac{2\pi}{B}$
- **Frecuencia:** es una magnitud que mide el número de repeticiones por unidad de tiempo en cualquier fenómeno, es lo inverso al periodo.

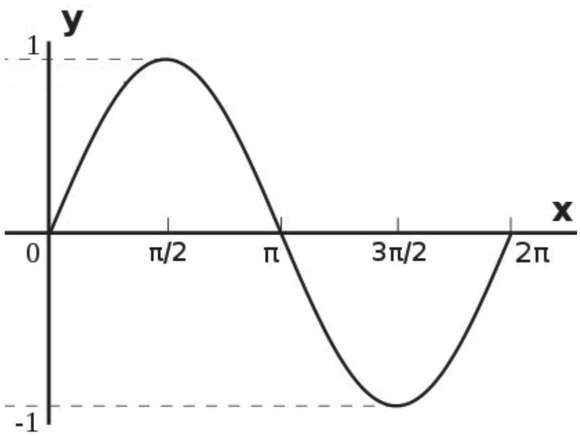
  Frecuencia = $\frac{1}{Periodo}$

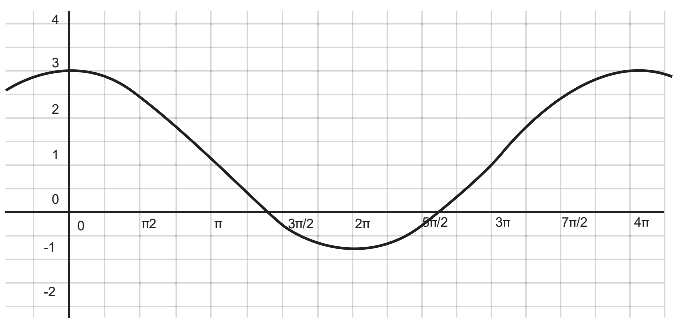
Ejemplo: Se tiene la función $y = 3\ sen\ 2x$, donde A = 3 y B = 2, por lo tanto:

- Amplitud = $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{3}|$ = 3
- Periodo = $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2}$ = π
- Frecuencia = $\frac{1}{Periodo}$ = $\frac{1}{\pi}$



Ejercicio: Identifica en cada gráfica los elementos.





