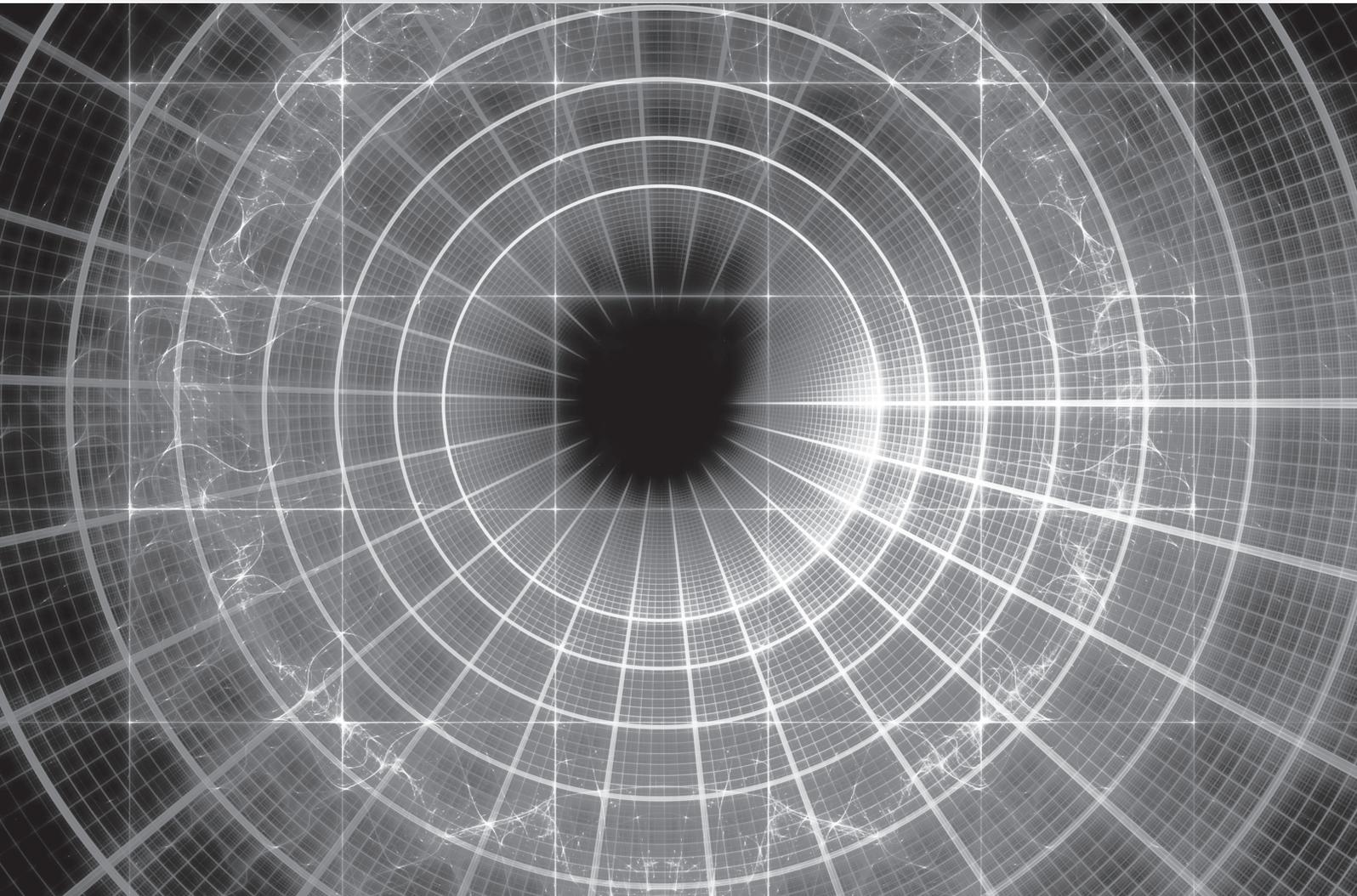


# CÁLCULO DIFERENCIAL

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA



COLEGIO DE  
BACHILLERES  
DEL ESTADO DE  
BAJA CALIFORNIA  
MR.

Guía de Actividades del Alumno para el Desarrollo de Competencias

Quinto Semestre

# COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA

FRANCISCO ARTURO VEGA DE LA MADRID  
GOBERNADOR DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA

MIGUEL ÁNGEL MENDOZA GONZÁLEZ  
Secretario de Educación y Bienestar Social y Director General de ISEP del Estado

HÉCTOR RIVERA VALENZUELA  
Subsecretario de Educación Media Superior, Superior, Formación Docente y Evaluación

AMPARO AIDÉ PELAYO TORRES  
Directora General de CBBC

OMAR VÉLEZ MUÑOZ  
Director de Planeación Académica

## CÁLCULO DIFERENCIAL

### Primera edición, agosto 2013

Diseñado por: Q.I. Melquiades Gaxiola Brambila  
Ing. Mayra de la Peña Castro  
Ing. Luis Gutiérrez Álvarez

Revisado por: Q.I. Melquiades Gaxiola Brambila

### Segunda edición, agosto 2016:

Actualizado por: Ing. Simón Muñoz Sánchez  
Ing. Víctor Ramón Carrillo Bretado  
Ing. José Ignacio Rojo Lomelí

### Tercera edición, agosto 2017:

En la realización del presente material, participaron:

#### **JEFA DEL DEPARTAMENTO DE ACTIVIDADES EDUCATIVAS**

Lic. Teresa López Pérez

#### **EDICIÓN, AGOSTO DE 2017**

Lic. Gerardo Enríquez Niebla  
Ing. Diana Castillo Ceceña

*La presente edición es propiedad del  
Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California.  
Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra.  
Este material fue elaborado bajo la coordinación y supervisión de la  
Dirección de Planeación Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California.  
Blvd. Anáhuac #936, Centro Cívico, Mexicali, B.C., México.  
[www.cobachbc.edu.mx](http://www.cobachbc.edu.mx)*

# ÍNDICE

PRESENTACIÓN

COMPETENCIAS GENÉRICAS QUE EXPRESAN EL PERFIL DEL EGRESADO

COMPETENCIAS DISCIPLINARES EXTENDIDAS DEL CAMPO DE MATEMÁTICAS

<b>BLOQUE I:</b>	Argumentas el estudio del cálculo mediante el análisis de su evolución, sus modelos matemáticos y su relación con hechos reales -----	2
	-----	
Examen diagnóstico-----		3
Leyes de los signos-----		4
Números racionales y operaciones -----		4
Suma de fracciones -----		5
Resta de fracciones-----		5
Multiplicación de fracciones-----		5
División de fracciones -----		6
Reglas de exponentes -----		6
Suma y resta de términos algebraicos-----		7
Multiplicación algebraica -----		7
Monomio por monomio-----		8
Monomio por polinomio-----		8
Polinomio por polinomio-----		8
Simplificación de expresiones racionales-----		8
Antecedentes del cálculo-----		10
Situación didáctica 1-----		11
Conflicto cognitivo-----		11
Funciones algebraicas-----		13

Funciones trascendentes----- 14

**BLOQUE II:** Resuelves problemas de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social -----  
----- 24

Examen diagnóstico----- 25

¿Para qué sirven los límites?----- 26

Situación didáctica----- 26

Conflicto cognitivo----- 26

Concepto de límite----- 27

Definición intuitiva de límite----- 28

Formas indeterminadas del límite de una función----- 33

Factorización----- 33

Factorización de un polinomio por factor común----- 33

Factorización de una diferencia de cuadrados----- 35

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto----- 35

Factorización de un trinomio de segundo grado----- 36

Límite indeterminado de la forma  $\frac{0}{0}$ ----- 37

Límite indeterminado de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ ----- 38

Límites de funciones trascendentes----- 42

Límites de funciones trigonométricas----- 42

Referencias----- 48

Instrumentos de autoevaluación y coevaluación----- 49

**BLOQUE III:** Calculas, interpretas y analizas razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos, administrativos, en la agricultura, en la ganadería y en la industria. -----  
----- 52

Situación didáctica 1----- 53

Conflicto cognitivo-----	54
Razón de cambio promedio-----	54
La razón de cambio como límite-----	57
La derivada mediante la regla de los cuatro pasos-----	59
Formulario de las reglas para derivar-----	61
Reglas para derivar-----	62
Derivadas sucesivas-----	70
Instrumento de autoevaluación y coevaluación -----	72
<b>BLOQUE IV:</b> Calculas e interpretas máximos y mínimos sobre los fenómenos que han cambiado en el tiempo de la producción industrial o agropecuaria. -----	74
Situación didáctica 1-----	75
Conflicto cognitivo-----	75
Máximos y mínimos-----	77
Criterio de la primera derivada para calcular máximos y mínimos-----	77
Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos-----	82
Puntos de inflexión-----	84
Criterio de la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión-----	85
Referencias -----	87
Instrumento de autoevaluación y coevaluación-----	88

## PRESENTACIÓN

En el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior, Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California (CBBC), se ha propuesto la meta de formar y consolidar el perfil de egreso en el bachiller, poniendo a disposición del alumno los elementos necesarios que le permitan crecer y desarrollar conocimientos, habilidades, actitudes y valores para poder enfrentar los retos de un mundo globalizado, vertiginoso, competitivo y complejo. Por tanto, es importante que el proceso educativo implemente estrategias que contemplen actividades de aprendizaje en diversos contextos y escenarios reales, donde el estudiante con creatividad, habilidad y destreza sepa desarrollar, movilizar y transferir las competencias adquiridas.

En virtud de lograr lo anterior y consciente de la dificultad para que el alumnado tenga acceso a una bibliografía adecuada, pertinente y eficaz con el entorno socioeconómico actual, el CBBC brinda la oportunidad a los estudiantes de contar con materiales didácticos para el óptimo desarrollo de los programas de estudio de las asignaturas que comprende el Plan de Estudios Vigente. Cabe subrayar que, dichos materiales son producto de la participación de docentes de la Institución, en los cuales han manifestado su experiencia, conocimientos y compromiso en pro de la formación de los jóvenes bachilleres. Los materiales didácticos se dividen en dos modalidades: Guía de Actividades del Alumno para el Desarrollo de Competencias, dirigida a las asignaturas de los Componentes de Formación Básica y Propedéutica, y Guía de Aprendizaje; para las capacitaciones del Componente de Formación para el Trabajo. Cabe señalar que, los materiales se encuentran en un proceso permanente de revisión y actualización por parte de los diferentes equipos docentes así como del equipo editorial. Las guías se pueden consultar en la página Web del CBBC: [www.cobachbc.edu.mx](http://www.cobachbc.edu.mx) en la sección alumnos / material didáctico.

Es necesario, hacer énfasis que la guía no debe ser tomada como la única herramienta de trabajo y fuente de investigación, ya que es imprescindible que los estudiantes lleven a cabo un trabajo de consulta en otras fuentes bibliográficas impresas y electrónicas, material audiovisual, páginas Web, bases de datos, entre otros recursos didácticos que apoyen su formación y aprendizaje.

## **COMPETENCIAS GENÉRICAS QUE EXPRESAN EL PERFIL DEL EGRESADO**

Las competencias genéricas son aquellas que todos los bachilleres deben estar en la capacidad de desempeñar, y les permitirán a los estudiantes comprender su entorno (local, regional, nacional o internacional e influir en él), contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y practicar una convivencia adecuada en sus ámbitos social, profesional, familiar, etc. Estas competencias junto con las disciplinares básicas constituyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato.

### ***Se autodetermina y cuida de sí***

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.

### ***Se expresa y se comunica***

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

### ***Piensa crítica y reflexivamente***

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

### ***Aprende de forma autónoma***

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

### ***Trabaja en forma colaborativa***

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

### ***Participa con responsabilidad en la sociedad***

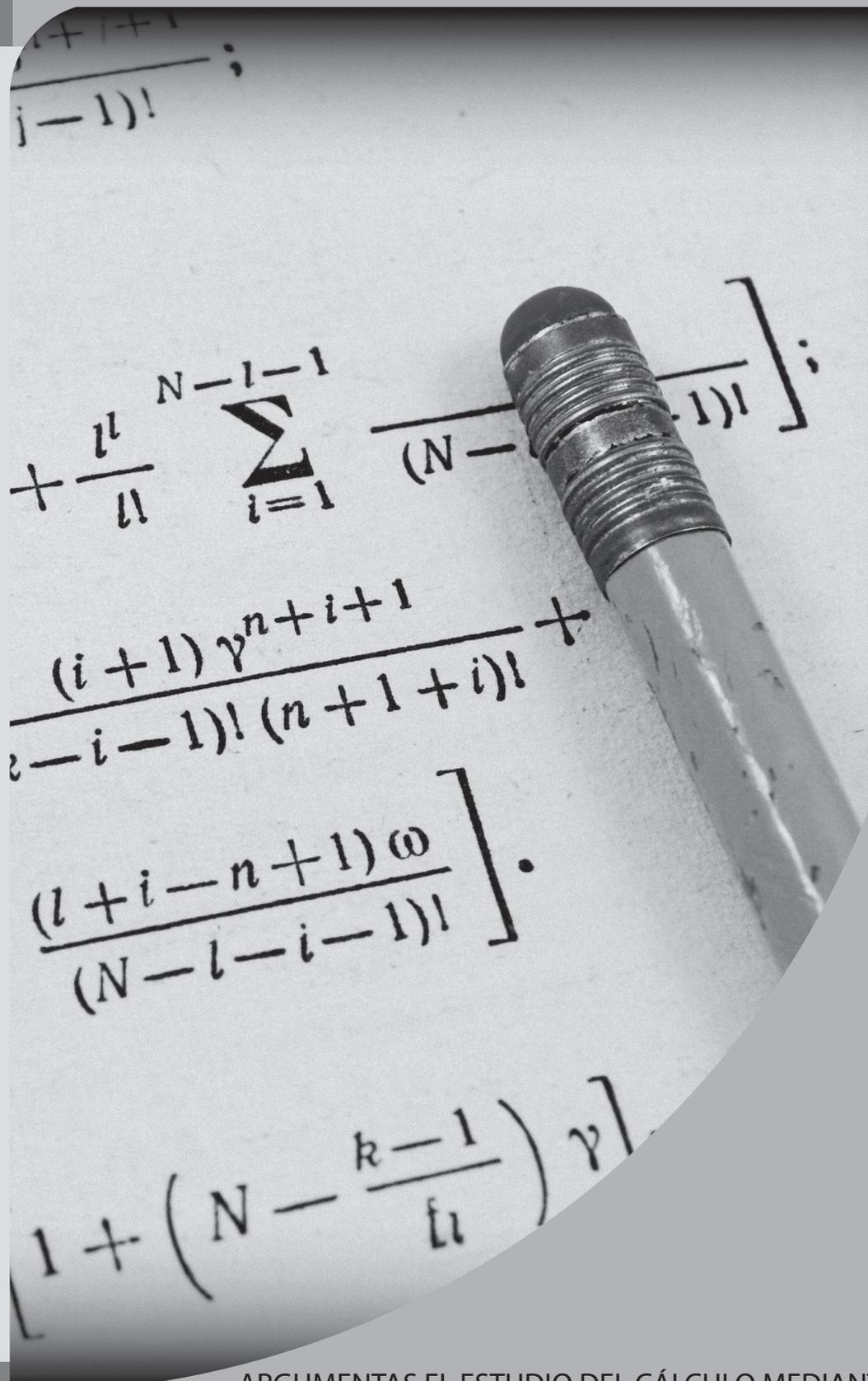
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

**Nota:** Al final del material didáctico encontrarás las Competencias Genéricas con sus respectivos atributos, los cuales desarrollarás durante el bachillerato.

## **COMPETENCIAS DISCIPLINARES EXTENDIDAS DEL CAMPO DE MATEMÁTICAS**

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

# BLOQUE I



ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES

## Bloque

# I

## ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES

### DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:

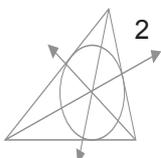
- Reconoce el campo de estudio del Cálculo Diferencial, destacando su importancia en la solución de modelos matemáticos aplicados a situaciones cotidianas.
- Relaciona los modelos matemáticos con su representación geométrica para determinar áreas y volúmenes en cualquier situación de su vida cotidiana.

### COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

- Construye e interpreta modelos matemáticos sencillos, mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y geométricos.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos en el análisis de la evolución histórica del estudio del Cálculo y los contrasta con su aplicación en situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con modelos matemáticos sencillos y su representación gráfica.
- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades al trabajar los modelos matemáticos.

### OBJETOS DE APRENDIZAJE:

- Evolución del Cálculo.
- Modelos matemáticos: Un acercamiento a máximos y mínimos



## Examen diagnóstico

**Instrucciones:** resuelve los siguientes ejercicios sin omitir los procedimientos ni usar calculadora.

Utiliza las reglas de exponentes:

1.  $(2ab^2)^5 =$

2.  $2^{-2} =$

Realiza operaciones con fracciones:

3.  $\frac{1}{5} + \frac{4}{7} =$

4.  $\frac{9}{4} - 1 =$

5.  $\frac{(3)}{(2)} \frac{(8)}{(10)} \frac{(5)}{(4)} =$

6.  $\frac{(4)}{(3)} \div \frac{(5)}{(8)} =$

Realiza operaciones con términos algebraicos:

7.  $6x^3 + 4x - 2x^3 + 10x^2 - 9x^2 - 8x =$

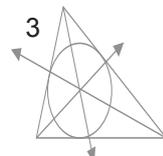
8.  $5a(2ab - 4a^2c) =$

9.  $x(7x + 4)(x - 3) =$

10.  $(3x^2 - x)(5x + 4) =$

11. Llena la tabla que se presenta si  $x$  varía de 0 a 4 y la función es  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$x$	$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
0	
1	
2	
3	
4	



El presente información tiene la finalidad de recordar al estudiante algunos aspectos de Aritmética y Álgebra, para después le sea más fácil su aplicación en el Cálculo.

### Leyes de los signos

Tanto en la multiplicación como en la división “signos iguales resultado positivo, signos diferentes resultado negativo”.

#### Multiplicación:

$$(+)(+) = + \quad , \quad (-)(-) = +$$

$$(+)(-) = - \quad , \quad (-)(+) = -$$

#### División:

$$\frac{(+)}{(+)} = + \quad , \quad \frac{(-)}{(-)} = +$$

$$\frac{(+)}{(-)} = - \quad , \quad \frac{(-)}{(+)} = -$$

### Números racionales y operaciones

Iniciaremos con el concepto de número racional “es todo aquel número que puede expresarse como el cociente de dos números enteros”, por ejemplo:  $\frac{2}{5}, \frac{6}{7}, \frac{1}{3}$ , etc.

Así, un número racional se puede escribir de varias maneras, es decir, sus equivalencias o como se les llama en matemáticas, fracciones equivalentes. La regla dice que se tiene que multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número o dividir, si es que es divisible entre ese mismo número, lo cual tendrá que dar algo equivalente porque en realidad estamos multiplicando por “uno”. Algunos ejemplos son:

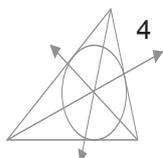
1)  $\frac{3}{5} \frac{(2)}{(2)} = \frac{6}{10}$ ; a tres quintos lo multiplicamos por dos y obtenemos seis decimos.

2)  $\frac{12}{18} \frac{\div 3}{\div 3} = \frac{4}{6}$ ; a doce dieciochoavos los dividimos entre tres y obtenemos cuatro sextos.

3) El 2 convertido a tercios;  $\frac{2}{1} \frac{(3)}{(3)} = \frac{6}{3}$

Algo parecido se hace para elevar una fracción a una potencia:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3^2}{4^2}\right) = \frac{9}{16}$$



Para obtener una raíz:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Las operaciones con fracciones comunes suelen ser motivo de confusiones entre los estudiantes, aquí se presentarán las más básicas como son: suma, resta, multiplicación, división.

### Suma de fracciones

Cuando la fracción presenta el mismo denominador la suma se vuelve muy sencilla, pues solo se suman los numeradores y se deja el mismo denominador:

$$1) \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$2) \frac{6}{5} + 1 = \frac{6}{5} + \frac{5}{5} = \frac{11}{5}$$

Un método es el de multiplicación cruzada, que consiste en multiplicar los denominadores, luego se multiplica cruzado sumándose los resultados:

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{9} = \frac{(3)(9) + (2)(4)}{(2)(9)} = \frac{27 + 8}{18} = \frac{35}{18}$$

Nota: Cuando son tres o más fracciones, es de ayuda, utilizar el mínimo común múltiplo (mcm).

### Resta de fracciones

Para restar fracciones se utilizan los mismos métodos que para la suma, retomaremos el ejemplo anterior para que hagas tus comparaciones:

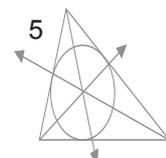
$$\frac{3}{2} - \frac{4}{9} = \frac{(3)(9) - (2)(4)}{(2)(9)} = \frac{27 - 8}{18} = \frac{19}{18}$$

Para completar la información visita: <https://www.youtube.com/watch?v=1ktyVZthSX4>

### Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones solo se realiza el producto de todos los numeradores y luego el producto de todos los denominadores:

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{(3)(5)}{(2)(7)} = \frac{15}{14}$$



## División de fracciones

Se multiplican los extremos poniéndose el resultado en el numerador, luego se multiplican los centros y el resultado en el denominador, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{(7)(3)}{(5)(4)} = \frac{21}{20}$$

Para ampliar la información visita: [https://www.youtube.com/watch?v=va9eoz7q\\_vQ](https://www.youtube.com/watch?v=va9eoz7q_vQ)

## Reglas de exponentes

Elevar un número a una potencia significa que lo multiplicaremos tantas veces como lo indique esa potencia o exponente.

$$2^4 = (2)(2)(2)(2) = 16$$

También podemos hacerlo a la inversa, es decir, las veces que multipliquemos un número ese será el exponente de él:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

El producto de dos o más potencias, los exponentes se suman:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ en ejemplo: } 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

El cociente de dos potencias, los exponentes se restan:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ en ejemplo: } \frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3$$

Cuando se presenta un número elevado a una potencia y a la vez a otra potencia, los exponentes se deben multiplicar:

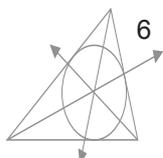
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \text{ en ejemplo: } (2^3)^4 = 2^{(3)(4)} = 2^{12}$$

Cuando una potencia se encuentra dentro de una raíz, el exponente será una fracción, donde el numerador es la potencia del número y el denominador el valor de la raíz:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ en ejemplo: } \sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}}$$

Esta regla también se aplica a la inversa:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ en ejemplo: } 7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4}$$



Para las potencias negativas se mueve la potencia al denominador y se volverá positivo el exponente:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ en ejemplo: } 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

Esta regla también se aplica a la inversa:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}, \text{ en ejemplo: } \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

Para ampliar la información visita: [https://www.youtube.com/watch?v=6jNWN-o0\\_\\_Y](https://www.youtube.com/watch?v=6jNWN-o0__Y)

### Suma y resta de términos algebraicos.

El lenguaje algebraico facilita generalizar una expresión matemática, como los son las fórmulas de áreas de figuras geométricas, por ejemplo el área de un triángulo:  $A = \frac{b \cdot a}{2}$ , donde se utilizan números, símbolos y letras. Un término algebraico consta de 4 partes: signo, coeficiente, parte literal y exponente. Por ejemplo:

$$-3x^2$$

Podemos sumar o restar sólo los términos algebraicos semejantes (reducción de términos semejantes), es decir, aquellos que tengan la misma parte literal con el mismo exponente, por ejemplo:

$$1) 7a^2 - 3a^2 = 4a^2$$

$$2) a + 2a + 3a = 6a$$

$$3) 5m + 3m - 7n - 2n = 8m - 9n$$

$$4) 10a + 5a^3 - 3a - 2a^3 = (5a^3 - 2a^3) + (10a - 3a) = 3a^3 + 7a$$

Para más información visita: <https://www.youtube.com/watch?v=Tbl00zznaAU>

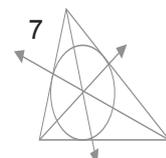
### Multiplicación algebraica.

