LIBRO

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

2º Cuatrimestre

Enero - Abril

Marco Estratégico de Referencia

Antecedentes históricos

Nuestra Universidad tiene sus antecedentes de formación en el año de 1979 con el inicio de actividades de la normal de educadoras "Edgar Robledo Santiago", que en su momento marcó un nuevo rumbo para la educación de Comitán y del estado de Chiapas. Nuestra escuela fue fundada por el Profesor Manuel Albores Salazar con la idea de traer educación a Comitán, ya que esto representaba una forma de apoyar a muchas familias de la región para que siguieran estudiando.

En el año 1984 inicia actividades el CBTiS Moctezuma Ilhuicamina, que fue el primer bachillerato tecnológico particular del estado de Chiapas, manteniendo con esto la visión en grande de traer educación a nuestro municipio, esta institución fue creada para que la gente que trabajaba por la mañana tuviera la opción de estudiar por las tardes.

La Maestra Martha Ruth Alcázar Mellanes es la madre de los tres integrantes de la familia Albores Alcázar que se fueron integrando poco a poco a la escuela formada por su padre, el Profesor Manuel Albores Salazar; Víctor Manuel Albores Alcázar en julio de 1996 como chofer de transporte escolar, Karla Fabiola Albores Alcázar se integró en la docencia en 1998, Martha Patricia Albores Alcázar en el departamento de cobranza en 1999.

En el año 2002, Víctor Manuel Albores Alcázar formó el Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. para darle un nuevo rumbo y sentido empresarial al negocio familiar y en el año 2004 funda la Universidad Del Sureste.

La formación de nuestra Universidad se da principalmente porque en Comitán y en toda la región no existía una verdadera oferta Educativa, por lo que se veía urgente la creación de una institución de Educación superior, pero que estuviera a la altura de las exigencias de los jóvenes que tenían intención de seguir estudiando o de los profesionistas para seguir preparándose a través de estudios de posgrado.

Nuestra Universidad inició sus actividades el 18 de agosto del 2004 en las instalaciones de la 4ª avenida oriente sur no. 24, con la licenciatura en Puericultura, contando con dos grupos de cuarenta alumnos cada uno. En el año 2005 nos trasladamos a nuestras propias instalaciones en la carretera Comitán – Tzimol km. 57 donde actualmente se encuentra el campus Comitán y el corporativo UDS, este último, es el encargado de estandarizar y controlar todos los procesos operativos y educativos de los diferentes campus, así como de crear los diferentes planes estratégicos de expansión de la marca.

Misión

Satisfacer la necesidad de Educación que promueva el espíritu emprendedor, aplicando altos estándares de calidad académica, que propicien el desarrollo de nuestros alumnos, Profesores, colaboradores y la sociedad, a través de la incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Visión

Ser la mejor oferta académica en cada región de influencia, y a través de nuestra plataforma virtual tener una cobertura global, con un crecimiento sostenible y las ofertas académicas innovadoras con pertinencia para la sociedad.

Valores

- Disciplina
- Honestidad
- Equidad
- Libertad

Escudo

El escudo del Grupo Educativo Albores Alcázar S.C. está constituido por tres líneas curvas que nacen de izquierda a derecha formando los escalones al éxito. En la parte superior está situado un cuadro motivo de la abstracción de la forma de un libro abierto.

Eslogan

“Mi Universidad”

ALBORES

Es nuestra mascota, un Jaguar. Su piel es negra y se distingue por ser líder, trabaja en equipo y obtiene lo que desea. El ímpetu, extremo valor y fortaleza son los rasgos que distinguen.

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Objetivo de la Materia

El alumno manejará los elementos principales del Cálculo Diferencial e Integral lo que fomenta su capacidad de razonamiento lógico, un importante desarrollo de su capacidad de abstracción y espíritu crítico para la modelación, resolución e interpretación de resultados de problemas relacionados con fenómenos cambiantes, de modo que pueda continuar posteriormente los cursos de Matemáticas a nivel licenciatura.

Criterios de evaluación:

No	Concepto	Porcentaje
1	Trabajos Escritos	10%
2	Actividades web escolar	20%
3	Actividades Áulicas	20%
4	Examen	50%
	Total de Criterios de evaluación	100%

INDICE

UNIDAD I LAS FUNCIONES PARA MODELAR PROBLEMAS DE LA REALIDAD

1.1.- Análisis gráfico y analítico: modelos matemático.

El significado de modelo matemático:
Un modelo formal para una cierta teoría matemática es un conjunto sobre el que se han definido igualmente un conjunto de relaciones unarias, binarias y trinarias, que satisface las proposiciones derivadas del conjunto de axiomas de la teoría. La rama de la matemática que se encarga de estudiar sistemáticamente las propiedades de los modelos es la teoría de modelos.

Es importante considerar los elementos que compondrán un modelo matemático:

Números reales, estimación y lógica

El cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Pero, ¿cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder, comen- zamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los enteros y los números racionales Los números más sencillos de todos son los **números naturales:**

1, 2, 3, 4, 5, 6,…☐

Con ellos podemos *contar* nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si incluimos a sus negativos y al cero, obtenemos los **enteros**

…., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, Á

Cuando *medimos* longitud, peso o voltaje, los enteros son inadecuados. Están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión. Esto nos lleva a considerar cocientes (razones) de enteros, (observar la imagen 1) números tales como:

$$\frac{3}{4}, \frac{-78}{8}, \frac{21}{5}, \frac{16}{2}, y \frac{-17}{1}$$

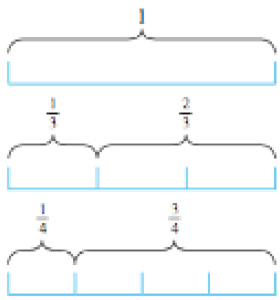


Imagen 1

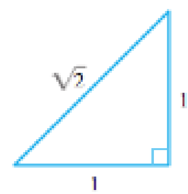


Imagen 2

Observe que incluimos 16/2 y -17/1 , aunque normalmente los escribiríamos como 8 y -17, ya que son iguales a aquéllos por el significado ordinario de la división. No incluimos $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$ porque es imposible dar significado a estos símbolos . Recuerde siempre que la división entre 0 nunca está permitida.

Los números que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros con n≠0 son llamados números racionales.

¿Los números racionales sirven para medir todas las longitudes? **No**.

Este hecho sorprendente fue descubierto por los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. Ellos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ (véase la figura 3), $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional (no racional). Así, también lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ $\sqrt[3]{7}$, π, y una gran cantidad de números más.

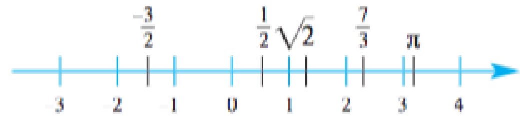


Imagen 3

Considere todos los números (racionales e irracionales) que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero. A éstos les llamamos números reales.

Los números reales pueden verse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta horizontal. Allí miden la distancia, a la derecha o izquierda (la distancia dirigida), de un punto fijo llamado origen y marcado con 0 (véase la figura 3).

Aunque quizá no podamos mostrar todas las etiquetas, cada punto tiene un número real único que lo etiqueta. Este número se denomina coordenada del punto, y la recta coordenada resultante es llamada recta real. La figura 4 sugiere las relaciones entre las series de números analizadas hasta ahora.

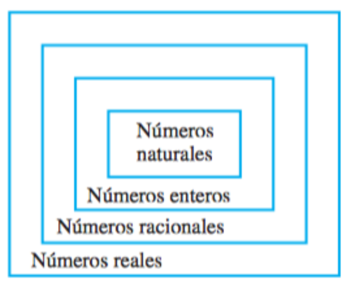


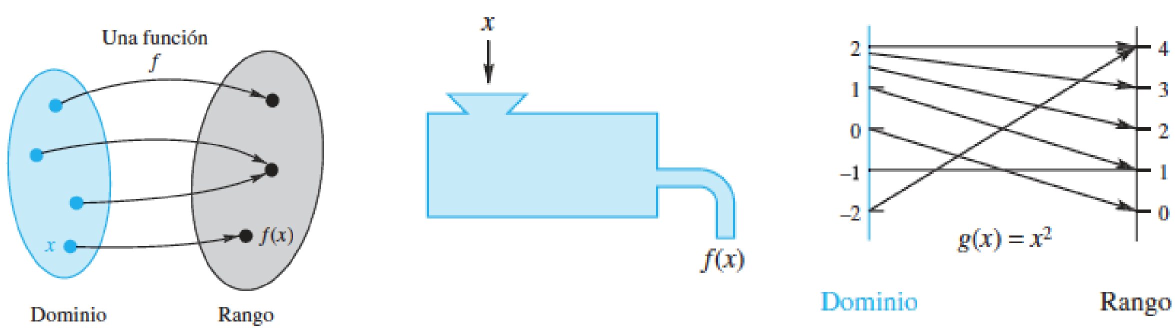
Imagen 4

Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	a b
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a b
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	a b
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	a b
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty , b]$	b
$\{x: x < b\}$	$(-\infty , b)$	b
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \ \infty)$	a
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	a
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Imagen 5 (La tabla indica la amplia variedad de posibilidades de una notación.)

Dominio y Rango de una función

A) Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado dominio— un solo valor $f\ (x)$ o también puede llamarsele $g\ (x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina rango de la función.



B) Dominio de una función

Es el conjunto de números que cumplen la sustitución (tabulación) de una regla de correspondencia *f(x)=y*; este conjunto llamado dominio está ubicado en el eje "*x*" (ordenadas).

Se expresa de la siguiente forma: D*omf* o D*f*

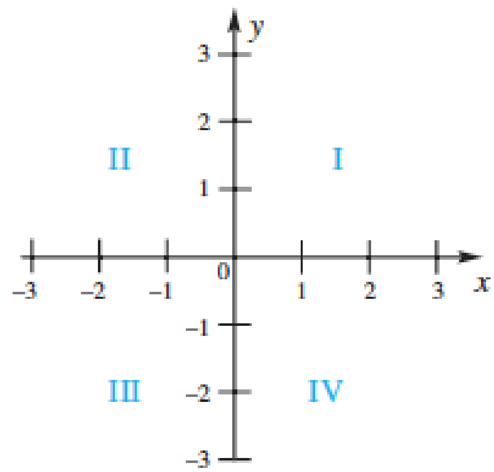
C) Rango de una función

Es el conjunto de números que dependen de la sustitución (tabulación) de los valores que puede tomar "x", es decir, del dominio. Este conjunto de números es llamado "rango" y está ubicado en eje "y" (abcisas).

Se expresa de la siguiente forma: R*anf* o R*f*

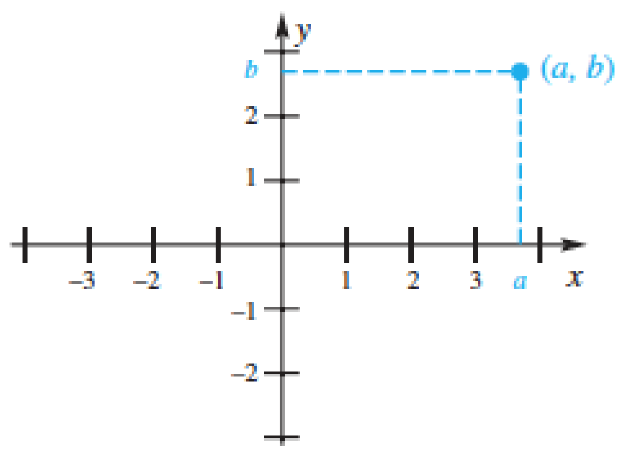
Plano Cartesiano

Las dos rectas que lo forman se denominan ejes coordenados, su intersección se etiqueta con O (o mayúscula) y se denomina origen. Por convención, la recta horizontal se llama eje x y la recta vertical se llama eje y. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que llevan las marcas I, II, III y IV.



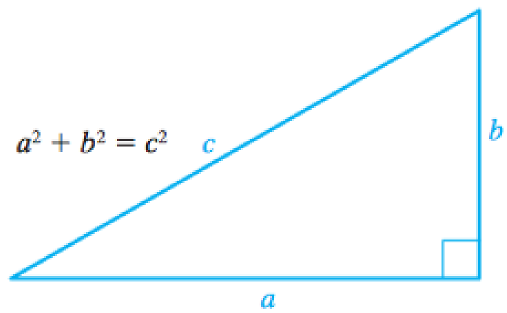
Ahora, cada punto P en el plano puede asignarse a una pareja de números, llamados coordenadas cartesianas. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P intersectan los ejes x y y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas (a, b).

Llamamos a (a, b) un par ordenado de números debido a que es importante saber cuál número está primero. El primer número, a, es la coordenada x (o abscisa); el segundo número, b, es la coordenada y (u ordenada).



La fórmula de la distancia

Con coordenadas a la mano, podemos introducir una fórmula sencilla para la distancia entre cualesquiera de dos puntos en el plano. Tiene como base el Teorema de Pitágoras, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa, entonces: $a^2 + b^2 = c^2$



Teorema de Pitágoras

Ahora considérese cualesquiera dos puntos P y Q, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Junto con R, el punto de coordenadas (x_2, y_1), P y Q son los vértices de un triángulo rectángulo. Las longitudes de PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente. Cuando aplicamos el Teorema de Pitágoras y tomamos la raíz cuadrada principal de ambos lados, obtenemos la expresión siguiente para la fórmula de la distancia.

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

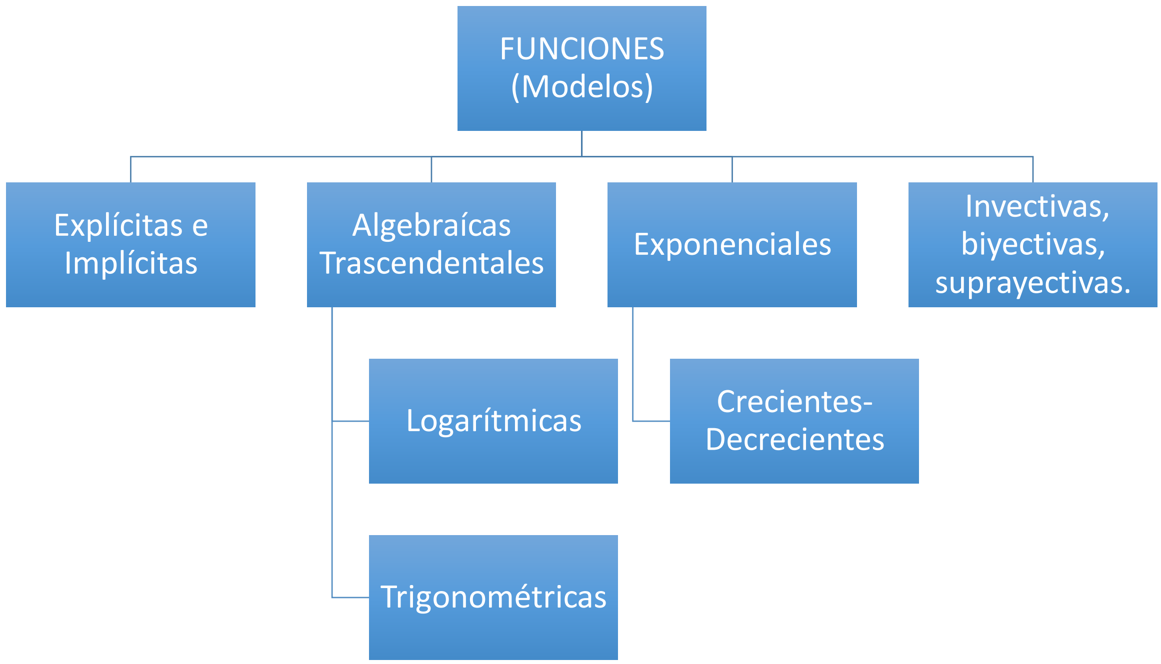
Ejemplo: Encuentre la distancia entre:

(a) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$ (b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $Q(\pi, \pi)$

SOLUCIÓN

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{\left(\pi - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\pi - \sqrt{3}\right)^2} \approx \sqrt{4.971} \approx 2.23$



Funciones algebraicas explícitas

Una función es **explícita** viene dada como $y = f(x)$, es decir, la variable dependiente *"y", (ye)* se encuentra despejada.

Ejemplo:

y = 7x - 3

Funciones algebraicas implícitas

Una función es **implícita** si viene dada de la forma $f(x, y) = 0$, es decir, si la función se expone como una expresión algebraica igualada a 0.

Ejemplo:

y - 7x + 3 = 0

Funciones trascendentales

Se llama ***función trascendente***, aquella cuya variable y contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas.

Ejemplos de funciones trascendentes son las siguientes:

Se llama **función exponencial** de **base** a aquella cuya forma genérica es f (x) = a^x, siendo a un número positivo distinto de 1. Por su propia definición, toda función exponencial tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

La función exponencial puede considerarse como la inversa de la función logarítmica por cuanto se cumple que:

$$a^x = b \Longleftrightarrow \log_a b = x.$$

Propiedades de las funciones exponenciales:

Para toda función exponencial de la forma f(x) = a^x, se cumplen las siguientes propiedades generales:

- La función aplicada al valor cero es siempre igual a 1:

f (0) = a^0 = 1.

- La función exponencial de 1 es siempre igual a la base:

f (1) = a^1 = a.

- La función exponencial de una suma de valores es igual al producto de la aplicación de dicha función aplicada a cada valor por separado.

f (x + x?) = $a^{x+x?}$ = a^x × $a^{x?}$ = f (x) × f (x?).

- La función exponencial de una resta es igual al cociente de su aplicación al minuendo dividida por la función del sustraendo:

f (x - x?) = $a^{x-x?}$ = $a^x/a^{x?}$ = f (x)/f (x?).

Función logarítmica

Como la exponencial, la función logarítmica se utiliza con asiduidad en los cálculos y desarrollos de las matemáticas, las ciencias naturales y las ciencias sociales. Entre otros fines, se usa ampliamente para «comprimir» la escala de medida de magnitudes cuyo crecimiento, demasiado rápido, dificulta su representación visual o la sistematización del fenómeno que representa.

Definición de función logarítmica

Una **función logarítmica** es aquella que genéricamente se expresa como f (x) == $\log_a x$, siendo a la **base** de esta función, que ha de ser positiva y distinta de 1.

La función logarítmica es la inversa de la **función exponencial** dado que:

$\log_a x = b$ ☐ $a^b = x$.

Entonces, se emplean los antilogaritmos para simplificar la ecuación hasta f (x) = g (x), que se resuelve por los métodos habituales.

También puede operarse en la ecuación logarítmica para obtener una ecuación equivalente del tipo:

$\log_a f(x) = m$

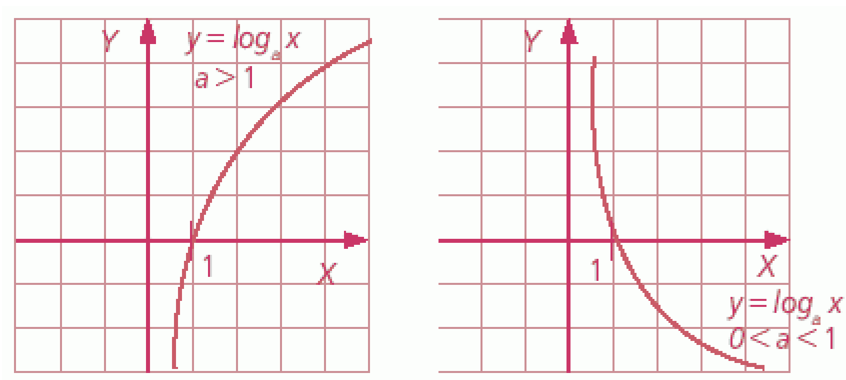
de donde se obtiene que $f(x) = a^m$, que sí se puede resolver de la forma habitual.

Cuando en un sistema aparecen una o varias ecuaciones logarítmicas, se denomina **sistema de ecuaciones logarítmicas**. En el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden producir tres casos distintos:

- Un sistema formado por una ecuación polinómica y una logarítmica.
- Un sistema constituido por dos ecuaciones logarítmicas.
- Un sistema compuesto por una ecuación polinómica y una **ecuación exponencial**.

En cada caso, se utilizan los métodos habituales de resolución de sistemas de ecuaciones, teniendo siempre presente que estas ecuaciones han de transformarse en otras equivalentes, donde la incógnita no aparezca en el argumento o la base del logaritmo, ni en el exponente de la función exponencial.

Forma de las funciones logarítmicas según el valor de la base.

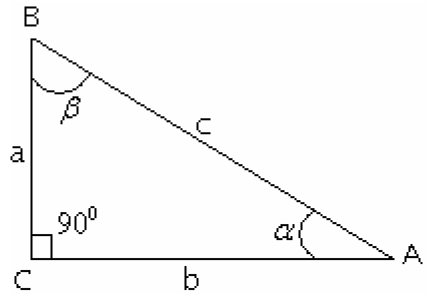


Funciones trigonométricas

Concepto de función trigonométrica

Una **función trigonométrica**, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una **razón trigonométrica** a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en **radianes**. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse **funciones circulares inversas**: arco seno, arco coseno, etcétera.

Representación de un *triángulo* y sus funciones *trigonométricas.*



$$\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$$

Tomamos el ángulo α para definir las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ \ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{a}{b} \qquad \cot\ \alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{cateto\ \ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Nota: Véase que las razones $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ y $\csc\alpha$ son recíprocas de la $\tan\alpha$, $\cos\ \alpha$ y $sen\alpha$ respectivamente.

La función seno

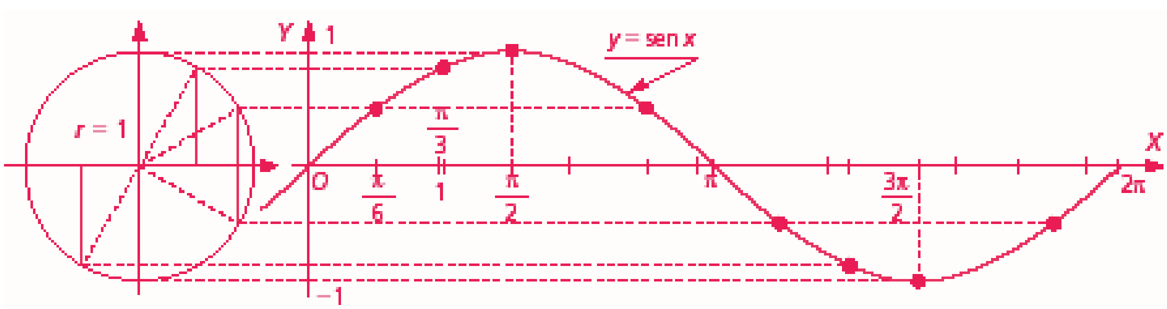
$$\mathbf{sin} \quad \mathbb{R} \rightarrow [-\mathbf{1}; \mathbf{1}] \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})$$

Se denomina **función seno**, y se denota por:

$$f\ (x) \text{ para todo } x\ \in\ \mathbb{R},$$

Su abreviatura será *sen o sin*; a la aplicación de la razón trigonométrica **seno** a una variable independiente x expresada en radianes. La función seno es periódica, acotada y continua, y su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales.

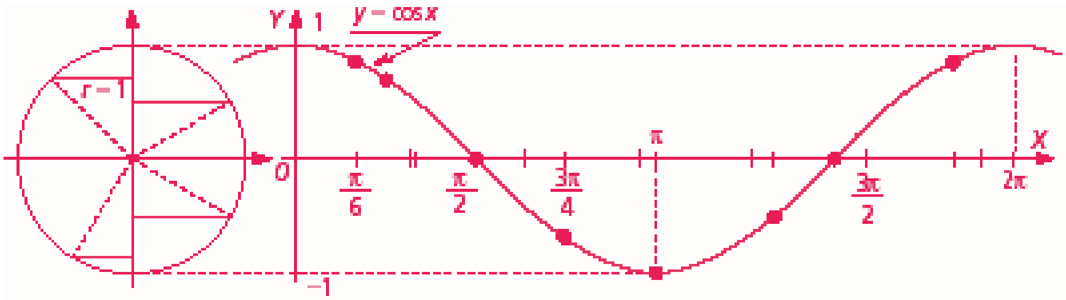


Gráfica de la función seno.

La función **cosecante** puede calcularse como la inversa de la función seno expresada en radianes.

La función coseno

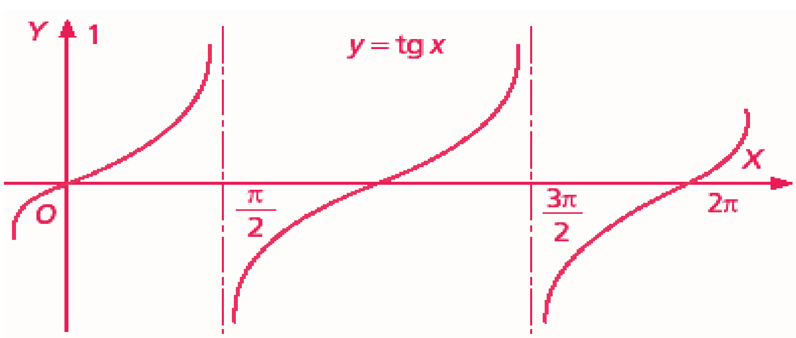
La **función coseno**, que se denota por $f\ (x) = \ cos\ x$, es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica **coseno** a una variable independiente x expresada en radianes. Esta función es periódica, acotada y continua, y existe para todo el conjunto de los números reales.



La función **secante** se determina como la inversa de la función coseno para un ángulo dado expresado en radianes.

La función tangente

Se define función tangente de una variable numérica real a la que resulta de aplicar la razón trigonométrica tangente a los distintos valores de dicha variable. Esta función se expresa genéricamente como $f\ (x) = tg\ x$, siendo x la variable independiente expresada en radianes.



La función **cotangente** es la inversa de la tangente, para cualquier ángulo indicado en radianes.

Propiedades de las funciones trigonométricas

Como características importantes y distintivas de las funciones trigonométricas pueden resaltarse las siguientes:

- Las funciones seno, coseno y tangente son de naturaleza periódica, de manera que el periodo de las funciones seno y coseno es 2p y el de la función tangente es p.

$$\text{sen } x = \text{sen }(x + 2\pi), \cos x = \cos (x + 2\pi), \text{tg } x = \text{tg }(x + \pi).$$

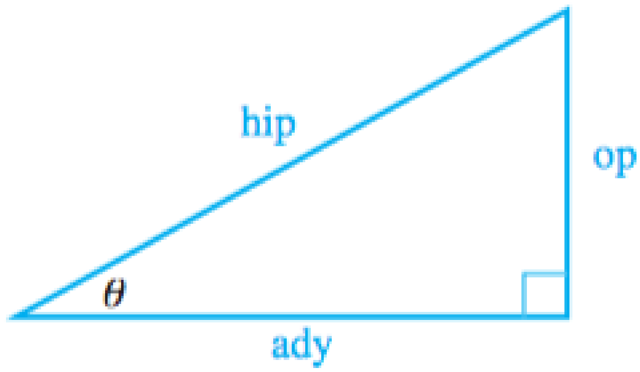
- Las funciones seno y coseno están definidas para todo el conjunto de los números reales. Ambas son funciones continuas (no así la función tangente).
- Las funciones seno y coseno están acotadas, ya que sus valores están contenidos en el intervalo [-1,1]. La función tangente no está acotada.
- Las funciones seno y tangente son simétricas respecto al origen, ya que $sen\,(-x) = -sen\,x$; $tg\,(-x) = -tg\,x$. En cambio, la función coseno es simétrica respecto al eje Y: $cos\,(-x) = cos\,x$.

Funciones circulares recíprocas

Se llaman funciones circulares recíprocas a las que anulan la acción de las funciones trigonométricas. A cada función trigonométrica le corresponde una función circular recíproca, según la relación siguiente:

- La función recíproca del seno es **arco seno**, simbolizada por $f\,(x) == arc\,sen\,x$.
- La función recíproca del coseno es **arco coseno**, expresada por $f\,(x) == arc\,cos\,x$.
- La función recíproca de la tangente es arco tangente, denotada $por\,f\,(x) == arc\,tg\,x$.

La figura siguiente resume las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente. Debe revisarla con cuidado, ya que estos conceptos son necesarios para muchas aplicaciones posteriores en este texto.

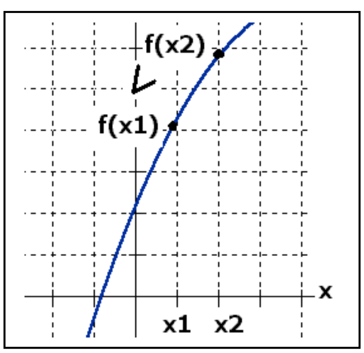


$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

Funciones crecientes y decrecientes

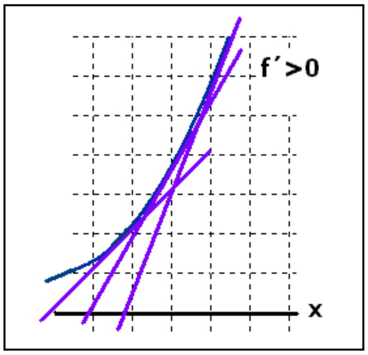
Función creciente

Diremos que una función es creciente cuando a medida que crece el valor de la variable independiente crece el valor de la función.



La función es creciente si para todo $x_1 < x_2$ se tiene : $f(x_1) < f(x_2)$

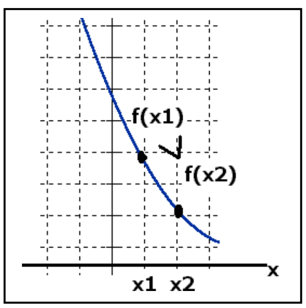
Siempre trabajaremos con funciones derivables, por lo que para analizar en donde una función es creciente estudiaremos su derivada f´.



Cuando una función es creciente todas las rectas tangentes forman ángulos agudos y sus pendientes m son positivas, es decir m=f´>0

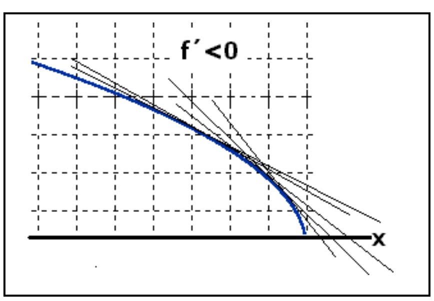
FUNCIÓN DECRECIENTE

Diremos que una función es decreciente cuando a medida que el valor de la variable independiente aumenta el valor de la función disminuye.



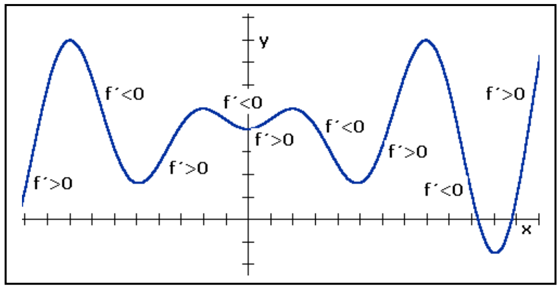
La función es decreciente si para todo $x_1<x_2$ se tiene: $f(x_1)>f(x_2)$

En términos de derivada; Diremos que una función f es decreciente cuando su derivada es negativa , es decir una función es decreciente cuando f´<0.



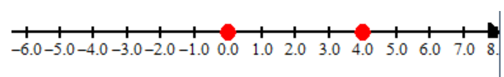
Cuando una función es decreciente todas las rectas tangentes forman ángulos obtusos y sus pendientes m son negativas, es decir m=f´<0.

En la siguiente figura se representa todo lo anterior.



Ejemplo: Hallar los intervalos en donde la función $f(x)=x^5 - 5x^4$ es creciente y en donde es decreciente.

Solución: Hallemos f´: $f'(x)= 5x^4 -20x^3$ Igualemos a cero la derivada: $f'(x)= 5x^4 -20x^3 =0$ Resolvamos esta ecuación: $5x^3 (x-4) =0$

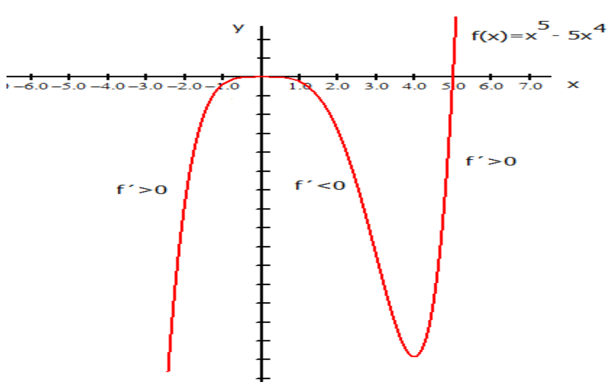


Así tenemos: $5x^3=0$, $x-4=0$, de donde $x=0$, $x=4$

Para saber en que intervalos la derivada es positiva o negativa, es decir la función creciente o decreciente tomemos valores de prueba.

INTERVALO	K	f´(K)	Signo de f´	Comportamiento de f
(-00 , 0)	-1	f´(-1)=25	+	CRECIENTE
(0 , 4)	3	f´(3)=-135	-	DECRECIENTE
(4,+00)	5	f´(5)=625	+	CRECIENTE

Veamos esto en la siguiente gráfica.



- Ya se ha hablado de que una **función** es una relación entre dos conjuntos en la que a cada elemento del primer conjunto le corresponde *un único* elemento del segundo conjunto.

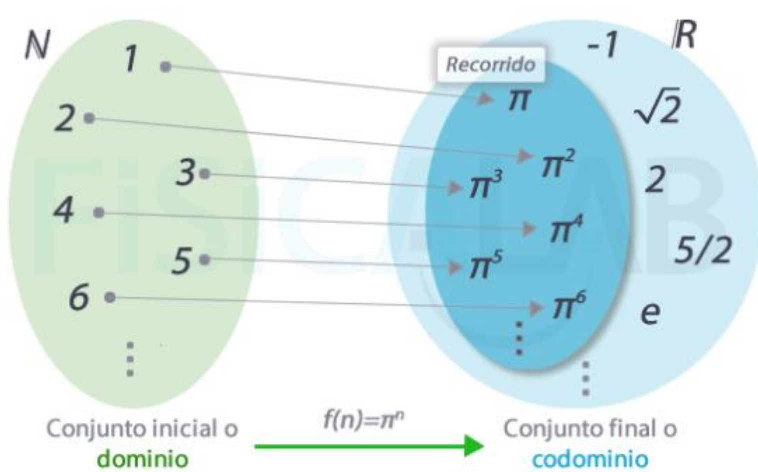
- En la **definición formal de función** se da el conjunto inicial, denominado dominio, el conjunto final, denominado codominio, y la regla de correspondencia entre ellos. Por ejemplo, en:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto y = f(n) = \pi^n$$

- El **dominio** es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, el **codominio** es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$,y la **regla de correspondencia** es $f(n)=\pi^n$.