Amplitud=

Periodo=

Función= ________________________

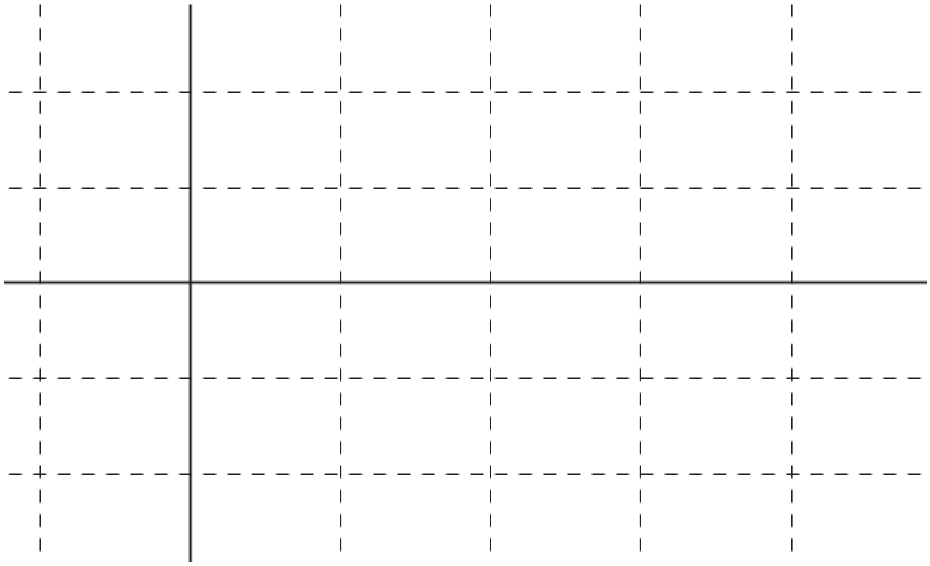
Amplitud=

Periodo=

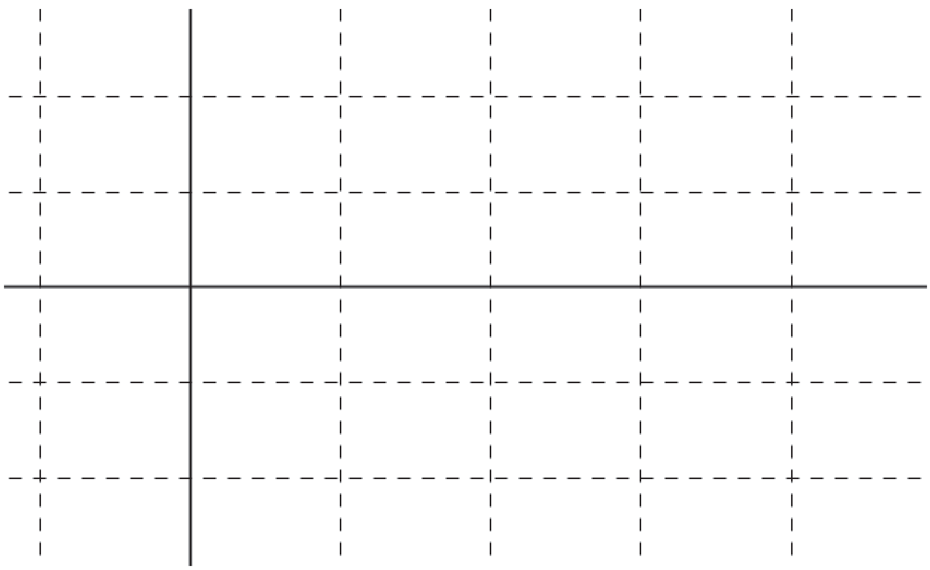
Función= ________________________

ACTIVIDAD 4 Grafica las siguientes funciones y determina **amplitud, periodo y frecuencia** en cada una.

