

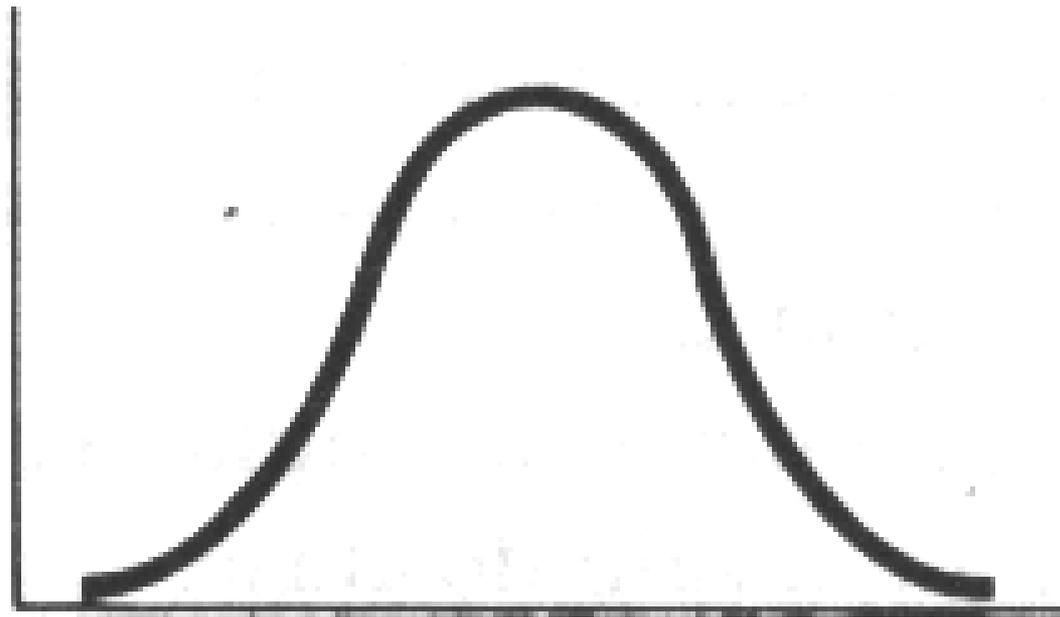
# DISTRIBUCIÓN NORMAL

# Distribución Normal

- Uno de estos modelos probabilísticos que tiene que ver con variables continuas es la distribución Normal.
- Esta se llama así por ser la más frecuente en la naturaleza, esto es porque muchas variables siguen esta distribución de frecuencias.

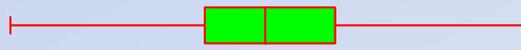
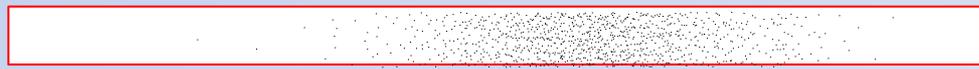
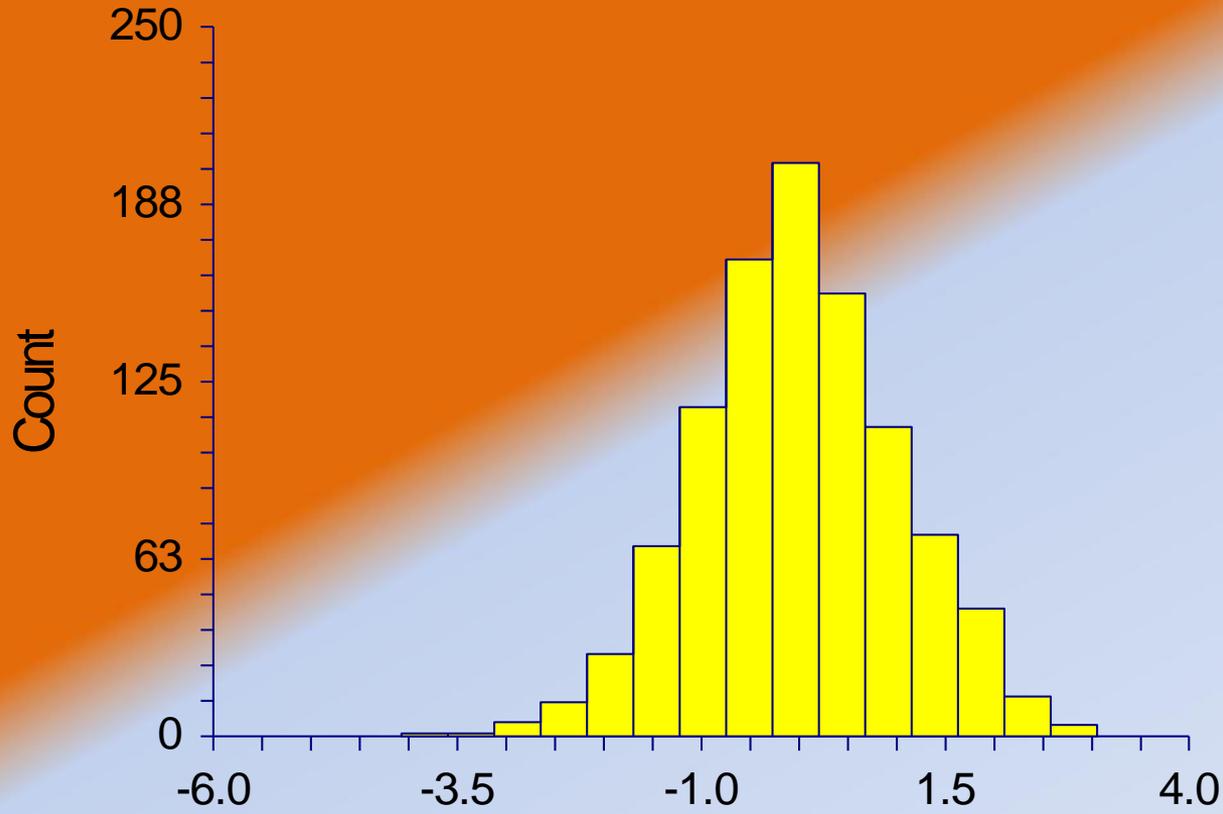
# Distribución Normal

- La distribución normal básicamente dice que hay pocos valores extremos y que la mayor frecuencia se encuentra en los valores centrales.
- Esto además coincide con la media, la moda y la mediana.