- El conjunto imagen o recorrido de la función es el subconjunto del codominio formado por los valores que realmente toma la función, una vez se aplica a los elementos del conjunto inicial o dominio. En el caso del ejemplo anterior sería el subconjunto de los reales *y* que se obtienen al aplicar, a cada número natural *n*, $y=\pi^n$.



- **Dominio, codominio y recorrido de una función**
  En la función de nuestro ejemplo, el dominio es el conjunto formado por todos los números naturales. Aunque en ocasiones se confunden, observa la diferencia entre el codominio, formado por todos los reales, y el recorrido, un subconjunto de este cuyos valores cumplen la regla de correspondencia.
- En una **función real de variable real** el dominio y el codominio (y por tanto el recorrido) son subconjuntos de los números reales

Funciones inyectivas

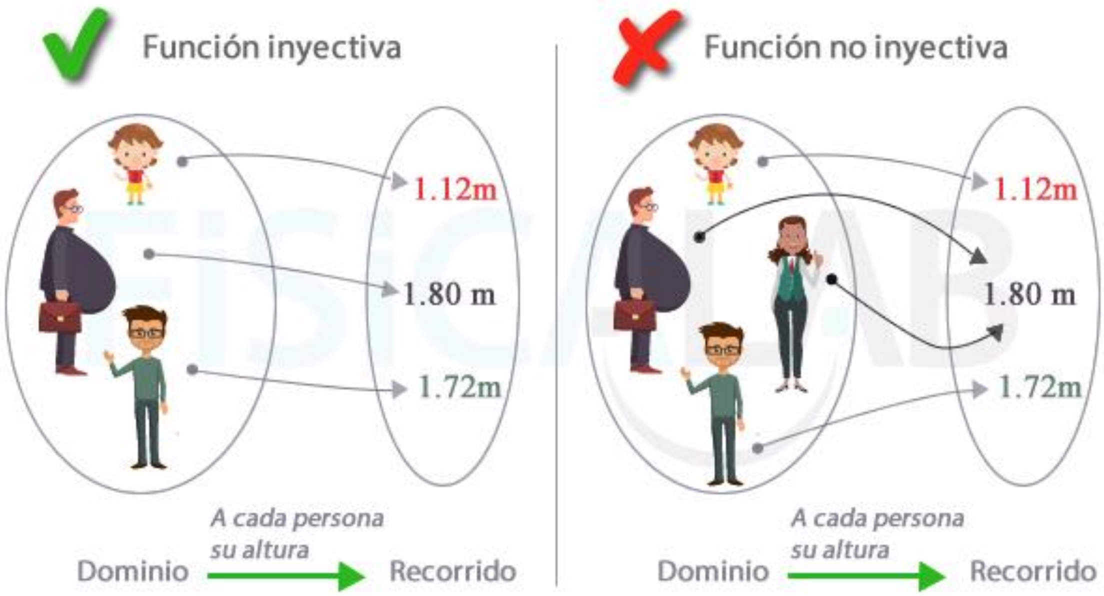
Una función es **inyectiva** cuando no hay dos elementos del dominio que tengan la misma imagen. Formalmente:

$$\forall a, b \in Dom f, si\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Es decir, para cualesquiera dos elementos *a* y *b*, pertenecientes al dominio de la función Dom_f, si sus imágenes *f(a)* y *f(b)* son iguales, los elementos son necesariamente iguales.

Inyectiva vs no inyectiva

A la izquierda, una función que asocia a cada persona su altura. A cada elemento del recorrido llega una sola flecha, por lo que la función es inyectiva. A la derecha, la función también asocia a cada persona su altura. En este caso el dominio es ligeramente distinto, y cuenta con una persona más que, curiosamente, tiene la misma altura que el oficinista despreocupado de su peso (1.80m). Como a ese elemento del recorrido llegan dos flechas, la función ya no es inyectiva.



Por tanto, si te piden una demostración de que una función no es inyectiva, puedes hallar dos valores distintos del dominio cuyas imágenes sean iguales. Si las encuentras, la función no es inyectiva.

En el caso de funciones reales, para saber si son inyectivas:

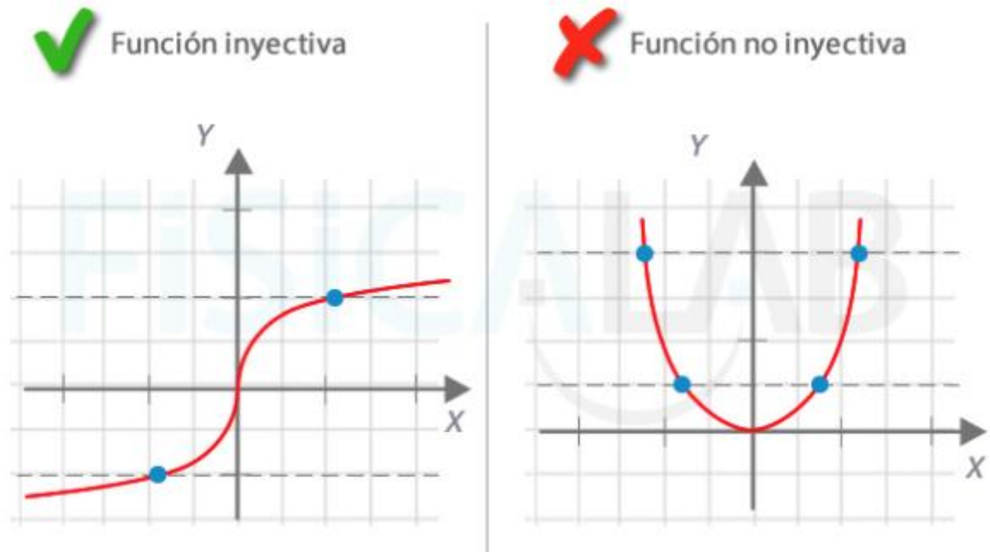
- Cuando están dadas mediante una ecuación, podemos utilizar la propia definición. Así, la función $f(x)=2\cdot x+1$ es inyectiva, pues:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=2a+1 \\ f(b)=2b+1 \end{array}\right\} \text{Si } f(a)=f(b) \Rightarrow 2a+1=2b+1 \Rightarrow a=b$$

Por otro lado, la función $f(x)=x^2$ no es inyectiva pues:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=a^2 \\ f(b)=b^2 \end{array}\right\} \text{Si } f(a)=f(b) \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$$

Cuando están dadas **gráficamente** se trata de buscar dos imágenes iguales en la misma. Observa la siguiente ilustración y lo entenderás más claramente:



Gráficas de funciones inyectivas

A la izquierda, una función real inyectiva, frente a una que no lo es, a la derecha. La prueba para determinar si una función real es inyectiva, a partir de su gráfica, consiste en buscar una recta horizontal que pueda cortar a la gráfica en más de un punto. Si la encuentras, como en el caso de la gráfica derecha, la función no es inyectiva. Si no existe ninguna recta así, como en el caso de la izquierda, la función es inyectiva. En cada gráfica se han utilizado dos rectas de prueba.

Ejemplos

F. inyectiva	*F. no inyectiva*
$f(x) = x - 1$	$f(x) = x^2 - x + 2$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$f(x) = x^4 + x$
$f(x) = e^x$	$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 - x + 2 \end{array}$

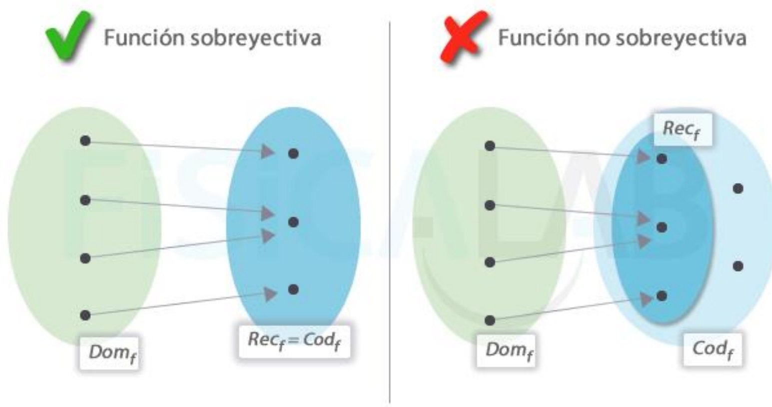
Funciones sobreyectivas

Una función es sobreyectiva, también llamada suprayectiva o exhaustiva, cuando el codominio y el recorrido coinciden. Formalmente:

$$\forall y \in Codf \; \exists x \in Domf \; / \; f(x) = y$$

Es decir, para cualquier elemento "*y*" del codominio existe otro elemento "*x*" del dominio tal que "*y*" es la imagen de "*x*" por *f*.

Las **funciones reales** son sobreyectivas cuando $Rec_f = \mathbb{R}$, ya que, por definición, en ellas $Cod_f = \mathbb{R}$.



Sobreyectiva vs no sobreyectiva

A la izquierda, una función sobreyectiva. Como tal, el codominio y el recorrido coinciden. O, dicho de manera más gráfica, todos los elementos del codominio reciben flechas. A la derecha, una función no sobreyectiva. En este caso hay elementos del codominio que no están incluidos en el recorrido. Observa, además, que ambas funciones son no inyectivas, pues ambas cuentan con elementos en el recorrido que reciben más de una flecha.

Por tanto, si te piden una demostración de que una función real es sobreyectiva, puedes hallar la imagen de dicha función. Si la imagen es el conjunto de los reales, la función es sobreyectiva. En caso contrario, no.

Ejemplos:

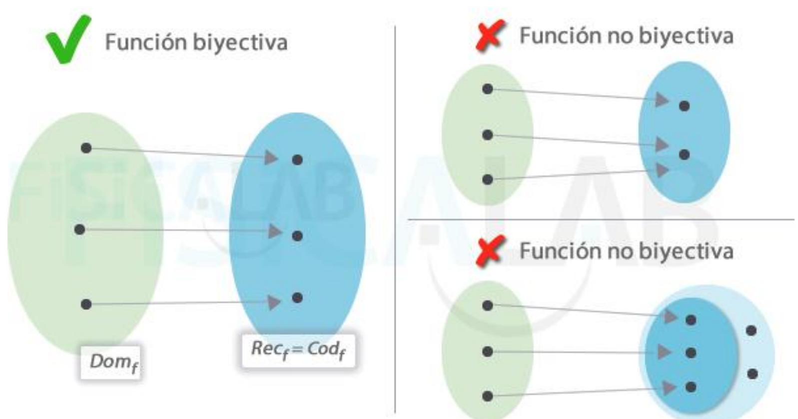
F. sobreyectiva	*F. no sobreyectiva*
$f(x)= 2\cdot(x+1)$	$f(x)= \sqrt{3x}$
$f(x)= \tan(x)$	$f(x)= x^2-4x+2$
$f(x)= \ln(x+2)$	$f(x)= \cos(x)$

Funciones biyectivas

Una función es biyectiva, cuando es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. Formalmente:

$$\forall y \in Codf\ \exists!\, x \in Domf\ / f(x) = y$$

Es decir, para cualquier elemento *y* del codominio existe un único elemento *x* del dominio tal que *y* es la imagen de *x* por *f*.



Biyectiva vs no biyectiva

A la izquierda, una función biyectiva. Observa que cada elemento del recorrido recibe una (y solo una) flecha, con lo que *el número de elementos del dominio debe coincidir con el número de elementos del recorrido*. En la ilustración superior derecha, una función que no es inyectiva, y por tanto tampoco biyectiva. En la ilustración inferior derecha, una función que no es sobreyectiva, y por tanto tampoco biyectiva.

F. biyectiva	*F. no biyectiva*
$f(x)= \sqrt[3]{x+2}$	$f(x)= \sqrt{x+2}$
$f(x)= \dfrac{2x^3}{x^2+1}$	$f(x)= \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
$f(x)= \ln(x)$	$f(x)= e^x$

Operación de funciones.

A estas alturas de tus estudios, seguro que sabes que puedes combinar dos números cualesquiera, a través de la **suma** y de la **resta**, para obtener un número nuevo. De manera análoga también es posible sumar y restar funciones para obtener una función nueva. Por ejemplo:

Funciones	Suma	Resta
1.- $f(x) = x + 2$ 2.- $g(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) + g(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$	$f(x) - g(x) = x + 2 - \dfrac{1}{x}$

Ejemplos:

• Para toda función f y g:

Suma (f + g)(x) = f(x) + g(x)

Diferencia (f -g)(x) = f(x) -g(x)

Producto (f •g) = f(x)•g(x)

Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}$;donde g(x) ≠ 0

En este apartado vamos a profundizar en las particularidades de estas operaciones.

SUMA

Se define la **suma o adición** de dos funciones *f(x)* y *g(x)* como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Si alguna de las funciones tiene una imagen que no está definida para algún valor de x, la función suma, que es en definitiva la suma de las imágenes, tampoco lo está. Dicho de otra forma, el dominio de la nueva función es:

$$Dom\ (f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Observa que el dominio de la función suma es el conjunto intersección de los dominios de las funciones f y g, de manera que si este fuese el conjunto vacío ∅, la nueva función carecería de dominio, es decir, no existiría. Esta es una diferencia fundamental con los números reales, dónde la suma de dos números cualesquiera siempre existe.

Propiedades/Composición:

Conmutativa: $f + g = g + f$

Es decir, el orden en que operes es indiferente. Es una propiedad que también se cumple en los números reales: 3+2=2+3 = 5

Asociativa:

$(f + g) + h = f + (g + h)$

- Es decir, dadas 3 funciones cualesquiera, se obtiene igual resultado sumando la primera *(f)* y la segunda *(g)*, y a este resultado sumando la tercera *(h)*, que sumado la segunda *(g)* y la tercera *(h)* y al resultado sumar la primera *(f)*. Observa que esta propiedad se cumple también en los números reales: (3+2)+1=3+(2+1) = 6

Puede que no estés muy familiarizado con el concepto de **elemento neutro** o **elemento identidad** por un lado, y el de **elemento simétrico** de otro. Ambos se definen para una operación determinada (vamos a presentarlos para la suma, en este caso).

Dicho de un modo simple, el **elemento neutro** o **elemento identidad** de la suma de funciones es aquel que al operarlo con cualquier otro elemento, en este caso cualquier otra función, da como resultado la propia función. Como ves, es el elemento que tiene un *efecto neutro* al aplicar con cualquier otro elemento la operación para la cual se define.

Por otro lado, un **elemento simétrico** de otro es aquel que al operarlo con este da como resultado el *elemento neutro*. Pues bien, hechas estas precisiones nos queda:

Elemento neutro:

$$f(x) = 0$$

Es decir, el elemento neutro de la suma de funciones, denotado a veces f0 es la función constante f(x)=0, ya que al sumarla con cualquier otra función da como resultado la propia función: g(x)+0=g(x). Siguiendo con nuestras analogías, en el mundo de los números reales, y para la operación suma, el elemento neutro es el número 0.

Elemento simétrico:

$$f(x) \Rightarrow -f(x)$$

Es decir, dada una función cualquiera f, su función opuesta es el elemento simétrico respecto a la suma de funciones ya que: f(x)+[-f(x)]=0=f0. En el mundo de los números reales, y para la operación suma, el elemento simétrico de cualquier otro es su opuesto: el opuesto del 3 es el -3 porque 3+(3)=0).

Resta

Se define la resta o sustracción de dos funciones f(x) y g(x) como:

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Si alguna de las funciones tiene una imagen que no está definida para algún valor de x, la función resta, que es en definitiva la resta de las imágenes, tampoco lo está. Dicho de otra forma, el dominio de la nueva función es:

$$Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

De igual manera al caso de la suma, la resta puede no estar definida en ciertos casos. De hecho, la resta se puede considerar un caso particular de la suma de funciones:

$$f - g = f + (-g)$$

Cuando se realiza una suma o una resta de funciones y se simplifica la expresión resultante, esta debe ser acompañada de su dominio. De lo contrario, podrías deducir un dominio después de la simplificación que no sería el correcto. Recuerda que dos funciones son iguales cuando las imágenes y el dominio son el mismo.

Ejemplo

Realiza las siguientes operaciones, calcula el dominio de la función resultante y determina el elemento simétrico de cada función para la operación suma:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$
2. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$ $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)$, $g(x)-f(x)$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3}+1}$, $g(x) = \ln(-x-2)$ $\Rightarrow$ $g(x)+f(x)$
4. $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = \frac{-x+1}{x}$ $\Rightarrow$ $f(x)+g(x)$

Resolución

Apartado 1

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1+x(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-x}$$
$$(f-g)(x)=\frac{1}{x}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{-x^2-x-1}{x^2-x}$$

Los dominios:

$$\begin{matrix} Dom_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom_g=\mathbb{R}-\{0,\ 1\} \end{matrix} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

Los opuestos:

$$\begin{matrix} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{x+2}{x-1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -f(x)=-\frac{1}{x} \\ -g(x)=-\frac{x+2}{x-1} \end{matrix}$$

Apartado 2

$$(f+g)(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$$
$$(g-f)(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}$$

Los dominios:

$$\begin{matrix} Dom_f=[-2,\infty) \\ Dom_g=(-\infty,2] \end{matrix} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\left[-2,2\right]$$

Los opuestos:

$$\begin{matrix} f(x)=\sqrt{x+2} \\ g(x)=\sqrt{2-x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -f(x)=-\sqrt{x+2} \\ -g(x)=-\sqrt{2-x} \end{matrix}$$

Apartado 3

$$(f+g)(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1}+\ln(-x-2)$$

Los dominios:

$$\left.\begin{array}{l} Dom_f=[-3/2,\infty) \\ Dom_g=(-\infty,-2) \end{array}\right. \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\emptyset$$

Este resultado implica que la función *(f+g)(x)* no existe, al no existir ningún valor que tenga imagen.

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ g(x)=\ln(-x-2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ -g(x)=-\ln(-x-2) \end{array}$$

Apartado 4

$$(f+g)(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{-x+1}{x}=0$$

Los dominios:

$$\left.\begin{array}{l} Dom_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom_g=\mathbb{R}-\{0\} \end{array}\right. \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_f\cap Dom_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

Observa que, a la luz de la función suma simplificada, *(f+g)(x)=0*, podríamos concluir que el dominio es $\mathbb{R}$. Sería un error, pues el dominio de la suma es siempre la intersección de los dominios de ambas funciones.

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\frac{x-1}{x} \\ g(x)=\frac{-x+1}{x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\frac{x-1}{x}=\frac{-x+1}{x} \\ -g(x)=-\frac{-x+1}{x}=\frac{x-1}{x} \end{array}$$

Producto de funciones:

Sea f(x) = $5x^2$

Sea g(x) = 3x – I

Calcular: (f•g) (x)

Desarrollo: (f•g) (x) = 5 x^2(3x –1)

= (3x)(5 x^2)-(1)(5 x^2)

= 15 x^3-5 x^2

Cociente de funciones:

f/g $=\frac{5x^2}{3x-1}$

donde la restricción será x ≠ 1/3

Ejercicios

Sea f(x) = $5x^2 - 2x + 3$

Sea G(x)=$x^2 - 2$

Calcular:

(f + g)(x)

(f *g)(-2)

Dom (f - g)

Dom (g / f)

(f / g) (x)

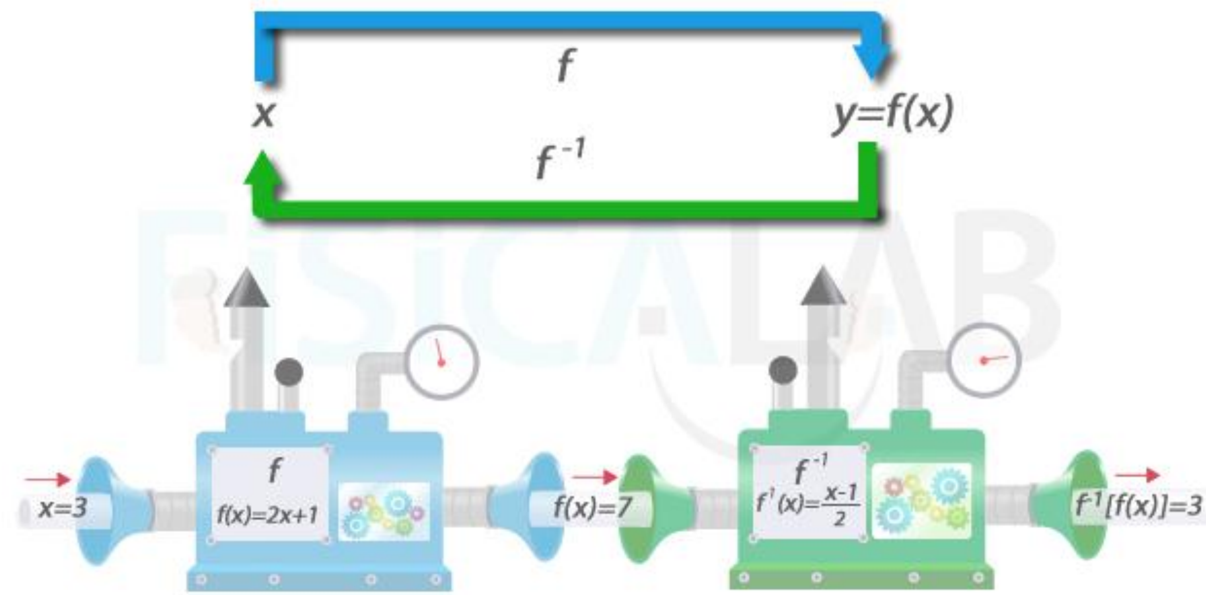
Función Inversa:

Dada una función f(x) que asocia a cada elemento x del dominio su imagen f(x) del recorrido, su función inversa o recíproca $f^{-1}(x)$, de existir, es aquella que, aplicada sobre los elementos del recorrido de f(x), les asocia su antiimagen en el dominio de la misma.

Concepto de función inversa

Si la función f transforma valores "x" en valores "y" según y=f(x), su función inversa f^{-1} realiza el camino inverso, "reconvirtiendo" los valores "y" en valores "x".

En la parte inferior de la ilustración se muestra el proceso de manera concreta. Observa que la función f(x)=2x+1, representada por la máquina azul, convierte el valor 3 en 7. A su vez, $f^{-1}(x)=x-12$ convierte el valor 7 de vuelta en el valor 3.



Dada una función inyectiva f(x), se define su función inversa, también conocida como función recíproca, como:

$f^{-1}: Recf \rightarrow Domf$

$y \mapsto x=f^{-1}(y)$

con $f(x)=y$

Donde:

- Rec f : Es el dominio de la función f^{-1}, y a su vez es el recorrido de la función f
- Dom f : Es el recorrido de la función f^{-1}, y a su vez es el dominio de la función f
- y : es un elemento cualquiera del dominio de f^{-1}, y a su vez del recorrido de f
- x : es un elemento cualquiera del recorrido de f^{-1}, y a su vez del dominio de f

UNIDAD II LA DERIVADA PARA MEDIR LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

Límite de una función

DEFINICIÓN DEL LIMITE DE UNA FUNCIÓN:

Si f es una función definida en [a, b] con la posible excepción de c ∈ [a, b], decimos que l es el limite de f cuando x tiende a c, si dado un argumento x muy cercano a c (tan próximo como se desee) hallamos que su imagen esta también muy cerca de l.

NOTACIÓN DEL LIMITE DE UNA FUNCIÓN:

El limite de una función se puede denotar de 2 formas:

1. Lim f (x) = L
   x→c

QUE SE LEE: "EL LIMITE DE UNA FUNCIÓN ***f***, CUANDO **x** TIENDE A **c**, ES **L**"

2. f (x) → L, si x → c

QUE SE LEE: "LA FUNCIÓN ***f*** EN **x** TIENDE A **L**, CUANDO **x** TIENDE A **c**"

Ejemplo:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{x^3 - 1}{\mathrm{x} - 1}$$

x	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Tabla de valores

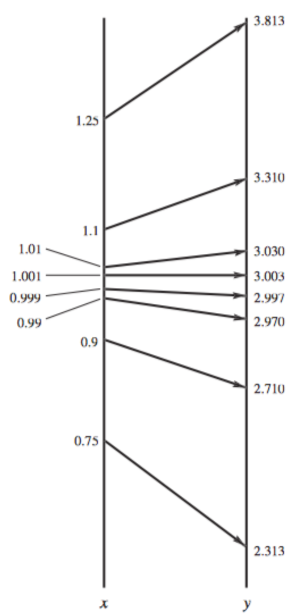
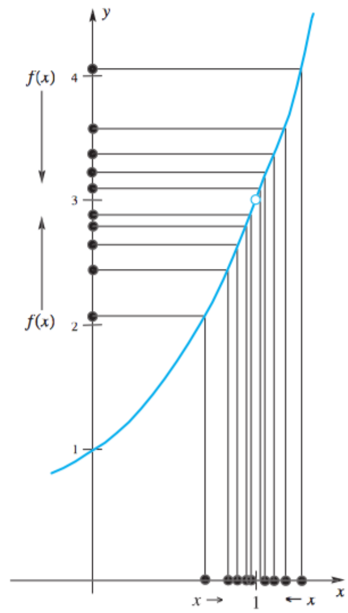


Diagrama esquemático



Gráfica de $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: f(x) se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Esto se lee el límite de (x^3 – 1)/ (x – 1) “cuando x tiende a 1 es 3”.

Conociendo cómo se factoriza una diferencia de cubos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Observe que (x - 1)/(x - 1) = 1 ; siempre que x ≠ 1. Esto justifica el segundo paso.

El tercer paso parece razonable; pero posteriormente se hará una justificación rigurosa.

Para asegurarnos de que estamos en el camino correcto, necesitamos tener una clara comprensión del significado de la palabra límite.

Determine lím (4x – 5)

$x \to 3$

SOLUCIÓN: Cuando x está cerca de 3, 4x - 5 está cerca de 4* 3 - 5 = 7.

Escribimos

lím (4x – 5) = 7

$x \to 3$

Ejemplo 2:

$$\text{Encuentre } \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}.$$

SOLUCIÓN: Observe que (x ²- x - 6)>(x - 3) no está definida en x = 3, pero todo está bien. Para tener una idea de lo que está sucediendo cuando x se aproxima a 3, podríamos emplear una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etcétera. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 2) = 3 + 2 = 5$$

La cancelación de x - 3 en el segundo paso es válida ya que la definición de límite ignora el comportamiento en x = 3.

Recuerde que $(\frac{x-3}{x-3})$=1, siempre que x no sea igual a 3.

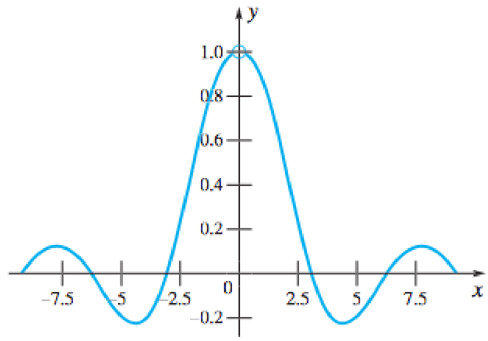
$$\text{Determine } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Ningún truco algebraico simplificará nuestra tarea; ciertamente, no podemos cancelar las x. Una calculadora nos ayudará a tener una idea del límite.

Utilice su propia calculadora (en modo de radianes) para verificar los valores en la tabla de la figura de abajo.

La figura siguiente muestra una gráfica de y = (sen x)/x. Nuestra conclusión, aunque admitimos que es poco firme, es que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$



x	$\frac{\text{sen } x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0.01	0.99998
−0.1	0.99833
−1.0	0.84147

El **límite de una sucesión** es uno de los conceptos más antiguos del análisis matemático. El mismo da una definición rigurosa a la idea de una sucesión que se va *aproximando* hacia un punto llamado límite. Si una sucesión tiene límite, se dice que es una **sucesión convergente**, y que la sucesión **converge** o **tiende** al límite. En caso contrario, la sucesión es **divergente**.

La definición significa que eventualmente todos los elementos de la sucesión se aproximan tanto como queramos al valor límite. La condición que impone que los elementos se encuentren arbitrariamente cercanos a los elementos subsiguientes *no* implica, en general, que la sucesión tenga un límite.

En matemática, el **límite** es un concepto que describe la *tendencia* de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor.

Un límite es hasta donde podemos llegar, son los valores cercanos a aquel valor en el cual la función se indeterminada, a éste valor se le conoce como ***c***.

En cálculo (especialmente en análisis real y matemático) este concepto se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación, integración, entre otros.

El concepto se puede generalizar a otros espacios topológicos, como pueden ser las redes topológicas; de la misma manera, es definido y utilizado en otras ramas de la matemática, como puede ser la teoría de categorías.

Propiedades

- Si una sucesión $\{a_n\}$tiene límite positivo, existe un término a partir del cual todos los términos de la sucesión son positivos.
- Si una sucesión $\{a_n\}$tiene límite negativo, existe un término a partir del cual los términos de la sucesión son negativos.
- Si una sucesión $\{a_n\}$converge a cero, no se puede asegurar nada acerca del signo de cada uno de los términos de la sucesión.

Si una sucesión$\{a_n\}$tiende a menos infinito y $\{a_n\} < 0$entonces $\frac{1}{a_n}$tiende a 0.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLE REAL

Límite de una función

El límite de una función es un concepto fundamental del cálculo diferencial matemático, un caso de límite aplicado a las funciones.

Informalmente, el hecho que una función f tiene un límite L en el punto c, significa que el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee, tomando puntos suficientemente cercanos a c, independientemente de lo que ocurra en c.

En análisis real para funciones de una variable, se puede hacer una definición de límite similar a la de límite de una sucesión, en la cual, los valores que toma la función dentro de un intervalo se van aproximando a un punto fijado c, independientemente de que éste pertenezca al dominio de la función. Esto se puede generalizar aún más a funciones de varias variables o funciones en distintos espacios métricos.

Informalmente, se dice que **el límite de la función f(x) es L cuando x tiende a c**, y se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Definición formal

Funciones de variable real

Si la función *f* tiene límite *L* en *c* podemos decir de manera informal que la función *f* tiende hacia el límite *L* cerca de *c* si se puede hacer que *f*(*x*) esté tan cerca como queramos de *L* haciendo que *x* esté suficientemente cerca de *c* siendo *x* distinto de *c*.

CÁLCULO DE LÍMITES.

Para poder calcular límites, primero es necesario clasificarlos, la siguiente tabla muestra una clasificación básica de estos.

<table>
<tr><th>Tipo de limites</th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>determinado</td><td>Porque “x” tiende a un valor que pertenece al dominio

Si X->a, a∈D</td><td>Solución

Se sustituye directamente en la función</td><td>Ejemplo
Limx2-1x+1 = (2)2-12+1 =4-13 = 33 =1
x->2

D:{X|X‡-1} y 1∈D</td></tr>
<tr><td>indeterminado</td><td>Porque “X” tiende a un valor que no pertenece al dominio

X -> y a∈D</td><td>Se simplifica algebraicamente (factorización etc.) para sustituir a “X”</td><td>Lim x2-9x-3= (x)(x+3)(x-3) = 3+3
x->3

D:{X|X‡3} 3∈D</td></tr>
<tr><td>infinito</td><td>Porque “X” tiende a infinito crece o decrece infinitamente

X->∞</td><td>Se divide termino a termino entre la mayor potencia se simplifica se sustituye ∞ y se aplican las reglas algebraicas de ∞</td><td>Lim x2x2-1 = lim x2x2
X->∞
x2x2- 1x2

= lim11-1/x2
X->∞

= 11-1∞2 = 11-1∞ = 11-0 = 11 = 1</td></tr>
</table>

Ejemplos de límites determinados:

Para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tienden las x.

$$\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6)=-1^2-5\cdot 1+6=0$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x^2-5x+2}=\frac{3^2-2}{3^2-5\cdot 3+2}=-\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)=\left(\sqrt{1^2+3\cdot 1}-\sqrt{1^2+1}\right)=2-\sqrt{2}$$

Ejemplos de límites indeterminados:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$

Solución:

1.- Se factorizan tanto el numerador como el denominador.

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ por lo tanto:

$$\lim_{x\to 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

Propiedades generales de los límites.

Si *k* es un escalar:

Límite de	Expresión
Una constante	$\lim_{x\to c} k = k$
La función identidad	$\lim_{x\to c} x = c$
El producto de una función y una constante	$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$
Una suma	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
Una resta	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
Un producto	$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$
Un cociente	$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0,$
Una potencia	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$ si $f(x) > 0$
Un logaritmo	$\lim_{x\to c} \log f(x) = \log \lim_{x\to c} f(x)$
El número e	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

LÍMITES LATERALES.

De manera similar, *x* puede aproximarse a *c* tomando valores más grandes que éste (derecha) o tomando valores más pequeños (izquierda), en cuyo caso los límites pueden ser escritos como

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

o

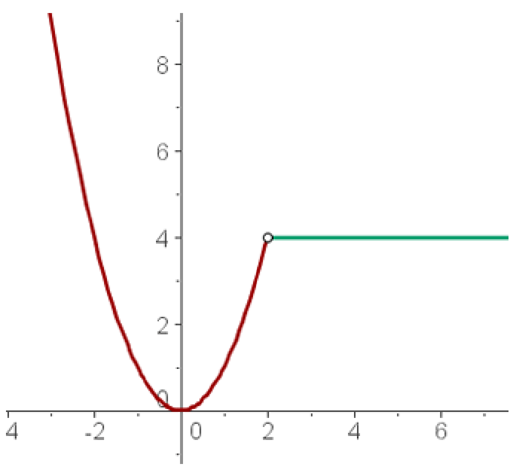
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

respectivamente. Si los dos límites anteriores son iguales a *L* entonces estos se pueden referir como ***el límite* de *f*(*x*) en *c***. Dicho de otro modo, si estos no son iguales a *L* entonces *el límite*, como tal, no existe.

Ejemplo:

El límite de una función en un punto si existe, es único**.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$



En este caso vemos que el límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4.

El límite de la función es 4 aunque la función no tenga imagen en x = 2.

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

Ejemplo: Determine los limites laterales de la siguiente función:

$f(x) = x^2$

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

Valores de x^2 cerca de x = 2

x	x^2
1.9	3.61
1.99	3.96
1.999	**3.996**
2.001	**4.004**
2.01	4.04
2.1	4.41

Como podemos observar en la tabla, a medida que x se aproxima tanto por izquierda como por derecha al valor de 2, el límite tiende a 4.

LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES AL INFINITO.

Como ya se mostró en la tabla de la clasificación de los límites, los límites al infinito, son aquellos en los cuales la variable x, tiende al infinito, papar poder resolver límites de este tipo, se deben tomar algunas reglas que se mencionan a continuación:

$a / 0 = \infty$
$0 / a = 0$
$a / \infty = 0$
$\infty / a = \infty$
$\infty^a = \infty$
$a^\infty = \infty$
$\infty / \infty = \infty$

Ejemplo:

$\lim x\to\infty x x^2+2$

Solución:

1.- Se divide toda la ecuación entre la mayor potencia:

limx→∞x2x2x2+ 2x2

2.- Simplificación por leyes de los exponentes.

limx→∞ 1x1+ 2x2

3.-Sustitución por reglas del infinito

limx→∞ 1∞1+ 2∞2

limx→∞01+ 0 = 01 = 0

Ejercicios: determine los siguientes límites al infinito:

limx→∞x +3x3+2

limx→∞x3 -4x3 + x2+2

ASÍNTOTAS.

En la construcción de gráficas, las asíntotas verticales corresponden a aquellos valores de la variable independiente que hacen indefinida la función con una división entre cero. Las asíntotas horizontales corresponden a aquellos valores de la variable dependiente (y) a los que se aproxima la gráfica de la función conforme los valores de la variable independiente (x) se aproxima a más infinito y a menos infinito respectivamente. Las asíntotas oblicuas corresponden a las funciones cuya regla de correspondencia se integra de un cociente o división de dos polinomios tales que el polinomio del numerador es de grado mayor o igual que el polinomio del denominador. En todo caso, el conocimiento de las asíntotas y cómo se trazan apropiadamente es de gran valor para el trazo apropiado de una gráfica curva en el plano cartesiano, por ejemplo, las asíntotas de una hipérbola son las líneas guía de esta curva.

Cálculo de Asíntotas

Asíntota Vertical:

Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta x = a se la denomina **asíntota vertical**.

Asíntota Horizontal:

Si existe el límite:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, siendo **a** un valor finito

la recta y = a es una **asíntota horizontal**

Caso particular:

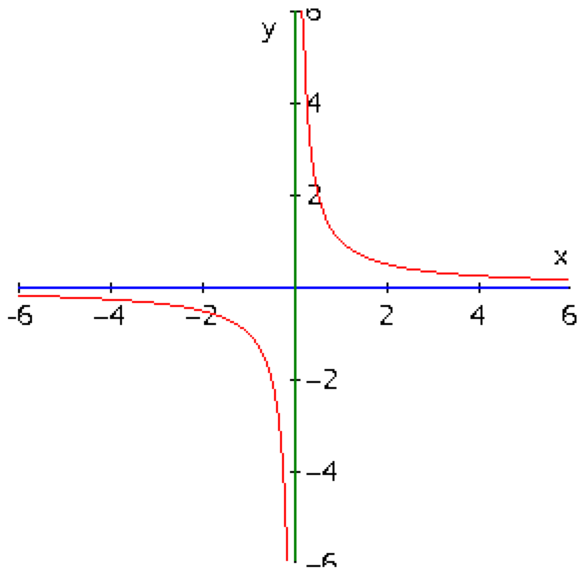
Si para la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se calcula f(x) cuando x toma valores positivos o negativos grandes, se puede observar que f(x) se aproxima a cero. Esta situación se puede escribir como:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

y a la recta y = 0 se la denomina **asíntota horizontal**



Funciones continuas y discontinuas en un punto y en un intervalo

Función continua:

Una función continua es aquella para la cual, intuitivamente, para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en los valores de la función. Si la función no es continua, se dice que es discontinua. Generalmente una función continua es aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si la función es continua, no es discontinua.

La continuidad de funciones es uno de los conceptos principales de la topología. El artículo describe principalmente la continuidad de funciones reales de una variable real.

Una función f definida sobre un intervalo I es continua si la curva que la representa, es decir el conjunto de los puntos (x, f(x)), con x en I, está constituida por un trazo continuo, es decir un trazo que no está roto, ni tiene "hoyos" ni "saltos", como en la figura de la derecha.

El intervalo I de x es el dominio de definición de f, definido como el conjunto de los valores de x para los cuales f(x) existe.

El intervalo J de y es el rango (también conocido como imagen) de f, el conjunto de los valores de y, tomados como y = f(x). Se escribe J = f(I). Notar que en general, no es igual que el codominio (sólo es igual si la función en cuestión es suprayectiva.)

Continuidad de una función en un punto

En el caso de aplicaciones de $\mathbb{R}$en $\mathbb{R}$, y de una manera más rigurosa se dice que una función *f* es continua en un punto x_1 si existe $f(x_1)$, si existe el límite de f(x) cuando x tiende hacia x_1 por la derecha, si existe el límite de f(x) cuando x tiende hacia x_1 por la izquierda, y además ambos coinciden con $f(x_1)$.

Continuidad Lateral:

Una función *f* es **continua por la izquierda** en el punto $x = x_1$ si el límite lateral por la izquierda y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = f(x_1)$$

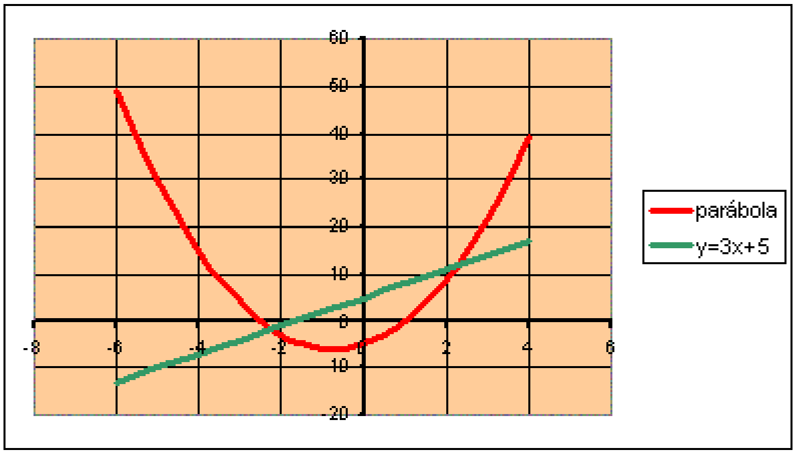
Una función *f* es **continua por la derecha** en el punto $x = x_1$ si su límite lateral por la derecha y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1)$$

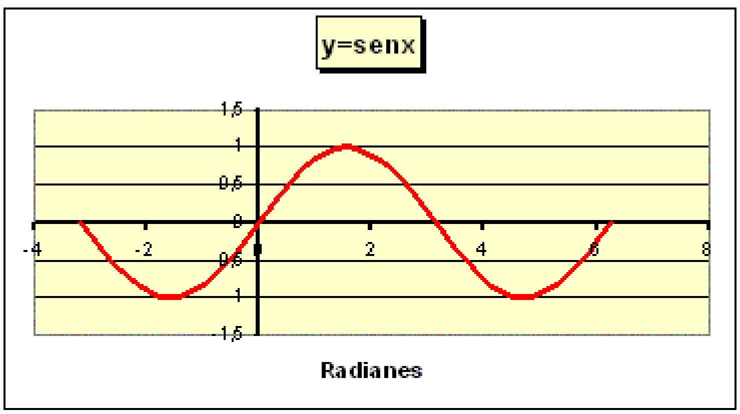
Una función *f* es **continua en un punto** si es **continua por la izquierda** y es **continua por la derecha**. Esto es:

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1)$$

Ejemplos de gráfica de funciones continuas:



Gráfica de la función f (x) = sen x:



Continuidad de una función en un intervalo (a;b)

Una función, *f* es continua en un intervalo *I*, si y solo si la función es continua en todos los puntos del intervalo.

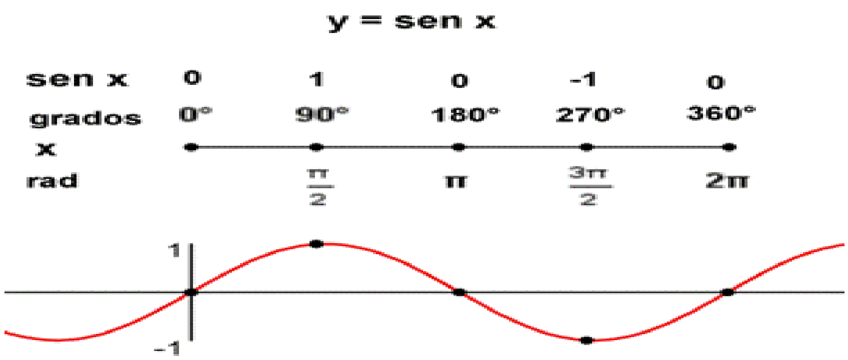
Dado que una función *f* es continua en un intervalo abierto **(a, b)** si la función es continua en todos los puntos del intervalo, entonces *f* es continua en el intervalo cerrado [a, b] si y solo si es continua en el intervalo (a, b) y además es continua en el punto **a** por la derecha y en el punto **b** por la izquierda.

Algunas funciones continuas importantes.

Las funciones polinomiales, trigonométricas: seno y coseno, las exponenciales y los logaritmos son continuas en sus respectivos dominios de definición.

La parábola, como función polinómica, es un ejemplo de función continua a lo largo de todo el dominio real.

En la gráfica se ve la función seno que es periódica, acotada y continua en todo el domino real, dado su carácter periódico, con ver uno solo de los ciclos es suficiente para comprobar la continuidad, porque el resto de los ciclos son exactamente iguales.



UNIDAD III

LA DERIVADA PARA MEDIR LA VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES

DERIVADA IMPLICITA

Sea una función $y = 3x^3 + 4x - 2$ donde *y* es función de *x*. Esta ecuación se puede escribir como $2 = 3x^3 + 4x - y$ e incluso como $6x^3 + 8x - 2y = 4$. En este caso se puede decir que *y* es una función implícita de *x* ya que está definida mediante una ecuación en donde *y*, la variable dependiente, no es dada de manera directa.

Ejemplo 1.

La función $3f(x) - 4x^2 = 0$ está escrita de manera implícita para *x*, variable independiente, y *f(x)*, variable dependiente. Escribir la ecuación de manera no implícita.

$$f(x) = \frac{4x^2}{3}$$

Muchas veces, al tener una ecuación escrita de manera implícita, ésta puede representar una o más funciones.

Ejemplo 2.

Sea $\frac{y}{3}-\frac{x}{y}=6$, escribir la ecuación de manera no implícita y determinar la o las funciones que describe.

$$\frac{y^2-3x}{3y}=6$$
$$y^2-3x=18y$$
$$y^2-18y-3x=0$$

Para poder despejar *y* como función de *x*, habría que resolver la **fórmula general.**

$$y=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4(1)(-3x)}}{2(1)}$$
$$y=\frac{18\pm\sqrt{324+12x}}{2}=\begin{cases}\dfrac{18+\sqrt{324+12x}}{2}\\[2ex]\dfrac{18-\sqrt{324+12x}}{2}\end{cases}$$

Este resultado implica que tenemos dos funciones de *x* descritas por la misma ecuación.

En muchos casos, no es sencillo o práctico el despejar *y* para encontrar la o las funciones dadas, por lo tanto, y dado que las funciones existan y sean derivables, se puede resolver la derivada sin necesidad de tener la función expresada en su forma clásica.

Ejemplo 3.

Sea la función $y^3-2xy+7=3x+1$, hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

En éste ejemplo, se utilizará la notación $y' = \frac{dy}{dx}$ para simplificar el manejo de la ecuación, así como acostumbrar al lector a diferentes formas de escritura.

Se busca la derivada de la expresión $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$. De la regla de la cadena, se sabe que $\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{dx}\frac{du}{dx}$, lo cual puede expresarse para potencias como $\frac{d}{dx} u^n(x) = u^{n-1}\frac{du}{dx}$. Por lo tanto, $\frac{d}{dx} y^3 = (y^3)' = 3y^2 y'$. En cuanto al segundo término, éste cuenta con un producto de dos funciones, por tal, $(2xy)' = y(2x)' + 2xy' = 2y + 2xy'$.

$$
\begin{aligned}
3y^2 y' - 2y - 2xy' &= 3 \\
3y^2 y' - 2xy' &= 3 + 2y \\
y'(3y^2 - 2x) &= 3 + 2y \\
y' &= \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.

Encontrar la derivada de *y* suponiendo que la ecuación $(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$ describe una función derivable y que *y=f(x)*.

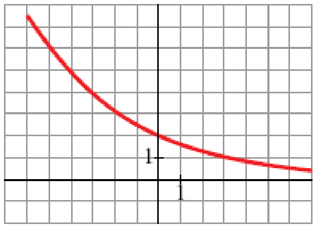
$$\left(2y^{2}+3\right)^{3}=5x^{3}-3x$$
$$3\left(2y^{2}+3\right)^{2}\left(4yy'\right)=15x^{2}-3$$
$$12yy'\left(2y^{2}+3\right)^{2}=15x^{2}-3$$
$$y'=\frac{15x^{2}-3}{12y\left(2y^{2}+3\right)^{2}}$$

Objetivos Mínimos

- Conocer los conceptos de límite de una función en un punto (tanto finito como no finito) y de límite en el ∞ (tanto finito como no finito).
- Conocer el concepto de límite lateral y su relación con el de límite.
- Saber determinar las asíntotas y ramas parabólicas de una función.
- Conocer las propiedades algebraicas del cálculo de límites. Reconocer los tipos principales de indeterminación en el cálculo de límites.
- El número e como límite de la sucesión: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}_{n\to\infty}$. Aprender las principales técnicas de resolución de indeterminaciones, en especial las relacionadas con el número e.
- Conocer el concepto de continuidad de una función en un punto, incluida la continuidad lateral.
- Conocer el concepto de continuidad de una función en un intervalo y qué significa eso en los extremos del intervalo.
- Conocer los distintos comportamientos de discontinuidad que pueden aparecer y saber reconocerlos usando los límites laterales.
- Saber determinar la continuidad de las funciones definidas a trozos.
- Principales resultados en relación con la continuidad de una función en un intervalo:teorema de conservación del signo,teorema de Bolzano, teorema de los valores intermedios y teorema de Weierstrass.

Idea intuitiva de límite funcional.-

Observa la gráfica de la siguiente función:



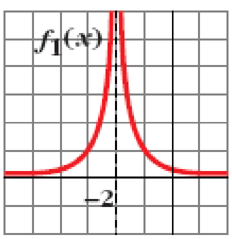
$$f(x) = 2.(0{,}68)^x$$

Podemos ver en la gráfica que a medida que los valores de x están más próximos a cero los valores de la función se "aproximan" más a dos.

Esto lo apreciamos claramente en la siguiente tabla de valores:

x	**0,1**	**0,01**	**0,001**	**0,0001**	**....**	**0**	**....**	**-0,001**	**-0,01**	**-0,1**
f(x)	1,92	1,99	1,999	1,9999	....	2	......	2,0007	2,007	2,078

Observa la gráfica de esta otra función: $f_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$



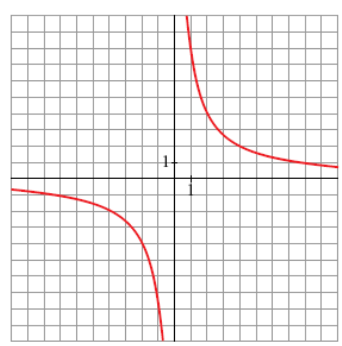
Se puede observar claramente que cuando los valores de x se "aproximan" a -2 los valores funcionales de $f_1(x)$ se hacen cada vez mayores.

Esto se aprecia en la siguiente tabla de valores:

x	**-1,9**	**-1,99**	**-1,999**	**....**	**-2**	**...**	**-2,001**	**-2,01**	**-2,1**
f_1(x)	100	10000	1000000	....	∞	....	1000000	10000	100

Observa la gráfica de esta nueva función:

$$f(x) = \frac{8}{x}$$



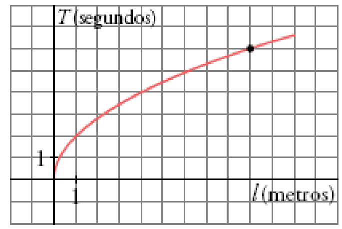
En este caso podemos ver que a medida que los valores de x se hacen mayores los valores funcionales se "aproximan" cada vez más a cero.

Observa la siguiente tabla de valores:

x	10	100	1000000	....	∞
$f_1(x)$	0,8	0,08	0,000008	....	0

Por último, observa la gráfica de esta función:

$$T(l) = 2.\sqrt{l}$$



En este caso, sobre la gráfica se observa que a medida que los valores de "l" crecen los valores de "T" crecen, también, cada vez más.

Sobre una tabla de valores podemos comprobar lo dicho anteriormente:

l	10	100	1000000	....	∞
T	6,32	20	2000	....	∞

Todos estos ejemplos nos llevan a poder dar una idea intuitiva del significado del concepto de *límite funcional*.

Diremos que el límite de una función f es A(A puede ser cualquier número real o ∞) *cuando x se aproxima a* a (a puede ser cualquier número real o ∞) *si sucede que cuanto más se concentran los valores de x en las proximidades de* a*, los valores funcionales correspondientes se concentran en las proximidades de* A.

Todo esto se escribe de modo matemático así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

1. Límite de una función en un punto.-

A) LÍMITES LATERALES FINITOS.

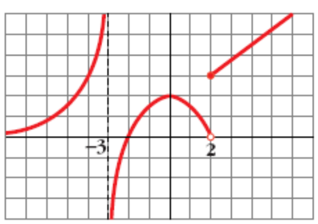
A$_1$) Límite por la izquierda:

Se dice que $\lim_{x \to a^-} f(x) = A$ si cuando x toma valores próximos a a, por su izquierda, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número A.

A$_2$) Límite por la derecha:

Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = A$ si cuando x toma valores próximos a a, por su derecha, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número A.

Ejemplo.-

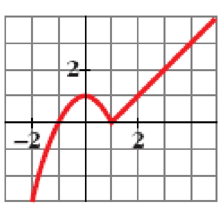


Observa sobre el gráfico de esta función como se cumple que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Fíjate ahora en este otro ejemplo:



La función que tiene esta gráfica cumple que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

En el primer caso los límites laterales en el valor de x =2 son distintos, mientras que en el segundo ejemplo los límites laterales en el valor de x = 1 coinciden (valen cero).

Se dice entonces que si los límites laterales toman el mismo valor, es decir, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$ existe el límite de $f(x)$ en $x = a$, se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Si los límites laterales toman distinto valor en $x = a$ se dice que no existe el límite de $f(x)$ en $x = a$.

B) LÍMITES LATERALES NO FINITOS.

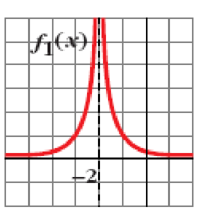
B_1) Límite por la izquierda:

Se dice que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si cuando x toma valores próximos a a, por su izquierda, $f(x)$ toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que éste sea.

B_2) Límite por la derecha:

Se dice que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si cuando x toma valores próximos a a, por su derecha, $f(x)$ toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que éste sea.

Ejemplo.-



En esta gráfica de la función $f_1(x)$ vemos que se verifica:

$$\lim_{x \to -2^-} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f_1(x) = +\infty$$

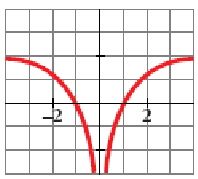
B$_3$) Límite por la izquierda:

Se dice que $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ si cuando x toma valores próximos a a, por su izquierda, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos"(o sea, más pequeños).

B$_4$) Límite por la derecha:

Se dice que $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ si cuando x toma valores próximos a a, por su derecha, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos"(o sea, más pequeños).

Ejemplo.-



En esta gráfica de la función $f(x)$ vemos que se verifica:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ entonces: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Si los límites laterales toman distinto valor en $x = a$ se dice que no existe el límite de $f(x)$ en $x = a$.

C) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

C$_1$) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

Siempre que no aparezca la indeterminación: $\infty - \infty$

C$_2$) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$

Siempre que no aparezca la indeterminación: $0.\infty$

C₃) $\underset{x\to a}{lím}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\underset{x\to a}{lím}\, f(x)}{\underset{x\to a}{lím}\, g(x)}$ *con* $\underset{x\to a}{lím}(g(x))\neq 0$

Siempre que no aparezcan las indeterminaciones: $\dfrac{0}{0}$ *o* $\dfrac{\infty}{\infty}$

C₄) $\underset{x\to a}{lím}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\underset{x\to a}{lím}\, f(x)^{\underset{x\to a}{lím}\, g(x)}$ *con* $f(x)>0$

*(*La función potencia solo está definida para valores positivos de la base)*

Siempre que no aparezcan las indeterminaciones: $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

2. Límites en el infinito.-

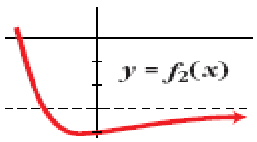
A) LÍMITE FINITO.

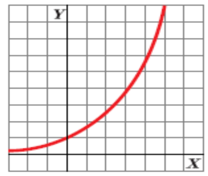
Se dice que $\underset{x\to +\infty}{lím}(f(x))=A$ si al aumentar los valores de x tanto como queramos los valores de la función $f(x)$ se concentran en las proximidades de A.

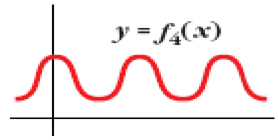
Se dice que $\underset{x\to -\infty}{lím}(f(x))=A$ si al hacer los valores de x tan negativos como queramos los valores de la función $f(x)$ se concentran en las proximidades de A.

Se dice que $\underset{x\to \pm\infty}{lím}(f(x))$ no existe, si al aumentar (o disminuir) los valores de x cada vez más (cada vez más pequeños) los valores de $f(x)$ ni crecen ni decrecen ni se acercan, cada vez más, a ningún número.

Ejemplo.-







$$\lim_{x\to+\infty}(f_2(x)) = -3 \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)) = 0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(f_4(x)) \quad \textit{no existe}$$

B) LÍMITE NO FINITO.

Se dice que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = +\infty$ si al aumentar los valores de x tanto como queramos los valores de la función $f(x)$ son cada vez más grandes.

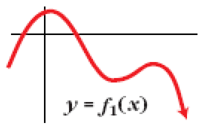
Se dice que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = -\infty$ si al aumentar los valores de x tanto como queramos los valores de la función $f(x)$ son cada vez más negativos.

Se dice que $\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = +\infty$ si al hacerse más negativos los valores de x los valores de la función $f(x)$ se hacen cada vez más grandes.

Se dice que $\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = -\infty$ si al hacerse más negativos los valores de x los valores de la función $f(x)$ se hacen cada vez más negativos.

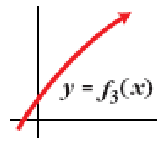
Todo lo referente a las propiedades de los límites de una función en un punto se cumple también en el caso de límites en el infinito. Es decir, todas las propiedades vistas en el apartado anterior se cumplen ahora poniendo en lugar de a, $\pm\infty$

Ejemplo.-



Observa sobre la gráfica de la función f_1 que se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty}(f_1(x)) = -\infty$$



En la gráfica de f_3 puedes ver que se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty}(f_3(x)) = +\infty$$

Dibuja tú la gráfica de una función que modelice los límites:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty}(f(x)) = -\infty$$

Observación.- Al calcular este tipo de límites en el infinito puede que obtengamos una indeterminación (en apariencia), que no lo es en realidad.

Comparación de infinitos

Si tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)) = \infty$

Se dice que f es un **infinito de orden superior** a g si se verifica:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \infty \text{ o lo que es lo mismo: } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$$

Es fácil comprobar las siguientes afirmaciones:

- Dadas dos potencias de "x", la de mayor exponente es un infinito de orden superior: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[2]{x^3}}{7x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}}{7x^1}=+\infty$

- Dadas dos funciones exponenciales **de bases mayores que 1** (el límite cuando $x\to+\infty$ de estas funciones es un **infinito** pues cuando $x\to-\infty$ se dice un **infinitésimo**), la de mayor base es un infinito de orden superior.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{(1{,}5)^x}\right)=+\infty$$

- Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{5000x^{50}}\right)=+\infty$

- Tanto las funciones exponenciales de base mayor que 1 como las potencias de "x" son infinitos de orden superior a cualquier función logarítmica:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1{,}5)^x}{\ln x}\right)=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$$

- Dos polinomios del mismo grado o dos potencias de la misma base son infinitos del mismo orden, es decir: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=l\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^3-2x^2+8}{2x^3+5x-1}\right)=\frac{8}{2}=4\neq 0 \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{52^x}\right)=\frac{1}{5}\neq 0$$

Familiarízate con estos sencillos resultados pues son muy útiles para el cálculo de límites.

3. Ramas infinitas. Asíntotas de una curva.-

Al desarrollar el tema nos hemos encontrado en alguna ocasión tramos de una curva que se alejan indefinidamente, son las llamadas **Ramas infinitas.**

Cuando una Rama infinita se ciñe (se aproxima) a una recta, a esta recta se la llama **Asíntota** de la curva y a la rama correspondiente se le llama:

Rama asintótica.

A) Rama infinita en x=a. Asíntota Vertical.

Las únicas ramas infinitas que se pueden encontrar en valores concretos de la abscisa $(x=a)$ son las ramas asintóticas verticales.

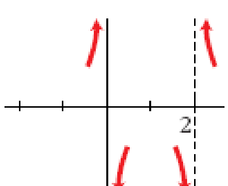
Así, si una función $f(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ decimos que $(x=a)$ es una **Asíntota Vertical** de dicha función.

La posición de la curva respecto a la asíntota depende del signo de los límites laterales.

Ejemplo.-

Las Asíntotas verticales de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$ son: $x=0 \; y \; x=2$

Posición	$x\to 0^-$	$x\to 0^+$	$x\to 2^-$	$x\to 2^+$
x	-0,01	0,01	1,99	2,01
$f(x)$	positiva	negativa	negativa	positiva
resulta	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

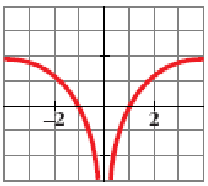


$x=0 \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$x = 2 \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Ejemplo.-

Observa la gráfica de la función e indica si tiene Asíntota Vertical:



En este caso la función presenta una **Asíntota vertical** $(x = 0)$

Porque se verifica que: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

En consecuencia: $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

B) Ramas infinitas cuando $x \to \infty$.

Asíntota Horizontal. Asíntota oblicua. Rama Parabólica.

Hay varios tipos de ramas infinitas cuando $x \to \infty$**:**

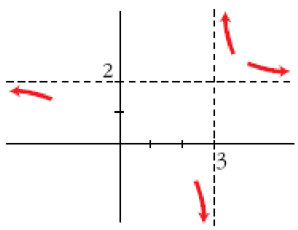
B$_1$) Asíntota Horizontal.- Si se verifica que $\lim_{x \to \infty} (f(x)) = A$ decimos entonces que la recta de ecuación $y = A$ es **Asíntota Horizontal** de la función.

La posición de la curva respecto a la asíntota depende del signo de $f(x) - A$.

Ejemplo.-

La función $y = \frac{2x}{x-3}$ tiene una **Asíntota Horizontal** $y = 2$, se cumple que:

$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 2$ y $\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = 2,$ la posición de la curva respecto a la Asíntota la determina el **signo de la diferencia entre los valores:**



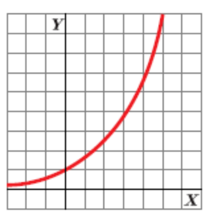
$$f(x) - A = \frac{2x}{x-3} - 2 = \frac{6}{x-3}$$

$$\begin{cases} x \to +\infty \to positivo \to f \text{ } encima\ asíntota \\ x \to -\infty \to negativo \to f \text{ } debajo\ asíntota \end{cases}$$

(Tiene además una Asíntota vertical en $x = 3$)

Ejemplo.-

La función cuya gráfica es la dada más abajo, tiene una **Asíntota horizontal** $y = 0$

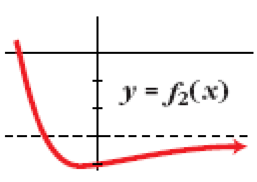


Se cumple que $\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = 0$

Evidentemente la gráfica muestra que la función está por encima de la Asíntota para los valores de $x \to -\infty$

Ejemplo.-

La función cuya gráfica es la de $f_2(x)$, tiene **Asíntota horizontal** $y = -3$



Se cumple que $\lim_{x \to +\infty} (f_2(x)) = -3$

Evidentemente la gráfica muestra que la función está por debajo de la Asíntota para los valores de $x \to +\infty$

B$_2$) Asíntota Oblicua.- Hay funciones $f(x)$ que al hacer que $x \to +\infty$(o que $(x \to -\infty)$) se aproximan mucho a una recta de ecuación

$y = mx + n \quad m \neq 0$ ciñéndose a ella. Dicha recta se dice **Asíntota Oblicua** para esa función.

Para que dicha recta sea Asíntota Oblicua de $f(x)$ se ha de cumplir

$$a)\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad b)\ m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \neq 0 \qquad c)\ n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - mx\right)$$

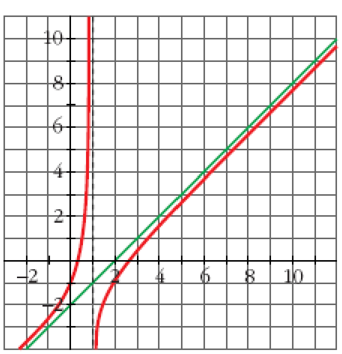
La posición de la curva respecto a la asíntota depende del signo de $f(x) - (mx + n)$.

Ejemplo.-

La función $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ tiene una Asíntota Oblicua $y = x - 2$

$$a)\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{x-1} = -\infty\end{cases} \qquad b)\ m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-3x+1}{x-1}}{x} = \frac{x^2-3x+1}{x^2-x} = 1$$

$$c)\ n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x-1} - 1.x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x+1}{x-1}\right) = -2$$

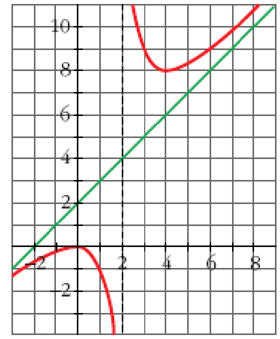


Ejemplo .-

La

x	50	100	1000	$\rightarrow$	∞
$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$	47,98	97,99	997,999		
$y = x - 2$	48	98	998		
DIFERENCIA	0,02	0,01	0,001	$\rightarrow$	0

función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x}$ tiene una Asíntota oblicua.



Asíntota Oblicua: $y = x + 2$

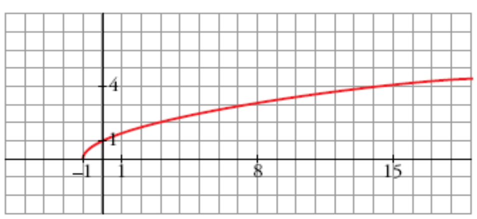
Haz tú los cálculos como en el ejemplo anterior:

B$_3$) Ramas Parabólicas.- Si se cumple $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y la curva <u>no tiene</u> <u>Asíntota</u> <u>Oblicua</u> entonces la curva presenta una <u>**Rama Parabólica**</u>. Hay dos tipos:

1. **Tipo 1.-** La curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. De este tipo son las ramas parabólicas de las <u>*funciones polinómicas y exponenciales*</u>.
2. **Tipo 2.-** La curva crece, o decrece, cada vez más despacio. De este tipo son las ramas parabólicas de las <u>*funciones radicales y logarítmicas*</u>.

<u>*Ejemplo.-*</u>

La función $f(x) = \sqrt{x+1}$ tiene una <u>**Rama parabólica tipo 2**</u>

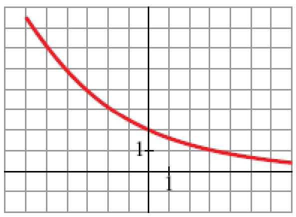


<u>La función crece cada vez más despacio.</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Ejemplo.-

La función $y = 2.(0,68)^x$ tiene una **Rama parabólica tipo I**

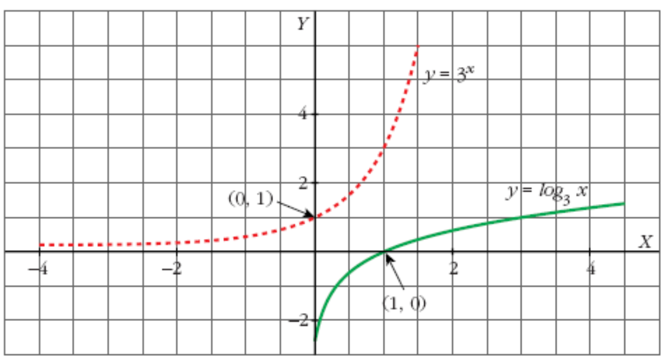


La función decrece cada vez más rápido.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Ejemplo.-

Dadas las funciones: $y = \log_3 x$ y $y = 3^x$. Determina sus ramas parabólicas.



4. Calculo de Límites. El número e.-

A) INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

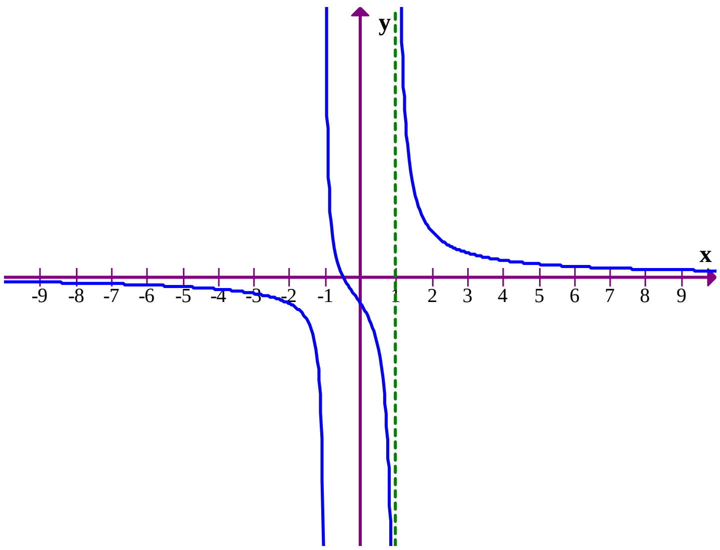
Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right)$ indeterminación $\infty - \infty$

Para resolverla efectuamos la operación indicada entre paréntesis:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{(x+1).(x+1)-x^2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{x^2+2x+1-x^2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)$$

Por tanto se cumple que: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)=\begin{cases}+\infty \text{ si } x\to 1^+\\ -\infty \text{ si } x\to 1^-\end{cases}$



<u>Observa la gráfica de</u>:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$$

En otros casos, sobre todo aquellos en que aparecen radicales, basta multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

<u>Ejemplo.</u>

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$ indeterminación $\infty-\infty$

Para resolverla multiplicamos y dividimos la expresión dada por su conjugada.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x}).(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=+\infty$$

Evidentemente el último límite es más infinito pues crece más rápidamente el numerador que el denominador.