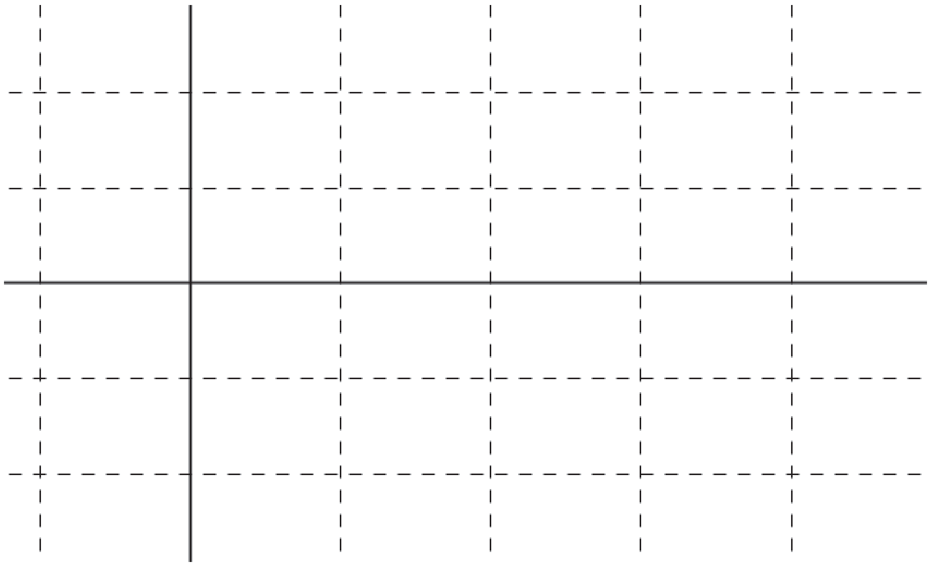
a) $y = 2\,sen\,3x$



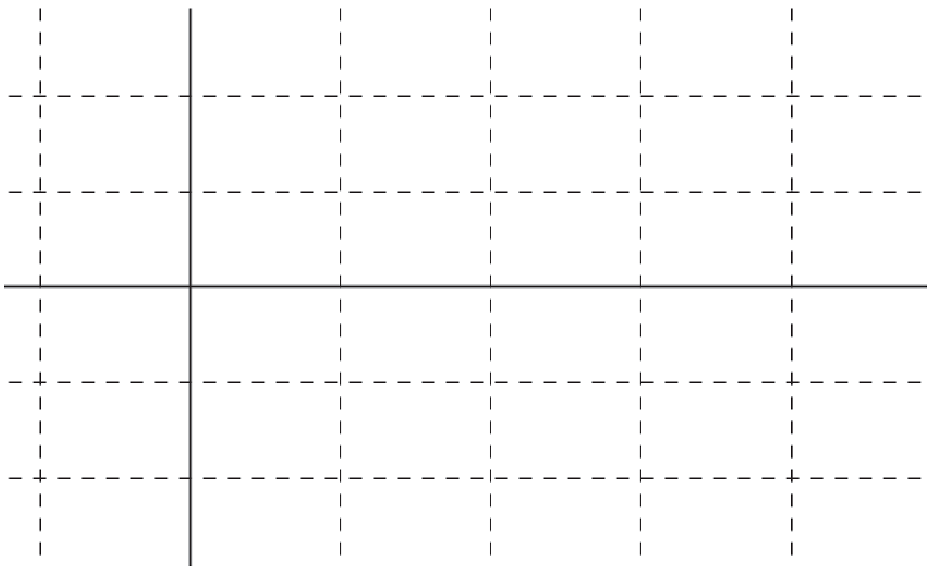
b) $y = \cos\,4x$



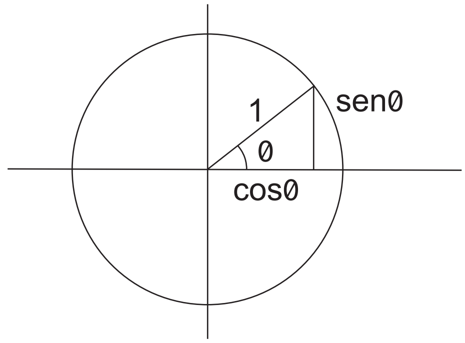
c) $y = \frac{1}{2}\ sen\ 6x$



d) $y = \cos x$



Identidades trigonométricas



Utilizando el círculo trigonométrico, se pueden obtener las identidades trigonométricas, como se muestra a continuación.

Identidades básicas o de cociente:

Ejercicio: Observa el esquema de la circunferencia y responde a las preguntas:

1. ¿Cuál es el nombre que recibe el cateto opuesto?

2. ¿Qué nombre recibe el cateto adyacente?

3. Si sabemos que $\tan x = \dfrac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$, ¿cuál es la relación en términos de seno y coseno para $\tan x$?

Identidades recíprocas

Se llaman así porque si multiplicamos ambas relaciones trigonométricas su resultado es 1.

$$sen.x.\csc x = 1 \qquad \cos .x.\sec x = 1 \qquad \tan .x.\cot x = 1$$

O bien, pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\csc x = \frac{1}{sen.x} \qquad \sec .x = \frac{1}{\cos .x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan .x}$$

Ejercicio: Considerando que cotangente es inversa o recíproca de la tangente $\cot x = \dfrac{1}{\tan .x}$, ¿cuál es la relación en términos de seno y coseno para $\cot x$?

Identidades de cociente

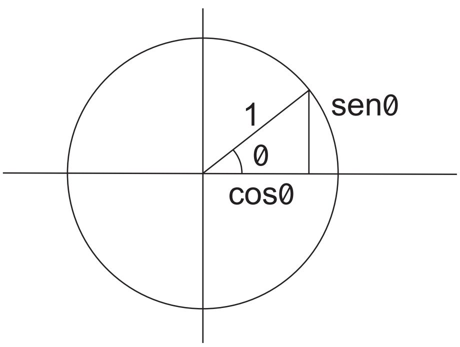
Se les llama así a la relación de la función tangente $(\tan x)$ y cotangente $(\cot x)$ en términos de seno y coseno.

Escríbelas:

$\tan x = -$ $\cot .x = -$

Identidades pitagóricas

Son identidades que se obtienen utilizando el Teorema de Pitágoras del círculo unitario.



Utilizando el mismo esquema:

Por Pitágoras se tiene que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, que en un círculo unitario es 1, entonces:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

Las otras identidades derivadas de esta expresión son:

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ $\qquad$ $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

Demostración de $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

Como $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{sen^2 x}$ **y** $\csc^2 x = \dfrac{1}{sen^2 x}$ entonces:

$$\frac{\cos^2 x}{sen^2 x} + 1 = \frac{1}{sen^2 x}$$

Sumando los términos de la izquierda:

$\dfrac{\cos^2 x + sen^2 x}{sen^2 x} = \dfrac{1}{sen^2 x}$ Recordando que: $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$\dfrac{1}{sen^2 x} = \dfrac{1}{sen^2 x}$ De donde se demuestra que la identidad es correcta.