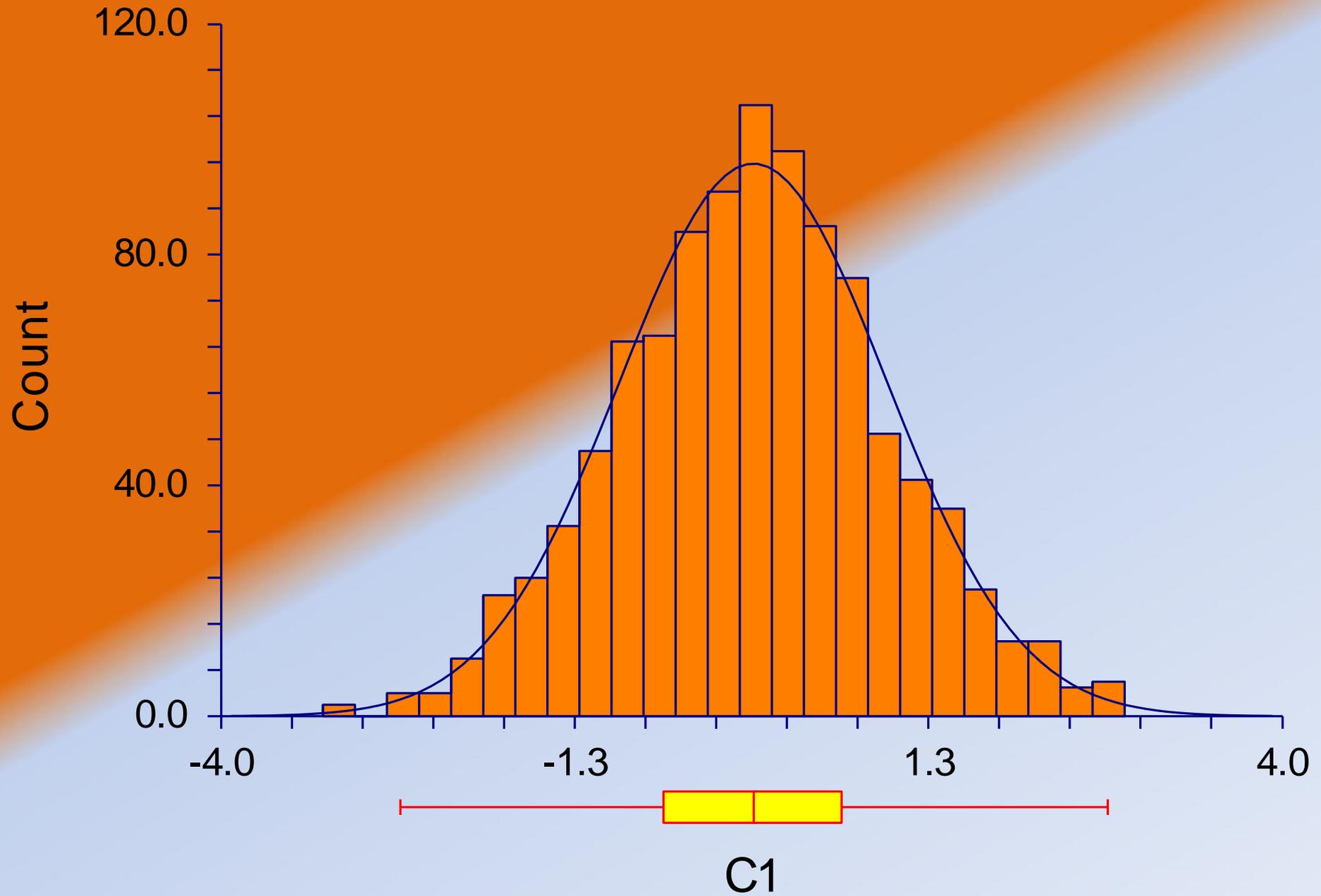
Simétrica o en forma  
de campana

N(0 1)

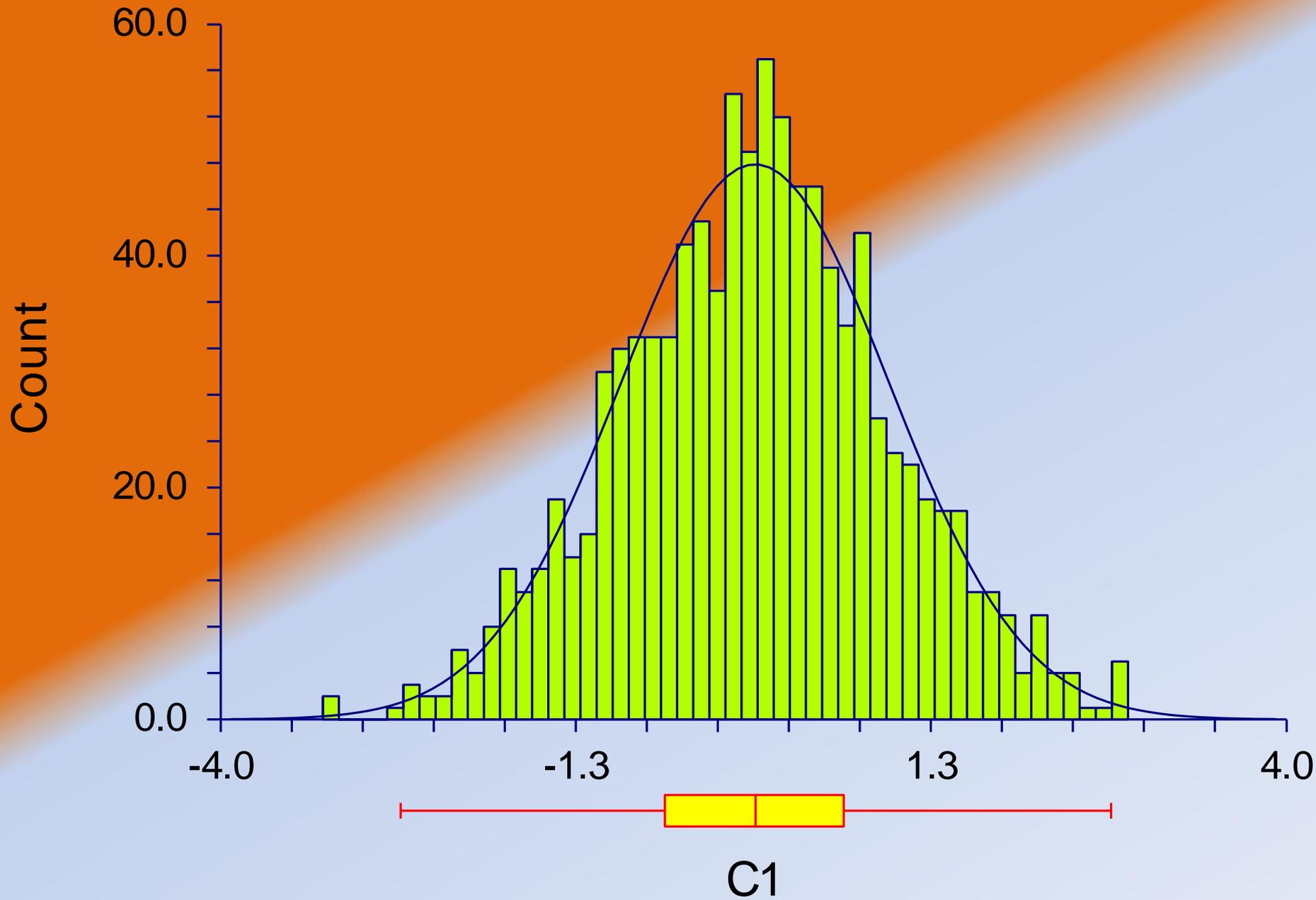


N(0 1)