Para multiplicar términos algebraicos lo ejemplificaremos de tres formas: monomio por monomio, monomio por polinomio y polinomio por polinomio. Pero antes vale la pena recordar las siguientes reglas de exponentes:

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$3. (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$



**Monomio por monomio**

Se multiplican los coeficientes y los exponentes se suman de una misma parte literal.

$$1) 3ab^4c^2(-5a^3bc^6) = (3)(-5)a^{1+3}b^{4+1}c^{2+6} = -15a^4b^5c^8$$

$$2) 2m(5n) = (2)(5)mn = 10mn$$

$$3) (-2x)(3xy)(2x) = (-2)(3)(2)x^{1+1}y = -8x^2y$$

$$4) 3mn^5(12m^{-3}n^2) = (3)(12)m^{1+(-3)}n^{5+2} = 36m^{-2}n^7$$

**Monomio por polinomio**

Multiplicamos el monomio por cada término del polinomio, no olvidando la regla anterior.

$$1) 3a(a - 2b) = 3a(a) + 3a(-2b) = 3a^2 - 6ab$$

$$2) 7b(2a - b) = 7b(2a) + 7b(-b) = 14ab - 7b^2$$

$$3) 3x^2(4x^6 - 2x^4 + x^3 - 5x + 3) = 12x^8 - 6x^6 + 3x^5 - 15x^3 + 9x^2$$

$$4) 2m^4n^2(3m^2 - 2mn + n^6) = 6m^6n^2 - 4m^5n^3 + 2m^4n^8$$

**Polinomio por polinomio**

Multiplicaremos cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. No olvidar reducir (sumar o restar) los términos semejantes.

$$1) (x + y)(x^2 + 3) = x(x^2) + x(3) + y(x^2) + y(3) = x^3 + 3x + x^2y + 3y$$

$$2) (x + 7)(x - 2) = x(x) - x(2) + 7(x) - 7(2) = x^2 + 5x - 14$$

$$3) (a - a^2)(2b - 3ab + b^2) = a(2b) - a(3ab) + a(b^2) + a^2(2b) - a^2(3ab) + a^2(b^2) = 2ab - 3a^2b + ab^2 + 2a^2b - 3a^3b + a^2b^2 = -3a^3b + a^2b^2 - a^2b + ab^2 + 2ab$$

Para más información visita: <https://www.youtube.com/watch?v=hlyBPkEJmXc>

**Simplificación de expresiones racionales**

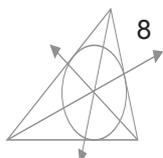
Prácticamente nos basaremos en que un número dividido entre él mismo es igual a uno, y si está multiplicando a otro número éste no se alterará si los anteriores se cancelan. Por ejemplo:

$$\frac{3(6)}{3} = \frac{3}{3}(6) = (1)(6) = 6$$

Esto también funciona con expresiones algebraicas, como se muestra a continuación:

$$1) \frac{x(4x-5)}{x} = \frac{x}{x}(4x-5) = (1)(4x-5) = (4x-5)$$

$$2) \frac{(2x+3)(x-7)}{2x+3} = \frac{2x+3}{2x+3}(x-7) = (1)(x-7) = (x-7)$$



$$3) \frac{(x^2+8)(6x+2)}{(x^2+8)(3x-4)} = (1) \frac{(6x+2)}{(3x-4)} = \frac{(6x+2)}{(3x-4)}$$

En otras ocasiones se tendrá que recurrir a buscar los factores de un número o expresión algebraica para poder cancelarlos.

$$1) \frac{12}{4} = \frac{4(3)}{4} = \frac{4}{4}(3) = (1)(3) = 3$$

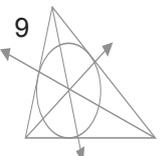
$$2) \frac{77}{11} = \frac{11(7)}{11} = \frac{11}{11}(7) = (1)(7) = 7$$

$$3) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{6}{4}\right) \left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2(3)}{2(2)}\right) \left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right) \left(\frac{2}{2}\right) \left(\frac{3}{3}\right) \left(\frac{7}{2}\right) = (1)(1)(1) \left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)$$

$$4) \frac{x^2+6x+8}{x+4} = \frac{(x+4)(x+2)}{x+4} = \frac{x+4}{x+4}(x+2) = (1)(x+2) = (x+2)$$

En los ejercicios anteriores no se omiten pasos para que el estudiante visualice de mejor manera el procedimiento, pero una vez aprendido y comprendido podrá acortar gran parte de éste.

Para más información visita: <https://www.youtube.com/watch?v=hFKRrOwmruY>



Las matemáticas existen porque día a día nos encontramos frente a ellas, sin ellas no podríamos hacer la mayoría de nuestra rutina, necesitamos las matemáticas constantemente, en la escuela, en la oficina, cuando vamos a preparar un platillo, etc. En las ciencias las matemáticas han tenido un mayor auge porque representan la base de todo un conjunto de conocimientos que el hombre ha ido adquiriendo.

Pero lo más misterioso de todo es que las matemáticas son el único medio que tenemos para entender el mundo que nos rodea.

¿Cuáles son los beneficios de la Matemáticas en tu vida?

### Antecedentes del Cálculo:

El cálculo es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los cambios en las variables, pendientes de curvas, valores máximos y mínimos de funciones, entre otras la determinación de longitudes, áreas y volúmenes.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

En equipos de 5 integrantes, investiga lo que se te pide a continuación:

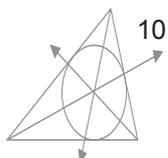
1. El origen del Cálculo en orden cronológico.
2. Las aportaciones hechas por **Newton y Leibniz**.
3. ¿Cuál es la importancia y aplicaciones del Cálculo?
4. Al final se expone frente al grupo de clases.

En el estudio de la variación, se pueden encontrar diversos tipos de problemas que se representan de diferentes formas, esto es: tablas, gráficas, entre otras.

En un problema importante es establecer la dependencia de las variables, es decir, determinar cómo cambia una cantidad cuando varía otra, por ejemplo:

- El tiempo que tarda un automóvil en recorrer una distancia determinada, depende de la velocidad que lleva.
- El volumen que hay en un recipiente expuesto a la intensidad del calor y el tiempo que duraría expuesto.

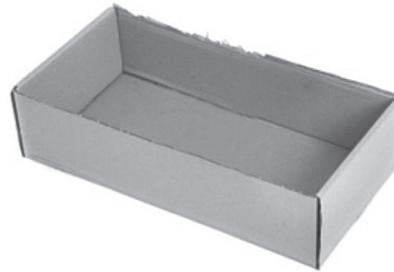
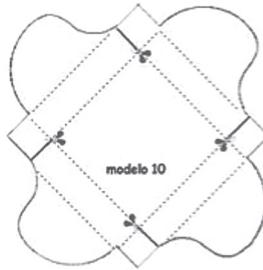
Cuando se tiene el registro numérico de un problema, tal como la velocidad, fuerza, presión temperatura, se pueden analizar varios aspectos (factores), se puede predecir el comportamiento futuro, bosquejar una gráfica o bien, si no se tiene toda la información del problema, se pueden determinar las condiciones iniciales en las que se llevó a cabo.



ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES

### Situación didáctica 1:

Los alumnos de la materia de Cálculo desean elaborar una caja de cartón sin tapa para archivar sus trabajos, a partir de una pieza de cartón de dimensiones 60 por 40 cm, cortando cuadrados iguales de longitud  $x$  en cada una de las esquinas y doblando los lados (como se muestra en la figura). Es obvio que el tamaño de la caja va a variar y va a depender del tamaño de los cuadrados que recortemos.



#### Conflicto cognitivo

¿Cuál será el tamaño más adecuado de los cortes para obtener la caja más grande?

¿Cuál será el modelo matemático para calcular el área de la base de la caja?

¿Cuál será el modelo matemático para calcular el volumen de la caja?

Para cada modelo matemático obtenido, ¿podrías hacer una tabla de valores y construir la gráfica?

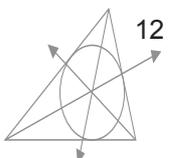
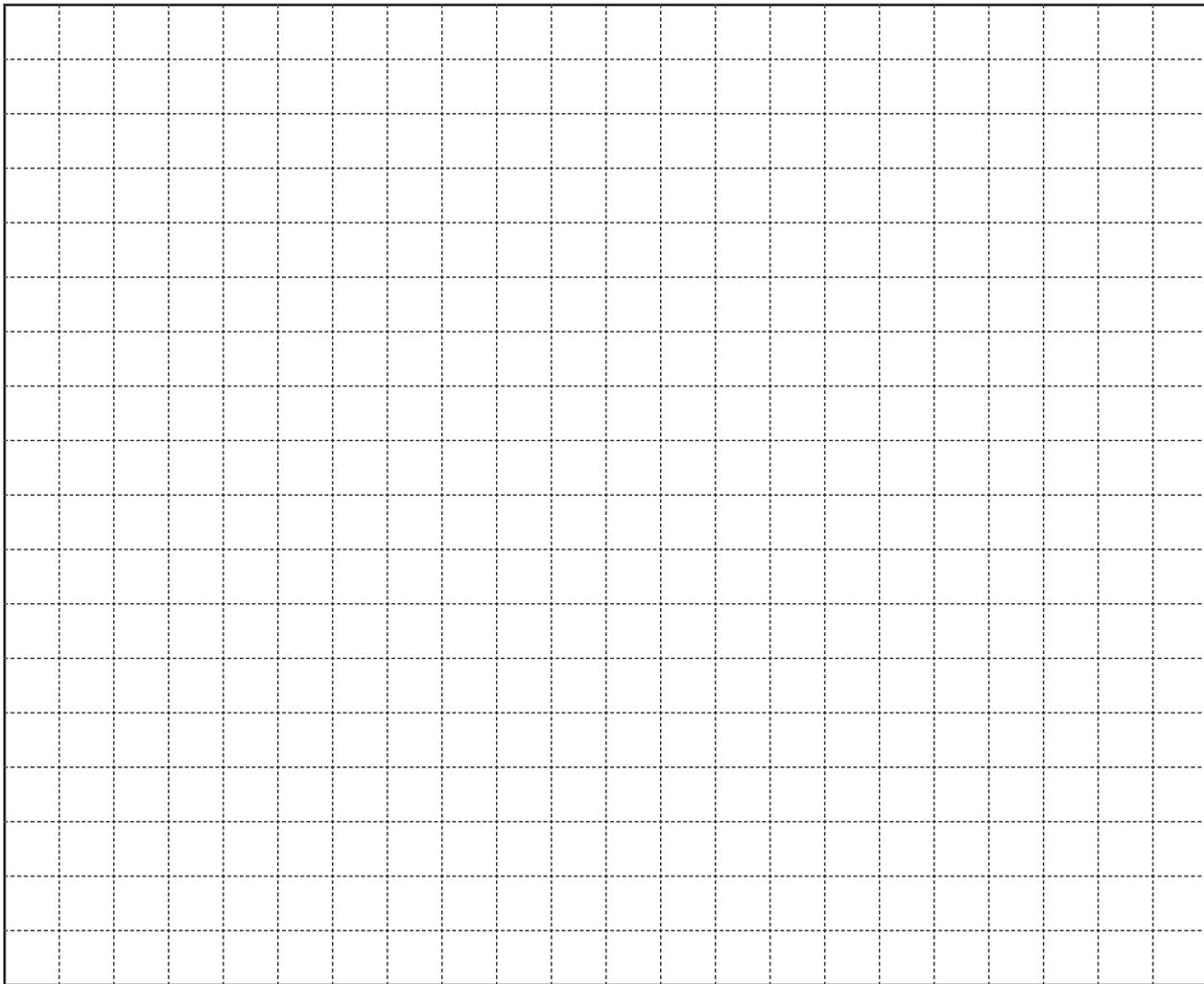
ÁREA

X	Y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

VOLUMEN

X	Y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Utilizando distintos colores, traza la gráfica del área y volumen con los datos anteriores utilizando la escala que creas conveniente.



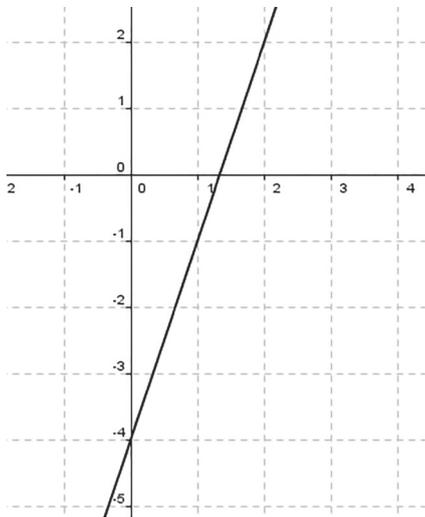
**ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2**

A continuación se muestran ejemplos de diferentes tipos de funciones algebraicas y funciones trascendentes con su respectiva gráfica, solo como recordatorio; puede ser útil a lo largo del curso de Cálculo Diferencial. Después se te presenta una actividad donde tendrás que realizarla de manera individual y socializarla con el resto del grupo para obtener una conclusión.

**Funciones algebraicas:**

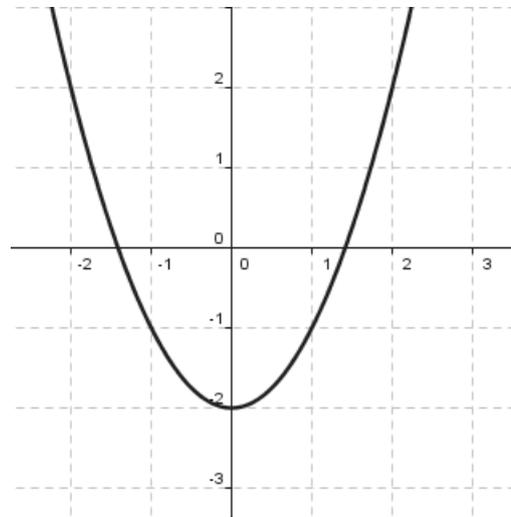
Función lineal.

$$y = 3x - 4$$



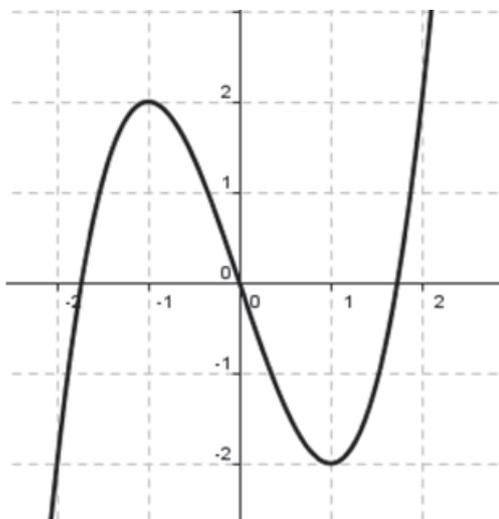
Función cuadrática.

$$y = x^2 - 2$$



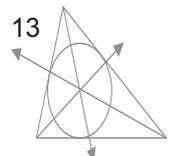
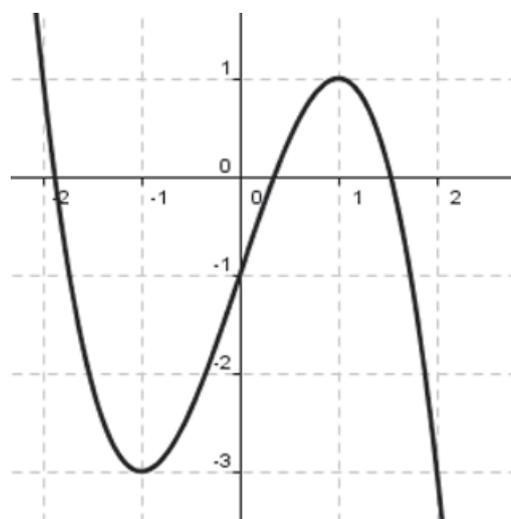
Función cúbica

$$y = x^3 - 3x$$



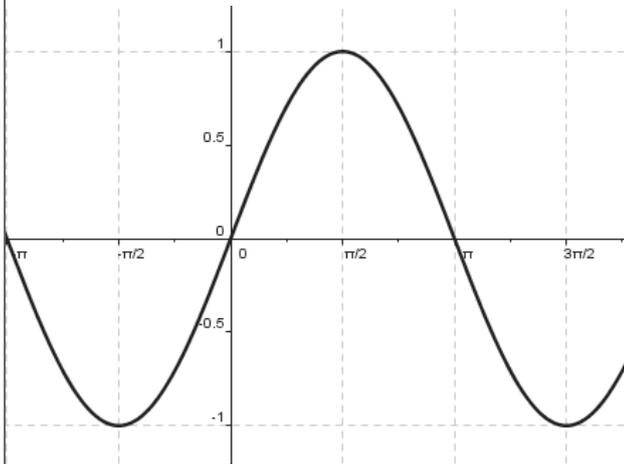
Función cúbica

$$y = -x^3 + 3x - 1$$

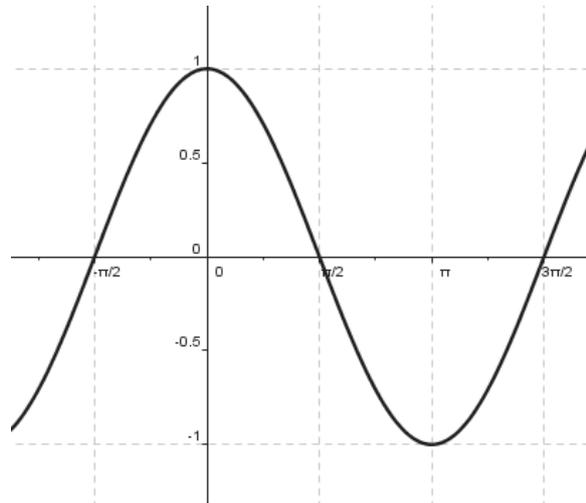


**Funciones trascendentes:**

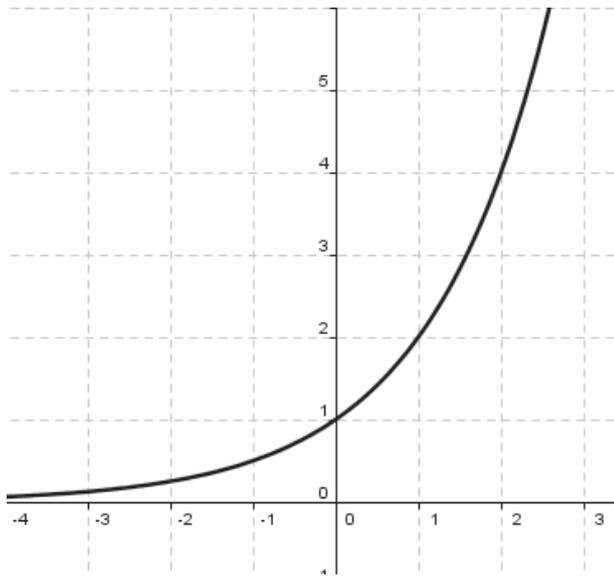
Función seno  
 $y = \text{sen } x$



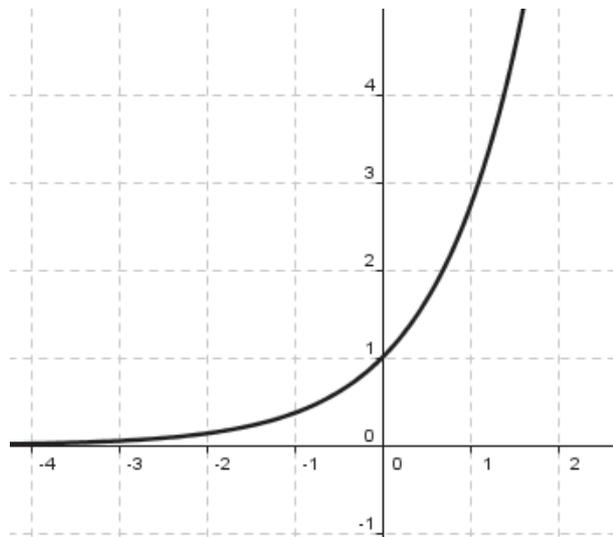
Función coseno  
 $y = \text{cos } x$



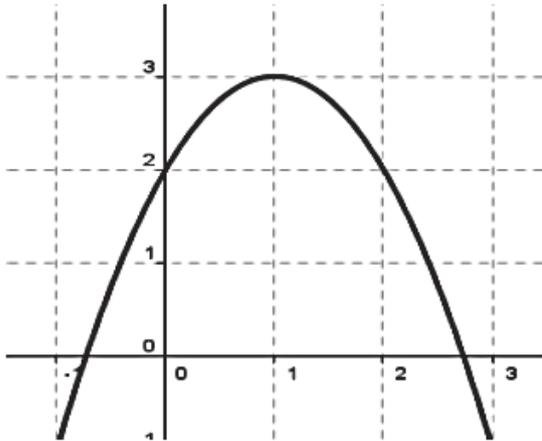
Función exponencial de la forma  $y = a^x$   
 $y = 2^x$



Función exponencial de la forma  
 $y = e^x$

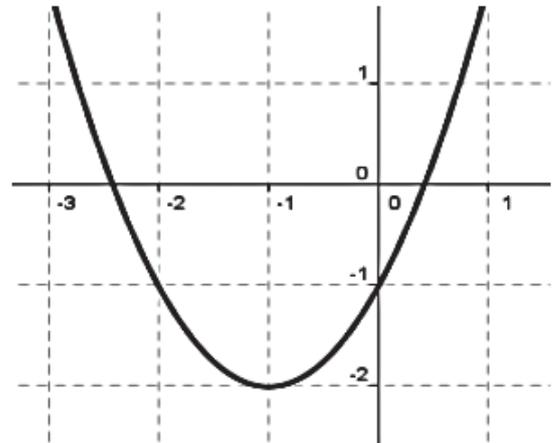


**Instrucciones:** En las siguientes gráficas, identifica las coordenadas donde la función adquiere el valor más alto (máximo) y el valor menor (mínimo) y escríbelo en el espacio correspondiente.