Ejercicio: Demuestra la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

Identidades del ángulo doble:

$sen.2x = 2\,senx.\cos x$ $\cos.2x = \cos^2 x - sen^2 x$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Demostración de Identidades:

Ejemplos resueltos:

1) Demostrar la identidad: $sen.x.\sec.x = \tan.x$

$sen.x.\sec.x = \tan.x$, **como:** $\sec.x = \dfrac{1}{\cos.x}$ y $\tan x = \dfrac{sen.x}{\cos.x}$

$$sen.x.\sec.x = \tan.x$$

$$sen.x\left(\frac{1}{\cos.x}\right) = \frac{sen.x}{\cos.x}$$

$$\frac{sen.x}{\cos.x} = \frac{sen.x}{\cos.x}$$

Se demuestra su veracidad.

2) Demostrar la identidad: $\cot.x.\cos.x + sen.x = \csc x$

Dado que: $\cot x = \dfrac{\cos.x}{sen.x}$ y $\csc.x = \dfrac{1}{sen.x}$

$$\cot.x.\cos.x + sen.x = \csc x$$

$$\frac{\cos.x}{sen.x}(\cos.x) + sen.x = \frac{1}{sen.x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{sen.x} + \frac{sen.x}{1} = \frac{1}{sen.x}$$

$$\frac{\cos^2 x + sen^2 x}{senx} = \frac{1}{sen.x}$$

$$\frac{1}{sen.x} = \frac{1}{sen.x}$$

Se demuestra su veracidad.

3) Demuestra la identidad $\frac{\tan.x-\cot.x}{\tan.x+\cot.x}=1-2\cos^2 x$

$$\frac{\frac{sen.x}{\cos.x}-\frac{\cos.x}{sen.x}}{\frac{sen.x}{\cos.x}+\frac{\cos.x}{sen.x}}=1-2\cos^2 x$$

$$\frac{\frac{sen^2 x-\cos^2 x}{sen.x.\cos.x}}{\frac{sen^2 x+\cos^2 x}{sen.x.\cos.x}}=1-2\cos^2 x$$

Como los denominadores son iguales los eliminamos:

$$\frac{sen^2 x-\cos^2 x}{sen^2 x+\cos^2 x}=1-2\cos^2 x$$

Dado que: $sen^2 x+\cos^2 x=1$

$$\frac{sen^2 x-\cos^2 x}{1}=1-2\cos^2 x$$

$$sen^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x=1$$

$$sen^2 x+\cos^2 x=1$$

$$1=1$$

Se demuestra su veracidad.

ACTIVIDAD 5 Demuestra la veracidad de las siguientes identidades.

a) $\cos^2 .x. - sen^2 .x = 1 - 2sen^2 x$

b) $\tan .x.sen.x + \cos .x = \sec x$

c) $sen.x.\csc .x = 1$

d) $\cot .x.\sec .x.sen.x = 1$

e) $\dfrac{sen^2 .x}{\cos .x} + \cos .x = \sec .x$

f) $sen^2 .x = 1 - \cos^2 x$

g) $\cos .x.\csc .x = \cot .x$

h) $\tan .x.\csc .x.\cos .x = 1$

BLOQUE VI

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Competencias genéricas

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

CG4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

CG4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

CG5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

CG8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

CG8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Competencias disciplinares

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

CDBM 6 Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

BLOQUE VI TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Propósito del bloque

Resuelve triángulos oblicuángulos aplicando las leyes de senos y cosenos que le permitan cuantificar el espacio en problemas reales o hipotéticos.

Interdisciplinariedad

- ✓ Taller de Lectura y Redacción I
- ✓ Informática I
- ✓ Ética I

Ejes transversales

- ✓ Eje transversal social
- ✓ Eje transversal de la salud
- ✓ Eje transversal ambiental
- ✓ Eje transversal de habilidades lectoras

Aprendizajes esperados

- Propone, de manera colaborativa, el uso de las leyes de senos y cosenos como alternativas de solución para situaciones reales.
- Desarrolla estrategias con un pensamiento crítico y reflexivo para la solución de triángulos oblicuángulos encontrados en su contexto.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes
➢ Ley de senos. ➢ Ley de cosenos. ➢ Solución de triángulos oblicuángulos.	➢ Discrimina entre la ley de senos o cosenos para la solución de triángulos oblicuángulos. ➢ Describe el proceso de solución de triángulos oblicuángulos.	➢ Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. ➢ Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. ➢ Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Situación didáctica

¿Quién me salva?