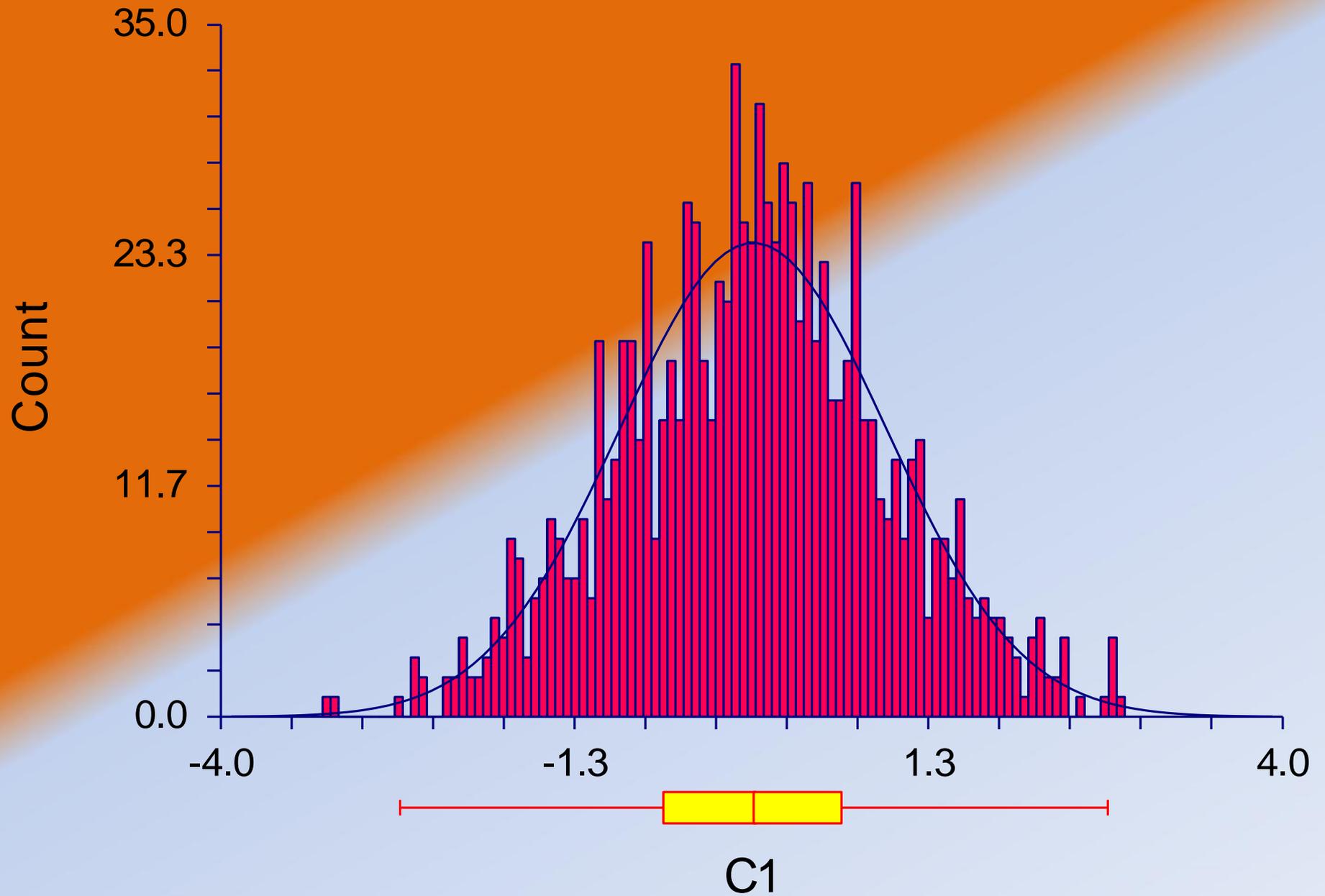
# Histogram



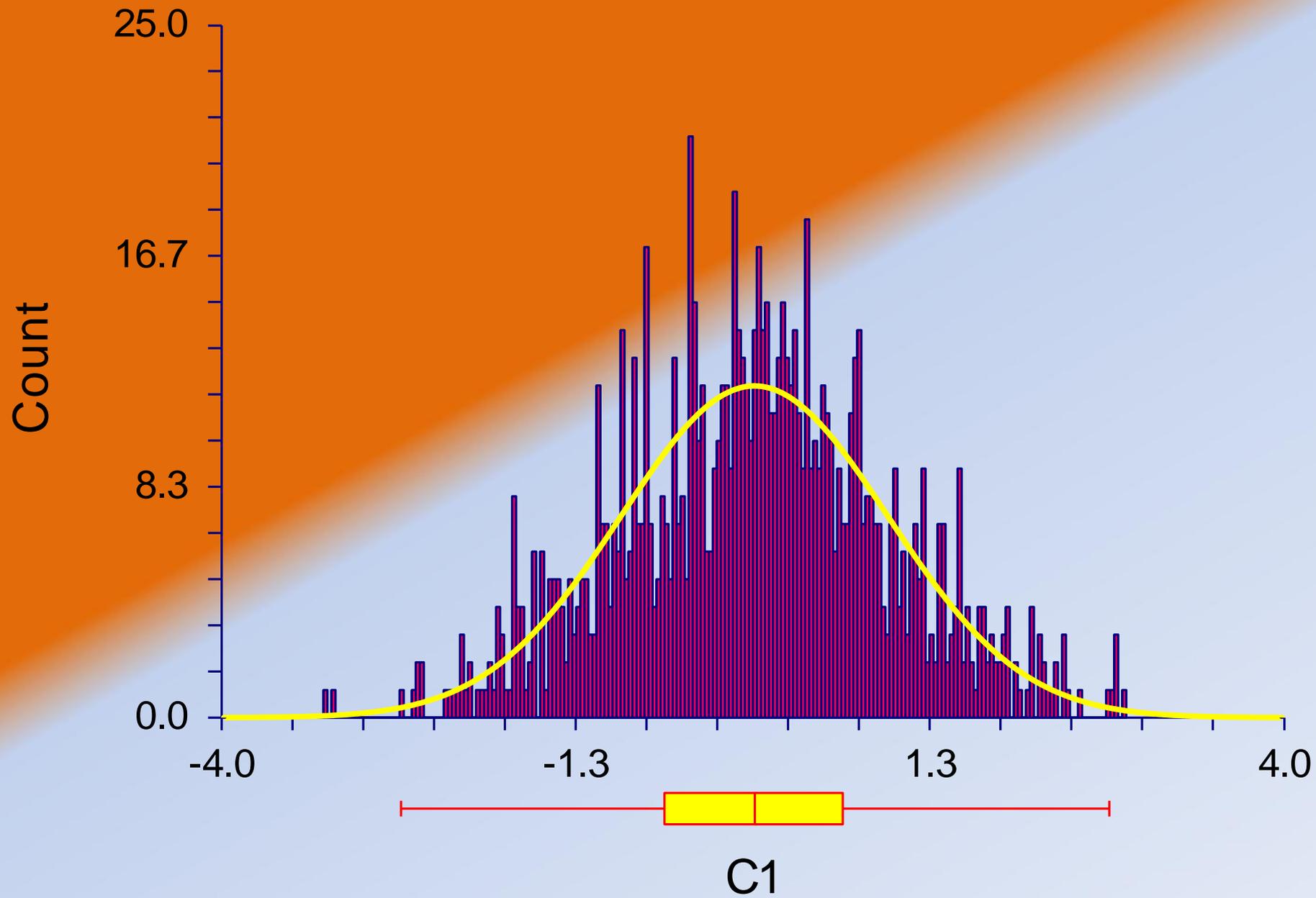
# Histogram



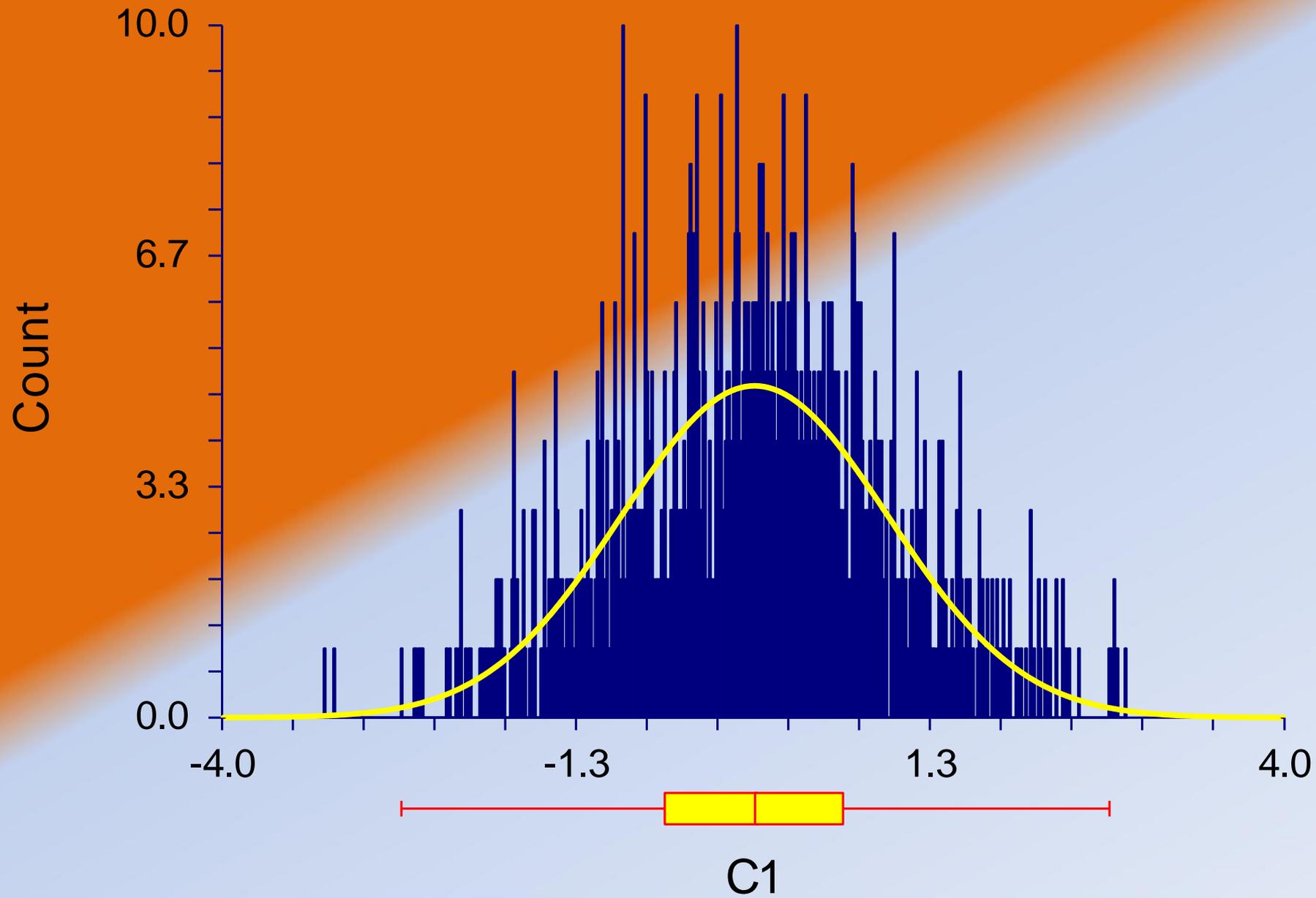
# Histogram



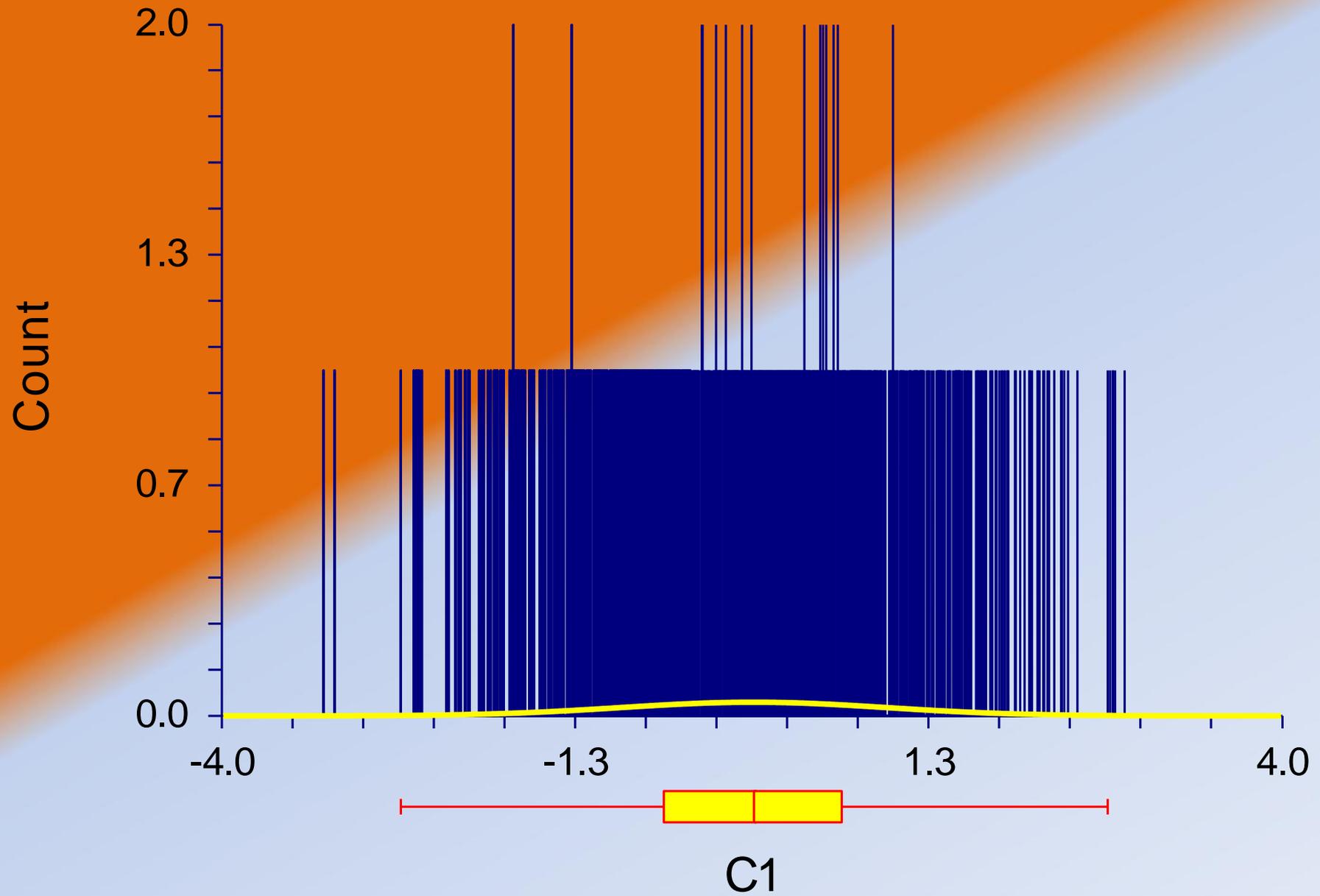
# Histogram



# Histogram



# Histogram



# Cálculo de Probabilidad

- Al convertirse en una variable continua la probabilidad en esta función es representada por el área debajo de la curva entre dos valores determinados.
- Es por esto que en ocasiones se llama función de **densidad**.

# ¿Qué tiene Distribución Normal?

- *Caracteres morfológicos* de individuos (personas, animales, plantas,...) de una especie, p.ejm. tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros,...