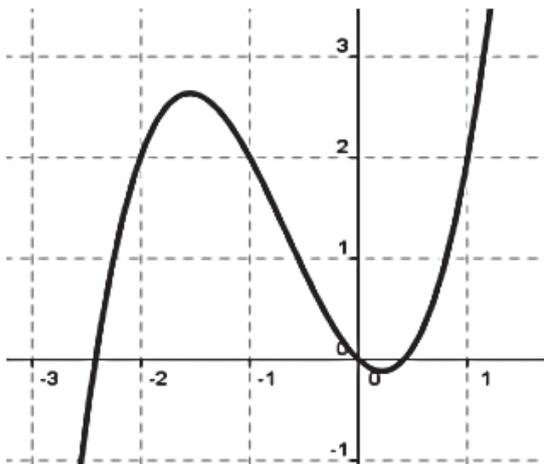
Resultado

---



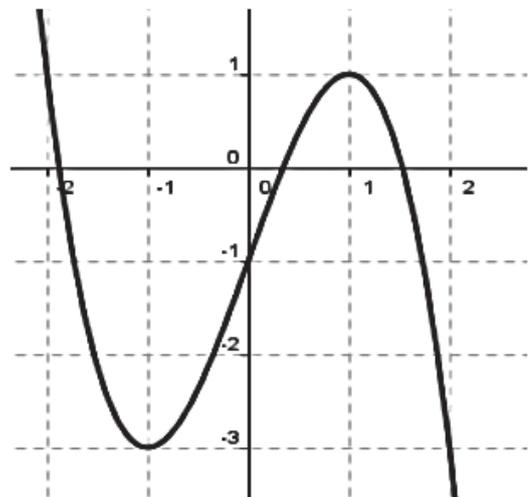
Resultado

---



Resultado

---



Resultado

---

### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 3

Trabajar en equipos de 4 integrantes, con una hoja de papel en la cual el largo sea el doble que el ancho (puedes recortar la hoja). Desarrolla el modelo matemático en función del ancho (x) para determinar el área y contesta lo que se te pide posteriormente.

#### Modelo matemático del área

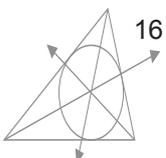
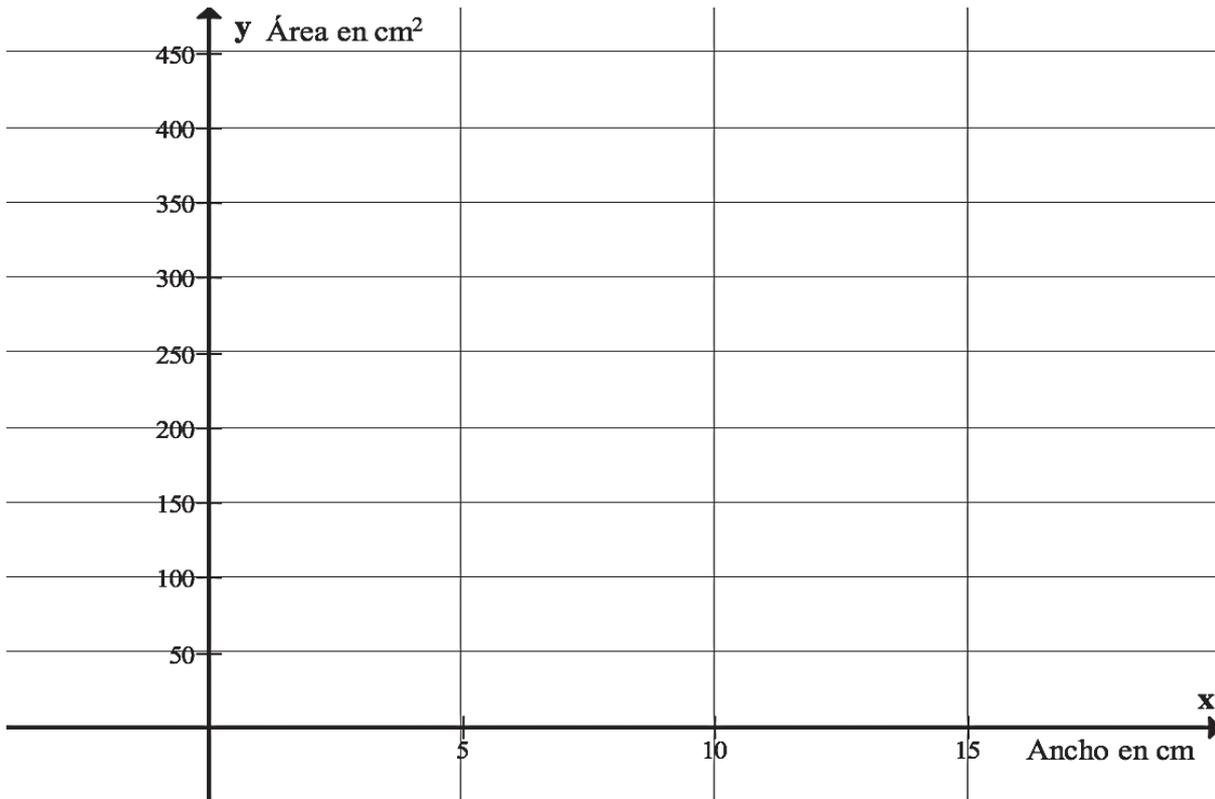
$A = ( \quad ) ( \quad )$



Completa la tabla de variación del área.

Ancho(x) en cm	0	2	5	10	15
Área (y) en cm <sup>2</sup>					

Posteriormente traza la gráfica observando cómo cambia el área al variar el ancho.



ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 4

En parejas contesta lo siguiente:

En un hotel hay una alberca en forma de prisma rectangular y un jacuzzi de forma cilíndrica.



- a) La alberca tiene dimensiones en metros: ancho =  $x$ , largo (el doble del ancho más diez unidades) =  $2x+10$  y alto (la medida del ancho menos ocho unidades) =  $x-8$

¿Cuál es el modelo matemático para el área ( $m^2$ ) del piso de la alberca?

¿Cuál es el modelo matemático para el volumen ( $m^3$ )?

Si el ancho de la alberca lo variamos de 9 m a 11 m ¿Cuáles son los valores del área, altura o profundidad y el volumen?

Ancho ( $x$ ) m	Área en $m^2$	Altura ( $x-8$ ) m	Volumen en $m^3$
9			
9.5			
10			
10.5			
11			

¿Cómo varía el volumen al cambiar el ancho de la alberca? ¿Si el ancho aumenta, el volumen aumenta o disminuye? Explica.

- b) Las dimensiones del jacuzzi son: radio =  $x$  y la altura =  $x-1$ . No olvides que tiene forma cilíndrica.

¿Cuál es el modelo matemático para determinar el área de la base del jacuzzi?

¿Cuál es el modelo matemático para el volumen?

Si el radio varía de 2 m a 2.5 m ¿Cuáles son los valores del área, altura o profundidad y el volumen?

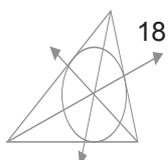
Radio (x) m	Área en m <sup>2</sup>	Altura (x-1) m	Volumen en m <sup>3</sup>
2			
2.1			
2.2			
2.3			
2.4			
2.5			

Si el radio aumenta, ¿el volumen aumenta o disminuye? Explica.

**Utiliza las tablas anteriores y colores distintos para lo que se te pide a continuación.**

- a) Traza la gráfica de ancho del piso de la alberca contra área(a) del piso del mismo(r) para que observes cómo varían sus valores.
- b) Traza la gráfica de radio del piso del jacuzzi contra área(a) del piso del mismo(r) para que observes cómo varían sus valores.

c)	d)
----	----



Comenta tus observaciones en ambos casos.

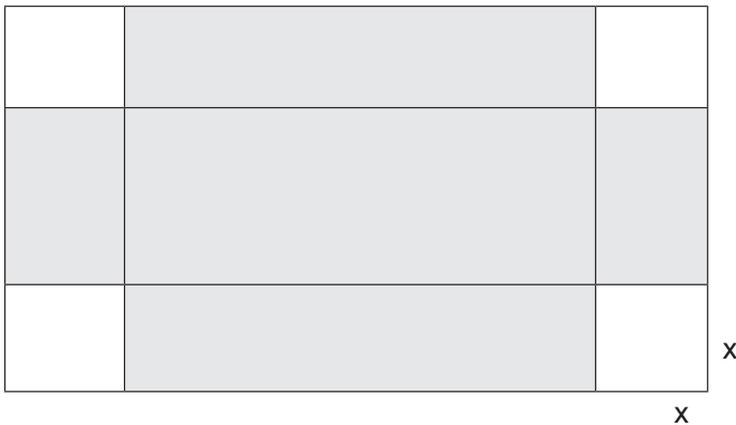
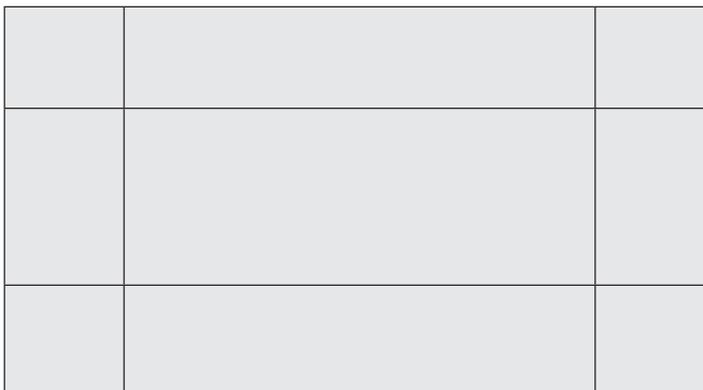
**Conclusiones:**

### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 5

Forma equipos de 4 integrantes y contesten la siguiente situación.

Con un cartón de dimensiones de 20 por 30 cm respectivamente para la elaboración de una caja (como se propuso en la situación didáctica), un galón de leche vacío y otro lleno de arroz.

Dibuja cuadrados iguales en las cuatro esquinas (tienes la libertad de elegir el tamaño( $x$ )) después se recortarán cuatro cuadrados en las esquinas como se muestra en la figura.



**Contesta lo siguiente:**

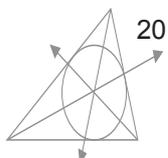
- ¿Cuál es el modelo matemático (en función de  $x$ ) para determinar el área de la figura?
- ¿Cuál es el modelo matemático del volumen?

**Llena la caja con arroz y vacíala en los galones.**

Compara los volúmenes de las diferentes cajas con tus compañeros.

- ¿Qué equipo obtuvo el máximo volumen?
- Si se utiliza la misma pieza de cartón (20 x 30 cm), ¿qué dimensión varía para obtener los diferentes volúmenes de las cajas?

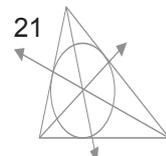
***Nota:*** en esta última actividad tendrás que autoevaluarte y evaluar a un compañero de equipo, con los formatos que se te dan a continuación.



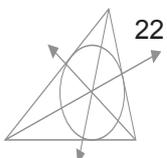
ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES

**COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE BAJA CALIFORNIA  
AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN**

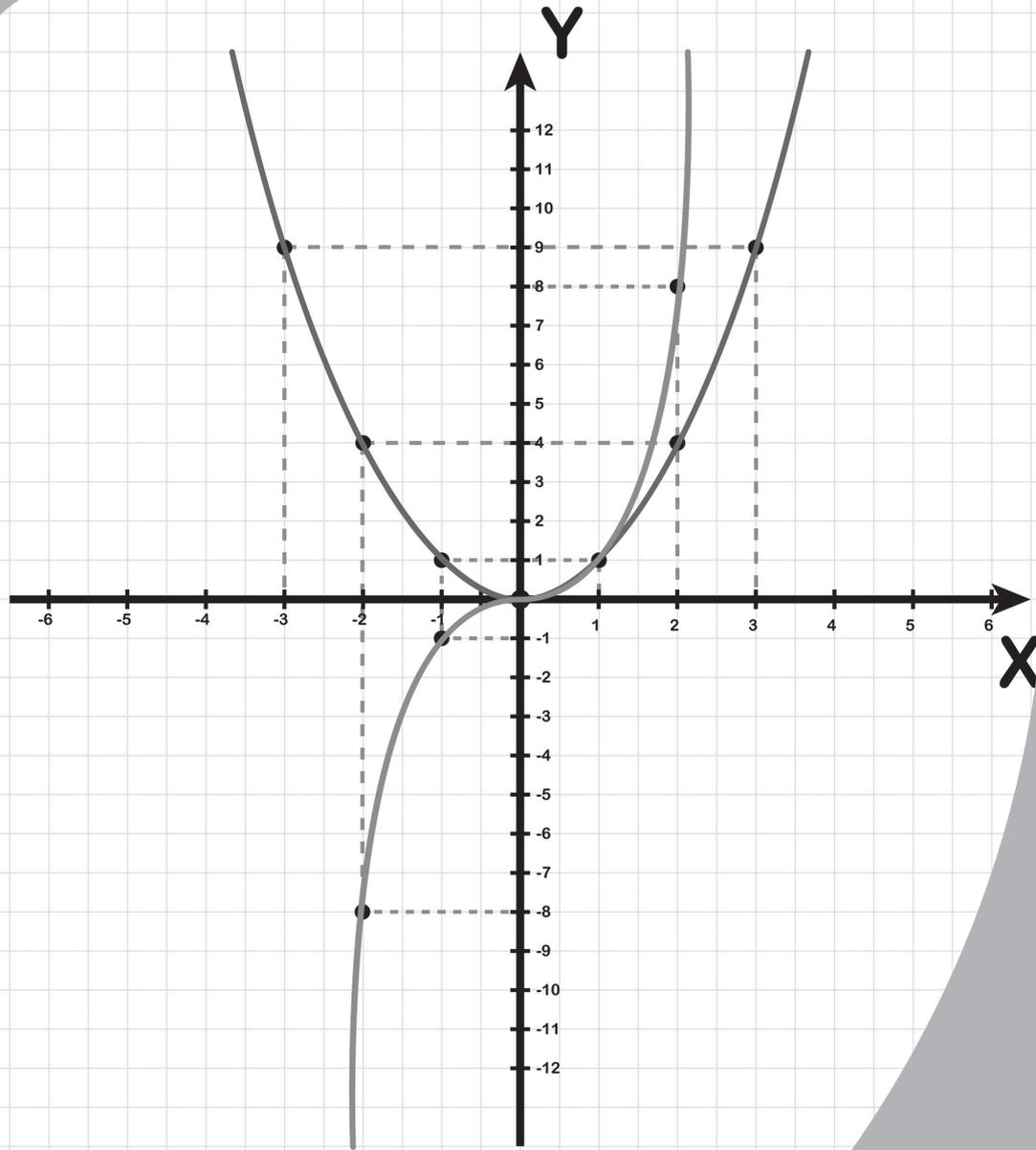
Autoevaluación				
Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una $\checkmark$ a los siguientes cuestionamientos				
Nombre del alumno:				
Materia:	Grupo:		Corte:	Semestre:
CRITERIOS	Excelente	Buena	Regular	Insuficiente
¿Cómo fue tu participación en la toma de decisiones para la organización de tu equipo?				
¿Colaboraste activamente en las actividades?				
¿Cómo consideras tu participación en el desarrollo algebraico de los ejercicios de la actividad?				
¿Influiste en la solución de los obstáculos presentados en la actividad?				
Observaciones				
Anota en el espacio en blanco tus fortalezas y debilidades en el desarrollo de este bloque				



Coevaluación				
<b>Instrucciones:</b> Contesta honestamente, marcando con una $\checkmark$ a los siguientes cuestionamientos respecto al compañero asignado.				
<b>Nombre del compañero:</b>				
<b>Materia:</b>	<b>Grupo:</b>		<b>Corte:</b>	<b>Semestre:</b>
<b>CRITERIOS</b>	<b>Excelente</b>	<b>Bueno</b>	<b>Regular</b>	<b>Insuficiente</b>
¿En qué grado ayudó tu compañero en las actividades?				
¿Respetó las opiniones de los demás?				
¿Formó parte de las decisiones?				
¿Cómo consideras la participación de tu compañero en la construcción de los resultados?				
Observaciones				



# BLOQUE II



$x^2$

1	2	3	-1	-2	-3
1	4	9	1		

RESUELVES PROBLEMAS DE LÍMITES EN SITUACIONES DE CARÁCTER ECONÓMICO, ADMINISTRATIVO, NATURAL Y SOCIAL

**Bloque**
**RESUELVES PROBLEMAS DE LÍMITES  
EN SITUACIONES DE CARÁCTER  
ECONÓMICO, ADMINISTRATIVO,  
NATURAL Y SOCIAL**
**DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:**

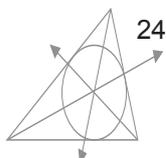
- Aplica el concepto de límite a partir de la resolución de problemas económicos, administrativos, naturales y sociales de la vida cotidiana.
- Calcula límites a partir de la elaboración de gráficas en derive y su interpretación de las representaciones gráficas de funciones, mostrando habilidades en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.

**COMPETENCIAS A DESARROLLAR:**

- Interpreta gráficas de funciones continuas y discontinuas analizando el dominio y contradominio; y argumenta el comportamiento gráfico de la variable dependiente (y) en los punto (s) de discontinuidad.
- Explica e interpreta los valores de una tabla, calcula valores cercanos a un número y analiza el comportamiento en los valores de la variable dependiente en problemas de su entorno social, económico y natural.
- Explica e interpreta diferentes representaciones gráficas y determina límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, y límites finitos, de los objetos naturales que lo rodean.
- Argumenta la solución obtenida de un problema económico, administrativo, natural o social, mediante la teoría de los límites.
- Valora el uso de las TIC en el modelado gráfico y algebraico de los límites para facilitar su interpretación y simulación en la resolución de problemas presentes en su contexto.
- Formula y resuelve problemas, a partir del cálculo de dominio y contradominio de las funciones algebraicas para determinar sus límites, demostrando su habilidad en la resolución de problemas algebraicos.
- Determina límites para funciones racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

**OBJETOS DE APRENDIZAJE:**

- Los límites: su interpretación en una tabla, en una gráfica y su aplicación en funciones algebraicas.
- El cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes.



## EXAMEN DIAGNÓSTICO

1.- Obtener el valor de  $f(x)$  de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = x + 8, x = -2$

b)  $f(x) = x^2 + 10x - 3, x = 3$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}, x = 2$

2.- Realiza las siguientes factorizaciones.

a)  $x^2 - 36 =$

b)  $x^2 + 5x + 4 =$

c)  $x^2 + 10x + 25 =$

d)  $8xy + 16x^2y^2 + 64$

3.- A partir de la siguiente función, llena la tabla con los valores correspondientes.

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

x	f(x)
-4	
-1	
0	
5	

4.- Obtén el valor de  $f(x)$  de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \cos 2\pi =$

b)  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} =$

c)  $f(x) = e^3 =$

## ¿Para qué sirven los límites?

La definición de límite de una función es un tema fundamental en todos los campos del cálculo; de hecho la derivada, que es el tema principal de este curso de cálculo diferencial, es por definición, un límite.

Un primer acercamiento a los límites lo tienes cuando los términos de una sucesión se van acercando a un número cualquiera rápidamente, entonces decimos que tiende a ese número, o bien, que su límite es dicho número. Debemos decirte que no todas las sucesiones se aproximan a un número, pero las sucesiones que tienen este comportamiento se llaman convergentes.

El concepto de límite ha sido de enorme utilidad en el desarrollo de las matemáticas; en el que se fundamenta el cálculo infinitesimal. Aunque muchos matemáticos utilizaron la idea intuitiva de límite, fue el barón de Cauchy (1789-1857), a principios del siglo XIX, quién dio una definición satisfactoria de límite y, en consecuencia, de derivada de una función.

### Situación didáctica 1:

Jorge es trabajador de una cierta empresa y recibe un sueldo  $x$ , el cual no le alcanza para cubrir sus gastos. Próximamente espera un aumento en su paga del 4%, el cual recibirá semestralmente como parte de un incentivo, es decir, cada vez ganará más. También espera que ahora con el nuevo aumento le alcance para su subsistencia.

Cuando llega su primer pago, se da cuenta que las cosas que compra habitualmente subieron de precio, obviamente su nuevo sueldo no es suficiente. Al pasar otros seis meses recibe otro aumento y esta vez casi logra cubrir sus gastos pero la nueva alza de precios no le permite comprar todo lo que necesita.

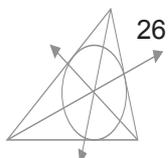
Como te habrás dado cuenta, los sueldos siempre están aumentando pero las cosas y servicios también. Si preguntas a la gente a tu alrededor sabrás de que esto pasa en la realidad.

### Conflicto cognitivo

¿Por qué será que los sueldos están siempre aumentando?

¿Crees que Jorge alguna vez gane lo suficiente para alcanzar el costo progresivo de las cosas?

¿Crees que en matemáticas esta situación tenga un nombre?