En una playa se tienen dos torres de vigilancia, alineadas paralelamente a la playa. Patricio se encuentra en la torre 4 y Rodrigo se encuentra en la torre 6**.** En ese momento ambos observan a una persona en dificultades que pide auxilio. La persona se encuentra mar adentro, a diferente distancia de ambos salvavidas. Los dos salen nadando rápidamente.

a) ¿Cómo sería un diagrama donde se muestren las trayectorias que siguieron los dos salvavidas y la distancia que hay entre las torres de vigilancia?

b) ¿Qué tipo de figura es?

c) ¿Cuál de los dos salvavidas llegará primero?

Triángulos oblicuángulos

De acuerdo a la medida de sus ángulos, todo triángulo puede ser clasificado, en triángulo rectángulo o triángulo oblicuángulo.

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto o de 90°.

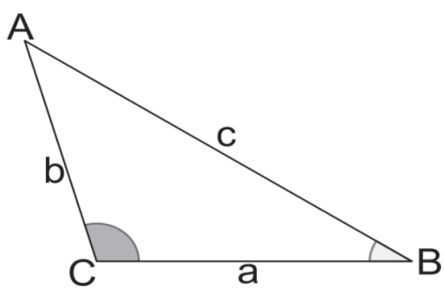
Un triángulo oblicuángulo no contiene ningún ángulo recto, es decir, puede tener tres ángulos agudos (acutángulo) o un ángulo obtuso y dos ángulos agudos (obtusángulo).

Para resolver los triángulos oblicuángulos podemos utilizar dos importantes leyes trigonométricas: **ley de senos y ley de cosenos**.

Nota: no podemos utilizar las razones trigonométricas seno, coseno o tangente como lo aplicamos en la resolución de triángulos rectángulos.

Ley de senos

En un triángulo oblicuángulo se cumple que la razón entre cualquiera de sus lados y el seno del ángulo opuesto a éste, es una constante, es decir, dado el triángulo:



$\frac{a}{SenA} = cte.$, y lo mismo se cumple para los otros dos lados con sus respectivos ángulos opuestos.

Por tanto, se tiene que: $$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

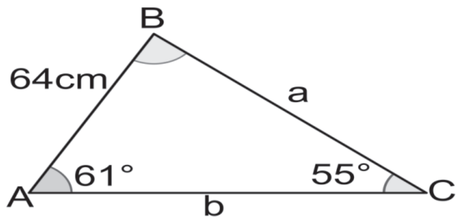
La forma de usar esta expresión es mediante la construcción de una proporción (la igualdad de dos de las tres razones), por ejemplo:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Por consiguiente, **esta ley aplica:**

- Cuando se conocen dos ángulos y un lado.
- Cuando se conocen dos lados y un ángulo.
- Con la condición de que uno de esos lados y su ángulo opuesto sean conocidos.

Observa el siguiente **ejemplo**:
Se desea calcular los lados **a** y **b** del triángulo oblicuángulo mostrado.



Considerando utilizar la expresión $\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$ dado que conocemos tres de los datos necesarios y de ahí podemos calcular el dato faltante que es el lado "**a**"

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

$$\frac{a}{sen.61°} = \frac{64}{sen.55°}$$

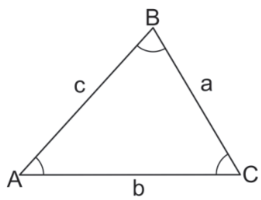
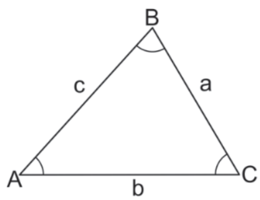
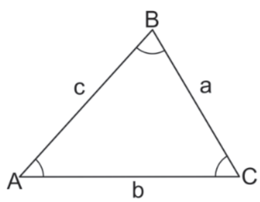
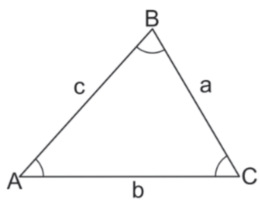
$$a = \frac{64sen.61°}{sen.55°}$$

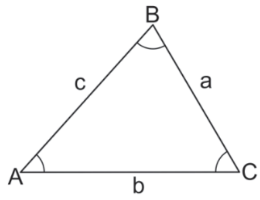
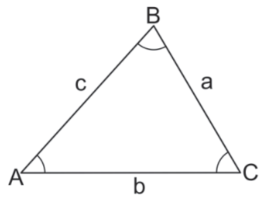
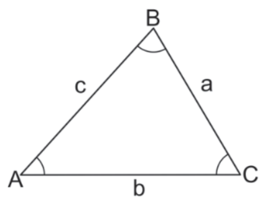
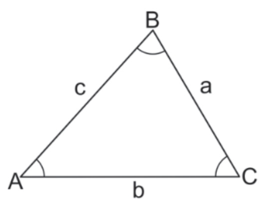
$$a = 68.33$$