- *Caracteres fisiológicos*, por ejemplo: efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- *Caracteres sociológicos*, por ejemplo: consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen.
- *Caracteres psicológicos*, por ejemplo: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio,...
- *Errores* cometidos al medir ciertas magnitudes.
- *Valores estadísticos* muestrales, por ejemplo : la media.
- *Otras distribuciones* como la binomial o la de Poisson son aproximaciones normales, ...
- Y en general cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

# Función de Densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu$  media

$\pi = 3,1415\dots$

$\sigma$  desv. típica

$e = 2,7182\dots$

$\sigma^2$  varianza

$x$  abscisa

# Concepto

- Como es imposible determinar esta área de manera directa se deberá calcular por medio del concepto de

## INTEGRAL DEFINIDA

Esto es el área debajo de una porción de la curva, esto se hace calculando la Integral entre dos valores determinados.

# Función de Distribución

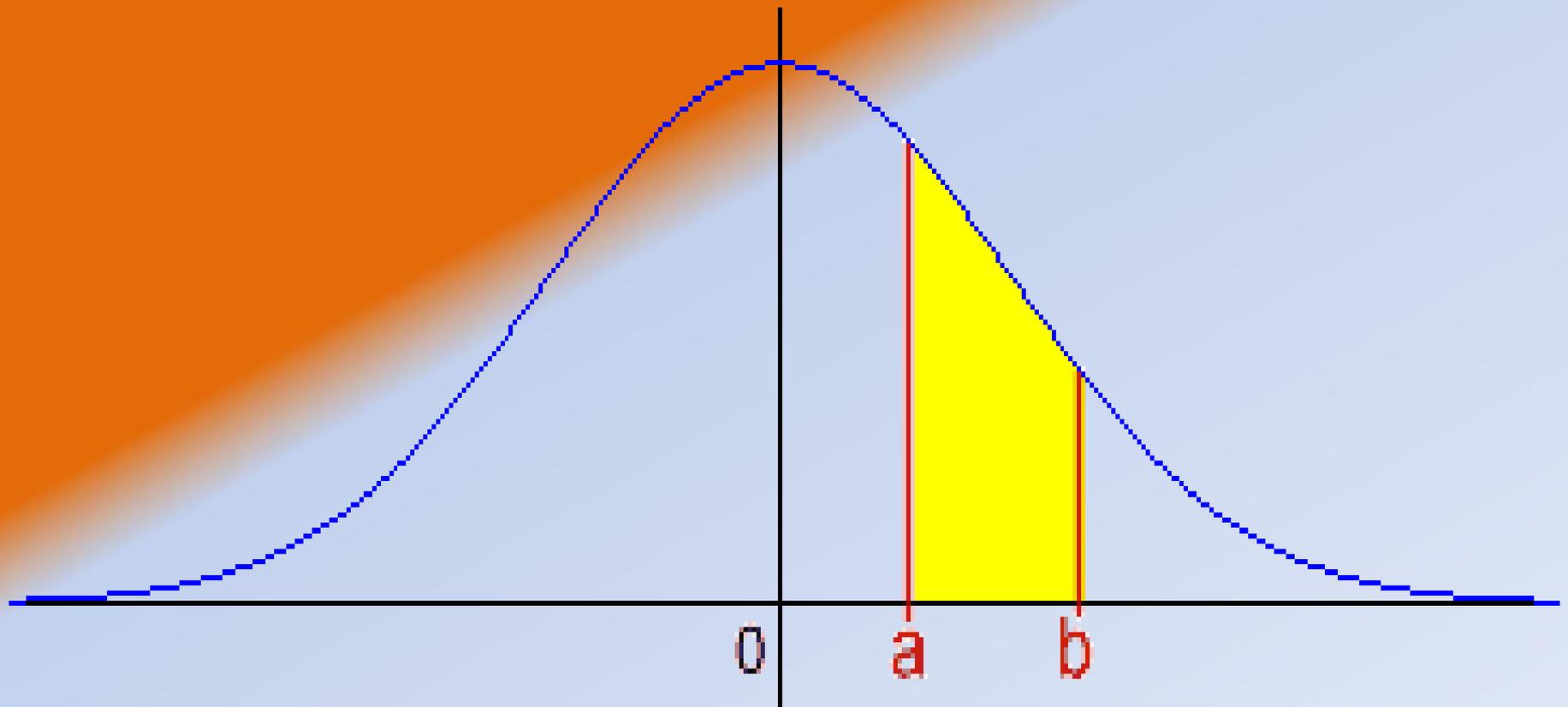
$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