B) INDETERMINACIÓN $0.\infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}.\frac{x+1}{x^2}\right)$ indeterminación $0.\infty$

Para resolverla efectuamos la operación indicada entre paréntesis:

$\left(\frac{x^2}{x-1}.\frac{x+1}{x^2}\right)=\left(\frac{x^2.(x+1)}{(x-1).x^2}\right)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ y en consecuencia:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}.\frac{x+1}{x^2}\right)=\lim_{x \to 0}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$$

C) INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

Cuando solamente aparecen funciones racionales basta con descomponer factorialmente numerador y denominador.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}\right)$ indeterminación $\frac{0}{0}$

Para resolverla descomponemos factorialmente numerador y denominador.

$$\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}\right)=\frac{(x-3).(x-2)}{(x+5).(x-2)}=\frac{x-3}{x+5}$$ en consecuencia:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)=\frac{-1}{7}$$

En aquellos casos en los que aparecen radicales, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ indeterminación $\dfrac{0}{0}$

Para resolverla multiplicamos numerador y denominador por $1+\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x).(1+\sqrt{x})}{(1-x)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(-1-\sqrt{x}\right)=-1-1=-2$$

D) INDETERMINACIÓN $\dfrac{\infty}{\infty}$

En la mayoría de los casos basta con dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2+x-1}{x^2+1}$ indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$

Para resolverla dividimos numerador y denominador por x^2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-1\big/x^2}{x^2+1\big/x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{1}=4$$

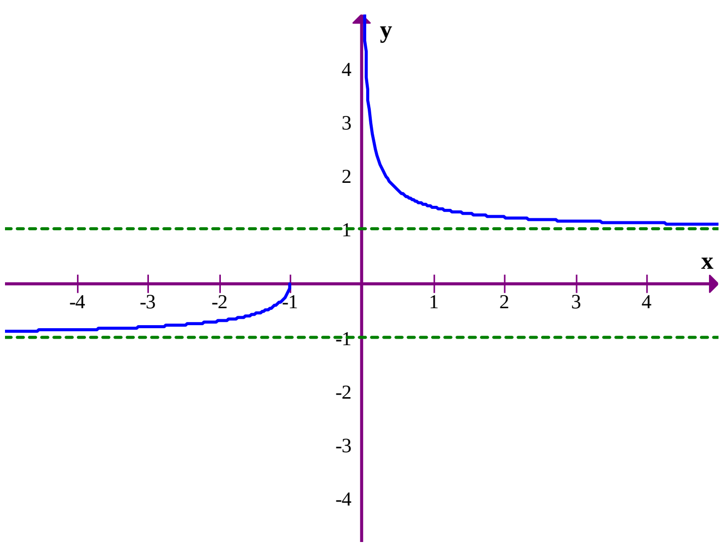
Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Para resolverla dividimos numerador y denominador por x

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}\big/x}{x\big/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}}{x\big/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

Observa la siguiente gráfica:



Gráfica de:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to 1$$

$$A.H.: y=1$$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -1$
$A.H.: y = -1$

Observa que en el caso de que $x \to -\infty$ el límite: $\underset{x\to -\infty}{lím} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = -1$ se obtendría dividiendo numerador y denominador por: $-x$

(Dentro de una raíz cuadrada el número ha de ser positivo) y así se explica que ese límite valga -1.

E) INDETERMINACIÓNES: $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

Para resolver este tipo de indeterminaciones usaremos la denominada

Regla de L'hôpital basada en las derivadas y que veremos más adelante.

De todas formas (si la indeterminación es 1^{∞}) hay una fórmula de resolución para esa indeterminación de uso muy frecuente basada en el número e. Veámosla, pero primeramente recordemos que:

La sucesión numérica definida por $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite finito cuyo valor es un número irracional que se representa por la letra (e).

Aproximadamente este número vale: $e = 2{,}718281........$

Veamos ahora distintos límites relacionados con el número e que nos van a permitir establecer la fórmula de resolución de las indeterminaciones: 1^{∞}

A) $\underset{\alpha_n \to 0}{lím} (1+\alpha_n)^{1/\alpha_n} = e$ (siendo α_n cualquier sucesión con $\underset{n\to +\infty}{lím}(\alpha_n) = 0$)

En efecto, hagamos $\alpha_n = \frac{1}{n}$ tenemos que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n) = 0$ y $n = \frac{1}{\alpha_n} \to +\infty$

Sustituyendo en A) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} (1+\alpha_n)^{1/\alpha_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1}$

Si hacemos $\alpha_n = \frac{-1}{n}$ tendremos que: $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n) = 0$ y $n = \frac{-1}{\alpha_n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha_n \to 0} \left[(1+\alpha_n)^{-1/\alpha_n}\right] = \left[\lim_{\alpha_n \to 0} (1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Si hacemos $\alpha_n = \frac{x}{n}$ tendremos que: $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n) = 0$ y $n = \frac{x}{\alpha_n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{\alpha_n \to 0} \left[(1+\alpha_n)^{x/\alpha_n}\right] = \left[\lim_{\alpha_n \to 0} (1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\right]^x = e^x$$

D) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \frac{\log(1+\alpha_n)}{\alpha_n} = \log(e)$. En efecto:

$$\underset{\alpha_n \to 0}{lím} \frac{\log(1+\alpha_n)}{\alpha_n} = \underset{\alpha_n \to 0}{lím}\left[(\log(1+\alpha_n))^{1/\alpha_n}\right] = \log\left[\underset{\alpha_n \to 0}{lím}(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\right] = \log(e)$$

E) Sean α_n y β_n dos sucesiones tales que: $\underset{n\to+\infty}{lím}(\alpha_n)=1$ y $\underset{n\to+\infty}{lím}(\beta_n)=\infty$

En este caso tendremos la indeterminación: $\underset{n\to+\infty}{lím}(\alpha_n)^{\beta_n} = 1^{\infty}$

Se verifica la siguiente igualdad de límites:

$$\boxed{\underset{n\to+\infty}{lím}(\alpha_n)^{\beta_n} = e^{\underset{n\to\infty}{lím}[\beta_n(\alpha_n-1)]}}$$

Como: $\underset{n\to\infty}{lím}(\alpha_n-1)=0$ $(\alpha_n)^{\beta_n} = \left[(1+\alpha_n-1)^{1/\alpha_n-1}\right]^{\beta_n(\alpha_n-1)}$ y A)

$$\underset{n\to\infty}{lím}(\alpha_n)^{\beta_n} = \underset{n\to\infty}{lím}\left[(1+\alpha_n-1)^{1/\alpha_n-1}\right]^{\beta_n(\alpha_n-1)} = e^{\underset{n\to\infty}{lím}\beta_n(\alpha_n-1)}$$

__Ejemplo.-__

Calcula el límite: $\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+3}$ tenemos una indeterminación 1^{∞}

Aplicamos pues la fórmula dada más arriba y tenemos que:

$$\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+3} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}(2x+3).\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{4x+6}{x+1}} = e^{4}$$

Calcula tú como ejercicio el límite siguiente del mismo modo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+4}$$ **Solución**: e^2

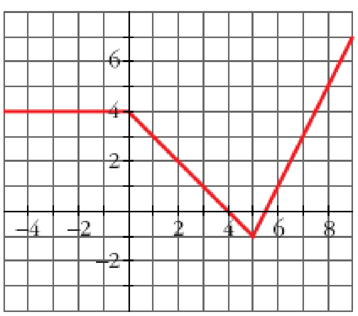
5. Función continua en un punto y en un Intervalo.-

La idea de función continua es, como ya sabemos, la de aquella cuya gráfica puede ser construida con un solo trazo.

Al trabajar con la expresión analítica de la función, veremos que el concepto de límite es fundamental para el estudio de la continuidad, de tal modo que estableceremos **un criterio**, *basado en el límite*, para determinar cuando una función es o no **continua**.

Ejemplo.-

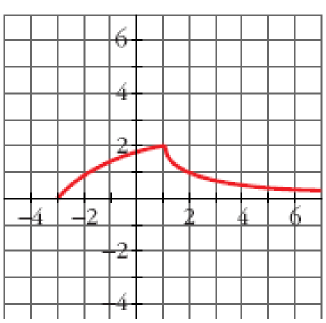
Observa las gráficas de distintas funciones:



Esta función tiene por expresión analítica:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & si\ x < 0 \\ 4 - x & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & si\ x > 5 \end{cases}$$

Observa su ***trazo continuo en todo*** $\Re$



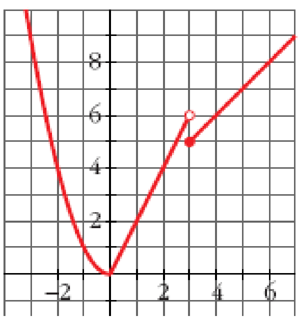
Esta otra función tiene por expresión analítica:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & si\ x<1\\ \dfrac{2}{x} & si\ x\geq 1\end{cases}$$

*Observa su **trazo continuo en su dominio***

$$D=[-3,+\infty)$$

En estos dos primeros casos las funciones dadas son ambas de trazo continuo, pero hay otros casos en los que las funciones tienen una gráfica que no puede ser dibujada con un único trazo. Veamos distintos casos:



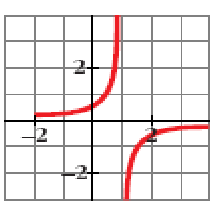
Esta función tiene por expresión analítica:

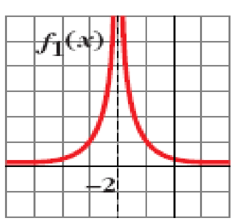
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & si\ x<0\\ 2x & si\ 0\leq x<3\\ x+2 & si\ x\geq 3\end{cases}$$

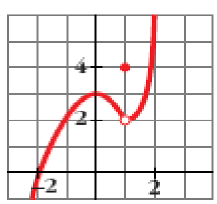
*Observa su **trazo no continuo en el valor de x=3***

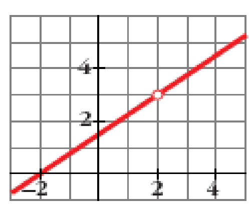
En los demás puntos de su dominio su trazo es continuo

Observa las gráficas de distintas funciones que no tienen un único trazo y por tanto no son continuas:









Veamos pues ahora cual es la formalización matemática del concepto de continuidad.

Diremos que una función de expresión analítica $y = f(x)$ es **continua en un "punto" de su dominio** $x = a$ si se verifican estas condiciones:

$$\begin{cases} a) Existe \quad f(a) \\ b) Existe \quad \lim_{x \to a} f(x) \\ c) \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

<u>Observación 1: la palabra existe de la condición a) quiere decir que el resultado sea un número real</u>

<u>Observación 2: la condición c) basta para definir la continuidad en un punto de la función dada pues si esta condición c) se verifica, necesariamente se han de dar a) y b).</u>

*<u>Observación 3: cuando una función no es continua en un punto se dice **discontinua**</u>*

Diremos que una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo abierto** (a, b) si es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Diremos que una función $y = f(x)$ es **continua por la derecha** en un punto de su dominio $x = a$ si se cumple $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Diremos que una función $y = f(x)$ es **continua por la izquierda** en un punto de su dominio $x = a$ si se cumple $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Diremos que una función $y=f(x)$ es **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ si:

1. $y=f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a,b)
2. $y=f(x)$ es continua por la derecha en $x=a$
3. $y=f(x)$ es continua por la izquierda en $x=b$

Es conveniente señalar aquí que todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas) son todas continuas en los puntos en los que están definidas (o sea, en su dominio).

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $x=a$ se tiene entonces que:

1. $f(x)\pm g(x)$ es continua en $x=a$
2. $f(x).g(x)$ es continua en $x=a$
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x=a$
4. $f(x)^{g(x)}$ es continua en $x=a$ (suponiendo $f(a)>0$)

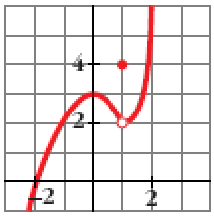
Tipos de Discontinuidad de las Funciones.-

Ya hemos señalado anteriormente que una función es **Discontinua en un punto** $x=a$ cuando no cumple alguna de las tres condiciones de continuidad en ese punto.

De ahí que podamos establecer distintos tipos de Discontinuidad:

1. ***Evitable.-*** Cuando existe el $\lim_{x \to a} f(x)$ pero no coincide con el valor de $f(a)$,por una de estas dos razones, son distintos los valores o no existe $f(a)$

Ejemplo.-

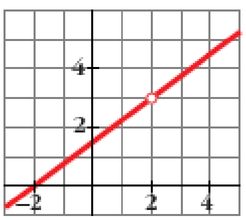


(En este caso el punto es: $a = 1$***)***

El valor de la función en el punto es: $f(1) = 4$

El valor del límite en ese punto es: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

En este caso son distintos los valores.



(En este caso el punto es: $a = 2$***)***

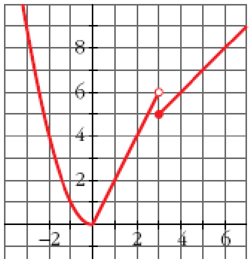
El valor de la función en el punto $f(2)$ ***No existe***

El valor del límite en ese punto es $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

En este caso no existe $f(2)$

2. ***De Salto.-*** Cuando existe el límite por la derecha y por la izquierda (siendo ambos finitos) pero no coinciden.

Ejemplo.-



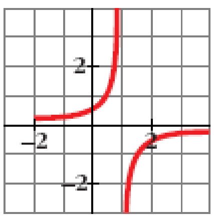
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=6 \text{ y } \lim_{x\to 3^+} f(x)=5$$

En este caso los límites laterales no coinciden siendo ambos finitos.

$$Salto=\left|\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)\right|=|5-6|=1$$

3. ***Asintótica.-***Alguno de los límites laterales(o ambos) no es finito.

Ejemplo.-



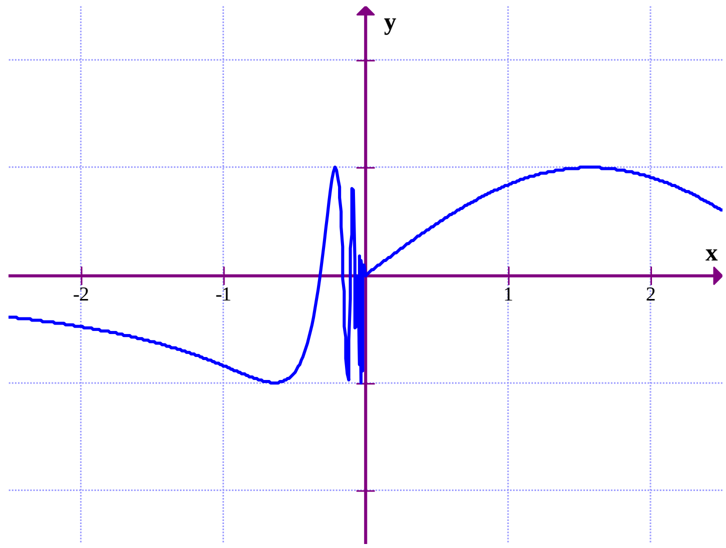
Para esta función los límites laterales en $x=1$ son ambos no finitos, de hecho:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$$

4. ***Esencial.-*** Cuando no existe alguno (o ambos) de los límites laterales

Ejemplo.- Observa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x<0 \\ \sin(x) & si \quad x\geq 0\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)\ \underline{\textbf{No hay;}} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$



<u>6</u>. Teoremas relacionados con la continuidad de las funciones.

Muchas de las propiedades de las funciones continuas las acepta como evidentes nuestro sentido común, sobre todo cuando las interpretamos geométricamente mediante la representación gráfica.

Sin embargo, el rigor matemático, en aras a evitar errores y paradojas, exige elaborar demostraciones de estas propiedades apoyándose en definiciones precisas de los conceptos básicos.

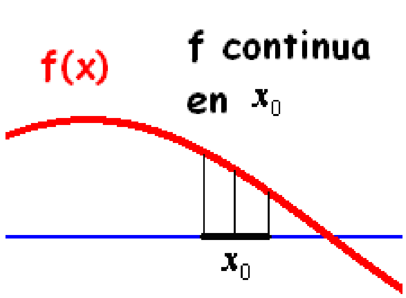
En este nivel de 2° de Bachillerato y, atendiendo a las recomendaciones de la (CIUGA), evitaremos dichas demostraciones que no aportan métodos operativos interesantes desde un punto de vista práctico. Sin embargo, en todos los casos se incluirán **explicaciones plausibles y figuras** que ayuden a entender el significado de los teoremas.

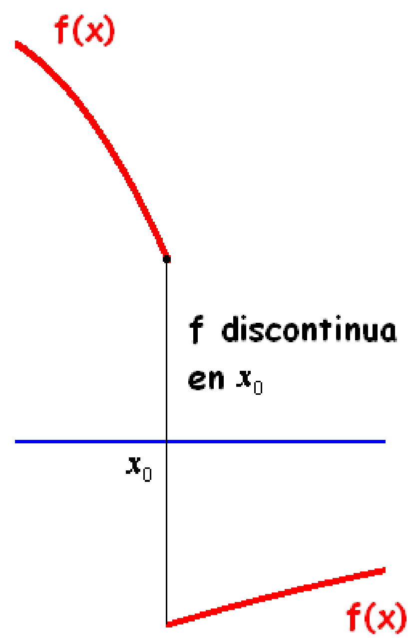
Teorema de conservación del signo.-

Si la función f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$ existe un entorno de x_0 en el que $f(x)$ toma el mismo signo que $f(x_0)$

Explicación.- Si una función f es continua en x_0 las imágenes de los puntos cercanos a x_0 no se separan mucho de $f(x_0)$ por lo que tendrán el mismo signo que esta última.

Interpretación gráfica.-





Cuando f es continua en x_0 siempre hay algún entorno de x_0 en el que la función mantenga el signo de $f(x_0)$.

Ejemplo:la función no es continua en x_0 y no hay ningún entorno de x_0 en el que la función conserve el signo.

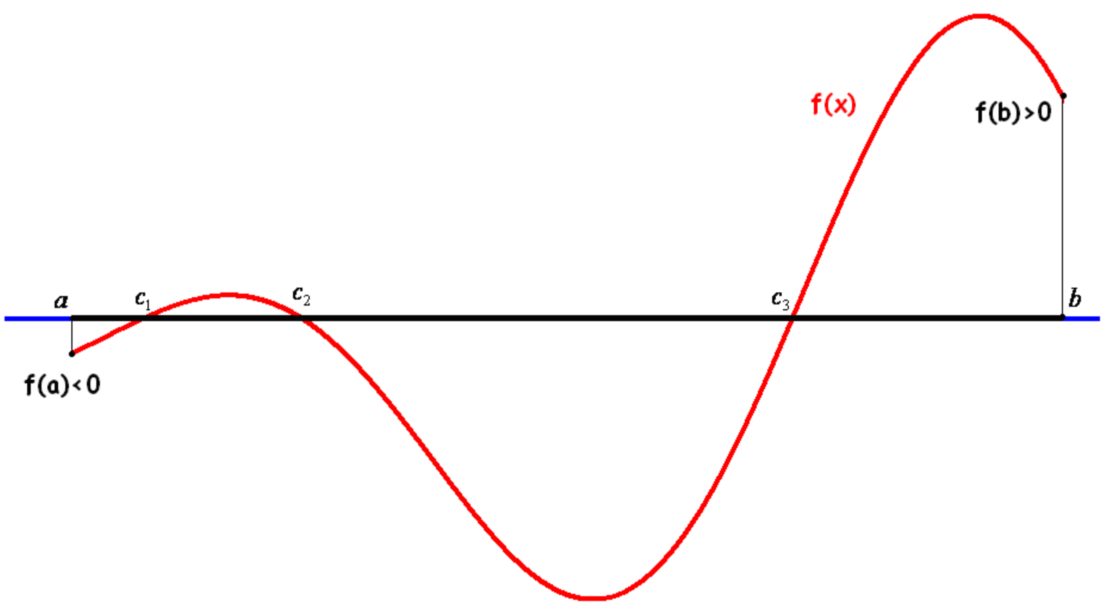
Teorema de Bolzano (o teorema de los ceros).-

Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ y toma distinto signo en los extremos del mismo, entonces se anula en algún punto $c \in [a,b]$

O sea hay al menos un valor $c \in [a,b]$ en el que $f(c)=0$

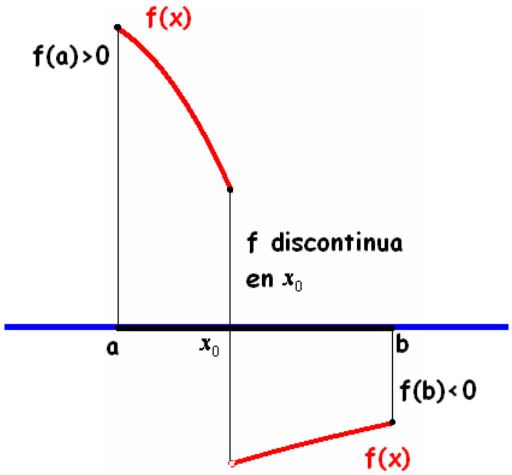
<u>Explicación</u>.- La gráfica de una función continua no tiene agujeros ni interrupciones, y si "atraviesa" una línea recta, forzosamente tendrá un punto común con ella.

<u>Interpretación gráfica.-</u>



La gráfica de la función necesariamente ha de atravesar al eje X al pasar del semiplano inferior al semiplano superior, y por lo tanto $f(x)$ se anulará

al menos en un punto (en este caso concreto en tres).



Aunque la función cambie de signo en los extremos de $[a,b]$, observa que si no es continua en dicho intervalo (en el ejemplo es discontinua en $x_0 \in [a,b]$) puede que no se anule en ningún punto de ese intervalo (como en la del ejemplo).

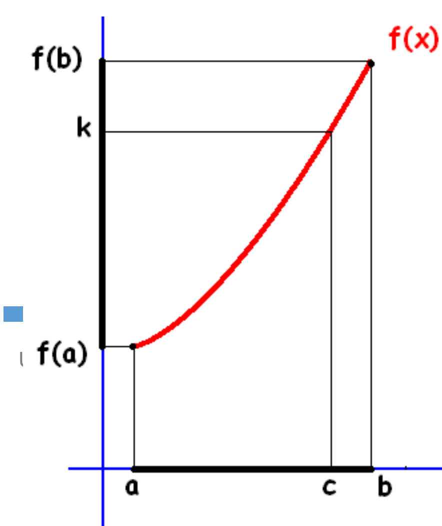
Teorema de Darboux (o teorema de los valores intermedios).-

Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ y k es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, o sea $f(a)<k<f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=k$

Explicación.-Es una consecuencia inmediata del teorema de Bolzano.

La gráfica de una función continua f en el intervalo $[a,b]$ atravesará cualquier recta horizontal situada entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, la función tomará dentro del intervalo (a,b) cualquier valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

Interpretación gráfica.-

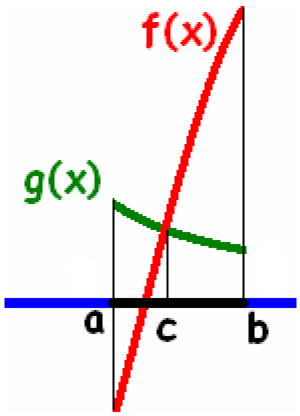


Intenta demostrar este teorema como consecuencia directa del de Bolzano:

¡Aplica Bolzano a la función $g(x) = f(x) - k$!

Otra consecuencia inmediata del teorema de Bolzano es.

f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$ entonces existe un numero $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$

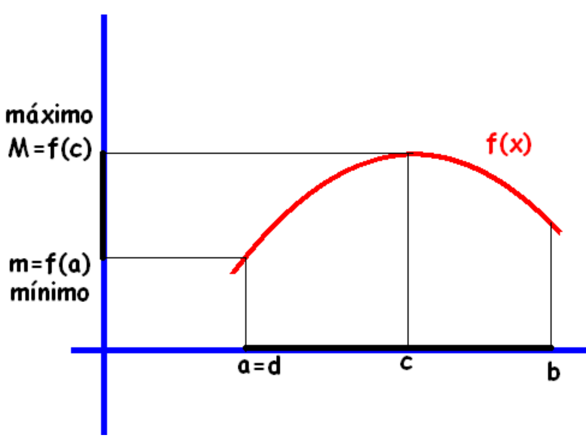


¡Aplica Bolzano a la función $h(x) = f(x) - g(x)$!

Teorema de Weierstrass.-

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo. Es decir, existen dos números c y d de dicho intervalo para los que se verifica:

$$cualquier \quad x \in [a,b] \quad cumple \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

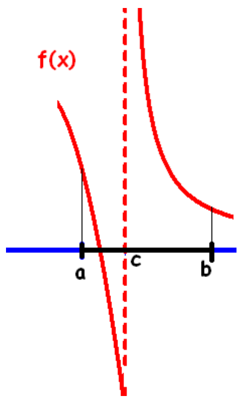


En la función f del gráfico, observa como el máximo o el mínimo pueden alcanzarse, bien en un extremo, bien en un punto interior del intervalo.

Así en este ejemplo el mínimo se alcanza en “a” y el máximo en “c”.

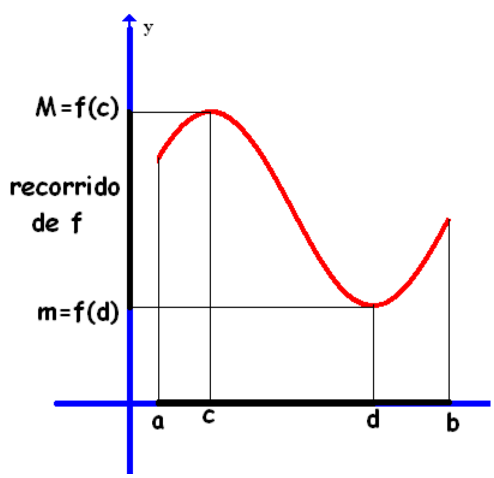
Observa que si el intervalo fuese **abierto** no podríamos asegurar la existencia de máximo o mínimo en el intervalo. En el ejemplo anterior,

f no tendría mínimo en el intervalo (a,b) ya que $a \notin (a,b)$.



Si f no fuese continua en $[a,b]$, en el siguiente ejemplo es discontinua en C, no estaría garantizada la existencia de máximo o mínimo en dicho intervalo pues la función podría no estar acotada (como en el ejemplo) en dicho intervalo.

La consecuencia inmediata del teorema de Weierstrass (y teniendo en cuenta el teorema de los valores intermedios), es que el recorrido de la función f está en el intervalo $[m,M]$.



UNIDAD III DERIVADA PARA MEDIR LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

Objetivos Mínimos

- Conocer la definición de derivada de una función en un punto, interpretarla gráficamente y aplicarla para el cálculo de casos concretos.

  Relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función.

- Concepto de función derivada de una función. Conocer las reglas de derivación y utilizarlas para hallar la función derivada de otra, en especial la derivación implícita y la derivación logarítmica.

  Concepto de diferencial de una función, interpretación geométrica y aplicaciones de la diferencial.

- Utilizar la derivación para hallar la recta tangente a una curva en un punto, los intervalos de crecimiento, los intervalos de curvatura, los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función.

  Aplicación de las derivadas en la resolución de problemas de Optimización.

  Aplicación de las derivadas en el cálculo de límites: Regla de L´hôpital.

  Dos teoremas relacionados con el cálculo de derivadas: Teorema de Rolle y Teorema del valor medio.

- Conocer el papel que desempeñan las herramientas básicas del análisis (límites, derivadas...) en la representación de funciones y dominar la representación sistemática de funciones polinómicas y racionales.

Introducción.-

El concepto de derivada surgió como resultado de grandes esfuerzos de los matemáticos (durante muchos años), dirigidos a resolver dos problemas:

1. Determinar la *recta tangente a una curva en uno de sus puntos*.

2. Encontrar el valor de la *velocidad instantánea en movimientos no uniformes.*

El primero que formuló la idea de derivada fue Fermat (1602-1665), al estudiar las tangentes a una curva con el fin de resolver problemas de máximos y mínimos.

En el siglo XVII un gran matemático como Isaac Newton dio una respuesta completa a estos problemas mediante la invención de la derivada.

Otro gran matemático como Leibniz, contemporaneo de Newton y coinventor de la derivada, introdujo la notación actual de derivada como cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas $\frac{dy}{dx}$

Un siglo más tarde, un matemático tan importante como Euler contribuyó a mejorar el concepto inventado por Newton y Leibniz.

Todos estos matemáticos progresaron en la definición de derivada sin perfilar el concepto de límite.

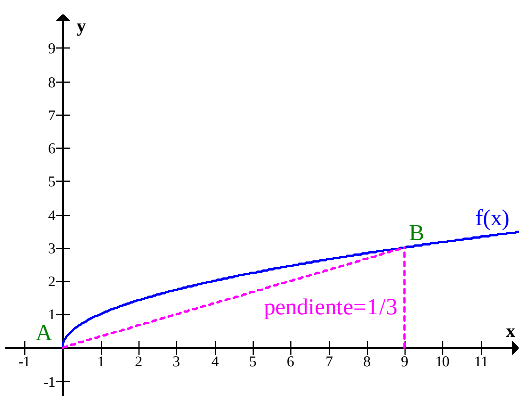
No fue hasta principios del siglo XIX cuando Cauchy, al relacionar el concepto de derivada con el de límite, hizo que el cálculo de derivadas se transformase en un proceso claro y sistemático que permite hoy en día manejar este concepto con mayor soltura que los grandes matemáticos anteriores a Cauchy.

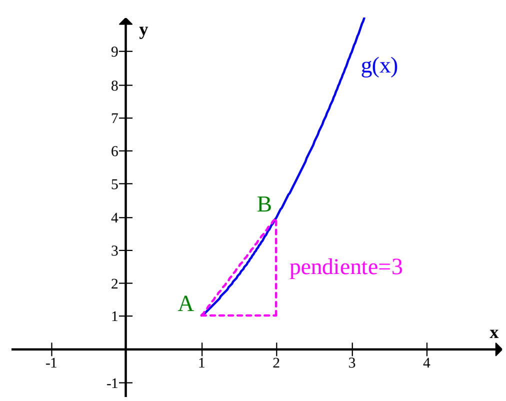
Al estudiar las funciones podemos proceder con un enfoque estático (¿cuánto vale "y" para un valor concreto de "x"?) o bien mediante un enfoque dinámico (¿con qué rapidez se produce la variación de la variable "y" en relación a la variación de la variable "x"?).

En esta unidad didáctica haremos un estudio de las funciones desde un punto de vista **dinámico**, empezaremos estudiando la **variación relativa** (que se corresponde con el concepto de **tasa de variación media** de una función) y a partir de aquí definiremos la **variación instantánea que se corresponderá con el concepto de derivada de una función en un punto.**

1. Concepto de derivada de una función en un punto

Observa la gráfica de estas dos funciones:





La función $f(x) = \sqrt{x}$ crece 3 unidades al pasar del punto $A(0,0)$ al $B(9,3)$

La función $g(x) = x^2$ crece 3 unidades al pasar del punto $A(1,1)$ al $B(2,4)$.

Sin embargo el crecimiento medio de cada una es muy distinto:

Para $f(x)=\sqrt{x}$ su crecimiento medio es: $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ en el intervalo [0,9]

Para $g(x)=x^2$ su crecimiento medio es: $\frac{3}{1}=3$ en el intervalo [1,2]

Se define la **Tasa de variación media (TVM)** de una función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ como el cociente:

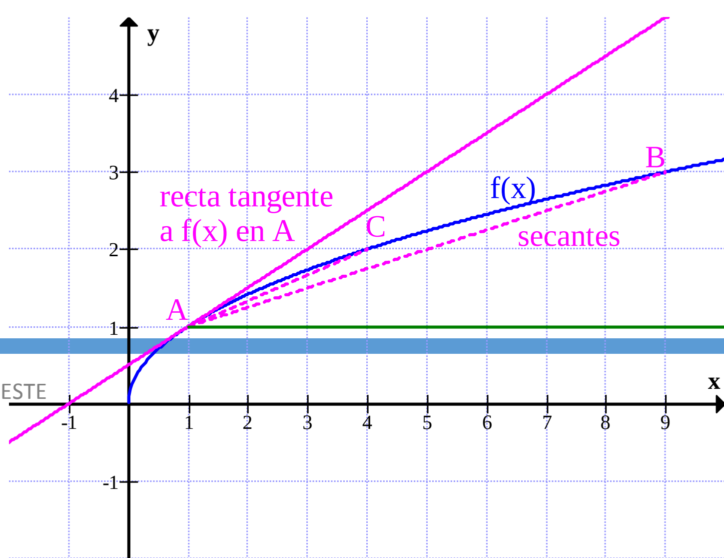
$$TVM_{[a,b]}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Frecuentemente el intervalo $[a,b]$ se designa: $[a,a+h]$ en el que **h es la longitud del intervalo**. En tal caso tendremos que:

$$TVM_{[a,a+h]}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Geométricamente la TVM de la función $y=f(x)$ **en un intervalo** $[a,a+h]$ **nos da la pendiente de la recta secante que une los puntos A y B siendo** $A(a,f(a))$**,** $B(a+h,f(a+h))$

Observa la gráfica de la función: $f(x)=\sqrt{x}$ (en azul), los puntos de coordenadas $A(1,1)$ $B(9,3)$ $C(4,2)$.



La recta secante que une A con B tiene por pendiente, según hemos visto, la TVM de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[1,9]$.

La recta secante que une A con C tiene por pendiente, según hemos visto, la TVM de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[1,4]$.

La recta tangente a la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto A se obtiene como límite de las rectas secantes. Es lógico, por tanto, que su pendiente sea el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando la longitud del intervalo: h se hace cero ($h \to 0$).

Así pues, si el incremento medio de una función en un intervalo se mide por la TVM de dicha función en ese intervalo, **el incremento instantáneo de una función en un punto se mide por la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto**.