De manera **individual determina** el valor del lado b, pero ahora utilizando la expresión

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

ACTIVIDAD 1 Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios aplicando la ley de senos:

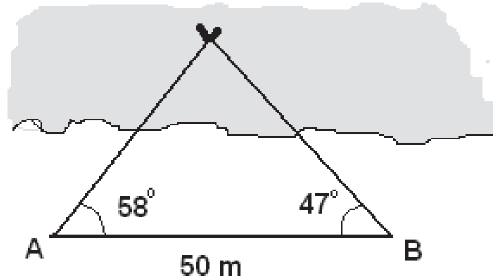
Ejercicio	Operaciones
a) Calcular el lado b $\angle A = 43°$ $a = 20$ $\angle B = 112°$  	
b) Calcular el lado b $\angle A = 28°$ $a = 21$ $\angle B = 15.56°$  	
c) Calcular el lado b $\angle C = 74.39°$ $c = 12$ $\angle B = 58.18°$  	
d) Calcular el ángulo B $\angle A = 21°$ $a = 840$ $b = 485$  	

e) Calcular el lado c $\angle$ B = 45° a = 804 $\angle$ C = 35° 	
f) Calcular el lado c $\angle$ B = 102° b = 22 $\angle$ C = 51.61° 	
g) Calcular el ángulo B $\angle$ A= 47° a = 62 b = 35 	
h) Calcular el ángulo A $\angle$ C= 72° c = 124 a = 83 	

ACTIVIDAD 2 Resuelve de forma individual. Después intercambia tu trabajo con otro compañero para revisarlo.

A) Tomando como referencia la situación didáctica.

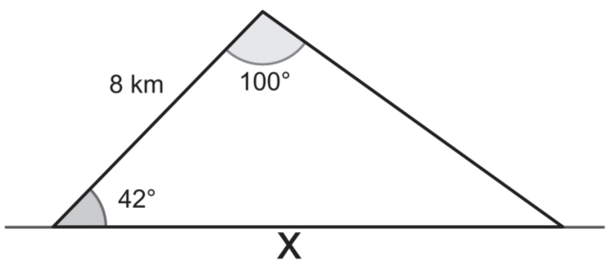
Patricio, el salvavidas del punto A, observa al nadador a un ángulo de 58° y Rodrigo, el salvavidas del punto B, lo observa en un ángulo de 47°, si ambos están separados a una distancia de 50m entre sí.



1. ¿Qué distancia tiene que recorrer cada salvavidas para rescatarlo?

2. ¿Quién llegará primero?

B) Se está realizando mantenimiento en un tramo carretero por lo que se indica una desviación hacia el norte de 42°, y a los 8 km una desviación hacia el sur de 100°, para llegar de nueva cuenta al tramo carretero.



1. ¿Cuál es la longitud del tramo de la carretera que se está dando mantenimiento?

2. ¿Cuántos kilómetros en total se recorre en la desviación?

C) Un globo aerostático está suspendido por dos cables sujetos en el suelo por dos argollas, la primera con un ángulo de elevación de 48° y la segunda con un ángulo de 54°, esta última sujeta un cable de 20 metros de longitud.

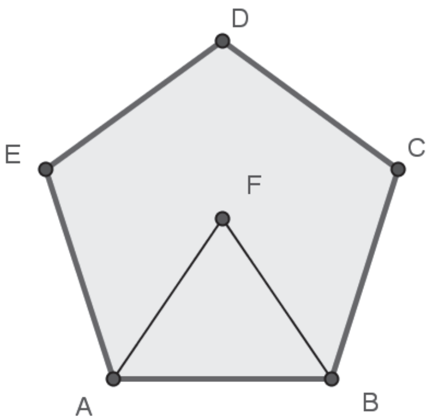
1. ¿Cuál es el ángulo que se forma entre los dos cables que amarran al globo?

2. ¿Cuál es la longitud del cable del segundo cable?