## Concepto de límite

Cuando una variable “ $x$ ” se aproxima cada vez más a una constante “ $a$ ”, de tal manera que la diferencia  $x-a$ , en valor absoluto, puede ser tan pequeña como se quiera, se dice que la constante “ $a$ ” es el límite de la variable  $x$ .

Esta idea se expresa así:

$$x \rightarrow a$$

Lo anterior se lee “ $x$  tiende a  $a$ ”. (Fuenlabrada de la Vega, S. 2008, pág. 33)

Para comprender su concepto, primeramente analizaremos un ejemplo:

Supongamos que un móvil parte de A hacia B, siendo la distancia  $AB=1024$  metros. Durante cada minuto, el móvil recorre la mitad de la distancia que le falta para llegar a B. Esto se observaría en una tabla de la siguiente manera:



Distancia por recorrer	Distancia recorrida	Minutos transcurridos
1024	512	1
512	256	2
256	128	3
128	64	4
64	32	5
32	16	6
16	8	7
8	4	8
4	2	9
2	1	10
1	0.5	11
0.5	0.25	12

Tabla 1. Distancia recorrida vs tiempo

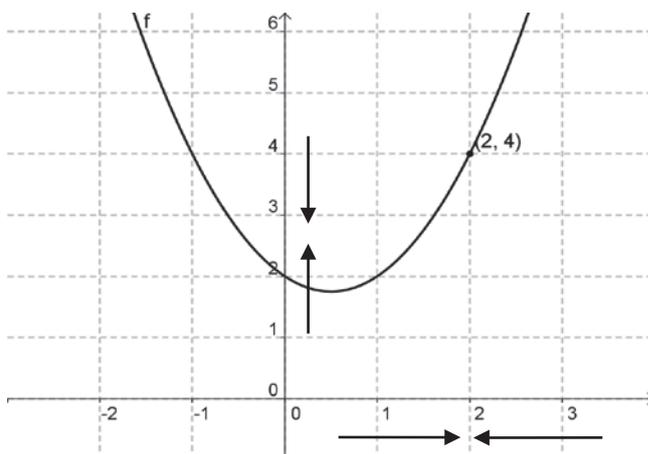
Si sumamos las distancias recorridas hasta el minuto 12 tendremos 1023.75 m. Si el móvil continuo recorriendo, cada minuto, la mitad de lo que le falta para llegar a B, nunca llegará a este punto, pero se acerca constantemente a él, de tal modo que la diferencia entre la distancia 1024 m y la suma de las distancias recorridas puede hacerse tan pequeña como se quiera; es decir tiende a cero. La suma de esas distancias tiene un límite, y dicho límite es 1024. Esto significa que nos acercaremos a 1024, pero nunca llegaremos. (De la Borbolla, F. y De la Borbolla, L., 1988, pp. 27-28).

**Definición intuitiva de límite:** “El límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $c$ , es una constante  $L$ ”, si la diferencia  $|f(x) - L|$  puede hacer tan pequeña como se quiera para todo valor de  $x$  suficientemente cercano a  $c$  sin que sea igual a  $c$ . Lo anterior se escribe con la notación:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

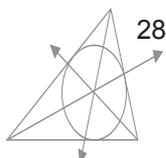
Investiguemos el comportamiento de la función  $f$  definida por  $f(x)=x^2-x+2$  para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de  $f(x)$  para valores de  $x$  cercanos a 2, pero no iguales a 2.

Por la derecha		Por la izquierda	
$x$	$f(x)$	$X$	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001
$x \rightarrow 2$	$f(x) \rightarrow 4$	$x \rightarrow 2$	$f(x) \rightarrow 4$



A partir de la tabla y de la gráfica de  $f$  (una parábola) que se muestra en la figura, vemos que cuando  $x$  está cercano a 2 (por cualquiera de los dos lados),  $f(x)$  lo está de 4. Entonces podemos decir que “el límite de la función  $f(x)=x^2-x+2$ , cuando  $x$  tiende a 2, es igual a 4”. La notación para esta expresión es:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x+2) = 4$$



## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

De manera individual, contesta lo que se te pide a continuación.

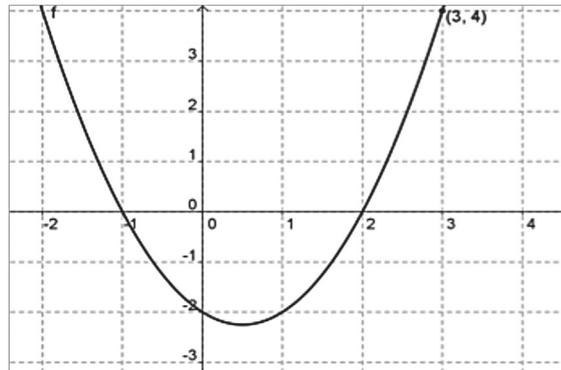
a) Llena los espacios vacíos de la tabla de acuerdo a los valores de  $x$  que se dan y a la función  $f(x) = x^2 - 4$ , luego escribe tu conclusión en notación de límites.

Por la derecha		Por la izquierda	
$x$	$f(x)$	$X$	$f(x)$
1		6	
2		5	
3		4.5	
3.5		4.2	
3.9		4.1	
3.99		4.01	
3.999		4.001	
$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$	$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$

Tu conclusión:

$$\lim_{x \rightarrow} ( ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) De acuerdo con la gráfica escribe el límite de la función  $f(x) = x^2 - x - 2$ , cuando  $x$  tiende a 3.



Tu conclusión:

$$\lim_{x \rightarrow 3} ( ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

A continuación se muestran algunos teoremas para la obtención de límites.

1. El límite de una constante “c”, cuando x tiende al valor “a” es la constante c.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7$$

Solución: En este caso al no existir “x” en la función, no hay lugar para sustituir el número 2, por lo cual el resultado es el mismo número 7.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7 = 7$$

2. El límite de x cuando x tiende al valor de “a” es “a”.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \rightarrow 5} x$$

Solución: Cuando la función solamente es x, lo único que se debe hacer es sustituir el valor de x que en este caso es 5, y obtendremos el resultado.

$$\lim_{x \rightarrow 5} x = 5$$

3. El límite de una suma de un número finito de funciones cuando x tiende al valor de “a” es igual a la suma de sus límites.

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x + 2)$$

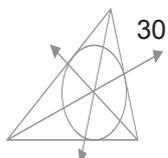
**Solución:** Para solucionarlo solo basta con sustituir los valores de x, que en este caso es 4, y sumarlo con el número 2.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 2 = 4 + 2 = 6$$

4. El límite de un producto de un número finito de funciones cuando x tiende al valor de “a” es igual al producto de sus límites.

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \rightarrow 5} 4x^2$$



**Solución:** Para solucionarlo solo se debe sustituir el valor de  $x$ , en este caso 5 y elevarlo al cuadrado, después multiplicarlo por el número 4.

$$\lim_{x \rightarrow 5} 4x^2 = (\lim_{x \rightarrow 5} 4) (\lim_{x \rightarrow 5} x^2) = (4) (5^2) = 100$$

El límite del cociente de dos funciones cuando  $x$  tiende al valor "a" es igual al cociente de sus límites, siempre y cuando el límite del denominador no sea igual a cero.

**Ejemplo:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{2x + 1}$$

**Solución:** Al igual que los ejemplos anteriores, para encontrar la solución solo se sustituye el valor de  $x$ , que en este caso es 2 y se realizan las operaciones en el numerador y denominador, al final se realiza la división, en caso de que la división no dé un número entero, se dejará como fracción.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 4}{\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 1} = \frac{3(2) + 4}{2(2) + 1} = \frac{10}{5} = 2$$

**Nota:** En los números reales no existe la división entre cero, si al realizar las sustituciones y operaciones, el denominador es cero, la función puede no tender hacia un límite, pero más adelante se expondrá una forma de solucionar esos casos. (Fuenlabrada de la Vega, S. 2008, pág. 33)

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2

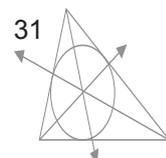
Reúnete en equipo de 3 integrantes y determinen el valor de los límites de las funciones que se les presentan.

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2) =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 9) =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} (-2x^3 + 2x - 1) =$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 + 2x}{x + 2} =$



e)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4)^2 =$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 2 - 12} =$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x)(x + 3) =$

h)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x)^3 =$

**Nota:** esta actividad servirá para autoevaluarte y evaluar a un compañero de equipo con los formatos que se te dan al final de este bloque.

$$\text{Límite } f(x) = \frac{1}{x} \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

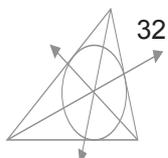
Si el límite del numerador es diferente de cero, pero el denominador es cero, el cociente no tiene límite y se establece que tiende más o menos a infinito. (Vázquez Mercado, E. 2009, pp. 8-10)

Al querer calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  se observa que no se puede aplicar los teoremas de límites porque para  $x=0$  se anula el denominador. Es decir, la función no está definida para  $x=0$ . El comportamiento  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  al otorgar valores sucesivos a  $x$  que tiendan a cero es el siguiente:

X	$f(x)=1/x$
1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
$x \rightarrow 0$	$f(x) \rightarrow \infty$

Cuando se aproxima a cero,  $f(x)$  tiende a un valor positivo muy grande. De hecho, los valores de  $f(x)$  pueden aumentar arbitrariamente, si se escoge un valor para  $x$  lo bastante cerca de cero. De esta forma los valores de  $f(x)$  no tienden a un número, de modo que el límite de  $f(x)$  no existe. En general se puede escribir que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$



Para indicar que cada vez los valores de  $f(x)$  se vuelven cada vez más grandes cuando  $x \rightarrow 0$ . A menudo, la expresión  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$  se lee como “el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a cero, es infinito”.

$$\text{Límite de } f(x) = \frac{1}{x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

En este caso, al hacer que  $x$  se vuelva arbitrariamente grande el comportamiento de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$  es el siguiente:

X	$f(x)=1/x$
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
10000	0.0001
$x \rightarrow \infty$	$f(x) = 0$

Si  $x$  tiende a valores arbitrariamente grandes,  $f(x)$  tiende a cero. En general, se puede escribir que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

### Formas indeterminadas del límite de una función.

Al calcular el límite de una función se tiene con frecuencia que no se puede establecer el valor numérico  $L$  que corresponde al límite de una función.

Se dice entonces que en el límite de  $f$  existe una indeterminación la cual puede evitarse mediante transformaciones algebraicas como la factorización, el teorema de divisibilidad de un polinomio y la racionalización de una expresión radical.

Antes de revisar este tema, recordaremos cómo realizar las factorizaciones.

### FACTORIZACIÓN

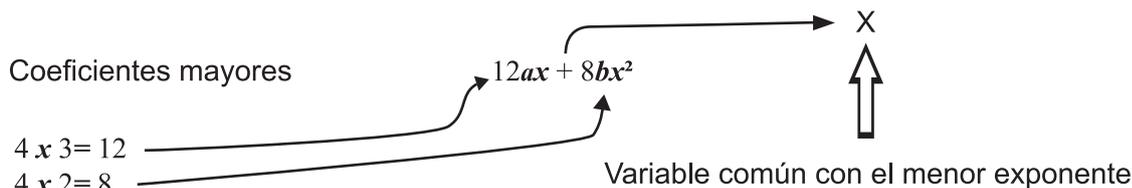
Significa descomponer la expresión algebraica en dos o más factores, tales que al multiplicarse dan como resultado dicha expresión. Por ejemplo:

$$20x^2 = 2(2x)(5x)$$

Lee con atención los siguientes casos y resuelve en equipos de dos los ejercicios planteados.

#### Factorización de un polinomio por factor común

Al factorizar, buscamos el factor común en cada término de la expresión con el coeficiente común más grande posible y la variable común con el menor exponente. Por ejemplo:



Entonces, el factor común es:  $4x$

Así que el resultado es:

$$4x(3a + 2bx)$$

Para comprobar si la factorización fue correcta solo basta multiplicar como se explica a continuación:

Si multiplicamos  $(4x)(3a)$ , tendremos como resultado  $12ax$ , y al multiplicar  $(4x)(2bx)$  tendremos como resultado  $8bx^2$ . Al hacer la multiplicación siempre debemos obtener lo que teníamos antes de factorizar.

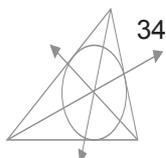
**Ejemplos resueltos:**

$6x^2 + 12ax$ $6x(x + 2a)$	<p>El factor común del número 6 y 12 es el 6, por lo cual se coloca fuera del paréntesis, la literal que se repite es la "x" y se coloca con el exponente menor que aparece, en este caso tenemos "x" y "x<sup>2</sup>", por lo cual tomamos la "x". Para saber si lo que hicimos fue correcto, multiplicamos <math>6x(x)</math>, y obtendremos <math>6x^2</math> y al multiplicar <math>6x(2a)</math> obtendremos <math>12ax</math>, juntándolo tendremos lo que teníamos al principio <math>6x^2 + 12ax</math>.</p> <p>Nota: También se podrá tomar el 2 o el 3, como factor para factorizar el 6 y el 12.</p>
$8x^5y^6 + 4x^3y^2 - 2xy$ $2xy(4x^4y^5 + 2x^2y - 1)$	<p>El factor común de 8, 4 y 2, es el número 2, por lo cual lo colocamos fuera del paréntesis, las literales de menor exponente son "x" y "y" por lo cual se colocan también fuera del paréntesis, al multiplicarlo <math>2xy(4x^4y^5) = 8x^5y^6</math>, al multiplicar <math>2xy(2x^2y) = 4x^3y^2</math> y al multiplicar <math>2xy(-1) = -2xy</math></p>

**Ejercicios:**

a) Factorizar  $b^2 + 3yb$

b) Factorizar  $8a^2b^2 - 20a^3$



c) Factorizar  $12x^4y + 27x^3y - 3x^2y^3$

### Factorización de una diferencia de cuadrados.

Al multiplicar dos binomios conjugados se obtiene una diferencia de cuadrados. Por ejemplo:  
 $(2a+3b)(2a-3b) = 4a^2 - 6ab + 6ab - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

Para factorizar una diferencia de cuadrados se procede de la siguiente manera:

1. Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos cuadráticos.
2. Se escriben las raíces encontradas como una multiplicación de binomios conjugados, uno con signo positivo y el otro negativo.

### Ejemplos resueltos:

$36x^4 - 81y^2$ $(6x^2 + 9y)(6x^2 - 9y)$	<p>La raíz cuadrada de 36 es 6, para extraer la raíz cuadrada de un exponente solo hay que dividir el exponente entre 2, <math>x^{4/2} = x^2</math>, entonces la raíz del primer término sería <math>6x^2</math>, y para el segundo, la raíz de 81 es 9, y <math>y^{2/2}=y</math>, por lo tanto quedaría <math>9y</math>.</p>
$16x^2 - 64$ $(4x + 8)(4x - 8)$	<p>La raíz cuadrada de 16 es 4, para extraer la raíz cuadrada de un exponente solo hay que dividir el exponente entre 2, <math>x^{2/2} = x</math>, entonces la raíz del primer término sería <math>4x</math>, y para el segundo, la raíz de 64 es 8.</p>

### Ejercicios:

a) Factorizar  $9m^2 - 4$

b) Factorizar  $25y^2 - 16x^4$

c) Factorizar  $4x^6 - 81$

### Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

El resultado del cuadrado de un binomio es un trinomio cuadrado perfecto. Por ejemplo:  $(2m + 3n)^2 = 4m^2 + 12mn + 9n^2$   $\longleftrightarrow$  trinomio cuadrado perfecto (TCP).

Para factorizar un TCP se procede de la siguiente manera:

1. Se extrae raíz cuadrada a los términos cuadráticos.
2. Se comprueba que el doble producto de las raíces encontradas es igual al segundo término del TCP.
3. Con las raíces encontradas se forma el binomio al cuadrado con el signo del segundo término del TCP.

**Ejemplos:**

$25x^2 + 30xh + 9h^2$ $(5x - 3h)^2$	La raíz cuadrada de 25 es 5, la raíz cuadrada de $x^2 = x^{2/2} = x$ entonces del primer término la raíz será 5x, la raíz del tercer término (9) será 3 y para $h^2$ es h, por lo cual quedara 3h.
$36x^2 + 24x + 4$ $(6x + 2)^2$	La raíz cuadrada de 36 es 6, la raíz cuadrada de $x^2 = x^{2/2} = x$ entonces del primer término la raíz será 6x, la raíz del tercer término que es 4 será 2.

**Ejemplos:**

- a) Factorizar  $16a^2 - 56ab + 49b^2$
- b) Factorizar  $9m^2 + 24mn + 16n^2$
- c) Factorizar  $4x^2 - 8x + 4$

**Factorización de un trinomio de segundo grado.**

El producto de dos binomios con término común se nombra trinomio de segundo grado (TSG). Por ejemplo:  $(x - 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$  TSG

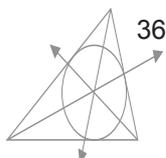
**Ejemplos:**



$x^2 + 5x - 24$ Paso 1. $(x)(x)$ Paso 2 $(x - 8)(x + 3)$ Paso 3 $(x+8)(x-3)$  <b>Nota:</b> Podemos comprobar que el resultado es correcto si multiplicamos ambos paréntesis y obtenemos de nuevo la ecuación.	Paso 1. Buscar 2 literales que multiplicadas den como resultado el primer término, en este caso $x^2$ , y colocarlas en cada paréntesis. En este caso $(x)(x)=x^2$ Paso 2. Buscar 2 números que multiplicados den como resultado 24. $(8)(3)=24$ , pero en la ecuación el 24 es negativo por lo cual uno de los números deberá ser negativo. Paso 3. Para saber el signo que le corresponde a cada número, debemos efectuar sumas o restas, hasta que obtengamos el segundo término (número de en medio), en este caso el 5. $8 + 3 = 11$ No es el número que buscamos. $8 - 3 = 5$ Es el número que buscamos. $-8 - 3 = -11$ No es el número que buscamos. $-8 + 3 = -5$ No es el número que buscamos. Significa que los signos deben ser $(+8)$ y $(-3)$
--	---

**Ejercicios:**

- a) Factorizar  $x^2 - 12x + 27$
- b) Factorizar  $m^2 + 4m - 32$
- c) Factorizar  $b^2 - 8b + 15$



### Límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$

Cuando se sustituye  $x$  por  $c$  para calcular el límite de una función,  $f$  toma algunas veces la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ . Sin embargo,  $f$  tiene un límite a medida que  $x$  tiende a  $c$ . Este límite puede calcularse al factorizar y simplificar la función equivalente. Por ejemplo:

**Calcular:**

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{1^2 + 2(1) - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0} \longrightarrow \text{Forma indeterminada}$$

Para evitar la indeterminación  $\frac{0}{0}$ , se factoriza el numerador y se obtiene para  $f$  una función equivalente. Esto es:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3)$$

Después de factorizar y eliminar términos del numerador y denominador se calcula nuevamente el límite:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 1 + 3 = 4 \longrightarrow (\text{límite real de la función})$$

**Nota:** Cuando existe indeterminación  $\frac{0}{0}$ , se necesitan utilizar las factorizaciones vistas anteriormente, puede ser necesario factorizar el numerador, el denominador o ambos.

### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 3

Reúnete en equipo de 3 integrantes y determinen el valor de los límites de las funciones que se les presentan.

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 12}{x - 4} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 10 + 25}{4x^2 + 17 - 15} =$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - x - 12} =$

**Nota:** esta actividad servirá para autoevaluarte y evaluar a un compañero de equipo con los formatos que se te dan al final de este bloque.

### Límite indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Al calcular el límite del cociente de dos polinomios cuando  $x$  tiende a crecer infinitamente se tiene la forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$  para evitar la indeterminación se divide el numerador y el denominador por la máxima potencia que aparece en la función. Por ejemplo:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{2x^2 + 9} = f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{9}{x^2}} = f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5x}{x^2}}{2 + \frac{9}{x^2}}$$

Al aplicar  $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x}$  cada término que contenga a  $x$  en el denominador se sustituirá por el infinito ( $\infty$ ) el cual finalmente será igual a cero (0). Por lo tanto el límite real de la función es:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5x}{x^2}}{2 + \frac{9}{x^2}} = \frac{3 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2} \text{ (límite de la función)}$$

#### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 4

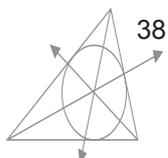
Individualmente resuelve los siguientes límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6}{2x^2 + 9x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6}{7x - 3x^2 + 9x^3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 2x^2 + 5x}{3x - 3x^2 + 3x^4}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 6x^3 + 6x}{6x - x^2 + 3x^3}$



### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 5

En equipos de 2 personas, analiza y resuelve los siguientes límites.

Utilizando el límite indeterminado resuelve los siguientes ejercicios.

a) Límites de funciones algebraicas.

Mediante una tabla estima el valor de:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 1} =$$

x	10	100	1000	10000	$x \rightarrow \infty$
f(x)					f(x) →

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x}{5 - 2x^3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^2 + 6}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 6x + 5}{x^3 - 2x}$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 6

Lee y analiza la información que se te presenta sobre "Condiciones de continuidad", después resuelve el ejercicio.

### Condiciones de continuidad

Definición: una función es continua en un número  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si  $f$  no es continua en  $a$ , decimos que  $f$  es discontinua en  $a$  o que tiene una discontinuidad en  $a$ . La definición anterior requiere tres cosas si  $f$  es continua en  $a$ :

1.  $f(a)$  está definido (es decir,  $a$  está en el dominio de  $f$ )
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe (de modo que  $f$  debe estar definida en un intervalo abierto que contiene al número "a")
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**Ejemplo:** ¿En dónde es discontinua la siguiente función?

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

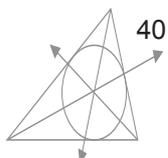
**Solución:**

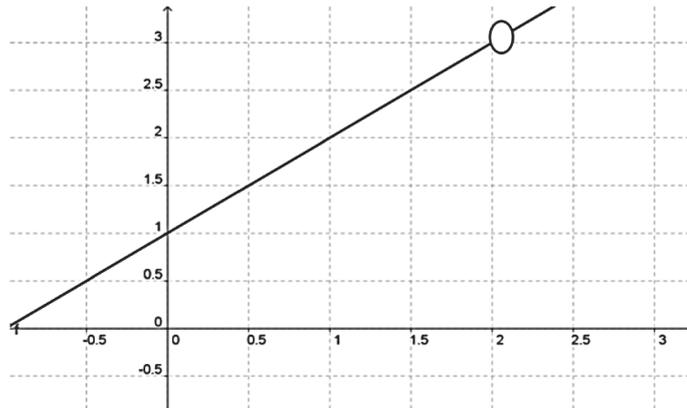
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 3$$

Conclusión:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

Como podemos apreciar no se cumple la tercera condición de continuidad, por lo tanto la función no es continua en  $x=2$ , sin embargo, el límite existe y es igual a 3. Observa la siguiente gráfica:





El dominio representa los valores de “x” y el rango los valores de “y”

El dominio de la función será:  $D (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

El rango de la función será:  $R (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

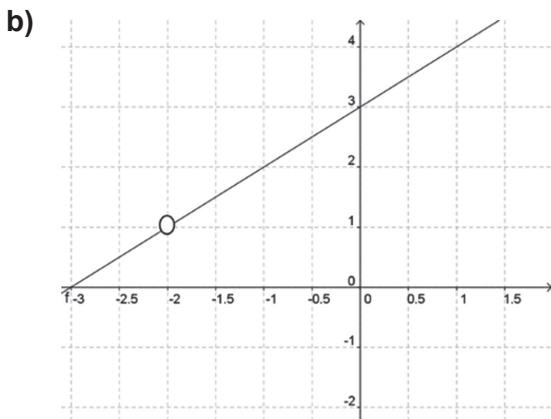
**Nota:** La razón oficial de que  $f$  es discontinua cuando  $x = 2$  es que  $f(2)$  no está definida. Como se observa en la gráfica no se pudo dibujar ésta, sin levantar el lápiz del papel, porque se presenta un agujero, una ruptura o un salto en esta gráfica.

**Ejercicio:** Para la función  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ , encuentra:

- a) El valor del límite cuando  $x \rightarrow -2$  (si es que existe)
- b) A partir de la gráfica identifica el valor de  $x$  donde función es discontinua.
- c) Escribe el dominio y el rango de la función.

**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$



La función es discontinua en  $x =$  \_\_\_\_\_

El dominio de la función es: \_\_\_\_\_

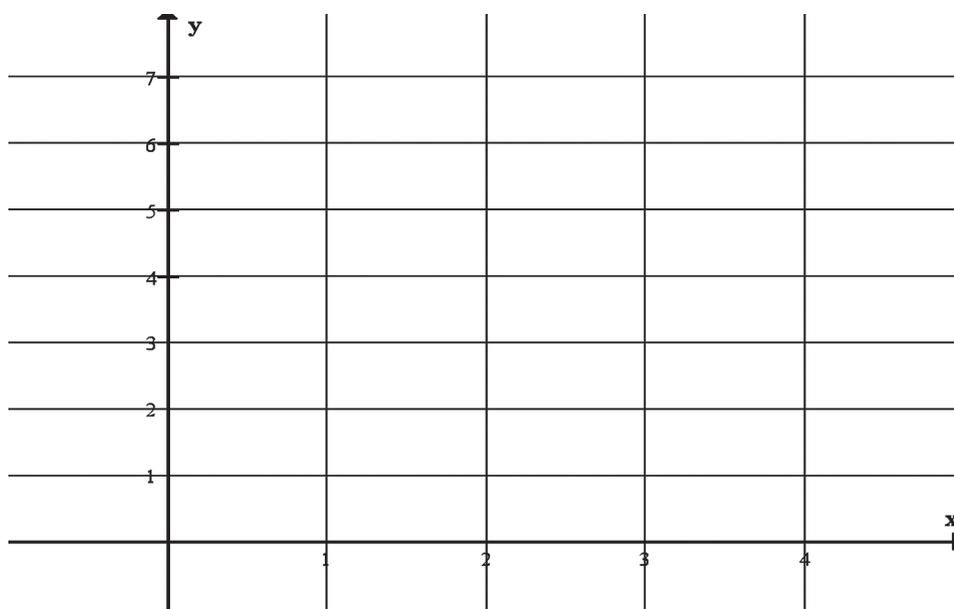
El rango de la función es: \_\_\_\_\_

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 7

Lee y analiza la información que se te presenta sobre "Límites trascendentes, posteriormente, estima el límite de la función trascendente de acuerdo con la tabla y gráfica, después utiliza el Geogebra (software) para verificar la gráfica.

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} e^{x-2}$$

x	0	1	2	3	4
f(x)					



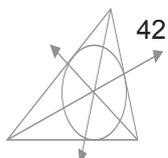
### Límites de funciones trascendentes

Las funciones trascendentes son aquellas cuya regla de correspondencia no es algebraica, como las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

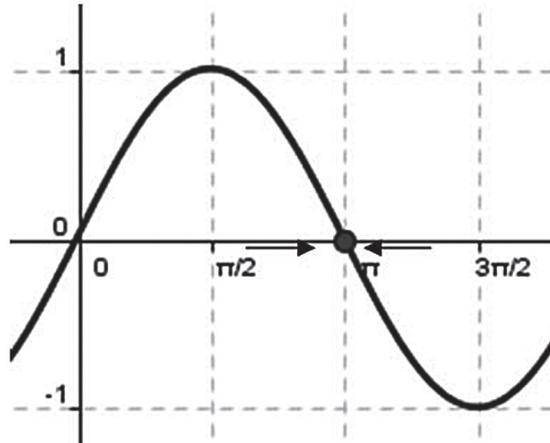
### Límites de funciones trigonométricas

Los límites de las funciones trigonométricas elementales son aquellos que se obtienen de la sustitución directa, es decir, al evaluar el valor al cual tiende "x", como se muestra a continuación:

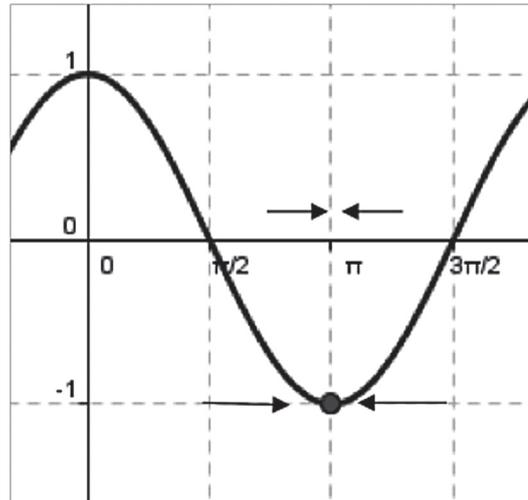
**Nota:** para resolver los límites de las funciones trigonométricas será necesario que la calculadora esté en modo de radianes (R).



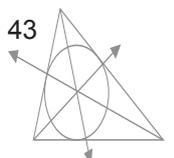
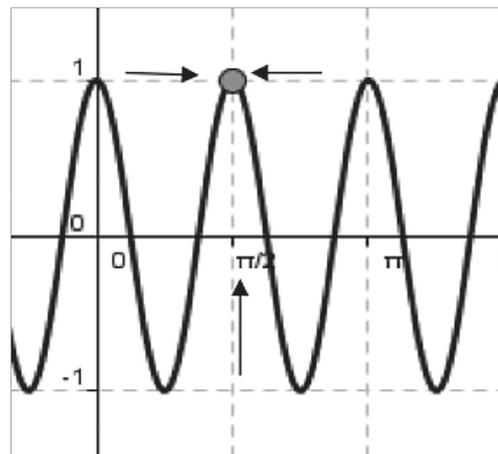
1.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi = 0$



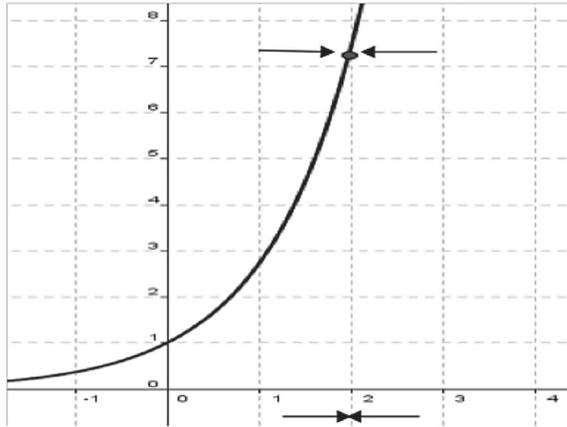
2.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi = -1$



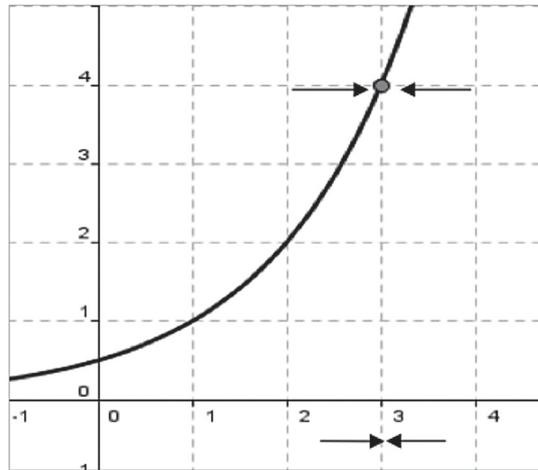
3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 4x = \cos 2\pi = 1$



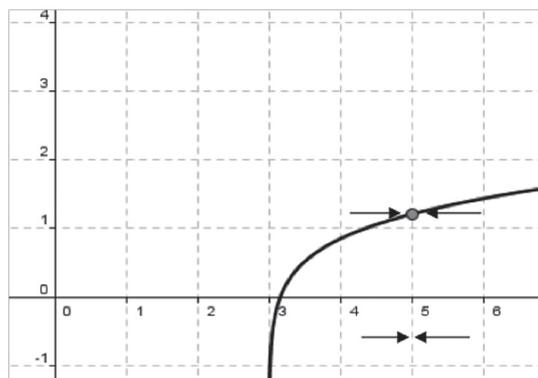
4.  $\lim_{x \rightarrow 2} e^x = e^2 \approx 7.39$



5.  $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{x-1} = e^{3-1} = 2^2 = 4$



6.  $\lim_{x \rightarrow 5} \log(x^2 - 9) = \log \left[ \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 9) \right] = \log(16) = 1.2$



### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 8

Encuentra los límites de las siguientes funciones trascendentes.

a) Estima mediante una tabla de valores la función:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$$

x	0	10	100	1000	$\infty$
f(x)					

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2}$

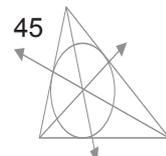
c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$

### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 9

Resuelve los límites de las siguientes funciones trascendentes.

**Nota:** para resolver los límites de las funciones trigonométricas será necesario que la calculadora la uses en modo de radianes (R).

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x =$	2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x =$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x =$	4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 4x =$
5. $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 2) =$	6. $\lim_{x \rightarrow 3} e^{2x} =$
7. $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{x^2 - 3} =$	8. $\lim_{x \rightarrow -2} e^{x^2 + 8x - 13} =$



**Nota:** En la actividad #5 tendrás que autoevaluarte y evaluar a tu compañero de equipo, con los formatos que se te dan al finalizar el bloque.

### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 10

Resuelve los siguientes ejercicios individualmente, aplicando límites.

El costo promedio (en pesos) por disco cubierto por una compañía grabadora al imprimir  $x$  discos compactos de audio está dado por la función:

$$c(x) = 2.4 + \frac{2500}{x}$$

a) ¿Cuánto es el costo de 50 discos?

---



---



---

b) ¿Cómo interpretas el costo cuando  $x$  tiende al infinito?

---



---



---

2. Cuando se arroja materia orgánica de desecho a un estanque de tratamiento, éste se va oxidando (O) y la cantidad de oxígeno varía con respecto al tiempo ( $t$ , en semanas) de acuerdo a la siguiente función:

$$o(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$$

a) ¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno existe en el estanque tras una semana?

---



---



---

b) ¿Tras quince semanas?

---



---



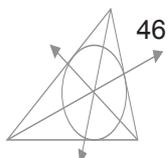
---

c) ¿Cuál es el porcentaje de oxígeno para “ $t$ ” sea excesivamente grande?

---



---

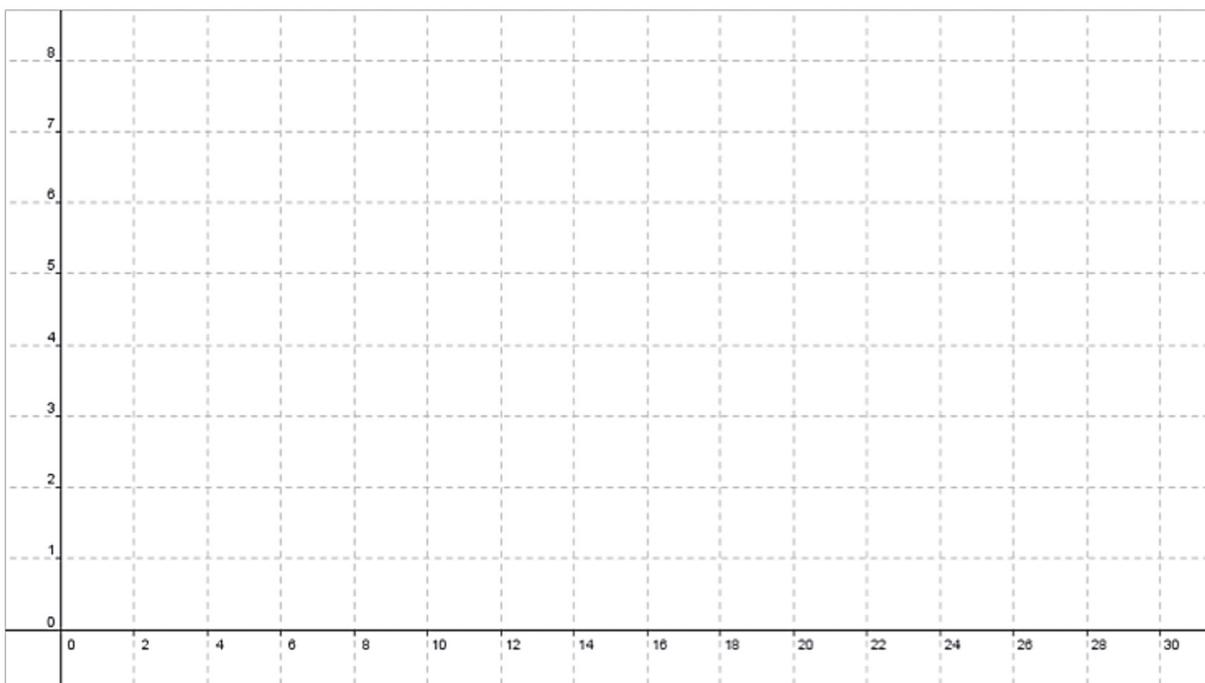


3. Las feromonas son sustancias químicas que libera un organismo cuando empiezan a enamorarse produciendo una doble sensación de aletargamiento y de hiperactividad.

Si la función  $F(t) = t / t^2 - 1$ , representa el porcentaje de esta sustancia en una persona, durante una etapa de su enamoramiento, donde "t" representa el número de meses, que cantidad de estas sustancias se generarán cuando:

Tiempo (meses)	% F
1	
5	
8	
10	
15	
20	
25	
30	

a) Grafica los datos obtenidos:



4. La producción de cierta hortaliza en los valles, se puede predecir mediante la función

$$P(t) = 12,000 + \frac{8,000}{(t+2)^2}$$

Donde “t” es el tiempo medido en semanas. ¿Cuál es el límite cuando “t” es excesivamente grande?

5. El costo en millones de pesos que gasta una dependencia del gobierno en programas sociales, se representa por la función:

$$c(x) = \frac{320}{100-x}$$

Si “x” representa el porcentaje (%) del gasto, determina el costo que gasta dicha dependencia si:

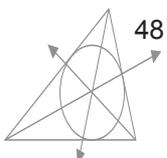
Porcentaje (%)	Gasto (millones de pesos)
10	
25	
50	
100	

### Referencias

CBBC, (2009), *Cálculo diferencial e integral I, Texto y cuaderno de ejercicios*, México.

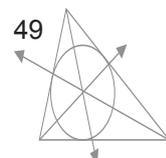
Fuenlabrada, S., (2008), *Cálculo diferencial*, 3era. ed., México, McGraw-Hill.

De la Borbolla, F. y De la Borbolla L., (1988), *Cálculo diferencial e integral*, 2<sup>da</sup>. ed, México, Esfinge.

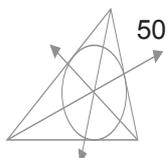


## AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Autoevaluación			
<b>Instrucciones:</b> Contesta honestamente, marcando con una $\surd$ a los siguientes cuestionamientos.			
<b>Nombre del alumno:</b>			
<b>Materia:</b>	Grupo:	Corte:	Semestre:
<b>Indicador de desempeño:</b>	Siempre	A veces	Difícilmente
Asumo comportamientos y decisiones que me ayudan a lograr mis metas académicas.			
Soy consciente de mis hábitos de consumo y conductas de riesgo, favoreciendo mi salud física, mental y social.			
Puedo expresar mis ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).			
Utilizo las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.			
Formulo hipótesis y compruebo su validez para la solución de problemas planteados en diversas asignaturas.			
Consulto diversas fuentes informativas y utilizo las más relevantes y confiables.			
Realizo trabajos donde aplico saberes de varias asignaturas.			
Me integro con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.			
Respeto las opiniones, creencias e ideas de mis compañeros.			
Contribuyo con acciones para la solución de problemas ambientales de mi comunidad.			
<b>Observaciones y retroalimentación:</b>			



<b>Coevaluación</b>			
<b>Instrucciones:</b> Contesta honestamente, marcando con una $\surd$ a los siguientes cuestionamientos.			
<b>Nombre del compañero:</b>			
<b>Materia:</b>	Grupo:	Corte:	Semestre:
<b>Tu compañero:</b>	Siempre	A veces	Difícilmente
Asume comportamientos y decisiones que contribuyen a lograr las metas del grupo.			
Lleva a cabo hábitos de consumo que favorecen su salud física, mental y social.			
Expresa sus ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc).			
Utiliza las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.			
Propone soluciones a problemas planteados en diversas asignaturas.			
Consulta diversas fuentes informativas y utiliza las más relevantes y confiables.			
Realiza trabajos donde aplica saberes de las asignaturas.			
Se integra con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.			
Respeto las opiniones, creencias e ideas de los compañeros.			
Participa en acciones para la solución de problemas ambientales de su entorno.			
<b>Observaciones y retroalimentación:</b>			



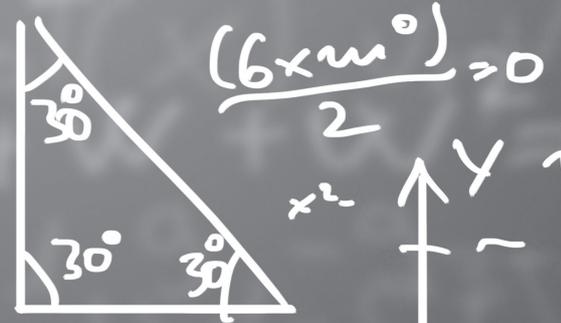
# BLOQUE III



$$\sin d + \cos d = \tan d$$



$$p^n = \frac{n}{p} \quad (x+y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$$



$$m^0/2 = 5^{2-u}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$R = \pi^2 - v$$

$$Q^2 = c^2$$

CALCULAS, INTERPRETAS Y ANALIZAS RAZONES DE CAMBIO EN FENÓMENOS NATURALES, SOCIALES, ECONÓMICOS, ADMINISTRATIVOS, EN LA AGRICULTURA, EN LA GANADERÍA Y EN LA INDUSTRIA

**Bloque**

CALCULAS, INTERPRETAS Y ANALIZAS RAZONES DE CAMBIO EN FENÓMENOS NATURALES, SOCIALES, ECONÓMICOS, ADMINISTRATIVOS, EN LA AGRICULTURA, EN LA GANADERÍA Y EN LA INDUSTRIA.

**DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:**

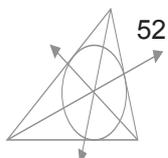
- Calcula e interpreta el valor representativo de un proceso o fenómeno económico, social o natural en función del tiempo, mediante la resolución de problemas del contexto real.
- Compara los diferentes procesos algebraicos que determinan una razón de cambio, mediante el análisis de casos relacionados con la producción agrícola, velocidad instantánea y la producción industrial existentes en el entorno cotidiano.
- Analiza y resuelve problemas matemáticos que modelan razones de cambio para cuantificar el cambio físico, químico, biológico, económico, entre otros, después de transcurrido un tiempo.

**COMPETENCIAS A DESARROLLAR:**

- Analiza la producción de una empresa en un determinado tiempo e interpreta la producción promedio, su máxima y mínima, para obtener la razón de cambio promedio.
- Valora el uso de las TIC en el modelado y simulación de situaciones problemáticas de razón de cambio, en la interpretación de su valor a través del tiempo en problemas de producción industrial, de física y en química.
- Interpreta y cuantifica a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas de fenómenos físicos relativos a la variación de la velocidad, la velocidad promedio, la velocidad de un móvil en cualquier instante y como ésta varía a través del tiempo.
- Interpreta la razón de cambio como la pendiente de una pareja de puntos localizados en el plano o como la pendiente de la recta secante en la resolución de problemas de física en situaciones del entorno.
- Argumenta e interpreta la razón de cambio como un límite, obtiene su representación algebraica y como consecuencia reconoce a este límite como la derivada de la función en resolución de problemas de su entorno.
- Resuelve gráfica y algebraicamente derivadas para resolver problemas de física, química, naturales, sociales, económicos, administrativos y financieros dentro de su ámbito inmediato.
- Interpreta, analiza y argumenta que la segunda derivada de una función gráficamente representa la concavidad de la curva y permite determinarlos puntos de inflexión.

**OBJETOS DE APRENDIZAJE:**

- La variación de un fenómeno a través del tiempo.
- La velocidad, la rapidez y la aceleración de un móvil en un periodo de tiempo.