Esa pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $A=(a, f(a))$, que se designa por $f'(a)$, se obtiene mediante el siguiente límite:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Acabamos de ver que la derivada de una función en un punto, $f'(a)$, se obtiene como un límite. Para que este límite exista, sabemos que han de existir los límites laterales correspondientes, que en este caso se les denomina **derivadas laterales** y se obtienen:

$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la derivada por la izquierda de $f(x)$ en A

$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es la derivada por la derecha de $f(x)$ en A.

Si las *derivadas laterales existen y valen lo mismo*, es decir, $f'(a^-) = f'(a^+)$ diremos que la función $f(x)$ **es derivable en** A y su valor es: $f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)$

Ejemplo.-

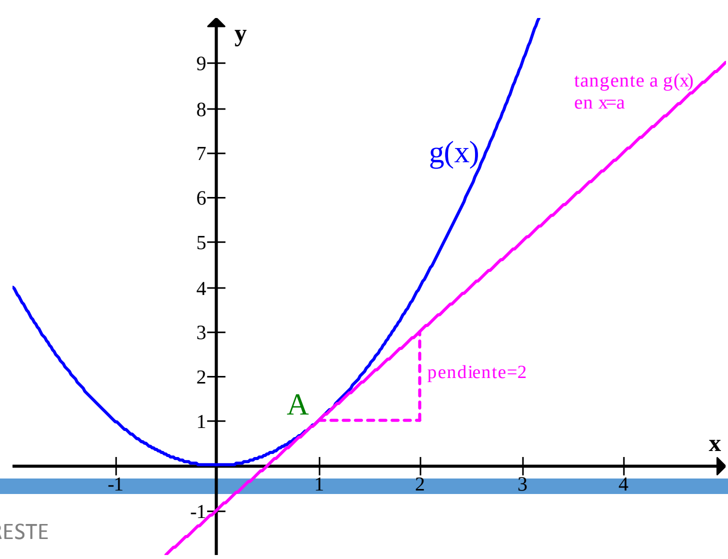
Sea la función $g(x) = x^2$. Calcula la derivada,si existe, en el punto $a = 1$

$$g'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0^-} h + 2 = 2$$

$$g'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0^+} h + 2 = 2$$

$$g'(1) = g'(1^-) = g'(1^+) = 2$$

La función $g(x) = x^2$ **es derivable en** $a = 1$ y su derivada vale: 2, que como ya sabemos es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $a = 1$.



Ejemplo.-

Sea la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$

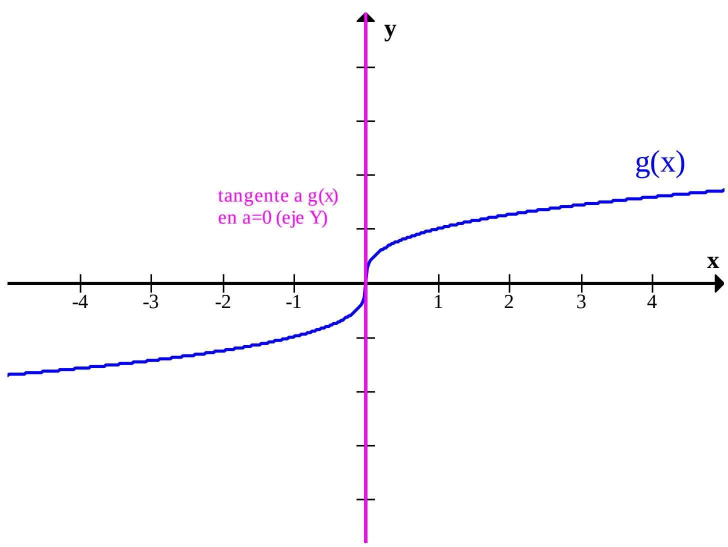
calcula la derivada, si existe, en el punto $a=0$

$$g'(0^-)=\underset{h\to 0^-}{lím}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\underset{h\to 0^-}{lím}\frac{h^{1/3}-0}{h}=\underset{h\to 0^-}{lím}h^{-2/3}=\underset{h\to 0^-}{lím}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$$

$$g'(0^+)=\underset{h\to 0^+}{lím}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\underset{h\to 0^+}{lím}\frac{h^{1/3}-0}{h}=\underset{h\to 0^+}{lím}h^{-2/3}=\underset{h\to 0^+}{lím}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$$

Las **derivadas laterales** valen lo mismo pero **no son finitas** de ahí que digamos que $g(x)=\sqrt[3]{x}$ **no es derivable en** $a=0$.

De hecho la recta tangente a la función en el punto de abscisa $a=0$ es perpendicular al eje X(coincide con el ejeY).



Derivabilidad y continuidad.-

Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él.

Acabamos de ver en el ejemplo anterior para $g(x)=\sqrt[3]{x}$, que **es continua en** $x=0$, sin embargo **no es derivable en** $x=0$

(*en ese punto la recta tangente es perpendicular*)

Fíjate ahora en este otro ejemplo.-

$$\text{La función:}\quad f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 1 \\ x+2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

es una **función continua en todo su dominio**, de hecho sólamente hay que demostrarlo para $x=1$, y efectivamente se cumple que:

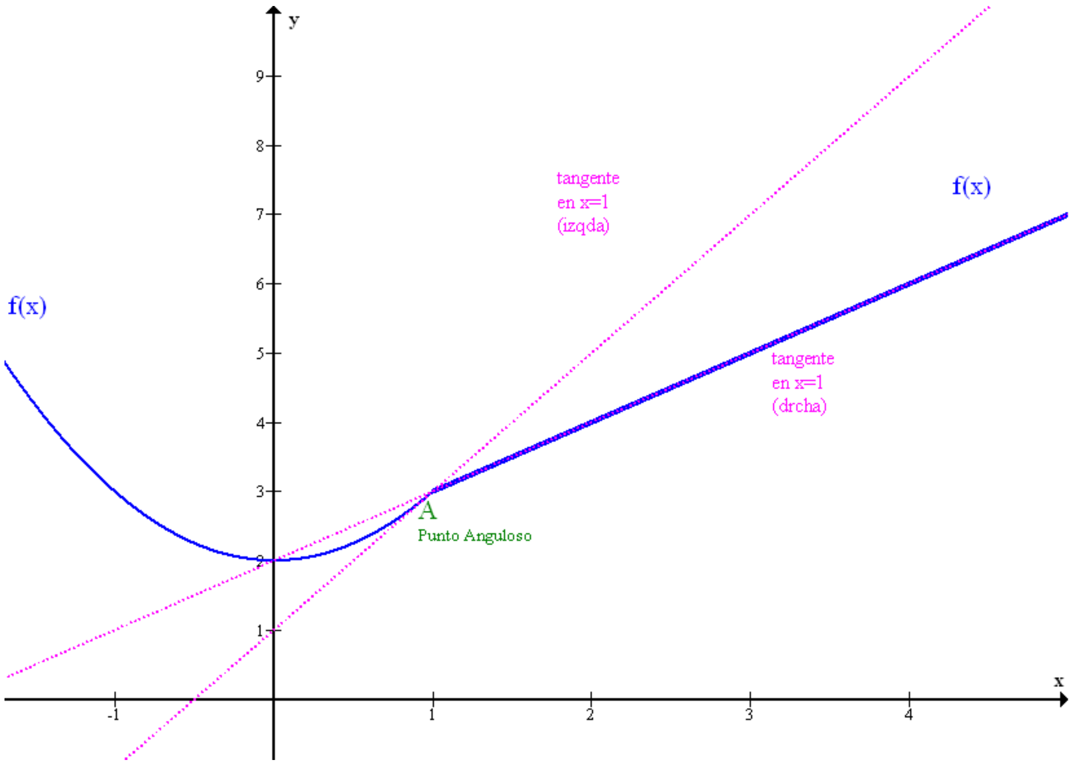
$$\underset{x\to 1^-}{lím} f(x)=\underset{x\to 1^+}{lím} f(x)=f(1)=3$$

Sin embargo esta función no es derivable en $x=1$ ya que:

$$f'(1^-)=\underset{h\to 0^-}{lím}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\underset{h\to 0^-}{lím}\frac{[(1+h)^2+2]-3}{h}=\underset{h\to 0^-}{lím}\frac{2h+h^2}{h}=\underset{h\to 0^-}{lím}2+h=2$$

$$f'(1^+)=\underset{h\to 0^+}{lím}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\underset{h\to 0^+}{lím}\frac{[(1+h)+2]-3}{h}=\underset{h\to 0^+}{lím}\frac{h}{h}=\underset{h\to 0^+}{lím}1=1$$

Por tanto $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow no \;\; existe \; f'(1)$, $f(x)$ **no es derivable** en $x = 1$.



*Hemos visto que **Continuidad no implica Derivabilidad**.*

Sin embargo, (**condición necesaria de derivabilidad**)

Si una función f es **Derivable** en a necesariamente es **Continua** en a.

Demostración.-

f es continua en a sii $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right] \underset{h\neq 0}{=} \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]\lim_{h\to 0}(h) \underset{\substack{f\ derivable \\ en\ x=a}}{=} f'(a).0=0$$

2. Función Derivada de otra función.-

Vamos a motivar este concepto mediante el siguiente

Ejemplo.-

Calcula la derivada de la función $f(x)=x^2-2x$ en los puntos de abscisa:

-2,-1,0,1,2,3,4.

Solución.-

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 - 4h + 4 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-6)}{h} = -6$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 - 2h + 2 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h} = -2$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 2 - 2h + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 6 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 2(4+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 8 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

Para la función $f(x)=x^2-2x$ su derivada en los puntos dados vale:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Podemos observar que se trata de una *función* f' que asocia a cada abscisa el valor de la derivada de f en ese punto

(la pendiente de la recta tangente a f en el punto dado).

A f' se le denomina **Función Derivada** de la función f .El nombre de derivada viene de que esta función f' deriva (proviene) de la función f .

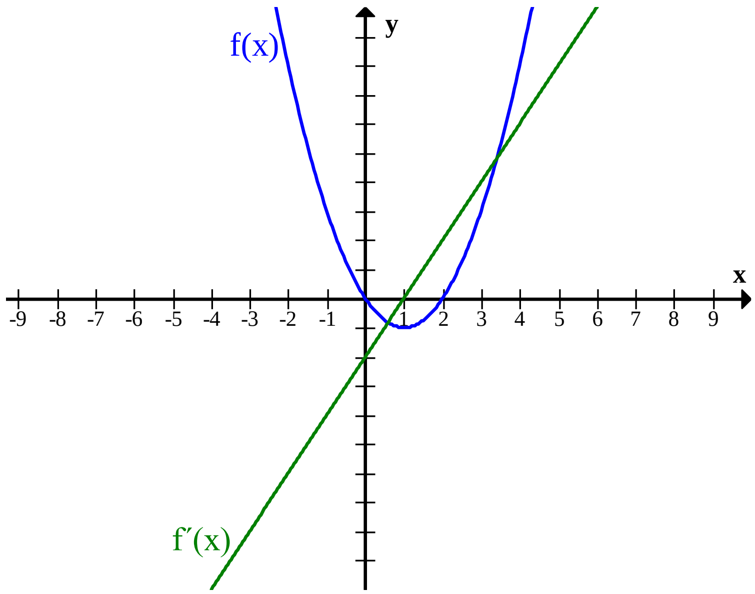
Los puntos de la tabla anterior: (-2,-6);(-1,-4);............;(4,6). Corresponden todos a la gráfica de la recta de ecuación: $y=2x-2$, es decir, la función derivada de $f(x)=x^2-2x$ **es** $f'(x)=2x-2$.

Para probarlo basta con obtener la expresión de la derivada de f en un punto cualquiera x mediante el cálculo del límite que ya conocemos.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h-2)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h-2)=2x-2.$$

x	f(x)	f'(x)
-10	120,0000	-22,0000
-9	99,0000	-20,0000

-8	80,0000	-18,0000
-7	63,0000	-16,0000
-6	48,0000	-14,0000
-5	35,0000	-12,0000
-4	24,0000	-10,0000
-3	15,0000	-8,0000
-2	8,0000	-6,0000
-1	3,0000	-4,0000
0	0	-2,0000
1	-1,0000	0
2	0	2,0000
3	3,0000	4,0000
4	8,0000	6,0000
5	15,0000	8,0000
6	24,0000	10,0000
7	35,0000	12,0000
8	48,0000	14,0000
9	63,0000	16,0000
10	80,0000	18,0000



Ejemplo.- Dada la función cuya expresión analítica es: $f(x)=\frac{1}{x}$. Calcula:

a) su función derivada mediante el límite del cociente incremental.

b) los valores de $f'(2)$ $f'(-2)$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ $f'\left(\sqrt{5}\right)$

c) para que valor(es) de x es

$f'(x)=-1$ $f'(x)=1$ $f'(x)=0$

a) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{(x+h).x.h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{(x+h).x.h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{(x+h).x.h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h).x}=\frac{-1}{x^2}$$

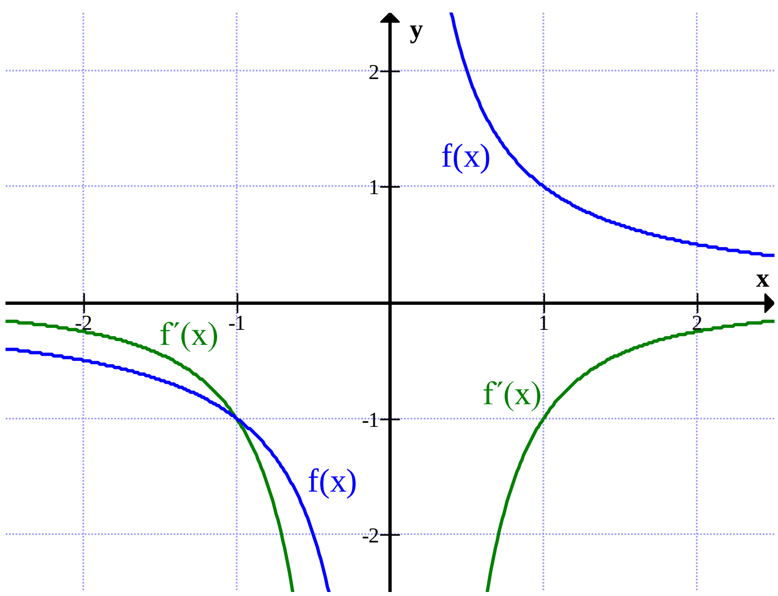
b) $f'(2)=\dfrac{-1}{(2)^2}=\dfrac{-1}{4}\qquad f'(-2)=\dfrac{-1}{(-2)^2}=\dfrac{-1}{4}$

$f'(\frac{1}{2})=\dfrac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{-1}{\frac{1}{4}}=-4\qquad f'(\sqrt{5})=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{-1}{5}$

c) $f'(x)=-1\Rightarrow\dfrac{-1}{x^2}=-1\Rightarrow x^2=\dfrac{-1}{-1}\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1$

$f'(x)=1\Rightarrow\dfrac{-1}{x^2}=1\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\sqrt{-1}\quad no\ hay$

$f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{-1}{x^2}=0\Rightarrow\quad no\ hay$



3. Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones.-

Tabla de derivadas	
Suma	$(f+g)'=f'+g'$

Constante	$(kf)' = k\,f'$
Producto	$(f.g)' = f'g + fg'$
Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
Composición	$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$
Inversa	$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$
Potencias	$A)\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$ $B)[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$ $A)\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $B)\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $A)\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$ $B)\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]' = \dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$
Trigonométricas **Funciones arco**	$A)(senx)' = \cos x$ $B)[senf(x)]' = \cos f(x) f'(x)$ $A)(\cos x)' = -senx$ $B)[\cos f(x)]' = -senf(x) f'(x)$ $A)(tgx)' = 1 + tg^2 x$ $B)[tgf(x)]' = \left[1 + tg^2 f(x)\right] f'(x)$ $A)(arcsenx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $B)[arcsenf(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ $A)(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $B)[\arccos f(x)]' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ $A)(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $B)[arctgf(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
Exponenciales **Logarítmicas**	$A)\left(e^x\right)' = e^x$ $B)\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} f'(x)$ $A)\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ $B)\left[a^{f(x)}\right]' = a^{f(x)} f'(x) \ln a$ $A)(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $B)[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $A)(\lg_a x)' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$ $B)[\lg_a f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\dfrac{1}{\ln a}$

Ejemplo.- Calcula la derivada de cada una de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = \ln \sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = \log(sen\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sen\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\,sen\sqrt{x}$

l) $f(x) = sen(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x)\cdot(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\,x)}{\sqrt{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}} = ln\,e^{(tg\,x)/2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\,3 = \dfrac{ln\,3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2[log\,(sen\,x + log\,(cos\,x)]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\,x}{sen\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} + \frac{-sen\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10}\right] = \frac{2}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sen^2\,x}{sen\,x \cdot cos\,x} =$$

$$= \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sen^2\,x}{2sen\,x \cdot cos\,x} = \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{sen\,2x} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

De otra forma:

$$f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\,log\left(\frac{sen\,2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{\dfrac{sen\,2x}{2}} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot (-sen\,\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot sen\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

$$\text{l)}\quad f'(x) = \cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\text{m)}\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + x^2 + 1}} \cdot (\cos x + 2x) = \frac{\cos x + 2x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + x^2 + 1}}$$

$$\text{n)}\quad f'(x) = 2\cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-\operatorname{sen}\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \frac{1 + 2(3-x)\cdot(-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{-2\cos\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\,\operatorname{sen}\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x-5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5-2x) \cdot \operatorname{sen}\left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$$

Ya sabemos que si una función f es derivable en todos los puntos de un intervalo, I, la función f' que asocia $x \to f'(x)$ definida en I se le llama

Función derivada de f

Ahora si f' es derivable, su derivada se escribe f'' (se lee f segunda).

Así sucesivamente, f''';......... .; f^n (f tercera, f cuarta,......., f n-ésima)

Ejemplo.- Halla las derivadas 1ª,2ª y 3ª de las funciones:

$a)\, f(x) = x^5 \qquad b)\, f(x) = x\cos x \qquad c)\, f(x) = sen^2 x + \cos^2 x + x$

$a)\, f'(x) = 5x^4 \qquad f''(x) = 20x^3 \qquad f'''(x) = 60x^2$

$b)\, f'(x) = \cos x - xsenx$

$f''(x) = -senx - senx - x\cos x = -2senx - x\cos x$

$f'''(x) = -2\cos x - \cos x + xsenx = -3\cos x + xsenx$

$c)\, f(x) = sen^2 x + \cos^2 x + x = 1 + x$

$f'(x) = 0 + 1 = 1$

$f''(x) = f'''(x) = 0$

Ejemplo.- Calcula $f'(1)$ si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} e^4$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\, \sqrt[30]{x^{17}}$$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

Ejemplo.- Calcula $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ si $f(x) = \left(\cos^2 3x - sen^2 3x\right) sen\, 6x$

$$f(x) = (cos^2 3x - sen^2 3x) \cdot sen\ 6x = cos\ 6x \cdot sen\ 6x = \frac{sen\ 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12cos\ 12x}{2} = 6cos\ 12x$$

Por tanto: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\ \frac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

Ejemplo.- Calcula $f'(0)$ si $f(x) = \ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} arc\,tg \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$f(x) = ln\ \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ ln\ (x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{4x^2+4x+1}{3}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3+4x^2+4x+1} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{4x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2x+2} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

Por tanto: $f'(0) = 0$

Derivabilidad en un punto utilizando las reglas de derivación.-

En algunas ocasiones se nos presenta el problema de determinar si *una función es derivable en un punto* x_0 *en el que la función es continua y la derivada de esa función existe en las proximidades de dicho punto* x_0

En esta situación podemos calcular las derivadas laterales de la función $f(x)$ en el punto x_0 como límites laterales de $f'(x)$, y si éstas valen lo mismo entonces la función es derivable en dicho punto x_0.

Todo lo dicho se formaliza matemáticamente:

Si la función $f(x)$ *es continua en* x_0

Si $f'(x)$ *existe en los intervalos* (a, x_0) (x_0, b).

Si $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ *y* $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ *coinciden, entonces:*

$f(x)$ ***es derivable en*** x_0

Ejemplo.-

Estudia la derivabilidad en $a = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 3x - 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Solución.-

La función es continua en $a = 2$ pues

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 3x - 2 = 6 - 2 = 4$ por tanto:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$$

Para ver si es derivable en $a = 2$ calculamos mediante las reglas de derivación la función derivada de f en $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 2 \\ 3 & si\ x > 2 \end{cases}$$

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 2\ 2 = 4$ y $f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 3$

Como las derivadas laterales en $a = 2$ no coinciden, la función no es derivable en $a = 2$

Es un punto **anguloso** de la función.

Ejemplo.-

Calcula el valor que han de tener las letras “a” y “b” para que la función:

$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & si\ x < -1 \\ ax^2 + bx & si\ x \geq -1 \end{cases}$ <u>sea derivable</u> en $x = -1$

Solución.-

La función dada es, evidentemente,continua en todos los puntos de su dominio (lo son las funciones polinómicas elementales que la determinan) salvo a lo sumo en el punto $x = -1$

Según hemos dicho anteriormente una función derivable en un punto ha de ser necesariamente continua en ese punto(en este caso en $x = -1$).

$f(x)$ <u>debe pues ser continua</u> en $x = -1$, o sea, $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$

$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) = a - b$

Ahora para que exista el límite: $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ han de coincidir los laterales:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^3 - x = (-1)^3 - 1 = 0 \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ax^2 + bx = a(-1)^2 + b(-1) = a - b$$

Por tanto se ha de cumplir que:

$$\boxed{a - b = 0}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = -1$ se ha de cumplir que las derivadas laterales sean coincidentes y finitas. Como existe la derivada de $f(x)$ en los intervalos:

$(-\infty, -1)$ $(-1, \infty)$ y su expresión analítica es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & si\ x < -1 \\ 2ax + b & si\ x > -1 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales de $f(x)$ en el punto $x = -1$ mediante los límites laterales de $f'(x)$, es decir,

$$f'(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} (3x^2 - 1) = 2 \quad \text{y} \quad f'(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} (2ax + b) = -2a + b$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = -1$ las derivadas laterales han de coincidir:

$$\boxed{2 = -2a + b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado, más abajo, obtenemos los valores de a y b:

$$\boxed{\begin{cases} a - b = 0 \\ -2a + b = 2 \end{cases}}$$

Si lo resolvemos por reducción obtenemos: $a = -2 \quad b = -2$

Nuevas técnicas de Derivación.-

A) <u>Derivación Implícita</u>.-

En muchas ocasiones las funciones están dadas mediante expresiones del tipo $\phi(x, y) = 0$ en las que resulta difícil, e incluso imposible, despejar la "y"

En estas expresiones los valores de "y" quedan implícitamente determinados y no es posible (o bien resulta muy complicado) obtener explícitamente una expresión del tipo $y = f(x)$ A pesar de ésto, el cálculo de la derivada: $f'(x)$ o y' en estas expresiones $\phi(x, y) = 0$ no es difícil. Veámoslo en algún ejemplo

Ejemplo.-

La ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ define implícitamente una función lineal (recta).

En este caso obtenerla en forma explícita sería muy sencillo basta despejar y para obtener $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ y su derivada sería $y' = \frac{3}{2}$

En el caso en que quisiésemos obtener y' en forma implícita procederíamos:

Derivamos miembro a miembro la ecuación en forma implícita teniendo en cuenta la regla de la cadena y que $x' = 1$(en general $y' \neq 1$)

$$3.1 - 2\,y' + 0 = 0 \rightarrow 2y' = 3 \rightarrow y' = \frac{3}{2}$$

Ejemplo.-

La ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ corresponde a una circunferencia de centro en el origen y radio 2. Para hallar y' en forma implícita efectuamos

$$2\,x + 2\,y\,y' - 0 = 0 \rightarrow 2\,y\,y' = -2\,x \rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

y' viene dada ,en este caso, en fución de x e y Para determinar el valor de la derivada en un punto necesitamos conocer tanto la "abscisa" como la "ordenada" de dicho punto.

Por ejemplo si la circunferencia pasa por el punto de abscisa $x=\sqrt{3}$ y ordenada $y=1$ entonces $y'=\frac{-x}{y}=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$

Ejemplo.- Comprueba que $sen\left(x^2 y\right)-y^2+x=2-\frac{\pi^2}{16}$ pasa por $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ y calcula el valor de y' en dicho punto.

$$sen\left(2^2\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+2=2-\frac{\pi}{16}\rightarrow sen(\pi)-\frac{\pi}{16}+2=2-\frac{\pi}{16}\rightarrow 0-\frac{\pi}{16}+2=2-\frac{\pi}{16}$$

$$\cos\left(x^2 y\right)\left(2x\,y+x^2\,y'\right)-2\,y\,y'+1=0\rightarrow\cos\left(x^2 y\right)x^2\,y'-2\,y\,y'=-1-\cos\left(x^2 y\right)2\,x\,y\rightarrow$$

$$y'\left[\cos\left(x^2 y\right)x^2-2\,y\right]=-1-\cos\left(x^2 y\right)2\,x\,y\rightarrow y'=\frac{-1-\cos\left(x^2 y\right)2\,x\,y}{\cos\left(x^2 y\right)x^2-2\,y}$$

$$y'_{\left(2,\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-1-\cos(\pi)\pi}{\cos(\pi)4-\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{-4-\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{\frac{-8-\pi}{2}}=\frac{2(\pi-1)}{-8-\pi}$$

A) <u>Derivación Logarítmica</u>.-

En muchas ocasiones, tomando logaritmos y aprovechando sus propiedades, simplificamos notablemente el cálculo de la derivada de una función.

Ejemplo.- dada la función $y=x^x$ calcula su derivada y'

Esta función no es potencial pues el exponente no es constante.

Esta función no es exponencial pues la base no es constante.

No tenemos ninguna regla para determinar su derivada, pero podemos tomar logaritmos previamente en dicha expresión y derivar la expresión resultante utilizando la regla de la cadena. Este modo de proceder se le denomina un tanto absurdamente **derivación logarítmica.** Procedamos pues:

A) tomamos logaritmos en los dos miembros: $\ln y=x\ln x$

B) derivamos mediante la r. de la cadena: $\frac{y'}{y} = 1\ln x + \frac{x}{x} \to y' = x^x(\ln x + 1)$

Muchas veces se utiliza esta técnica de derivación para demostrar alguna de las reglas de derivación de la tabla de derivadas.

Ejemplo.-

Calcula la derivada de las funciones: $a) y = (senx)^x \quad b) y = x^{senx}$

$$a) \ln y = x\ln(senx) \to \frac{y'}{y} = 1\ln(senx) + x\frac{\cos x}{senx} \to y' = (senx)^x\left[\ln(senx) + x\frac{\cos x}{senx}\right]$$

$$b) \ln y = senx\ln x \to \frac{y'}{y} = \cos x\ln x + senx\frac{1}{x} \to y' = x^{senx}\left[\cos x\ln x + \frac{senx}{x}\right]$$

Ejemplo.- (<u>demostración de la derivada de un producto de dos funciones)</u>

Vamos a comprobar mediante la derivación logarítmica esta igualdad

$$(f.g)' = f\,g' + f'\,g$$

Si llamamos $\phi(x) = f(x).g(x)$

Tomamos logaritmos en esa expresión $\ln\phi(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$

Derivamos y obtenemos $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$

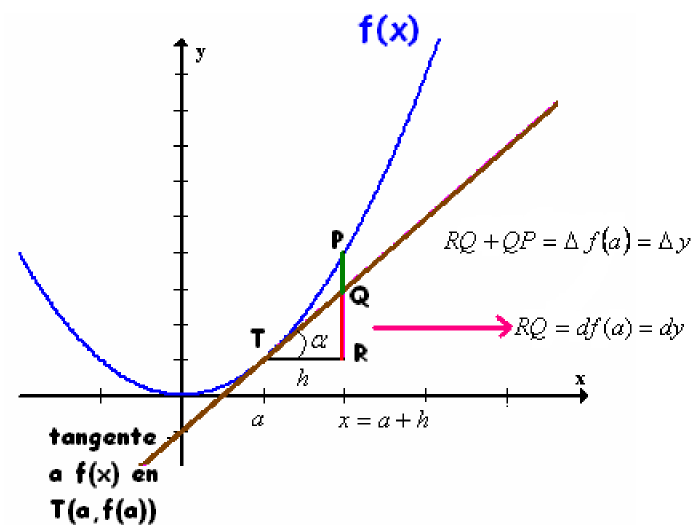
Despejamos $\phi'(x)$ y operamos obteniendo:

$$\phi'(x) = f(x).g(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Diferencial de una función.-

Observa la siguiente figura en la que aparece la gráfica de la función $f(x)$ y su tangente en el punto $T(a, f(a))$



Sabemos que el incremento de una función f en a correspondiente a un incremento h de la variable independiente (x) es: $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$

Definimos la **diferencial de la función** f en el punto a y escribimos $df(a)$ como la función lineal de h definida por:

$$df(a) = f'(a).h$$

La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor se "ciñe" a la curva. Por eso la **diferencial es una buena aproximación del incremento en las proximidades de** a **(es decir, cuando** $h \to 0$**).** En efecto:

$$\underset{h\to 0}{lím}\frac{\Delta f(a)}{df(a)} = \underset{h\to 0}{lím}\frac{f(a+h)-f(a)}{f'(a)h} = \frac{1}{f'(a)}\underset{h\to a}{lím}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{f'(a)}f'(a) = \frac{f'(a)}{f'(a)} = 1$$

son infinitésimos equivalentes.

La diferencial de una función en un punto nos da pues **el incremento de la ordenada de la tangente** correspondiente a un incremento $h\ de\ (x)$

Si en lugar de considerar la diferencial en un punto concreto a se considera un punto genérico x hablaremos de la diferencial $df(x)$ y $df(x) = f'(x).h$

Para la función identidad $g(x) = x$ tendremos que: $dg(x) = g'(x)h$ y como $g'(x) = 1$ entonces se verifica $dx = dg(x) = 1.h = h \to h = dx$ Así podremos escribir la derivada de una función f como cociente de diferenciales:

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}}$$

Ejemplo.- Un cuadrado de perímetro 4 metros, aumenta su lado en 1 mm.

Calcular el incremento de superficie y el error que se comete, cuando en lugar de manejar incrementos, se usan diferenciales.

Primero recordemos que la superficie de un cuadrado de lado l es $S = l^2$

Este cuadrado de perímetro 4 tiene de lado $l = 1$

Con los incrementos tenemos: $\Delta S = (l+h)^2 - l^2 = (1+0{,}001)^2 - 1^2 = 0{,}002001 \ m^2$

Con la diferencial (en $l = 1$): $dS = S'(l)dl = 2l\,dl = 2\,1(0{,}001) = 0{,}002000 \ m^2$

Error cometido $E = \Delta S - dS = 0{,}000001 = 10^{-6} \ m^2$

Ejemplo.- Calcular el espacio recorrido por una partícula cuya posición viene dada por la ecuación: $s(t) = 2t^4 - t^3 + t^2 \quad s$ en cm. t en s. desde $t = 4$ hasta $t = 4{,}01$. a) Exactamente b) aproximadamente.

a) el espacio recorrido entre $t = 4$ y $t = 4{,}01$ viene dado por:

$$\Delta s = s(4{,}01) - s(4) = 468{,}73813102 - 464 = 4{,}73813102\,cm$$

b) con la diferencial (en $t = 4$)

$$ds = s'(t)\ dt = \left(8t^3 - 3t^2 + 2t\right)dt = (472).0{,}01 = 4{,}72\ cm$$

Ejemplo.- En un proceso isotérmico, un gas ideal mantiene la constante

10 at.l. La variación de presión es de 1 at. /min. ¿Cuál es la variación de volumen por minuto, cuando el manómetro marca 5 atmósferas?

La ley de Boyle-Mariotte, que regula el proceso es: $p.V = 10$ o también:

$$V = \frac{10}{p}$$

Según el enunciado $\frac{dp}{dt}=1\ {at.}/_{\min}.$ Si calculamos la diferencial de V respecto a p tenemos que $dV=V'(p)dp \to dV=\frac{-10}{p^2}dp$

Aplicando la regla de la cadena para diferenciales tenemos:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dp}\frac{dp}{dt}=\frac{-10}{p^2}1=\frac{-10}{p^2}$$

En el momento a considerar es cunado $p=5\ at.$ por tanto:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{p=5}=\frac{-10}{p^2}=\frac{-10}{25}=-0{,}4\ {l.}/_{\min}$$

En ese preciso instante, para el que $p=5\ at.$, el volumen del gas está disminuyendo a razón de 0,4 litros por minuto.

4. Aplicaciones de la derivada.-

Las aplicaciones de la derivada de una función son numerosas. Nosotros en este apartado nos limitaremos a ver las siguientes:

1. *obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.*
2. *estudio de la monotonía de una curva y obtención de sus extremos.*
3. *estudio de la curvatura de una curva y puntos de inflexión..*
4. *resolución de problemas de optimización.*
5. *regla de L´hôpital,para el cálculo de límites*
6. *teoremas de Rolle ,teorema del valor medio y sus aplicaciones.*

1. **Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos**

Como ya sabemos la ecuación de una recta que tiene de pendiente m y pasa por el punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ es $y = y_0 + m(x - x_0)$

La recta tangente a una curva $f(x)$ en un punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ tiene por pendiente en ese punto, según sabemos, $m = f'(x_0)$ y por tanto su ecuación es:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejemplo.-

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

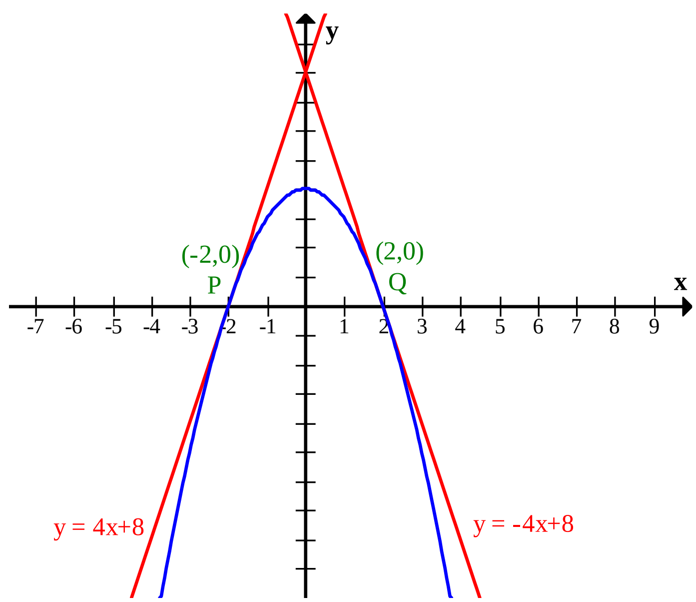
Solución.-

Los puntos de corte de la función $f(x) = 4 - x^2$ se determinan resolviendo la ecuación:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

por tanto esos puntos de corte de la función con el eje X son:

$$Q(2,0) \quad P(-2,0)$$



Calculamos la derivada de la función que es: $f'(x) = -2x$ y sabemos que la pendiente de la recta tangente en esos puntos es

$$m_1 = f'(2) = -4 \ \textbf{y} \ m_2 = f'(-2) = 4$$

Las rectas tangentes en los puntos $Q(2,0) \ y \ P(-2,0)$ son por tanto:

$$y = 0 - 4(x - 2) = -4x + 8 \ ; \ \ y = 0 + 4(x - (-2)) = 4x + 8$$

2. Estudio de la monotonía de una curva y obtención de sus extremos.-

A) Crecimiento y Decrecimiento de una función en un punto.-

$$f(x) \text{ creciente en } x_0 \Leftrightarrow \exists (x_0 - a, x_0 + a) \,\big/\, signo(x - x_0) = signo(f(x) - f(x_0))$$

Análogamente se define función decreciente en un punto (hazlo tú)

Relación del crecimiento de una función con el valor de su derivada:

$f(x)$ derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$f(x)$ derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Criterio que nos permite relacionar la monotonía de una función en un punto con el signo que toma su derivada en dicho punto.