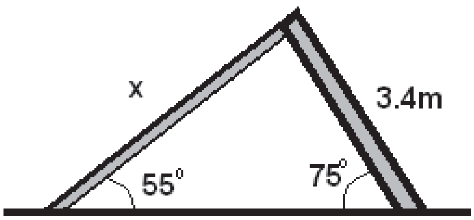
3. ¿Qué distancia de separación hay entre las dos argollas que se encuentran en el suelo?

4. ¿A qué altura se encuentra el globo?

D) ¿Cuánto mide la longitud del lado AF del pentágono regular si se conoce que cada uno de sus lados miden 20 cm?

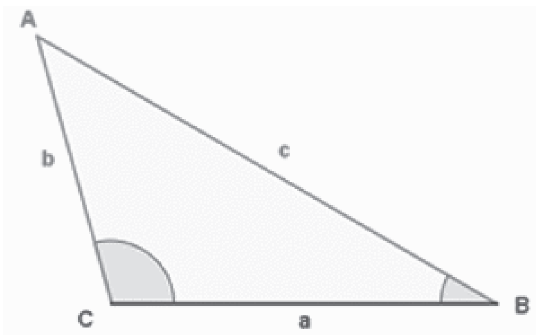


E) Para evitar que se caiga una columna que se encuentra con una inclinación de 75° con relación al suelo, se colocó una viga de acero con una inclinación de 55°, con respecto al suelo. Si la columna mide 3.4 m, ¿cuánto mide la viga?



Ley de cosenos

En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman:



Esta expresión conocida como ley de cosenos puede ser enunciada como:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

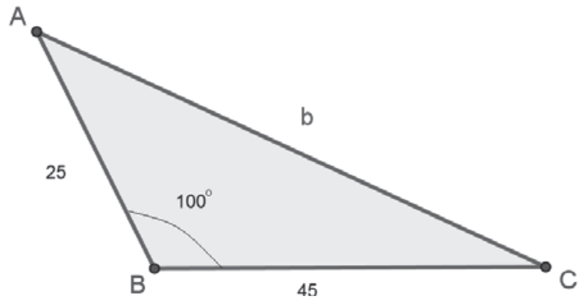
Por consiguiente, **esta ley aplica para:**

- Para encontrar un tercer lado si se conocen los otros dos lados y el ángulo que se forma entre ellos.
- Para encontrar los tres ángulos interiores si se conocen los tres lados.

Nota: en algunos ejercicios podría ser necesario utilizar ambas leyes (senos y cosenos) para resolver el triángulo.

Observa los siguientes **ejemplos**:

1.- Se desea calcular el lado "**b"** del triángulo oblicuángulo mostrado.



Utilizando ley de cosenos para determinar lado "b" tenemos: **b² = a² + c² – 2ac cosB**

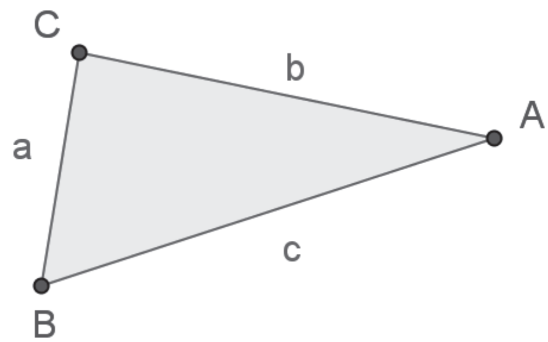
$$b^2 = 45^2 + 25^2 - (2(45)(25)\cos 100°)$$
$$b^2 = 2025 + 625 - (-390.70)$$
$$b^2 = 3040.70$$
$$b = 55.14$$

2.- Se tiene el triángulo ABC, cuyos lados miden a = 4, b = 5 y c = 8 cm. Determinar los ángulos interiores del triángulo. Una manera práctica de determinar los ángulos es despejando la expresión original:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$



Calculando los ángulos A, B y C.

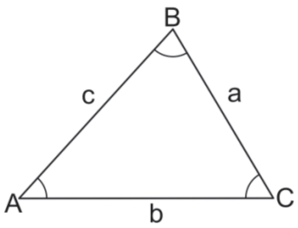
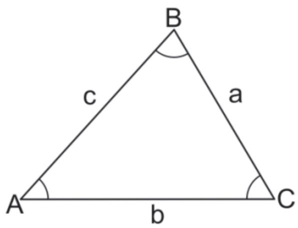
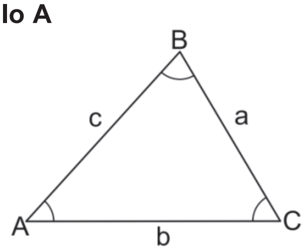
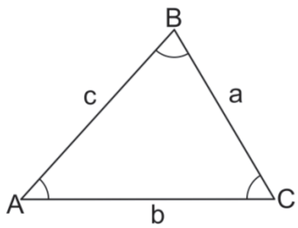
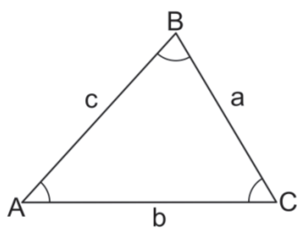
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) \qquad B = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right) \qquad C = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