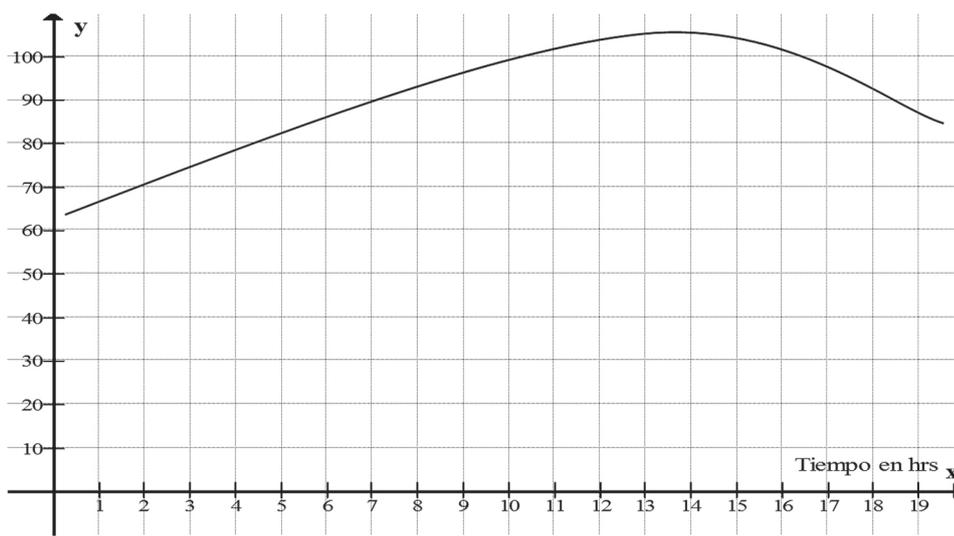
La **razón de cambio** (de una variable respecto a otra) es la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra. (También se le llama tasa de cambio.) Si las variables no tienen ninguna dependencia la tasa de cambio es cero.

En general, en una relación funcional  $y = f(x)$ , la razón de cambio de la variable dependiente y respecto a la independiente  $x$  se calcula mediante un proceso de límite de la razón  $[f(x+t) - f(x)]/t$ , denominada cociente diferencial.

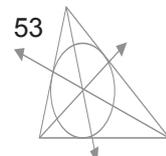
En sentido estricto entonces, la razón de cambio es el límite del cociente diferencial cuando  $t$  tiende a cero. De esta manera, la razón de cambio es la interpretación fundamental de la derivada de una función.

### Situación didáctica 1:

El papá de Luis viaja a la Ciudad de Mexicali por negocios y decide llevar a su familia para pasar tiempo con ella. Luis decide investigar la temperatura de los días que estarán en la ciudad, ya que el hermano más pequeño le pregunta cuáles son las horas más propicias para nadar en la alberca del hotel, para esto Luis consulta la página Web del tiempo y encuentra una gráfica que muestra cómo varía la temperatura conforme avanzan las horas.



Nota: El eje x muestra el tiempo en horas, el eje y la temperatura en grados Fahrenheit.



**Conflicto cognitivo**

- Si el hermano de Luis desea nadar por la mañana, ¿cuáles serán las horas en las que la temperatura sea la ideal?
- ¿Cómo obtendrá el promedio de la temperatura entre las 9 y 12 hrs?, para saber si éstas son las horas más adecuadas.
- Si deciden ir a la piscina por la tarde, ¿cuál será la temperatura promedio entre las 15 y las 18 horas?
- La mamá de Luis quiere ir al centro comercial de compras y pregunta, ¿cuál será la temperatura exacta a las 19 horas?
- En la gráfica parece ser que a las 13 y 14 horas tienen las mismas temperaturas. ¿Cómo podría Luis determinar las temperaturas en esos precisos momentos?
- ¿Cuál será la máxima temperatura del día que muestra la gráfica?

**Razón de cambio promedio**

En semestres anteriores, se analizó la fórmula para calcular la pendiente de una función lineal, la cual se puede utilizar también como la razón de cambio promedio realizando la siguiente afirmación.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Entonces para calcular la razón de cambio promedio se utiliza la fórmula:

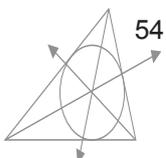
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Por ejemplo:**

Calcula la razón de cambio promedio de las siguientes funciones en el intervalo que se te indica en cada una de ellas.

$f(x) = x + 2$  en el intervalo  $[1,3]$ .

$x$	$y$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	$f(1) = 3$	$2 - 1 = 1$	$4 - 3 = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
2	$f(2) = 4$	$3 - 2 = 1$	$5 - 4 = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
3	$f(3) = 5$	$4 - 3 = 1$	$6 - 5 = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
4	$f(4) = 6$			



Como se trata de una función lineal, la razón de cambio promedio es constante dando como resultado  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

Por el contrario cuando se trata de una función que no sea lineal, entonces, el comportamiento será como el que se muestra en el siguiente ejemplo:

2.  $f(x) = x^2 - 1$  en el intervalo  $[0,3]$ .

$x$	$y$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	$f(0) = -1$	$1 - 0 = 1$	$0 - (-1) = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
1	$f(1) = 0$	$2 - 1 = 1$	$3 - 0 = 3$	$\frac{3}{1} = 3$
2	$f(2) = 3$	$3 - 2 = 1$	$8 - 3 = 5$	$\frac{5}{1} = 5$
3	$f(3) = 8$	$4 - 3 = 1$	$15 - 8 = 7$	$\frac{7}{1} = 7$
4	$f(4) = 15$			

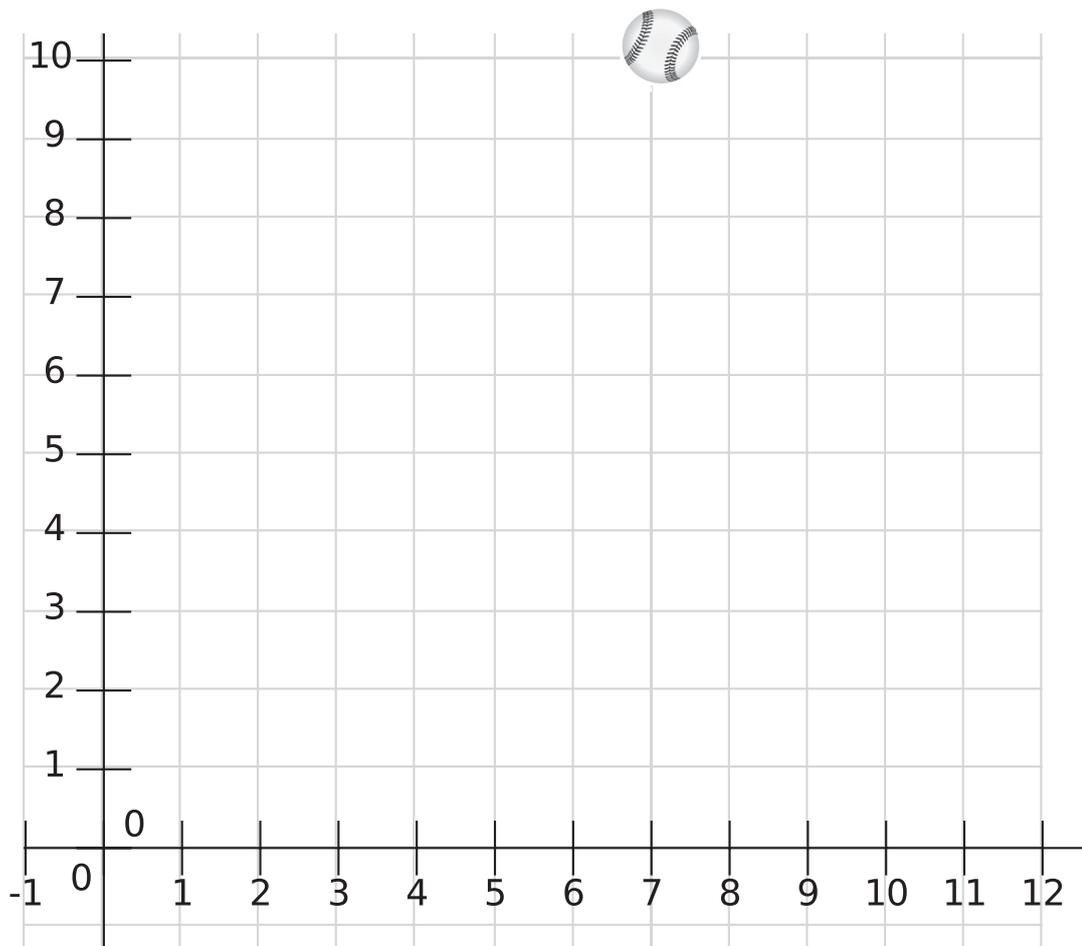
Tomando como referencia los ejemplos previamente resueltos desarrolla los siguientes ejercicios.

1.  $f(p) = 2p - 1$  en el intervalo  $[0,3]$ .


2.  $f(t) = t^2 - 2t - 1$  en el intervalo  $[-1,1]$ .




b) Traza la gráfica de la función anterior para observar el trayecto que siguió la pelota durante el periodo  $[0, 12]$ .



Hasta este momento se ha analizado la importancia de la razón de cambio promedio en la resolución de problemas de nuestro entorno, pero, su aplicación no finaliza aquí, debido a que, a continuación analizaremos la razón de cambio promedio como límite.

### La razón de cambio como límite

Es importante mencionar que cuando se utiliza la razón de cambio como límite lo que se está calculando es la pendiente de una función en un punto dado, por tal motivo, la expresión matemática a utilizar es:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(x^1)}{h}$$

Por ejemplo; para calcular la pendiente de la función  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ , cuando  $x=2$ , se realiza el siguiente procedimiento:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(x^1)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + (x+h) - 1 - [2x^2 - x + 1]}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h) + x + h - 1 - 2x^2 - x + 1}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 1 - 2x^2 - x + 1}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 + x + h - 1 - \cancel{2x^2} - x + 1}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + \cancel{x} + h - \cancel{1} - \cancel{x} + 1}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + \cancel{x} + h - \cancel{x}}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + h}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(4x + 2h + 1)}{\cancel{h}}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2(0) + 1$$

$$m = 4x + 1$$

$$m = 4(2) + 1$$

Entonces, la pendiente de la función  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ , cuando  $x = 2$  es:

$$m = 9$$

### OBSERVACIONES:

Para encontrar  $f(x_2)$  a la función original se le incrementa  $h$  en cada  $x$  como se muestra a continuación:  $f(x) = 2x^2 + x - 1$

$$f(x_2) = 2(x+h)^2 + (x+h) - 1$$

La  $f(x_1)$  es la función original, por lo tanto;

$$f(x_1) = 2x^2 + x - 1$$

Pasos para desarrollar un **binomio al cuadrado**:

- El primer término al cuadrado.
- (+) o (-) el doble del primer término por el segundo término.
- (+) el cuadrado del segundo término.

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

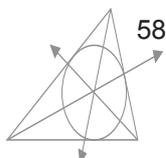
**Factorización por factor común:**

$\frac{4xh + 2h^2 + h}{h}$  Los tres términos tienen en común a la  $h$ , entonces:

$$\frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

Si al factorizar por factor común aún nos queda una  $h$ , entonces, se aplica el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , como se muestra a continuación:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2(0) + 1$$



**ACTIVIDAD DEL APRENDIZAJE 1**

A continuación en binas calcula la pendiente de las siguientes funciones:

1.  $f(x)=x^2-3x+4$ , cuando  $x=1$ .
2.  $f(x)=-x^2+x+2$ , cuando  $x=3$ .
3.  $f(x)=-4x+5$ , cuando  $x=4$ .
4.  $f(x)=-3x^2-x+7$ , cuando  $x=0$

Ahora bien, el procedimiento anterior nos servirá para calcular la derivada de una función, mencionando que si se sustituye cualquier valor en  $x$  entonces se estaría calculando la pendiente para ese punto. Así que, para calcular la derivada de una función se puede utilizar la regla de los cuatro pasos, la cual consiste en desarrollar algunas modificaciones a la fórmula utilizada previamente como se muestra a continuación.

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$$

Donde:

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y}; \frac{\text{Delta } x}{\text{Delta } y}$$

$$h = \Delta x$$

Entonces la fórmula para calcular la derivada de una función mediante la **regla de los cuatro pasos** es la siguiente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

A continuación calcularemos la derivada de la función  $f(x)=-x^2-x+7$  utilizando la regla de los cuatro pasos, recordemos que primero se busca  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  para sustituir de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 7 - [-x^2 - x + 7]}{\Delta x}$$

Desarrollando el binomio y realizando multiplicaciones nos queda:

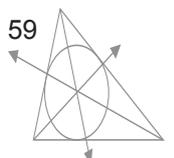
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x - \Delta x + 7 + x^2 + x - 7}{\Delta x}$$

Eliminando términos semejantes

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{-x^2} - 2x\Delta x - \cancel{\Delta x^2} - \cancel{x} - \Delta x + 7 + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{7}}{\Delta x}$$

Factorizando por factor común

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (-2x - \Delta x - 1)}{\Delta x}$$



Eliminando las  $\Delta x$  y aplicando el límite nos queda que la derivada de la función  $f(x) = -x^2 - x + 7$  es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2x - 1$$

## ACTIVIDAD DEL APRENDIZAJE 2

A continuación en binas calcula la derivada de las siguientes funciones utilizando la regla de los cuatro pasos.

1.  $f(x) = x^2 - 2x + 4$

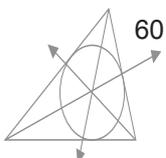
2.  $f(x) = -3x^2 - 4x + 5$

3.  $f(x) = 3x + 7$

4.  $f(x) = 7x$

5.  $f(x) = x^2 + 4x - 2$

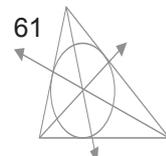
Debido a la dificultad que presenta la regla de los cuatro pasos para calcular la derivada de una función, por eso también se puede calcular la derivada utilizando algunas reglas y fórmulas, las cuales se enlistan a continuación.



### Formulario de las reglas para derivar

Reglas para derivar funciones algebraicas y trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas)

Función	Derivada de la función
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=cx$	$f'(x)=c$
$f(x)=cx^n$	$f'(x)=ncx^{n-1}$
$f(x)=U^n$	$f'(x)=nU^{n-1} du$
$f(x)=\sqrt{U}$	$f'(x)=\frac{du}{2\sqrt{U}}$
$f(x)=UV$	$f'(x)=Udv+Vdu$
$f(x)=\frac{U}{V}$	$f'(x)=\frac{Vdu-Udv}{V^2}$
$f(x)=\text{Sen}U$	$f'(x)=\text{Cos}Udu$
$f(x)=\text{Cos}U$	$f'(x)=-\text{Sen}Udu$
$f(x)=\text{Tan}U$	$f'(x)=\text{Sec}^2 Udu$
$f(x)=\text{Cot}U$	$f'(x)=-\text{Csc}^2 Udu$
$f(x)=\text{Sec}U$	$f'(x)=\text{Sec}U \text{ Tan}Udu$
$f(x)=\text{Csc}U$	$f'(x)=-\text{Csc}U \text{ Cot}Udu$
$f(x)=a^u$	$f'(x)=a^u \ln a du$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=e^u du$
$f(x)=\ln U$	$f'(x)=\frac{du}{U}$
$f(x)=\log_a U$	$f'(x)=\frac{du}{U \ln a}$



## Reglas para derivar

- I. Si se tiene una función  $f(x) = c$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = 0$ .  
Por ejemplo:

1. $f(x) = 2$ $f'(x) = 0$	2. $f(x) = -6$ $f'(x) = 0$
3. $f(x) = \frac{2}{4}$ $f'(x) = 0$	4. $f(x) = -\frac{9}{8}$ $f'(x) = 0$

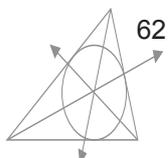
Entonces como conclusión, la derivada de cualquier número es cero.

- II. Si se tiene una función  $f(x) = cx$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = c$ .  
Por ejemplo:

1. $f(x) = 2x$ $f'(x) = 2$	2. $f(x) = -6x$ $f'(x) = -6$
3. $f(x) = \frac{2}{4}x$ $f'(x) = \frac{2}{4}$	4. $f(x) = -\frac{9x}{8}$ $f'(x) = -\frac{9}{8}$

- III. Si se tiene una función  $f(x) = x^n$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Por ejemplo:

1. $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$	2. $f(x) = -4x^5$ $f'(x) = -20x^4$
3. $f(x) = \frac{2}{4}x^2$ $f'(x) = x$	4. $f(x) = -\frac{9x^3}{8}$ $f'(x) = -\frac{27x^2}{8}$

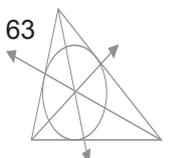


- IV. Si se tiene una suma o resta de funciones  $f(x) = ax^n + bx - c$  entonces la primera derivada se calcula de la siguiente manera:

$1. f(x) = 2x^3 + 4x - 7$ $f'(x) = 6x^2 + 4$	$2. f(x) = -4x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$ $f'(x) = -16x^3 + 6x^2 - 2x$
$3. f(x) = x^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{3}x$ $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	$4. f(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$ $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x$

- V. Si se tiene una función  $f(x) = U^n$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = nU^{n-1}du$ . Por ejemplo:

$1. f(x) = (x + 1)^4$ $u = x + 1 \quad du = 1$ $f'(x) = 4(x+1)^3(1)$ $f'(x) = 4(x+1)^3$	$2. f(x) = (6x-3)^5$ $u = 6x - 3 \quad du = 6$ $f'(x) = 5(6x-3)^4(6)$ $f'(x) = 30(6x-3)^4$
$3. f(x) = (2x-6)^3$ $u = 2x - 6 \quad du = 2$ <p>Sustituyendo y multiplicando en la formula</p> $f'(x) = 3(2x-6)^2(2)$ <p>Desarrollando el binomio</p> $f'(x) = 6(2x-6)^2$ <p>Multiplicando</p> $f'(x) = 6(4x^2 - 24x + 36)$	$4. f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ <p>Para este caso en particular la función original se transcribe de la siguiente manera:</p> $f'(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$ $u = x + 1 \quad du = 1$ $f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(1)$ $f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$



Resultado

$$f'(x) = 24x^2 - 144x + 216$$

Cualquiera de los dos resultados es correcto.

$$f'(x) = \frac{2}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}} \quad f'(x) = \frac{2}{3^3\sqrt[3]{(x+1)}}$$

VI. Si se tiene una función  $f(x) = \sqrt{U}$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = \frac{du}{2\sqrt{U}}$ . Por ejemplo:

1.  $f(x) = \sqrt{(2x-5)}$

$u = 2x - 5 \quad du = 2$

$$f'(x) = \frac{du}{2\sqrt{U}} = \frac{\cancel{2}}{2\sqrt{2x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

2.  $f(x) = \sqrt{(1-6x)}$

$u = 1 - 6x \quad du = -6$

$$f'(x) = \frac{du}{2\sqrt{U}} = \frac{-6}{2\sqrt{1-6x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-6x}}$$

3.  $f(x) = \sqrt{(3-x)}$

$u = 3 - x \quad du = -1$

$$f'(x) = \frac{du}{2\sqrt{U}} = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

4.  $f(x) = \sqrt{(x^2+3)}$

$u = x^2 + 3 \quad du = 2x$

$$f'(x) = \frac{du}{2\sqrt{U}} = \frac{\cancel{2}x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

VII. Si se tiene una función  $f(x) = UV$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = Udv + Vdu$ . Por ejemplo:

1.  $f(x) = (2x+1)(6x-3)$

$U = 2x + 1 \quad V = 6x - 3$

$du = 2 \quad dv = 6$

Sustituyendo en la fórmula

$$f'(x) = Udv + Vdu$$

$$f'(x) = (2x+1)(6) + [(6x-3)(2)]$$

2.  $f(x) = (x^2+4x-2)(x-2)$

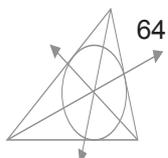
$U = x^2 + 4x - 2 \quad V = x - 2$

$du = 2x + 4 \quad dv = 1$

Sustituyendo en la fórmula

$$f'(x) = Udv + Vdu$$

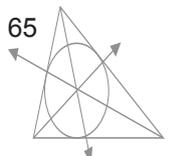
$$f'(x) = (x^2+4x-2)(1) + [(x-2)(2x+4)]$$



$f'(x) = 12x + 6 + 12x - 6$ $f'(x) = 24x$	$f'(x) = x^2 + 4x - 2 + [2x^2 + 4x - 4x - 8]$ $f'(x) = x^2 + 4x - 2 + 2x^2 + 4x - 4x - 8$ $f'(x) = 3x^2 + 4x - 10$
<p>3. <math>f(x) = (x + 1)^2(6x)</math></p> <p>Primero desarrollamos el binomio al cuadrado.</p> <p><math>(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1</math>, entonces;</p> <p><math>U = x^2 + 2x + 1</math>      <math>V = 6x</math></p> <p><math>du = 2x + 2</math>      <math>dv = 6</math></p> <p>Sustituyendo</p> <p><math>f'(x) = (x^2 + 2x + 1)(6) + [(6x)(2x + 2)]</math></p> <p><math>f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 + 12x^2 + 12x</math></p> <p><math>f'(x) = 18x^2 + 24x + 6</math></p>	<p>4. <math>f(x) = 4(7x - 2)</math></p> <p><math>U = 4</math>      <math>V = 7x - 2</math></p> <p><math>du = 0</math>      <math>dv = 7</math></p> <p>Sustituyendo</p> <p><math>f'(x) = (4)(7) + [(7x - 2)(0)]</math></p> <p><math>f'(x) = 28</math></p>

VIII. Si se tiene una función  $f(x) = \frac{u}{v}$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = \frac{vdu - Udv}{v^2}$ . Por ejemplo:

<p>1. <math>f(x) = \frac{x-1}{x+2}</math></p> <p><math>u = x - 1</math>      <math>v = x + 2</math></p> <p><math>du = 1</math>      <math>dv = 1</math></p>	<p>2. <math>f(x) = \frac{4x-3}{4}</math></p> <p><math>u = 4x - 3</math>      <math>v = 4</math></p> <p><math>du = 4</math>      <math>dv = 0</math></p>
---	---



$$f'(x) = \frac{vdu - Udv}{v^2}$$

Sustituyendo y desarrollando

$$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - [(x-1)(1)]}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2 - [x-1]}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2 - x + 1}{(x+2)^2}$$

Entonces, la derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

Ojo: el denominador no se desarrolla, solo si existe la posibilidad de simplificar algún término, como se muestra en el segundo ejemplo.

$$f'(x) = \frac{vdu - Udv}{v^2}$$

Sustituyendo y desarrollando

$$f'(x) = \frac{(4)(4) - [(4x-3)(0)]}{(4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16}{16}$$

Entonces, la derivada de la función es:

$$f'(x) = 1$$

IX. Si se tiene una función  $f(x) = \text{Sen } u$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = \text{Cos } u \, du$ . Por ejemplo:

1.  $f(x) = \text{Sen}(6x)$

$$u = 6x \quad du = 1$$

$$f'(x) = \text{Cos } u \, du$$

$$f'(x) = [\text{Cos}(6x)](6)$$

Se multiplica el 6 por el 1 imaginario que acompaña a la función coseno y la primer derivada es:

$$f'(x) = 6\text{Cos}(6x)$$

2.  $f(x) = \text{Sen}(x^2 + 3x - 1)$

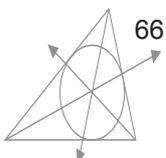
$$u = x^2 + 3x - 1 \quad du = 2x + 3$$

$$f'(x) = \text{Cos } u \, du$$

$$f'(x) = [\text{Cos}(x^2 + 3x - 1)](2x + 3)$$

Se multiplica el  $(2x+3)$  por el 1 imaginario que acompaña a la función coseno y la primer derivada es:

$$f'(x) = (2x + 3) \text{Cos}(x^2 + 3x - 1)$$



$$3. f(x) = 4\text{Sen}(6x)$$

$$f'(x) = 24\text{Cos}(6x)$$

Solo se multiplica el 4 por el 6 y se aplica la fórmula de la derivada.

$$4. f(x) = 5\text{Sen}(3x - 5)$$

$$f'(x) = 15\text{Cos}(3x - 5)$$

Solo se multiplica el 5 por el 3 y se aplica la fórmula de la derivada.

$$5. f(x) = 7 \text{Sen}(x^2)$$

$$f'(x) = 14x\text{Cos}(x^2)$$

Primero se deriva U siendo  $2x$  y se multiplica por el 7 después se aplica la fórmula de la derivada.

$$f(x) = (x+1)\text{Sen}(2x^2 - 6)$$

$$U = x + 1$$

$$du = 1$$

$$V = \text{Sen}(2x^2 - 6)$$

$$dv = 4x \text{Cos}(x^2 - 6)$$

Sustituyendo en la formula

$$f'(x) = Udv + Vdu$$

$$f'(x) = (x+1)[4x\text{Cos}(2x^2 - 6)] + [\text{Sen}(2x^2 - 6)](1)$$

$$f'(x) = 4x^2 + 4x\text{Cos}(2x^2 - 6) + \text{Sen}(2x^2 - 6)$$

X. Si se tiene una función  $f(x) = \text{Cos}u$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = -\text{Sen}u \, du$ . Por ejemplo:

$$6. f(x) = \text{Cos}(2x + 1)$$

$$u = 2x + 1 \quad du = 2$$

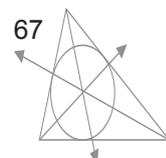
$$f'(x) = -\text{Sen}u \, du$$

$$f'(x) = -2\text{Sen}(2x + 1)$$

$$7. f(x) = 2\text{Cos}(5x)$$

$$f'(x) = -\text{Sen}u \, du$$

$$f'(x) = -10\text{Sen}(5x)$$



XI. Si se tiene una función  $f(x) = \text{Tanu}$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = \text{Sec}^2u \, du$ . Por ejemplo:

$$1. f(x) = \text{Tan}(6x - 2)$$

$$u = 6x - 2 \quad du = 6$$

$$f'(x) = \text{Sec}^2u \, du$$

$$f'(x) = [\text{Sec}^2(6x - 2)](6)$$

$$f'(x) = 6\text{Sec}^2(6x - 2)$$

$$2. f(x) = 3\text{Tan}(4x + 1)$$

$$u = 4x + 1 \quad du = 4$$

$$f'(x) = \text{Sec}^2u \, du$$

$$f'(x) = 12\text{Sec}^2(4x + 1)$$

XII. Si se tiene una función  $f(x) = a^u$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = a^u \ln a \, du$ . Por ejemplo:

$$3. f(x) = 2^{5x}$$

$$u = 5x \quad du = 5$$

$$f'(x) = 2^{5x} \ln 2(5)$$

$$f'(x) = (5)2^{5x} \ln 2$$

$$1. f(x) = 5^{(3+x^2)}$$

$$u = 3 + x^2 \quad du = 2x$$

$$f'(x) = 5^{(3+x^2)} \ln 5(2x)$$

$$f'(x) = (2x)5^{(3+x^2)} \ln 2$$

XIII. Si se tiene una función  $f(x) = e^u$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = e^u \, du$ . Por ejemplo:

$$4. f(x) = e^{2x}$$

$$u = 2x \quad du = 2$$

$$f'(x) = e^{2x}(2)$$

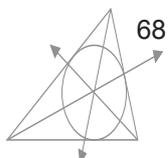
$$f'(x) = (2)e^{2x}$$

$$2. f(x) = e^{(3x+4x^2)}$$

$$u = 3x + 4x^2 \quad du = 3 + 8x$$

$$f'(x) = e^{(3x+4x^2)}(3 + 8x)$$

$$f'(x) = (3 + 8x)e^{(3x+4x^2)}$$



XIV. Si se tiene una función  $f(x) = \ln u$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = \frac{du}{u}$ . Por ejemplo:

$$5. f(x) = \ln(9x)$$

$$u = 9x \quad du = 9$$

$$f'(x) = \frac{9}{9x}$$

$$1. f(x) = \ln(7 + 2x)$$

$$u = 7 + 2x \quad du = 2$$

$$f'(x) = \frac{2}{7 + 2x}$$

XV. Si se tiene una función  $f(x) = \log_a u$  entonces la primera derivada es  $f'(x) = \frac{du}{u \ln a}$ . Por ejemplo:

$$1. f(x) = \log_3(6x)$$

$$u = 6x \quad du = 6$$

$$f'(x) = \frac{6}{6x \ln 3}$$

$$2. f(x) = \log(x + 2)$$

$$u = x + 2 \quad du = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x + 2) \ln 10}$$

### ACTIVIDAD DEL APRENDIZAJE 3

**Instrucciones:** Una vez analizado los procedimientos anteriores, resuelve los siguientes ejercicios utilizando las reglas y fórmulas para derivar.

$$1. f(x) = 6x + 1$$

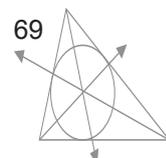
$$2. f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$3. f(x) = 2x^2 - 5x + 7$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+3}$$

$$5. f(x) = \sqrt[3]{(x+2)}$$

$$6. f(x) = (2x + 4)(4x - 3)$$



7.  $f(x) = 3 \cos(5x)$

8.  $\sqrt[3]{(x+2)^4}$

9.  $f(x) = 4x \sin(9 - 6x)$

10.  $f(x) = e^{(5-2x)}$

Después de haber aprendido a calcular la primera derivada de una función, a continuación aprenderemos a calcular las derivadas de orden superior conocidas también como derivadas sucesivas.

### Derivadas sucesivas

Las derivadas sucesivas conocidas también como derivadas de orden superior, son aquellas en las cuales una vez que se calcule la primera derivada  $f'(x)$  se procede a calcular una nueva derivada partiendo del resultado obtenido con anterioridad a la que se le conoce como segunda derivada de la función  $f''(x)$  y así sucesivamente hasta obtener la derivada que le sea solicitada, como se muestra en los siguientes ejemplos.

I. Calcula hasta la tercera derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$$

$$f''(x) = 6x + 4$$

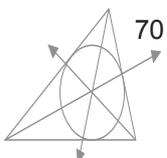
$$f'''(x) = 6$$

2.  $f(x) = 5x^3 - x^2 + x$

$$f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$$

$$f''(x) = 30x - 2$$

$$f'''(x) = 30$$



**ACTIVIDAD DEL APRENDIZAJE 4**

Ejercicios: después de analizar los ejemplos anteriores, calcula hasta la segunda derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 5$

2.  $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$

3.  $f(x) = x^2 - x - 2$

4.  $f(x) = -x^2 - 5x + 3$

5.  $f(x) = (x + 1)(x + 2)$

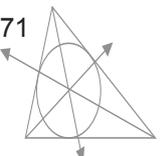
6.  $f(x) = (x)\sqrt{x}$

7.  $f(x) = (x + 1)^3$

8.  $f(x) = \frac{x}{x+2}$

9.  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

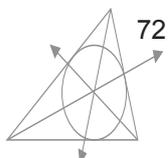
10.  $f(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x}$



## AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Autoevaluación			
<b>Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓ a los siguientes cuestionamientos.</b>			
<b>Nombre del alumno:</b>			
<b>Materia:</b>	<b>Grupo:</b>	<b>Corte:</b>	<b>Semestre</b>
<b>Indicador de desempeño:</b>	<b>Siempre</b>	<b>A veces</b>	<b>Difícilmente</b>
Asumo comportamientos y decisiones que me ayudan a lograr mis metas académicas.			
Soy consciente de mis hábitos de consumo y conductas de riesgo, favoreciendo mi salud física, mental y social.			
Puedo expresar mis ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).			
Utilizo las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.			
Formulo hipótesis y compruebo su validez para la solución de problemas planteados en diversas asignaturas.			
Consulto diversas fuentes informativas y utilizo las más relevantes y confiables.			
Realizo trabajos donde aplico saberes de varias asignaturas.			
Me integro con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.			
Respeto las opiniones, creencias e ideas de mis compañeros.			
Contribuyo con acciones para la solución de problemas ambientales de mi comunidad.			
<b>Observaciones y retroalimentación:</b>			

Coevaluación			
<b>Instrucciones: Contesta honestamente, marcando con una ✓ a los siguientes cuestionamientos respecto al compañero asignado.</b>			
<b>Nombre del compañero:</b>			
<b>Materia:</b>	<b>Grupo:</b>	<b>Corte:</b>	<b>Semestre</b>
<b>Tu compañero:</b>	<b>Siempre</b>	<b>A veces</b>	<b>Difícilmente</b>
Asume comportamientos y decisiones que contribuyen a lograr las metas del grupo.			
Lleva a cabo hábitos de consumo que favorecen su salud física, mental y social.			
Expresa sus ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).			
Utiliza las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.			
Propone soluciones a problemas planteados en diversas asignaturas.			
Consulta diversas fuentes informativas y utiliza las más relevantes y confiables.			
Realiza trabajos donde aplica saberes de las asignaturas.			
Se integra con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.			
Respeto las opiniones, creencias e ideas de los compañeros.			
Participa en acciones para la solución de problemas ambientales de su entorno.			
<b>Observaciones y retroalimentación:</b>			



# BLOQUE IV



CALCULAS E INTERPRETAS  
MÁXIMOS Y MÍNIMOS SOBRE  
LOS FENÓMENOS QUE HAN  
CAMBIADO EN EL TIEMPO DE LA  
PRODUCCIÓN INDUSTRIAL O AGROPECUARIA

# Bloque IV

## CALCULAS E INTERPRETAS MÁXIMOS Y MÍNIMOS SOBRE LOS FENÓMENOS QUE HAN CAMBIADO EN EL TIEMPO DE LA PRODUCCIÓN INDUSTRIAL O AGROPECUARIA.

### DESEMPEÑOS A DEMOSTRAR:

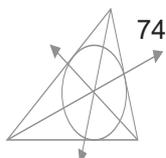
- Comprende el volumen máximo y lo aplica a través del diseño de envases como cilindros, cubos, prismas, esferas, entre otros.
- Interpreta gráficas que representan diversos fenómenos naturales, producciones agrícolas e industriales, identifica máximos y mínimos absolutos y relativos.
- Establece modelos matemáticos y representaciones gráficas de producción de diversas empresas (manufactura, fabricación y elaboración de artesanías) para calcular sus máximos y mínimos de utilidad y emitir juicios sobre su situación económica.
- Calcula máximos y mínimos en funciones algebraicas y trascendentes aplicando métodos algebraicos.

### COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

- Interpreta y analiza gráficas de fenómenos meteorológicos (temperatura, humedad atmosférica, calentamiento atmosférico y cantidad de bióxido de carbono en la atmósfera) de su región e identifica los máximos y mínimos absolutos.
- Construye e interpreta modelos matemáticos sencillos sobre el comportamiento de un móvil en un tiempo determinado y calcula máximos y mínimos absolutos y relativos.
- Valora el uso de las TIC en el modelado y simulación de situaciones problemáticas de fenómenos físicos, químicos, ecológicos, de producciones agrícolas, industriales, artesanales y de manufactura, emitiendo juicios de opinión.
- Calcula máximos y mínimos de funciones algebraicas e interpreta los máximos relativos y puntos de inflexión en gráficas que modelan la resolución de problemas de su entorno.

### OBJETOS DE APRENDIZAJE:

Producciones, máximos y mínimos.  
Variaciones en las producciones, máximos y mínimos relativos.



**Situación didáctica 1:**

El comportamiento de la producción de uva para elaborar vino de mesa en la región del Valle de Guadalupe de cierta compañía, se estima con la función  $f(x) = -x^2 + 70x - 1189$  donde  $x$  representa el tiempo en semanas y  $f(x)$  la producción de uva en toneladas por semana.

La meta de producción para 2011 es de 125 toneladas, lo demás es de excedente, que se utilizará para hacer jalea. (CBBC, 2015)

**Conflicto cognitivo.**

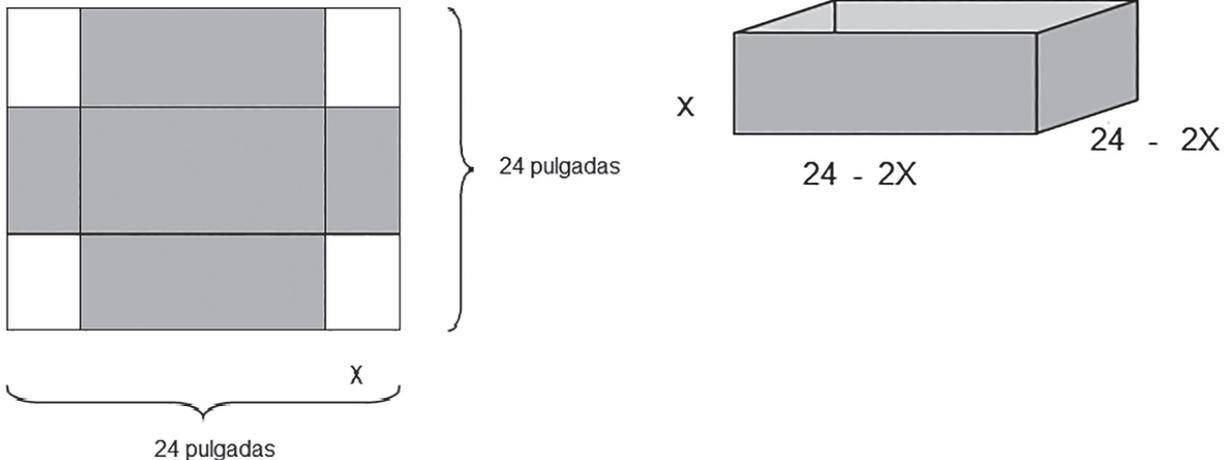
- ¿En qué semana comienza la cosecha de uva?
- ¿En qué semana termina?
- ¿En qué semana se obtendrá la máxima producción?
- ¿Cuántas toneladas se cosechan en esa semana?
- ¿Se alcanza la meta de las 125 toneladas?
- ¿En qué momento?
- ¿Cómo será la gráfica que representa la producción de uva?

**Actividad de aprendizaje 1**

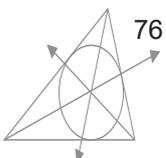
Una compañía empacadora de uva de mesa necesita cajas abiertas para almacenar su producto de volumen máximo y se van a construir a partir de un trozo cuadrado de material que tiene 24 pulgadas por lado, cortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando los lados hacia arriba.



Dibuja cuadrados iguales en las cuatro esquinas (tienes la libertad de elegir el tamaño(x)) después se recortarán cuatro cuadrados en las esquinas como se muestra en la figura.



- a) Escriba el volumen  $V$  como función de  $x$
- b) Completa analíticamente seis renglones de una tabla como la que sigue (se muestran los dos primeros renglones). Usa la tabla para hacer una conjetura acerca del volumen máximo.
- c) Aplica el cálculo para hallar el número crítico de la función del inciso a y encuentra el valor máximo. Usa un medio para el efecto con el fin de construir la gráfica del inciso a y verifica el volumen máximo a partir de esa gráfica.



Altura	Longitud y ancho	Volumen
1	24-2(1)	1(24-2(1)) <sup>2</sup> =484
2	24-2(2)	2(24-2(2)) <sup>2</sup> =800
3		
4		
5		
6		

### Máximos y mínimos

Los máximos y mínimos son una herramienta fundamental del cálculo diferencial que permite el uso de distintos materiales de la mejor forma, de tal manera, que no se desperdicie dicho material. Por ejemplo, existen compañías que se dedican a embotellar diferentes líquidos y para ello deberán conocer la forma que le darán a la botella para utilizar la menor cantidad (mínimo) de material y que se pueda almacenar la mayor cantidad (máximo) de líquido. A continuación se indica el procedimiento que se debe realizar para calcular los máximos y mínimos mediante el uso de las derivadas sucesivas.

### Criterio de la primera derivada para calcular máximos y mínimos.

Para calcular los máximos de una función mediante el criterio de la primera derivada se realizan los siguientes pasos:

1. Se calcula la primera derivada de la función.
2. Se iguala a cero la primera derivada y se calculan los valores críticos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Los cuáles serán nuestros probables máximos o mínimos.
3. Se toman valores inmediatamente menor y mayor de cada valor crítico obtenido y se sustituyen en la primera derivada, si los signos cambian de (-) a (+) entonces existe un mínimo en dicho valor crítico pero, si los signos cambian de (+) a (-) entonces existe un máximo en el valor crítico de la función.
4. Para trazar la gráfica se sustituyen los valores críticos en la función original para obtener las coordenadas de dichos puntos máximos y mínimos. (CBBC, SF)

A continuación se proporcionan algunos ejemplos con el procedimiento descrito con anterioridad para calcular los puntos máximos y mínimos de una función así como también el trazo de su gráfica.

**Primer ejemplo**  $f(x)=x^3+2x^2-15x-20$

**Paso 1.** Se calcula la primera derivada de la función.

$$f'(x)=3x^2+4x-15$$

**Paso 2.** Se iguala a cero la primera derivada y se calculan los valores críticos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Los cuales serán nuestros probables máximos o mínimos.

$$3x^2+4x-15=0$$

Es importante mencionar que en este punto existen diferentes procedimientos para calcular los valores críticos, de los cuales los más utilizados son la fórmula general y la factorización, como se muestra en el siguiente procedimiento.

**Fórmula general**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces  $3x^2 + 4x - 15 = 0$  donde:

$a=3$                        $b=4$                        $c=-15$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 14}{6}$$

Entonces primero tomamos el signo positivo y después el signo negativo o viceversa, ya que el orden no importa.

$$x_1 = \frac{-4 + 14}{6}$$

$$x_1 = \frac{10}{6}$$

$$x_1 = 1.66$$

$$x_2 = \frac{-4 - 14}{6}$$

$$x_2 = \frac{-18}{6}$$

$$x_2 = -3$$

Valores críticos

**Paso 3.** Se toman los valores inmediatamente menores e inmediatamente mayores y se sustituyen en la primera derivada para observar el cambio de signo.

➤ El valor inmediatamente menor a

$$x_1 = 1.66 \text{ es } x=1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 15$$

$$f'(x) = 3(1)^2 + 2(1) - 15$$

$$f'(x) = 3(1) + 2 - 15$$

$$f'(x) = -10$$

El valor inmediatamente mayor a

$$x_1 = 1.66 \text{ es } x=2$$

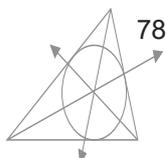
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 15$$

$$f'(x) = 3(2)^2 + 2(2) - 15$$

$$f'(x) = 3(4) + 4 - 15$$

$$f'(x) = +1$$

Como el cambio de signo es de (-) a (+), entonces se dice que existe un **mínimo** en  $x_1 = 1.66$ .



- El valor inmediatamente menor a

$$x_2 = -3 \text{ es } x = -4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 15$$

$$f'(x) = 3(-4)^2 + 2(-4) - 15$$

$$f'(x) = 3(16) - 8 - 15$$

$$f'(x) = +25$$

- El valor inmediatamente mayor a

$$x_2 = -3 \text{ es } x = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 15$$

$$f'(x) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 15$$

$$f'(x) = 3(4) - 4 - 15$$

$$f'(x) = -7$$

Como el cambio de signo es de (+) a (-), entonces se dice que existe un máximo en  $x_2 = -3$ .

**Paso 4.** Para trazar la gráfica se sustituyen los valores críticos en la función original para así obtener las coordenadas de dichos puntos máximos y mínimos.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$$

$$f(x) = (1.66)^3 + 2(1.66)^2 - 15(1.66) - 20$$

$$f(x) = 4.57 + 5.51 - 24.9 - 20$$

$$f(x) = -34.82$$

Las coordenadas son (1.92, -34.82)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$$

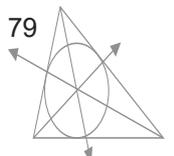
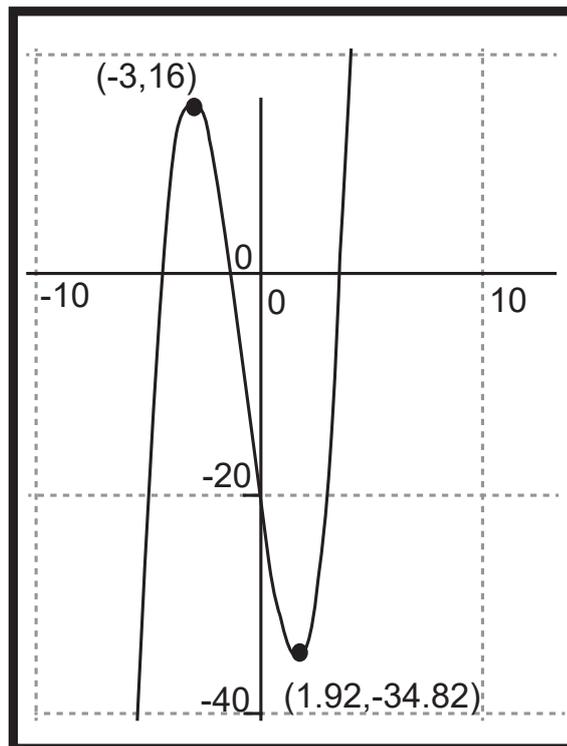
$$f(x) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 15(-3) - 20$$

$$f(x) = -27 + 18 + 45 - 20$$

$$f(x) = 16$$

Las coordenadas son (-3, 16)

Una vez localizadas las coordenadas del punto máximo y el punto mínimo se ubican en el plano cartesiano como se muestra en la siguiente figura.



**Segundo ejemplo**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

**Paso 1.**

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

**Paso 2.**

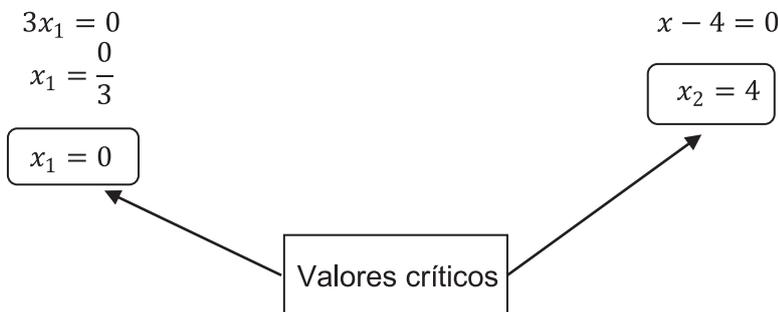
$$3x^2 - 12x = 0$$

Factorización por factor común

$$3x(x - 4) = 0$$

Para  $x_1$  se iguala de la siguiente manera:

Para  $x_2$  se iguala de la siguiente manera:



**Paso 3.**

➤ Para  $x_1=0$  el inmediatamente menor  $x=-1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x \\ f'(x) &= 3(-1)^2 - 12(-1) \\ f'(x) &= 3 + 12 \\ f'(x) &= 15 \end{aligned}$$

➤ Para  $x_1=0$  el inmediatamente mayor  $x=1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x \\ f'(x) &= 3(1)^2 - 12(1) \\ f'(x) &= 3 - 12 \\ f'(x) &= -9 \end{aligned}$$

Como el cambio de signo es de (+) a (-), entonces se dice que existe un máximo en  $x_1=0$ .

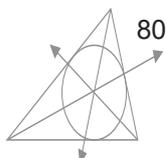
➤ Para  $x_2=4$  el inmediatamente menor  $x=3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x \\ f'(x) &= 3(3)^2 - 12(3) \\ f'(x) &= 27 - 36 \\ f'(x) &= -9 \end{aligned}$$

➤ Para  $x_2=4$  el inmediatamente mayor  $x=5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x \\ f'(x) &= 3(5)^2 - 12(5) \\ f'(x) &= 75 - 60 \\ f'(x) &= 15 \end{aligned}$$

Como el cambio de signo es de (-) a (+), entonces se dice que existe un mínimo en  $x_2=4$ .



**Paso 4.**

$$f(x)=x^3-6x^2+4$$

$$f(x)=(0)^3-6(0)^2+4$$

$$f(x)=4$$

Las coordenadas son (0,4)

$$f(x)=x^3-6x^2+4$$

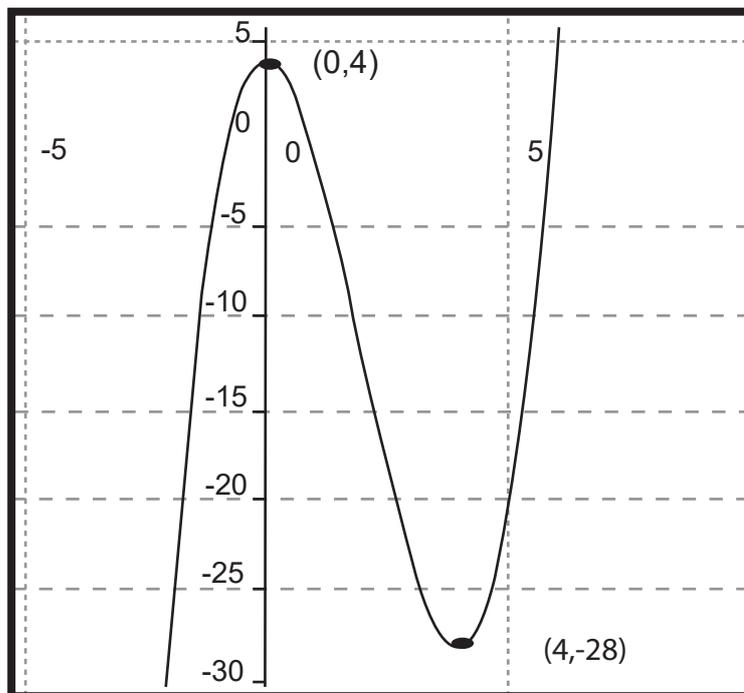
$$f(x)=(4)^3-6(4)^2+4$$

$$f(x)=64-96+4$$

$$f(x)=-28$$

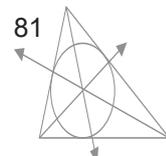
Las coordenadas son (4,-28)

Una vez localizadas las coordenadas del punto máximo y el punto mínimo se ubican en el plano cartesiano como se muestra en la siguiente figura.

**Actividad de aprendizaje 2**

Calcula los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones aplicando el criterio de la primera derivada y traza su gráfica. (CBBC, SF)

1.  $f(x)=x^2-8x+1$
2.  $f(x)=-x^2+8x-2$
3.  $f(x)=x^3-6x^2+16$
4.  $f(x)=x^3+12x^2+45x-52$
5.  $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$
6.  $f(x)=x^3-12x+1$



**Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos.**

Para poder calcular los máximos de una función mediante el criterio de la primera derivada se realizan los siguientes pasos:

1. Se calcula la primera y segunda derivada de la función.
2. Se iguala a cero la primera derivada y se calculan los valores críticos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Los cuales serán nuestros probables máximos o mínimos.
3. Se sustituyen los valores críticos encontrados en la segunda derivada y si el resultado obtenido es negativo, entonces existe un máximo, pero, si el resultado es positivo entonces existe un mínimo en la función.
4. Para trazar la gráfica se sustituyen los valores críticos en la función original para obtener las coordenadas de dichos puntos máximos y mínimos. (CBBC, SF)

A continuación se proporcionan algunos ejemplos con el procedimiento descrito previamente para calcular los puntos máximos y mínimos de una función así como también el trazo de su gráfica.

$$a) f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$$

**Paso 1.** Se calcula la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 15$$

$$f''(x) = 6x + 4$$

**Paso 2.** Se iguala a cero la primera derivada y se calculan los valores críticos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Los cuales serán nuestros probables máximos o mínimos.

$$3x^2 + 4x - 15 = 0$$

**Fórmula general**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces  $3x^2 + 4x - 15 = 0$  donde:

$$a=3 \quad b=4 \quad c=-15$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6}$$

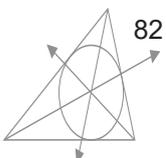
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{6}$$

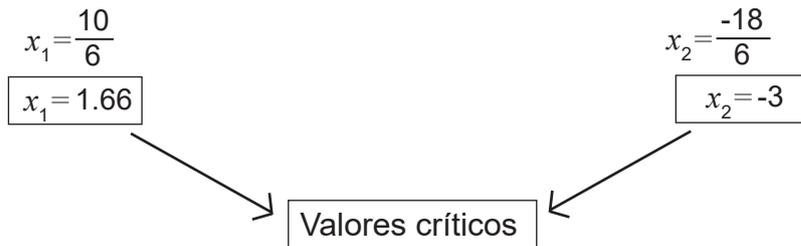
$$x = \frac{-4 \pm 14}{6}$$

Entonces primero tomamos el signo positivo y después el signo negativo o viceversa, ya que el orden no importa.

$$x_1 = \frac{-4 + 14}{6}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 14}{6}$$





**Paso 3.** Se sustituyen los valores críticos encontrados en la segunda derivada y si el resultado obtenido es negativo, entonces existe un máximo, pero, si el resultado es positivo entonces existe un mínimo en la función.

$$f''(x) = 6x + 4$$

Para  $x_1 = 1.66$

$$f''(x) = 6(1.66) + 4$$

$$f''(x) = +9.96$$

Para  $x_1 = -3$

$$f''(x) = 6(-3) + 4$$

$$f''(x) = -14$$

Como el signo es positivo, entonces existe un **mínimo**

Como el signo es negativo, entonces existe un **máximo**

**Paso 4.** Para trazar la gráfica se sustituyen los valores críticos en la función original para obtener las coordenadas de dichos puntos máximos y mínimos.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$$

$$f(x) = (1.66)^3 + 2(1.66)^2 - 15(1.66) - 20$$

$$f(x) = 4.57 + 5.51 - 24.9 - 20$$

$$f(x) = -34.82$$

Las coordenadas son (1.92, -34.82)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$$

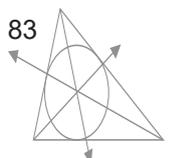
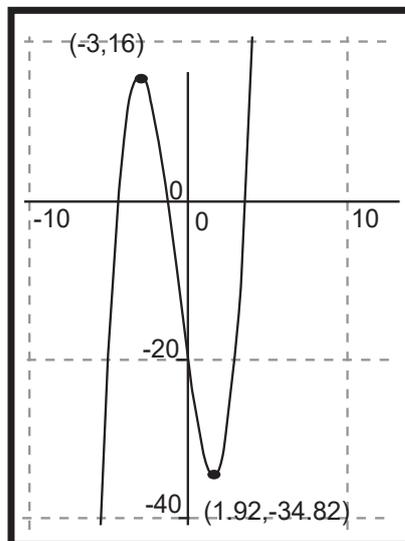
$$f(x) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 15(-3) - 20$$

$$f(x) = -27 + 18 + 45 - 20$$

$$f(x) = 16$$

Las coordenadas son (-3, 16)

Una vez localizadas las coordenadas del punto máximo y el punto mínimo se ubican en el plano cartesiano como se muestra en la siguiente figura.



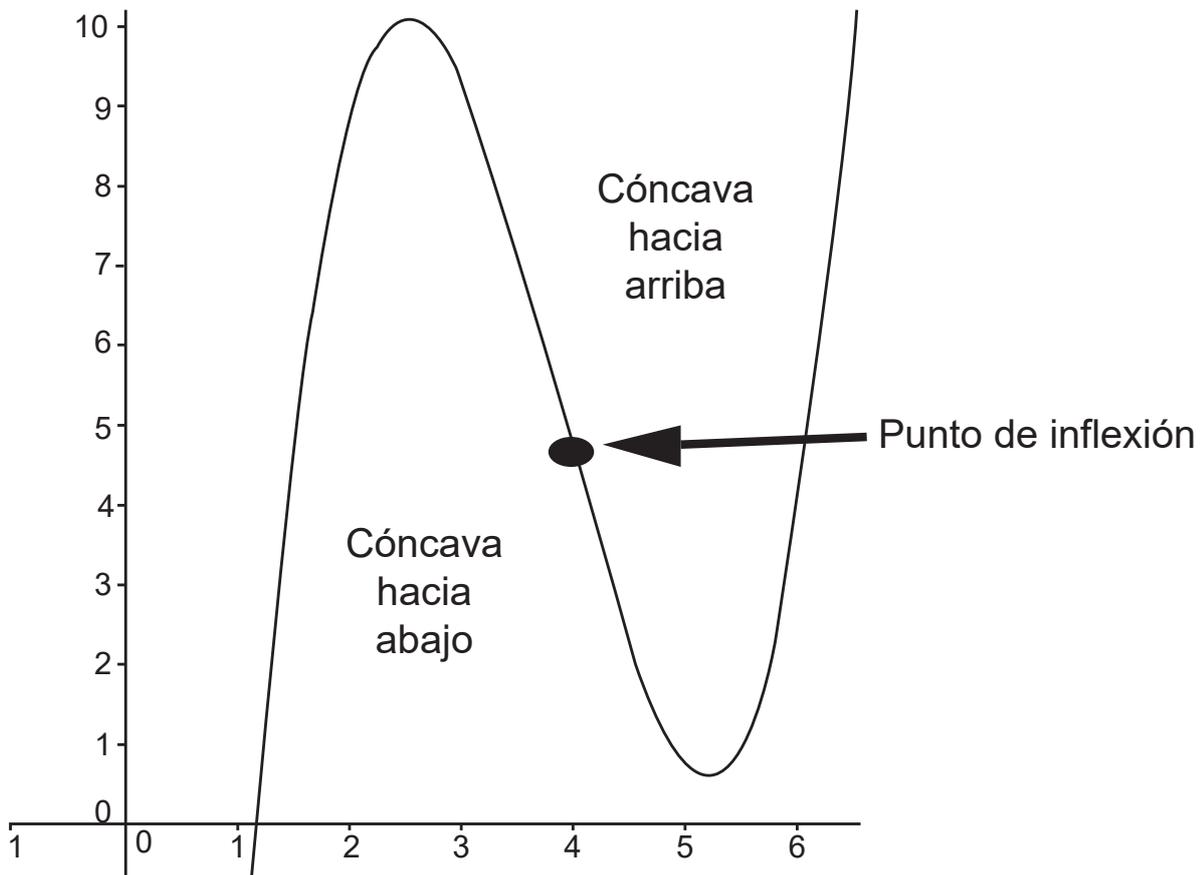
### Actividad de aprendizaje 3

Calcula los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones aplicando el criterio de la segunda derivada y traza su gráfica. (CBBC, SF)

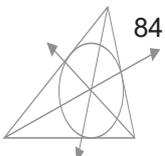
1.  $f(x) = x^2 - 6x + 1$
2.  $f(x) = -4x^2 + 8x$
3.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$
4.  $f(x) = x^3 + 7x^2 + 15x$
5.  $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 7$
6.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

### Puntos de inflexión

Se dice que una función  $f(x)$  tiene un punto de inflexión cuando cambia su sentido de concavidad. Como se muestra en la siguiente figura.



En la gráfica anterior se observa que en el punto C la curva cambia de sentido de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, indicando entonces que dicho punto se llama **punto de inflexión**.



### Criterio de la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión.

Si la concavidad cambia de sentido, entonces, la segunda derivada cambia de signo y, por lo tanto, es igual a cero en el punto de inflexión. De aquí que se puede determinar el punto de inflexión con el criterio de la segunda derivada.

### Criterio de la segunda derivada

1. Se calcula la primera y segunda derivada de la función.
2. Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación que resulta para calcular las abscisas donde la función puede tener un punto de inflexión.
3. Se determinan los intervalos con valores inmediatamente menores y mayores para cada abscisa encontrada para las cuales existe inflexión cuando la segunda derivada cambia de signo.
4. Se sustituyen las raíces de la segunda derivada en la función original para calcular las ordenadas de los puntos de inflexión. (CBBC, SF)

Ejemplos:

1. Calcula los puntos de inflexión de la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

**Paso 1.**

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

**Paso 2.**

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

**Paso 3.** Cuando  $x=2$

Inmediatamente menor  $x=1$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 6(1) - 12$$

$$f''(x) = 6 - 12$$

$$f''(x) = -6 \leftarrow$$

Inmediatamente mayor  $x=3$

$$f''(x) = 6x - 12$$

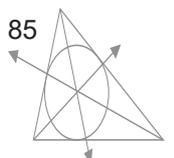
$$f''(x) = 6(3) - 12$$

$$f''(x) = 18 - 12$$

$$f''(x) = 6 \nearrow$$

Como el signo de la segunda derivada pasa de negativo a positivo, la función tiene un punto de inflexión en  $x = 2$ .

**Paso 4.** Para calcular la ordenada del punto de inflexión se sustituye  $x=2$  en la función original para conocer las coordenadas del punto de inflexión.



Para  $x=2$

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

$$f(x)=(2)^3-6(2)^2+9(2)+1$$

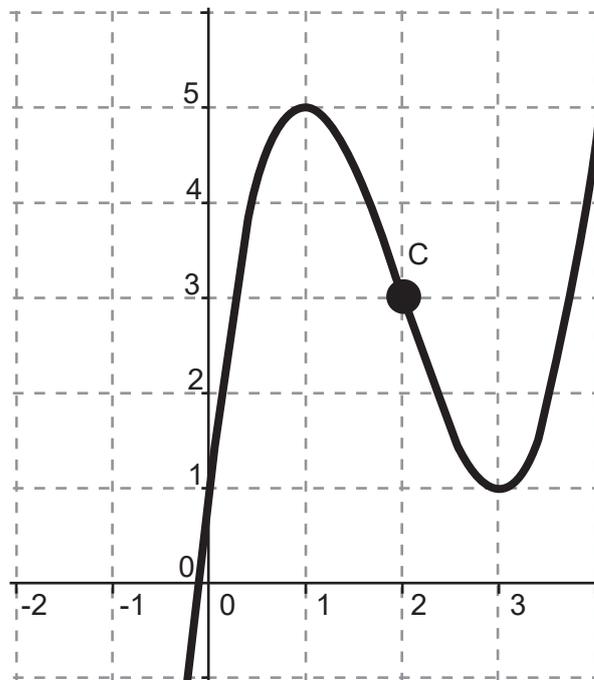
$$f(x)=8-24+18+1$$

$$f(x)=3$$

Entonces las coordenadas del punto de inflexión son:

(2,3)

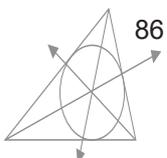
Por lo tanto la gráfica de la función  $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$  se muestra en la siguiente figura.



#### Actividad de aprendizaje 4

Calcula el punto de inflexión de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
2.  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 12x + 3$
3.  $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 5$
4.  $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
5.  $f(x) = 4 + 3x - x^3$



### Referencias

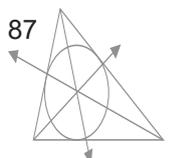
CBBC, (2009), *Cálculo diferencial e integral I, Texto y cuaderno de ejercicios*, México.

Fuenlabrada, S., (2008), *Cálculo diferencial*, 3<sup>era</sup>. ed., México, McGraw-Hill.

De la Borbolla, F. y De la Borbolla L., (1988), *Cálculo diferencial e integral*, 2<sup>da</sup>.ed, México, Esfinge.

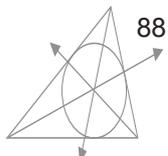
CBBC, (SF), *Cálculo I, Texto y cuaderno de ejercicios*, México.

CBBC, (2015), *Guía de actividades para el alumno para el desarrollo de competencias*, México.



## Autoevaluación y Coevaluación

Autoevaluación			
<b>Instrucciones:</b> Contesta honestamente, marcando con una ✓ a los siguientes cuestionamientos			
<b>Nombre del alumno:</b>			
<b>Materia:</b>	<b>Grupo:</b>	<b>Corte:</b>	<b>Semestre:</b>
<b>Indicadores de desempeño:</b>	<b>Siempre</b>	<b>A veces</b>	<b>Difícilmente</b>
Asumo comportamientos y decisiones que me ayudan a lograr mis metas académicas.			
Soy consciente de mis hábitos de consumo y conductas de riesgo, favoreciendo mi salud física, mental y social.			
Puedo expresar mis ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc.).			
Utilizo las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.			
Formulo hipótesis y compruebo su validez para la solución de problemas planteados en diversas asignaturas.			
Consulto diversas fuentes informativas y utilizo las más relevantes y confiables.			
Realizo trabajos donde aplico saberes de varias asignaturas.			
Me integro con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.			
Respeto las opiniones, creencias e ideas de mis compañeros.			
Contribuyo con acciones para la solución de problemas ambientales de mi comunidad.			
<b>Observaciones y retroalimentación:</b>			
Coevaluación			
<b>Instrucciones:</b> Contesta honestamente, marcando con una ✓ a los siguientes cuestionamientos respecto al compañero asignado.			
<b>Nombre del compañero:</b>			
<b>Materia:</b>	<b>Grupo:</b>	<b>Corte:</b>	<b>Semestre:</b>
<b>Indicadores de desempeño:</b>	<b>Siempre</b>	<b>A veces</b>	<b>Difícilmente</b>
Asume comportamientos y decisiones que contribuyen a lograr las metas del grupo.			
Lleva a cabo hábitos de consumo que favorecen su salud física, mental y social.			
Expresa sus ideas a través de diversos lenguajes (común, matemático, etc).			
Utiliza las Tecnologías de la Información y Comunicación en los trabajos que lo requieren.			
Propone soluciones a problemas planteados en diversas asignaturas.			
Consulta diversas fuentes informativas y utiliza las más relevantes y confiables.			
Realiza trabajos donde aplica saberes de las asignaturas.			
Se integra con facilidad a un equipo para el trabajo colaborativo.			
Respeto las opiniones, creencias e ideas de los compañeros.			
Participa en acciones para la solución de problemas ambientales de su entorno.			
<b>Observaciones y retroalimentación:</b>			



**COMPETENCIAS GENÉRICAS QUE EXPRESAN EL PERFIL DEL EGRESADO****Se autodetermina y cuida de sí****1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.**

- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
- Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.
- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

**2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.**

- Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.
- Participa en prácticas relacionadas con el arte.

**3. Elige y practica estilos de vida saludables.**

- Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
- Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.
- Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

***Se expresa y se comunica***

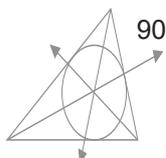
**4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.**

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto
- en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
- Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

***Piensa crítica y reflexivamente***

**5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.**

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.



**6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.**

- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

***Aprende de forma autónoma*****7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.**

- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- Trabaja en forma colaborativa

**8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.**

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

***Participa con responsabilidad en la sociedad*****9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.**

- Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.

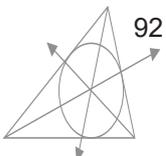
- Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
- Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
- Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
- Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
- Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.

**10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.**

- Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.
- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
- Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.

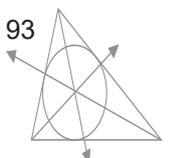
**11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.**

- Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
- Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
- Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.



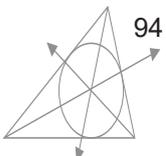
**MIS NOTAS:**

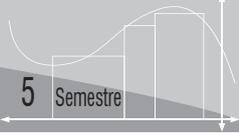
Blank lined area for notes, consisting of 12 horizontal gray bars.



**MIS NOTAS:**

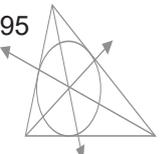
Blank lined area for notes, consisting of 12 horizontal gray bars.





**MIS NOTAS:**

Blank lined area for notes, consisting of 13 horizontal gray bars.



**MIS NOTAS:**

Blank lined area for notes, consisting of 12 horizontal gray bars.