(se demuestra,más adelante, como aplicación del teorema del valor medio)

Sea $f(x)$ una función derivable en x_0

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x_0$$
$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x_0$$

(**En el caso de que una función no fuese derivable en el punto habría que estudiar su monotonía a través de la definición de creciente o decreciente).

B) Máximos y mínimos relativos de una función.-

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ tiene en } x_0 \\ \text{un Máximo relativo} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe un número real } a \text{ tal que} \\ \text{si } x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\ tiene\ en\ x_0 \\ un\ Mínimo\ relativo \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} existe\ un\ número\ real\ \ a\ \ tal\ que \\ si\ \ x \in (x_0 - a, x_0 + a) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{array}\right\}$$

Condición necesaria de extremo relativo.

$$Si\ \ f(x)\ tiene\ máximo\ o\ mínimo\ relativo\ en\ \ \ x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

(**esta condición es **necesaria** pero **no suficiente**).

Definimos ***puntos singulares o puntos críticos*** *de una función, como aquellos en los que la primera derivada se anula:* $f'(x) = 0$ *(tg. horizontal)*

Los puntos críticos pueden ser: Máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Regla para identificar extremos relativos de una función basada en el signo de su primera derivada en las proximidades de un punto.

Un punto crítico es:

$$\begin{array}{l} Máximo\quad f' > 0\ a\ su\ izquierda\quad f' < 0\ a\ su\ derecha \\ mínimo\quad f' < 0\ a\ su\ izquierda\quad f' > 0\ a\ su\ derecha \\ Inflexión\ \ f'\ tiene\ el\ mismo\ signo\ a\ ambos\ lados\ del\ \ punto \end{array}$$

Ejemplo.-

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos y decide si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Solución.-

Sabemos que una función es creciente en un punto si su derivada es positiva en dicho punto y en consecuencia será creciente en un intervalo cuando su derivada sea positiva en todos los puntos de dicho intervalo(análogamente se dice para decreciente).

Por tanto tendremos que calcular los puntos en los que la derivada de la función es cero y a partir de aquí(por ser continua la función derivada)determinar en que intervalos la derivada es positiva y por tanto la función creciente y en que intervalos la derivada es negativa y en consecuencia la función es decreciente.

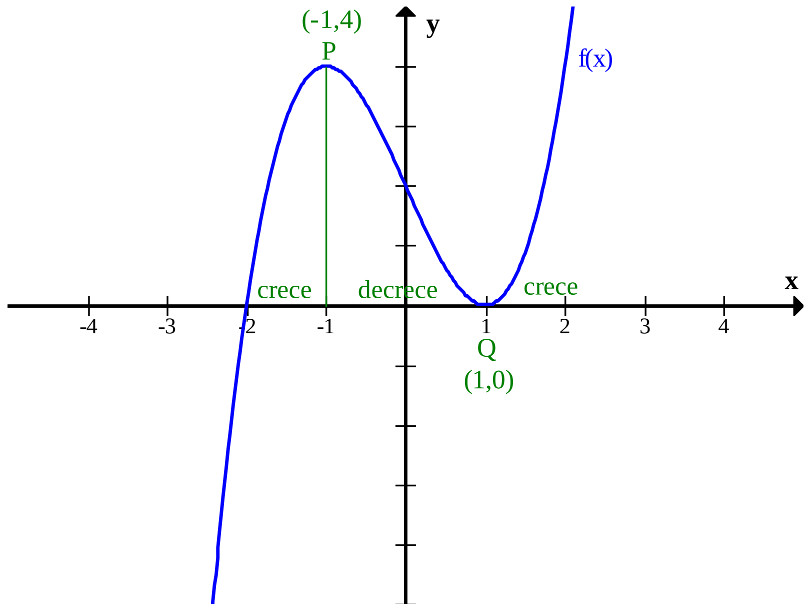
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Estudiamos pues el signo de la derivada

$$
\begin{aligned}
&en \quad (-\infty,-1)\ f'>0 \Rightarrow f\ creciente \\
&en \quad (-1,1) \quad f'<0 \Rightarrow f\ decreciente \\
&en \quad (1,\infty) \quad f'>0 \Rightarrow f\ creciente
\end{aligned}
$$

Como la función en $x=-1$ pasa de creciente a decreciente, $f(x)$ tiene en $x=-1$ un Máximo relativo que vale:($f(-1)=4$).

Como la función en $x=1$ pasa de decreciente a creciente, $f(x)$ tiene en $x=1$ un

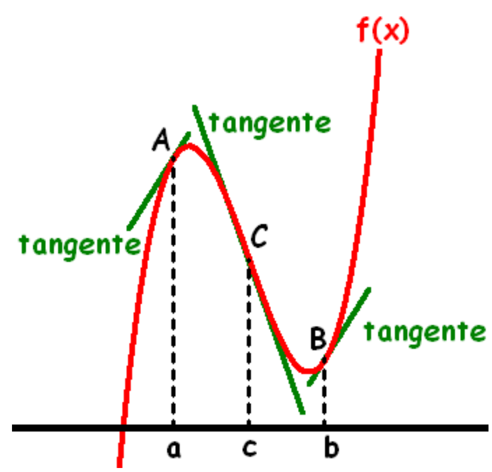
Mínimo relativo que vale:($f(1)=0$).



3. **Estudio de la curvatura y la obtención de los puntos de inflexión.-**

A)<u>Concepto de Curvatura de una curva en un punto.-</u>

Observa el gráfico de la curva $y = f(x)$.



Dada la recta tangente a la curva en el punto P, de ecuación: $y = t(x)$, puede ocurrir:

-Si en las proximidades de P es $\underline{t(x) < f(x)}$ la curva es <u>**cóncava**</u> en P (en ejemplo $P = B$)

-Si en las proximidades de P es $\underline{t(x) > f(x)}$ la curva es <u>**convexa**</u> en P (en ejemplo $P = A$)

-Si la tangente en P atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de P se cumple: $\underline{t(x) > f(x)}$ y a la derecha de P se cumple $\underline{t(x) < f(x)}$ (o viceversa) se dice que la curva $y = f(x)$ tiene en P un **punto de Inflexión** (en ejemplo $P = C$).

Relación de la curvatura con el valor de la segunda derivada.

$$\begin{array}{l} Si\ f\ tiene\ derivada\ segunda\ en\ x_0 \\ f\ cóncava\ en\ x_0 \Rightarrow f'\ es\ creciente\ en\ x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0 \\ f\ convexa\ en\ x_0 \Rightarrow f'\ es\ decreciente\ en\ x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0 \\ f\ tiene\ un\ punto\ de\ Inflexión\ en\ x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0 \end{array}$$

Criterio para determinar la curvatura de una curva.

$$\begin{array}{l} f\ y\ f'\ derivables\ en\ x_0 \\ Si\quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow f\ es\quad cóncava\ en\ x_0 \\ Si\quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow f\ es\quad convexa\ en\ x_0 \\ Si\quad \left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\ tiene\ en\ x_0\ Inflexión \end{array}$$

<u>Es también interesante exponer un criterio,basado en el signo de la derivada segunda, para determinar los puntos extremos de la función</u>

(se demuestra,más adelante, como aplicación del teorema del valor medio)

$$\begin{array}{l} Si\ f'(x_0) = 0\ y\ existe\ f''(x_0) \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow f\ tiene\ un\ mínimo\ en\ x_0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f\ tiene\ un\ máximo\ en\ x_0 \end{array}$$

Ejemplo.-

Estudia la curvatura de la curva $f(x)=x^3-3x+2$ y puntos de inflexión.

Solución.-

Ya hemos estudiado esta función para determinar su monotonía y sus puntos extremos .

Sabemos que su derivada es: $f'(x)=3x^2-3$ y su derivada segunda es: $f''(x)=6x$

Resolvemos los valores que anulan la derivada segunda, es decir, $6x=0 \Rightarrow x=0$

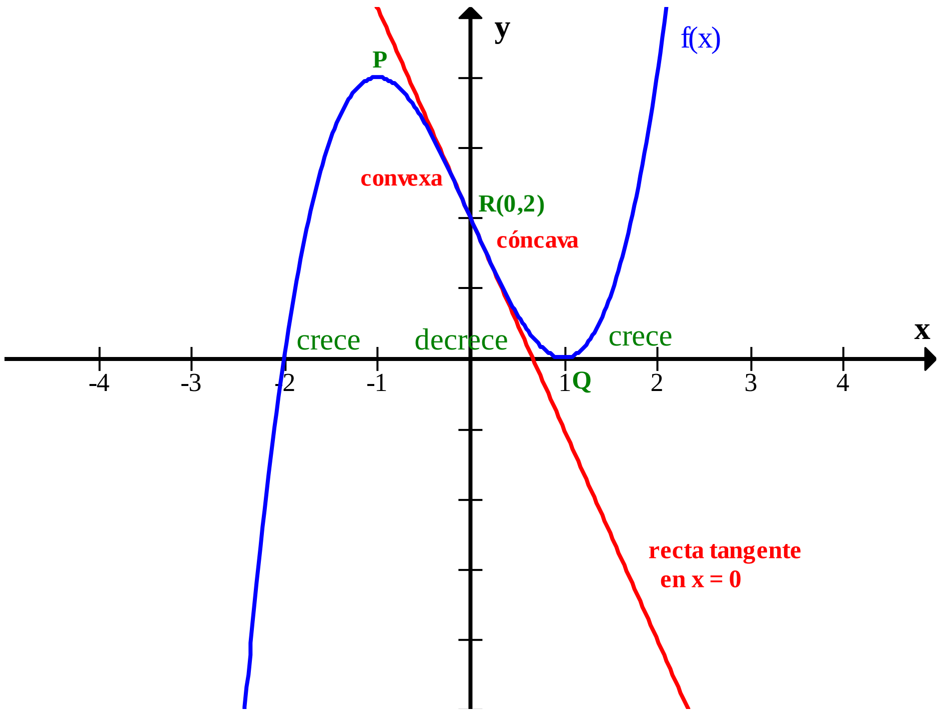
$$en \quad (-\infty,0)\ f''<0 \Rightarrow f\ convexa$$
$$en \quad (0,+\infty) \quad f''>0 \Rightarrow f\ concava$$

En consecuencia, en el punto de abscisa $x=0$ (punto $\underline{R(0,2)}$) tiene una **inflexión** puesto que ha cambiado la curvatura de convexa a cóncava en ese punto $R(0,2)$

(También podríamos haber determinado que el punto R es de inflexión, calculando la tercera derivada de la función y comprobando que no se anula en la abscisa de R, así:

$f'''(x)=6\neq 0$ sea cual sea el valor de x por tanto $f'''(0)=6\neq 0$ y por tanto el punto $R(0,2)$ es un punto de inflexión de la curva dada.

<u>Vemos también en la gráfica como la recta tangente a la curva en el punto</u> $R(0,2)$ <u>atraviesa a la curva.</u>



4. **Resolución de problemas de optimización.-**

Los problemas en que es necesario optimizar una función son muy frecuentes en Economía, Física,Biología,Geometría etc.Así en muchas ocasiones se trata de hacer máximos unos beneficios, un volumen y en otras se trata de hacer mínimos unos costes, un área, una fuerza.

La dificultad de estos problemas, normalmente, no estriba en optimizar una función conocida sino en hallar la expresión analítica de la función que tenemos que optimizar.

Para resolver convenientemente este tipo de problemas tenemos que:

1. Aprender la técnica más conveniente de calcular los extremos de una función que viene dada por su expresión analítica en un intervalo.
2. Aprender, mediante la práctica continua, a escribir de modo analítico las funciones que se describen mediante un enunciado.

Para el primer punto señalaremos las siguientes orientaciones:

Si tenemos que optimizar $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, no nos interesan los extremos relativos en dicho intervalo sino los ***extremos absolutos*****.**

a) Si f es derivable en dicho intervalo, los extremos absolutos se encuentran entre los puntos críticos y los extremos del intervalo, se calcula:

$f(a)$, $f(b)$ *y todos los valores* $x \in (a,b)$ *que anulan la derivada (* $f'(x) = 0$ *)*

Con estos valores se podrá determinar cual es el máximo y cual es el mínimo.

b)Si hay algún punto del intervalo $x_0 \in (a,b)$ *en que la función no sea derivable ,aunque sí continua, calcularíamos además el valor* $f(x_0)$ *pues podría ser un extremo.*

c) Si hay algún punto del intervalo $x_0 \in (a,b)$ *en que la función no sea continua estudiaríamos además el comportamiento de la función en las proximidades de* x_0

Para el segundo punto conviene señalar la importancia de adiestrarse en la traducción algebraica de enunciados, aprendida durante los cursos de ESO, y que ahora resultará fundamental para abordar con éxito los problemas.

En este apartado es muy importante recordar que si al plantear analíticamente el enunciado nos aparecen dos variables, tendremos que encontrar una relación entre las mismas que nos permita escribir la función a optimizar en una única variable.

(para así derivar la función obtenida respecto a esa variable).

También conviene recordar que hay que comprobar si los valores obtenidos corresponden verdaderamente a los óptimos. Para ello se puede recurrir, tanto a la regla del signo de la primera derivada en las proximidades del candidato a óptimo, como el criterio del signo de la segunda derivada en dicho punto.

Ejemplo.-

Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en € vienen dados por la función: $I = 28x^2 + 36000x$, mientras que sus gastos(también en €) vienen dados por la función $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determina:

a) la función que define el beneficio anual en €.

b) cantidad de unidades vendidas para que el beneficio sea máximo.

c) el beneficio máximo.

Solución.-

a) Los beneficios de una empresa vienen dados por la diferencia entre los ingresos y los gastos anuales,es decir:

$$B(x) = I(x) - G(x) = -16x^2 + 24000x - 700000$$

b) Queremos obtener el máximo de la función $B(x)$ para ello calculamos:

$$B'(x) = -32x + 24000$$

Calculamos los puntos críticos:

$$-32x + 24000 = 0 \Rightarrow x = 750$$

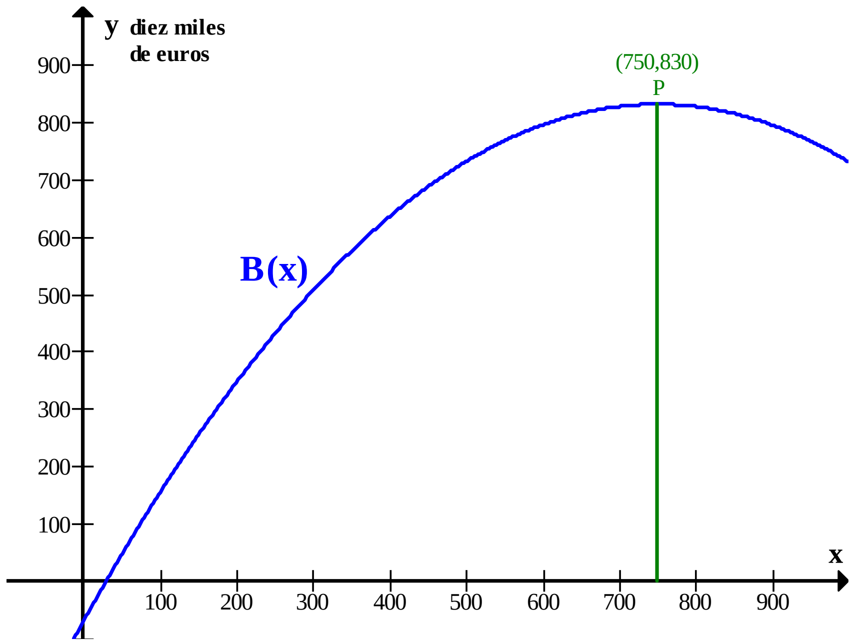
<u>Comprobamos que es un máximo:</u>

$$B''(x) = -32 \Rightarrow B''(750) = -32 \Rightarrow en\ x = -32\ hay\ máximo$$

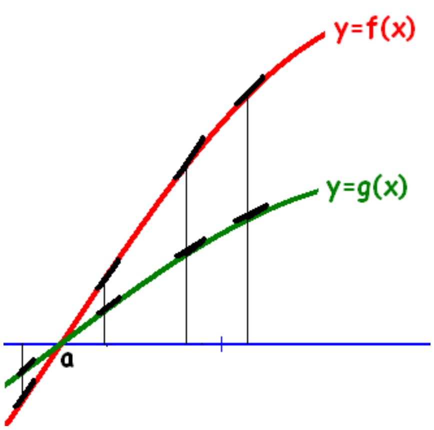
Para obtener el máximo beneficio se han de vender $x = 750$ unidades.

c) Para calcular el beneficio máximo evaluamos el beneficio en $x = 750$

$$B(750) = -9000000 + 18000000 - 700000 = 8300000€$$



5. Regla de de L´hôpital,para el cálculo de límites.-



Observa el gráfico de la izquierda.

Cuando el $\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, significa que la relación entre las ordenadas de $y = f(x)$ y las de $y = g(x)$ tiende a estabilizarse.

Si existe el $\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ significa que tiende a estabilizarse la relación entre sus pendientes.

Si f y g son funciones derivables en un entorno $(a-r, a+r)$ de a.

Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ y el límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ entonces también:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

Este proceso por el que se puede determinar un límite del tipo $\frac{0}{0}$ mediante el cálculo del límite del cociente de sus derivadas se llama regla d L`hôpital

A veces, después del primer paso, se llega a otra indeterminación similar, por lo que se puede repetir el proceso.

Ejemplo.- resuelve el siguiente límite $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

Este límite es del tipo $\frac{0}{0}$ y cumple las condiciones de la regla d L`hôpital

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{3x^2+2x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{6x+4}{6x+2}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo.- resuelve el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$$

Ampliación de la regla de L´hôpital

Los límites del tipo $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ en los que a es un número o $\pm\infty$

Si dan lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pueden obtenerse derivando numerador y denominador y calculando (**si existe**) el límite del cociente de sus derivadas.

Las indeterminaciones del tipo $\infty-\infty \quad 1^{\infty} \quad 0\ \infty$ y otras se pueden poner, con algo de habilidad, en forma de cociente para que se les pueda aplicar la regla de L´hôpital.

Ejemplo.- Calcula los siguientes límites

$$a)\lim_{x\to+\infty}\left(1-2^{1/x}\right)x \overset{0\,\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-2^{1/x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-2^{1/x}\frac{-1}{x^2}\ln 2}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}-2^{1/x}\ln 2 = -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}$$

$b)\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + senx)^{1/x}$ Este límite es del tipo 1^{∞} para ponerlo en forma de cociente tomamos logaritmos en $f(x) = (\cos x + senx)^{1/x}$

$$\lim_{x\to 0}[\ln f(x)] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(\cos x + senx)^{1/x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}[\ln(\cos x + senx)]\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x + senx)}{x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(-senx + \cos x)}{(\cos x + senx)}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{-senx+\cos x}{\cos x + senx} = 1$$

Como sabemos que $\lim\limits_{x\to 0}[\ln f(x)] = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right)$ entonces tendremos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left[\ln f(x)\right]=1 \Leftrightarrow e^{1}=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x+senx)^{1/x}$$

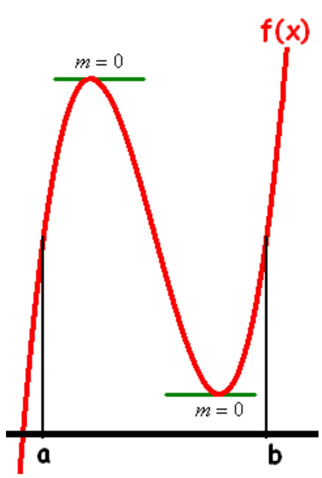
$$\lim_{x\to 0}(\cos x+senx)^{1/x}=e$$

$$c)\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln 3}{3x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x(\ln 3)^2}{6x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x(\ln 3)^3}{6}=\frac{+\infty}{6}=+\infty$$

En este último ejemplo comprobamos mediante la regla d L`hôpital, que una función exponencial es un infinito de orden superior a una función potencial.

6.Teorema de Rolle, Teorema del valor medio y aplicaciones.-

Teorema de Rolle.-



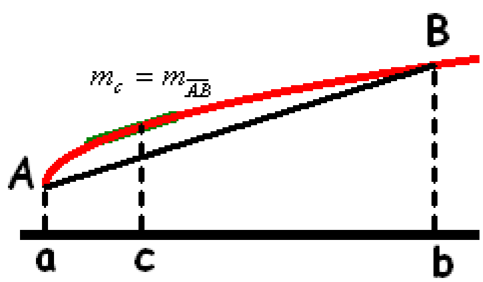
La idea del teorema de Rolle es que una curva continua y sin "picos" que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo, **necesariamente** tiene algún punto con tangente horizontal.

En este ejemplo la función $f(x)$ que es continua y sin "picos" y toma los mismos valores en los extremos del intervalo $[a,b]$ tiene dos puntos del intervalo en los que la tangente a la curva es horizontal (o sea de pendiente cero).

Enunciado del teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f \; continua\, en \; [a,b] \\ f \; derivable\, en (a,b) \\ \; f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow existe \; al \; menos \; un \; c \in (a,b) \; tal \; que \; f'(c) = 0$$

<u>Teorema del valor medio</u>.-



La idea del teorema del valor medio es que en una curva continua y sin "picos" que va del punto A al punto B, hay algún punto intermedio en el que la tangente a la curva en dicho punto es paralela al segmento AB.

(Es decir, tienen la misma pendiente)

Enunciado del teorema del valor medio

$$\left.\begin{array}{l} f \; continua\, en \; [a,b] \\ f \; derivable\, en (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow existe \; al \; menos \; un \; c \in (a,b) \; tal \; que \; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo.-Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1,1]$ cualquiera que sea el valor de b (<u>hazlo por reducción al absurdo</u>: supón que hay dos raíces en $[-1,1]$).

La función $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1,1]$ (es un polinomio).

Es derivable en $[-1,1]$ y su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Si calculamos donde se anula la derivada, $(f' = 0)$ $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Veamos pues, que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en $[-1,1]$

Supongamos que $f(x) = x^3 - 3x + b$ tiene dos raíces a_1 y a_2 en $[-1,1]$ es decir

$$f(a_1) = f(a_2) = 0$$

Rolle: $\left.\begin{array}{r} f \ continua\ en\ [-1,1] \\ f \ derivable\ en (-1,1) \\ f(a_1) = f(a_2) \end{array}\right\} \Rightarrow existe\ al\ menos\ un\ c \in (a_1, a_2)\ tal\ que\ f'(c) = 0$

Pero sabemos que f' se anula en $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ que no están incluidos en (a_1, a_2) puesto que $-1 \le a_1, a_2 \le 1$, hemos llegado a una **contradicción.**

Por tanto $x^3 - 3x + b = 0 \ \ \forall b$ como máximo tiene una raíz en $[-1,1]$.

Ejemplo.- ¿Cumple la función $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ x<4 \\ -x^2+10x-19 & si\ x\geq 4 \end{cases}$ las hipótesis del teorema del valor medio en $[2,6]$? ¿En que punto cumple la tesis?

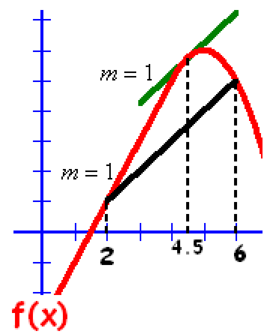
A) $f\ continua\ en\ [2,6]$, efectivamente pues es continua en $x=4$ ya que

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(2x-3)=5 \text{ y } \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(-x^2+10x-19)=5$$

B) $f\ derivable\ en\ (2,6)$, su función derivada en $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$ es:

$f'(x)=\begin{cases} 2 & si\ x<4 \\ -2x+10 & si\ x>4 \end{cases}$ Para $x=4$ f es derivable: $(f'(4)=2)$ ya que:

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x)=\lim_{x\to 4^-}(2)=2 \text{ y } \lim_{x\to 4^+} f'(x)=\lim_{x\to 4^+}(-2x+10)=2$$



$$\left.\begin{array}{l} f\ continua\ en\ [2,6] \\ f\ derivable\ en\ (2,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(2,6)\,/\, f'(c)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=1$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & si\ x<4 \\ -2x+10 & si\ x>4 \end{cases} \Rightarrow 1=-2c+10 \to c=\frac{9}{2}=4{,}5$$

Aplicaciones del teorema del valor medio.-

A lo largo del tema hemos visto propiedades como:

$$f \text{ creciente y derivable en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

En las que a partir de propiedades de la función se obtienen consecuencias sobre la derivada.

Hemos dejado sin demostrar otras como:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x_0$$

En las que a partir de alguna propiedad de la derivada obtenemos datos de la función. Con el teorema del valor medio se simplifican las demostraciones de este último tipo de teoremas.

Función constante.-

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ CONSTANTE en } [a,b]$$

Tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ del intervalo $[a,b]$

En $[x_1, x_2]$ se cumplen las condiciones del teorema del valor medio. Existe pues un

$c \in (x_1, x_2)$ tal que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x} = f'(c)$ y como $f'(c) = 0$ (hipótesis)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x} = 0 \rightarrow f(x_2) = f(x_1) \, \forall \, x_1, x_2 \in [a,b] \rightarrow f \text{ CONSTANTE}$$

Función creciente.-

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ CRECIENTE en } [a,b]$$

Hay que demostrar que si $x_1 < x_2 \; \forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Prácticamente se demuestra como el anterior. Hazlo tú.

Mínimo Relativo.-

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un MÍNIMO relativo en } x_0$$

$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} \overset{f'(x_0)=0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}>0$$

$$a)\ si\ h<0 \xrightarrow[\text{signo}]{\text{conservacón}} f'(x_0+h)<0 \xrightarrow[\text{decreciente}]{\text{función}} f \text{ decreciente izquierda de } x_0$$

$$b) si\ h>0 \xrightarrow[\text{signo}]{\text{conservacón}} f'(x_0+h)>0 \xrightarrow[\text{creciente}]{\text{función}} f \text{ creciente derecha } x_0$$

De a) y b) se deduce que f presenta un mínimo en x_0

5. Representación gráfica de funciones.-

A) <u>Representación gráfica defunciones polinómicas.-</u>

Para representar una función polinómica de grado mayor o igual que dos $y = f(x)$ hay que tener en cuenta que:

Son <u>derivables</u> y por tanto <u>continuas en todo</u> $\Re$. <u>No tienen asíntotas .</u>

Si solo tienen términos de grado par son simétricas respecto al eje Y.

Si solo tienen términos de grado impar son simétricas respecto al orígen.

<u>Para obtener su gráfica se puede pues proceder en este orden:</u>

1. *Se observa si tiene al gún tipo de simetría(eje Y o el orígen)*
2. *Se hallan sus dos ramas infinitas.*
3. *Se resuelve la ecuación* $f'(x)=0$ *para hallar las abscisas de los puntos singulares.A continuación obtenemos sus ordenadas.*

4. *Se unen los puntos obtenidos entre sí, cuidando de no dibujar otros puntos singulares que los ya obtenidos. Así se averigua cuales son los máximos y los mínimos relativos, así como los puntos de inflexión.*
5. *Si se puede , conviene obtener también, los puntos de corte con los ejes para conseguir mayor precisión en la representación.*

Ejemplo.-Dada la función polinómica: $f(x)=x^3-3x+2$ obtén su gráfica.

1. No tiene ningún tipo de simetría (tiene términos pares e impares)

2. Ramas infinitas: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, por tanto: $P(-1,4) \quad Q(1,0)$

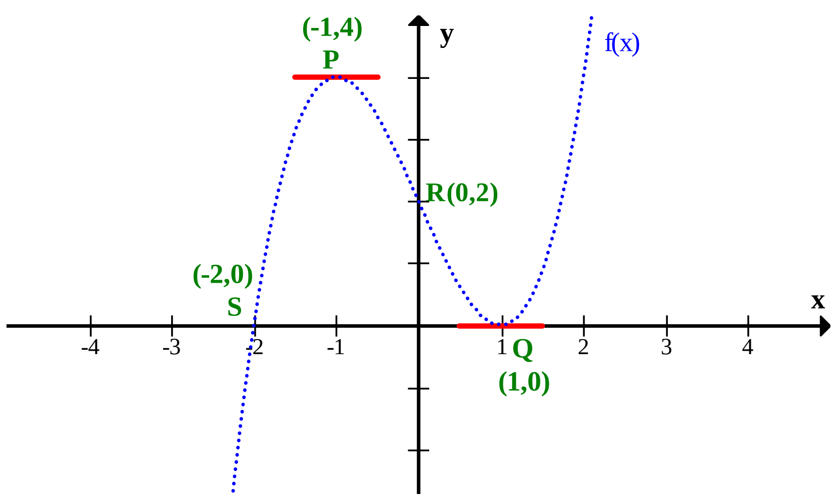
4. $P(-1,4) \quad Q(1,0)$ son los puntos singulares(de tangente horizontal)

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$ y como $f'''(x)=6 \Rightarrow R(0,2)$ inflexión

5. Para hallar los puntos de corte con el eje X resolvemos $x^3-3x+2=0$

Cortes con eje X son: $Q(1,0) \quad S(-2,0)$; Corte con eje Y es $R(0,2)$

Uniendo todos los puntos obtenidos podemos dibujar la gráfica de $f(x)$



B) <u>Representación gráfica de funciones racionales.-</u>

En las funciones racionales $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (cociente de dos polinomios) hay que prestar atención especial a los valores de x que anulan el denominador, no son de su dominio y en cada uno de ellos hay una asíntota vertical.

La función es derivable y por tanto,según sabemos, es continua en todos los puntos de $\Re$ que no anulan el denominador.

Dependiendo de los grados de $P(x)$ y de $Q(x)$ puede tener asíntota horizontal, oblicua o ninguna de ellas.

Si tiene asínt. horizontal u oblicua es la misma para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$

<u>Para obtener su gráfica se puede pues proceder en este orden:</u>

1. Se observa si tiene algún tipo de Simetría.
2. Cálculo de asínt.verticales ($Q(x)=0$) y posición respecto a la curva
3. *Si $\underline{gradoP(x) \leq gradoQ(x) \Rightarrow}$ **hay asíntota horizontal** (A.H.); si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)=a$ entonces la recta $y=a$ es A.H. *Si $\underline{gradoP(x)=gradoQ(x)+1 \Rightarrow}$ **hay asíntota oblicua**(A.O.); sabemos que la ecuación de una A.O. es de la forma $y=mx+n$ y se obtiene **como el**

Cociente de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Tanto si hay (A.H.) como (A.O.) se estudia la posición respecto a la curva de cada una de ellas tanto para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$. *Si $\underline{gradoP(x) > gradoQ(x)+1 \Rightarrow}$ **hay ramas parabólicas.**

4. Se estudian los puntos singulares, que los obtenemos como solución de la ecuación:($f'(x)=0$) y que según sabemos pueden ser máximos,mínimos o puntos de inflexión.
5. Por último podemos obtener también, para completar el estudio, los puntos de corte de la función con los ejes, así como los puntos de inflexión que son aquellos que se obtienen como solución de la ecuación:($f''(x)=0$).

Observación.- *Podríamos representar otro tipo de funciones, que no son ni polinómicas ni racionales, de las que habría que hacer un estudio más pormenorizado que el efectuado para las citadas anteriormente.*

Como los objetivos de las pruebas PAUU no contemplan expresamente este otro tipo de funciones, dejamos al interés personal el estudio de las mismas.

Al final del tema tienes un ejemplo de una de estas funciones.

Ejemplo.- Representa $a)\, f(x)=\frac{x^3}{1-x^2} \qquad b)\, f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím} \;\; f(x) = +\infty \\ \\ \text{lím} \;\; f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím} \;\; f(x) = +\infty \\ \\ \text{lím} \;\; f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \;\; \rightarrow \;\; y = -x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

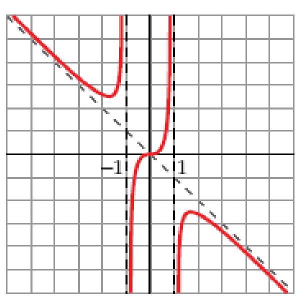
$$f'(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; x^2(-x^2 + 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ \end{array} \right.$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



$y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \quad \rightarrow \quad y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 10x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

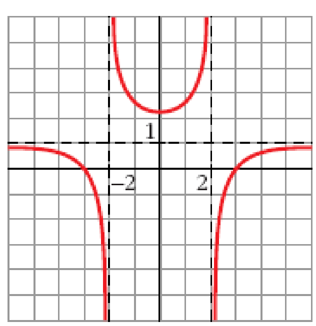
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{9}{4} \quad \rightarrow \quad$ Punto $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



__Ejemplo.-__ Representa gráficamente la función exponencial: $f(x)=e^{-x^2}$

Su dominio es todo $\Re$,esta función toma siempre valores positivos,es decir, su recorrido es $(0,+\infty)$.

Es una función simétrica respecto al eje Y pues: $f(x)=f(-x)$

Tiene una asíntota horizontal, de ecuación: $y=0$,puesto que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

Para hallar los puntos singulares : $f'(x)=0 \Rightarrow -2x.e^{-x^2}=0$ que tiene por solución $x=0$, el único punto singular es $P(0,e^0)=(0,1)$ este punto singular es un máximo relativo, para demostrarlo usamos el criterio del signo de la derivada segunda

$$f''(x)=-2.e^{-x^2}-2x(-2x.e^{-x^2})=(4x^2-2)e^{-x^2}$$

$f''(0)=-2<0$ y por tanto el punto $P(0,e^0)=(0,1)$ **es un máximo relativo**.

Para calcular los puntos de inflexión resolvemos la ecuación: $f''(x)=0$, es decir,

$$(4x^2-2)e^{-x^2}=0 \Rightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x\approx\pm0.7\,,\; f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.6$$

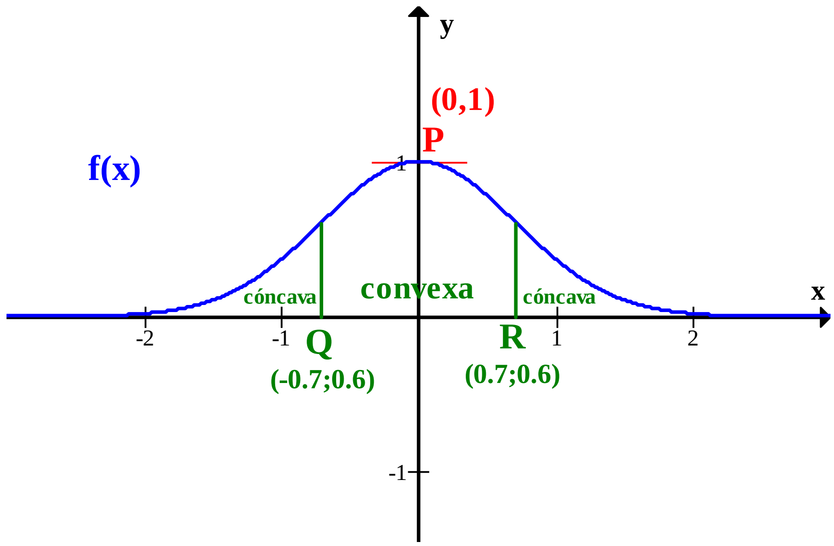
Para ver si son inflexión estudiamos la curvatura de la curva y obtenemos que:

$$en\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\; f(x)\; es\; cóncava\; pues\;\; f''(-1)=(4-2)e^{-1}=\frac{2}{e}>0$$

$$en\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\; f(x)\; es\; convexa\; pues\;\; f''(0)=(0-2)e^{0}=-2<0$$

$$en\left(\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)\; f(x)\; es\; cóncava\; pues\;\; f''(1)=(4-2)e^{-1}=\frac{2}{e}>0$$

Los puntos: $Q(-0.7;0.6)$ $\quad R(0.7;0.6)$ son puntos de inflexión.


y
(0,1)
P
f(x)
1
cóncava
convexa
cóncava
x
-2
-1
Q
R
1
2
(-0.7;0.6)
(0.7;0.6)
-1

UNIDAD IV CÁLCULO DE PRIMITIVAS

En la lección anterior hemos estudiado el problema siguiente:

"dada una función $f(x)$, ¿cual es su función derivada $f'(x)$?".

En esta lección nos planteamos resolver el problema inverso:

"dada una función $f(x)$, se desea hallar una función $F(x)$ cuya derivada sea igual a $f(x)$, es decir $D(F) = f$ ó $\int f = F$.

Observación.- en lugar de $\int f = F$ se suele utilizar $\int f(x)\,dx = F(x)$

A la función $F(x)$ se le denomina **primitiva** de la función $f(x)$

El cálculo de una primitiva es:

- sencilla para algunas funciones (tabla de primitivas inmediatas).
- difícil para otras (aprender técnicas de cálculo de primitivas).
- imposible para la mayoría (no toda función primitiva, aunque exista, puede expresarse mediante combinaciones, **en número finito**, de funciones elementales. Para calcular la primitiva de funciones como: $\frac{sen(x)}{x}; e^{-x^2}; \frac{1}{\ln(x)}$ hay que recurrir a las "series").

La derivada de la función x^2 (como ya sabes) es $2x$ Esto se expresa:

$$\boxed{D(x^2) = 2x \quad ó \quad (x^2)' = 2x}$$

Esto mismo se puede expresar diciendo que una primitiva de $2x$ es x^2.

$$\boxed{\int 2x\,dx = x^2}$$

Ejemplo.- Comprueba que las primitivas de las funciones son correctas. (Deriva el 2° miembro, ha de ser igual a la función bajo el signo integral)

$$a)\int 1\,dx = x \quad b)\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,x \quad c)\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 \quad d)\int \sqrt{2}\,x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$$

$$e)\int (-1)x^{-2}dx = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad e)\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x} \quad f)\int \frac{5}{x^3}dx = \frac{5}{-2}x^{-2} = \frac{-5}{2x^2}$$

$$g)\int \frac{5}{(x-3)^3}dx = \frac{5}{-2}(x-3)^{-2} = \frac{-5}{2(x-3)^2} \quad h)\int \frac{3}{2}x^{1/2} = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$$

$$i)\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \int \frac{3}{2}x^{1/2}dx = \sqrt{x^3} \quad j)\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\sqrt{x}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3}$$

$$k)\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \quad l)\int \frac{1}{5x}dx = \frac{\ln|5x|}{5} \quad m)\int \frac{1}{x+5}dx = \ln|x+5| \quad n)\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$p)\int \sin x\,dx = -\cos x \quad q)\int \sin(2x)\,dx = \frac{-\cos(2x)}{2} \quad r)\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

<u>Definiciones y Nomenclatura. Propiedades.-</u>

$F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si se cumple $F'(x) = f(x)$. Esto se expresa así:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)}$$

Ahora bien, cada función tiene **"infinitas" primitivas** pues:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo es $F(x)+k$; k es constante.

Efectivamente, siendo k cualquier constante, su derivada es cero, por tanto

$(F(x)+k)' = F'(x)+0 = f(x)$ así que $F(x)+k$ es primitiva de $f(x)$.

Por esta razón se suele escribir:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+k}$$

Por ejemplo las funciones del tipo $F(x) = sen(x) + k$ son primitivas de

$f(x) = \cos(x)$; ahora bien, ¿serán todas las primitivas de la función coseno de este tipo? La respuesta es afirmativa como se demuestra en el teorema:

<u>TEOREMA.-</u>

Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ sobre un intervalo I. Si $G(x)$ es otra

primitiva de $f(x)$ entonces $G(x) = F(x) + k$ (k constante).

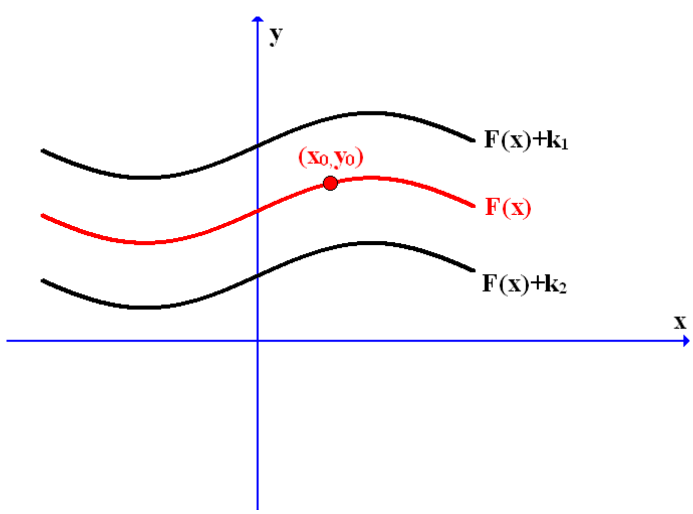
Efectivamente, puesto que $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ se tiene:

$$G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Pero si una función tiene derivada nula en un intervalo I, entonces es constante en dicho intervalo (consecuencia del teorema del valor medio)

así pues: $F(x) - G(x) = k$ ó $G(x) = F(x) + k$ como queríamos demostrar.

Este teorema prueba que, en esencia, todas las primitivas de una función son iguales; conocida una, conocidas todas. Geométricamente:



A la expresión $\int f(x)\,dx$ se le suele llamar **integral indefinida** de $f(x)$ y designa cualquier primitiva de $f(x)$ (que son infinitas). Si queremos precisar alguna de ellas, es necesaria alguna otra condición, por ejemplo que su gráfica pase por (x_0, y_0) (en la interpretación geométrica, la roja).

Observación.-

La parte $(x)\,dx$ del simbolismo $\int f(x)\,dx$ **no es imprescindible** y podríamos escribir solamente $\int f$ (como ya indicamos al principio de la lección).

Sirve, no obstante, para poner de manifiesto, en caso de duda, la variable independiente, de la función que se integra. Así, las expresiones:

$$A)\int \left(x^2+t\right)dx \quad B)\int \left(x^2+t\right)dt$$

son distintas. En la A), la "x" funciona como variable independiente y la "t" es constante, mientras que en la expresión B) se invierten los papeles.

Al cálculo de primitivas se le suele llamar **integración,** (en la siguiente lección justificaremos esta nomenclatura del cálculo de primitivas).

Propiedades de la integración.-

La linealidad de la derivada es una propiedad que se transmite de modo natural a la integración. Así se cumple: (siendo "c": constante cualquiera)

$$\boxed{\begin{array}{l} I)\int f+g=\int f+\int g \\ II)\int c.f=c.\int f \end{array}}$$

La propiedad I) nos dice que para obtener una primitiva de $f+g$ se suma una primitiva de f con otra de g

Esta propiedad indica la conveniencia de las sumas sobre los productos:

$$\int x(x-1)\,dx = \int (x^2-x)\,dx \overset{propiedad\ I}{=} \int x^2\,dx - \int x\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+k$$

La propiedad II) nos indica que las constantes (c) pueden “traspasar” el signo integral.

$$\int \frac{5(\cos x)}{3}\,dx \overset{propiedad\ II}{=} \frac{5}{3}\int \cos x\,dx = \frac{5}{3} sen(x)+k$$

Integrales Inmediatas.-

En el cálculo de primitivas es necesario, como ocurría con las derivadas, conocer de partida las de algunas funciones sencillas. Más adelante, las reglas de integración permiten avanzar en el cálculo de primitivas de funciones más complicadas.

Ahora bien, mientras que las reglas de derivación nos permiten hallar la derivada de cualquier combinación (suma, producto, composición) de las llamadas funciones elementales (polinomios, seno, logaritmo, exponencial).

Con la integración no podemos decir lo mismo, por ejemplo las funciones:

$f(x)=\dfrac{sen(x)}{x};g(x)=e^{-x^2};h(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$ no tienen primitivas expresables mediante combinaciones de funciones elementales.

Vamos a dar una tabla con las primitivas inmediatas, es decir, todas las que bajo el signo integral reconocemos (a simple vista) la derivada de una función conocida.

Tabla de primitivas inmediatas	
Potencias	$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k \quad (r \neq -1)$ $\int x^{-1}\ dx = \ln\lvert x\rvert + k$
Trigonométricas	$\int sen(x)\,dx = -\cos(x) + k; \quad \int \cos(x)\,dx = sen(x) + k$ $\int tg(x)\,dx = -\ln\lvert\cos(x)\rvert + k; \int \cot(x)\,dx = \ln\lvert sen(x)\rvert + k$ $\int (1 + tg^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg(x) + k$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ sen(x) + k; \ \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ \cos(x) + k$ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\ tg(x) + k$
Exponenciales y Logarítmicas	$\int e^x\ dx = e^x + k; \quad \int a^x\ dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + k$ $\int \ln(x)\,dx = x.\ln(x) - x + k; \ \int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln(a)}(x\ln(x) - x) + k$

Técnicas de Integración.-

Vamos a aprender **dos nuevas técnicas de integración** con las que mejoraremos nuestra destreza para determinar primitivas.

Previamente recordamos que,

si F una primitiva de $f \rightarrow D(F) = f$ ó $\int f = F$

Con esta notación para determinar una primitiva de f podemos escribir:

$$\boxed{\int D(F) = F}$$

Es decir, derivación e integración son procesos inversos, como ya habíamos dicho al principio de la lección.

Ahora vamos a darle sentido a la notación diferencial que usamos para calcular una primitiva de una función.

En la lección anterior hemos estudiado el concepto de **diferencial** de una función $f(x)$, que representamos como $df(x)$, y sabemos que:

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}$$

Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ sabemos que se cumple:

$$F'(x) = f(x) \text{ ó } \int f(x)\,dx = F(x)$$

Por otro lado para la diferencial de $F(x)$ escribimos:

$$dF(x) = F'(x)\,dx$$

En consecuencia tendremos:

$$\int dF(x) \overset{def\ diferencial}{=} \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx \overset{F\ primitiva\ f}{=} F(x)$$

Fijándonos en el primero y último términos de esta igualdad en cadena:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x)}$$

<u>O sea, la diferenciación y la integración son procesos inversos.</u>

Para mejorar la destreza en la determinación de primitivas, vamos a aplicar una técnica basada en la regla de la cadena del Cálculo Diferencial y en esta última fórmula:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x)}$$

.

Regla de la cadena en el cálculo de primitivas.-

La regla de la cadena para el cálculo de derivadas dice:

$$Si\ \phi(x) = g\left[f(x)\right] \xrightarrow{entonces} \phi'(x) = g'\left[f(x)\right].f'(x)$$

En notación diferencial se escribe así:

$$d\phi(x) = \phi'(x)\,dx = g'\left[f(x)\right].f'(x).dx$$

Por lo tanto se verifica que:

$$\int g'\left[f(x)\right].f'(x).dx = \int \phi'(x)\,dx = \int d\phi(x) \overset{\int dF(x)=F(x)+k}{=} \phi(x) + k = g\left[f(x)\right] + k$$

Quedándonos con el primero y últimos términos de la igualdad anterior:

$$\boxed{\int g'\left[f(x)\right].f'(x).dx = g\left[f(x)\right] + k}$$

Esta última igualdad nos va a permitir escribir una tabla en expresión compuesta de primitivas inmediatas.

Tabla en expresión compuesta de primitivas inmediatas	
Pot.	$\int f(x)^r . f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + k \quad (r \neq -1)$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + k$
Trig.	$\int sen(f(x)).f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + k; \quad \int \cos(f(x)).f'(x)\,dx = sen(f(x)) + k$ $\int tg(f(x)).f'(x)\,dx = -\ln\lvert\cos(f(x))\rvert + k; \int \cot(f(x)).f'(x)\,dx = \ln\lvert sen(f(x))\rvert + k$ $\int (1 + tg^2 f(x)).f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = tg(f(x)) + k$ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}.dx = arc\,sen(f(x)) + k; \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\,dx = arc\cos(f(x)) + k$ $\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,dx = arc\,tg(f(x)) + k$
Exp. y Log.	$\int e^{f(x)}.f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k; \quad \int a^{f(x)}.f'(x)\,dx = \frac{1}{\ln(a)} a^{f(x)} + k$ $\int \ln(f(x)).f'(x)\,dx = f(x).\ln(f(x)) - f(x) + k$ $\int \log_a(f(x)).f'(x)\,dx = \frac{1}{\ln(a)}[f(x).\ln(f(x)) - f(x)] + k$

Método de sustitución (o integración por cambio de variable).-

Queremos determinar una primitiva de la función $h(x)$, a la que llamamos I

Es decir, $I = \int h(x)\,dx$ que no es inmediata, pero somos capaces de reconocer que

$h(x) = f(g(x)).g'(x)$ (una función f ("en g") por la derivada de g)

Supongamos que resulta inmediato el cálculo de una primitiva (F) para la función f, o sea, que $\int f(t)\,dt = F(t)$.

En ese caso podemos calcular I haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{t = g(x) \quad \xrightarrow[\text{la diferencial}]{\text{calculando}} \quad dt = g'(x)\,dx}$$

Ahora podemos calcular I

$$I = \int h(x)\,dx = \int f(g(x)).g'(x)\,dx \overset{\substack{\text{cambio}\\ \text{variable}\\ t=g(x)}}{=} \int f(t)\,dt \overset{\substack{F \text{ primitiva}\\ \text{de } f}}{=} F(t) \overset{\substack{\text{vuelta}\\ \text{variable}\\ \text{inicial}}}{=} F(g(x))$$

Este es el método de cálculo de primitivas más usado. Incluso cuando usamos algún otro método, frecuentemente estamos obligados a recurrir en las operaciones intermedias al cambio de variable. El éxito de la integración depende esencialmente de la habilidad en elegir la sustitución adecuada.

Ejemplo.-

Aplica el método de sustitución para calcular las integrales:

$$A)\int sen^4 x \cos x\,dx \overset{\substack{t=senx\\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int t^4 dt \overset{inmediata}{=} \frac{t^5}{5} \overset{t=senx}{=} \frac{sen^5 x}{5} + k$$

$$B)\int sen(x)\cos(x)\,dx \overset{\substack{t=sen(x)\\ dt=\cos(x)\,dt}}{=} \int t\,dt \overset{inmediata}{=} \frac{t^2}{2} = \frac{sen^2 x}{2} + k$$

$$C)\int tg(x)\,dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx \overset{\substack{t=\cos(x)\\ dt=-sen(x)\,dx}}{=} \int \frac{-dt}{t} \overset{inmediata}{=} -\ln|t| = -\ln|\cos(x)| + k$$

$$D)\int sen(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int sen(2x).2\,dx \overset{\substack{t=2x\\ dt=2dx}}{=} \frac{1}{2}\int sen(t)\,dt \overset{inmediata}{=} \frac{1}{2}(-\cos(t)) \overset{t=2x}{=} -\frac{1}{2}\cos(2x) + k$$

$$E)\int e^{3x+1}dx \overset{\substack{t=3x+1\\dt=3dt}}{=} \int e^t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt \overset{inmediata}{=} \frac{1}{3}.e^t = \frac{e^{3x+1}}{3} + k$$

$$F)\int 2^{senx}\cos x\, dx \overset{\substack{t=senx\\dt=\cos x\, dx}}{=} \int 2^t dt \overset{inmediata}{=} \frac{1}{\ln 2}2^t = \frac{2^{senx}}{\ln 2} + k$$

$$G)\int e^{\left(x^2-5x\right)}(2x-5)dx \overset{\substack{t=x^2-5x\\dt=(2x-5)dx}}{=} \int e^t dt \overset{inmediata}{=} e^t = e^{x^2-5x} + k$$

$$H)\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x-1}} \overset{\substack{t=\sqrt{x-1}\\dt=\frac{dx}{2t}}}{=} \int \frac{\left(t^2+1\right)2t\, dt}{t} = 2\int \left(t^2+1\right)dt \overset{\substack{integral\\suma}}{=} 2\left[\int t^2 dt + \int 1\, dt\right] =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} + t\right] = \frac{2}{3}t^3 + 2t = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 2\sqrt{x-1} + k$$

$$I)\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \overset{\substack{t=\sqrt{x}\\dt=\frac{dx}{2t}}}{=} \int \frac{2t\, dt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} \overset{\substack{z=t+1\\dz=dt}}{=} 2\int \frac{dz}{z} \overset{inmediata}{=} 2\ln|z| = 2\ln|t+1| =$$

$$= 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + k$$

Vamos a calcular por sustitución dos integrales que no son inmediatas pero que convendría memorizar por resultar de uso muy frecuente.

$$J)\int \frac{dx}{x^2+m^2} \overset{\substack{x=mt \\ dx=mdt}}{=} \int \frac{m\,dt}{(mt)^2+m^2} = \int \frac{m\,dt}{m^2(t^2+1)} = \frac{1}{m}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{m} arctg(t) \overset{t=\frac{x}{m}}{=} \frac{1}{m} arctg\left(\frac{x}{m}\right) + k$$

$$K)\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}} \overset{\substack{preparar \\ \text{integrando}}}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{m^2\left(1-\left(\frac{x}{m}\right)^2\right)}} = \frac{1}{m}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{m}\right)^2}} \overset{\substack{t=\frac{x}{m} \\ dt=\frac{dx}{m}}}{=} \frac{1}{m}\int \frac{m\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{m}{m}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \overset{inmediata}{=} arcsen(t) = arcsen\left(\frac{x}{m}\right) + k$$

$$\boxed{J)\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m} arctg\left(\frac{x}{m}\right) + k \qquad K)\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}} = arcsen\left(\frac{x}{m}\right) + k}$$

Si memorizamos estas dos integrales podemos añadirlas a la tabla de inmediatas, ya que aparecen frecuentemente en el cálculo de primitivas.

Método de integración “por partes”.-

Recordamos la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones

$$(u(x).v(x))' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

En notación diferencial se escribe así:

$$d\left(u(x)v(x)\right)=du(x).v(x)+u(x).dv(x)$$

Si despejamos el último sumando de la igualdad anterior queda:

$$u(x).dv(x)=d\left(u(x)v(x)\right)-v(x)du(x)$$

Si integramos los dos miembros, y por la linealidad de la integración:

$$\boxed{\int u(x).dv(x)=u(x).v(x)-\int v(x).du(x)}$$

Esta fórmula permite calcular la integral $\int u(x).dv(x)$ a partir de la integral

$\int v(x).du(x)$ Para poder utilizarla hemos de reconocer que la integral que se formula es de la forma: $\int u(x).dv(x)$ y apreciar que la integral $\int v(x).du(x)$ resulta más accesible que la anterior.

En general esta fórmula de integración es útil cuando hay que integrar producto de funciones algebraicas y no algebraicas.

Ejemplo.-

$$A)\int x.e^x dx;\begin{cases} u(x)=x\rightarrow du(x)=1.dx \\ dv(x)=e^x dx\rightarrow v(x)=e^x \end{cases}\rightarrow\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+k$$

$$B)\int \ln(x)dx;\begin{cases} u(x)=\ln(x)\rightarrow du(x)=\frac{1}{x}dx \\ dv(x)=dx\rightarrow v(x)=x \end{cases}\rightarrow\int \ln(x).dx=x.\ln(x)-\int x.\frac{1}{x}dx=$$

$$=x.\ln(x)-\int 1.dx=x.\ln(x)-x+k$$

La integral que vemos a continuación se resuelve "por partes" de un modo sencillo, (se podría resolver usando otro método de un modo más arduo).

$$C)\int arctgx.\,dx;\begin{cases} u(x)=arctgx \rightarrow du(x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv(x)=1.dx \rightarrow v(x)=x \end{cases} \rightarrow \int arctgx\,.dx = x.arctgx-\int \frac{x.dx}{1+x^2}=$$

$$= x.arctgx-\frac{1}{2}\int \frac{2x.dx}{1+x^2}=x.arctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+k$$

A veces ha de utilizarse este método de integración reiteradamente:

$$D)I=\int x^2 senx\,dx;\begin{cases} u(x)=x^2 \rightarrow du(x)=2xdx \\ dv(x)=senx\,dx \rightarrow v(x)=-\cos x \end{cases} \rightarrow I=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$$

$$I_1=\int 2x\cos x\,dx;\begin{cases} u(x)=2x \rightarrow du(x)=2dx \\ dv(x)=\cos x\,dx \rightarrow v(x)=senx \end{cases} \rightarrow I_1=2xsenx-\int 2senx\,dx=$$

$$=2xsenx+2\cos x+k$$

La integral de partida $I=\int x^2 senx\,dx$ es suma de: $I=-x^2\cos x+I_1$ es decir

$$\int x^2 senx\,dx=-x^2\cos x+2xsenx+2\cos x+k$$

$$E)I=\int e^x\cos x\,dx;\begin{cases} u(x)=\cos x \rightarrow dx=-senx\,dx \\ dv(x)=e^x dx \rightarrow v(x)=e^x \end{cases} \rightarrow I=e^x\cos x+\int e^x senx\,dx$$

$$I_1=\int e^x senx\,dx;\begin{cases} u(x)=senx \rightarrow du(x)=\cos x\,dx \\ dv(x)=e^x dx \rightarrow v(x)=e^x \end{cases} \rightarrow I_1=e^x senx-\int e^x\cos x\,dx$$

$$I_2=\int e^x\cos x\,dx=I$$

Como vemos la última integral I_2 es igual a la de partida $I=\int e^x\cos x\,dx$

$$I = e^x \cos x + I_1 = e^x \cos x + e^x senx - I_2 = e^x \cos x + e^x senx - I$$

$$2I = e^x \cos x + e^x senx \rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + senx)$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(\cos x + senx) + k$$

Por último, a veces el método es recurrente (integración por reducción):

$$F) I_3 = \int (\ln x)^3 dx; \begin{cases} u(x) = (\ln x)^3 \rightarrow du(x) = \frac{3}{x}(\ln x)^2 dx \\ dv(x) = dx \rightarrow v(x) = x \end{cases} \rightarrow I_3 = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx$$

$$I_2 = \int (\ln x)^2 dx; \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \rightarrow du(x) = \frac{2}{x} \ln x \\ dv(x) = dx \rightarrow v(x) = x \end{cases} \rightarrow I_2 = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \, dx$$

$$I_1 = \int \ln x \, dx \overset{\substack{resuelta \\ en\ B)}}{=} x \ln x - x$$

$$I_3 = x(\ln|x|)^3 - 3\left[x(\ln|x|)^2 - 2(x \ln|x| - x)\right] + k$$

$$\int (\ln x)^3 dx = x(\ln|x|)^3 - 3x(\ln|x|)^2 + 6x \ln|x| - 6x + k$$

Integración de funciones racionales.-

Las funciones racionales se expresan como cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$

En este apartado vamos a estudiar como se integran estas funciones.

Si el grado del polinomio $P(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$ se efectúa la división y se puede escribir:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} \quad grado(H(x)) < grado(Q(x))$ y resulta que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{H(x)}{Q(x)}dx$$

Como C(x) es un polinomio su integración es inmediata. El problema se reduce pues a integrar una función racional del tipo: $\int \frac{H(x)}{Q(x)}dx$

El método para calcular este tipo de integrales se basa en descomponer la función racional

$\frac{H(x)}{Q(x)}$ $grado(H(x)) < grado(Q(x))$

en fracciones sencillas cuya integración es inmediata.

Esta descomposición en fracciones sencillas viene condicionada por el tipo de raíces del denominador $Q(x)$.

<u>Se presentan varios casos que vamos a analizar con ejemplos:</u>

A) <u>Si el denominador $Q(x)$ tiene solamente raíces reales "simples</u>".

Calcula:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad \begin{cases} P(x)=1 \\ Q(x)=x^2-4=(x-2)(x+2) \rightarrow Raíces\ Q(x)=\{2,-2\} \quad simples \end{cases}$$

La descomposición en fracciones simples, en este caso, es de la forma:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Para determinar el valor de "A" y de "B" operamos las fracciones:

$$1 = A(x+2) + B(x-2)$$

Dando a “x” los valores de las distintas raíces, en la igualdad anterior obtenemos los valores de los coeficientes: “A” y “B”.

$$x = 2 \to 1 = A(2+2) + B(2-2) \to 1 = 4A \to A = \frac{1}{4}$$

$$x = -2 \to 1 = A(-2+2) + B(-2-2) \to 1 = -4B \to B = \frac{-1}{4}$$

Ahora ya podemos escribir la igualdad:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1/4}{x-2} + \frac{-1/4}{x+2}$$

Por tanto la integral pedida se puede calcular como suma de dos inmediatas:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1/4}{x-2}dx + \int \frac{-1/4}{x+2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}dx = \frac{1}{4}\ln(x-2) - \frac{1}{4}\ln(x+2) + k$$

B) <u>Si el denominador $Q(x)$ tiene raíces reales “múltiples”.</u>

En este caso las raíces múltiples darán lugar a tantas fracciones simples, con denominadores de grados decrecientes, como su multiplicidad.

Calcula:

$$\int \frac{3x^2-2x+4}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}dx \begin{cases} P(x) = 3x^2-2x+4 \\ Q(x) = (x-1)^3(x+2) \to Raíces\ Q(x) = \{1,-2\} \end{cases}$$

Las raíces de $Q(x)$ son dos una triple que es -1 y otra simple que es -2.

La descomposición en fracciones simples es, en este caso, la siguiente:

$$\frac{3x^2-2x+4}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x+2)}$$

Para determinar los valores de los coeficientes A, B, C:

1. multiplicamos los dos miembros por $(x-1)^3$, obtenemos: (i)

$$(i)\quad \frac{3x^2-2x+4}{(x+2)} = A + B(x-1) + C(x-1)^2 + \frac{D(x-1)^3}{(x+2)}$$

Sustituimos la "x" por 1 en los dos miembros de (i) y obtenemos:

$$x=1 \to \frac{5}{3} = A + 0 + 0 + 0 \to A = \frac{5}{3}$$

2. derivamos la expresión (i) y sustituimos por $x=1$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x^2-2x+4}{x+2}\right]_{x=1} = \left[\frac{3x^2+12x-8}{(x+2)^2}\right]_{x=1} = \frac{7}{9} = B \to B = \frac{7}{9}$$

3. derivamos otra vez y sustituimos por $x=1$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{3x^2-2x+4}{x+2}\right]_{x=1} = \left[\frac{(x+2)^2(6x+12)-(3x^2+12x-8)2(x+2)}{(x+2)^4}\right]_{x=1} =$$

$$= \frac{40}{27} = 2C \to C = \frac{40}{54}$$

Para obtener el valor del coeficiente D:

- multiplicamos los dos miembros por $(x+2)$, obtenemos: (ii)

$$(ii)\quad \frac{3x^2-2x+4}{(x-1)^3} = \frac{A(x+2)}{(x-1)^3} + \frac{B(x+2)}{(x-1)^2} + \frac{C(x+2)}{(x-1)} + D$$

Sustituimos la x por -2 en los dos miembros de (ii) y obtenemos:

$$x=-2\rightarrow\frac{-20}{27}=0+0+0+D\rightarrow D=\frac{-20}{27}$$

Así pues la integral pedida, se resuelve como suma de cuatro inmediatas:

$$\int\frac{3x^2-2x+4}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}dx=\int\frac{5/3}{(x-1)^3}dx+\int\frac{7/9}{(x-1)^2}dx+\int\frac{20/27}{(x-1)}dx+\int\frac{-20/27}{(x+2)}dx=$$
$$=\frac{5}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)(x-1)^{-2}+\frac{7}{9}(-1)(x-1)^{-1}+\frac{20}{27}\ln|x-1|-\frac{20}{27}\ln|x+2|+k=$$
$$=\frac{-5}{6(x-1)^2}+\frac{-7}{9(x-1)}+\frac{20}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+k$$

C) <u>Si el denominador $Q(x)$ tiene raíces complejas conjugadas simples</u>.

Este caso es algo complicado, de ahí que se propone como ampliación.

Todo polinomio de coeficientes reales, si tiene la raíz compleja: $a+bi$ también tiene la raíz conjugada $a-bi$

También es importante señalar la siguiente igualdad:

$$\boxed{(x-(a+bi))(x-(a-bi))=(x-a)^2+b^2}$$

Cuando el denominador $Q(x)$ tiene raíces complejas conjugadas simples, la fracción correspondiente al binomio cuadrático $(x-a)^2+b^2$ de las dos raíces complejas conjugadas es de la forma:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

Calcula:

$$\int\frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}dx\begin{cases}Q(x)=(x^2-2x+10)(x-1)=\left[(x-1)^2+3^2\right](x-1)\\ Raíces\ Q(x)=\{1+3i;1-3i;1\}\end{cases}$$

Por tanto según lo dicho más arriba tenemos la descomposición: $(*)$

$$(*)\ \frac{3x-2}{\left[(x-1)^2+3^2\right](x-1)}=\frac{Mx+N}{(x-1)^2+3^2}+\frac{A}{x-1}$$

Para determinar los valores de "M" y "N":

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad $(*)$ por $(x-1)^2+3^2$

$$\frac{3x-2}{x-1}=Mx+N+\frac{A\left[(x-1)^2+3^2\right]}{(x-1)}$$

Sustituyendo en esta última expresión por $x=1+3i$

$$x=1+3i\rightarrow\frac{1+9i}{3i}=(3M)i+M+N\rightarrow 1+9i=3(M+N)i-9M$$

Resolviendo el sistema: $\left.\begin{cases}1=-9M\\ 9=3(M+N)\end{cases}\right\}\rightarrow\begin{cases}M=\dfrac{-1}{9}\\ N=\dfrac{28}{9}\end{cases}$

Para determinar el valor de "A":

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad $(*)$ por $(x-1)$

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2+3^3}=\frac{(Mx+N)(x-1)}{(x-1)^2+3^2}+A$$

Sustituyendo en esta última expresión por $x=1$

$$x=1\rightarrow\frac{1}{9}=0+A\rightarrow A=\frac{1}{9}$$

Así pues la integral pedida, se resuelve como suma de dos:

$$\int\frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}dx=\int\frac{\left(-1/9\right)x+28/9}{(x-1)^2+3^2}dx+\int\frac{1/9}{x-1}dx=\frac{1}{9}\int\frac{-x+28}{(x-1)^2+3^2}dx+\frac{1}{9}\ln(x-1)+k$$

La integral: $\int\frac{-x+28}{(x-1)^2+3^2}dx$ se resuelve por sustitución: $x=1+3t$

$$\int\frac{-x+28}{(x-1)^2+3^2}dx\overset{\substack{x=1+3t\\dx=3dt}}{=}\int\frac{-t+9}{t^2+1}dt=\frac{-1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt+9\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{-1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+9arctg(t)=$$

$$=\frac{-1}{2}\ln\left(\frac{x^2-2x+10}{9}\right)+9\,arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)$$

Por tanto la integral inicial es:

$$\int\frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}dx=\frac{1}{9}\left[\frac{-1}{2}\ln\left(\frac{x^2-2x+10}{9}\right)+9\,arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)\right]+\frac{1}{9}\ln(x-1)+k=$$

$$=\frac{-1}{18}\ln\left(\frac{x^2-2x+10}{9}\right)+arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)+\frac{1}{9}\ln(x-1)+k$$

Integral Definida. Aplicaciones

<u>Objetivos Mínimos</u>

-Conocer la definición de integral de una función continua en un intervalo. Relación de la integral con el área encerrada por la curva con el eje X entre las abscisas x=a y x=b.

- Conocer las principales propiedades de la integral dándoles una intuitiva interpretación geométrica.

- Descubrir la estrecha relación entre integración y derivación.

El Teorema fundamental del cálculo integral y Regla de Barrow.

-Aplicar el cálculo integral en la determinación de

1. área encerrada entre dos curvas.
2. volúmen de un cuerpo de revolución (secciones planas).
3. longitud de un arco de curva.
4. trabajo realizado por una fuerza variable.
5. la integral en el estudio del movimiento de un punto.

Introducción.-

En el siglo III a.C el gran matemático Arquímedes obtuvo el área de algunos recintos curvos (círculo, segmento parabólico...) mediante un método, que contenía la idea no precisada del paso al límite, cuyo proceso fundamental se puede expresar así:

"para hallar un área desconocida es preciso aproximarla por exceso y por defecto, cada vez con más aproximación, sumando áreas conocidas de "infinitos" trozos de área prácticamente nula".

De forma similar, otro gran matemático como Kepler (siglo XVII), obtuvo la longitud de algunas curvas y el volúmen de cuerpos de revolución.

Basándose en la idea esbozada por el gran Arquímedes, cada uno de estos problemas (áreas curvilíneas, longitudes de curvas, volúmenes,....) necesitó un procedimiento específico de resolución.

El primer paso de unificación del enfoque de estos problemas fué advertir que todos ellos podían expresarse de la misma forma:

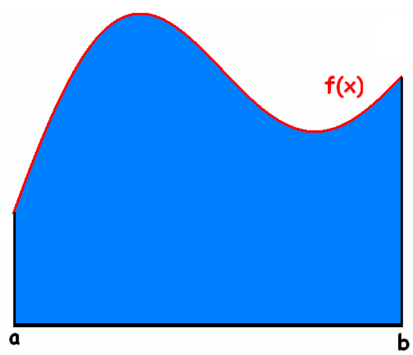
(I) "cálculo del **área encerrada** entre una **cierta curva** $y = f(x)$ y el eje X"

Gracias al genio de matemáticos como Newton, Leibniz o Barrow (s.XVII) este problema (I) encontró solución en el cálculo infinitesimal:

"el área bajo una curva $y = f(x)$ se obtiene a partir de una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$ es decir, F es una primitiva de f $(F' = f)$."

Esta última relación llamada Teorema fundamental del cálculo Infinitesimal, está considerado por muchos científicos como uno de los resultados más importantes en toda la Historia de las Matemáticas.

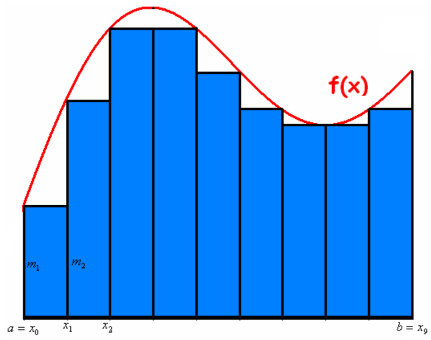
Aproximación al valor del área bajo una curva.-



Si conocemos la ecuación de una curva $y = f(x)$ que toma valores no negativos.

¿Cómo calculamos el área del recinto entre la curva, el eje X y dos abscisas $x = a$ y $x = b$?

Una idea consiste en dividir $[a, b]$ en tramos (no necesariamente iguales) y aproximar el área mediante rectángulos sobre el eje X.



Aproximación por defecto

Si dividimos el intervalo en 9 trozos iguales tales que:

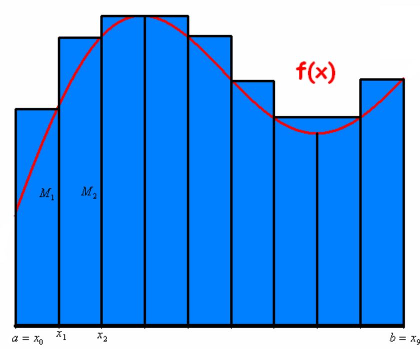
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x_9 = b$$

Si llamamos m_i al menor valor que toma la función en el tramo $[x_{i-1}, x_i]$ el área coloreada es:

$$m_1(x_1 - x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + m_9(x_9 - x_8)$$

Este área es menor (o como mucho igual) que el área buscada

Nos aproximamos por defecto al área



Aproximación por exceso

Si dividimos el intervalo en 9 trozos iguales tales que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x_9 = b$$

Si llamamos M_i al mayor valor que toma la función en el tramo $[x_{i-1}, x_i]$ el área coloreada es:

$$M_1(x_1 - x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + M_9(x_9 - x_8)$$

Este área es mayor (o como poco igual) que el área buscada.

Nos aproximamos por exceso al área buscada.

Evidentemente, si hacemos que los valores x_i estén cada vez más próximos, es decir, que la división del intervalo $[a, b]$ sea cada vez más fina, tanto el área por defecto como el área por exceso se aproximan cada vez más al verdadero valor del área del recinto

1. Concepto de Integral de una función continua.-

Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ El área entre la gráfica de f el eje x y las abscisas $x = a \;\; y \;\; x = b$ le llamamos

Integral entre $a \quad y \quad b$ **de** f **y se representa por** $\int_a^b f \quad o \quad \int_a^b f(x)\,dx$

El papel de la variable x en estas expresiones es irrelevante, ya que esta expresión no depende de x, el valor sería el mismo si en lugar de x pusiésemos otra variable (se dice que x es una variable muda).

¿Cómo calculamos esta área?

El proceso se basa en la idea que hemos visto anteriormente para aproximar el área bajo una curva.

A cada colección de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots\dots\; \dots\dots < x_n = b$

le llamaremos partición de $[a,b]$.

La mayor de las distancias $x_i - x_{i-1}$ le llamamos **diámetro** de la partición.

A cada partición P de $[a,b]$ le asociamos un área por defecto s y otra por exceso S tales que: $s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ y $S = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

Para una sucesión de particiones de $[a,b]$: $P_1, P_2, P_3 \dots\dots\dots,\; P_k \dots\dots$

le corresponde dos sucesiones de áreas:

$$s_1, s_2, s_3, \dots\dots\dots, s_k \dots\dots\dots (\text{áreas por defecto})$$
$$S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_k \dots\dots\dots (\text{áreas por exceso})$$

Los diámetros de las particiones tienden a cero y las diferencias:

$$S_1 - s_1, S_2 - s_2, \ldots\ldots\ldots \ldots, S_k - s_k \ldots\ldots\ldots$$

tienden a cero (necesitaría una demostración matemática rigurosa)

Por tanto las dos sucesiones tienden al área buscada pues:

$$\left.\begin{array}{l} s_k \leq \int_a^b f \leq S_k \\ S_k - s_k \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s_k \to \int_a^b f \\ S_k \to \int_a^b f \end{array}\right.$$

Si ambas sucesiones tienden a esa área también lo hará cualquier otra sucesión cuyos términos se formen del siguiente modo:

$$s_k^* = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad c_i \in (x_i, x_{i-1}) \qquad pues \quad s_k \leq s_k^* \leq S_k$$

Si la función f fuese negativa en el intervalo $[a,b]$, el proceso anterior para calcular el área del recinto determinado por f y el eje X entre las abscisas $x = a \;\; y \;\; x = b$ nos llevaría a un número negativo.

La idea de integral de una función continua para una función cualquiera (positiva o negativa) es la misma que se explicó para una función positiva.

Este proceso de cálculo nos lleva a determinar el área comprendida entre la función f y el eje X de modo que se valoren adecuadamente los recintos de área positiva y los de área negativa.

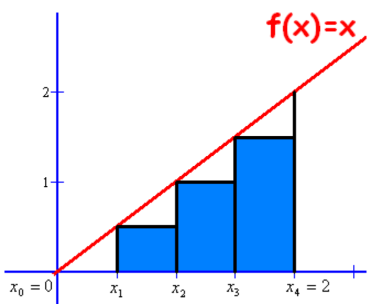
Conclusión.-(cálculo de la integral de una función continua)

Si f es una función continua en $[a,b]$,para calcular el área $\int_a^b f$ procedemos:

- definir una sucesión de particiones $P_1, P_2, P_3 ....,\ P_k ......$ tales que la distancia entre cada dos puntos consecutivos tienda a cero $(si\ n \to \infty)$
- tomar un punto c_i en cada subintervalo (x_i, x_{i-1})
- obtener el término general de la sucesión $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$
- calcular el área como límite de esa sucesión: $\lim_{n\to\infty}(s_n) = \int_a^b f$

Ejemplo.-

Calcula $\int_0^2 x\,dx$ como límite de las sumas de las áreas de rectángulos.



Dividimos $[0,2]$ en n partes iguales, sea la partición

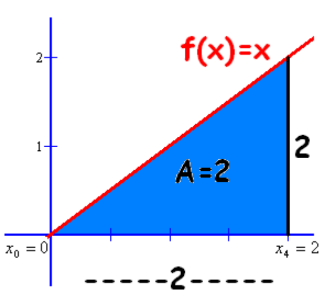
$$P = \{0 = x_0, x_1, ..., x_n = 2\}$$

$$x_i = x_0 + \frac{2i}{n} = 0 + \frac{2i}{n} = \frac{2i}{n} \text{ tomamos } c_i = x_i$$

$$f(c_i) = c_i = x_i = \frac{2i}{n} \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n}\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\int_0^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\left(\frac{1+n}{2}\right)n = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n}{2n^2} = 2$$



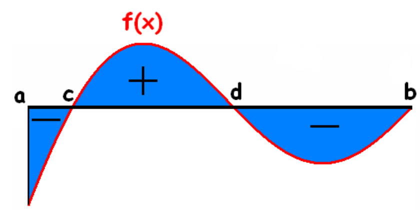
Observa que la función continua $f(x) = x$ con el eje X en el intervalo $[0,2]$ forma una región triangular de base 2 y altura 2 cuya area es:

$$A = \frac{base.altura}{2} = \frac{2.\,2}{2} = 2\,u^2$$

2. Propiedades de la Integral.-

La definición de integral de una función como el área de un determinado recinto, nos va a permitir establecer unas propiedades de la integral muy intuitivas y razonables desde un punto de vista geométrico.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ para cualquier función f Ésto es evidente pues el área de ese recinto es nula.



2. f continua en $[a,b]$ y

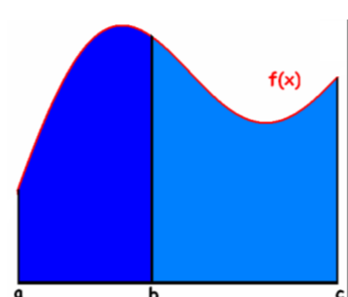
$f(x) > 0\ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$

f continua en $[a,b]$ y $f(x) < 0\ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < 0$ La definición de integral que hemos dado garantiza esos resultados

Si la función f cambiase de signo en el intervalo $[a,b]$ el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ nos da la suma algebraica de las áreas de los recintos situados por encima y por debajo del eje X. Por ello para calcular el área en términos absolutos, hay que calcular el área de cada recinto y antes de sumarlas cambiar el signo de las áreas de los recintos situados por debajo del eje X.En el ejemplo de arriba vemos que la función f determina tres recintos con el eje X, uno de área positiva entre c y d y dos de área negativa entre a y c y entre d y b respecivamente.

3. Si $a < b < c$ y f es una función continua en $[a,c]$ entonces:

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$



El resultado es evidente desde un punto de vista geométrico pues, la suma del área del recinto entre a y b y el área del recinto entre b y c es igual al área del recinto entre a y c.

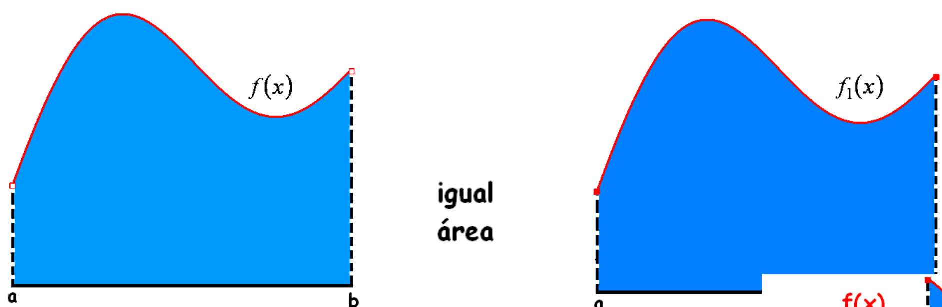
4. Si f es una función continua en (a,b) y existen y son finitos los límites laterales

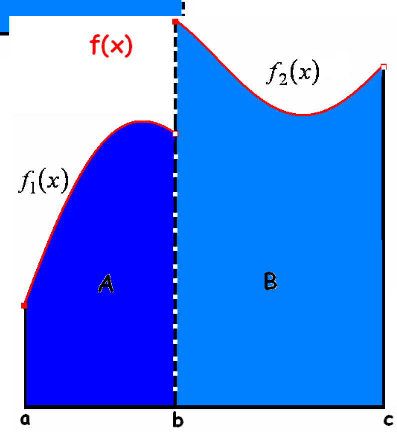
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\alpha$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\beta$ entonces la función definida por

$f_1(x)=\begin{cases}\alpha & si\ x=a\\ f(x) & si\ a<x<b\\ \beta & si\ x=b\end{cases}$ es continua en $[a,b]$. **Definimos**:

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx$ Gráficamente

el área del recinto determinado por f es la misma que el área del recinto determinado por f_1. Observa las gráficas:





5. La aplicación de las propiedades (3 y 4) a funciones **continuas a trozos** con la condición de que no tengan ramas infinitas (es decir,funciones con un número finito de discontinuidades de salto finito) amplía la definición de integral a estas funciones.

Fíjate en la función f dada al lado, el valor del área del recinto encerrado por f con el eje X entre las abscisas $x=a$ y $x=c$ es igual a la suma del área del recinto encerrado por f entre $x = a$ y $x = b$ (A) y del área del recinto encerrado por f entre $x = b$ y $x = c$ (B).

Si $f(x)$ tiene dos discontinuidades, una en $x = b$ y otra en $x = c$ tal que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \alpha$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \beta$ definimos las funciones continuas f_1 y f_2:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) \; si \; a \le x < b \\ \alpha \quad si \; x = b \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x) \; si \; b \le x < c \\ \beta \quad si \; x = c \end{cases}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx \underset{(3)}{=} \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \underset{(4)}{=} \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx$$

Propiedades de linealidad de la integral:

La intagral se comporta respecto de la suma de funciones y del producto de una constante por una función igual que la derivada:

6. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

7. $\int_a^b c.(f)(x)\,dx = c.\int_a^b f(x)\,dx \quad c \in \Re$

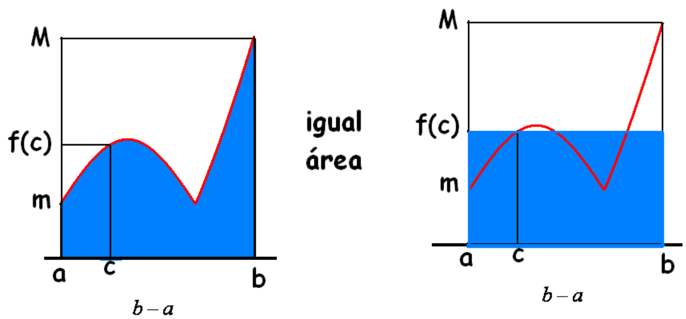
Otra propiedad geométricamente evidente es la siguiente:

8. $si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Teorema del valor medio del cálculo integral

9. Sea f una función continua en $[a,b]$ entonces existe un $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



Geométricamente significa que el área del recinto encerrada por la función f y el eje X entre x=a y x=b tiene un valor igual al área del rectángulo de base (b-a) y altura f(c).

Demostración.-

Aplicamos Weierstrass: f continua en $[a,b]$ alcanza el valor máximo y mínimo en dicho intervalo, es decir, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$.

Por la propiedad (8) anterior tenemos: $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M.(b-a) \xrightarrow[\text{por} \quad (b-a)]{\text{dividimos}} m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Aplicamos Darboux: f continua en $[a,b]$, $k = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx, (m \leq k \leq M)$

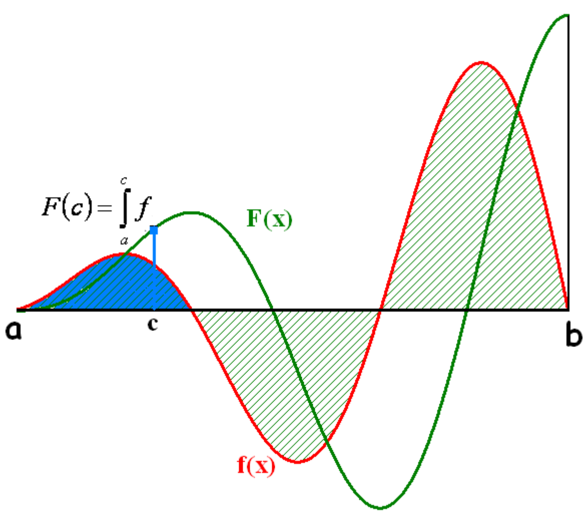
Existe un $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c).(b-a)$

3. Relación de la integral con la derivada.(T.Fundamental).-

En la introducción al tema ya indicamos la estrecha relación que existe entre la integración (cálculo del área bajo una curva) y derivación.

Vamos a establecer esa relación con cierto rigor matemático.

Función área.-



Dada una función f continua en $[a,b]$ para cada número $c \in [a,b]$ podemos calcular $\int_a^c f(t)\,dt$ que sabemos determina el área del recinto bajo la función f entre $t = a$ y $t = c$.

Definimos una función F que para cada punto variable $x \in [a,b]$ nos da el área bajo la función f entre a y x, es decir:

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

Cuanto mayor sea f más rápidamente crece el área debajo de ella (F) y por tanto mayor será también su derivada F'.

Cuando f sea negativa, el área bajo f es un número negativo, por lo tanto F decrece y su derivada (F') es negativa.

Vamos a precisar esta relación tan estrecha entre f y F'

Teorema Fundamental del cálculo infinitesimal.-

Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$,definida en dicho intervalo, es derivable y: $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

Antes de dar la demostración de este teorema vamos a interpretarlo.

La función área $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ **es una primitiva de la función** $f(x)$**,** o sea, queda establecida la relación entre el **cálculo integral** (área bajo una curva) y la **derivación** (la función área es una primitiva de f que define la curva).

De ahí que al cálculo de primitivas también se le llame cálculo integral y que se utilice la notación $\int f(x)\,dx$ para designar una primitiva de $f(x)$.

Demostración.-

Sabemos que: $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Por otro lado sabemos que:

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f-\int_a^x f=\int_x^{x+h} f$$

Como f es continua en $[x,x+h]$ según el teorema valor medio C Integral(9) existe un $c\in[x,x+h]$ tal que: $\int_x^{x+h} f=f(c).(x+h-x)=f(c).h$ Por tanto:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot f(c).h\right)=\lim_{h\to 0} f(c)$$

Como $c\in[x,x+h]$ y f es continua en $[x,x+h]$ tendremos: $\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$

<u>En consecuencia hemos demostrado que</u>: $F'(x)=f(x)$

El teorema fundamental nos abre las puertas del siguiente resultado:

Regla de Barrow.-

> Si f es una función continua en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva de f
>
> $$\int_a^b f=G(b)-G(a) \text{ ,}$$

Demostración.-

Sabemos que $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$,es decir, $F'(x)=f(x)$

Por hipótesis $G(x)$ es una primitiva de f, es decir, $G'(x)=f(x)$

Sabemos que dos primitivas de una misma función difieren en una constante

$$F(x)-G(x)=k\Rightarrow F(x)=G(x)+k$$

$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$, por tanto: $F(a)=G(a)+k\Rightarrow 0=G(a)+k\Rightarrow G(a)=-k$

En consecuencia tenemos: $F(x)=G(x)-G(a)$ sustituyendo $x=b$ tenemos:

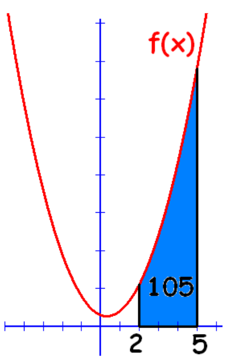
$F(b)=G(b)-G(a)$ y además: $F(b)=\int_a^b f(t)\,dt\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$

Este resultado nos va a permitir calcular las áreas de los recintos sin tener que recurrir a resolver un límite (habitualmente complicado), sin más que calcular una primitiva $G(x)$ de la función dada $f(x)$ (como ya sabemos) y valorarla en los extremos del intervalo que encierra el área.

Ejemplo.- Calcula:

a) $I = \int_2^5 3x^2 - 2x + 3\, dx$ b) $I = \int_0^{\pi} sen\, t\, dt$ c) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

a) vamos a resolver esta área aplicando Barrow.



Como la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ es continua en $[2,5]$

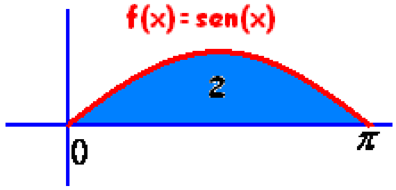
Una primitiva de f: $G(x) = \int 3x^2 - 2x + 3\, dx = x^3 - x^2 + 3x$

$G(a) = G(2) = 10 \qquad G(b) = G(5) = 115$

$$I = \int_2^5 3x^2 - 2x + 3\, dx = G(5) - G(2) = 115 - 10 = 105\, u^2$$

Observa que ese es geométricamente el valor del área del recinto encerrado por f y el eje X entre 2 y 5.

b) Aplicamos de nuevo la regla de Barrow para resolver esta área.



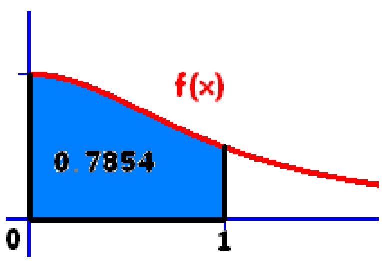
Una primitiva de $f(x) = sen\ x$ es:

$$G(x) = \int sen\ x\ dx = -\cos x$$

$$G(\pi) = -\cos(\pi) = -(-1) = 1\ ; G(0) = -\cos(0) = -1$$

$$I = \int_0^{\pi} sen\ t\ dt = G(\pi) - G(0) = 1 + 1 = 2$$

c) Aplicamos finalmente la regla de Barrow para resolver esta área.



Primitiva de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$G(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x)$$

$$G(1) = arctg(1) \approx 0.7854\ ;\ G(0) = arctg(0) = 0$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = G(1) - G(0) \approx 0.7854$$

4. Aplicaciones matemáticas y físicas de la integral.-

1. Cálculo de áreas mediante la integral.Área entre dos curvas.

Cuando una curva corta al eje X varias veces entre los valores $x = a\ y\ x = b$ determina recintos de área positiva y recintos de área negativa.

Para determinar el área absoluta de todos los recintos hay que sumar todas las cantidades en "positivo".

Para ello tenemos que calcular todos los valores de "x" entre $x = a$ y $x = b$ para los que la función se anula (que son dónde se producen los cambios de signo de la función), aparecen así los recintos de área positiva y negativa.

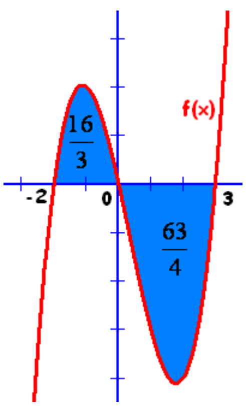
Se calcula el área de cada uno de éstos recintos (en positivo) y se suman para obtener el área absoluta buscada.

Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo.-

Calcula el área encerrada por la curva $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

Solución.



Determinamos los puntos de corte con el eje X.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$I = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx \right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right]_{0}^{3} = \frac{16}{3} + \left| \frac{-63}{4} \right| = \frac{253}{12}$$

<u>Geométricamente es relativamente fácil comprobar que:</u>

El área comprendida entre dos curvas f y g es igual al área del recinto determinado por la diferencia de ambas $(f - g)$ con el eje X.

Pruébalo en el caso de dos curvas positivas, el caso general se convierte en el anterior (positivas) sumando una constante" k "a cada curva: $(f+k);(g+k)$

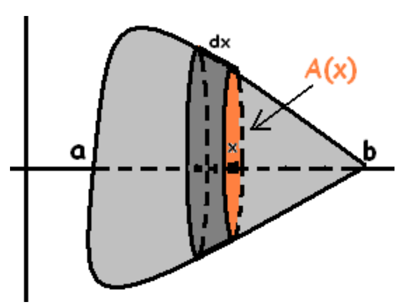
Ejemplo.- Calcula el área encerrada entre las curvas:

$$f(x)=x^4+x^3 \ \ y \ \ g(x)=x^4+x^2+6x$$

Como la diferencia de ambas es la curva: $(f-g)(x)=x^3-x^2-6x$ y ya hemos calculado el área encerrada por esta curva con el eje X en el ejemplo anterior, el resultado es: $\frac{253}{12}$

2. Volumen de un cuerpo de revolución (secciones planas).

Dado un cuerpo en el espacio, designamos por A(x) al área de la sección determinada en el cuerpo por el plano de abscisa "x" perpendicular al eje X



Podemos considerar que el cuerpo está constituido por muchas "rebanadas", cada una de ellas de área [A(x)] y espesor muy pequeño (dx). El volumen de cada rebanada será el producto: A(x).dx y el volumen total del cuerpo se obtendrá sumando el de todas las rebanadas. Apoyándonos en esta consideración "intuitiva" (al igual que hicimos para el cálculo del área bajo una curva como suma de las áreas de unos determinados rectágulos) podemos afirmar que el volumen del cuerpo (V) se obtiene con la integral:

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}$$

(“a” y “b” son las abscisas extremas del cuerpo).

La clave de este método está en saber situar adecuadamente el eje X con respecto al sólido, de modo que las secciones sean figuras de área fácilmente calculables (círculos, rectángulos,.........).

Vamos a aplicar el método de las secciones planas para el cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.

Si una curva $y = f(x)$ gira alrededor del eje X entre $x = a$ y $x = b$ engendra un cuerpo de revolución que tiene un determinado volumen.

Las secciones planas en cada abscisa (x) son, en este caso, círculos de radio igual a $f(x)$ y por tanto el área es $A(x) = \pi.[f(x)]^2$.

En consecuencia el volumen del cuerpo de revolución se obtiene:

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi.[f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

Ejemplo.-

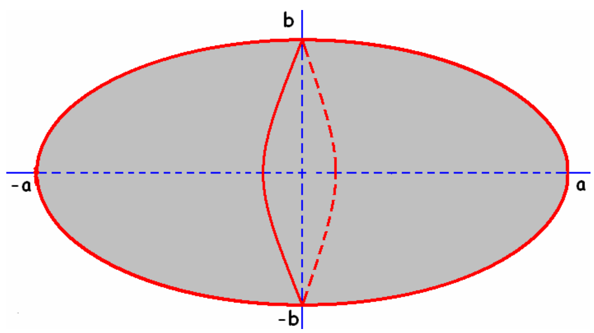
Calcula el volumen del elipsoide de revolución generado por la elipse

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ al girar sobre el eje X.

Sol.-

Podemos considerar el elipsoide engendrado por la semielipse superior.

(podríamos tomar la semielipse inferior y obtendíamos el mismo resultado ya que el integrando está elevado al cuadrado en la fórmula del volumen).



Despejando pues la "y" (al cuadrado) obtenemos: $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$

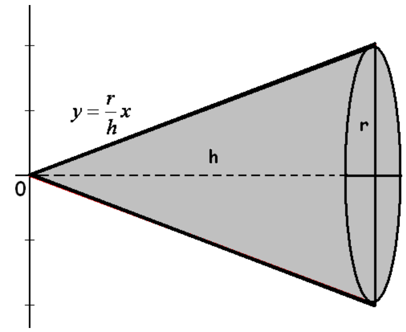
$$V=\pi\int_{-a}^{a}[f(x)]^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[\int_{-a}^{a}a^2dx-\int_{-a}^{a}x^2dx\right]=$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[(a^2x)_{-a}^{a}-\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-a}^{a}\right]=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[2a^3-\frac{2a^3}{3}\right]=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{4a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi.a.b^2$$

Cuando el elipsoide es una esfera: $a=b=r$ y $V=\frac{4}{3}\pi.r^3$

Ejemplo.-

Deduce la fórmula del volumen de un cono.



Sol

Un cono de radio de la base "r" y altura "h" es engendrado por la recta de ecuación: $y=\frac{r}{h}x$ al girar alrededor del eje X entre los valores $x=0\ y\ x=h$.

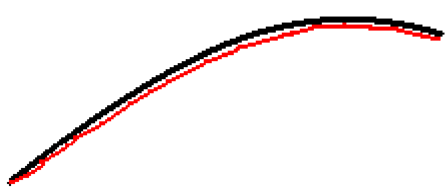
Para calcular el volumen del cono aplicamos la fórmula vista anteriormente:

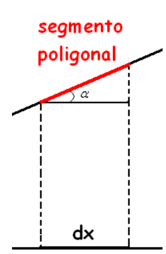
$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}.x\right)^2dx=\frac{\pi\, r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi\, r^2}{h^2}\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi\, r^2\ h$$

3. Longitud de un arco de curva.-

Dada una curva $y=f(x)$, donde f es una función con derivada continua.

Consideremos una línea poligonal inscrita en la curva. Intuitivamente se puede definir la longitud de la curva como el límite de la longitud de la poligonal cuando sus segmentos se hacen "infinitamente" pequeños.





Supongamos que tenemos uno de esos pequenísimos segmentos (arriba) prácticamente confundido con un fragmento de la curva, correspondiente a un subintervalo de longitud (dx). La longitud de este segmento será:

$$l = \frac{dx}{\cos\alpha} = \sqrt{1+tg^2\alpha}\ dx = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

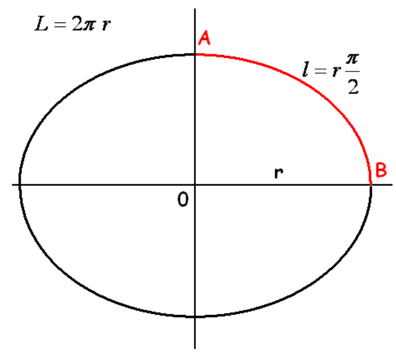
Por tanto la longitud total del arco de curva entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

Ejemplo.-

Calcula la longitud de una circunferencia de radio r.

(Ya se sabe: $L = 2\pi\ r$)



La circunferencia de centro el orígen y radio "r" tiene de ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

La longitud pedida es cuatro veces la del arco AB

Por derivación implícita sabemos que: $y' = \dfrac{-x}{y} \Rightarrow (y')^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$

$$l_{\underset{AB}{ARCO}} = \int_0^r \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\ dx = \int_0^r \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2}}dx = \int_0^r \frac{r}{y}dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx =$$

$$= \frac{r}{r}\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}dx \overset{\substack{\frac{x}{r}=sen(t) \\ dx=r.\cos(t)dt}}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{r.\cos(t)}{\cos(t)}dt = r[t]_0^{\pi/2} = r\frac{\pi}{2}$$

$$L_{CIRCUNF} = 4 l_{\underset{AB}{ARCO}} = 4.\left(r\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\ r$$

4. trabajo realizado por una fuerza variable.-

Cundo una fuerza constante F obliga a un cuerpo a recorrer una distancia d en la dirección de la propia fuerza, realiza un trabajo W que es igual al producto de la fuerza por el espacio recorrido: $W = F.d = F(b-a)$.

Si la fuerza varía a lo largo del trayecto, porque sea función de la posición que ocupe el cuerpo $F = F(x)$, en este caso el trabajo realizado en un subintervalo muy pequeño (dx) es $dW = F(x).dx$ y el trabajo total realizado por la fuerza variable $F = F(x)$ dirigida según el eje X al ir de $x = a$ a $x = b$

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)dx}$$

Ejemplo.-Calcula el trabajo realizado por una fuerza $F = F(x)$ al alargar un muelle, hasta una longitud (x). **Sol**

Ley de “Hooke”: la fuerza es proporcional al desplazamiento: $F(x) = k\,x$

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^x k\,t\,dt = k\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{k\,x^2}{2} = \frac{1}{2}F(x).x$$

5.la integral en el estudio del movimiento.-

Cuando un punto material se mueve a lo largo de una línea recta y su posición s sobre dicha línea en el instante t viene dada por $s = s(t)$, la velocidad y la aceleración del punto son las derivadas sucesivas de $s = s(t)$ respecto a t.

$$\boxed{A)\ v(t) = s'(t) \qquad B)\ a(t) = v'(t) = s''(t)}$$

En consecuencia y recíprocamente, la función de posición del punto material $s(t)$ es una primitiva de $v(t)$y a su vez $v(t)$ será una primitiva de $a(t)$.

Para determinar de que primitiva concreta se trata en cada caso, habrá que apoyarse en alguna condición impuesta sobre el movimiento(condición inicial)

Ejemplo.-

En el instante $t = 0$ se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde una altura $h_0 = 10\,m$ a una velocidad inicial $v_0 = 30\, m/s$ ¿Cual es la ecuación del movimiento de esa piedra, es decir, la función $h = h(t)$ siendo h la altura sobre el suelo que tiene la piedra en el instante t?

Sol.-

La aceleración de un cuerpo sometido a la gravedad es $a(t) = -g \approx -10\, m/s^2$ el signo menos se debe a que el sentido positivo de la altura es hacia arriba mientras que el peso está dirigido hacia abajo.

$v(t) = \int a(t)dt = \int -10\, dt = -10\,t + k$ como $v_0 = 30\, m/s$: $k = 30$ y $v(t) = -10t + 30$

$h(t) = \int v(t)dt = \int (-10t + 30)dt = -5t^2 + 30t + k$ como $h_0 = 10\,m$: $k = 10$;por tanto:

$$h(t) = -5t^2 + 30t + 10$$

FUENTE BIBLIOGRÁFICA:

[1] Larson,Ron. Matemáticas 1, McGraw-Hill, 2009.

[2] JPurcell, EdwinJ. Cálculo Diferencial, Editorial Pearson, 2007.

[3] Ayres, Frank. Cálculo Diferencial, McGraw-Hill, 2005.

[4] Leithold, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica, Editorial Oxford University Press, 2009.

[5] Granville, William A. Cálculo Diferencial e Integral, Editorial Limusa, 2009.

[6] Hasser, Norman B. Análisis matemático Vol.1, Editorial Trillas, 2009.

[7] Courant, Richard. Introducción al cálculo y análisis matemático Vol. I, Editorial Limusa, 2008.

[8] James Stewart. Cálculo de una variable; trascendentes tempranas Vol. I, Editorial Cengage Learning, 2008.

[9] Purcell, Edwin J., Varberg, Dale; Rigdon, Steven E, Cálculo diferencial e integral.pdf. Pearson Educación, México, 2007, ISBN: 978-970-26-0989-6