# Ejemplo

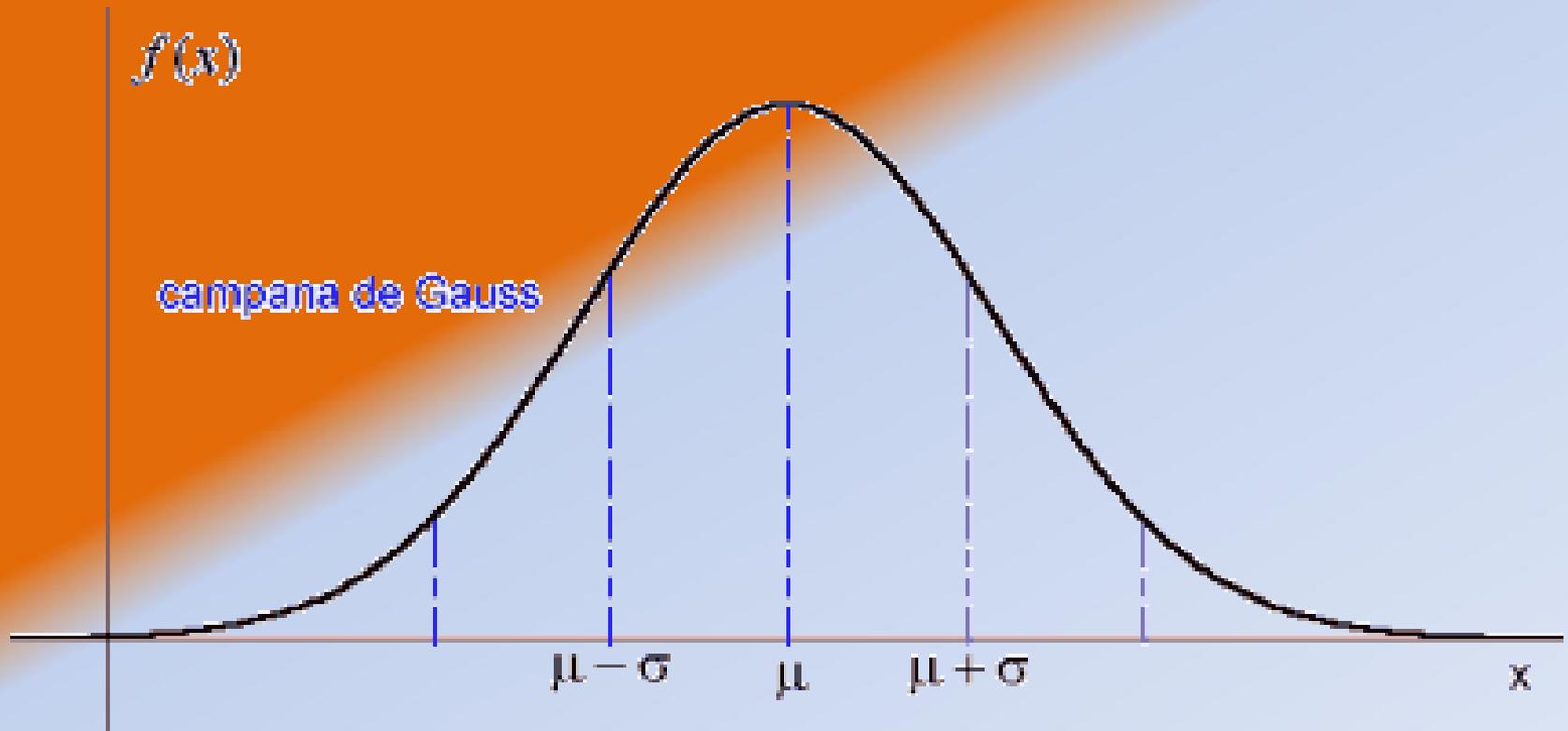
$$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$



# Distribución Normal Estándar

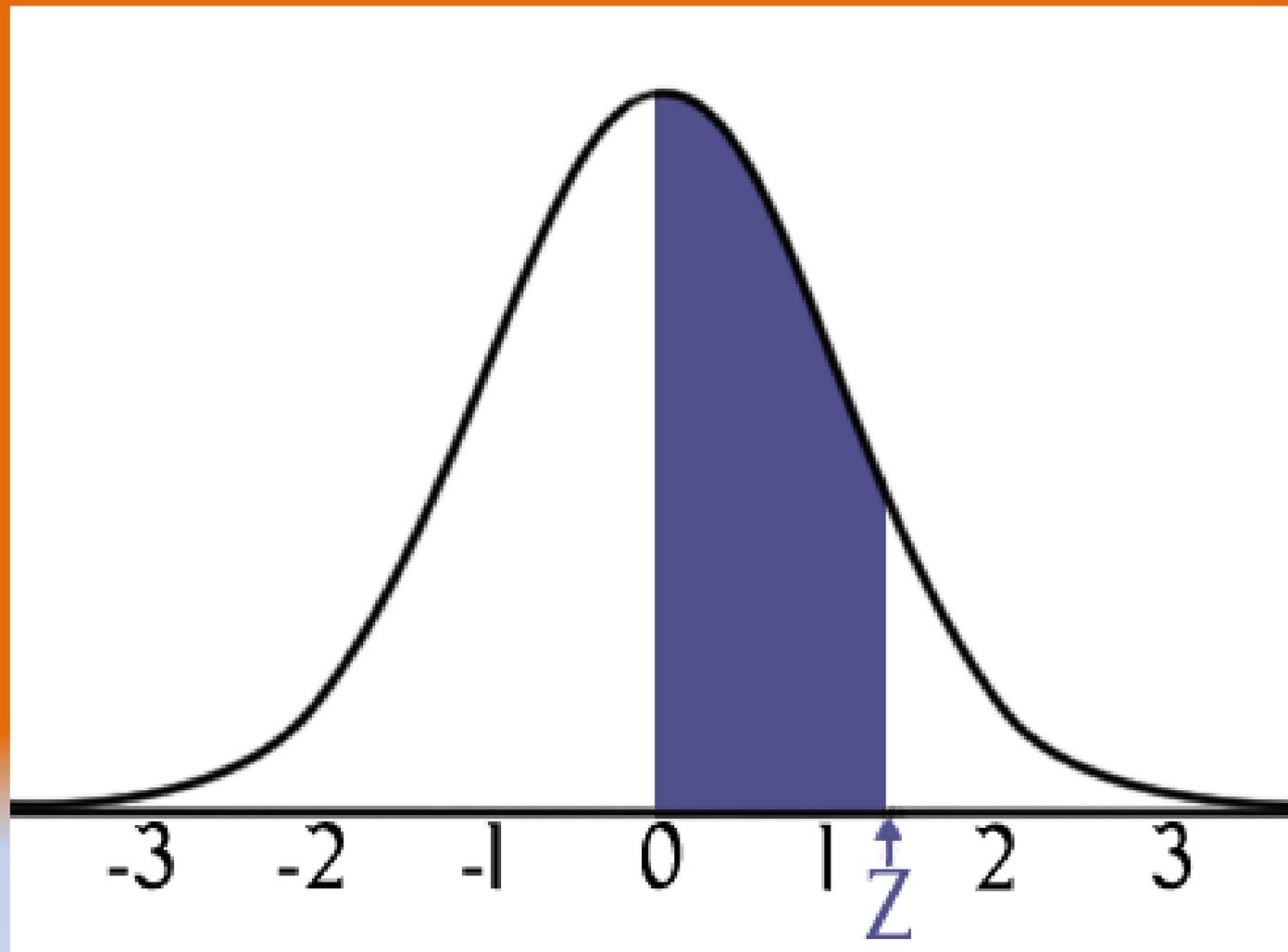
- Es el Modelo Típico de la distribución Normal
  - La Media, La Moda y la Mediana coinciden en el 0 (cero)
  - Es simétrica en torno a este valor
  - La distancia del valor central al punto de inflexión vale 1
  - Este valor es igual a la Varianza y Desviación estándar,

# Distribución Normal o campana de Gauss-Laplace



# Propiedades

- Si se conoce que la distribución normal estándar tiene esas propiedades se pueden calcular las siguientes cualidades.
  - La probabilidad entre  $-1$  desviación estándar ( $\sigma$ ) y  $+1 \sigma$  es de 0.68 o sea que el 68% de los datos están en ese intervalo
  - La probabilidad entre  $-2 \sigma$  y  $+2 \sigma$  es de 0.96 o sea que el 96% de los datos están en ese intervalo
  - La probabilidad entre  $-3 \sigma$  y  $+3 \sigma$  es de 0.99 o sea de 99% de los datos están en ese intervalo



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

# Ejemplos

- La probabilidad de que un valor caiga entre 0 y  $1.35 \sigma$ 
  - Es de 0.4115
- La probabilidad de que un valor caiga entre  $-1.35$  y  $+1.35 \sigma$ 
  - Es de 0.823
- La probabilidad de que un valor sea superior a  $1.35 \sigma$  es de 0.0885
- Que es la misma probabilidad de un valor menor a  $-1.35$

# Propiedades

- Basado en lo anterior
  - El 95% de los datos cae en el intervalo comprendido entre  $-1.96 \sigma$  y  $+1.96 \sigma$
  - El 99% de los datos cae en el intervalo entre  $-2.58 \sigma$  y  $+2.58 \sigma$
- Esto significa que
  - Un valor cualquiera tendrá 95% de probabilidad de caer en el intervalo de  $1.96 \sigma$  y  $-1.96 \sigma$
  - Un valor cualquiera tendrá 99% de probabilidad de caer entre  $2.58 \sigma$  y  $-2.58 \sigma$

**HAGAMOS EJEMPLOS EN EXCELL**

# Valores de z

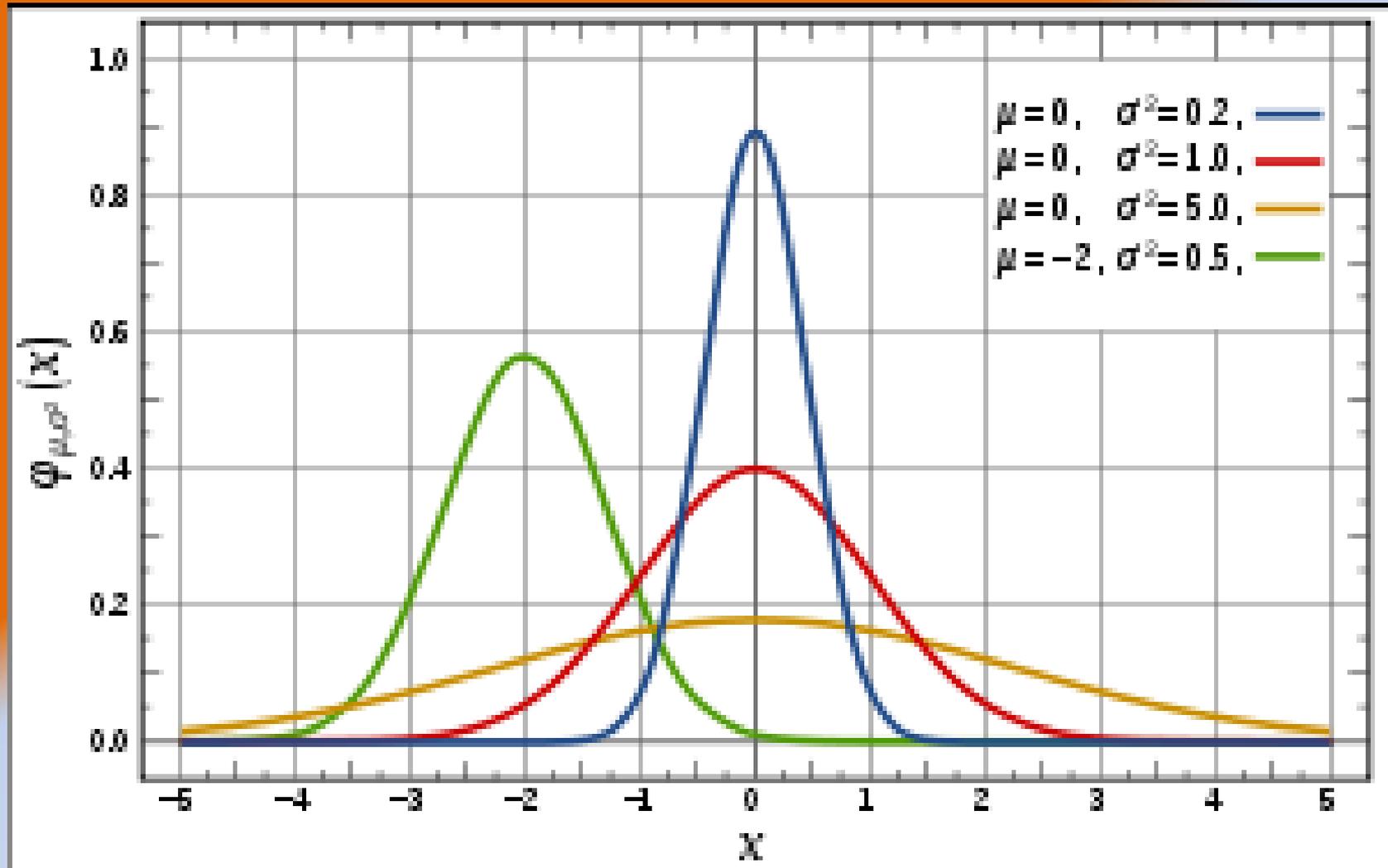
- Para poder transformar la variable en unidades de desviación estándar.
- Se lleva a la transformación en lo que se llama la normalización que se hace con la siguiente fórmula.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

# Desviaciones de la Normal

- En la colección de datos pueden darse desviaciones de las características de la normal
- Cambios en la Kurtosis o concentración los datos en torno a la media
  - Cuando los datos están muy concentrados en torno a la media se dice que la distribución es **leptocúrtica**
  - Cuando los datos están muy dispersos se llama distribución **platiocúrtica**.

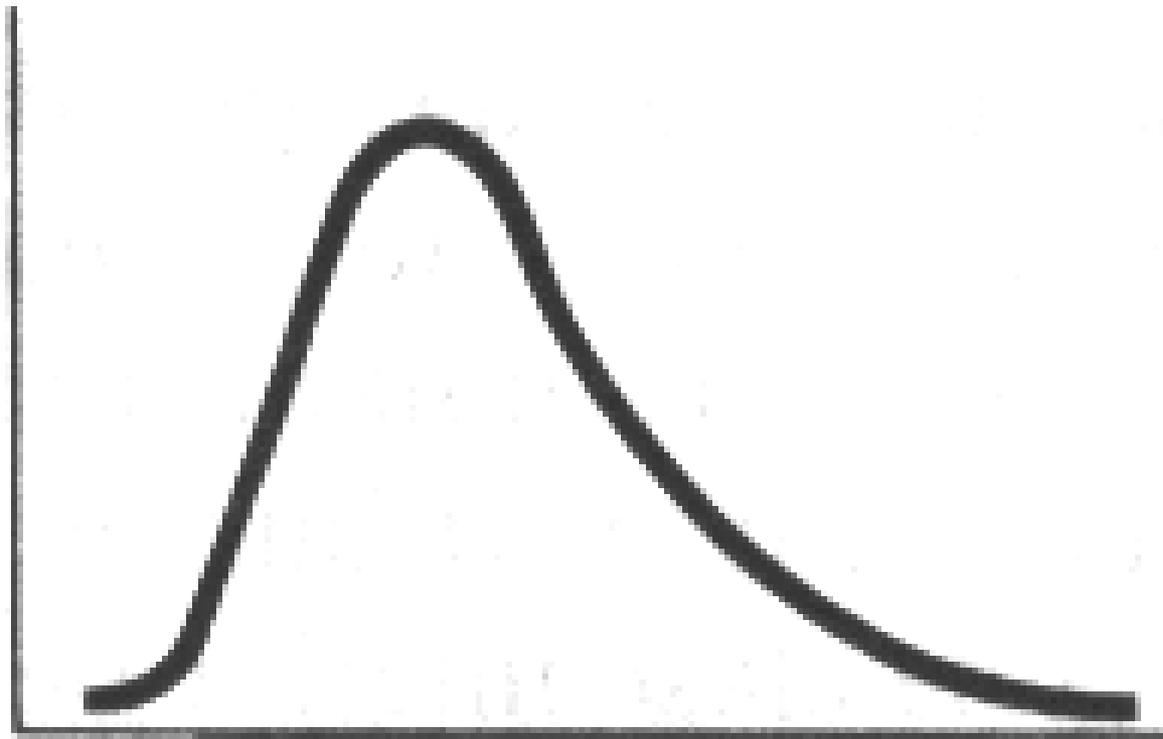
# Variaciones de la Normal



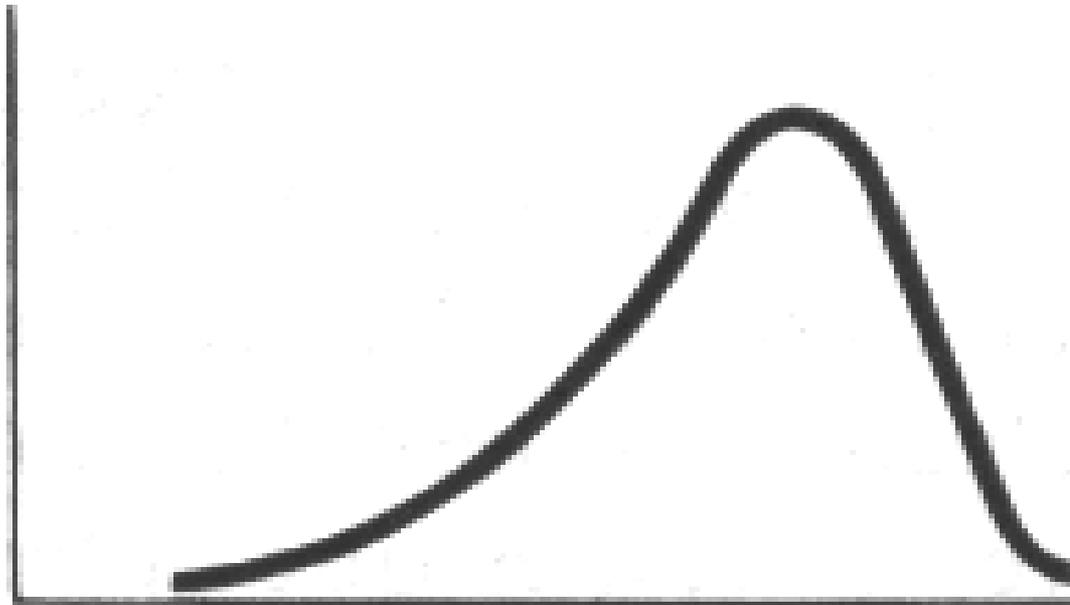
# Asimetrías

- Cuando en la distribución normal no coinciden la media y la moda, y no se encuentran centradas se dice que hay sesgo
- El sesgo positivo es cuando la concentración de los datos es a la derecha de la media
- El sesgo negativo es cuando la mayoría de los datos están por arriba de la media

# Sesgo Positivo



Asimétrica (sesgada) a la derecha (sesgo positivo)



Asimétrica (sesgada) a la izquierda (sesgo negativo)