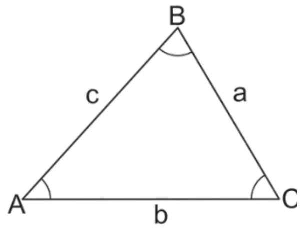
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{4^2 - 5^2 - 8^2}{-2(5)(8)}\right) \qquad B = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 - 4^2 - 8^2}{-2(4)(8)}\right) \qquad C = \cos^{-1}\left(\frac{8^2 - 4^2 - 5^2}{-2(4)(5)}\right)$$

$$A = \cos^{-1}(0.9125) \qquad B = \cos^{-1}(0.8593) \qquad C = \cos^{-1}(-0.575)$$

$$A = 24.15° \qquad B = 30.75° \qquad C = 125.10°$$

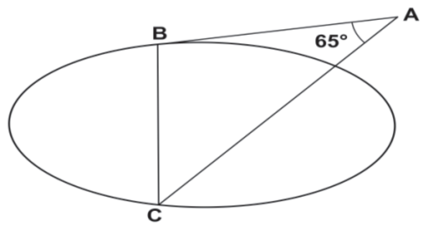
ACTIVIDAD 3 Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios, aplicando la ley de cosenos:

Ejercicio	Operaciones
A) Calcular el lado c $\angle C = 35°$ $a = 75$ $b = 185$ 	
B) Calcular el lado a $\angle A = 116°$ $c = 12$ $b = 18$ 	
C) Calcular el ángulo A $a = 13$ $b = 15$ $c = 17$ 	
D) Calcular el lado c $a = 130$ $b = 220$ $\angle C = 28°$ 	
E) Calcular el lado a $\angle A = 60°$ $b = 25$ $c = 18$ 	

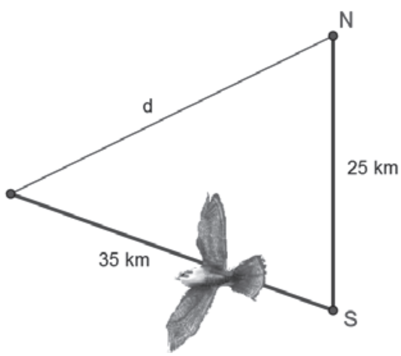
F) Calcular el lado c $\angle C = 45°$ $a = 6$ $b = 9$  	

ACTIVIDAD 4 Resuelve de forma individual. Después intercambia tu trabajo con otro compañero para revisarlo.

A) El ingeniero Torroja, auxiliado por Don Matías, logró determinar desde su punto de observación, dos de las medidas de un cráter, ambas a un ángulo de separación de 65°. Si desde ese punto las medidas fueron 450 m y 625 m, ¿cuál es el ancho del cráter?



B) Un biólogo coloca un dispositivo localizador a un halcón para una investigación. En un momento dado, el halcón vuela 25 km con dirección sur, después cambia su vuelo con una dirección 75° al oeste. Si voló 35 km, ¿a qué distancia se encuentra del punto de partida?



C) Se colocará un arenero en forma de triángulo. Dos de sus ángulos miden respectivamente 85° y 45°, y el lado entre los dos ángulos mide 6 metros de largo. Si en su perímetro se colocara un cordón de concreto, ¿cuál es la longitud total del cordón?

D) En un parque se requiere construir, además, una plataforma triangular para presentación de grupos musicales cuyos lados midan 34, 40 y 28 m. Para trazarlo los albañiles necesitan conocer los ángulos interiores, ¿cuánto mide cada uno?

E) Dos botes que naufragaron en el mar son observadas por un helicóptero de la policía. En su reporte el piloto menciona que tiene un ángulo visual de 65°, y estima que el bote A está a 60 m del helicóptero y el bote B a una distancia de 80 m. Determina la distancia a la que se encuentran los botes entre sí.

MIS NOTAS:

MIS NOTAS: