

***FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN***



***DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA***



***LABORATORIO DE TECNOLOGÍA DE MATERIALES***

---

***FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE  
SÓLIDOS***

---



***M. en I. Felipe Díaz del Castillo Rodríguez.***

**CUAUTITLÁN IZCALLI 2008**

# ÍNDICE

Página

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1. FUERZA .....	2
1.1.1. Clasificación de las fuerzas.....	2
1.2. PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA .....	3
1.3. GRADOS DE LIBERTAD.....	4
1.4. APOYOS O CONEXIONES.....	4
1.5. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (D.C.L.) .....	5
1.6. ECUACIONES DE EQUILIBRIO .....	8

## CAPITULO 2 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.

2.1. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.....	15
2.2. ESFUERZOS NORMALES .....	15
2.3.- ESFUERZOS DE CORTE O CORTANTES .....	22
2.4. DEFORMACIÓN POR CORTE .....	23
2.5. DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE INGENIERÍA .....	26
2.6. MODULO O RELACIÓN DE POISSON .....	28
2.7. MATERIALES.....	30
2.8. FACTOR DE SEGURIDAD .....	33
2.9. ESFUERZOS DE CONTACTO APOYO O APLASTAMIENTO .....	34
2.10. ESFUERZOS TÉRMICOS O DE ORIGEN TÉRMICO.....	41
2.11. ESFUERZOS SOBRE PLANOS DIAGONALES EN ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE. ....	45
12.11.1 Círculo de Mohr. ....	48

**CAPITULO 3**  
**ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSIÓN.**

3.1. INTRODUCCIÓN ...	52
3.2. MOMENTO RESISTENTE INTERNO .....	53
3.3. PROYECTO MECÁNICO DE ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSIÓN .....	55
3.4. TRANSMISIÓN DE POTENCIA MEDIANTE FLECHAS .....	62
3.5. RESORTE HELICOIDALES DE ESPIRAS CERRADAS .....	69
3.5.1. Resortes Helicoidales .....	70
3.5.2. Materiales para resortes.....	74
3.6. RECIPIENTES A PRESIÓN DE PARED DELGADA.....	79
3.6.1 Recipientes Cilíndricos:.....	79
3.6.2. Recipientes esféricos.....	82

**CAPITULO 4**  
**VIGAS, DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES**

4.1. INTRODUCCIÓN.....	85
4.2. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.....	88
4.3. DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES.....	90
4.3.1 Método de ecuaciones.....	91
4.3.2.Método de suma de áreas .....	91

**CAPITULO 5**  
**ESFUERZOS EN VIGAS**

5.1 CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO .....	102
5.2. CENTROIDE DE UN ÁREA.....	102
5.3 MOMENTO DE INERCIA .....	104
5.4. HIPÓTESIS FUNDAMENTAL Y FÓRMULA DE LA FLEXIÓN ELÁSTICA .....	108
5.5. ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS .....	114
5.5.1. Esfuerzos cortantes en vigas de sección rectangular .....	120
5.6. APLICACIONES.....	122

## CAPITULO 6

### TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

6.1. ECUACIONES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZO PLANO.....	126
6.2. ESFUERZOS PRINCIPALES .....	129
6.3. ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS .....	131
6.4. CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS Y SU CONSTRUCCIÓN .....	132
6.5. ECUACIONES GENERALES PARA LA DEFORMACIÓN .....	135
6.6. CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIONES .....	140
6.7. RELACIONES ENTRE DEFORMACIONES Y ESFUERZOS .....	141
6.7.1. Relación entre esfuerzos y deformaciones principales .....	142
6.7.2. Relación entre E, G y $\mu$ .....	142

## CAPITULO 7

### TEORIAS DE FALLA (CRITERIOS DE FLUENCIA Y FRACTURA)

7.1. TEORÍA DEL ESFUERZO NORMAL MÁXIMO.....	144
7.2. TEORÍA DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO.....	146
7.3. TEORÍA DE LA ENERGÍA MÁXIMA DE DISTORSIÓN.....	147
7.4. TEORÍA DE MOHR MODIFICADA .....	148

## CAPITULO 8

### COLUMNAS

8.1. DEFINICIÓN .....	151
8.2. RELACIÓN DE ESBELTEZ .....	151
8.3. RELACIÓN DE ESBELTEZ DE TRANSICIÓN .....	160
8.4. FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS LARGAS .....	161
8.5. FÓRMULA DE J. B. JOHNSON PARA COLUMNAS INTERMEDIAS .....	162
8.6. FACTORES DE DISEÑO PARA COLUMNAS Y CARGA PERMISIBLE .....	163
8.7. ANÁLISIS DE COLUMNA CORTAS .....	164

## **FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS**

### **OBJETIVO:**

*Realizar un análisis cuantitativo y cualitativo de esfuerzos y deformaciones en cuerpos deformables y así poder predeterminar su comportamiento en el diseño de elementos estructurales en función de su resistencia, rigidez y estabilidad.*

### **TEMARIO**

- 1.-Introducción*
- 2.-Esfuerzos y deformaciones*
- 3.- Elementos sometidos a torsión Y Recipientes a presión de pared delgada*
- 4.- Vigas, diagramas de fuerzas cortantes y momento flexionante*
- 5.- Esfuerzos en vigas*
- 6.- Transformación de esfuerzos y deformaciones*
- 7.- Teorías de falla*
- 8.- Columnas.*

### **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Tablas y gráficas para diseño de elementos de Maquinas. Felipe Díaz del Castillo. FES-Cuautitlán.*
- 2. Resistencia de materiales. Robert W. Fitzgerald. Thomson Editores.*
- 3. Mecánica de materiales. R.C. Hibbeler. Prentice Hall.*
- 4. Elements of mechanics of materials. Gerner A. Olsen. Prentice Hall.*
- 5. Mecánica de cuerpos deformables. Byars and Snyder. Rep. y Servicios de Ingeniería.*



## CAPÍTULO 1.

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1. FUERZA

*Acción de un cuerpo sobre otro.*

##### 1.1.1. Clasificación de las fuerzas

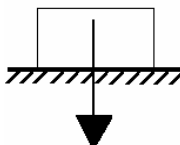
*Las fuerzas se pueden clasificar de acuerdo a los criterios siguientes:*

*a) Origen o naturaleza*

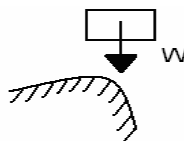
- *Fuerzas eléctricas*
- *Fuerza magnética*
- *Fuerza gravitacional*
- *Fuerza de fricción*

*b) Distancia existentes entre los cuerpos*

- *Si  $d = 0$ ; fuerza de contacto*



- *Si  $d \neq 0$ ; fuerza a distancia*



*c) Área de contacto que existe entre los cuerpos*

- *Si  $A \rightarrow 0$ ; fuerza puntual o discreta*
- *Si  $A \neq 0$ ; fuerza distribuida*
  - *No uniformemente distribuida*
  - *Uniformemente distribuida*

d) *Porción del cuerpo que se esté analizando*

- *Fuerzas activas*
- *Fuerzas reactivas*

## 1.2. PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA

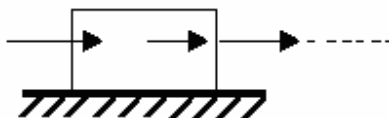
a) *Principio de equilibrio*

*Dos fuerzas se encuentran en equilibrio si y solo si:*

- *Son colineales*
- *Tienen la Misma magnitud*
- *Son de Sentidos opuestos*

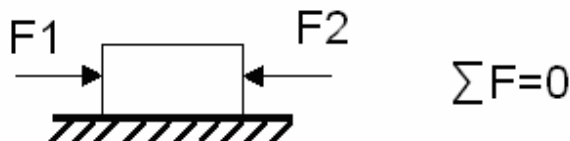
b) *Principio de transmisibilidad*

*Una fuerza puede deslizarse a lo largo de su línea de acción sin que se modifiquen sus efectos externos.*



c) *Principio de superposición*

*Se pueden agregar o eliminar un sistema de fuerzas en equilibrio sin que se modifique el estado del cuerpo sobre el que actúa.*



d) *Ley de la acción y la reacción (Tercera ley de Newton)*

*A toda acción le corresponde una reacción de igual magnitud pero de sentido opuesto.*

### 1.3. GRADOS DE LIBERTAD

Son las posibilidades de movimiento de un cuerpo en el espacio o en el plano, figura 1.1.

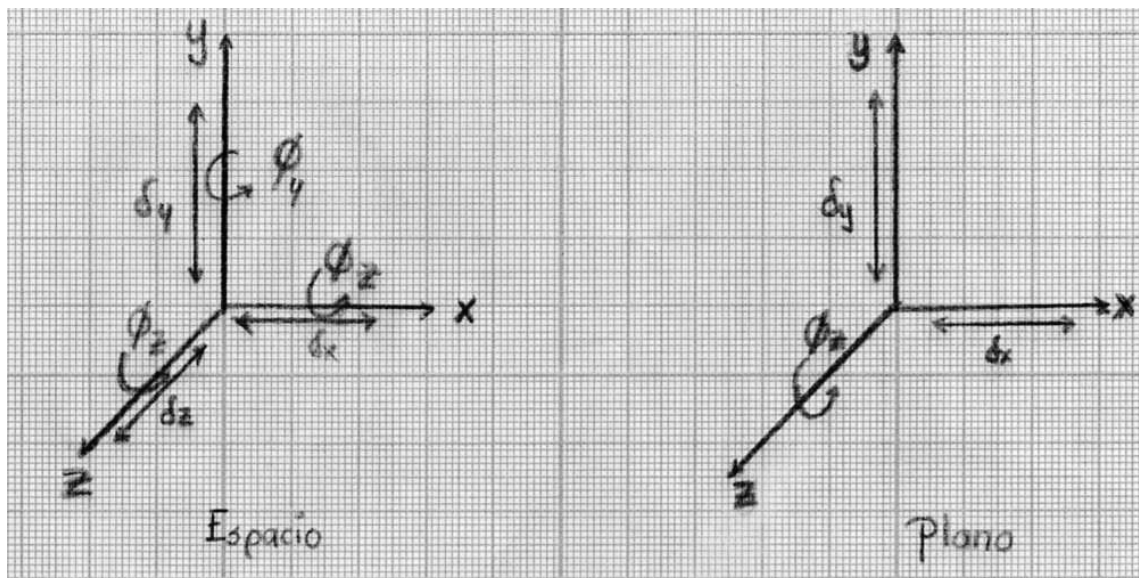


Figura 1.1. Grados de libertad, en el espacio y en el plano

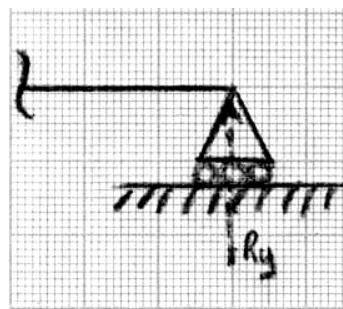
### 1.4. APOYOS O CONEXIONES

Son medios o elementos de sujeción de un cuerpo con otro eliminando al mismo tiempo uno o más grados de libertad.

#### a) Apoyo libre

Físicamente

- Cuchilla
- Balín
- Balancín
- Superficie lisa



$$\text{Sistema reactivo} \left\{ \begin{array}{l} \delta x \neq 0 ; \quad R_x = 0 \\ \delta y = 0 ; \quad R_y \neq 0 \\ \phi_z \neq 0 ; \quad M = 0 \end{array} \right.$$

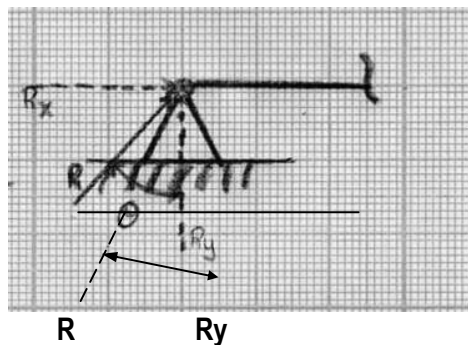


## b) Apoyo articulado

## Físicamente

- Perno liso
- Superficie rugosa

$$\text{Sistema reactivo} \left\{ \begin{array}{l} \delta x = 0 ; \quad R_x \neq 0 \\ \delta y = 0 ; \quad R_y \neq 0 \\ \phi_z \neq 0 ; \quad M = 0 \end{array} \right.$$

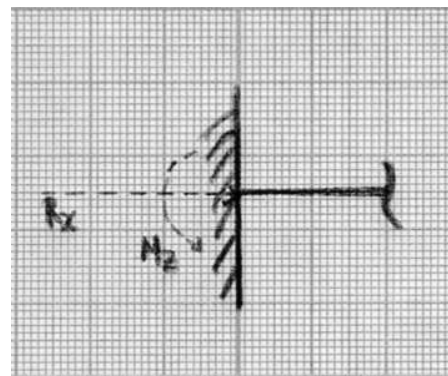


## c) Apoyo fijo o empotrado

## Físicamente

- Elimina toda posibilidad de movimiento.

$$\text{Sistema reactivo} \left\{ \begin{array}{l} \delta x = 0 ; \quad R_x \neq 0 \\ \delta y = 0 ; \quad R_y \neq 0 \\ \phi_z = 0 ; \quad M \neq 0 \end{array} \right.$$

1.5. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (D.C.L.)

Es un esquema que sirve para representar a las fuerzas que actúan sobre:

- Un cuerpo.
- Una porción de ese cuerpo.
- Sobre un conjunto de cuerpos (sistema mecánico)

Sus principales características son:

- Es un esquema representativo del cuerpo estudiado.
- Presenta al cuerpo aislado de su entorno.

- Se presentan las fuerzas ejercidas por otros cuerpos, ya sea que estén en contacto o alejados de él.

*Pasos a seguir para el trazo de un D.C.L.*

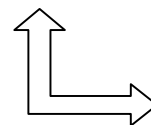
1. Definir claramente de que cuerpo se va a estudiar en el D.C.L.
2. Dibujar el esquema del cuerpo a estudiar.
3. Identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
4. Representar las fuerzas.

Fuerzas conocidas (activas, con magnitud y unidades.  $\xrightarrow{100N}$ )

Fuerzas desconocidas (reactivas, debe otorgarse un nombre adecuado y suponer un sentido  $\leftarrow F_x \rightarrow$ )

Nota:

- Cuerpo rígido; si debe acotarse.
- Una partícula no debe acotarse.
- Debe ser nítido y de buen tamaño.
- Debe de indicarse el sistema de referencia empleado.



*Ejemplos:*

- 1.1. Trace el diagrama de cuerpo libre para el elemento AC que se muestra en la figura 1.2

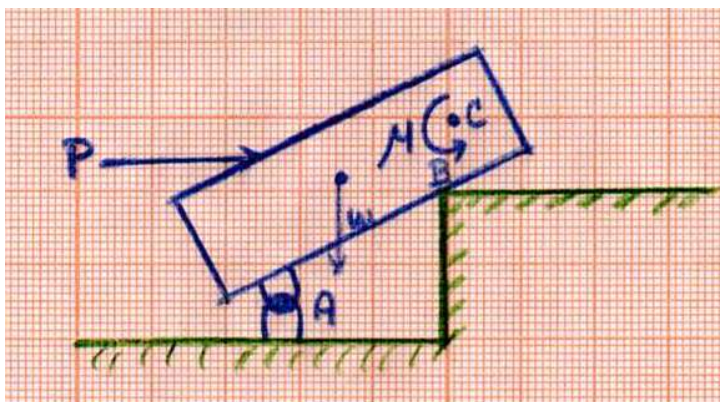
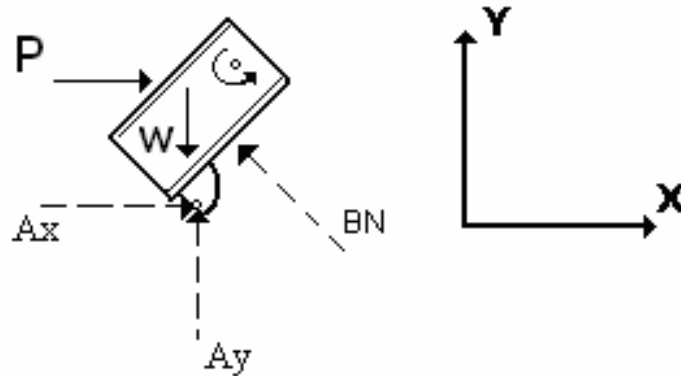


Figura 1.2.

Diagrama de cuerpo libre del elemento AC

**D. C. L**



1.2. Trace el diagrama de cuerpo libre para los elementos AC y CD del sistema que se muestra en la figura 1.3.

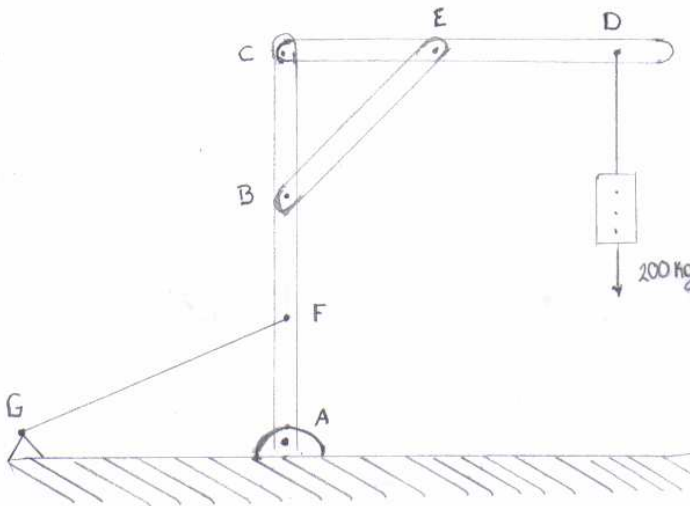
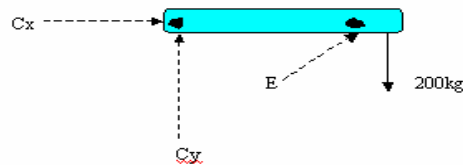
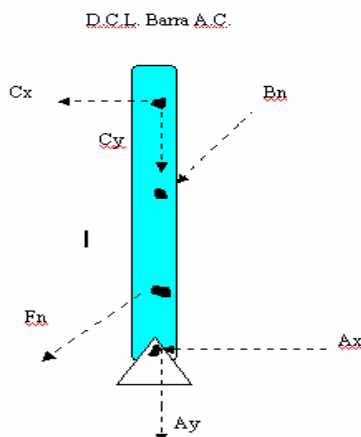


Figura 1.3.

- Diagrama de cuerpo libre barra CD





### 1.6. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Cuando un cuerpo esta sometido a un sistema de fuerzas, que la resultante de todas las fuerzas y el momento resultante sean cero, entonces el cuerpo está en equilibrio. Esto, físicamente, significa que el cuerpo, a menos que esté en movimiento uniforme rectilíneo, no se trasladará ni podrá rotar bajo la acción de ese sistema de fuerzas.

Para determinar las reacciones que se ejercen sobre un cuerpo es importante entender las restricciones que otros cuerpos le imponen al movimiento. La cuestión es fácil, si un cuerpo restringe la traslación en una dirección, por ejemplo en  $x$ , éste ejercerá una fuerza en esta dirección; si impide la rotación alrededor de un eje, ejercerá un par en la dirección de ese eje.

Si la fuerza resultante es cero, el cuerpo, debido a las restricciones impuestas, no se podrá trasladar, perdiendo así tres grados de libertad; de otra parte, si el par resultante es cero, el cuerpo no rotará alrededor de cualquiera de los ejes coordenados. En forma vectorial, lo anterior se puede expresar así:

$$\sum \vec{M}_0 = 0$$

Descomponiendo los vectores en sus componentes rectangulares se obtiene:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

Estas ecuaciones independientes son las disponibles para resolver problemas de equilibrio de cuerpos en tres dimensiones. En problemas bidimensionales las ecuaciones se reducen a tres, número que corresponde a los grados de libertad de un movimiento plano; dos de translación y uno de rotación.

Si por ejemplo el plano en que actúan las fuerzas es el plano  $xy$ , las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

De acuerdo a lo anterior, el máximo número de incógnitas que puede tener un problema para poder solucionarlo completamente, es de seis para situaciones en tres dimensiones y de tres para dos dimensiones.

Cuando en un problema hay tantas incógnitas como ecuaciones disponibles y se pueden hallar todas, se dice que el problema es estáticamente determinado. Si existen más incógnitas que ecuaciones, el problema es insoluble en su totalidad por los métodos de la estática y el problema es estáticamente indeterminado.

De otra parte, hay situaciones en las que, a pesar de tener un número de incógnitas igual al de ecuaciones disponibles no se pueden solucionar. Estas situaciones se presentan por un

arreglo especial de los apoyos, haciendo que el sistema no esté completamente restringido para un sistema general de fuerzas.

Tal sistema es entonces estáticamente indeterminado y parcial o impropriamente restringido. Un cuerpo parcialmente restringido puede estar en equilibrio para un sistema particular de carga, pero dejará de estarlo para un sistema general de carga.

Por ejemplo una puerta apoyada en sus bisagras, estará en equilibrio mientras no se aplique una carga horizontal, figura 1.4.

Si en un sistema hay menos incógnitas que ecuaciones disponibles, éste es parcialmente restringido, es decir, no podrá estar en equilibrio para un sistema general de fuerzas.



Figura 1.4.

**Ejemplos:**

1.3. Calcule las reacciones en los apoyos A y C de la viga que se muestra en la figura 1.5.

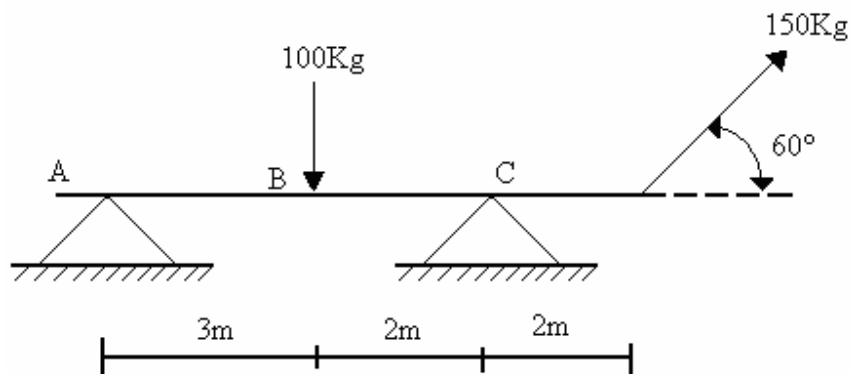
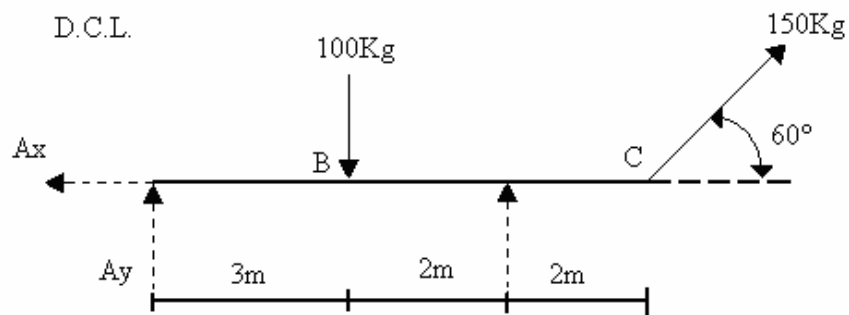


Figura 1.5.



$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$-(100)(3) + C_y(5) + 150 \sin 60^\circ(7) = 0$$

$$C_y = \frac{300 - 150 \sin 60^\circ(7)}{5} = -121.8 \text{ Kg} \quad \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y - 100 - 121.8 + 150 \sin 60^\circ = 0$$

$$A_y = 100 + 121.8 - 150 \sin 60^\circ$$

$$A_y = 91.8 \text{ Kg}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$-A_x + 150 \cos 60^\circ = 0$$

$$A_x = 150 \cos 60^\circ$$

$$A_x = 75 \text{ Kg}$$

1.4. Calcule las reacciones en los apoyos A y B de la ménsula que se muestra en la figura 1.6

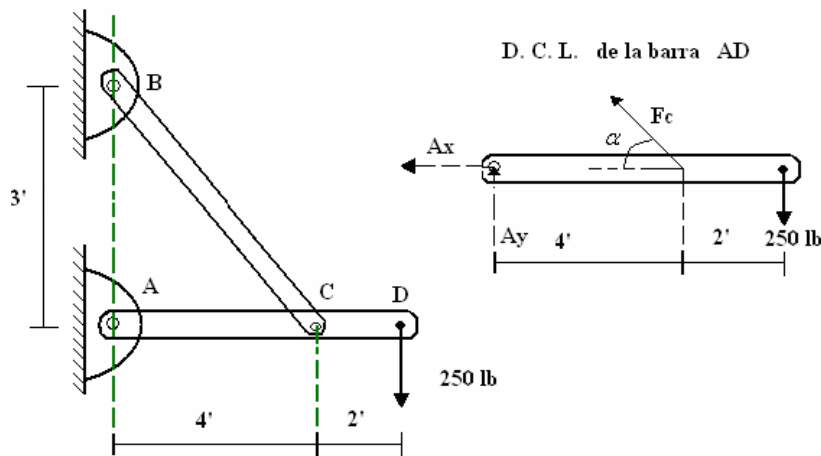


Figura 1.6.

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0$$

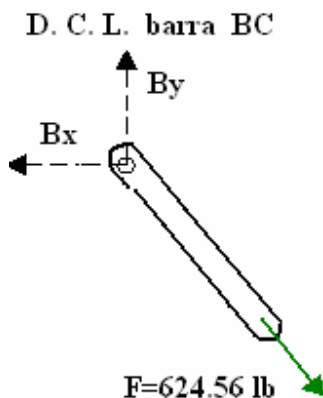
$$FC \text{sen} 36.9^\circ (4) - 250 \text{ lb} (6) = 0$$

$$FC = \frac{250 \text{ lb} (6)}{\text{sen} 36.9^\circ (4)} = \underline{624.56 \text{ lb}}$$

$+ \rightarrow \sum F_x = 0$	$+ \uparrow \sum F_y = 0$
$- Ax - 624.56 (\cos 36.9) = 0$	$Ax + 624.56 (\text{sen} 36.9) - 250 \text{ lb}$
$Ax = -624.56 (\cos 36.9)$	$Ax = 250 - 624.56 (\text{sen} 36.9)$
$Ax = \underline{-499.5 \rightarrow}$	$Ax = \underline{-124.9 \text{ lb} \downarrow}$

$$R_A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$R_A = \sqrt{(499.5)^2 + (124.9)^2} = \underline{514.8 \text{ lb}}$$



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$- Bx + 624.56 (\cos 36.9) = 0$$

$$Bx = \underline{499.45 \text{ lb}}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$By = 624.56 (\text{sen} 36.9)$$

$$= \underline{-375 \text{ lb} \downarrow}$$



1.5. Calcular la fuerza en el cable CF y las reacciones en el apoyo A en la figura 1.7.

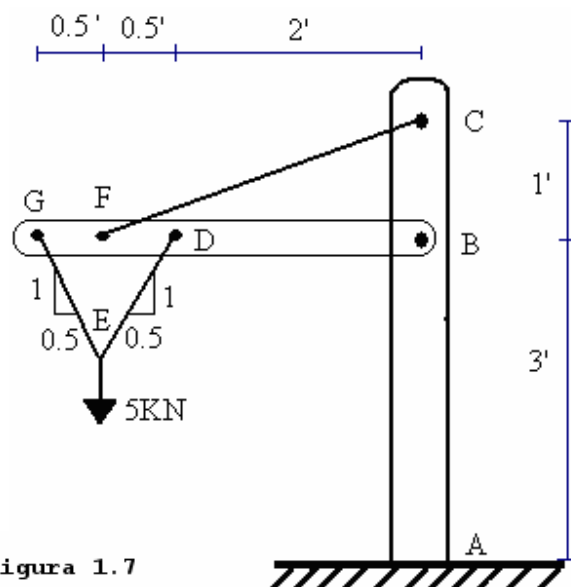
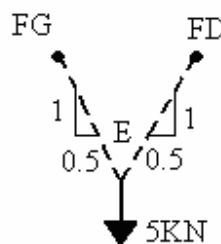


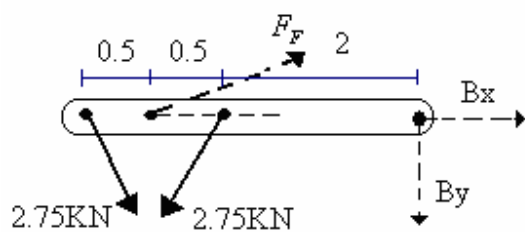
Figura 1.7

D. C. L. Alambre GE y DE



$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0 \\ F_D \frac{0.5}{1.1} - F_G \frac{0.5}{1.1} &= 0 \\ \therefore F_D &= F_G \end{aligned}$$

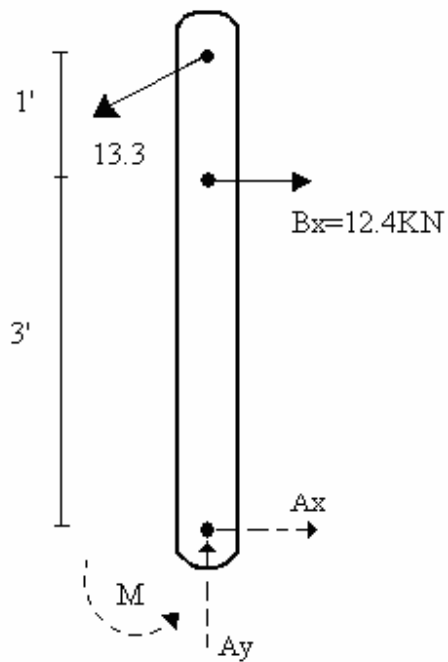
$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y &= 0 \\ F_D \frac{1}{1.1} + F_G \frac{1}{1.1} - 5 \text{KN} &= 0 \\ 2F_D \left( \frac{1}{1.1} \right) &= 5 \text{KN} \\ F_D &= \frac{2(1.1)}{5} = \underline{2.75 \text{ KN}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} +\curvearrowright \sum M_B &= 0 \\ 2.75 \left( \frac{1}{1.1} \right) (3) - F_F \text{sen} 22^\circ + 2.75 \left( \frac{1}{1.1} \right) (2) &= 0 \\ F_F &= \frac{7.5 + 5}{2.5 \text{sen} 22^\circ} = \underline{13.3 \text{ KN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 &= 2.75 \left( \frac{0.5}{1.1} \right) + 13.3 \cos 22^\circ - 2.75 \left( \frac{0.5}{1.1} \right) + B_x = 0 \\ B_x &= -13.3 \cos 22^\circ = \underline{-12.4 \text{ KN} \leftarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y = 0 &= -2.75 \left( \frac{1}{1.1} \right) + 13.3 \text{sen} 22^\circ - 2.75 \left( \frac{1}{1.1} \right) + B_y = 0 \\ B_y &= -13.3 \text{sen} 22^\circ + 2(2.75) \left( \frac{1}{1.1} \right) = \underline{0} \end{aligned}$$



$$\curvearrowleft \sum F_A = 0$$

$$13.3 \cos 22^\circ (4) - 12.4(3) + M$$

$$M = -13.3 \cos 22^\circ (4) + 13.4(3)$$

$$M = -12.12 \text{ KN } \curvearrowright$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$-13.3 \cos 22^\circ + 12.4 + A_x = 0$$

$$A_x = 13.3 \cos 22^\circ - 12.4$$

$$A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-13.3 \sin 22^\circ + A_y = 0$$

$$A_y = 13.3 \sin 22^\circ$$

$$A_y = 4.9 \text{ KN}$$



$$\sigma = \frac{\sum P_i}{A} = \frac{P}{A} \quad \dots (2.1)$$

DONDE:

$$\sigma = \text{Esfuerzo normal} \left[ \frac{N}{m^2} \circ \frac{lb}{pu\lg^2} \circ \frac{kg}{cm^2} \right]$$

$P$  = Carga aplicada

$A$  = Area de la sección transversal

**Para la deformación total:**

$$\varepsilon = \frac{L_F - L_i}{L_i} = \frac{\delta}{L_i} \dots (2.2)$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \dots (2.3)$$

**Donde:**

$E$  = Modulo de elasticidad  
o de young

$\varepsilon$  = Deformacion unitaria

$L_F$  = Longitud final de la barra

**Sustituyendo la ec. (2.2) en (2.3) se obtiene.**

$$E = \frac{\sigma \cdot L}{\delta}$$

**Despejando a  $\delta$  se obtiene:**

$$\delta = \frac{\sigma \cdot L}{E} = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad \dots (2.4)$$

$$E_{ac} = 30 \times 10^6 \frac{lb}{pu\lg^2}$$

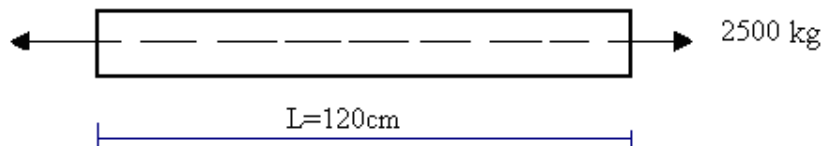
$$E_{al} = 10 \times 10^6 \frac{lb}{pu\lg^2}$$

Para que estas ecuaciones sean aplicables, deben cumplirse las condiciones siguientes:

1. La línea de acción de la carga aplicada o de la resultante de las cargas debe pasar por el centroide del área analizada.
2. La carga aplicada y el área analizada deben ser perpendiculares entre si.

2.1. Una barra de aluminio de  $2 \text{ cm}^2$  de sección transversal y de  $120 \text{ cm}$  de longitud se somete a una fuerza axial de tensión de  $2500 \text{ kg}$ . Calcule.

- a) El esfuerzo normal.
- b) La deformación total.
- c) La deformación unitaria.



Datos:

$$L = 120 \text{ cm}$$

$$A = 2 \text{ cm}^2$$

$$P = 2500 \text{ kg}$$

Mat: aluminio

$$E_{Al} 10 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \left( \frac{0.454 \text{ Kg}}{1 \text{ lb}} \right) \left( \frac{1 \text{ pulg}^2}{(2.54 \text{ cm})^2} \right) = 703701.4 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} = 0.7037014 \times 10^6$$

$$Al = ?$$

$$\text{a) } \sigma = \frac{P}{A} = \frac{2500 \text{ Kg}}{2 \text{ cm}^2} = \underline{1250 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}}$$

I.M.E

Mtro. Felipe Díaz del Castillo R.

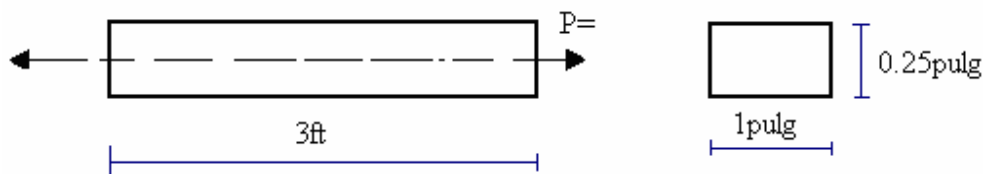
$$b) \quad \delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} = \frac{(2500 \text{ Kg})(120 \text{ cm})}{(2 \text{ cm}^2) \left( 0.703 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \right)}$$

$$\delta = 0.2133 \text{ cm} \\ = 2.1 \text{ mm}$$

$$c) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.2133 \text{ cm}}{120 \text{ cm}}$$

$$\varepsilon = 1.78 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$$

2.2. Calcule la carga máxima a tensión que puede soportar una barra de acero de 3 pies de longitud y una sección transversal de 1 x 0.25 pulg. Considérese que el esfuerzo normal no debe exceder de 15000 psi y la deformación no debe ser mayor de 25 milésimas de pulg.



Acero

$$\sigma = 15000 \text{ psi} \rightarrow P$$

$$\delta = 0.025 \text{ pulg} \rightarrow P$$

a) Se calcula  $P$  en función del esfuerzo admisible.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{despejando} \quad P = \sigma \cdot A$$

$$P = (15000 \text{ Psi}) (1 \times 0.25 \text{ pulg}^2) = 3750 \text{ lb}$$

b) Calculando  $P$  en función de la deformación admisible.

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad \text{depejando a } P = \frac{\delta \cdot A \cdot E}{L}$$

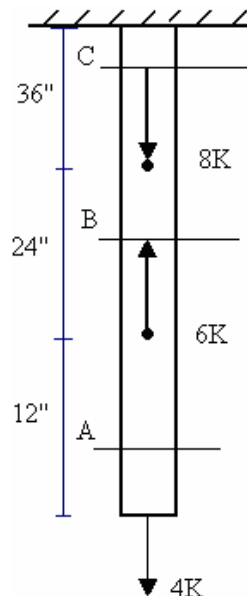
$$P = \frac{(0.025 \text{ pulg})(1 \text{ pulg} \times 0.25 \text{ pulg}) \left( 30 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \right)}{3 \times 12 \text{ pulg}} = 5208 \text{ lb}$$

Comprobando:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \frac{(3750 \times (3 \times 12))}{30 \times 10^6 (1 \times 0.25)} = 0.018 \text{ pulg} \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{5208}{(1 \times 0.25)} = 20832 \text{ Psi}$$

2.3. Una barra redonda de acero con una sección transversal de  $0.5 \text{ pulg}^2$  se sujeta en su extremo superior y se somete a la acción de tres cargas axiales tal como se muestra en la figura. Calcule:

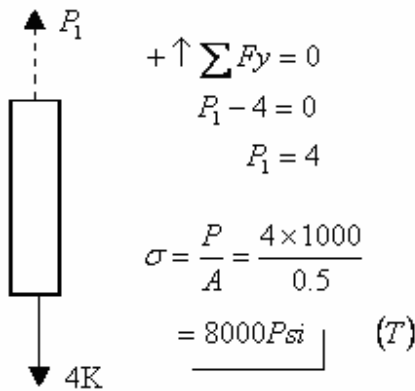
- El esfuerzo máximo que se presenta en la barra.
- La deformación total sufrida por la misma.



Acero  
 $A = 0.5 \text{ pulg}^2$        $1K = 1 \text{ Kip} = 1000 \text{ lb}$

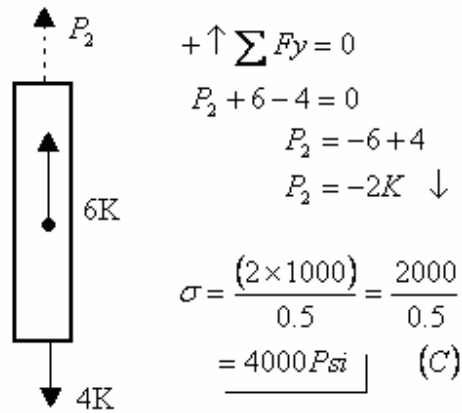
- $\sigma$  más grande
- $\delta$  total

D.C.L. Sección A



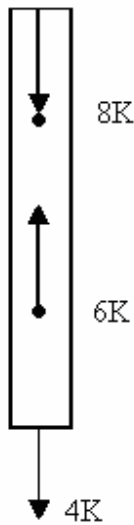
(T)=Tensión

D.C.L. Sección B



(C)=Compresión

D.C.L. Sección C



$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \\
 P_3 - 8 + 6 - 4 &= 0 \\
 P_3 &= 8 - 6 + 4 \\
 P_3 &= 6K
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{(6 \times 1000)}{0.5} = \frac{6000}{0.5} = 12000 Psi$$

a)  $\sigma = 12000 Psi$



b) Se calcula deformación total

$$\delta_{TOT} = \delta_A + \delta_B + \delta_C$$

$$\delta_{TOT} = \frac{P_A \cdot L_A}{E_A \cdot A_A} + \frac{P_B \cdot L_B}{E_B \cdot A_B} + \frac{P_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C}$$

$$\delta_{TOT} = \frac{1}{E \cdot A} (P_A \cdot L_A + P_B \cdot L_B + P_C \cdot L_C) \quad \begin{array}{l} A_A = A_B = A_C = A \\ E_A = E_B = E_C = E \end{array}$$

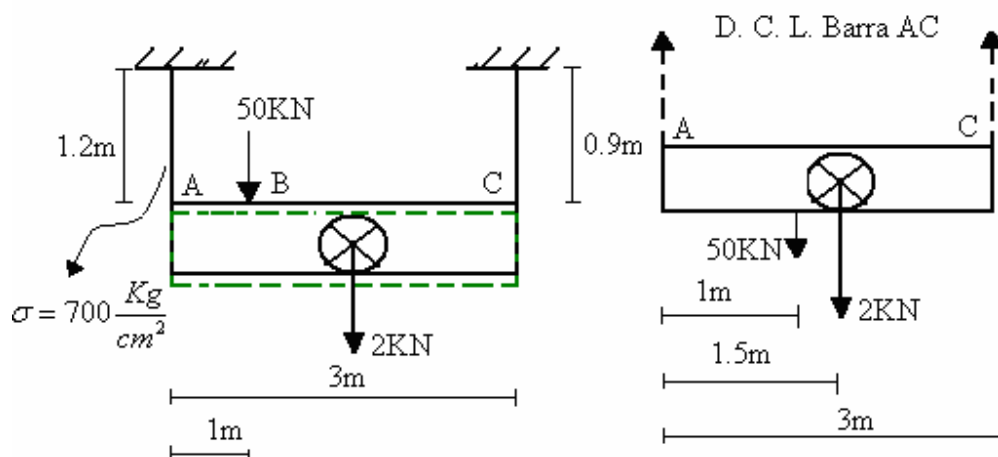
$$\delta_{TOT} = \frac{1}{(30 \times 10^6)(0.5)} (4 \times 1000 \times 12) - (2 \times 1000 \times 24) + (6 \times 1000 \times 36)$$

$$\delta_{TOT} = 0.0144 \text{ pulg}$$

2.4. Una barra horizontal de 3m de longitud y que pesa 2kN está soportando en sus extremos mediante un alambre de latón de 1.2m de longitud y mediante un alambre de aluminio de 0.9 m de longitud a continuación se aplica se aplica una carga P de 50kN a 1m con respecto al alambre de latón. Calcule:

a) El área necesaria para el alambre de latón si el esfuerzo normal en el mismo no debe exceder de  $700 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ .

b) El área necesaria para el alambre de aluminio si la barra debe permanecer horizontal después de ser cargada.



$$\begin{aligned} \left( \uparrow \sum M_A = 0 \right. & \qquad \qquad \qquad + \uparrow \sum F_y = 0 \\ -50(1) - 2(1.5) - FA(3) = 0 & \qquad \qquad \qquad FL - 50 - 2 + 17.6 = 0 \\ FA = \frac{50+3}{3} = 17.6 \text{ KN} & \qquad \qquad \qquad FL = 52 - 17.6 = 34.4 \text{ KN} \end{aligned}$$

$$a) \quad \sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{FL}{\sigma} \Rightarrow \frac{34.4 \times 1000}{68.7 \times 10^6} = \underline{5 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$b) \text{ La condición es que } \delta_L = \delta_{Al} \quad \frac{F_L \cdot L_L}{E_L \cdot A_L} = \frac{F_{Al} \cdot L_{Al}}{E_{Al} \cdot A_{Al}}$$

$$A_{Al} = \frac{F_{Al} \cdot L_{Al} \cdot E_L \cdot A_L}{E_{Al} \cdot F_L \cdot L_L} \quad E_L = 1.124 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$E_L = 1.124 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \times 9.81 \times 100^2 = 110 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$E_{Al} = 0.741 \times 10^6 \times 9.81 \times 100^2 = 72.7 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$A_{Al} = \frac{(17.6) \cdot (0.9) \cdot (110 \times 10^9) \cdot (5 \times 10^{-4})}{(72.7 \times 10^9) \cdot (34.4) \cdot (1.2)} = \underline{2.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

### 2.3.- ESFUERZOS DE CORTE O CORTANTES

*Este tipo de esfuerzos se producen en un cuerpo cuando las cargas aplicadas tienden a cortar o deslizar una parte del mismo con respecto a otra, se presentan en elementos sometidos a corte directo como: cuñas, pernos, remaches, etc., en vigas y elementos sometidos a torsión (flechas y resortes. Considérese la figura 2.2.*

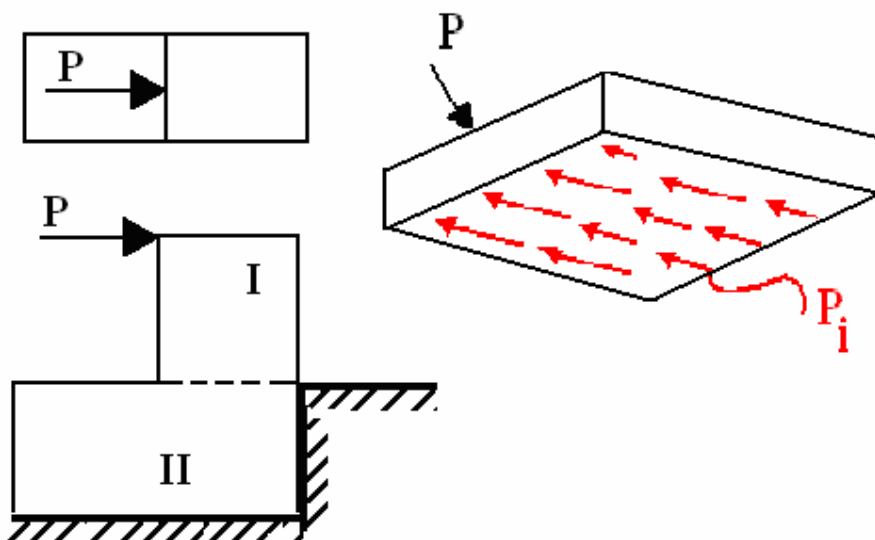


Figura 2.2. Cuerpo formado por dos bloques, sometido a una fuerza P  
De la figura se tiene:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum P_i}{A} = \frac{P}{A} \dots\dots(2.5)$$

DONDE:

$\bar{\sigma}$  = Es el esfuerzo al corte.

$P$  = Carga aplicada.

$A$  = Área expuesta al corte

**2.4. DEFORMACIÓN POR CORTE**

Aislando al bloque 1 y considerando que esta formado por delgadas laminillas se tiene lo mostrado en la figura 2.3.

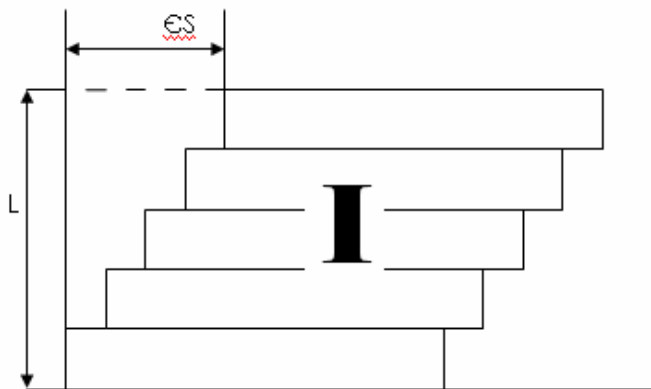


Figura 2.3. Bloque I aislado y formado por delgadas laminillas.

$$\gamma = \frac{eS}{L} \dots\dots(2.6)$$

Donde:

$\gamma$  : deformación unitaria al corte

Por analogía se obtiene:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \dots\dots (2.7)$$

Donde:

$G$ : es el modulo de elasticidad al corte

Existiendo la relación siguiente:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \dots\dots(2.8)$$

Donde :

$\mu$  es el módulo o relación de Poisson

Nota:

$$E \neq G$$

2.5. Dos placas se unen por medio de 2 remaches de 10mm de diámetro como se muestra en la figura 2.4. Calcule el esfuerzo cortante que se produce en los remaches cuando se aplica una carga de 2500kg

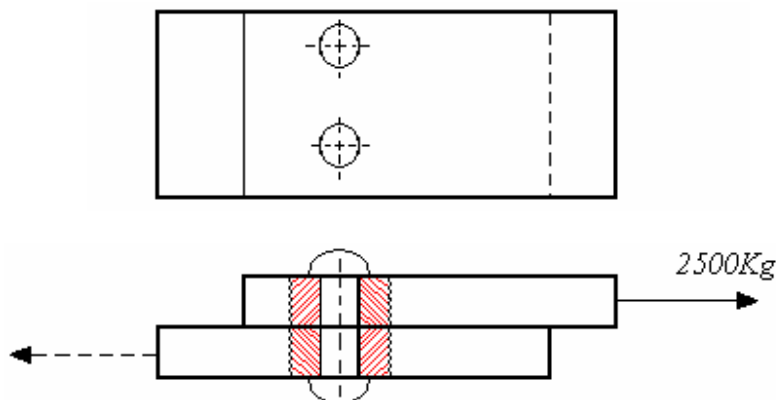


Figura 2.4.

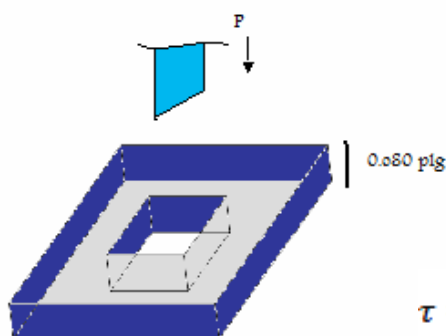
$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{n \cdot A_x}$$

$$A_x = \frac{\pi(dr)^2}{4}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{P(4)}{n \cdot \pi \cdot (dr)^2} = \frac{4 \times 2500}{2(\pi)(1)^2} = \underline{\underline{1591.5 \frac{Kg}{cm^2}}}$$

2.6. Se requiere punzonar un agujero cuadrado de  $\frac{3}{4}$  de pulgada por lado en una placa que tiene un espesor de 80 milésimas de pulgada y que tiene una resistencia máxima al corte de  $30,000 \frac{lb}{plg^2}$ . Calcule la fuerza necesaria para realizar la operación.



$$\tau = 30,000 \frac{lb}{plg^2}$$

$$\tau = \frac{P}{A} \rightarrow P = \tau A$$

$$\tau = \frac{P}{nL t} = \frac{P}{n(\text{perímetro})}$$

$$30,000 = \frac{P}{4 * 0.75 * 0.080}$$

$$P = 30,000 * 0.24 = 7,200 \text{ lb}$$

2.7. Una polea de 30 pulg. de diámetro se somete a la acción de las fuerzas que se muestran en la figura 2.5, se sujeta mediante una cuña a un eje de 2 pulg. de diámetro. Calcule el ancho b de la cuña, si tiene una longitud de 3 pulg. y el esfuerzo cortante admisible en la misma es de  $8500 \frac{lb}{plg^2}$ .

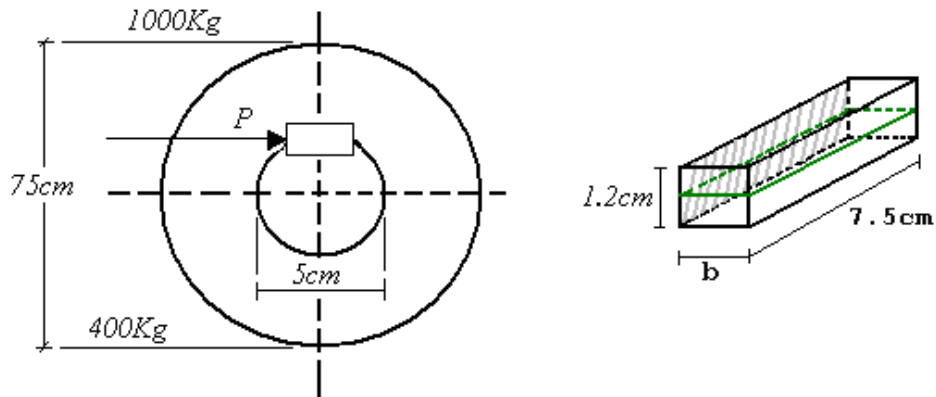


Figura 2.5.

$$\sum M_c = 0$$

$$1000(75) - P(2.5) - 400(75) = 0 \quad P = \frac{(1000 - 400)(75)}{2.5} = 9000 \text{Kg}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} = \frac{P}{b \times 7.5} \Rightarrow b = \frac{P}{\bar{\sigma} \times 7.5} = \frac{9000}{800 \times 7.5} = 1.5 \text{cm}$$

**2.5. DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE INGENIERÍA**

La mayor parte de propiedades mecánicas de un material se obtienen a partir de la prueba de tensión o tracción, para ello, una probeta de dimensiones normalizadas como la que se muestra en la figura 2.6 se somete a la acción de una carga axial P, la cual se incrementa poco a poco hasta que la probeta se rompe.

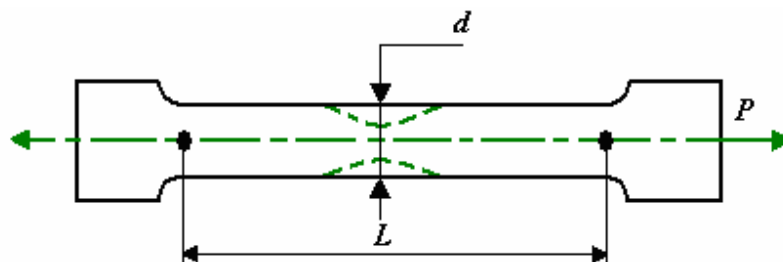


Figura 2.6. Probeta sometida a una carga axial P

Para cada valor de P se produce un esfuerzo y una deformación de acuerdo a las ecuaciones siguientes:

$$\sigma = \frac{P_i}{\Delta} \qquad \varepsilon = \frac{l_i - l}{l}$$

Con los valores de esfuerzo y deformación obtenidos se traza lo que se conoce como diagrama esfuerzo-deformación de ingeniería, mostrándose en la figura 2.7 el obtenido para un acero NOM-1018

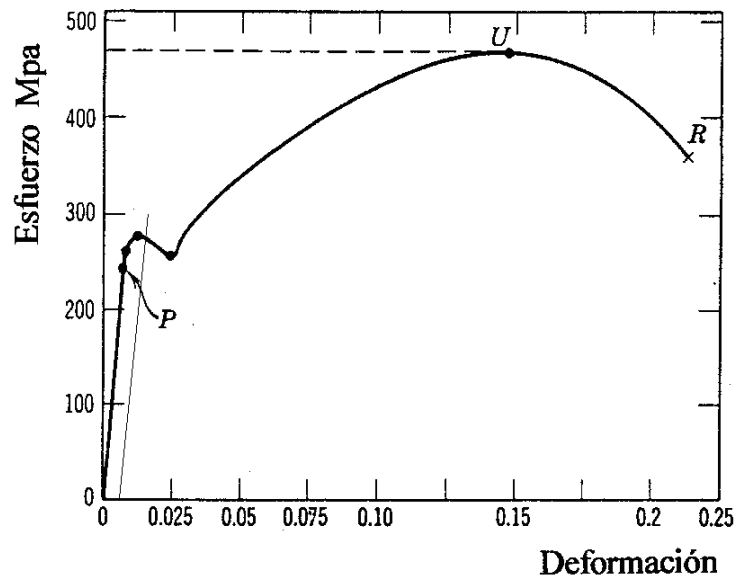


Figura 2.7. Diagrama esfuerzo - deformación para un acero de bajo contenido de carbono. En el diagrama, P es llamado Límite de Proporcionalidad

A partir de una deformación unitaria igual a 0.002 (0.2%) se traza una línea paralela a la parte lineal de la gráfica hasta intersectar a la curva, proyectándose este punto sobre el eje vertical se obtiene la resistencia a la fluencia o a la cedencia del material ( $\sigma_f$ )

Otras propiedades que se pueden obtener son las siguientes:

$\sigma_{max}$ : Es el esfuerzo más grande que puede soportar un material sin fracturarse.

$\sigma_{rup}$ : Resistencia a la ruptura es el esfuerzo que causa la fractura del material.

MODULO DE YOUNG (E). Es una medida de la rigidez del material

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

*E = Modulo de elasticidad de Yung*  
 *$\varepsilon$  = Elasticidad unitaria*  
 *$\sigma$  = Esfuerzo normal convencional*

Ductilidad. Es la capacidad que tiene un material de deformarse plásticamente antes de romperse

Porcentaje de elongación

$$\% \varepsilon = \frac{l_f - l_i}{l_i} \times 100\% > 8\% \quad \text{El material es ductil}$$

Porcentaje de Reducción de Área

$$\% R \text{ de } A = \frac{A_i - A_f}{A_i} \times 100\%$$

Se ha observado que para muchos de los materiales de uso corriente en ingeniería, la resistencia a la fluencia al corte se relaciona con la resistencia a la fluencia normal mediante la expresión siguiente:

$$\bar{\sigma}_F = 0.6\sigma_F$$

Donde:

$\sigma_F$  = Resistencia a la fluencia o cedencia normal

$\bar{\sigma}_F$  = Resistencia a la fluencia de corte

## 2.6. MODULO O RELACIÓN DE POISSON

Se define como el valor absoluto de la relación que existe entre la deformación transversal y la deformación longitudinal en un elemento sometido a tensión o compresión pura. Considérese el elemento prismático que se muestra en la figura 2.8.



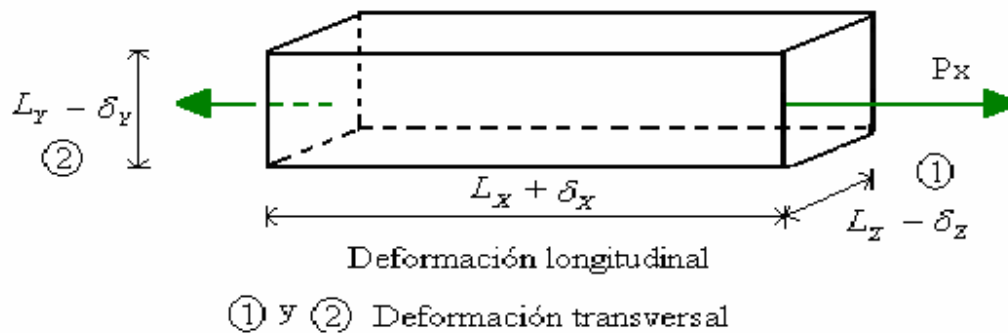


Figura 2.8. Elemento prismático sometido a una fuerza axial de tensión.

Se obtienen las deformaciones unitarias sobre cada uno de los ejes

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}, \quad \epsilon_y = \frac{-\delta_y}{L_y}, \quad \epsilon_z = \frac{-\delta_z}{L_z}$$

Y en base a la definición antes dada se tiene que:

$$\mu = \left| \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{-\epsilon_z}{\epsilon_x} \right| \dots\dots\dots (2.9)$$

Donde:

$\mu$  =Modulo o relación de Poisson

En la práctica el valor  $\mu$  esta entre:  $0.3 < \mu < 0.4$

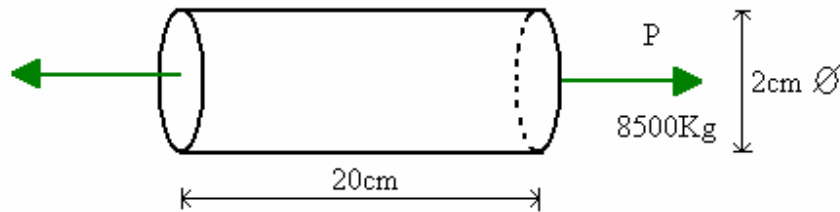
Cuando se desconoce el valor del material se toma como:  $\mu = \frac{1}{3}$

Se deben remarcar 2 puntos

- $\mu$  es una relación entre deformaciones unitarias.
- La deformación trasversal siempre será de sentido opuesto a la deformación longitudinal.

2.8. En una prueba de tensión una varilla de acero de 2cm de diámetro se somete a una fuerza de 8500kg si se sabe que  $\mu=0.33$  calcule

- a) el alargamiento de la varilla en una longitud inicial de 20 cm.
- b) El diámetro final de la varilla



Acero

$$\mu = 0.33$$

$$\delta_x = ?$$

$$\delta_y = ?$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_x}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{A \cdot E} = \frac{P(4)}{\pi \times d^2 (E)} = \frac{8500 \text{ Kg} \cdot (4)}{\pi \times (2 \text{ cm})^2 (2.1 \times 10^{-6})} = 1.3 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$$

$$a) \quad \epsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x} \quad \delta_x = \epsilon_x \cdot L_x = (1.3 \times 10^{-3})(20) = \underline{0.026 \text{ cm}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{L_y} \quad \delta_y = -4.2 \times 10^{-4} (2 \text{ cm}) = \underline{-8.5 \times 10^{-4}}$$

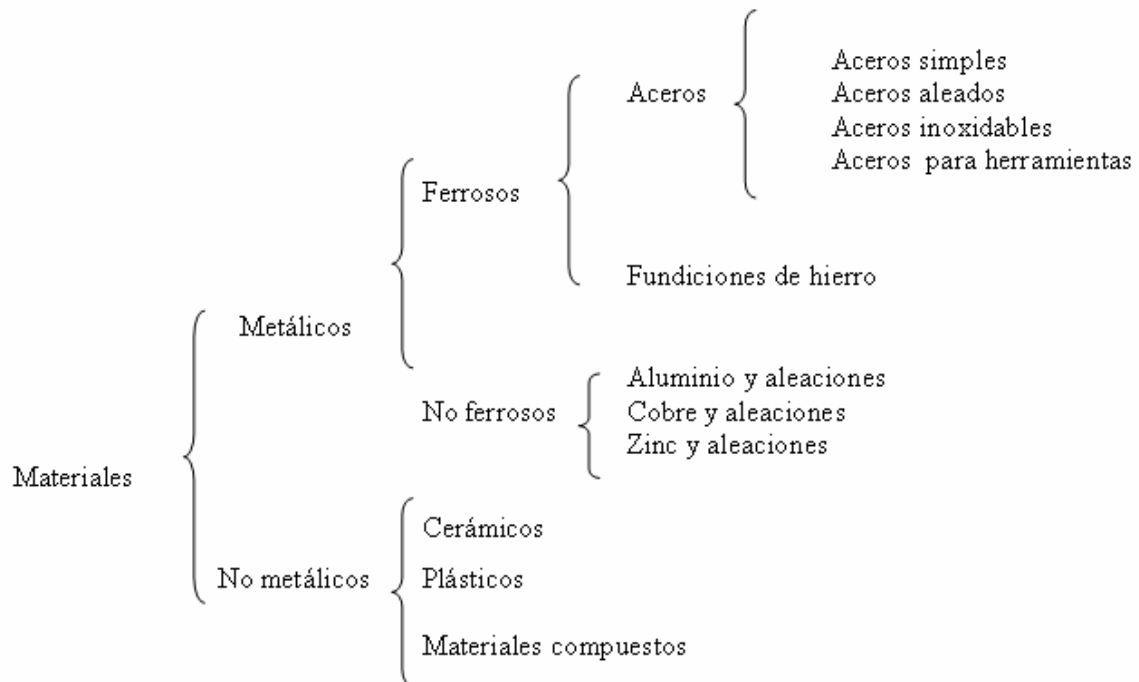
$$b) \quad \mu = \left| \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| \quad \text{despejando } \epsilon_y$$

$$\epsilon_y = (\mu)(-\epsilon_x) = (0.33)(-1.3 \times 10^{-3}) = \underline{4.29 \times 10^{-4}}$$

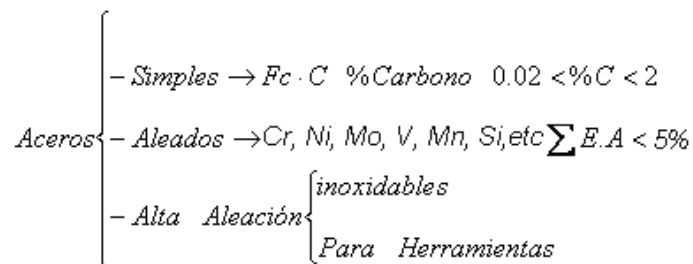
$$d_f = d_0 + \delta_y = 2 - 8.5 \times 10^{-4} = \underline{1.9991 \text{ cm}}$$

## 2.7. MATERIALES

Los materiales se pueden clasificar de manera general tal y como se muestra a continuación:



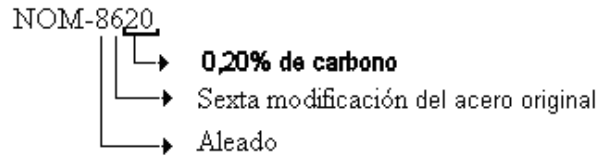
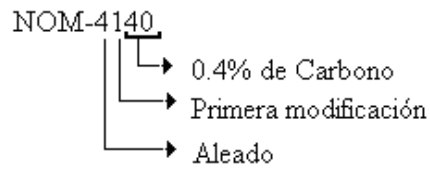
**Los aceros Son aleaciones hierro- carbono con un contenido de éste último en el rango de 0.02 al 2% y pequeñas cantidades de otros elementos que se consideran como impurezas, tales como P, S, Mn, Si, Cu, etc.**



**Clasificación: AISI-SAE-NOM.**

NOM-1022

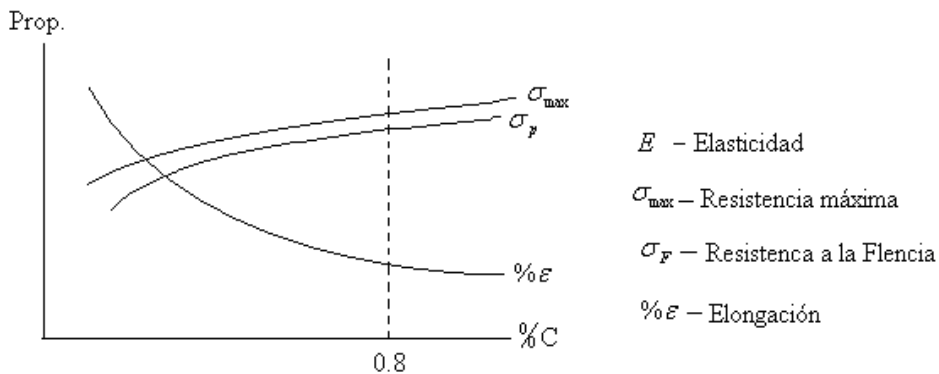
- Cantidad de carbono (0.22%)
- Tipo de modificación (o, no hay modificación) respecto al acero original
- Principal elemento de aleación.



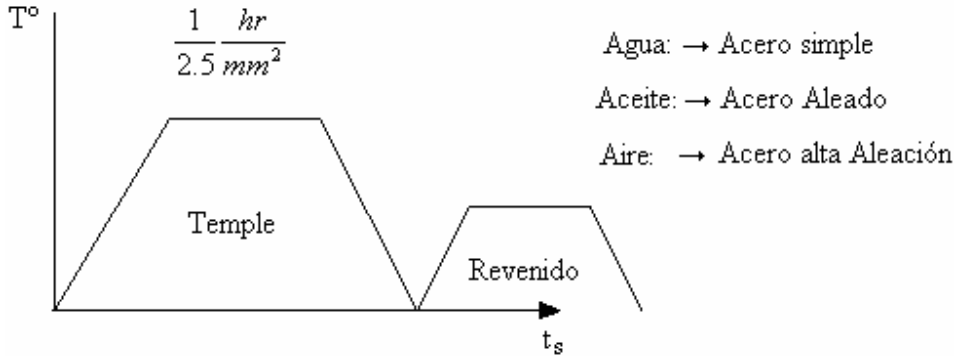
Familia	Principal elemento de aleación
1XXX	C
2XXX	Ni
3XXX	Cr-Ni
4XXX	Cr-Mo
5XXX	Cr
6XXX	Cr-V
8XXX	Cr-Ni-Mo
9XXX	Cr-Si



*Cold rolled* → Son aceros con un contenido de carbono en el rango de 0.18 a .22 % acabados en frío y que no se recomienda temprar



Varilla R-42  $\rightarrow \sigma_{\max} \rightarrow 42 \frac{Kg}{mm^2}$



*Temple: consiste en calentar el acero a una temperatura de 800°C a 900°C dependiendo de su composición química, dejando cierto tiempo a esa temperatura para que se homogenice la estructura y se finaliza con un enfriamiento rápido*

*Revenido: consiste en calentar el material a una temperatura de 300 a 400 °C y dejarlo enfriar al aire libre*

**2.8. FACTOR DE SEGURIDAD**

*Se define como la relación que existe entre la propiedad del material y el esfuerzo al que va a ser sometido o va a trabajar un elemento*

$$F.S = \frac{\text{Propiedad del material}}{\text{Esfuerzo de trabajo}} \dots\dots\dots(2.10)$$

*En base a la resistencia a la fluencia:*

$$F.S = \frac{\sigma_F}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_F}{F.S} \dots\dots(2.11)$$

*Donde:*

*$\sigma$  es el esfuerzo normal admisible.*

*Para elementos sometidos a corte se tiene:*

$$F.S = \frac{\bar{\sigma}_F}{\bar{\sigma}} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_F}{F.S} \quad \dots\dots(2.12)$$

Donde:

$\bar{\sigma}$ : es el esfuerzo admisible a corte.

En algunos pocos casos se utiliza la resistencia máxima ( $\sigma_{\max}$ ) como parámetro del diseño, por lo tanto: el esfuerzo admisible es igual:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{F.S} \quad \text{ó} \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{F.S} \quad \dots(2.13)$$

Algunas de las razones por las cuales se debe usar un F.S son:

1. El desconocimiento de la carga real que se va aplicar.
2. La variación en las propiedades del material.
3. Las pérdidas humanas ó económicas que pueden causar la falla de un elemento.

2.9. Calcular el esfuerzo admisible para un acero 4140 tratado térmicamente si debe utilizarse un factor de seguridad de 2.5

$$\begin{array}{l} \text{acero 4140} \rightarrow 11200 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \\ F.S. = 2.5 \end{array} \quad \sigma = \frac{\sigma_f}{F.S} = \frac{11200 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}}{2.5} = 4480 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

### 2.9. ESFUERZOS DE CONTACTO APOYO O APLASTAMIENTO

A diferencia de los esfuerzos normales y de corte que se desarrollan en el interior de los cuerpos bajo la acción de cargas externas. Los esfuerzos de apoyo se producen únicamente en la superficie de contacto de dos cuerpos distintos, por ejemplo, la presión sobre el terreno bajo una columna o la presión en las placas de apoyo (zapatas), figura 2.9.

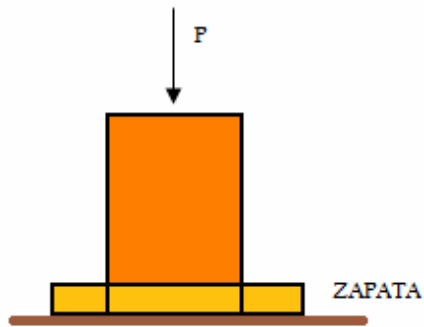


Figura 2.9. Columna bajo la acción de una carga P

*En Ingeniería Mecánica se tiene como ejemplo el esfuerzo de contacto entre un eje y su cojinete o entre un remache o perno y las paredes del orificio de las placas que sujeta, caso que estudiaremos en particular.*

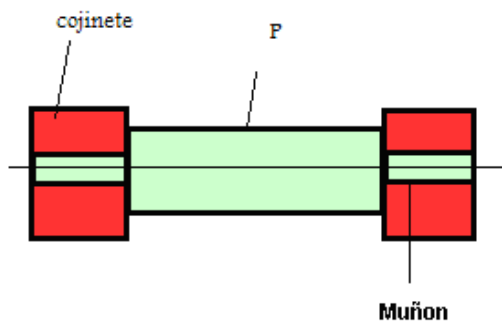


Figura 2.10. Eje descansando sobre cojinetes.

*De manera general, el esfuerzo de contacto se puede calcular así:*

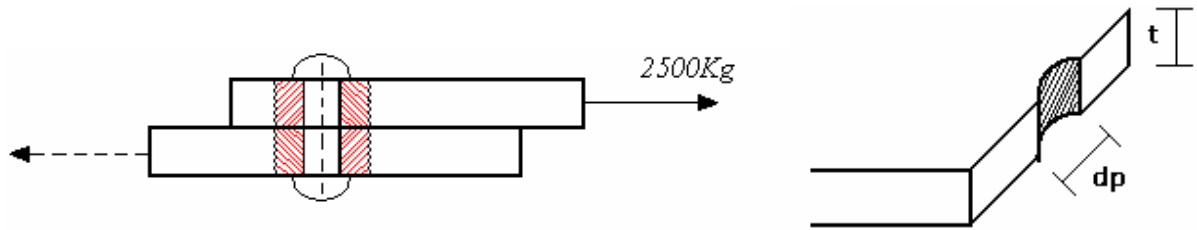
$$\sigma_c = \frac{P}{A_c} \quad \dots(2.14)$$

*Donde:*

$\sigma_c$  = Esfuerzo de contacto.

$A_c$  = Area de contacto.

*Para el caso de placas sujetas con pernos o remaches se tiene:*



$$A_C = \frac{\pi d_p^2}{2} \times t \rightarrow \text{Area real.}$$

$$A_C = d_p \cdot t \rightarrow \text{Area proyectada.}$$

En la práctica se utiliza el área proyectada, así:

$$\sigma_c = \frac{P}{A_C} = \frac{P}{d_p \cdot t} = \frac{P}{n(d_p \cdot t)} \dots\dots\dots(2.15)$$

Donde :

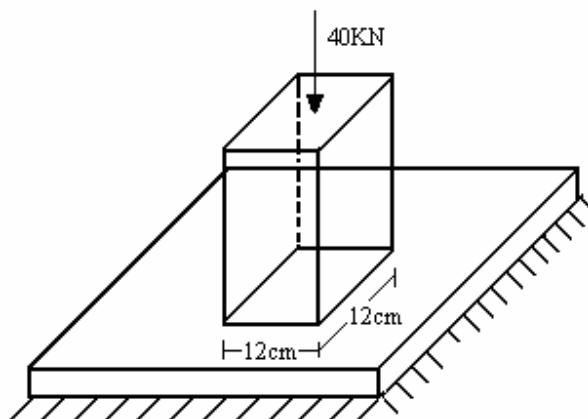
$n$  = Cantidad de pernos o remaches

$d_p$  = Diámetro del perno

$t$  = Espesor de la placa

2.9. Una carga axial de 40 KN se aplica a un poste corto de madera el cual es soportado por una zapata de concreto que reposa sobre el suelo plano. Calcule:

- a) El esfuerzo de apoyo en la zapata de concreto.
- b) El tamaño de la zapata para que el esfuerzo de apoyo en el suelo no exceda de 145 Kpa.





$$a) \quad \sigma_c = \frac{P}{A_c} = \frac{40000}{0.144}$$

$$= 277777.778 \frac{N}{m^2}$$

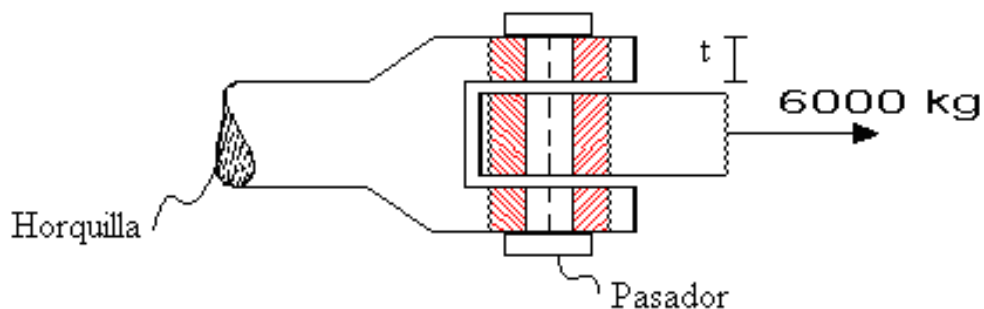
$$\approx \underline{2.77 MPa}$$

$$b) \quad A_c = \frac{P}{\sigma_c} = \frac{40000}{145000} \approx \underline{0.275 m^2}$$

$$A_c = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{A_c}$$

$$L = \sqrt{0.275} \approx \underline{0.52 m}$$

2.10. En el sistema de horquilla pasador que se muestra en la figura calcule el espesor que debe tener cada rama de la horquilla si el sistema debe soportar una carga de 6000kg sin que se exceda un esfuerzo de 700 kg/cm<sup>2</sup> al corte y de 1400 kg/cm<sup>2</sup> al aplastamiento.



a) Se calcula el diámetro del pasador.

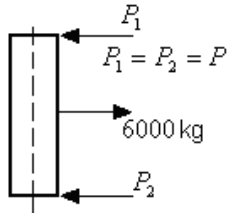
$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} = \frac{P}{2A_p} = \frac{P}{2\pi d_p^2}$$

$$d_p = \left( \frac{2P}{\pi \bar{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2 \times 6000}{\pi (700)} \right)^{\frac{1}{2}} = 2.33 cm$$

b) Se calcula el espesor de cada rama de la horquilla.

$$\sigma_c = \frac{P}{A_c} = \frac{P}{dpt} \Rightarrow t = \frac{P}{dp\sigma_c}$$

D. C. L. pasador

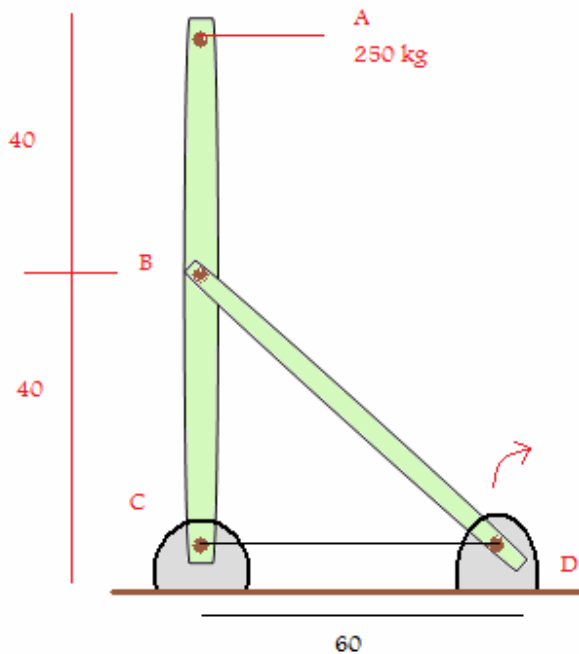


$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ 6000 - 2P &= 0 \\ P &= \frac{6000}{2} = 3000 \text{ kg} \end{aligned}$$

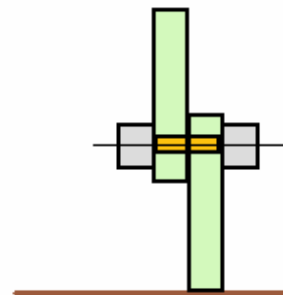
$$t = \frac{3000}{2.4 \times 1400} = 0.89 \text{ cm}$$

2.11. El sistema mostrado en la figura muestra que los pasadores B y D trabajan a corte simple y el pasador C trabaja a cortante doble, si todos los componentes del sistema deben ser fabricados con acero 1018 T.F. y debe usarse un factor de seguridad de 2.5. Calcule.

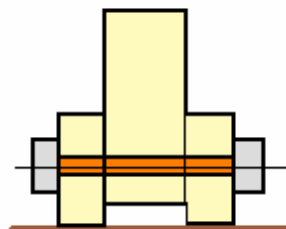
- a) El área necesaria para el elemento BD
- b) El diámetro de los pasadores B y D
- c) El diámetro del pasador C
- d) El espesor de las placas de soporte



Corte simple

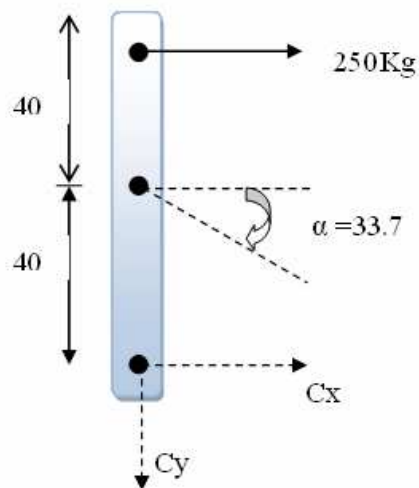


Corte doble



- (a)

D.C.L. del elemento AC



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{40}{60}\right) = 33.7^\circ$$

$$\curvearrowright + \Sigma M = 0$$

$$-250(80) + Bn \cos 33.7^\circ (40) = 0$$

$$Bn = \frac{250(80)}{40 \cos 33.7^\circ} = 601 \text{ kg}$$

$$\rightarrow + \Sigma F_x = 0$$

$$250 - 601 \cos 33.7^\circ + Cx = 0$$

$$Cx = 250 + 601 \cos 33.7^\circ = 250 \text{ kg}$$

$$\uparrow + \Sigma F_y = 0$$

$$60 \sin 33.7^\circ + Cy = 0$$

$$Cy = 60 \sin 33.7^\circ = -333 \text{ kg}$$

$$Rc = \sqrt{250^2 + 333^2} = 416.8 \text{ kg}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \sigma = \frac{\sigma_f}{F.S.} \quad \sigma_f = 3,800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \sigma = \frac{3,800}{2.5} = 1,520 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{601}{1,520} = 0.39 \text{ cm}^2$$

- (b)

$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$\tau = \frac{P4}{\pi d^2} \quad d = \sqrt{\frac{P4}{\pi \tau}}$$

$$\tau = \frac{0.6 \sigma_f}{F.S} = \frac{0.6(3,800)}{2.5} = 912 \frac{kg}{cm^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{4(60)}{\pi(912)}} = 0.92 \text{ cm} \approx 9.2 \text{ mm}$$

- (c) Diámetro del pasador C (que trabaja a corte doble).

$$\tau = \frac{P}{2A} \quad P = 416.8 \text{ kg}$$

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \tau}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2(416.8)}{\pi(912)}} = 0.54 \text{ cm} \approx 5.4 \text{ mm}$$

- (D) Se calcula el espesor para las placas en los puntos B y D (corte simple).

$$\sigma_c = \frac{P}{Ac} = \frac{P}{d * t}$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_f}{F.S} = \frac{3,800}{2.5} = 1,520 \frac{kg}{cm^2}$$

$$t = \frac{P}{d * \sigma_c} = \frac{601}{(0.92)(1,520)} = 0.42 \text{ cm}$$

$$\sigma_c = \frac{P}{Ac} = \frac{P}{2(d * t)}$$

$$t = \frac{P}{2d \sigma_c} = \frac{416.8}{2(0.54)(1,520)} = 0.25 \text{ cm} \approx 2.5 \text{ mm}$$

### 2.10. ESFUERZOS TÉRMICOS O DE ORIGEN TÉRMICO

La mayoría de los sólidos se expanden cuando se calientan y se contraen cuando se enfrían. El cambio en longitud con la temperatura para un material sólido se expresa como:

$$\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad ..(2.16)$$

Donde:

$\delta_T$  = Variación de la longitud inicial

$\alpha$  = Coeficiente de dilatación lineal

$$\left[ \frac{cm}{cm^{\circ}C} \quad \text{ó} \quad \frac{plg}{plg^{\circ}F} \right]$$

L = Longitud inicial

$\Delta T$  = Variación de temperatura.

Por supuesto el calentamiento ó el enfriamiento afectan todas las dimensiones de un cuerpo con un cambio en el volumen resultante

Si se impide la libre dilatación o contracción de la barra mostrada en la figura 2.11, se producen los llamados esfuerzos térmicos o de origen térmico, los cuales son producidos por la variación de temperatura en elementos estructurales de puentes y edificios, vías de ferrocarril, componentes de motores de combustión interna, turbinas y piezas maquinadas.

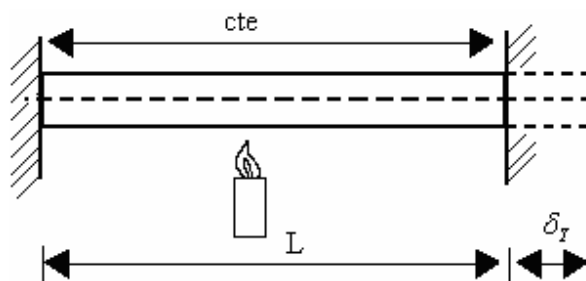


Figura 2.11. Barra metálica sometida a calentamiento.

Para calcular los esfuerzos creados se utiliza la ley de Hooke:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Considerando la variación de temperatura:

$$E = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T} \quad \dots(a)$$

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \frac{\alpha \cdot L \cdot \Delta T}{L} = \alpha \cdot \Delta T \quad \dots(b)$$

Sustituyendo (b) en (a) se tiene:

$$E = \frac{\sigma_T}{\alpha \cdot \Delta T}$$

Despejando a  $\sigma_T$  se obtiene:

$$\boxed{\sigma_T = E \cdot \alpha \cdot \Delta T} \quad \dots\dots(2.17)$$

2.12. Una barra de acero se coloca entre 2 apoyos fijos colocados a una separación de 2m calcule el esfuerzo en el acero cuando la temperatura aumenta  $60^\circ\text{C}$ .



Acero  
 $\sigma_T = ?$   
 $\Delta T = 60^\circ\text{C}$

$$E_T = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\alpha = 11.8 \times 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{cm}^\circ\text{C}}$$

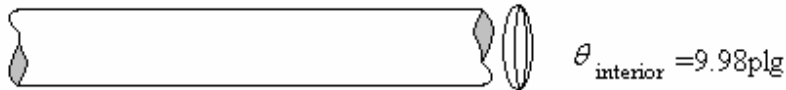
$$\sigma_T = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\sigma_T = (2.1 \times 10^6)(11.8 \times 10^{-6})(60)$$

$$\boxed{= 1486 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}}$$

2.13. Un anillo delgado de latón tiene un diámetro interior de 9.98 pulg. y debe ajustarse sobre una flecha de acero de 10pulg. de diámetro. Suponiendo que la temperatura de acero se conserva a  $70^\circ\text{F}$  calcule.

- a) La temperatura a la que debe calentarse el anillo para que pueda colocarse libremente sobre la flecha de acero.  
 b) El esfuerzo en el anillo cuando se enfría hasta  $70^{\circ}\text{F}$



$$\theta = 10 \text{ plg}$$

- a) Se calcula el perímetro de la flecha.

$$\begin{aligned} Per &= \pi \cdot d \\ &= (\pi \cdot 10) \\ &= 31.416 \text{ plg} \end{aligned}$$

Se calcula la longitud del anillo

$$\begin{aligned} & \boxed{\phantom{L}} \\ & \boxed{L} \\ & L = \pi \cdot d \\ & = \pi(9.98 \text{ plg}) \\ & = 31.353 \text{ plg} \end{aligned}$$

Dilatación del anillo

$$\begin{aligned} \delta_r &= Per - L \\ &= 31.16 - 31.353 \\ &= \boxed{0.063 \text{ plg}} \end{aligned}$$

$$\alpha = 20 \times 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{cm}^{\circ}\text{C}} \times \frac{1^{\circ}\text{C}}{1.8^{\circ}\text{F}} = 11.1 \times 10^{-6} \frac{\text{plg}}{\text{plg}^{\circ}\text{F}}$$

$$\delta_r = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad \Delta T = \frac{\delta_r}{\alpha \cdot L}$$

$$\Delta T = \frac{\delta_r}{\alpha \cdot L} = \frac{0.063}{(11.1 \times 10^{-6})(31.353)} = \boxed{181.02^{\circ}\text{F}}$$

$$T_F = T_0 + \Delta T = 70 + 181.02 = \boxed{251.02^{\circ}\text{F}}$$

$$T_F \approx \frac{251.02^{\circ}\text{F} - 32}{1.8^{\circ}\text{F}} \approx 121^{\circ}\text{C}$$

b) Al enfriarse el anillo se produce un esfuerzo térmico.

$$\sigma_T = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$$

$$E = 1.124 \times 10^{-6} \frac{Kg}{cm^2} \times \left( \frac{2.2lb}{1Kg} \times \frac{(2.54)^2 cm^2}{1plg^2} \right) = 16 \times 10^{-6} \frac{lb}{plg^2}$$

$$\sigma_T = (11.1 \times 10^{-6})(16 \times 10^{-6})(181.06) = \underline{32149 Psi}$$

Considerando las propiedades del latón que parece en la tabla 1.1:

$$\sigma_{max_t} = 3860 \times 14.2 = \underline{54812 Psi}$$

$$\sigma_F = 1750 \times 14.2 = \underline{24850 Psi}$$

Se deforma plásticamente  
pero no se rompe

2.14. Un alambre de acero AB se estira entre 2 soportes rígidos (ver figura 2.12) produciéndose un esfuerzo de 30 Mpa cuando la temperatura es de 20°C. Calcule

a) ¿Cuál es el esfuerzo en el alambre cuando la temperatura desciende a 0°C?

b) A que temperatura el esfuerzo del alambre se vuelve 0.

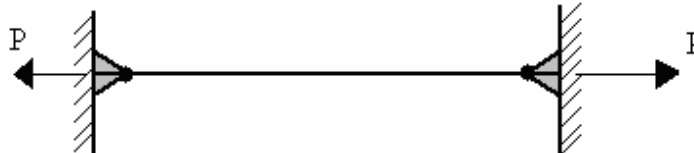


Figura 2.12

$$\sigma_o = 30MPa$$

$$t_o = 20^\circ C$$

$$t_f = 0^\circ C$$

$$\sigma_{total} = \sigma_o + \sigma_T$$

$$t = ?$$

$$\sigma = 0$$



a)

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_o + \sigma_{\text{total}} = (30 \times 10^6) + (48.61 \times 10^6) = 78.61 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 78.6 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{total}} = \alpha * E * \Delta T = (11.8 \times 10^{-6})(206 \times 10^9)(20) = 48.61 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\alpha = 118 \times 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{cm}^\circ\text{C}} = 11.8 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{m}^\circ\text{C}}$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times \frac{9.81 \text{N}}{1 \text{kg}} \times \frac{(100)^2 \text{cm}^2}{1 \text{m}^2} \approx 206 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

b)  $\sigma_T = \sigma_o$ 

$$\alpha * E * \Delta T = \sigma_o$$

$$\Delta T = \frac{\sigma_o}{\alpha * E} = \frac{30 \times 10^6}{(11.8 \times 10^{-6})(206 \times 10^9)} \approx 12.34^\circ\text{C}$$

$$T_f = t_o + \Delta T = 20 + 12.34 \approx 32.34^\circ\text{C}$$

### 2.11. ESFUERZOS SOBRE PLANOS DIAGONALES EN ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE.

Ya se vio que en elementos cargados axialmente, que en los planos perpendiculares a la carga aplicada se produce un esfuerzo normal  $\sigma$ , sin embargo, en los planos que forman un ángulo  $\theta$  con dichos planos (planos diagonales) se produce tanto un esfuerzo normal como un esfuerzo cortante, estando ambos en función del valor del ángulo  $\theta$



Figura 2.13. Elemento sometido a una carga axial.

Para entender mejor la naturaleza de los esfuerzos mencionados, considere el elemento corto de la figura 2.14, el cual está formado por los bloques I y II y está sometido a una fuerza F

I.M.E

Mtro. Felipe Díaz del Castillo R.

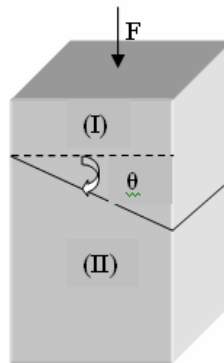


Figura 2.14. Elemento corto cuadrado

Aislando al bloque I y trazando su D.C.L. se obtiene lo mostrado en la figura 2.15.

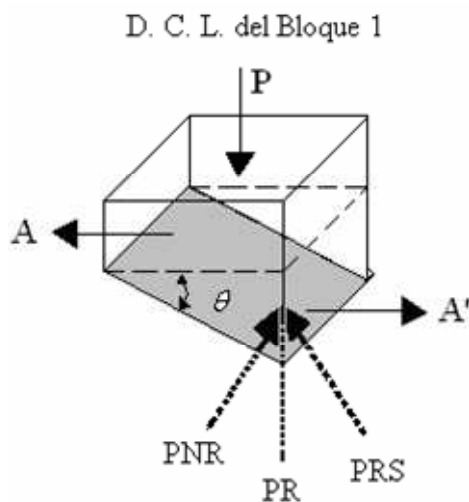


Figura 2.15. D.C.L. del bloque I

Donde:

$A$  = Área del plano perpendicular a la carga  $P$

$A'$  = Área del plano diagonal  $A' = \frac{A}{\cos \theta}$

$\theta$  = Es el ángulo que existe entre el plano perpendicular a la carga y el plano diagonal.

A continuación, partiendo de las ecuaciones básicas se obtienen las relaciones que definen ambos esfuerzos:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \sigma_N = \frac{P_{RN}}{A'} = \frac{P_R \cos\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P_R \cos^2\theta}{A} = \frac{P \cos^2\theta}{A}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$\rightarrow \sigma_N = \frac{P}{2A} + \frac{P}{2A} \cos 2\theta \quad \dots(2.18)$$

Y para los esfuerzos de corte:

$\bar{\sigma}_s$  = Esfuerzo de corte

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A} \quad ; \quad \bar{\sigma}_s = \frac{P_{RS}}{A'} = \frac{P_R \sen\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P_R \sen\theta \cos\theta}{A}$$

$$\sen\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \sen 2\theta$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = \frac{P_R}{2A} \sen 2\theta = \frac{P}{2A} \sen 2\theta \quad \dots\dots(2.19)$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$  en las ecuaciones (2.18) y (2.19) se obtiene la gráfica mostrada en la figura 2.16.

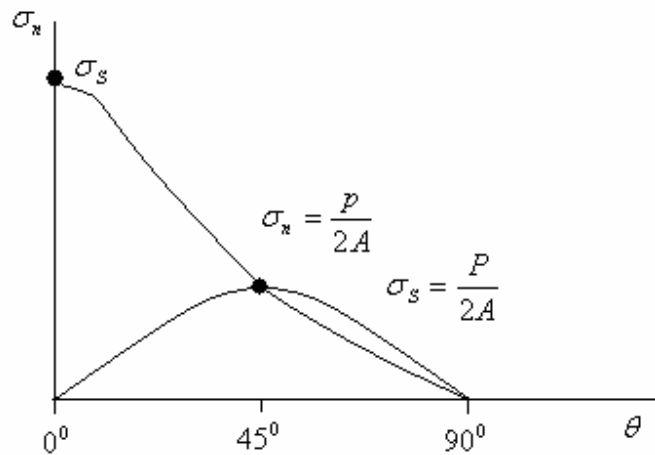


Figura 2.16. Variación de los esfuerzos normal y de corte en función de  $\theta$

Resumiendo los valores obtenidos se tiene lo siguiente:

Cuando  $\theta = 0$   $\sigma_N \max = \frac{P}{A}$   $\bar{\sigma}_s = 0$

$$\text{Cuando } \theta = 45^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_s \text{ max} = \frac{P}{2A} \\ \sigma_N = \frac{P}{2A} \end{array} \right\} \therefore \bar{\sigma}_s = \sigma_N$$

$$\text{Cuando } \theta = 90^\circ \quad \sigma_N = \bar{\sigma}_s = 0$$

### 12.11.1 Círculo de Mohr.

Para reforzar el análisis anterior el uso del círculo de Mohr es de ayuda invaluable. Se trata de un método semigráfico desarrollado a fines del siglo XIX por el Ingeniero alemán Otto Mohr y que consiste básicamente en lo siguiente:

1. Se establece un sistema de coordenadas donde el eje horizontal representa al esfuerzo normal  $\sigma_N$  y el eje vertical representa el esfuerzo de corte  $\tau_s$ .
2. A continuación se dibuja un círculo sobre el eje  $x$ , tangente al eje  $y$  y cuyo centro se localiza a una distancia  $\frac{P}{2A}$  medida desde el origen.
3. A continuación se traza una línea a partir del centro del círculo y a un ángulo de  $2\theta$  con respecto al eje horizontal (siempre en sentido horario) e intersectando al círculo en el punto  $P$ .
4. Las componentes del punto  $P$  sobre los ejes horizontal y vertical proporcionan el valor de los esfuerzos normal y corte respectivamente en el plano bajo estudio.

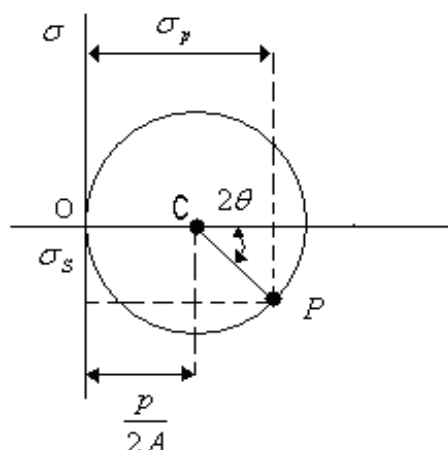


Figura 2.17. Círculo de Mohr

A partir del círculo de Mohr se obtienen las ecuaciones antes alcanzadas.

$$\sigma_N = OC = CP \cos 2\theta$$

$$\sigma_N = \frac{P}{2A} + \frac{P}{2A} \cos 2\theta \quad \text{y:}$$

$$\tau_s = CP \sin 2\theta$$

$$\tau_s = \frac{P}{2A} \sin 2\theta$$

La mayor parte de los materiales disponibles para el diseño en ingeniería posee una resistencia a la fluencia ( $\sigma_f$ ) y por lo tanto el diseño de elementos estructurales sometidos a cargas axiales se hará en función de la resistencia a la fluencia normal. Pero si el material a utilizar es madera o concreto se deberá considerar el esfuerzo cortante que se crea sobre planos diagonales ya que posiblemente su resistencia al corte ( $\tau_f$ ) sea menor que 0.5 de la resistencia a la fluencia normal. Esto es:

$$\tau_f = (0.6) (\sigma_f) \quad \text{y}$$

$$\tau_f < 0.5\sigma_f \quad \text{Madera, concreto, etc.}$$

2.15. Una muestra para prueba de tensión de acero de bajo carbono presento una deformación de 3 milésimas de pulg. sobre una longitud inicial de 2 pulg. Calcule el esfuerzo cortante máximo en el material.

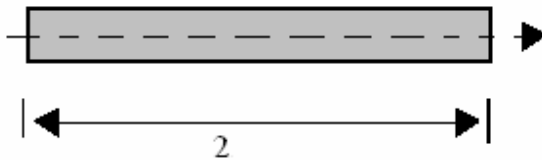
Solución:

I.M.E

Mtro. Felipe Díaz del Castillo R.

$$\delta_x = 0.003 \text{ plg}$$

$$\sigma_{\max} = ?$$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{0.003}{2} = 1.5 \times 10^{-3} \frac{\text{plg}}{\text{plg}}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = (30 \times 10^6)(1.5 \times 10^{-3}) = 45000 \text{ Psi}$$

Se sabe que sobre planos que forman un ángulo de  $45^\circ$  con respecto al plano perpendicular a la carga se crea un esfuerzo cortante que es máximo, por lo tanto:

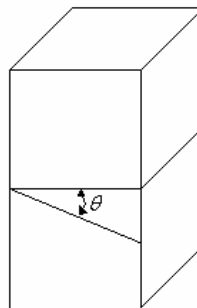
$$\tau_{\max} = \frac{p}{2A} = \frac{\sigma}{2} = \frac{45000 \text{ Psi}}{2} = 22500 \text{ Psi}$$

2.16. Un elemento de sección cuadrada de 4 pulg. x lado se somete a la acción de una carga axial de tensión de 48000 lb. Calcule los esfuerzos normales y de corte. Sobre los planos a  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  con respecto al plano perpendicular a la carga. Utilice círculo de Mohr.

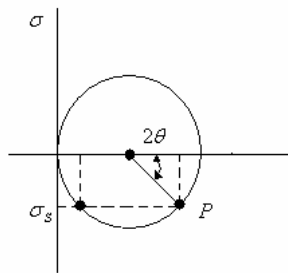
$$\theta = 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ$$

$$\sigma_n = ?$$

$$\tau_s = ?$$



$$\overline{oc} = \frac{p}{2A} = \frac{48000}{2(4 \times 4)} = 15000 \text{ Psi}$$



- |  |  |   |
|--|--|---|
| <p>a) <math>\theta = 30^\circ \quad 2\theta = 60^\circ</math></p> <p>1500 <math>\rightarrow</math> 3cm</p> <p>2250 <math>\rightarrow</math> 4.5cm <math>\rightarrow \sigma_n</math></p> <p>1300 <math>\rightarrow</math> 2.6cm <math>\rightarrow \tau_s</math></p> <p><math>\sigma_n = 2250 \text{Psi}</math></p> <p><math>\tau_s = 1300 \text{Psi}</math></p> | <p>b) <math>\theta = 45^\circ \quad 2\theta = 90^\circ</math></p> <p>1500 <math>\rightarrow</math> 3cm</p> <p>1500 <math>\rightarrow</math> 3cm <math>\rightarrow \sigma_n</math></p> <p>1500 <math>\rightarrow</math> 3cm <math>\rightarrow \tau_s</math></p> <p><math>\sigma_n = \tau_s = 1500 \text{Psi}</math></p> | <p>c) <math>\theta = 60^\circ \quad 2\theta = 120^\circ</math></p> <p>1500 <math>\rightarrow</math> 3cm</p> <p>750 <math>\rightarrow</math> 1.5cm <math>\rightarrow \sigma_n</math></p> <p>1300 <math>\rightarrow</math> 2.6cm <math>\rightarrow \tau_s</math></p> <p><math>\sigma_n = 750 \text{Psi}</math></p> <p><math>\tau_s = 1300 \text{Psi}</math></p> |
|--|--|---|

$$\sigma_N = \frac{p}{2A} = \frac{48000}{2(16)} + \frac{48000}{2(16)} \cos 60^\circ =$$

$$\tau_s = \frac{p}{2A} = \text{sen } \theta = \frac{4800}{2(16)} \text{sen } 60^\circ = 1299.03 \text{Psi}$$

### CAPITULO 3

## ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSIÓN.

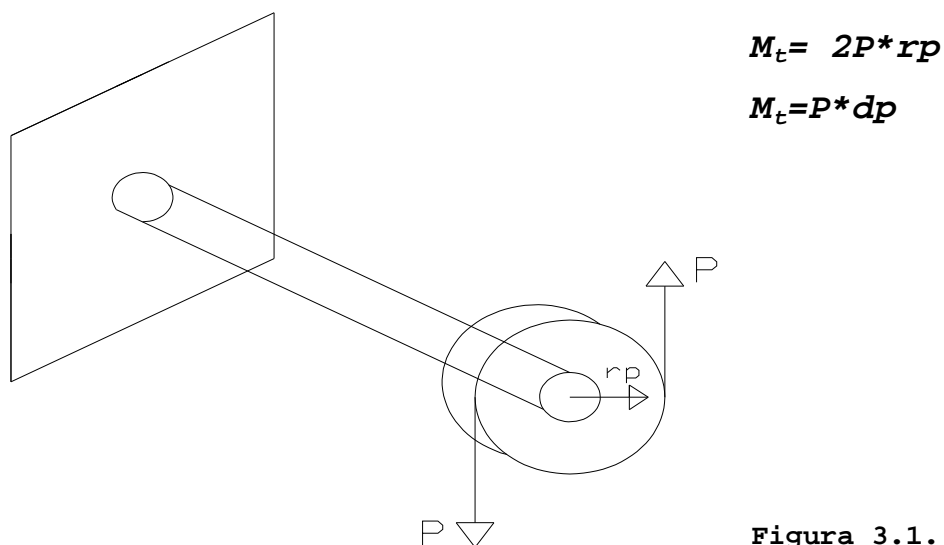
### 3.1. INTRODUCCIÓN

Al tipo de carga que tiende a torcer una barra alrededor de su eje longitudinal, se le llama momento torsionante, torque o simplemente par ( $M_t$ ).

Los elementos de sección circular son los mas comúnmente asociados con este tipo de carga, y se presentan en muchas aplicaciones practicas, especialmente en el campo de diseño de maquinas. Las cargas de torsión se originan por medio de poleas, engranes, catarinas, ruedas dentadas, etc. que mueven o son movidas mediante flechas.

Experimentalmente, la aplicación de un momento torsionante se puede hacer de dos maneras distintas tal y como se muestra en la figura :

a) Por medio de dos fuerzas utilizando una polea de radio  $r_p$  (diámetro  $d_p$ ), figura 3.1.





O utilizando una sólo fuerza  $P$ , figura 3.2.

$$M_t = P \cdot r_p$$

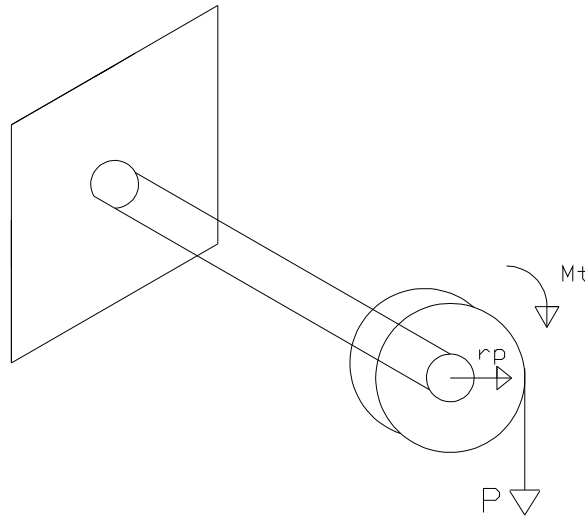
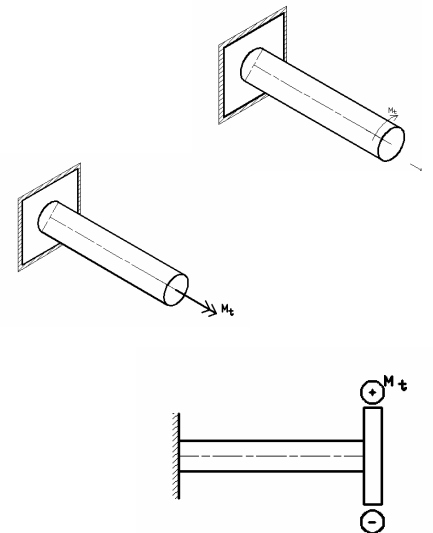


Figura 3.2.

En la práctica se utilizan distintos métodos para la representación de un momento torsionante, los cuales se ilustran a continuación.

1. Mediante línea curva, cuya punta de flecha indica el sentido del momento.
2. Mediante un vector con 2 puntas de Flecha.
3. Mediante 2 pequeños círculos que Encierran un círculo.



### 3.2. MOMENTO RESISTENTE INTERNO

Para calcular el momento torsionante que actúa en una flecha compuesta por varias secciones debe hacerse lo siguiente

- 1) Se corta la flecha mediante un plano en el punto de interés
- 2) Se obtiene el diagrama de cuerpo libre de una flecha en el punto de corte

3) Se aplica la siguiente ecuación con respecto al plano de interés

$$\curvearrowright + \sum M_t = 0 \dots\dots(3.1)$$

Ejemplo:

3.1. Calcular el Momento Torsionante Resistente Interno en las secciones A y B de la flecha que se muestra en la figura 3.3.

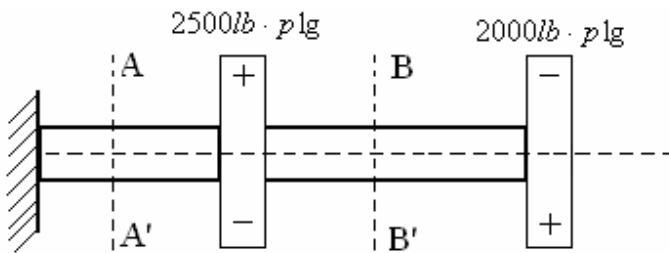
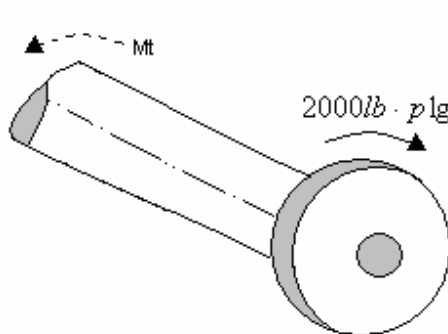


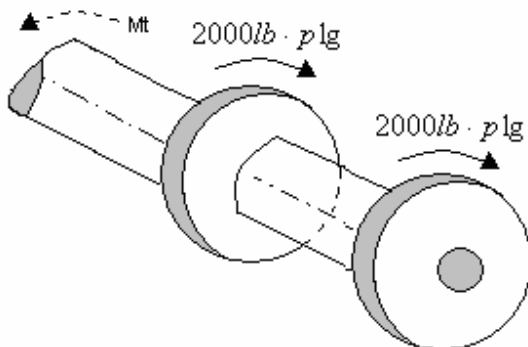
Figura 3.3.

D.L.C. sección B-B'



$$\begin{aligned} \curvearrowleft + M_{t_B} &= 0 \\ - 2000 \text{ lb} \cdot p \cdot \text{lg} + M_{t_y} &= 0 \\ M_{t_y} &= 2000 \text{ lb} \cdot p \cdot \text{lg} . \end{aligned}$$

D.C.L. sección A-A'



$$\begin{aligned} \curvearrowleft + M_{t_A} &= 0 \\ - 2000 + 3000 + M_{t_y} &= 0 \\ M_{t_y} &= 2000 - 3000 \\ &= -1000 \text{ lb} \cdot p \cdot \text{lg} \end{aligned}$$

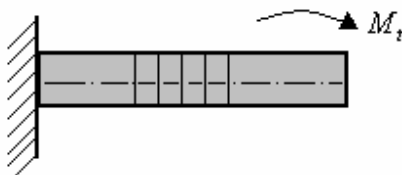
### 3.3. PROYECTO MECÁNICO DE ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSIÓN

Los elementos sometidos a torsión tienen que proyectarse en base a dos parámetros fundamentales a saber:

1. *Resistencia:* Esto es, que el nivel de esfuerzos producidos en el elemento no exceda de cierto valor.
2. *Rigidez:* Esto significa que la deformación que sufre el elemento se mantenga dentro de ciertos límites.

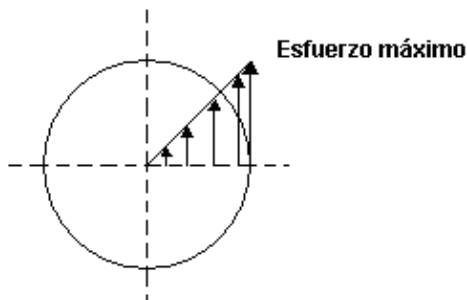
Por lo tanto se necesitan 2 ecuaciones que permitan calcular esfuerzos y deformaciones en elementos sometidos a torsión. Para facilitar el análisis se hacen las siguientes consideraciones:

1. Toda sección que es plana antes de aplicar el momento torsionante permanece igual después de hacerlo. Esto es que no sufre alabeo.



2. Se considera que los esfuerzos producidos en la barra se encuentran dentro de la región elástica.

3. Se asume que los esfuerzos varían linealmente desde un valor mínimo e igual a cero en el centro de la barra hasta un valor máximo en la superficie.



Considérese un elemento de sección circular sometido a la acción de un  $M_t$  como se muestra en la figura 3.4:

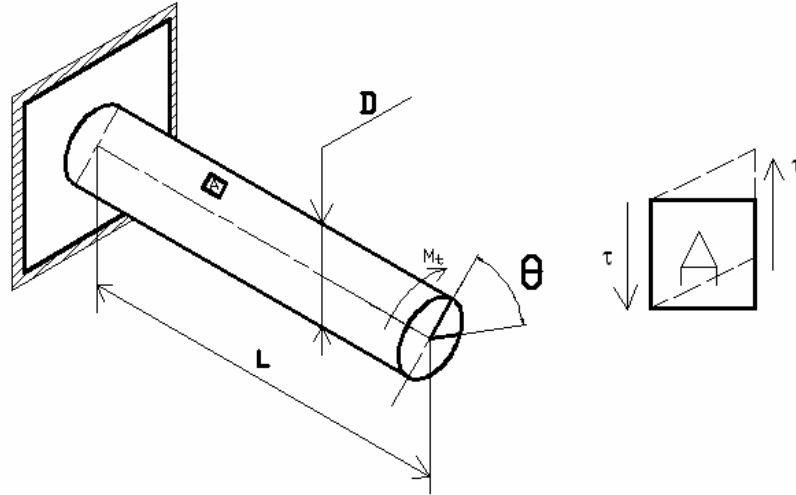


Figura 3.4. Barra de sección circular sometida a torsión

El esfuerzo cortante producido en la barra se puede calcular así:

$$\tau = \frac{M_t \cdot D}{2J}$$

$$\tau = \frac{M_t \cdot R}{J} \dots\dots(3.2)$$

Donde:

$J$ =Momento polar de inercia-propiedad geométrica de la sección en rigor

$$J = I_{x_x} + I_{y_y} = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

Y la deformación angular:

$$\Theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} \dots\dots(3.3)$$

Donde:

$L$ = longitud de la barra

$G$ = Modulo de elasticidad de corte

$J$ = Momento polar de inercia

Para una sección circular sólida.

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2} \quad (\text{pulg.}^4, \text{cm}^4, \text{m}^4)$$

Para una sección circular hueca.

$$J = \frac{\pi(D_E^4 - D_I^4)}{32} = \frac{\pi(R_E^4 - R_I^4)}{32}$$

Para una sección circular hueca de pared delgada (sección tubular)

$$R_E - R_I = t$$

$$R_E \approx R_I$$

$$\rightarrow J = 2\pi R^3 \cdot t$$

$t =$  espesor de la pared del tubo

3.2. Una barra de acero de 3cm de diámetro y de 60cm de longitud se somete a una acción de un momento torsionante de 2500 kg\*cm. Calcule el esfuerzo y la deformación experimentados por la barra.

a)

$$\tau = \frac{Mt \cdot D}{2J} = \frac{Mt \cdot D}{2 \left( \frac{\pi D^4}{32} \right)} = \frac{32Mt \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot D^4} = \frac{16Mt}{\pi \cdot D^3}$$

$$\tau = \frac{16(2500)}{\pi \cdot (3)^3}$$

$$\tau = 471.57 \text{ kg/cm}^2$$

b)

$$\Theta = \frac{Mt \cdot L}{G \cdot J} = \frac{Mt \cdot L}{G \cdot \left( \frac{\pi D^4}{32} \right)} = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi \cdot D^4} \quad \Theta = 0.023 \text{ rad}$$

$$\Theta = 0.023 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \cdot \text{rad}} =$$

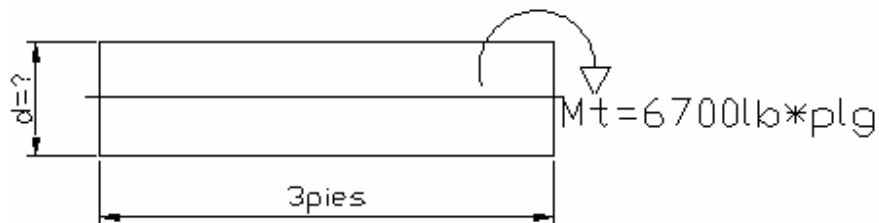
$$\Theta = \frac{32(2500) \cdot (60)}{(0.0808 \times 10^6) \cdot \pi \cdot (3)^4} =$$

$$\Theta = 1.33^\circ$$

I.M.E

Mtro. Felipe Díaz del Castillo R.

3.3. En una flecha maciza de acero el momento torsionante aplicado es de 6700 lb.pulg. si el esfuerzo cortante admisible es de 8000 psi y el máximo ángulo de deformación es de 2.5° en una longitud de 3 pies calcule el diámetro necesario para la flecha:



$$\tau = 8000 \text{ psi}$$

$$\Theta = 2.5^\circ \rightarrow 0.043 \text{ rad}$$

a) Se calcula el diámetro en función del esfuerzo cortante admisible.

$$\tau = \frac{M_t \cdot D}{2J} = \frac{16M_t}{\pi \cdot D^3}$$

$$D^3 = \frac{16M_t}{\pi \cdot \tau}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16(6700)}{\pi \cdot (8000)}}$$

$$D = 1.62 \text{ plg}$$

b) En función de la deformación angular

$$\Theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} = \frac{32M_t \cdot L}{G \cdot \pi \cdot D^4}$$

$$D^4 = \frac{32M_t \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \Theta}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_t \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \Theta}}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32(6700) \cdot (3 \times 12)}{(11.5 \times 10^6) \cdot \pi \cdot (0.043)}}$$

$$D = 1.49 \text{ plg}$$

3.4. Hallar la longitud de una varilla de bronce de 2 mm de diámetro de modo tal que pueda retorcerse 2 vueltas completas sin exceder un esfuerzo cortante admisible de  $700 \text{ kg/cm}^2$

Bronce  
 $D=2\text{mm}$   
 $L=?$   
 $\theta=2 \text{ vueltas}=4 \pi \text{ rad}$   
 $G=700 \text{ kg/cm}^2$

Se calcula el valor del momento que se puede aplicar:

$$\bar{\sigma} = \frac{MtD}{2J} = \frac{16Mt}{\pi D^3}$$

$$Mt = \frac{\bar{\sigma} \pi D^3}{16} = \frac{700 \times \pi (0.2)^3}{16} = \boxed{1.1 \text{ Kg/cm}}$$

Y se calcula la longitud de la varilla:

$$\theta = \frac{MtL32}{G\pi D^4}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow L = \frac{(4\pi)(0.450 \times 10^6)(\pi)(0.2)^4}{32(1.1)} = \boxed{807.5 \text{ cm}}$$

$$\boxed{L = 807 \text{ cm}}$$

3.5. Una flecha de acero, con los diámetros que se muestran en la figura 3.5. Se somete a la acción de un momento Torsionante: Si el momento torsionante admisible es de  $850 \text{ kg/cm}^2$  y la deformación no debe de exceder de  $2.5^\circ$ . Calcule la magnitud del torque que se puede aplicar.

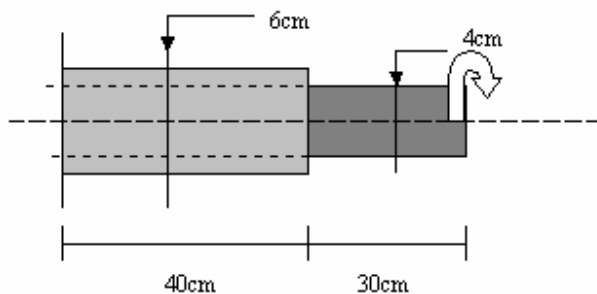


Figura 3.5.

$$\tau = 850 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\Theta = 2.5^\circ \rightarrow 0.043 \text{rad}$$

- Se calcula  $Mt$  en función de la resistencia de la sección sólida.

$$\tau = \frac{Mt \cdot D}{2J} = \frac{16Mt}{\pi \cdot D^3} =$$

$$Mt = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot \tau}{16} =$$

$$Mt = \frac{\pi \cdot (4)^3 \cdot (850)}{16} =$$

$$Mt = 10681 \text{Kg} \cdot \text{cm}$$

- Se calcula  $Mt$  para la sección hueca

$$\tau = \frac{Mt \cdot D}{2J} =$$

$$J = \frac{\pi(D_E^4 - D_I^4)}{32}$$

$$\tau = \frac{Mt \cdot D_E}{2 \left( \frac{\pi(D_E^4 - D_I^4)}{32} \right)} =$$

$$\tau = \frac{32Mt \cdot D_E}{2\pi(D_E^4 - D_I^4)} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{16Mt \cdot D_E}{\pi(D_E^4 - D_I^4)} =$$

$$Mt = \frac{\tau \cdot \pi(D_E^4 - D_I^4)}{16 \cdot D_E}$$

$$Mt = \frac{(850) \cdot \pi((6)^4 - (4)_I^4)}{16 \cdot (6)} =$$

$$Mt = 28928.8 \text{Kg} \cdot \text{cm}$$



Por último, se calcula  $D$  en función de la deformación angular.

$$\Theta = \Theta_s + \Theta_h$$

$$\Theta = \frac{Mt_s \bullet L_s}{G_s \bullet J_s} + \frac{Mt_h \bullet L_h}{G_h \bullet J_h}$$

$$Mt = Mt_s = Mt_h$$

$$\Theta = \frac{Mt}{G} \left( \frac{(30)(32)}{\pi(4)^4} + \frac{(40)(32)}{\pi((6)^4 - (4)^4)} \right) =$$

$$G = G_s = G_h$$

$$\Theta = \frac{Mt}{G} (1.5854) =$$

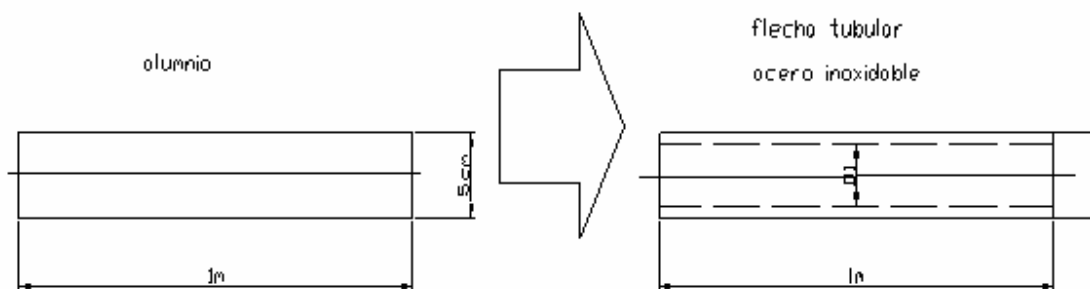
$$\Theta = \frac{Mt}{G} \left( \frac{L_s}{J_s} + \frac{L_h}{J_h} \right)$$

$$Mt = \frac{\Theta \bullet G}{1.5854} = \frac{(0.0436)(0.808 \times 10^6)}{1.5854} =$$

$$\Theta = \frac{Mt}{G} \left( \frac{L_s 32}{\pi D^4} + \frac{L_h 32}{\pi(D_E^4 - D_I^4)} \right) =$$

$$Mt = 22220 \text{Kg} \cdot \text{cm}$$

3.6. Una flecha de aluminio de 5cm de diámetro y un metro de longitud tiene que ser sustituida por una flecha tubular de acero inoxidable del mismo diámetro exterior y la misma longitud de tal modo que experimente la misma deformación. Calcule el diámetro interior de la flecha tubular.



$A = \text{aluminio}$

$$G_A = 0.281 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$I = \text{Acero Inoxidable}$

$$G_I = 0.735 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

**I.M.E**

**Mtro. Felipe Díaz del Castillo R.**

Como el comportamiento debe ser el mismo:

$$\begin{aligned}\Theta_A &= \Theta_I \\ \frac{M t_A \cdot L_A}{G_A \cdot J_A} + \frac{M t_I \cdot L_I}{G_I \cdot J_I} \\ L_A &= L_I \\ M t_A &= M t_I \\ \frac{1}{G_A \cdot J_A} &= \frac{1}{G_I \cdot J_I}\end{aligned}$$

$$J_A = \frac{\pi D_A^4}{32}$$

$$J_I = 2\pi \cdot R_E^3 \cdot t$$

$$t = \frac{(0.281 \times 10^6)(5)^4}{64 \cdot (0.735 \times 10^6) \cdot (2.5)^3}$$

$$\frac{(1)(32)}{G_A \cdot \pi \cdot D_A^4} = \frac{1}{G_I \cdot 2\pi \cdot R_E^3 \cdot t}$$

$$t = 0.2389 \text{ cm}$$

$$t = \frac{G_A \pi D_A^4}{32 \cdot G_I \cdot 2\pi \cdot R_E^3} = \frac{G_A D_A^4}{64 \cdot G_I \cdot R_E^3} =$$

$$D_I = D_E - 2t = 5 - 2(0.2389) =$$

$$D_I = 4.52 \text{ cm}$$

### 3.4. TRANSMISIÓN DE POTENCIA MEDIANTE FLECHAS

Quizá la aplicación mas importante de los elementos sometidos a torsión es la de transmitir potencia desde un sistema que la "produce" como puede ser un motor eléctrico, una turbina, un motor de combustión interna, etcétera, a un sistema que la "consume" como puede ser un generador eléctrico, un compresor, un ventilador, las ruedas de un automóvil.

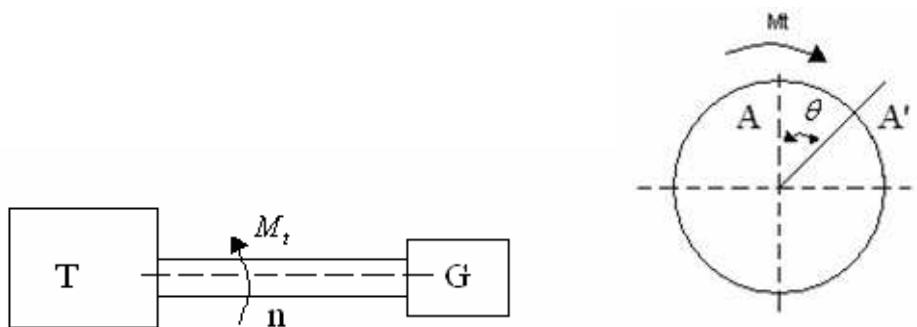


Figura 3.6. Flecha que transmite potencia a un generador

De acuerdo a la mecánica clásica:

$$W = Fd$$

$$W = Mt \cdot \theta$$

derivando con respecto al tiempo :

$$\frac{dw}{dt} = Mt \frac{d\theta}{dt}$$

$$\underline{Pot = Mt \cdot \omega}$$

.....(3.4)

Donde:

Pot= Potencia en Watts

Mt= Momento torsionante en N.m

$\omega$  = Velocidad angular en rad/s

A partir de la ecuación anterior se obtienen las fórmulas siguientes:

- Sistema inglés:

$$Pot = \frac{Mt * n}{63,000} \left\{ \begin{array}{l} Pot \rightarrow hp \\ Mt \rightarrow lb * plg \\ n \rightarrow rpm \end{array} \right.$$

- Sistema internacional

$$Pot = \frac{Mt * n}{9,550} \left\{ \begin{array}{l} Pot \rightarrow kW \\ Mt \rightarrow N * m \\ n \rightarrow rpm \end{array} \right.$$

- Sistema métrico técnico

$$Pot = \frac{Mt * n}{71,600} \left\{ \begin{array}{l} Pot \rightarrow CV \\ Mt \rightarrow kg * cm \\ n \rightarrow rpm \end{array} \right.$$

- Factores de conversión

$$1 \text{ hp} = 0.746 \text{ kW}$$

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$$

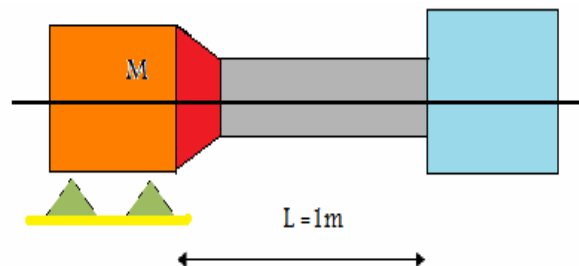
3.7. ¿Cuál debe ser el diámetro de una flecha de acero que debe transmitir 25hp a 1200rpm, si el esfuerzo cortante admisible es de 8000 lb/plg<sup>2</sup> ?

$$\begin{array}{l} pot = 25hp \\ n = 1200rpm \\ D = ? \\ \bar{\sigma} = 8000 \text{ psi} \end{array} \quad \bar{\sigma} = \frac{MtD}{2j} = \frac{16Mt}{\pi D^3}$$

$$Pot = \frac{Mt}{63000} \Rightarrow Mt = \frac{Pot \cdot 63000}{n} = \frac{25hp \cdot 63000}{1200} = \boxed{1312.5 \text{ lb} \cdot \text{plg}}$$

$$D = \left( \frac{16Mt}{\pi \bar{\sigma}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{16 \times 1312.5}{\pi \times 8000} \right)^{\frac{1}{3}} = \boxed{0.94 \text{ plg}}$$

3.8. Calcule el diámetro de una flecha de acero de 1 m de longitud acoplada a un motor eléctrico monofásico que consume 13.5A a plena carga con un voltaje de línea de 115 V y una eficiencia de 90%. El esfuerzo admisible en el acero empleado es de 75 Mpa y la deformación no debe ser mayor a los 2<sup>0</sup>.



$$D = ?$$

$$I = 13.5A$$

$$n = 90\%$$

$$L = 1m$$

$$\sigma = 75Mpa$$

$$\theta = 2^\circ = 0.035rad$$

$$n = 1700rpm$$

$$Pot = V \cdot I \cdot \eta$$

$$Pot = (115) \cdot (13.5) \cdot (0.9)$$

$$Pot = 1.4 \text{ kW}$$

$$Pot = \frac{Mt \cdot \eta}{9550}$$

$$Mt = \frac{Pot \cdot 9550}{\eta} =$$

$$Mt = \frac{(1.4) \cdot 9550}{1700} =$$

$$Mt = 7.9 \text{ N.m}$$

- Se calcula D en función del esfuerzo admisible

$$\tau = \frac{Mt \cdot D}{2J} = \frac{16Mt}{\pi \cdot D^3} =$$

$$D^3 = \frac{16Mt}{\pi \cdot \tau} =$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16Mt}{\pi \cdot \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16(7.9)}{\pi \cdot (75 \times 10^6)}}$$

$$D = 0.0081mm \rightarrow 8.1mm$$

- Se calcula D en función de la deformación angular:

$$\Theta = \frac{Mt \cdot L}{G \cdot J} =$$

$$\Theta = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi \cdot D^4} =$$

$$D^4 = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \Theta} =$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \Theta}} =$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32(7.9) \cdot (1)}{(79.2 \times 10^9) \cdot \pi \cdot (0.034)}} =$$

$$D = 0.013m \rightarrow 13mm$$

Se utiliza el diámetro mayor: 13mm

3.9. El motor de un automóvil entrega 95hp a 5600rpm dicha potencia es transmitida mediante una flecha corta a una caja de 4 velocidades con las siguientes relaciones:

1. 3.6 a 1
2. 2.7 a 1
3. 1.8 a 1
4. 4.1 a 1

La potencia a la salida de la caja se transmite al diferencial trasero mediante una flecha hueca de 1.2m de longitud y una relación entre el diámetro interior y exterior de 4/5. Calcule:

- a) el diámetro necesario para la flecha corta
- b) los diámetros interior y exterior para la flecha hueca

Asúmase el esfuerzo cortante no debe exceder de 10000psi y que la deformación angular de la flecha hueca no debe exceder de 1.5°.



a) Se calcula el diámetro de la flecha sólida en función del esfuerzo admisible.

$$Pot = \frac{Mt \cdot \eta}{63000}$$

$$\begin{aligned} Pot &= 95\text{hp} \\ \eta &= 5600\text{rpm} \\ L &= 1.2\text{m} \\ D_i &= \frac{4}{5} D_E \\ \tau &= 10000\text{psi} \\ \Theta &= 1.5^\circ \end{aligned}$$

$$Mt = \frac{Pot \cdot 63000}{\eta} =$$

$$Mt = \frac{(95) \cdot 63000}{(5600)} =$$

$$Mt = 1068.7516\text{plg}$$

$$\tau = \frac{Mt \cdot D}{2J} = \frac{16Mt}{\pi \cdot D^3} =$$

$$D^3 = \frac{16Mt}{\pi \cdot \tau} =$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16Mt}{\pi \cdot \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16(1068.75)}{\pi \cdot (10000)}} =$$

$$D = 0.816\text{plg}$$

b) Se calculan los diámetros de la flecha hueca

- Primero, en función de la resistencia.

$$Pot = 95hp$$

$$\eta = \frac{5600}{3.6} = 1555.5rpm$$

$$Pot = \frac{Mt \cdot \eta}{63000} =$$

$$\tau = \frac{Mt \cdot D}{2J} =$$

$$Mt = \frac{Pot \cdot 63000}{\eta}$$

$$J = \frac{\pi(D_E^4 - D_I^4)}{32}$$

$$Mt = \frac{(95) \cdot 63000}{(1555.5)} =$$

$$\tau = \frac{16Mt \cdot D_E}{\pi(D_E^4 - D_I^4)} =$$

$$Mt = 3847.6lb \cdot p \lg$$

$$D_I = \frac{4}{5} D_E \rightarrow 1^4 - (0.8)^4 = 0.59$$

$$\tau = \frac{16Mt \cdot D_E}{\pi(D_E^4 - (\frac{4}{5} D_E)^4)} = \frac{16Mt \cdot D_E}{\pi(0.59)D_E^4} =$$

$$\tau = \frac{16Mt}{\pi(0.59)D_E^3} =$$

$$D_E^3 = \frac{16Mt}{\pi(0.59)\tau} =$$

$$D_I = 0.8(1.49) = 1.19 p \lg$$

$$D_E = \sqrt[3]{\frac{16Mt}{\pi(0.59)\tau}} =$$

$$D_E = 1.49 p \lg$$

- Luego, en función de la deformación.

$$(1.2m)\left(\frac{1\text{plg}}{0.0254m}\right) = 47.24$$

$$\Theta = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi(1D_E^4 - (\frac{4}{5}D_E)^4)} =$$

$$\Theta = \frac{Mt \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\Theta = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi(0.59D_E^4)} =$$

$$J = \frac{\pi(D_E^4 - D_I^4)}{32}$$

$$D_E^4 = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi(0.59)\Theta} =$$

$$\Theta = \frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi(D_E^4 - D_I^4)}$$

$$D_E = \sqrt[4]{\frac{32Mt \cdot L}{G \cdot \pi(0.59)\Theta}} = \sqrt[4]{\frac{32(3847.6) \cdot (47.24)}{(11.5 \times 10^6) \cdot \pi(0.59)(0.026)}} =$$

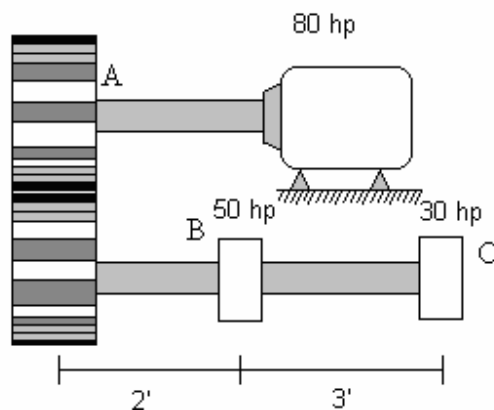
$$D_E = 1.79\text{plg}$$

$$D_I = \frac{4}{5}D_E$$

$$D_I = 0.8(1.79) = 1.43\text{plg}$$

3.10. Un motor entrega 80hp a un eje de 2pulg. de diámetro que gira a 210 rpm. Las poleas B y C absorben 50 y 30 hp respectivamente. Calcule:

- El esfuerzo cortante en cada sección de la flecha.
- La deformación angular sufrida por la misma.



$$\tau = ?$$

$$\theta = ?$$

$$D = 2''$$

$$Pot = 80\text{hp}$$

$$n = 210\text{rpm}$$



a) Se calcula el esfuerzo cortante en cada sección:

SECCIÓN B-C

$$Pot = 30hp \quad Pot = \frac{M_t \cdot n}{63000} \Rightarrow M_t = \frac{Pot \times 63000}{n} = \frac{30 \times 63000}{210} = \boxed{9000lb \cdot plg}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{M_t \cdot D}{2J} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{16 \times 9000}{\pi(2)^3} = \boxed{5729Psi}$$

SECCIÓN A-B

$$Pot = 80hp \quad Pot = \frac{M_t \cdot n}{63000} \Rightarrow M_t = \frac{80 \times 63000}{210} = \boxed{24000lb \cdot plg}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{M_t \cdot D}{2J} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{16 \times 21000}{\pi(2)^3} = \boxed{15278Psi}$$

b) Se calcula la deformación angular.

$$\begin{aligned} \theta_T &= \theta_{BC} + \theta_{AB} & G_{BC} &= G_{AB} = G \\ \theta_T &= \frac{M_{tBC} L_{BC}}{G_{BC} J_{BC}} + \frac{M_{tAB} L_{AB}}{G_{AB} J_{AB}} & J_{BC} &= J_{AB} = J \end{aligned}$$

$$\theta_T = \frac{1}{GJ} (M_{BC} L_{BC} + M_{AB} L_{AB})$$

$$\theta_T = \frac{1(32)}{(11.5 \times 10^6)(\pi)(2)^4} ((9000)(3 \times 12) + (24000)(2 \times 12))$$

$$\theta_T = \boxed{0.05rad \Rightarrow 2.86^\circ}$$

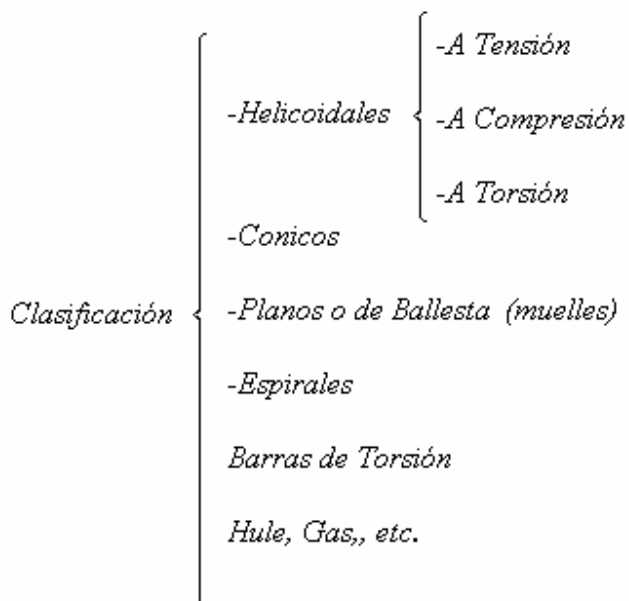
### 3.5. RESORTE HELICOIDALES DE ESPIRAS CERRADAS

Los resortes son un importante elemento de maquina se pueden encontrar en una amplia variedad de tipos y tamaños además tienen una amplia gama de aplicaciones siendo las más importantes las siguientes:

1. Para absorber vibraciones. Por ejemplo en montajes de maquinas y suspensiones de automóviles.

2. Para controlar movimientos. Por ejemplo los resortes para válvulas en motores de combustión interna.
3. Para almacenar energía como sucede en los relojes o juguetes de cuerda.
4. Para medir fuerzas. Por ejemplo balanzas y dinamómetros.

Los resortes se pueden clasificar de la forma siguiente:

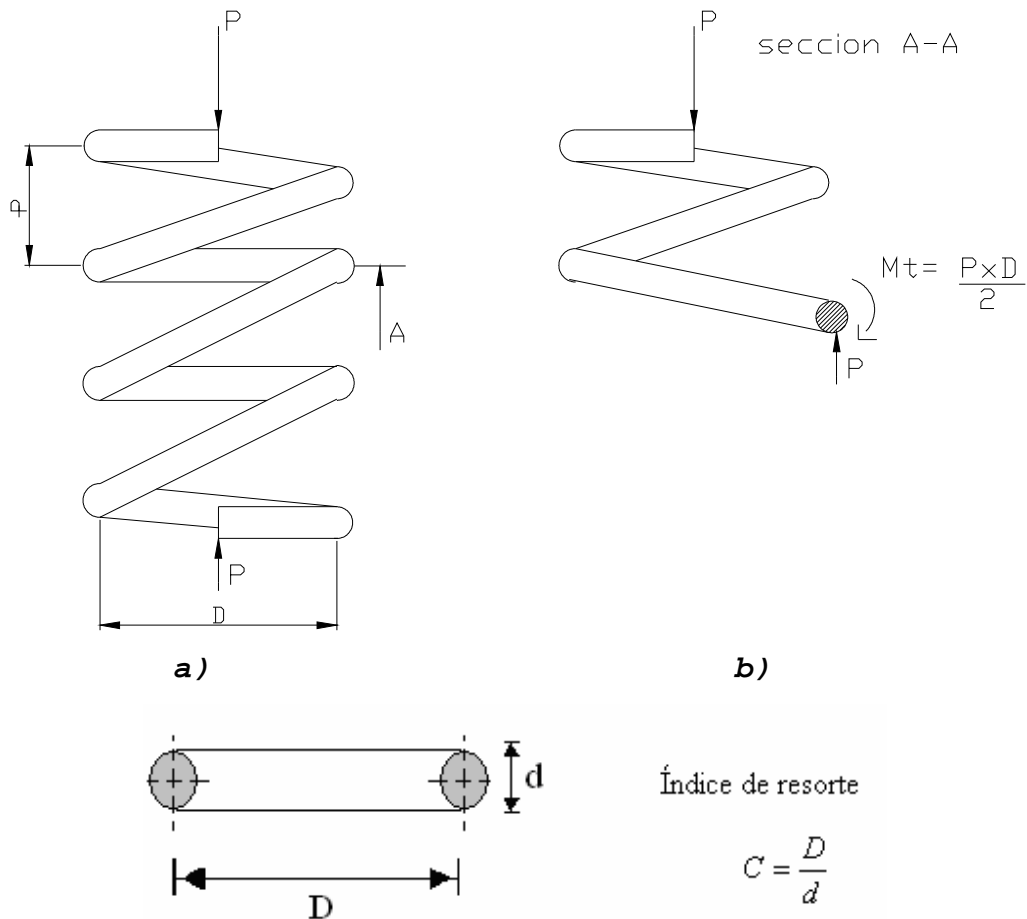


### 3.5.1. Resortes Helicoidales

Un resorte helicoidal se puede describir como un alambre de sección circular (o rectangular) enrollado en forma de hélice. Y acaba en sus extremos dependiendo si va a trabajar a compresión o a tensión. Además se diferencia en que en los resortes las espiras están una junto a otra y en los resortes a compresión habrá una cierta separación entre las espiras para permitir que el resorte sufra la deflexión correspondiente a aplicarse la carga.

En un resorte helicoidal interesan el esfuerzo producido, la deflexión producida, la constante y la energía absorbida,

por lo tanto considérese la figura 3.7a) en la que se muestra un resorte helicoidal simple compresión , donde :  $D$  = diámetro medio o entre centros del resorte ;  $d$  = diámetro del alambre ;  $P$  = carga aplicada y  $n_c$  = numero de espiras activas y  $p$  = paso.



Donde:

$D$ = Diámetro medio o primitivo

$d$ = diámetro del alambre se recomienda que  $6 \leq C \leq 12$

c)

Figura 3.7. a) Resorte helicoidal sometido a compresión b) Diagrama de cuerpo libre de la sección A-A. c) Algunos parámetros geométricos de un resorte helicoidal

Debido a la geometría y simetría de este resorte, cualquiera de las secciones transversales del alambre está sometido al mismo estado de esfuerzos, escojamos pues la sección A-A para su análisis y hagamos un corte como se muestra en la figura 3.7b) .se puede visualizar que el alambre está sometido simultáneamente a una fuerza de corte directa  $P$  y a un momento de torsión  $M_t$ , por lo tanto ambas cargas producen un esfuerzo cortante y empleando el principio de superposición se tiene :

$$\tau = \frac{P}{A} + \frac{M_t \cdot d}{2J}$$

Donde:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad M_T = \frac{P \times D}{2}; \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

Sustituyendo en la ecuación.

$$\bar{\sigma} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{P \times D \times d \times 32}{2(2)\pi d^4} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2C}\right)$$

Donde:  $1 + \frac{1}{2C} = \text{Factor de corrección de Wahl} = k_s \quad k_s = 1 + \frac{0.5}{C}$

$$\bar{\sigma} = k_s \frac{8PD}{\pi d^3}$$

.....(3.5)

Para que el resorte no se deforme plásticamente  $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_f$  el esfuerzo cortante debe ser menor al esfuerzo de fluencia

Y se puede romper cuando  $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_{\max}$

También es de interés, la deflexión que sufre el resorte bajo carga, se parte entonces de la deformación angular que sufre el alambre del resorte bajo el momento torsionante.

$$\theta = \frac{P \times D \times \pi D \text{ nc}(32)}{2G\pi G^4} = \frac{16PD^2 \text{ nc}}{Gd^4} \quad \text{nc} = \text{Número de espiras activas}$$

$$\theta = \frac{P \times D \times \pi D \text{ nc}(32)}{2G\pi G^4} = \frac{16PD^2 \text{ nc}}{Gd^4} \quad \dots\dots(3.6)$$

Para obtener la deformación axial, la ecuación (3.6) se multiplica por el factor D/2:

$$C = D^3/d^3 \quad C^3 = D^3/d^3 \quad \text{nc} = Gd^4(16PD^2)$$

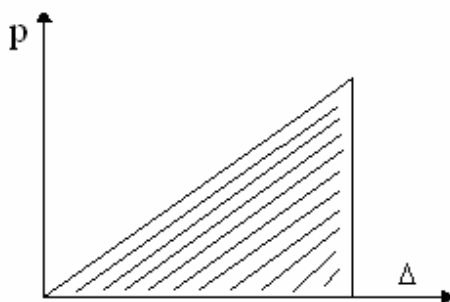
$$\Delta = \frac{8PD^3 \text{ nc}}{Gd^4} \Rightarrow \frac{8PC^3 \text{ nc}}{G \times d} \quad \dots\dots(3.7)$$

La constante del resorte que indica la carga necesaria para deformar al resorte una cierta distancia es igual a :

$$\text{Constante de resorte} \quad q = \frac{P}{\Delta} \left[ \frac{\text{lb}}{\text{plg}}, \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \Rightarrow P = q\Delta \quad \dots\dots(3.8)$$

Y por ultimo, ya se mencionó que una aplicación importante de los resortes es para absorber energía y se puede calcular con la ecuación (3.9)

Energía absorbida



$$U_s = \frac{P\Delta}{2} = \frac{q\Delta^2}{2} \quad \dots\dots(3.9)$$

### 3.5.2. Materiales para resortes.

Los resortes se fabrican arrollando el alambre en frío y en caliente dependiendo de su diámetro, del índice del resorte y de las propiedades que se quieran lograr en general.

No debe emplearse material endurecido si  $C < 6$  o si  $d > 6.35$  mm (1/4 pulg.). El arrollamiento del alambre produce esfuerzos residuales, pero están en dirección normal en relación a la dirección del esfuerzo torsionante en un resorte a tensión a compresión, de manera frecuente los resortes ya terminados se someten a un relevado de esfuerzos por medio de un tratamiento térmico.

Se cuenta con una gran variedad materiales para fabricar resortes helicoidales y otros tipos , pudiendo mencionar a los aceros simples y aleados, inoxidables (tipo 304 y 316 ) y materiales no ferrosos como el bronce fosforado y el latón para resortes, aleaciones cobre - berilio y algunas aleaciones de níquel .

En la tabla 3.1. se mencionan los aceros mas usados para fabricar resortes (de todos tipos)

Tabla 3.1. Materiales más usados para la fabricación de resortes

NOMBRE DEL MATERIAL	ESPECIFICACIÓN	USO
Alambre cuerda de piano	AISI 1085 ASTM - A228 - 51	El mejor acero para resortes , Temp. 0 -120 °C ES caro
Alambre Templado	AISI 1065 ASTM - A229 - 41	Para aplicaciones ge nerales Temp. op .0 -102 °C
Alambre estirado en frío	AISI-1066 ASTM-A227-47	Material barato, duración no importante Temp. Op. 0 -175°C
Alambre de acero al Cr-V	AISI 6150	Para condiciones severas y cargas fluctuantes Temp. op. 0 - 220 °C
Alambre de acero al Cr- Si	AISI 9254	Excelente para resistir grandes esfuerzos y cargas de choque. Temp. Op. 0-250 °C

3.11. Determinar el esfuerzo cortante que se produce en un resorte helicoidal a tensión que tiene un diámetro de alambre de 0.18pulg. un índice de resorte igual con 7 y 12 espiras activas, si la carga aplicada es de 8 lb calcule también la deformación sufrida por el resorte.

Resorte helicoidal a tensión.

$$d = 0.18 \text{plg}$$

$$c = 7$$

$$n_c = 12$$

$$P = 8 \text{lb}$$

$$\bar{\sigma} = ?$$

$$\Delta = ?$$

$$\bar{\sigma} = \frac{k_s \times 8PD}{\pi d^3}$$

$$C = D/d \Rightarrow D = c \times d = (7)(0.18) = \underline{1.26 \text{plg}}$$

$$k_s = 1 + 0.5/c = 1 + 0.5/7 = \underline{1.07}$$

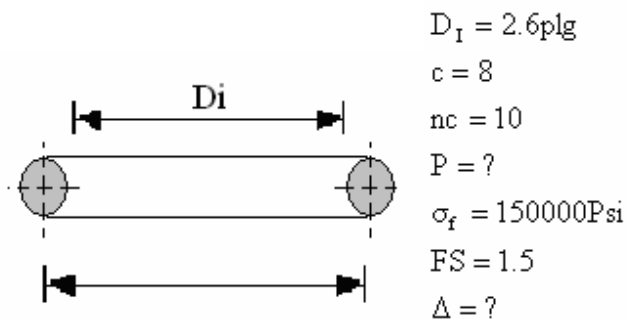
$$\bar{\sigma} = \frac{1.07 \times 8 \times 8 \times 1.26}{\pi (0.18)^3} = \underline{4709 \text{Psi}}$$

$$\Delta = \frac{8Pc^3 \times n_c}{Gd} = \frac{(8)(8)(7)^3 (12)}{(11.5 \times 10^6)(0.18)} = \underline{0.13 \text{plg}}$$

3.12. Un resorte helicoidal tiene un diámetro interior de 2.6 pulg. un índice de resorte de 8 y 10 espiras activas. Calcule:

a) La carga que se puede aplicar si el acero empleado tiene una resistencia a la fluencia de 150,000psi y debe usarse un factor de seguridad de 1.5.

b) La deformación sufrida por el resorte.



$$D = D_i + 2\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$D = D_i + d$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{D_i + d}{d}$$

$$C = \frac{D_i}{d} + 1$$

$$d = \frac{D_i}{C - 1} = \frac{2.6}{8 - 1} = 0.37 \text{ plg}$$

$$D = C \cdot d = 8(0.37) = 2.97 \text{ plg}$$

$$\bar{\sigma}_f = 0.6\sigma_f$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_f}{FS} = \frac{0.6\sigma_f}{FS} = \frac{(0.6)(150000)}{1.5} = \underline{60000 \text{ Psi}}$$

$$k_s = 1 + \frac{0.5}{c} = 1 + \frac{0.5}{8} = \underline{1.0625}$$

$$\bar{\sigma} = k_s \frac{8PD}{\pi d^3} \Rightarrow P = \frac{\bar{\sigma} \pi d^3}{k_s 8D} = \frac{(60000)\pi(0.37)^3}{(1.0625 \times 8)(2.96)} = \underline{379.48 \text{ lb}}$$

b) Se calcula la deformación sufrida por el resorte:

$$\Delta = \frac{8PC^3 n_c}{Gd}$$

$$\Delta = \frac{8 \times 379 \text{ lb} \times 8^3 \times 10}{11.5 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \times 0.37} = 3.6493 \text{ plg}$$



Y la constante de resorte:

$$q = \frac{P}{\Delta}$$

$$q = \frac{379 \text{ lb}}{3.6493 \text{ plg}} = 104.1208 \frac{\text{lb}}{\text{plg}}$$

3.13. Un resorte helicoidal a tensión de acero consiste de 12 espiras activas con un diámetro de alambre de 6mm y 48mm de diámetro exterior, se une al extremo de otro resorte helicoidal a tensión que tiene 15 espiras con un diámetro de alambre de 8 mm y 72 mm de diámetro exterior. Calcule:

- La constante de resorte para todo el sistema
- La carga máxima que se puede aplicar al conjunto si el esfuerzo cortante no debe exceder de  $2800 \text{ kg/cm}^2$  en cualquiera de los 2 resortes

$$d_1 = 6\text{mm} \rightarrow 0.6\text{cm}$$

$$D_{E1} = 48\text{mm} \rightarrow 4.8\text{cm}$$

$$N_{C1} = 12$$

$$d_2 = 8\text{mm} \rightarrow 0.8\text{cm}$$

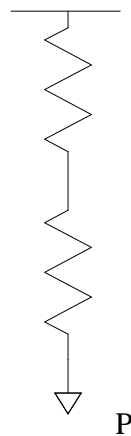
$$D_{E2} = 72\text{mm} \rightarrow 7.2\text{cm}$$

$$\tau = 2800 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$D = D_E - 2\left(\frac{d}{2}\right) \rightarrow D = D_E - d$$

$$D_1 = 4.8 - 0.6 = 4.2\text{cm}$$

$$D_2 = 7.2 - 0.8 = 6.4\text{cm}$$



a) Se calcula la constante de resorte para todo el conjunto.

$$q = \frac{P}{\Delta}$$

$$q = \frac{P}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$q = \frac{P}{\left(\frac{8P_1 D_1^3 N_{C1}}{G d_1^4}\right) + \left(\frac{8P_2 D_2^3 N_{C2}}{G d_2^4}\right)}$$

$$q = \frac{P(G)}{8P\left(\frac{D_1^3 N_{C1}}{d_1^4} + \frac{D_2^3 + N_{C2}}{d_2^4}\right)} = \frac{(G)}{8\left(\frac{D_1^3 N_{C1}}{d_1^4} + \frac{D_2^3 + N_{C2}}{d_2^4}\right)}$$

$$q = \frac{(0.808 \times 10^6)}{8\left(\frac{(4.2^3)(12)}{(0.6)^4} + \frac{(6.4^3) + (15)}{(0.8)^4}\right)} =$$

$$q = 6.13 \text{ Kg/cm}$$

b) Se calcula P para el resorte 1

$$\tau = K_s \frac{8PD}{\pi d^3} \rightarrow P = \frac{\tau \pi d^3}{8 K_s D}$$

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{C} \Rightarrow C_1 = \frac{D_1}{d_1} = \frac{4.2}{0.6} = 7$$

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{7} = 1.07$$

$$P = \frac{(2800)(\pi)(0.6)^3}{8(1.07)(4.2)} = 52.84 \text{ kg}$$

Para el resorte 2

$$\tau = K_s \frac{8PD}{\pi d^3} \rightarrow P = \frac{\tau \pi d^3}{8 K_s D}$$

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{C} = 1 + \frac{0.5}{8} =$$

$$K_s = 1.06$$

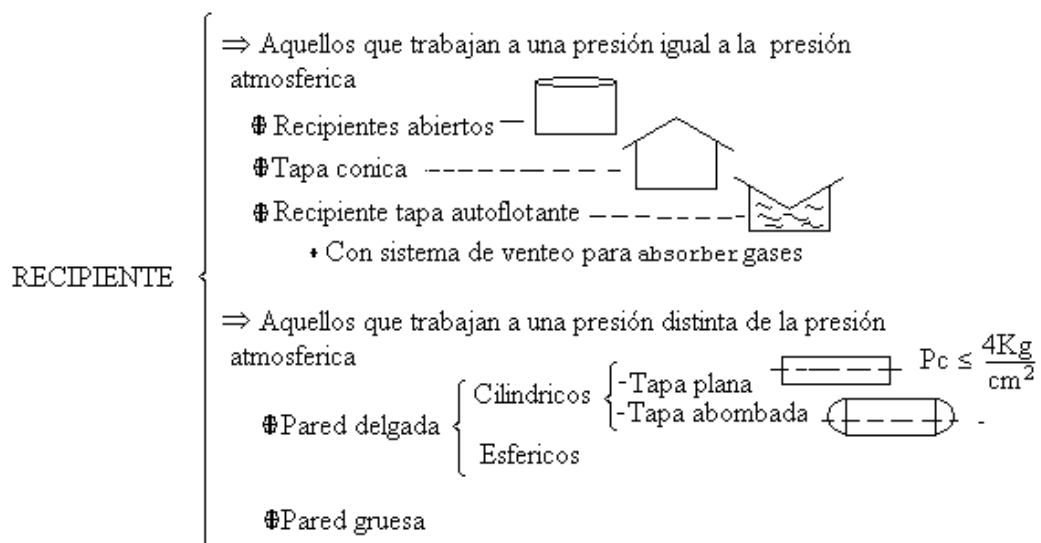
$$C_2 = \frac{D_2}{d_2} = \frac{6.4}{0.8} = 8$$

$$P = \frac{(2800)(\pi)(0.8)^3}{(1.06)(8)(6.4)}$$

$$P = 83 \text{ kg}$$

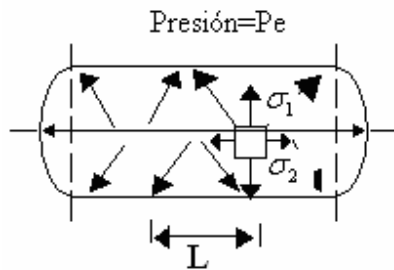
### 3.6. RECIPIENTES A PRESIÓN DE PARED DELGADA.

**Recipiente.** Es un elemento mecánico que sirve para contener o almacenar un fluido líquido o gaseoso. Ejemplos: Tuberías, tanques de almacenamiento, torres de destilación, intercambiadores de calor, etc., se pueden clasificar de diversas formas, por ejemplo: presión que manejan, tipo de material, posición de trabajo, etc., sin embargo la clasificación más aceptada es la que se muestra a continuación.



#### 3.6.1 Recipientes Cilíndricos:

En un recipiente cilíndrico sometido a una presión interna  $P_e$  se producen dos esfuerzos, como se muestra en la figura 3.8, uno, que actúa perpendicularmente a su eje longitudinal y que se conoce como esfuerzo radial o circunferencial ( $\sigma_1$ ) y otro que actúa a lo largo de dicho eje y que se conoce como esfuerzo longitudinal ( $\sigma_2$ )



$\sigma_1$  = Esfuerzo radial o circunferencial

$\sigma_2$  = Esfuerzo longitudinal

Figura 3.8. Esfuerzos en un recipiente cilíndrico

Primero, se halla una ecuación que permita el cálculo del esfuerzo radial o circunferencial, para ello se corta del cilindro una "rebanada" de longitud  $L$  y después se secciona a la mitad como se muestra en la figura 3.9:

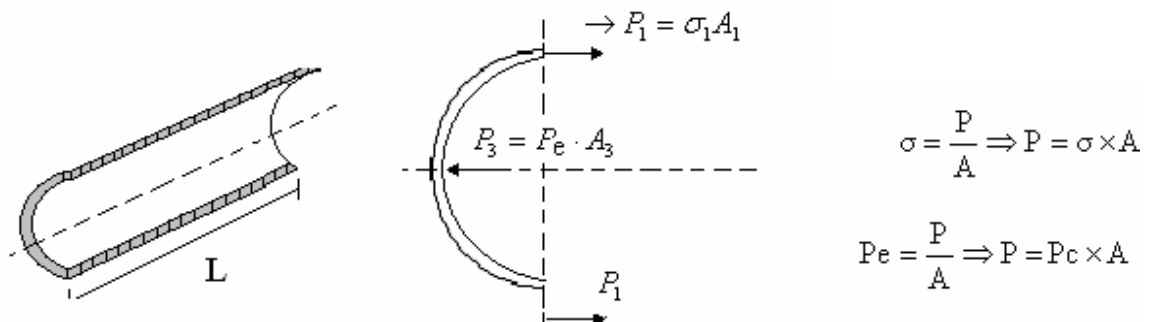


Figura 3.9.

Aplicando los principios de la estática y desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ 2P_1 - P_3 &= 0 & \sigma &= \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma \times A \\ 2\sigma_1 A_1 - P_e A_3 &= 0 & P_e &= \frac{P}{A} \Rightarrow P = P_c \times A \\ A_1 &= L \times t, & A_3 &= L \times d \\ 2\sigma_1 (L \times t) &= P_e (L \times d) \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \frac{P_e \times d}{2t} = \frac{P_e \times r}{t}$$

..... (3.10)

Para que un recipiente sea considerado como de pared delgada, debe cumplirse:

$$\frac{r}{t} > 10 \text{ ó } \frac{t}{r} < 0.1$$

Y para los esfuerzos longitudinales se tiene:

Esfuerzo promedio

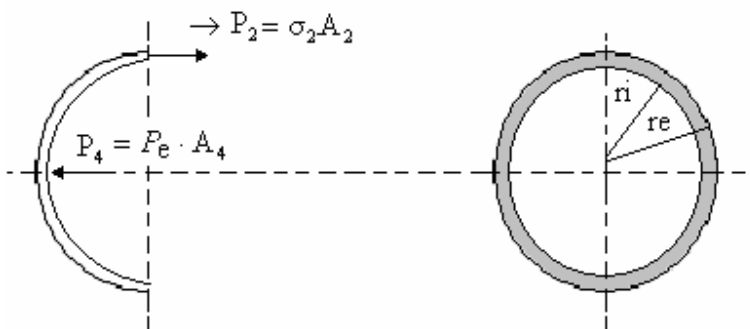


Figura 3.10. Corte en el extremo del recipiente.

$$\rightarrow +\Sigma FX = 0$$

$$P_2 - P_4 = 0$$

$$\sigma_2 A_2 - P_e A_4$$

$$A_2 = (r_e^2 - r_i^2)$$

$$A_4 = \pi r^2$$

$$r_e - r_i = t$$

$$r_e + r_i \approx 2r$$

$$\sigma_2 = \frac{P_e r^2}{(r_e^2 - r_i^2)}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_e r^2}{(r_e + r_i)(r_e - r_i)}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_e r}{2t} = \frac{P_e d}{4t} \dots\dots(3.11)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 \rightarrow \text{Sólo aplicable a recipientes cilíndricos}$$

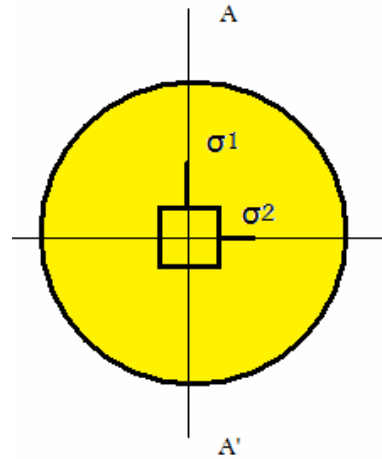
3.6.2. Recipientes esféricos

Por su simetría, los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en los recipientes esféricos son iguales.

$$\sigma_2 = \frac{Pe r}{2t} = \frac{Ped}{4t} = \sigma_1 \dots\dots(3.12)$$

Para una esfera:

$$\sigma_2 = \sigma_1$$



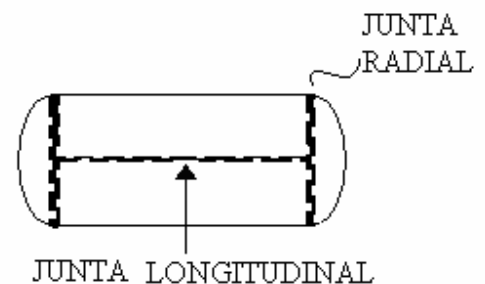
En la práctica son pocos los recipientes a presión que se fabrican a partir de una pieza de lamina o placa ya que la mayor parte de ellos se construyen utilizando varias piezas que se unen entre sí, utilizando hoy en día casi de manera exclusiva el proceso de soldadura en sus distintas variantes, en consecuencia se debe tomar en cuenta la eficiencia de la unión la cual está definida por la ecuación siguiente:

$$\eta = \frac{\text{Resistencia de la unión}}{\text{Resistencia de la placa}} \times 100$$

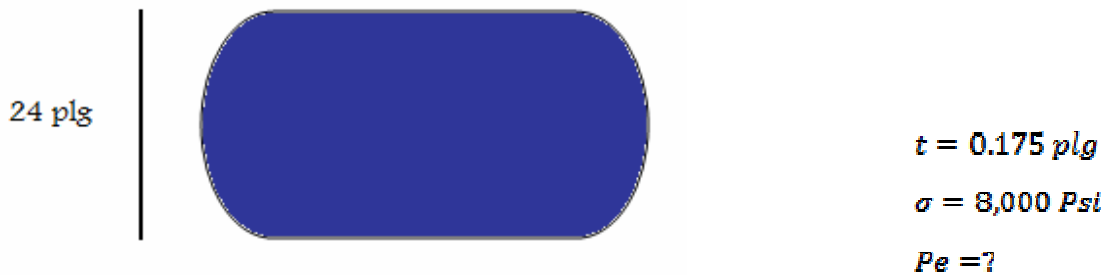
$$\text{Resistencia de la unión} : \frac{\text{Resistencia de la placa} \times \eta}{100} \dots\dots(3.13)$$

La eficiencia de la unión depende de los factores siguientes:

- |            |   |                   |   |                    |
|------------|---|-------------------|---|--------------------|
| Eficiencia | { | -Tipo de junta    | { | -Inspección visual |
|            |   | -Tipo de unión    |   | -Ultrasonido       |
|            |   | -Inspección final |   | -Radiografiado     |



3.14. Se compró un cilindro que va a ser usado como recipiente a presión. Calcule la presión a la que puede operar si su diámetro es de 24 pulg., su espesor de pared de 0.175 pulg. y el esfuerzo admisible es de 8,000 psi.



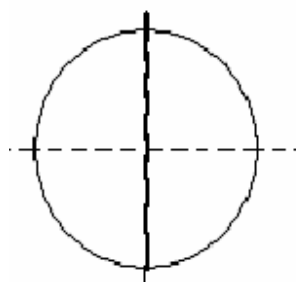
$$\frac{r}{t} = \frac{12}{0.175} = 68.57 > 10$$

$$\sigma_1 = \frac{Pe d}{2t}$$

$$Pe = \frac{\sigma_1 2t}{d}$$

$$Pe = \frac{8,000(2)(0.175)}{24} = 116.60 \frac{lb}{plg^2}$$

3.15. Un recipiente esférico de acero con un diámetro de 6.5cm debe fabricarse mediante 2 hemisferios soldados. El acero a emplear es un A-36 con un factor de seguridad de 1.5 y considerando una eficiencia en la unión de 60% ¿Cuál debería ser el espesor del recipiente para una presión de trabajo de 20 atmósferas.



$$d = 65\text{cm}$$

$$A - 36$$

$$FS = 1.5$$

$$\eta = 60\%$$

$$P_c = 20\text{atm}$$

$$t = ?$$

$$\sigma_f = 36000 \frac{lb}{plg^2}$$

$$P_c = 20 \text{atm} \left( \frac{1.033 \text{kg}}{1 \text{atm} [\text{cm}^2]} \right) = \underline{20.66 \text{kg/cm}^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P_c \times d}{4t}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_f}{FS} = \frac{36000}{1.5} = \underline{24000 \text{Psi}}$$

$$\text{Resistencia de la unión : } \frac{\text{Resistencia de la placa} \times \eta}{100}$$

$$= \frac{24000 \times 60}{100} = \underline{14400 \text{Psi}}$$

$$14400 \frac{\text{lb}}{\text{plg}^2} \times \frac{1}{14.2} = \underline{1014 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}$$

$$t = \frac{P_c \times d}{4\sigma} = \frac{20.66 \times 65}{4(1014)} = \underline{0.33 \text{cm} \Rightarrow 3.3 \text{mm}}$$



CAPITULO 4VIGAS, DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOSFLEXIONANTES4.1. INTRODUCCIÓN.

Una definición establece lo siguiente:

Son elementos relativamente esbeltos (una dimensión es mucho mayor que las otras dos) y que soportan cargas aplicadas perpendicularmente a su eje longitudinal.

Otra definición establece lo siguiente:

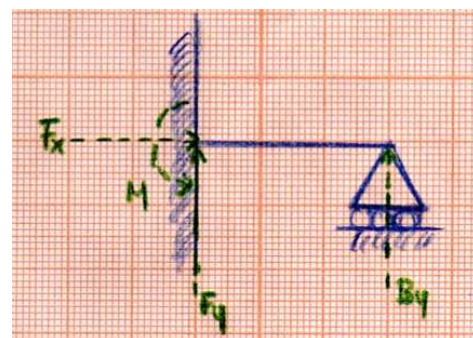
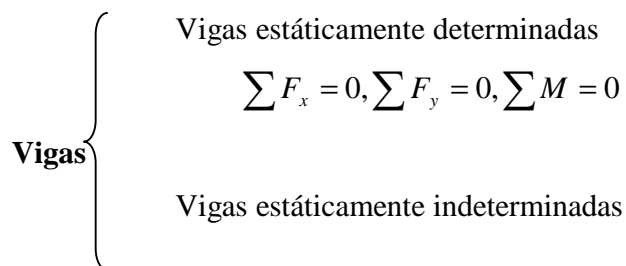
Viga es todo elemento que se flexiona bajo la acción de una carga no importando su tamaño ya que puede ser tan grande que forme parte de un puente o edificio o tan pequeño como el diente de un engrane.

A diferencia de otros elementos que se han estudiado, en una viga se presenta 2 efectos claramente definidos hasta y haber:

- Una fuerza cortante.
- Momento flexionante.

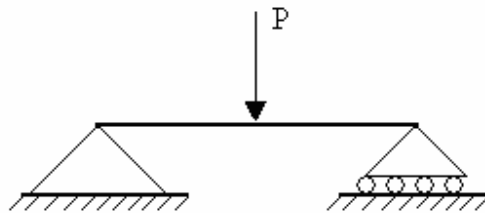
Estos efectos producen a su vez esfuerzos de corte y de flexión que varían de una sección a otra de la viga dependiendo de las condiciones de carga de la misma

Las vigas se pueden clasificar en dos grandes grupos a saber:



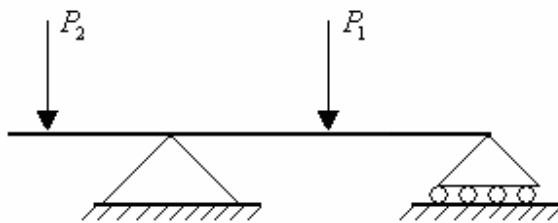
También se pueden clasificar las vigas de acuerdo a las condiciones de apoyo de la misma, tal y como se menciona a continuación

a) *Viga simplemente apoyada.*



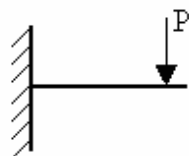
Los apoyos se ubican en los extremos de la viga

b) *Viga con voladizo.*



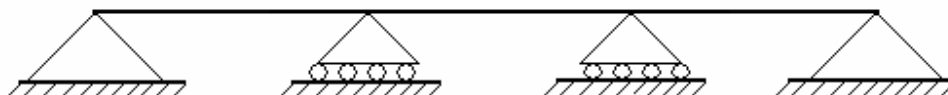
Uno o ambos extremos de la viga sobresalen de los apoyos

c) *Vigas en voladizo (viga cantilever).*



Un extremo de la viga se encuentra completamente fijo

d) *Vigas continuas.*



Se trata de vigas estaticamente indeterminadas y que descansan sobre 3 o más apoyos

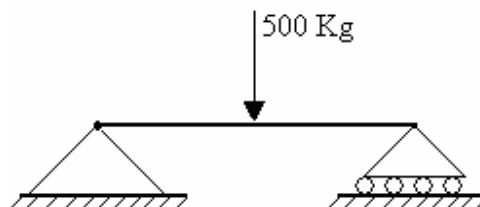
Los principales tipos de cargas que pueden soportar una viga son los siguientes:

a) Sin carga.

Esto es, la misma viga se considera de peso despreciable.

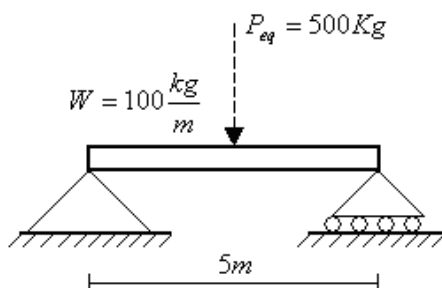
b) Carga concentrada o puntual.

Son aquellas que actúan sobre un área muy pequeña tanto que se considera como un punto.



c) Carga uniformemente distribuida

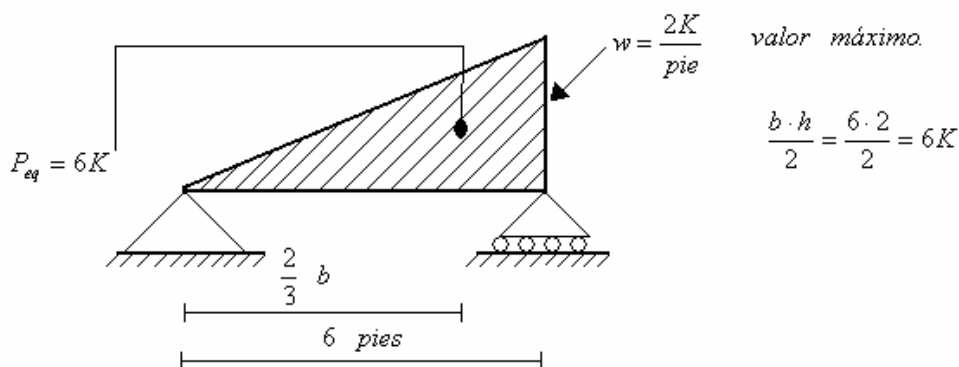
La carga aplicada actúa igualmente distribuida sobre una porción o sobre la totalidad de la longitud de la viga y su intensidad se expresa como peso sobre unidad de longitud.



Soporta 500Kg se le conoce como carga equivalente y actúa en el centroide de la misma

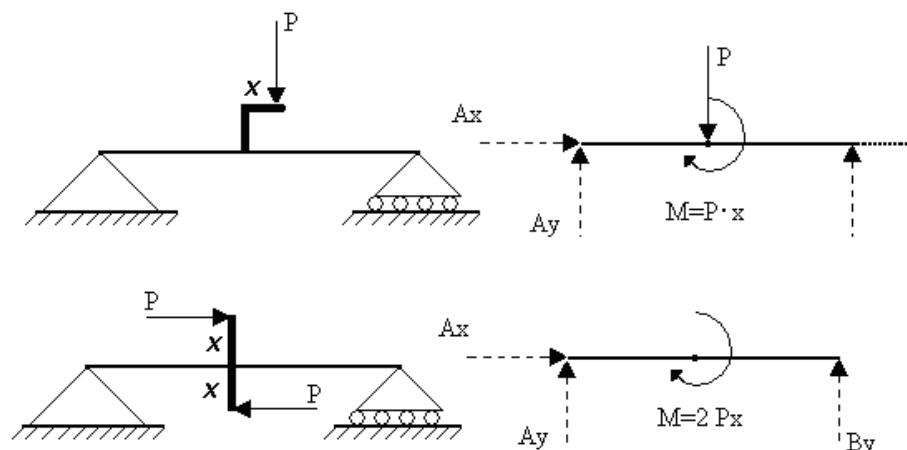
d) Carga variable (generalmente distribuida)

La carga varía en intensidad de un punto a otro por lo general dicha variación ocurre de un patrón mínimo igual a cero a un valor máximo cuya intensidad también se expresa como peso sobre unidad de longitud.



**E) Par o momento.**

Es una torsión aplicada a una viga en cualquier posición de la misma



**4.2. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.**

Ya se dijo que en cualquier sección transversal de una viga sometida a carga actúa de manera simultánea una fuerza cortante y un momento flexionante. Para entender mejor su naturaleza considérese una viga prismática bajo la acción de una carga  $P$  como se muestra en la figura 4.1, a continuación, córtese dicha viga mediante un plano transversal  $A-A'$  localizado a una distancia  $x$  con respecto a la reacción de la izquierda y por ultimo trácese el diagrama de cuerpo libre de dicha sección.

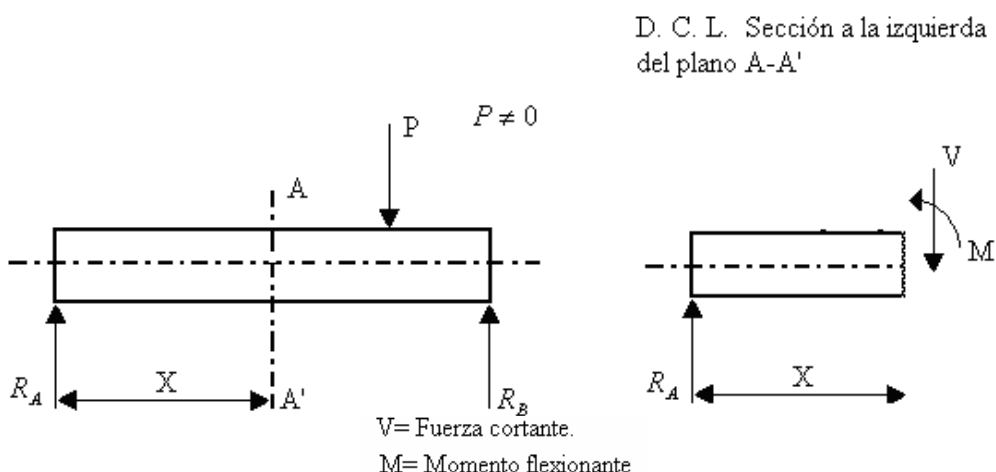


Figura 4.1. Conceptos de la fuerza cortante y momento flexionante

De la figura se puede establecer que:

$$V = \sum (F_{izq}) \dots\dots(4.1)$$

Y:

$$M = \sum (M_{izq}) = \sum (F_{izq} \cdot X) \dots\dots(4.2)$$

Y se puede establecer la siguiente convención de signos:

- Para la fuerza cortante:

Si las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección lo hacen hacia arriba se consideran como positivas y negativas si lo hacen hacia abajo.

- Para el momento flexionante:

Se considera como positivo si actúa en sentido horario + ↻ y negativo si lo hace en sentido antihorario - ↻

También se puede establecer de acuerdo a la forma en que se deforma la viga, tal y como se muestra en la figura 4.2

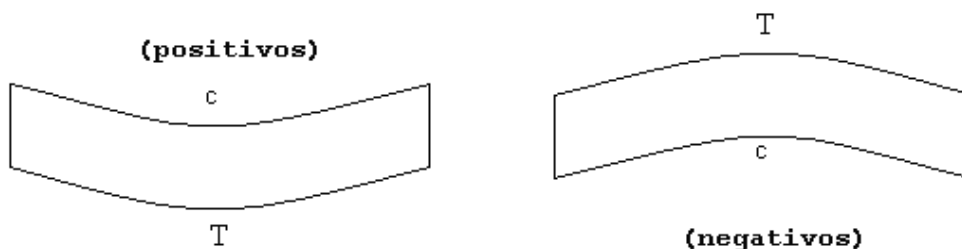


Figura 4.2. Convención de signos para el momento flexionante

### 4.3. DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS

#### FLEXIONANTES.

*El análisis de una viga muestra adicionalmente el inconveniente siguiente: que la fuerza cortante y el momento flexionante varían de una sección a otra a lo largo de la viga dependiendo de las condiciones de carga de la misma, por lo tanto de hace necesario determinar dicho comportamiento y la mejor forma de hacerlo es mediante el trazo de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, existiendo 2 métodos para hacerlo, a saber:*

- a) Por el método de ecuaciones.*
- b) Por el método de suma de áreas.*

*Con la ayuda de estos diagramas es posible determinar la magnitud y sentido tanto de la fuerza cortante como del momento flexionante en cualquier posición de la viga, esto es muy importante ya que a partir de ellos se pueden calcular los esfuerzos máximos que se producen en la viga.*

4.3.1 Método de ecuaciones

Este método consiste en lo siguiente:

1. Se calculan las reacciones de la viga.
2. Se divide la viga en tantas secciones como cambios en las condiciones de carga existan.
3. Se hallan las ecuaciones que definen la fuerza cortante y el momento flexionante para cada sección.
4. Se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

4.3.2. Método de suma de áreas

El momento flexionante se puede definir como:

$$M = \int_{x_0}^{x_1} V \cdot dx \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

Donde.

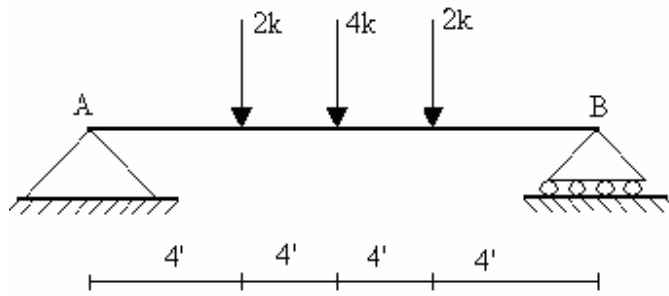
$x_0$  y  $x_1$  son los límites de integración

Puesto que el producto  $V \cdot dx$  representa el área del diagrama de fuerza cortante y, por tanto, la integral representa el área de este diagrama comprendida entre las ordenadas de los puntos  $x_0$  y  $x_1$ . La ecuación (4.4) indica que la variación del momento flexionante entre dos secciones cualesquiera es igual al área del diagrama de fuerza cortante en ese mismo intervalo

$$M_1 - M_0 = \Delta M = (\text{área})_{\text{de cortante}} \quad \dots\dots(4.4)$$

**EJEMPLOS:**

4.1. Trace los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para las vigas que se muestran a continuación



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

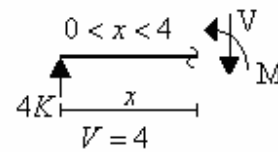
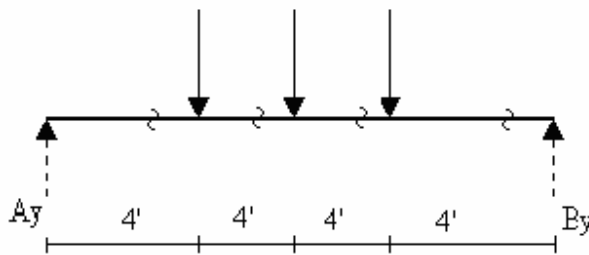
$$2(4) - 4(8) - 2(12) + R_B(16) = 0$$

$$R_B = \frac{8 + 32 + 24}{16} = 4K$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

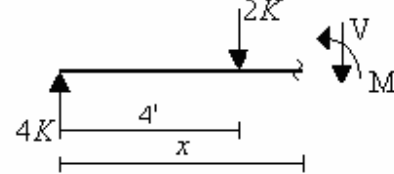
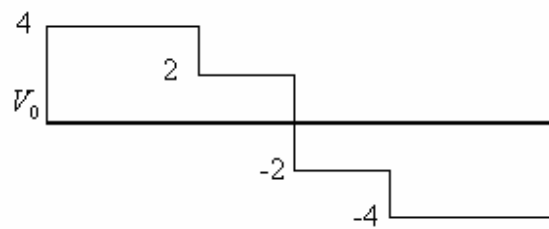
$$R_A - 2 - 4 - 2 + 4 = 0$$

$$R_A = 4K$$



$$V = 4$$

$$M = 4x$$

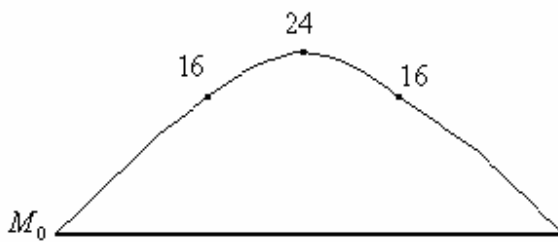


$$V = 4 - 2 = 2$$

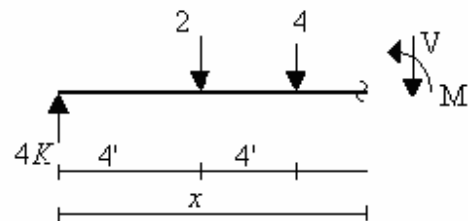
$$M = 4x - 2(x - 4)$$

$$M = 4x - 2x + 8$$

$$M = 2x + 8$$



$$8 < x < 12$$

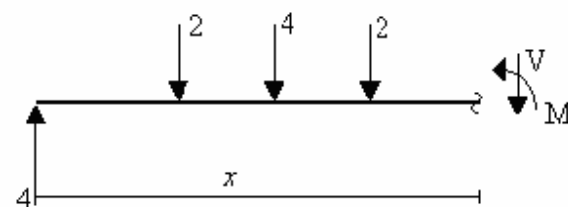


$$V = 4 - 2 - 4 = -2K$$

$$M = 4x - 2(x - 4) - 4(x - 8)$$

$$M = 4x - 2x + 8 - 4x + 32$$

$$M = -2x + 40$$



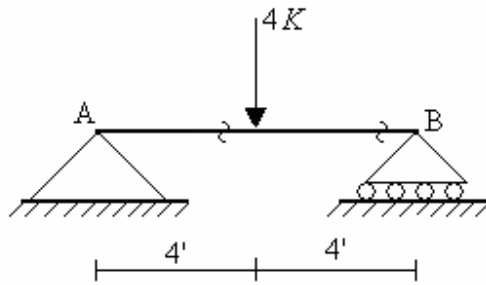
$$12 < x < 16$$

$$V = 4 - 2 - 4 - 2 = -4$$

$$M = 4x - 2x + 8 - 4x + 32 - 2x + 24$$

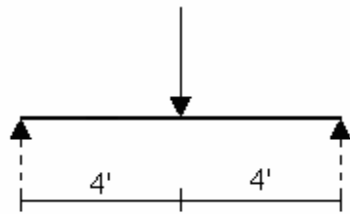
$$M = -4x + 64$$



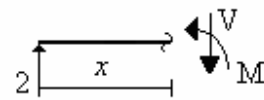


$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ -4(4) + R_B(8) &= 0 \\ R_B &= \frac{16}{8} = 2K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ R_A - 4 + 2 &= 0 \\ R_A &= 2K \end{aligned}$$

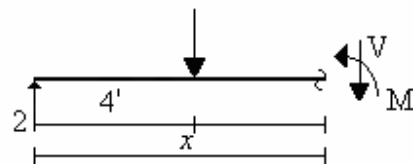


$$0 < x < 4$$

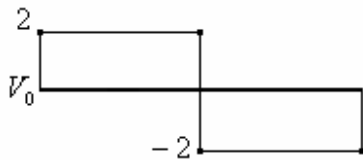


$$\begin{aligned} V &= 2 \\ M &= 2x \end{aligned}$$

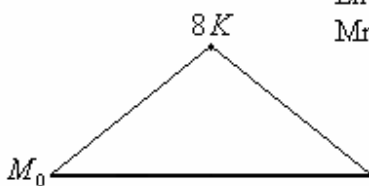
$$4 < x < 8$$

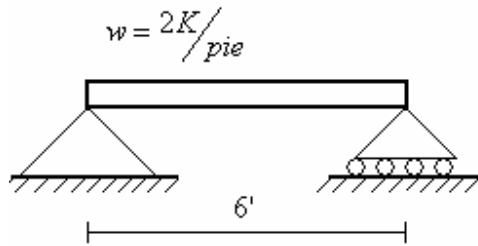


$$\begin{aligned} V &= 2 - 4 = -2 \\ M &= 2x - 4(x - 4) \\ M &= 2x - 4x + 16 \\ M &= -2x + 16 \end{aligned}$$

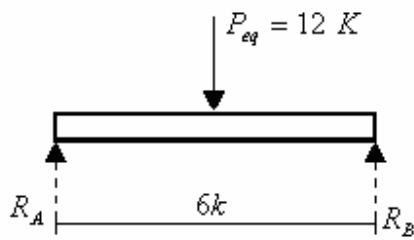


En  $x = 4'$   
 $M_{max} = 8K \cdot \text{Pie}$

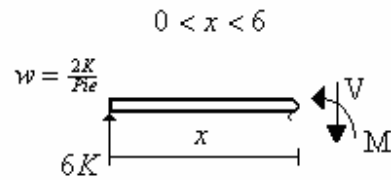
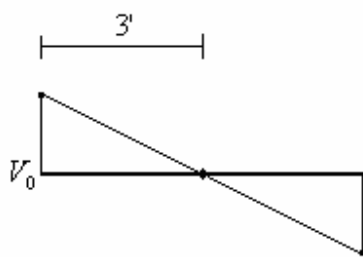




$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \sum M_A &= 0 \\
 -12(3) + R_B(6) &= 0 \\
 R_B &= \frac{36}{6} = 6K
 \end{aligned}$$

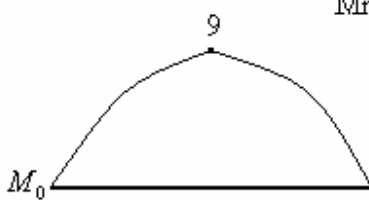


$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \\
 R_A - 12 + 6 &= 0 \\
 R_A &= 12 - 6 = 6K
 \end{aligned}$$

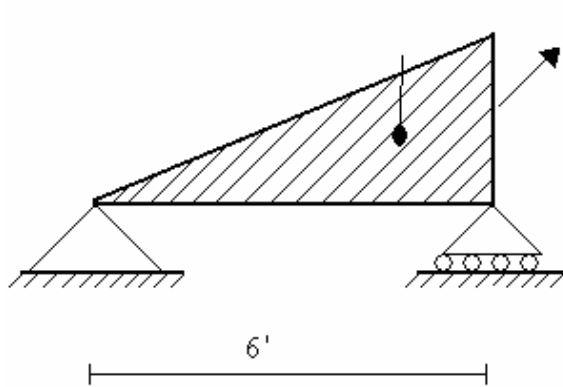


$$\begin{aligned}
 V &= 6 - 2x \\
 M &= 6x - 2x\left(\frac{x}{2}\right) \\
 M &= 6x - x^2
 \end{aligned}$$

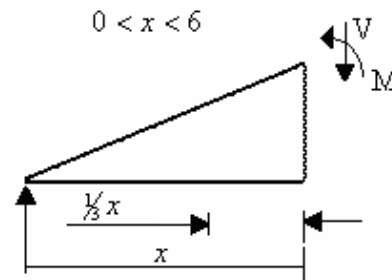
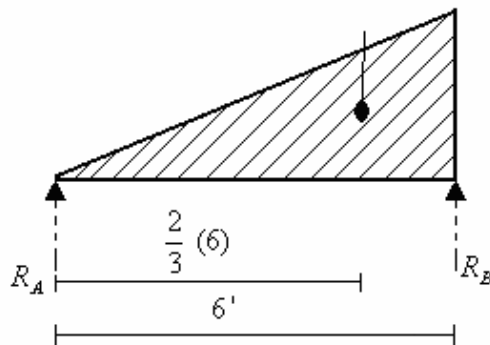
En  $x = 3'$   
 $M_{max} = 9K \cdot Pie$



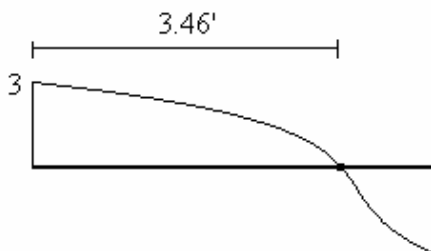
$$\begin{aligned}
 V &= 6 - 2x = 0 \\
 2x &= 6 \\
 x &= \frac{6}{2} = 3
 \end{aligned}$$



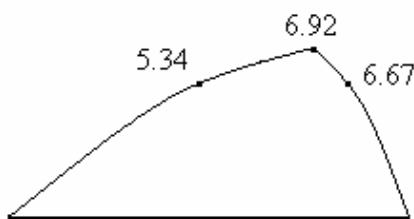
$$\begin{aligned}
 \sum M_A = 0 \\
 -9\left(\frac{2}{3}(6)\right) + R_B(6) &= 0 \\
 R_B = \frac{36}{6} &= 6K \\
 \sum F_y = 0 \\
 R_A - 9 + 6 &= 0 \\
 R_A &= 2K
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V &= 3 - \frac{w'x}{2} = 3 - \frac{\frac{1}{3}x \cdot x}{2} \\
 V &= 3 - \frac{1}{4}x^2 \\
 M &= 3x - \frac{1}{4}x^2\left(\frac{1}{3}x\right) \\
 M &= 3x - \frac{1}{12}x^3
 \end{aligned}$$



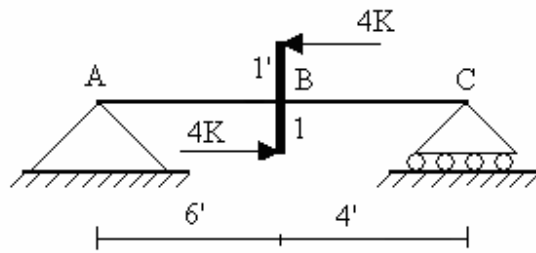
$$\begin{aligned}
 V &= 3 - \frac{1}{4}x \\
 x &= (3 \times 4)^{\frac{1}{2}} = 3.46'
 \end{aligned}$$



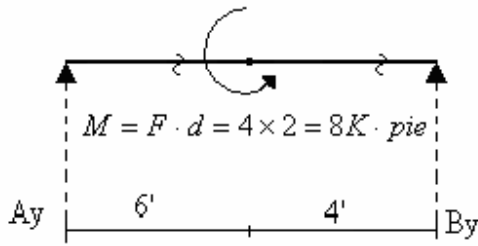
En  $x = 3.46'$   
 $M_{max} = 6.92 \text{ K} \cdot \text{Pie}$

Por triángulos semejantes.

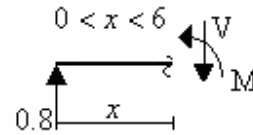
$$\begin{aligned}
 \frac{w'}{x} &= \frac{w}{b} \\
 w' &= \frac{wx}{b} = \frac{3x}{6} = \frac{1}{2}x
 \end{aligned}$$



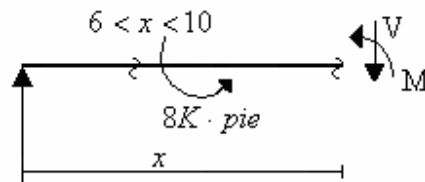
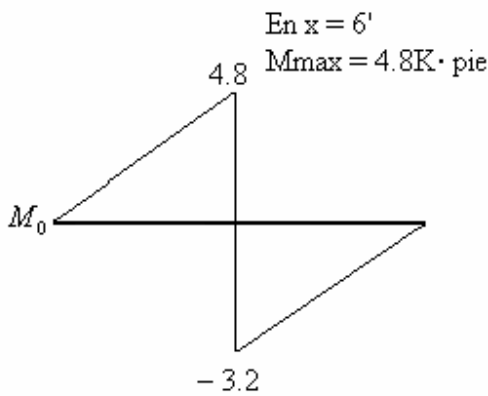
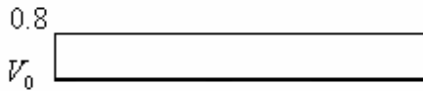
$$\begin{aligned}
 +\circlearrowleft \sum M_A &= 0 \\
 8 + R_C(10) &= 0 \\
 R_C &= \frac{-8}{10} = -0.8K
 \end{aligned}$$



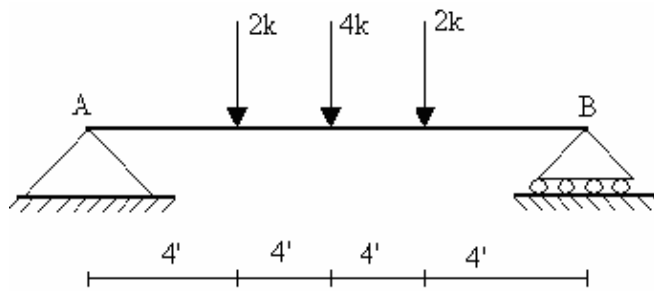
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \\
 R_A - 0.8 &= 0 \\
 R_A &= 0.8K
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V &= 0.8 \\
 M &= 0.8Kx
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V &= 0.8 \\
 M &= 0.8x - 8
 \end{aligned}$$



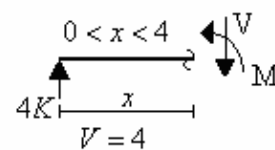
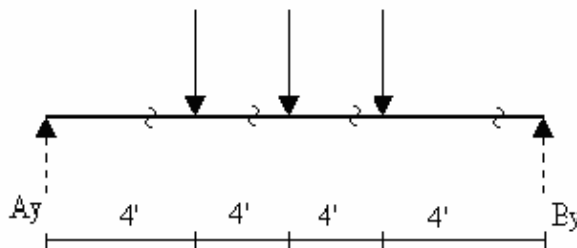
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \\ 2(4) - 4(8) - 2(12) + R_B(16) = 0 \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{8 + 32 + 24}{16} = 4K$$

$$\sum F_y = 0$$

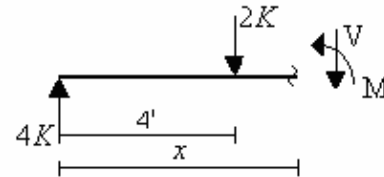
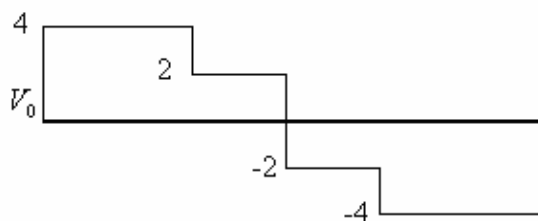
$$R_A - 2 - 4 - 2 + 4 = 0$$

$$R_A = 4K$$



$$V = 4$$

$$M = 4x$$

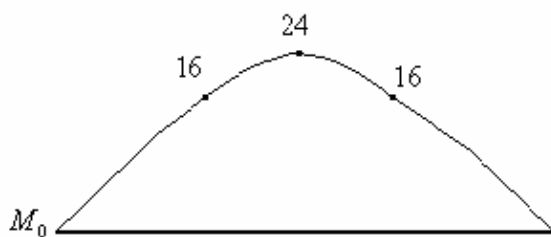


$$V = 4 - 2 = 2$$

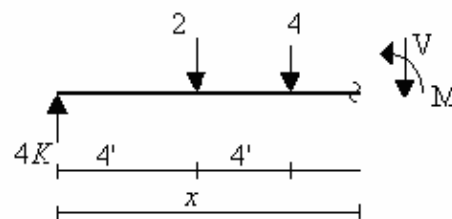
$$M = 4x - 2(x - 4)$$

$$M = 4x - 2x + 8$$

$$M = 2x + 8$$



$$8 < x < 12$$

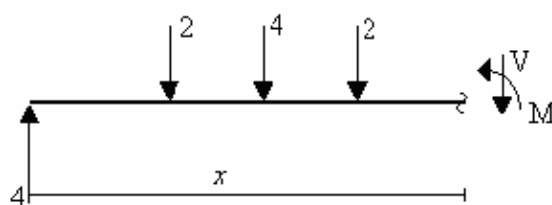


$$V = 4 - 2 - 4 = -2K$$

$$M = 4x - 2(x - 4) - 4(x - 8)$$

$$M = 4x - 2x + 8 - 4x + 32$$

$$M = -2x + 40$$

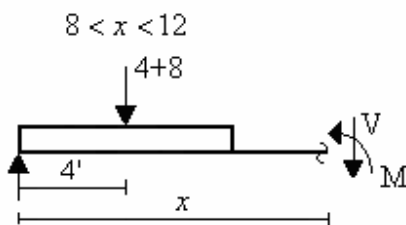
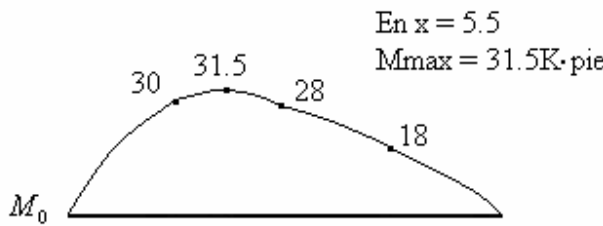
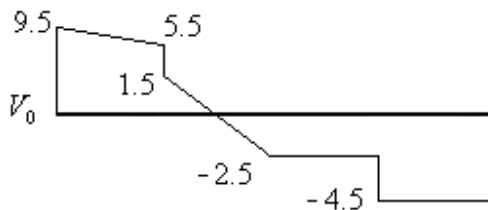
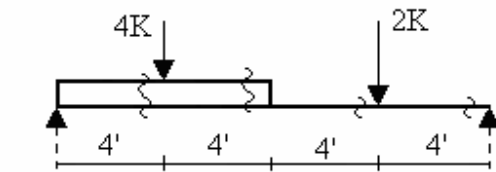
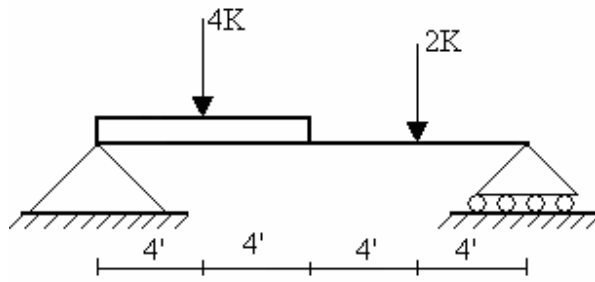


$$12 < x < 16$$

$$V = 4 - 2 - 4 - 2 = -4$$

$$M = 4x - 2x + 8 - 4x + 32 - 2x + 24$$

$$M = -4x + 64$$



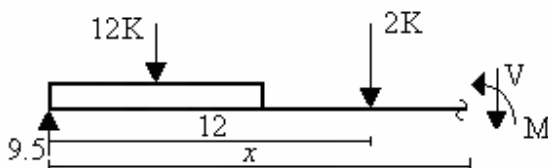
$$V = 9.5 - 12 = -2.5$$

$$M = 9.5x - 12(x - 4)$$

$$M = 9.5x - 12x + 48$$

$$M = -2.5x + 48$$

$12 < x < 16$



$$\sum M_A = 0$$

$$-4(4) - 8(4) - 2(12) + R_B(16) = 0$$

$$R_B = \frac{16 + 32 + 24}{16} = 4.5K$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_A - 4 - 8 - 2 + 4.5 = 0$$

$$R_A = 9.5K$$

$0 < x < 4$

$$V = 9.5 - x$$

$$M = 9.5x - x\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M = 9.5x - \frac{x^2}{2}$$

$4 < x < 8$

$$V = 9.5 - x - 4$$

$$V = 5.5 - x$$

$$M = 9.5x - x\left(\frac{x}{2}\right) - 4(x - 4)$$

$$M = 9.5x - \frac{x^2}{2} - 4x + 16$$

$$M = 5.5x - \frac{x^2}{2} + 16$$

$$V = 5.5 - x = 0$$

$$x = 5.5'$$

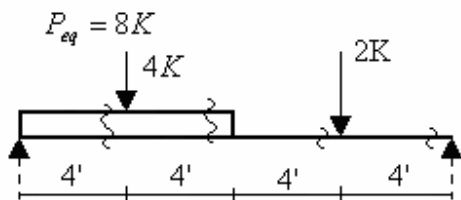
$$V = 9.5 - 12 - 2 = -4.5$$

$$M = 9.5x - 12(x - 4) - 2(x - 12)$$

$$M = 9.5x - 12x + 48 - 2x + 24$$

$$M = -4.5x + 72$$

Utilizando el método de suma de áreas:



En  $x = 4'$

$$M = A_1 + A_2 = 22 + 8 = 30K \cdot pie$$

$$A_1 = 4 \times 5.5 = 22$$

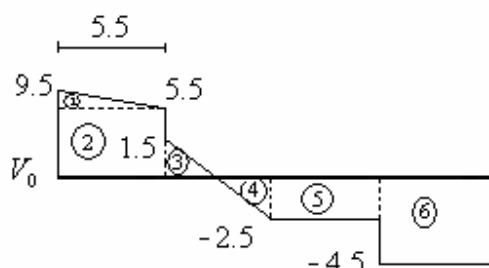
$$A_2 = \frac{4(9.5 - 5.5)}{2} = 8$$

En  $x = 5.5'$

$$M = A_1 + A_2 + A_3$$

$$M = 22 + 8 + 1.125 = 31.125K \cdot pie$$

$$A_3 = \frac{(5.5 - 4)(1.5)}{2} = 1.125$$



En  $x = 8'$

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$M = 22 + 8 + 1.125 - 3.125 = 28K \cdot pie$$

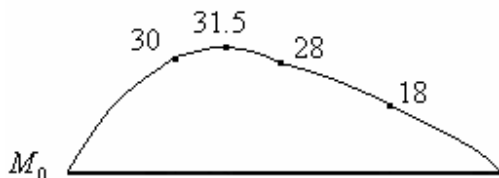
$$A_4 = \frac{(4 - 1.5)(-2.5)}{2} = -3.125$$

En  $x = 12'$

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$M = 22 + 8 + 1.125 - 3.125 - 10 = 18K \cdot pie$$

$$A_5 = 4(-2.5) = -10$$



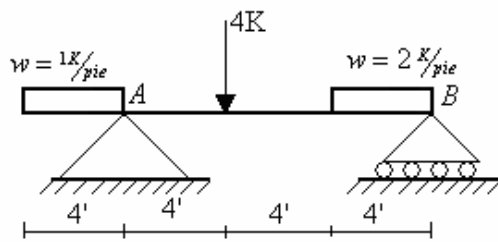
En  $x = 16'$

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

$$M = 22 + 8 + 1.125 - 3.125 - 10 - 18$$

$$M = 0K \cdot pie$$

$$A_6 = 4(-4.5) = 18$$



$$+\curvearrowright \sum M_A = 0$$

$$4(2) - 4(4) - 8(10) + R_B(12)$$

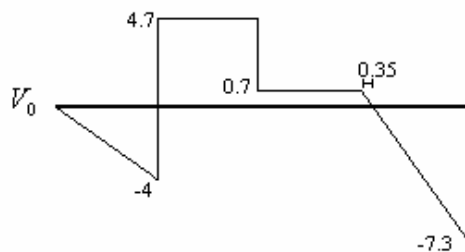
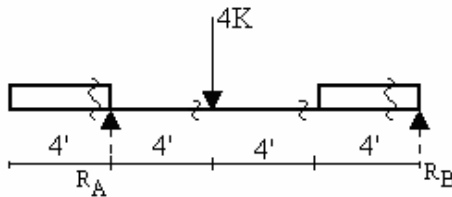
$$R_B = \frac{-8 + 16 + 80}{12} = 7.3K \cdot pie$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-4 + R_A - 4 - 8 + 7.3 = 0$$

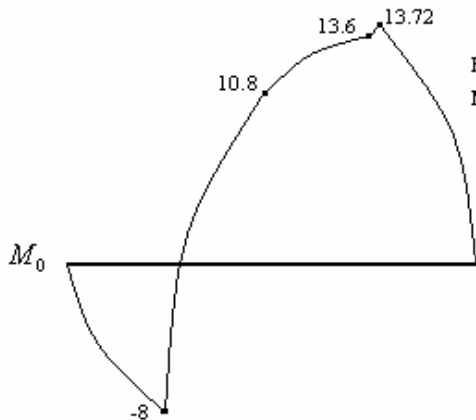
$$R_A = 16 + 7.3$$

$$R_A = 8.7K$$

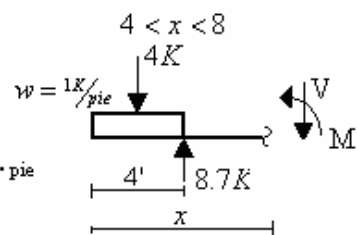


$0 < x < 4$

$$M = -1x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$$



En  $X = 12.35'$   
 $M_{max} = 17.72K \cdot pie$



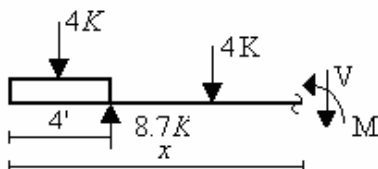
$$V = -4 + 8.7 = 4.7K$$

$$M = -4(x - 2) + 8.7(x - 4)$$

$$M = -4x + 8 + 8.7x - 39.8$$

$$M = 4.7x - 26.8$$

$8 < x < 12$



$$V = 4.7 - 4 = 0.7K$$

$$M = 4.7x - 26.8 - 4(x - 8)$$

$$M = 0.7x + 5.2$$

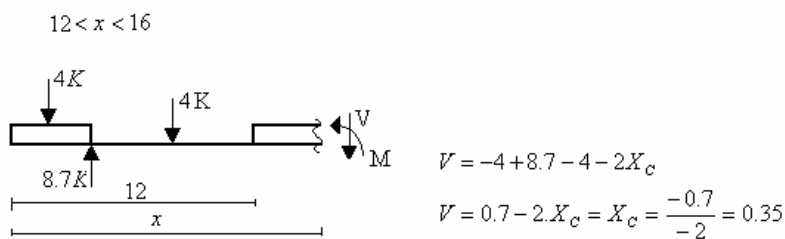
$$X_c = x - 12$$

$$x = X_c + 12$$

$$x = 12.35$$

continua →





$$M = -4(X_c + 10) + 8.7(X_c + 8) - 4(X_c + 4) - 2X_c\left(\frac{x_c}{2}\right)$$

$$M = -4X_c - 40 + 8.7X_c + 69.9 - 4X_c - 16 - X_c^2$$

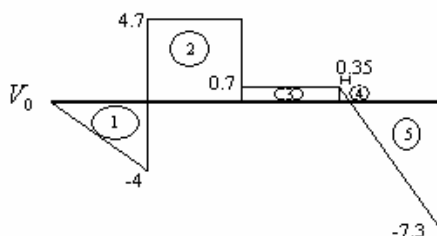
$$M = 0.7X_c + 13.6 - X_c^2$$

$$X_c = 0.35$$

$$M = 0.7(0.35) + 13.6 - (0.35)^2$$

$$M = 13.72K$$

Y por el método de suma de áreas:



En  $x = 4'$

$$M = A_1 = -8K \cdot \text{pie}$$

$$A_1 = \frac{4(-4)}{2} = -8$$

En  $x = 8$

$$M = A + A = -8 + 18.8$$

$$M = 10.8K \cdot \text{pie}$$

$$A_2 = 4 \times 4.7 = 18.8$$

En  $x = 12$

$$M = A_1 + A_2 + A_3$$

$$M = -8 + 18.8 + 2.8 = 13.6K \cdot \text{pie}$$

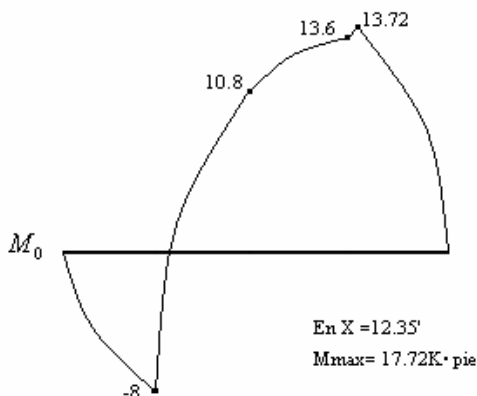
$$A_3 = 4(0.7) = 2.8$$

En  $x = 12.35$  Es el maximo

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$M = -8 + 18.8 + 2.8 + 0.12 = 13.72K \cdot \text{pie}$$

$$A_4 = \frac{(0.35)(0.7)}{2} = 0.12$$



En  $x = 16$

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$M = -8 + 18.8 + 2.8 + 0.12 - 13.32 \approx 0$$

$$A_5 = \frac{(4 - 0.35)(-7.3)}{2} = -13.32$$

CAPITULO 5ESFUERZOS EN VIGAS5.1 CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO

*Es la posición geométrica de un cuerpo rígido, en la cual se puede considerar concentrada toda su masa, también se dice que corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido.*

5.2. CENTROIDE DE UN ÁREA

*Es un punto que define el centroide geométrico de un objeto.*

*Es el término utilizado para definir el punto correspondiente al centro de gravedad de una sección geométrica de espesor despreciable y masa nula.*

*Conocer su posición permite producir una distribución de esfuerzos uniforme en la sección transversal de una estructura y su cálculo se puede hacer mediante las expresiones siguientes:*

$$\bar{x} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \dots\dots(5.1)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + \dots + y_nA_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \dots\dots(5.2)$$

*Donde:*

*X, Y= Coordenadas del centroide*

*A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>...A<sub>n</sub> = Área de cada una de las formas geométricas simples en que fue dividida el área original.*

*X<sub>1</sub>X<sub>2</sub>...X<sub>n</sub> = Distancia que existe entre el eje coordenado "Y" y el centroide de cada una de las formas geométricas simples.*

*Y<sub>1</sub>Y<sub>2</sub>...Y<sub>n</sub> = Distancia que existe entre el eje coordenado "X" y el centroide de cada una de las formas geométricas simples.*

Cuando se desea hallar el centroide de áreas complejas se debe hacer lo siguiente:

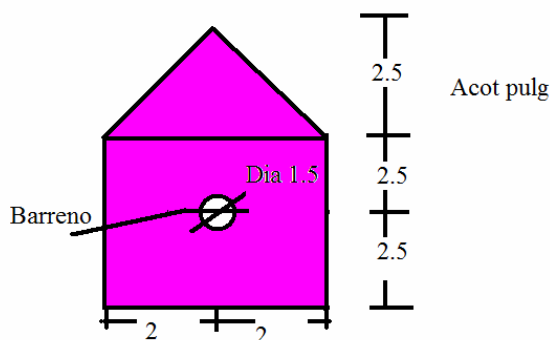
- 1.- Se descompone el área original en áreas geométricas más simples de modo tal que se pueda conocer casi de manera inmediata la localización del centroide.
- 2.- Se establece un par de ejes de referencia a partir de cuales se hacen todas las mediciones.
- 3.- Se calcula  $X, Y$ , aplicando las ecuaciones antes apropiadas.

Nota: Si el área original tiene un eje de simetría se sabe entonces que el centroide se localiza sobre dicho eje y en consecuencia ya no será necesario calcule la coordenada correspondiente a ese eje.

En la tabla 1.4 de la referencia [1] se proporcionan las coordenadas del centroide, así como el momento de inercia con respecto al eje centroidal  $x-x$  para las formas geométricas más comunes.

### Ejercicios.

5.1. Calcule el centroide para las figuras mostradas.



$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

$$A_1 = 4 \times 5 = 20 \text{ in}^2$$

$$A_2 = \frac{4 \times 2.5}{2} = 5 \text{ in}^2$$

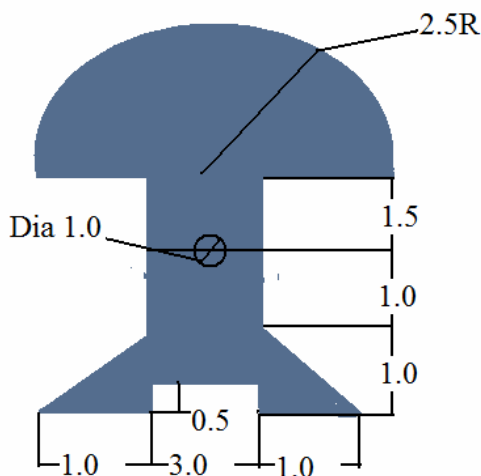
$$A_3 = \frac{\pi(1.5^2)}{4} = 1.76 \text{ in}^2$$

$$y_1 = 2.5$$

$$y_2 = 5 + \frac{1}{3}(2.5) = 5.83$$

$$y_3 = 2.5$$

$$\bar{y} = \frac{(2.5 \times 20) + (5.83 \times 5) - (2.5 \times 1.76)}{20 + 5 + (-1.76)} = 3.216 \text{ in.}$$



$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(9 \times 2) + (0.5 \times 0.34)(2) + (9.81 \times 4.56) - (2 \times 0.78)}{9 + 0.5 + 9.81 - 0.78} = 3.23 \text{ in.}$$

$$A_1 = 3 \times 3 = 9 \text{ in}^2 \quad A_2 = A_3 = \frac{1 \times 1}{2} = 0.5 \text{ in}^2 \quad A_4 = \frac{\pi(2.5^2)}{2} = 9.81 \text{ in}^2$$

$$A_5 = \frac{\pi(1^2)}{4} = 0.78 \text{ in}^2$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = y_3 = \frac{1}{3}(1) = 0.34 \quad y_4 = 3.5 + \frac{4(2.5)}{3\pi} = 4.561 \quad y_5 = 2$$

### 5.3 MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia de un área plana con respecto a los ejes  $x-x$  e  $y-y$ , figura 6.4, se definen mediante las ecuaciones siguientes:

$$I_{y-y} = \int x^2 \cdot dA \quad \circ \quad I_{x-x} = \int y^2 \cdot dA \quad \dots\dots(5.3)$$

Donde:

$I_{x-x}$  es el momento de inercia de la sección con respecto a un eje  $x-x$ .

$I_{y-y}$  es el momento de inercia de la sección con respecto a un eje  $y-y$

$x, y$  son las coordenadas del elemento diferencial  $dA$ .

Como  $dA$  esta multiplicado por el cuadrado de la distancia, los momentos de inercia son llamados segundos momentos del área.

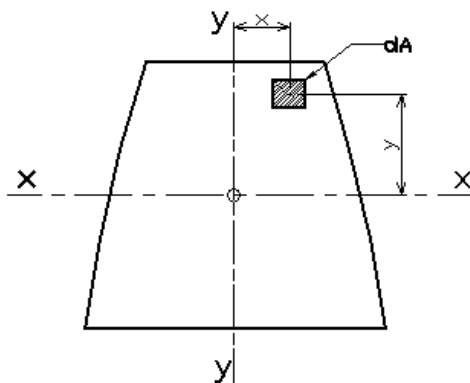


Figura 6.4. Momento de inercia de un área.

Debido a que el momento de inercia es una definición meramente matemática, no es fácil "visualizar" esta propiedad de la misma manera que es posible visualizar otras propiedades, como puede ser: el área, el centroide, etc. Sin embargo su cálculo numérico es una herramienta muy importante que tiene muchas aplicaciones; por ejemplo, desde el punto de vista de la mecánica de sólidos, el momento de inercia de un área es una "medida" de la resistencia que ofrece el material incluido dentro de la sección transversal, esto es, a mayor magnitud del momento de inercia, mayor será la resistencia del elemento.

Para calcular el momento de inercia de un área a partir de la ecuación 6.14 se han deducido fórmulas para cada una de las áreas simples que se encuentran comúnmente.

Para ilustrar el procedimiento, a continuación se obtendrá la fórmula para el momento de inercia con respecto al eje  $x-x$  del área rectangular mostrada en la figura 6.5.

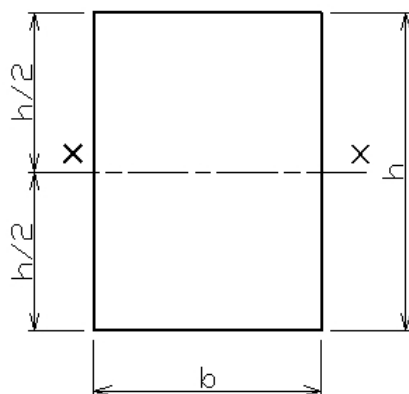


Figura 6.5. Sección rectangular

El elemento de área  $dA$  se escoge como una faja delgada paralela al eje  $x-x$ , localizada a una distancia  $y$  a partir de dicho eje, como se aprecia en la figura 6.6.

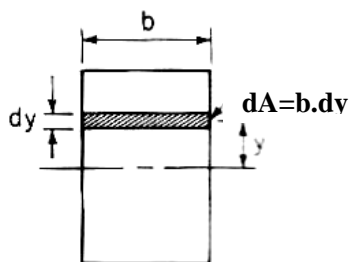


Figura 6.6. Análisis de una sección rectangular

El segundo momento de esa área se integra (se suma) entre los límites  $-h/2$  hasta  $+h/2$ . El cálculo de la integral se muestra a continuación:

$$I_{x-x} = \int y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot b \cdot dy \quad \dots\dots(5.3)$$

Resolviendo:

$$I_{x-x} = b \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{+h/2}$$

y sustituyendo los límites en la ecuación:

$$I_{x-x} = b \cdot \left[ \frac{(+h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right]$$

Así:

$$I_{x-x} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \dots\dots(5.4)$$

Esta es la fórmula para el momento de inercia de un área rectangular evaluada con respecto al eje  $x-x$  que pasa por su centroide. De manera semejante, se obtienen las ecuaciones para otras formas geométricas y que son las que aparecen en tablas de manuales y libros.

Para calcular el momento de inercia de un área compleja, esto es, que esta formada por varias formas simples, es necesario aplicar el teorema de los ejes paralelos que establece lo siguiente: "El momento de inercia de toda el área es igual a la suma de los momentos de inercia de cada una de las áreas simples con respecto al eje centroidal  $x'-x'$  (o  $y'-y'$ ) de toda el área" pudiéndose expresar matemáticamente de la forma siguiente:

$$I_{x'-x'} = \sum (I_{x-x} + A \cdot dy^2) \quad \dots\dots(5.5)$$

o

$$I_{y'-y'} = \sum (I_{y-y} + A \cdot dx^2) \quad \dots\dots(5.6)$$

Donde:

$I_{x'-x'}$  es el momento de inercia de toda el área con respecto a su propio eje centroidal  $x'-x'$ .

$I_{x-x}$  es el momento de inercia de cada una de las áreas simples con respecto a su eje centroidal  $x-x$

$I_{y'-y'}$  es el momento de inercia de toda el área con respecto al eje centroidal  $y'-y'$ .

$I_{y-y}$  es el momento de inercia de toda el área con respecto eje centroidal

$A$  es el área de cada una de las áreas simples en que se dividió el área original

$dy$  es la distancia medida sobre el eje  $y$  que existe entre el eje centroidal  $x-x$  de cada una de las figuras simples y el eje centroidal  $x'-x'$  de toda el área

$dx$  es la distancia medida sobre el eje  $x$  que existe entre el eje centroidal  $y-y$  de cada una de las figuras simples y el eje centroidal  $y'-y'$  de toda el área.

Desde el punto de vista de la mecánica de sólidos el momento de inercia de un área es una medida de la resistencia que ofrece el material incluido dentro de la sección transversal esto es, a mayor magnitud del momento de inercia mayor será la resistencia del elemento. Ahora bien, no es necesario tener una gran área para tener un mayor momento de inercia, menos material ventajosamente distribuido puede proporcionar un momento de inercia superior.

#### 5.4. HIPÓTESIS FUNDAMENTAL Y FÓRMULA DE LA FLEXIÓN

##### ELÁSTICA

Como ya se estudio en el capítulo anterior, en cualesquier sección transversal de una viga actúan al mismo tiempo una fuerza cortante  $V$  y un momento flexionante o flector  $M$ , que producen a su vez esfuerzos de diferente naturaleza, siendo los más importantes los esfuerzos normales por flexión o simplemente esfuerzos flexionantes.

En la deducción y uso de la fórmula de la flexión, se hacen ciertas suposiciones con respecto a la acción de la viga. En un



trabajo de diseño normal estas suposiciones se aproximan a la acción real de la viga. Si en casos relativamente raros de diseño elemental surgen situaciones donde estas suposiciones no son válidas, deben emplearse otros métodos de análisis.

Las suposiciones que se hacen al obtener y usar la fórmula de la flexión son:

1. La viga inicialmente es recta, tiene una sección transversal constante y se conserva así esencialmente cuando está cargada. Las vigas realmente tienen ligeramente flexiones y torceduras que pueden ocurrir durante su fabricación, y cuyo efecto se desprecia. Sin embargo, el gancho de una grúa, que tiene una gran curvatura, no podría diseñarse mediante la fórmula de la flexión

2. Las cargas se aplican en tal forma que no se presenta torsión. Si las cargas se aplican excéntricamente, tiene lugar una combinación de flexión y torsión.

3. Todos los esfuerzos en la viga están por debajo del límite elástico, y por consiguiente, se aplica la Ley de Hooke.

4. El módulo de elasticidad de las fibras a compresión es igual al de las fibras a tensión.

5. La parte de la viga que está comprimida, está restringida para moverse lateralmente.

6. Las secciones planas antes de la flexión se conservan planas después de la flexión. Es decir, un plano que pase a través de una sección transversal antes de la flexión no se alabeará después de que se cargue la viga.

Para obtener la fórmula de la flexión es esencial un conocimiento de la distribución de esfuerzos en cualquier sección transversal de la viga conforme a las suposiciones anteriores. Dicha distribución de esfuerzos será analizada con ayuda del miembro mostrado en la figura 6.1. A continuación, se trazan dos líneas verticales (ABD y FGH) separadas una distancia  $x$ .

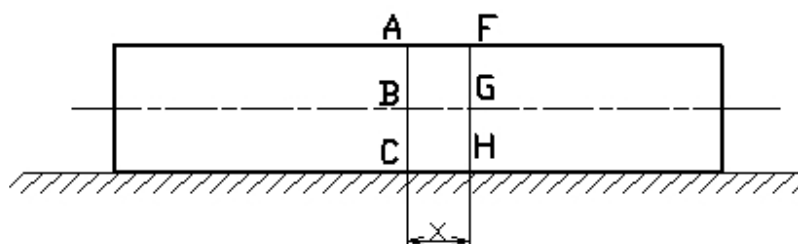


Figura 6.1. Miembro sin carga

Si el elemento se coloca sobre dos apoyos y se le aplica una carga  $P$  como se aprecia en la figura 6.2a), se comportara como una viga y como resultado de la flexión que experimenta se puede observar lo siguiente: la distancia entre A y F disminuye, la distancia entre C y H aumenta y la distancia entre B y G no cambia. Si se traza verticalmente la línea  $F'GH'$  a través del punto G, como se muestra en la figura 6.2b), se puede apreciar que la unidad de deformación varia linealmente a lo largo del peralte de la viga, desde un valor máximo a compresión hasta un máximo a tensión. Ya que se supone que el material sigue la Ley de Hooke y posee el mismo módulo de elasticidad a tensión y compresión se puede deducir que el esfuerzo por flexión varía también linealmente a lo largo del peralte de la viga. Debe notarse que el esfuerzo en los puntos B y G es igual a cero, ya que no hay deformación en dichos puntos. El lugar geométrico de los puntos en una viga cargada teniendo un esfuerzo a la flexión nulo se llama superficie neutral, mostrándose como la

*línea JBGK en la figura 6.2a) y la intersección de la misma con cualquier sección transversal se le llama eje neutro.*

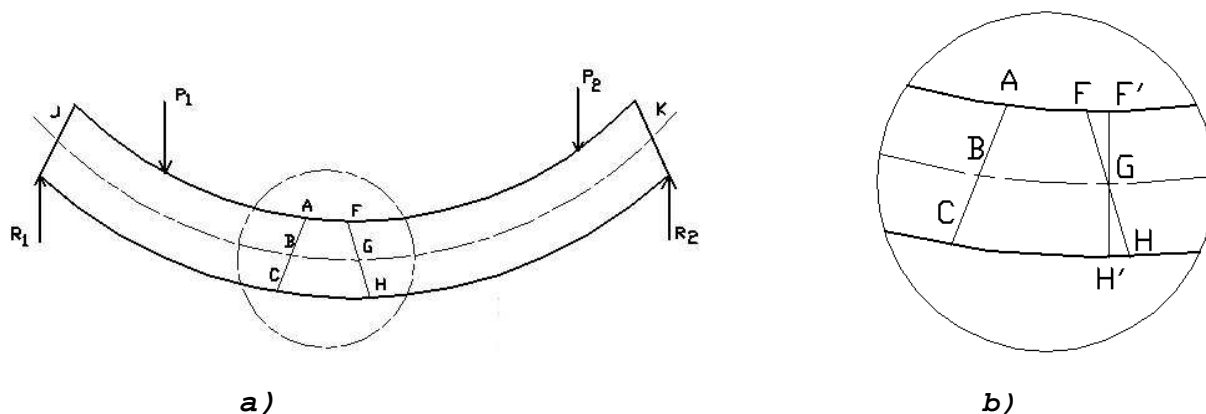


Figura 6.2. Viga cargada

*Para deducir una ecuación que permita calcular los esfuerzos por flexión se hará uso de la figura 6.3 que muestra la vista de la sección transversal y la distribución de esfuerzos en una sección de una viga donde actúa un momento flexionante positivo.*

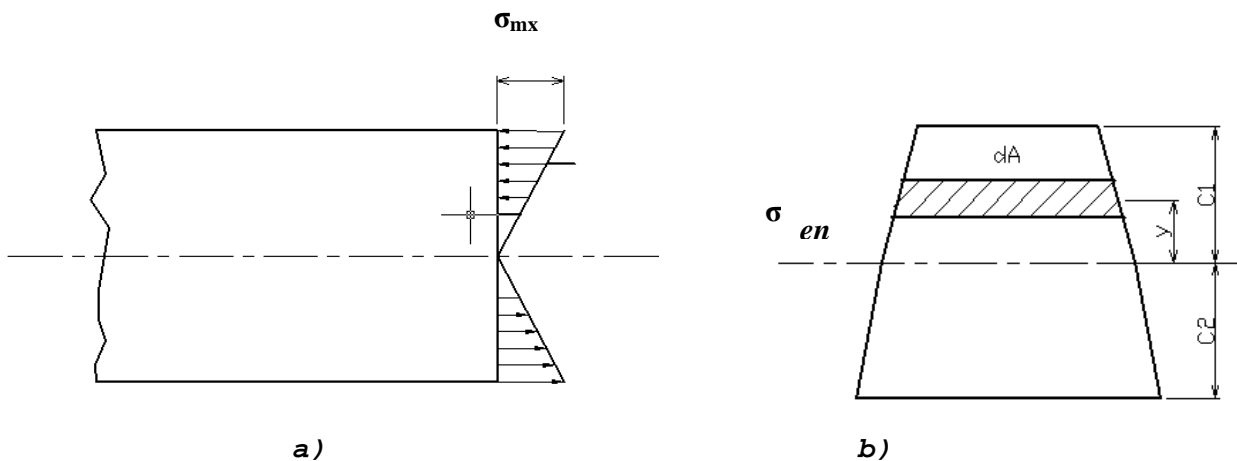


Figura 6.3. a) Distribución de esfuerzos flexionantes b) Sección transversal de la viga

*Así, el esfuerzo  $\sigma$  en cualquier punto a una distancia  $y$  desde el eje neutro actuando sobre un área diferencial  $dA$  es equivalente a una fuerza diferencial  $dF$ , eso es:*

$$dF = \sigma \cdot dA \quad \dots\dots\dots(5.7)$$

Tal fuerza diferencial produce un momento con respecto al eje neutro:

$$dM = dF \cdot y = \sigma \cdot dA \cdot y \quad \dots\dots\dots(5.8)$$

El momento interno en la sección debe ser igual a la suma de los momentos diferenciales sobre la sección completa, así:

$$M = \int dM = \int \sigma \cdot dA \cdot y \quad \dots\dots\dots(5.9)$$

Como puede apreciarse, el esfuerzo máximo  $\sigma_{mx}$  actúa a una distancia  $c_1$  desde el eje neutro; por lo tanto, el esfuerzo en cualquier punto puede expresarse en función de este esfuerzo máximo, así:

$$\sigma = \sigma_{mx} \left( \frac{y}{c_1} \right) \quad \dots\dots\dots(5.10)$$

Sustituyendo la ec.(5.10) en la ec.(5.9) se obtiene:

$$M = \int \frac{\sigma_{mx} \cdot y}{c_1} \cdot dA \cdot y \quad \dots\dots\dots(5.11)$$

Ya que  $\sigma_{mx}$  y  $c_1$  son constantes:

$$M = \frac{\sigma_{mx}}{c_1} \int_{c_2}^{c_1} y^2 \cdot dA \quad \dots\dots\dots(5.12)$$

El término integral se conoce como el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje (neutro) de referencia; por esto:

$$M = \frac{\sigma_{mx} \cdot I_{en}}{C_1} \quad \dots\dots\dots(5.13)$$

O bien:

$$\sigma_{mx} = \frac{M \cdot C_1}{I_{en}} \quad \dots\dots\dots(5.14)$$

De esta manera, el esfuerzo  $\sigma$  en cualquier punto en la sección puede calcularse así:

$$\sigma = \frac{\sigma_{mx} \cdot y}{c} = \frac{M \cdot c_1 \cdot y}{I_{en} \cdot c_1} = \frac{M \cdot y}{I_{en}} \quad \dots\dots\dots(5.15)$$

La distribución de esfuerzos usada en el análisis anterior considera únicamente a la flexión, esto es, sin considerar algún esfuerzo axial debido a carga axial o longitudinal, es por esto, que la suma de las fuerzas diferenciales  $dF$  en la sección debe ser igual a cero, en consecuencia:

$$\int \sigma \cdot dA = \int \frac{\sigma_{mx} \cdot y}{c} \cdot dA = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\sigma_{mx}}{c_1} \int_{c_2}^{c_1} y \cdot dA = 0 \quad \dots\dots\dots(5.16)$$

Ya que el término integral es el momento de primer orden,  $Q$ , del área de la sección transversal con respecto al eje neutro, la ecuación 6.10 se puede escribirse así:

$$\left(\frac{\sigma_{mx}}{c_1}\right) \cdot Q \cdot A = 0 \quad \dots\dots\dots(5.17)$$

Como los términos  $\sigma_{mx}/c_1$  y  $A$  no pueden ser igual a cero,  $Q$  debe ser igual a cero: Así, se ve que por la suposición hecha, el

eje neutro debe coincidir con el eje centroidal del área transversal.

Finalmente, la ecuación 6.9 se escribe usualmente sin subíndices como:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \dots\dots\dots(5.18)$$

O en el caso de los esfuerzos máximos que se producen en las fibras más alejadas, ya sea a tensión o compresión:

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \dots\dots(5.19)$$

Donde:

$\sigma$ , es el esfuerzo a la flexión a una distancia  $y$  o  $c$  desde el eje centroidal

$M$ , es el momento flexionante que actúa en la sección

$I$ , es el momento de inercia de la sección con respecto a su eje centroidal.

### 5.5. ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS

La consideración del esfuerzo cortante vertical como tal, se hace en muy pocas ocasiones en el análisis y diseño de vigas, sin embargo, estos esfuerzos se relacionan con los esfuerzos cortantes horizontales y por esto, es de importancia en algunos aspectos en el diseño de vigas, así. Los esfuerzos cortantes horizontales deben considerarse en las dos aplicaciones que se describen a continuación:

- a) El material usado para la viga tiene una baja resistencia al esfuerzo cortante en una dirección (generalmente la horizontal). Esto ocurre en materiales como la madera.
- b) Las partes fabricadas de la viga deben estar unidas en forma segura.

La acción de los esfuerzos cortantes horizontales supone que una viga esta compuesta de varias placas delgadas, apiladas una sobre la otra, pero sin estar unidas de forma alguna, figura 6.4(a). Cuando se aplica una carga a la viga y ocurre la deformación, las superficies de contacto entre las placas se deslizarán y sus posiciones finales se ilustran en la figura 6.4(b).

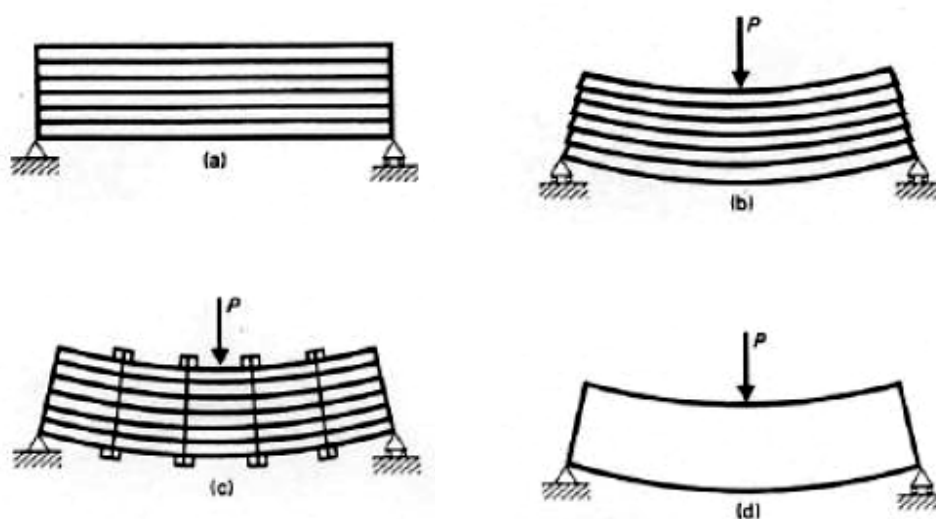


Figura 6.4. Esfuerzos cortantes horizontales en una viga cargada

Si las placas estuvieran unidas por algún medio antes de que se aplique la carga (por ejemplo, pernos,), figura 6.4(c), la viga actuará como una unidad, ya que dichos medios de unión impedirán el deslizamiento de las superficies individuales, por lo que los pernos estarían ejerciendo fuerzas horizontales.

Si la viga está compuesta de un solo bloque, figura 6.4(d) y se aplica una fuerza  $P$ , cada superficie horizontal tiende a deslizarse con respecto a la superficie adyacente. Realmente el deslizamiento no ocurre, pues la resistencia de la viga al

esfuerzo cortante (fuerzas internas aportadas por el material) lo impide.

Cortando y analizando la viga, como se muestra en la figura 6.5.

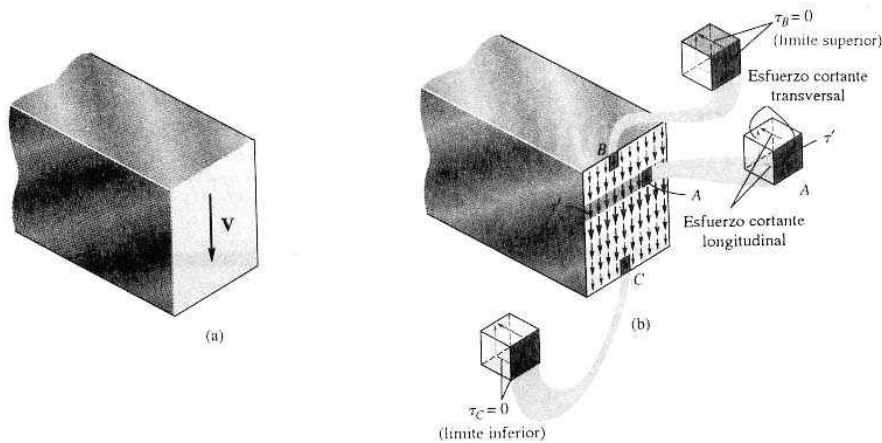


Figura 6.5.

La viga está en equilibrio, entonces sus bloques están en equilibrio. Para que se cumpla  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M = 0$  debe haber esfuerzos cortantes iguales sobre todas sus superficies

Se considera una viga de ancho  $b$  que soporta cargas transversales y se analiza una sección de longitud  $dx$ , figura 6.6.

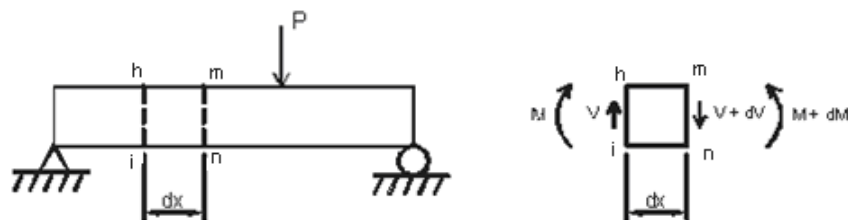
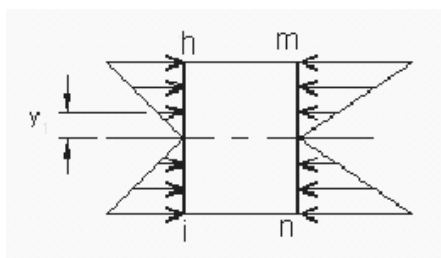


Figura 6.6. Análisis de la viga



El momento flexionante sobre la cara mn es mayor que el de la cara hi. Por lo tanto, los esfuerzos sobre la cara mn son mayores que los de la cara hi.



$$\sigma_{ab} = \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma_{cd} = \frac{(M + dM)c}{I}$$

Ahora se considera una sección cortada a una distancia  $y_1$  del eje neutro, figura 6.7.

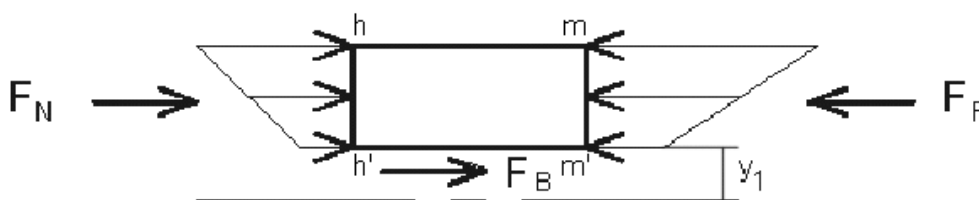


Figura 6.7.

Como  $F_N < F_F$ , y la sección debe estar en equilibrio debe haber una fuerza horizontal hacia la derecha  $F_B$  para que se cumpla  $\Sigma F_x = 0$ .

$F_B$  es la fuerza cortante horizontal en la viga en esta sección. Dividiendo  $F_B$  entre el área sobre la cual actúa se obtiene el esfuerzo cortante horizontal en ese lugar.

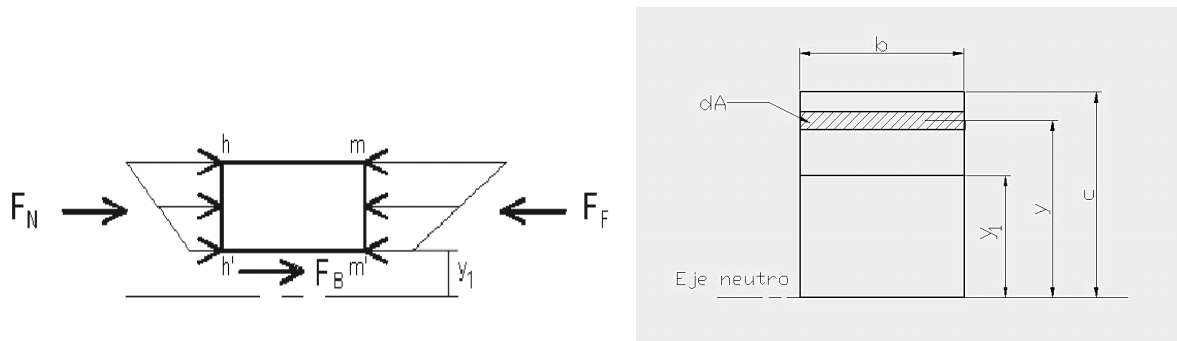


Figura 6.8.

Esto es:

$$F_N = \int_{y_1}^c \sigma_{hh'}(dA).....(5.20)$$

$$F_N = \frac{M}{I} \int_{y_1}^c ydA.....(5.21)$$

Y:

$$F_F = \int_{y_1}^c \sigma_{mm'}(dA) = \frac{M + dM}{I} \int_{y_1}^c ydA.....(5.22)$$

Aplicando:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$\Sigma F_x = F_N - F_F + F_B = 0.....(5.23)$$

Sustituyendo  $F_N$  y  $F_F$  dadas en las ecuaciones (5.21) y (5.22) y en la ec. (5.23) y despejando  $F_B$

$$F_B = F_F - F_N = \frac{M + dM}{I} \int_{y_1}^c ydA - \frac{M}{I} \int_{y_1}^c ydA = \frac{dM}{I} \int_{y_1}^c ydA$$

$$F_B = \frac{dM}{I} \int_{y_1}^c ydA = F_F - F_N = \frac{dF}{dx} = q = \frac{dM}{dxI} \int_{y_1}^c ydA...(5.24)$$

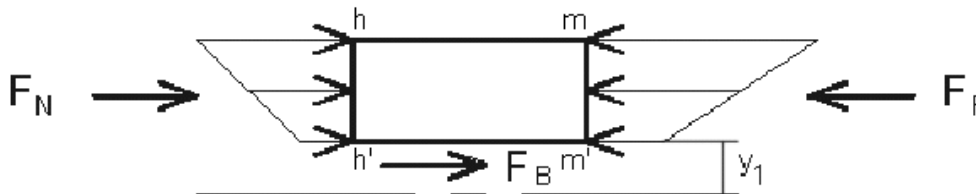
Y como:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

y el termino integral es el momento estático o de primer orden  $Q$  del área por arriba de la fibra de interés con respecto al eje neutro, sustituyendo se obtiene:

$$q = \frac{VQ}{I} \dots (5.25)$$

Para calcular el esfuerzo cortante:



$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{F_B}{A} = \frac{F_F - F_N}{dx \cdot b} = \frac{dM}{bdxI} \int_{y_1}^c y \cdot dA \dots (5.26)$$

Y como:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^c y dA \dots (5.27)$$

Y el término integral es el momento estático  $Q$ :

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \dots (5.28)$$

Donde:

$t$  = esfuerzo cortante horizontal

$V$  = fuerza cortante vertical en la sección

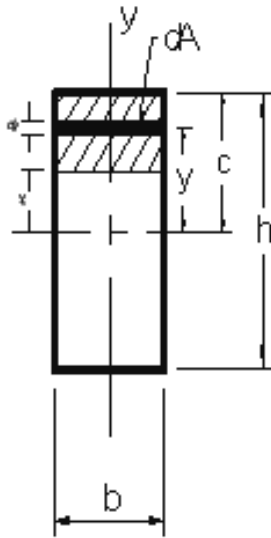
$Q$  = momento estático del área que queda arriba (o abajo) del corte

$I$  = momento de inercia de toda el área de la sección transversal con respecto al eje neutro

$b$  = ancho de la sección del corte

**5.5.1. Esfuerzos cortantes en vigas de sección rectangular**

Para determinar el esfuerzo cortante  $\tau$  a una distancia  $y_1$  arriba del eje neutro, se elige una sección  $dA$  a una distancia  $y$  sobre el eje neutro.



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$Q = \int_{y_1}^c ydA = \int_{y_1}^c ybdy = \frac{b}{2}(c^2 - y_1^2) \dots (a)$$

se tiene que

$$\tau = \frac{Vb(c^2 - y_1^2)}{Ib2} = \frac{V(c^2 - y_1^2)}{2I} \dots (b)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}, h = 2c, A = bh = 2bc$$

Sustituyendo (c) en (b):

$$I = \frac{Ac^2}{3} \dots (c)$$

$$\tau = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y_1^2}{c^2}\right) \dots (d)$$

El esfuerzo cortante máximo se tiene para  $y_1 = 0$ , que está en el eje neutro. Por lo tanto

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V}{2A}$$

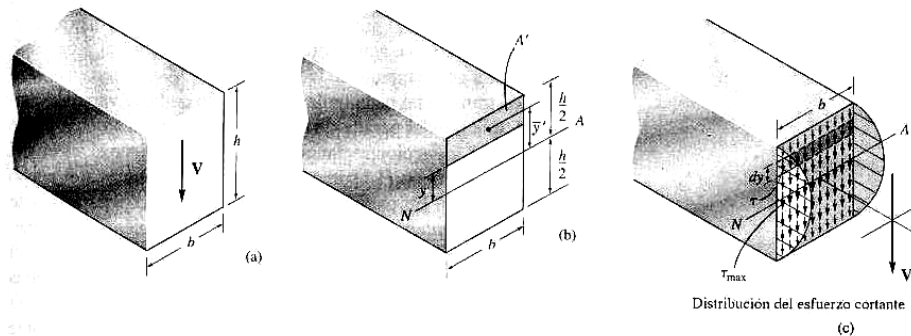
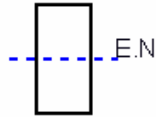
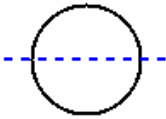
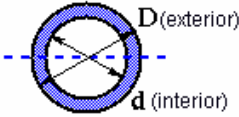
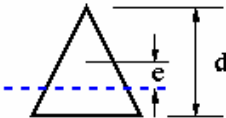
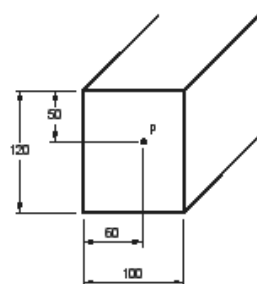


Tabla 5.1. Fórmulas para  $\tau_{\text{máx}}$

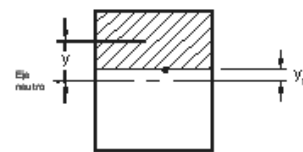
	$\tau = \frac{3V}{2A}$	$e = 0$
	$\tau = \frac{4V}{3A}$	$e = 0$
	$\tau = \frac{4V}{3A} \left( 1 + \frac{Dd}{D^2 + d^2} \right)$	$e = 0$
	$\tau = \frac{3V}{2A}$	$e = \frac{d}{8}$

*Ejemplo: una viga de sección rectangular está sometida a una fuerza cortante de 13 kN..*

- *Determinar el esfuerzo cortante en el punto P de la sección transversal*
- *El esfuerzo cortante máximo en la viga*



Solución (a)



$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \Rightarrow \tau = \frac{3V}{2A} \left( 1 - \frac{y_1^2}{c^2} \right)$$

$$\tau = \frac{3(13000N)}{(2)0.012m^2} \left( 1 - \frac{(0.01)^2}{(0.06)^2} \right)$$

$$\tau = 1579861.1 \frac{N}{m^2} = 1.58MPa$$

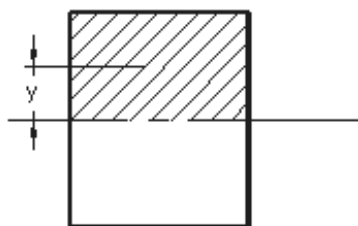
$$A = (0.1)(0.12) = 0.012m^2$$

$$V = (13kN)(1000) = 13000N$$

$$y_1 = (60 - 50) = 10mm = 0.01m$$

$$c = (h/2) = (120/2) = 60mm = 0.06m$$

(b) Encontrando el esfuerzo máximo en la viga



$$\tau = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y_1^2}{c^2}\right)$$

$$y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(3)(13000N)}{(2)(0.012m^2)} = 1625000 \frac{N}{m^2} = 1.625MPa$$

### 5.6. APLICACIONES

La aplicación más importante de la ecuación 5.19. es el diseño de una viga, esto es, determinar la mínima sección práctica requerida para evitar que la viga quede sometida a esfuerzos excesivos. Normalmente, se diseña en función de los esfuerzos admisibles a flexión y posteriormente, si se considera necesario, se verifica para otros tipos de esfuerzos.

En la práctica del diseño de vigas, frecuentemente se utiliza la relación que existe entre el momento de inercia  $I$  y la distancia  $c$  conociéndose como módulo de sección  $Z$ , esto es:

$$Z = \frac{I}{c} \quad \dots\dots\dots(5.29)$$

Por lo tanto la ec.5.19 se puede escribir así:

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \dots\dots\dots(5.30)$$

**Donde:**

$\sigma$  es el esfuerzo admisible en el material de la viga.

$M$  es el momento flector máximo que actúa sobre la viga y que se obtiene a partir del diagrama de momentos flexionantes.

La ecuación se utiliza tanto para el diseño de vigas con sección geométrica simple (por ejemplo, un rectángulo, un triángulo, un círculo, etc), como para perfiles estructurales disponibles comercialmente.

Para las vigas con sección geométrica simple geométrica simple se recomienda el procedimiento siguiente:

1.- Determine el momento flexionante máximo que actúa en la viga.

2.- Calcule el esfuerzo admisible, esto es:

$$\sigma = \frac{\sigma_f}{F.S} \quad \dots\dots(5.31)$$

**Donde:**

$F.S$  es el factor de seguridad

3.- Se calcula el módulo de sección necesario para la viga, para ello, se despeja al módulo de sección  $Z$  de la ec. 5.21 obteniendo:

$$Z = \frac{M}{\sigma} \quad \dots\dots(5.32)$$

4.- Por último, como se trata de secciones geométricas simples, se calculan las dimensiones necesarias para la viga aplicando la ec.(5.20), esto es:

$$Z = \frac{I}{c}$$

Así mismo, en el comercio especializado se encuentran disponibles diferentes perfiles estructurales de variadas características tales como: perfil I estándar, perfil I de ala ancha, perfil canal, etc; como los que se muestran en al figura 6.11

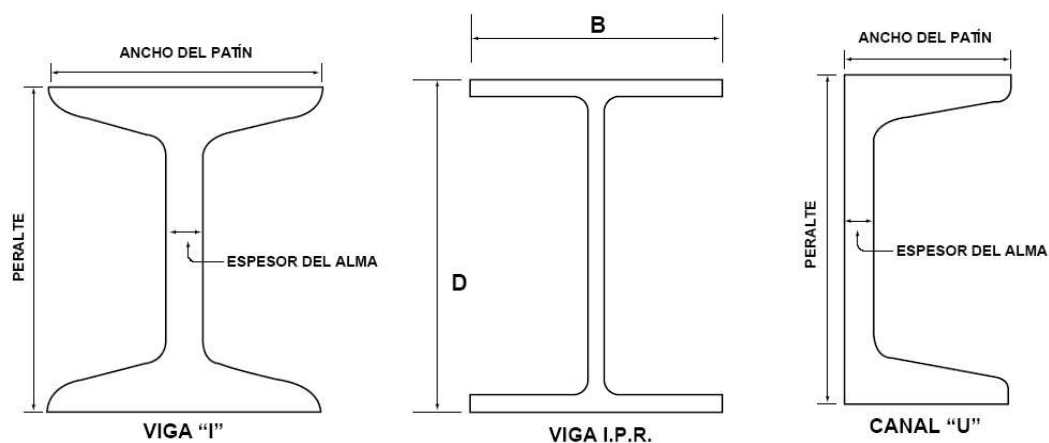


Figura 6.11. Algunos perfiles estructurales disponibles comercialmente

Las propiedades de estos perfiles son proporcionadas por los fabricantes en base a normas establecidas por asociaciones tales como: ASTM (American Society for Testing and Materials), AISC (American Institute of Steel Construction) y NOM (Norma Oficial Mexicana) y son fáciles de obtener, ya sea por medio de los manuales proporcionados por los fabricantes, Internet o los apéndices de la mayor parte de libros dedicados a estos temas.

El procedimiento a seguir para seleccionar el perfil adecuado para una aplicación dada es el que a continuación se describe:

- 1.- Se determina el momento flexionante máximo que actúa en la viga.
- 2.- Se calcula el esfuerzo admisible en el material de la viga
- 3.- Se calcula el módulo de sección  $S$  necesario



*4.- Con el módulo de sección calculado en el paso anterior, se hace uso de las tablas antes mencionadas y se selecciona aquel perfil que satisfaga nuestras necesidades, debiendo recordar que también influye el peso del perfil, tanto en el costo como en el momento adicional creado en la viga, por lo que muchos casos se hace necesario un nuevo análisis de la viga.*

## CAPITULO 6

### TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

#### 6.1. ECUACIONES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZO PLANO

*Se pueden deducir fórmulas generales para los esfuerzos normal y cortante en un punto sobre un plano de cualquier inclinación deseada.*

*Para obtener fórmulas generales para resolver todas las combinaciones posibles de esfuerzo plano, se deducirán las fórmulas para los esfuerzos mostrados en la figura 6.1(a). La cuña mostrada en la figura 6.1(b) muestra las fuerzas que actúan sobre las superficies. La tarea consiste en deducir ecuaciones para  $\sigma'$  y  $\tau'$  escribiendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre. Para poder sumar las fuerzas paralelas y perpendiculares a la superficie inclinada, se deben descomponer las fuerzas mostradas en la fig. 6.1(b) en sus componentes según esas direcciones. Estas componentes se muestran en la fig. 6.1(c).*

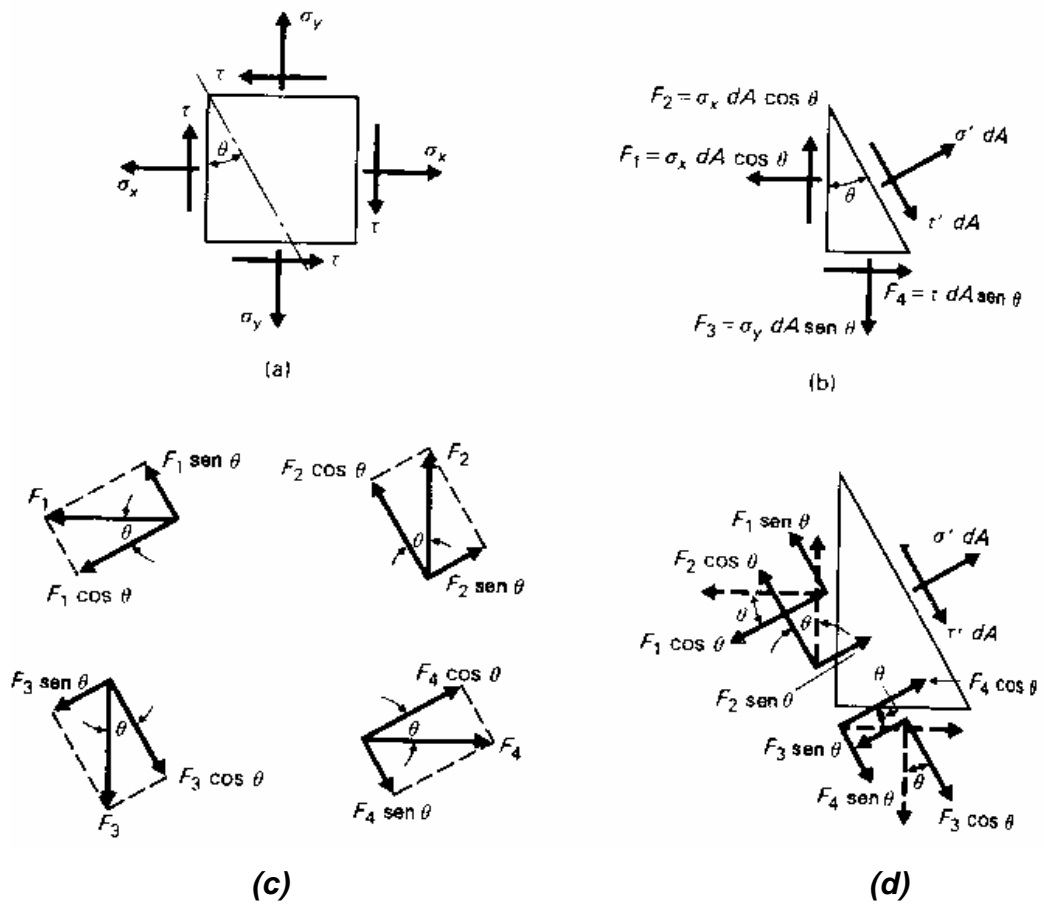


Figura 6.1.

A partir del diagrama de cuerpo libre de la fig. 6.1(d), se tiene:

$$\sum F_{\perp} = 0:$$

$$\sigma' dA + dA \sin \theta \cos \theta + \tau dA \sin \theta \cos \theta - \sigma_x dA \cos^2 \theta - \sigma_y dA \sin^2 \theta = 0$$

$$\sigma' = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta - 2\tau \sin \theta \cos \theta \quad (a) \quad \dots\dots (6.1)$$

Para obtener una expresión más útil, se sustituyen las identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

y

$$\text{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\text{sen}2\theta$$

en la ec. (6.1) Haciendo estas sustituciones y simplificando la expresión resultante se llega a:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau\text{sen}2\theta \quad \text{.....(6.2)}$$

Análogamente, las fuerzas paralelas al plano inclinado pueden sumarse, como se indica a continuación:

$$\sum F_{\parallel} = 0:$$

$$\tau'dA - \sigma_x dA\text{sen}\theta\cos\theta - \pi dA\cos^2\theta + \pi dA\text{sen}^2\theta + \sigma_y dA\text{sen}\theta\cos\theta = 0$$

$$\tau' = (\sigma_x - \sigma_y)(\text{sen}\theta\cos\theta) + \tau(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \quad \text{.....(6.3)}$$

Nuevamente, haciendo las mismas sustituciones trigonométricas y simplificando la expresión resultante:

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\text{sen}2\theta + \tau\cos 2\theta \quad \text{.....(6.4)}$$

Se usan las ecs. (6.2) y (6.4) para calcular los esfuerzos normal y cortante según cualquier ángulo de inclinación. Sin embargo, se debe adoptar una convención de signos de manera que el signo algebraico de la respuesta indique la clase de esfuerzo presente en la sección. La convención de signos para las ecs. (6.2) y (6.4) considera los esfuerzos de tensión como positivos y los esfuerzos de compresión como negativos. Los esfuerzos cortantes en los sentidos mostrados en la fig. 6.1(a) se considera que son positivos.

## 6.2. ESFUERZOS PRINCIPALES

Los esfuerzos en un punto situado sobre un plano inclinado según un ángulo  $\theta$  se pueden calcular a partir de las ecs. (6.2) y (6.4). Sin embargo, no se sabe si los esfuerzos calculados mediante estas ecuaciones para cualquier ángulo particular son los esfuerzos máximos o mínimos posibles. Los esfuerzos máximos y mínimos en un punto se llaman esfuerzos principales.

Un método para obtener los esfuerzos principales es representar gráficamente los valores del esfuerzo a partir de la ec. (6.2), con los valores correspondientes de  $\theta$ . Si esto se hace, se obtendrá una gráfica semejante a la de la figura 6.2. Las coordenadas de los esfuerzos principales en A y B podrían entonces obtenerse gráficamente, pero este método es muy laborioso.

Por consiguiente, es más conveniente obtener fórmulas generales para los esfuerzos principales.

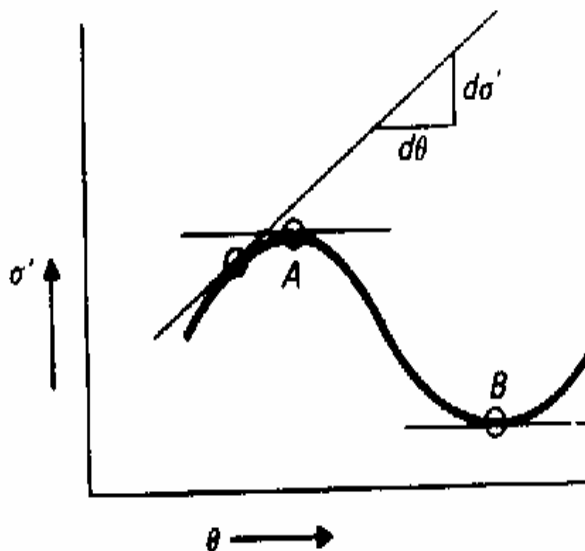


Figura 6.2. Variación del esfuerzo  $\sigma'$  en función de  $\theta$

Para la ec. (6.2), la primera derivada es  $d\sigma'/d\theta$ . En la figura 6.2 se ve que la pendiente de la curva en el punto donde se presenta el esfuerzo principal es cero (horizontal). Por lo tanto, se obtiene una ecuación general para los esfuerzos principales resolviendo un problema de máximos y mínimos. Esto es, se deriva la ec. (6.2) y se iguala la derivada a cero. Los valores de  $\theta$  para esa pendiente (cero) serán los correspondientes a los esfuerzos principales.

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots(6.2)$$

$$\frac{d\sigma'}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - 2\tau \cos 2\theta = 0$$

Resolviendo esta expresión se tiene:

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \dots\dots\dots(6.5)$$

La ec. (6.5) da dos valores de  $2\theta$  (con diferencia de  $180^\circ$ ), correspondientes a los puntos A y B de la fig. 2. Esto significa que las superficies oblicuas sobre las cuales ocurren los esfuerzos máximo y mínimo principales, se localizan con una diferencia en  $\theta$  de  $90^\circ$ .

Si se sustituyen los valores de  $2\theta$  de la ec. (6.5) en la ec. (6.2), se obtiene una fórmula para los esfuerzos normales principales.

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots\dots(6.6)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots\dots(6.7)$$

### 6.3. ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS

*El ángulo de inclinación para el cual ocurren los esfuerzos cortantes máximos se determina de la misma manera que para los esfuerzos normales máximos, es decir, se deriva la ecuación general para el esfuerzo cortante en un punto (ec. 6.4), y la derivada se iguala a cero. La solución de la ecuación que resulta da los ángulos para los cuales ocurren los esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Así:*

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots(6.4)$$

$$\frac{d\tau'}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau \sin 2\theta = 0$$

*Resolviendo la ecuación, se tiene*

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \quad \dots\dots\dots(6.8)$$

*La ecuación anterior da dos valores de  $\theta_s$  que tienen una diferencia de  $180^\circ$ . Esto significa que las secciones planas*

sobre las que ocurren los esfuerzos cortantes difieren en un ángulo,  $\theta = 90^\circ$ . Como la ec. (6.8) es recíproca negativa de la ec. (6.5), los valores correspondientes de  $2\theta$  difieren en  $90^\circ$ , y los valores correspondientes de  $\theta$  difieren en  $45^\circ$ .

Si los valores de  $2\theta$  obtenidos a partir de la ec. (6.8) se sustituyen en la (6.4), se obtiene una fórmula para los esfuerzos cortantes máximos.

$$\tau_{mx} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots(6.9)$$

#### 6.4. CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS Y SU CONSTRUCCIÓN

Las ecuaciones mostradas anteriormente pueden usarse para determinar los esfuerzos principales normal y cortante, en un punto. Sin embargo, este no es el método más fácil o más conveniente para calcular estos valores. Un enfoque mejor consiste en usar la solución gráfica que representa las fórmulas dadas anteriormente.

Las ecs. (6.2) y (6.4) representan la ecuación de un círculo en forma paramétrica. Cuando se traza un par de ejes coordenados y se sitúan los valores de  $\sigma'$  y  $\tau'$  que corresponden a un valor de  $\theta$ , las coordenadas corresponderán a un punto que queda situado sobre la circunferencia de un círculo. Esta propiedad de las ecuaciones hace mucho más fácil resolver problemas que combinen a esfuerzos normales y cortantes. Para construir un círculo de Mohr que sirva en la solución de problemas, se usa el siguiente procedimiento.



1. Se traza un par de ejes coordenados tomando a  $\sigma$  como eje de las abscisas y a  $\tau$  como eje de las ordenadas.
2. Se trazan los valores de  $\tau$  y  $\sigma$  correspondientes a dos superficies mutuamente perpendiculares del cubo elemental, tales como las caras  $cd$  y  $ac$  de la figura 6.3(a), obteniendo dos puntos en la periferia del círculo. De acuerdo con la convención de signos, los esfuerzos de tensión son positivos y los esfuerzos de compresión son negativos. Los esfuerzos cortantes que tienden a hacer girar al bloque en sentido de las manecillas del reloj, tales como los de las caras  $ab$  y  $cd$ , se consideran positivos, mientras que los esfuerzos cortantes que tienden a hacer girar el bloque en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, tales como los de las caras  $ac$  y  $bd$ , se consideran negativos. En el círculo de la figura 6.3(b), el Punto  $V$  con coordenadas  $(+\sigma, +\tau)$ , y el punto  $H$  con coordenadas  $(+\sigma, -\tau)$  son los puntos que se trazan.
3. Se traza la línea recta  $HCV$  que une estos dos puntos. Esta recta es el diámetro del círculo cuyo centro es el punto  $C$ .
4. Se completa el círculo tomando como centro al punto  $C$  y como radio  $CV$ .

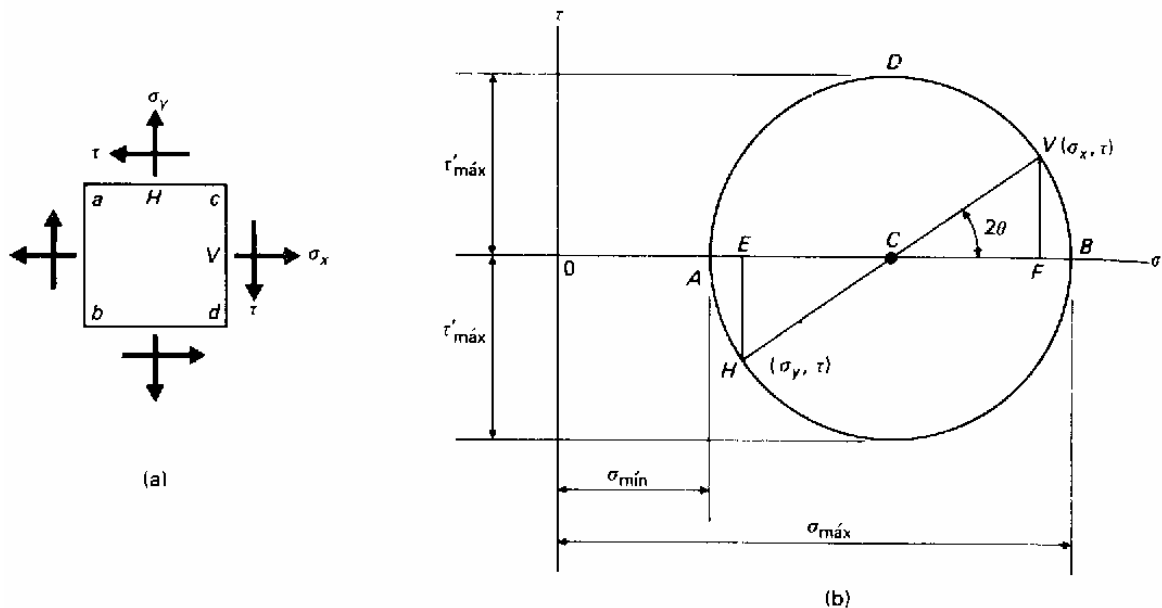


Figura 6.3. Círculo de Mohr

Las coordenadas de cualquier punto sobre la circunferencia de este círculo representan los esfuerzos normal y cortante correspondientes sobre un plano oblicuo inclinado según un ángulo igual a la mitad del mostrado sobre el círculo de Mohr. Se ve que los esfuerzos principales corresponden a los puntos A y B sobre el círculo, y el esfuerzo cortante máximo es la longitud del radio del círculo.

El uso del círculo de Mohr es un método rápido conveniente para calcular cantidades como esfuerzos principales, esfuerzos cortantes máximos y ángulos de inclinación de los planos sobre los que estos esfuerzos ocurren. El esquema puede hacerse a mano libre, pues estamos principalmente interesados en las coordenadas del punto C y el radio del círculo, que se determina mediante el uso del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo CFV de la figura 6.3(b)

### 6.5. ECUACIONES GENERALES PARA LA DEFORMACIÓN

Siempre que existan esfuerzos en un cuerpo, ocurrirán deformaciones. Las deformaciones en cualquier dirección, en un cuerpo sujeto a esfuerzos combinados, normal y cortante pueden determinarse considerando la geometría del movimiento producido por los esfuerzos.

Anteriormente se dedujeron ecuaciones para los esfuerzos normal y cortante en cualquier dirección para un elemento sujeto a un estado plano de esfuerzos. El procedimiento consistió en tomar un bloque elemental y deducir ecuaciones para los esfuerzos sobre un plano girado cualquier ángulo  $\theta$  con respecto a los ejes originales. Las ecuaciones para las deformaciones sobre un plano girado según un ángulo  $\theta$  con respecto a los ejes originales puede obtenerse de una manera análoga observando la geometría del movimiento.

Consideremos un pequeño bloque elemental sujeto a esfuerzos planos, normal y cortante. Supongamos que se conocen las deformaciones producidas por los esfuerzos normal y cortante, asociadas a un sistema de ejes coordenados  $X$  y  $Y$ . Ahora queremos determinar las deformaciones asociadas a un sistema de ejes coordenados  $X'$  y  $Y'$  girados según un ángulo  $\theta$  con respecto a los ejes originales, como se ve en la figura 6.4.

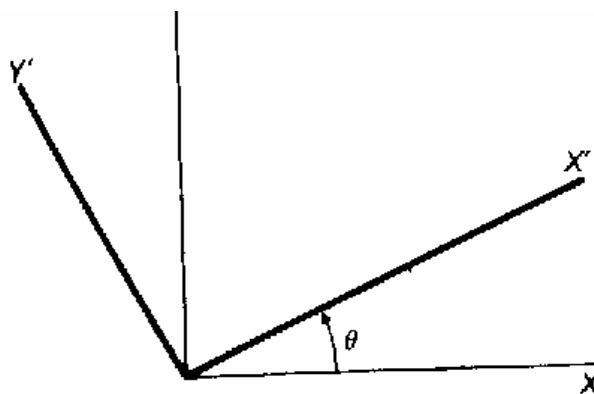


Figura 6.4.

La figura 6.5(a) indica un elemento sujeto a esfuerzos planos, normal y cortante. El elemento tiene lados de longitudes  $dx$  y  $dy$ , tales que la diagonal  $OB$  está sobre el eje  $X'$ . Después del movimiento que tiene lugar debido a los esfuerzos, la esquina original  $B$  se ha movido a  $B'$ , como se muestra en la figura 6.5(b). El movimiento  $BB'$  puede descomponerse en una componente  $BB''$ , paralela al eje  $X'$ , y una componente  $B''B'$ , perpendicular al eje  $X'$ . El alargamiento  $BB''$  es la deformación total a lo largo del eje  $X'$ .

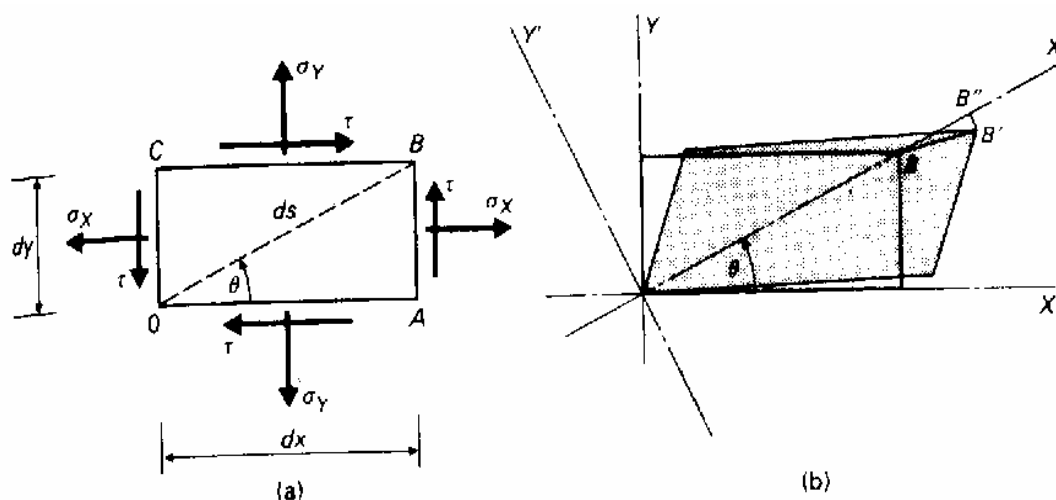


Figura 6.5.

Se quiere describir la deformación unitaria  $\epsilon'$  a lo largo del eje  $X'$  en función de las deformaciones producidas por los esfuerzos de la fig. 5(a). Las figuras 6.6(a), (c) y (e) indican los cambios de longitud producidos por cada una de las tres componentes del esfuerzo. La deformación total es  $\delta = \epsilon L$  entonces, la deformación producida por  $\sigma_x$  es  $\epsilon_x dx$  y la producida por  $\sigma_y$  es  $\epsilon_y dy$ . El esfuerzo cortante produce un movimiento  $\gamma dy$ , donde  $\gamma$  es la deformación unitaria por cortante.

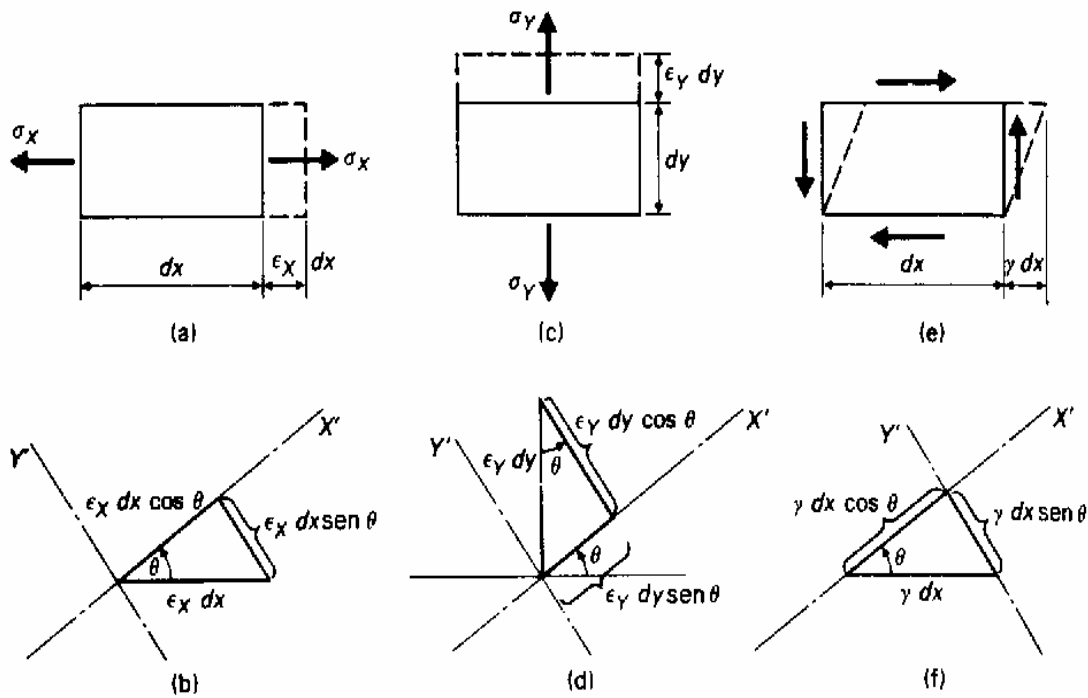


Figura 6.6.

Cada uno de estos movimientos puede descomponerse en componentes paralela y perpendicular al eje X'. Las figuras 6.6(b), (d) y (f) muestran estas componentes.

El movimiento total BB' de la figura 6.5(b) es la sumatoria de todas las componentes del movimiento a lo largo del eje X'. Esto puede escribirse como

$$\epsilon'(OB) = \epsilon' ds = \epsilon_x dx \cos \theta + \epsilon_y dy \sin \theta + \gamma dy \cos \theta \dots (6.10)$$

Reconociendo que según la figura 6.5(a)  $dx/ds = \cos \theta$  y  $dy/ds = \sin \theta$ , la ecuación (6.10) puede reescribirse como

$$\epsilon' = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma \sin \theta \cos \theta \dots (6.11)$$

Se obtiene una expresión más útil sustituyendo las identidades trigonométricas

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta,$$

en la ecuación (6.11). Haciendo estas sustituciones y simplificando la expresión resultante, llegamos a

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma}{2} \sin 2\theta \quad (8) \quad \dots\dots(6.12)$$

La deformación por cortante para el elemento de la fig. 5 es el cambio angular con respecto a la posición original. Esta es la combinación de la rotación de los ejes  $X'$  y  $Y'$ ,

$$\alpha \cong \tan \alpha = \frac{B''B'}{ds} \quad (c) \quad \dots\dots\dots(6.13)$$

La distancia  $B''B'$  es la suma de los movimientos perpendiculares al eje  $X'$ , indicados en la figura 6(b), (d) y (f). Es decir

$$B''B' = \varepsilon_x dx \sin \theta - \varepsilon_y dy \cos \theta + \gamma dy \sin \theta \quad \dots\dots(6.14)$$

Otra vez, reconociendo que  $dx/ds = \cos \theta$  y  $dy/ds = \sin \theta$ , el ángulo  $\alpha$  se obtiene dividiendo la ecuación (6.14) entre  $ds$ . Es decir:

$$\alpha = BB'/ds = \varepsilon_x \sin \theta \cos \theta - \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma \sin^2 \theta \quad \dots\dots(6.15)$$

El ángulo  $\beta$  es la rotación equivalente del eje  $Y'$ . Pueden construirse movimientos análogos a los indicados para el eje  $X'$ . La expresión resultante para el ángulo  $\beta$  llega a ser

$$\beta = -\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma \cos^2 \theta \quad \dots\dots(6.16)$$

El cambio en el ángulo  $X'OY'$  debido a estos movimientos angulares es la deformación por cortante,  $\gamma'$ . Combinando las ecuaciones (6.15) y (6.16), esto se convierte en

$$\gamma = \beta - \alpha$$

$$\gamma = -2\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + 2\varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \dots\dots(6.17)$$

Sustituyendo las identidades trigonométricas descritas anteriormente, la ecuación (6.17) puede reescribirse como

$$\gamma' = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta + \gamma \cos 2\theta \dots\dots\dots(6.18)$$

Las expresiones  $\varepsilon'$  y  $\gamma'$  de las ecuaciones (6.12) y (6.18) tienen la misma forma general que las de los esfuerzos, como lo indican las ecuaciones (6.2) y (6.4). El signo menos se debe a la convención de signos usada para los esfuerzos cortantes.

Se puede determinar la dirección de los ejes principales de deformación mediante una solución de máximos y mínimos semejante a la hecha para los esfuerzos. Derivando la ecuación 8 respecto a  $\theta$ , haciendo  $d\varepsilon/d\theta = 0$ , y resolviendo para  $\tan \theta$ , se llega a la ecuación

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \dots\dots(6.19)$$

Donde:

$\theta$  = ángulo correspondiente a las deformaciones unitarias principales

$\gamma$  = deformación unitaria por cortante

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  = deformaciones unitarias axiales

Sustituyendo en la ecuación (6.12) los valores de  $2\theta$  dados por la ecuación (6.19), se obtiene

$$\varepsilon_{\max/\min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \dots\dots(6.20)$$

El esfuerzo cortante máximo puede obtenerse derivando la ecuación (6.18), haciendo  $d\gamma/d\theta = 0$ , y resolviendo. Los resultados expresan que las deformaciones máximas por cortante ocurren según un ángulo de  $45^\circ$  respecto a los planos principales de deformación. El valor de la deformación máxima por cortante es

$$\frac{1}{2}\gamma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \dots\dots(6.21)$$

#### 6.6. CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIONES

El círculo de Mohr puede usarse para calcular valores de la deformación unitaria. El procedimiento es semejante al descrito para los esfuerzos.

La figura 6.7 ilustra los parámetros para esta construcción. Las deformaciones unitarias normales  $\varepsilon$  se trazan en el eje de las abscisas. Los alargamientos son positivos; los acortamientos son negativos. Las deformaciones unitarias por cortante, divididas entre dos se trazan sobre el eje de las ordenadas. Una deformación unitaria por cortante positiva ocurrirá cuando la arista paralela al eje X gira en sentido antihorario y la arista paralela al eje Y gira en sentido horario. La figura 6.5(b) muestra esta situación. Al identificar la coordenada se considera positiva una rotación en sentido horario, de una arista paralela a un eje positivo, y una rotación negativa en sentido antihorario.



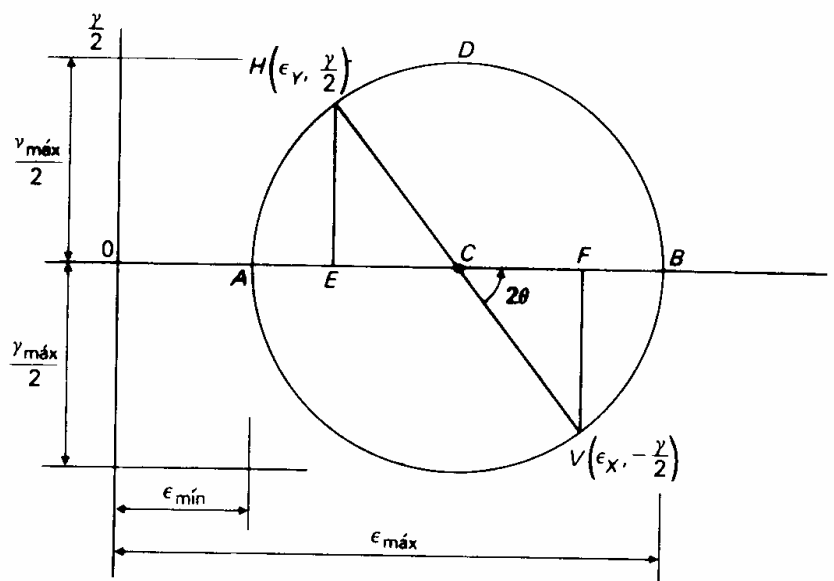


Figura 6.7.

Se trazan las dos coordenadas,  $V[\epsilon_x, -(\gamma/2)]$  y  $H[\epsilon_y, (\gamma/2)]$ , como en la figura 6.7. Estas coordenadas corresponden a las deformaciones unitarias representadas por la figura 6.5. La línea  $HCV$  es el diámetro del círculo. Con el punto  $C$  como centro, se traza el círculo completo. Las deformaciones unitarias máximas, normal y por cortante, junto con su ángulo de rotación, pueden determinarse mediante las mismas técnicas para los esfuerzos.

### 6.7. RELACIONES ENTRE DEFORMACIONES Y ESFUERZOS

En esta sección se establecen relaciones adicionales entre esfuerzo y deformación para materiales isotrópicos y linealmente elásticos. Estas relaciones son útiles para obtener esfuerzos a partir de deformaciones planas y para hallar cambios volumétricos en materiales elásticos sometidos a presión externa uniforme. Se establecen también la relación fundamental entre las constantes elásticas  $E$ ,  $G$  y  $\mu$

### **6.6.1. Relación entre esfuerzos y deformaciones principales**

En muchas investigaciones prácticas, las deformaciones en la superficie de un cuerpo se determinan por medio de rosetas. Utilizando el círculo de Mohr para deformaciones o las ecuaciones de transformación para éstas es posible determinar las deformaciones principales. Para establecer las ecuaciones apropiadas, hay que hacer notar que en un problema de esfuerzo plano  $\sigma_x = 0$ , entonces se tiene

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E}$$

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones para el esfuerzo principal, se obtienen las relaciones requeridas:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 \\ \text{y} & \quad \dots(6.22) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1 \end{aligned}$$

### **6.6.2. Relación entre E, G y $\mu$**

Los esfuerzos cortantes puros se pueden transformar en esfuerzos normales también puros. Por consiguiente, se debe concluir que las deformaciones causadas por esfuerzos cortantes puros deben estar relacionadas con las deformaciones producidas por esfuerzos normales. Con base en esta aseveración es posible establecer una relación fundamental entre E, G y  $\mu$  para materiales isotrópicos y linealmente elásticos.

Si  $\gamma_{xy}$  es diferente de cero, para un eje  $x'$  a  $\theta = 45^\circ$ , la deformación lineal  $\varepsilon_{x'} = \gamma_{xy}/2$ . Esta deformación lineal  $\varepsilon_{x'}$  se puede relacionar con el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$ , puesto que  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ . Entonces,

$$\varepsilon_{x'} = \tau_{xy} / (2G)$$

Por otra parte, el esfuerzo cortante puro  $\tau_{xy}$  se puede expresar alternativamente en términos de los esfuerzos principales  $\sigma_1 = \tau_{xy}$  y  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ , actuando a  $45^\circ$  con las direcciones de los esfuerzos cortantes. Entonces, se tiene que la deformación lineal a lo largo del eje  $x'$  a  $\theta = 45^\circ$  en función de los esfuerzos principales, es:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_1 - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} (1 + \mu) \dots\dots(6.23)$$

Igualando las dos relaciones alternativas para la deformación a lo largo de la diagonal de corte positiva y simplificando:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \dots\dots\dots(6.24)$$

Esta es la relación básica entre  $E$ ,  $G$  y  $\mu$ ; muestra que estas cantidades no son independientes entre sí. Si dos de ellas se determinan experimentalmente, es posible calcular la tercera. El módulo elástico al corte,  $G$ , siempre es menor que el módulo elástico  $E$ , porque la relación de Poisson  $\mu$  es una cantidad positiva. Para la mayor parte de los materiales metálicos  $\mu$  está en la proximidad de 0.3

## CAPITULO 7

### TEORÍAS DE FALLA (CRITERIOS DE FLUENCIA Y FRACTURA)

Las teorías de fractura, o más generalmente teorías de falla, tratan de predecir el momento en que un elemento puede fallar. Dicha falla se puede describir como una deformación plástica excesiva o en el peor de los casos fractura del elemento. La suposición básica que constituyen el marco de referencia para todas las teorías de fractura es que está se dará cuando el valor máximo del parámetro en el estado multiaxial de esfuerzos (esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ) alcance ó supere el valor del mismo parámetro en la prueba de tensión simple.

Se han postulado un sinnúmero de teorías de falla mencionándose a continuación las más importantes, así como el tipo de material para él que son válidas.

- 1.- Teoría del esfuerzo normal máximo (materiales frágiles)
- 2.- Teoría del esfuerzo cortante máximo (materiales dúctiles)
- 3.- Teoría de la energía máxima de distorsión (materiales dúctiles)
- 4.- Teoría de Mohr modificada (materiales frágiles)

A continuación se describe cada una de las teorías antes mencionadas:

#### 7.1. TEORÍA DEL ESFUERZO NORMAL MÁXIMO

Esta teoría establece lo siguiente:

"La falla de un elemento sometido a un estado multiaxial de esfuerzos se presentará cuando cualquiera de los dos esfuerzos principales ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ) alcancé o supere la resistencia máxima del material obtenida en un prueba de tensión simple". Esto es, un elemento será seguro siempre que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{\max} \quad \text{y/o}$$

$$|\sigma_2| \leq \sigma_{\max}$$

Donde:

$\sigma_1, \sigma_2 =$  Esfuerzos principales

$\sigma_{\max} =$  Resistencia máxima del material a tensión

Esta teoría puede expresarse gráficamente como se muestra en la figura 7.1.

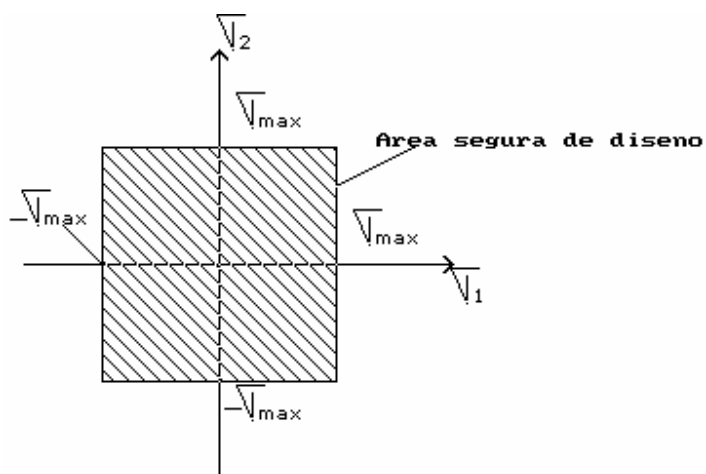


Figura 7.1. Representación gráfica de la teoría del esfuerzo normal máximo.

Se puede apreciar que si se gráfica un punto cuyas coordenadas sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  y cae dentro del cuadrado el elemento será seguro, por el contrario si cae fuera, el elemento será inseguro, esto es, que podría darse la falla.

Esta teoría tiene como principal inconveniente que se asume que la resistencia máxima del material a tensión es la misma que a compresión y en los materiales frágiles casi nunca se cumple con tal situación.

## 7.2. TEORÍA DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

Esta teoría que se aplica a materiales dúctiles y establece lo siguiente:

"La falla en un elemento sometido a un estado multiaxial de esfuerzos se producirá cuando el esfuerzo cortante producido en el mismo alcance ó supere el esfuerzo cortante que se tiene en el punto de fluencia en un elemento sometido a una prueba de tensión simple", esto es, un elemento será seguro siempre que :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_f$$

Donde:

$\sigma_f$  = resistencia a la fluencia del material

Debiéndose cumplir con la condición de que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  sean de signos opuestos, esto es, uno debe actuar a compresión y el otro a tensión. En dado caso, que ambos sean a tensión ó ambos a compresión debe satisfacerse lo siguiente:

$$|\sigma_1| \leq \sigma_f \quad \text{y} \quad |\sigma_2| \leq \sigma_f$$

La solución gráfica de esta teoría la desarrolló el ingeniero Paolo Tresca y se muestra en la figura 7.2.

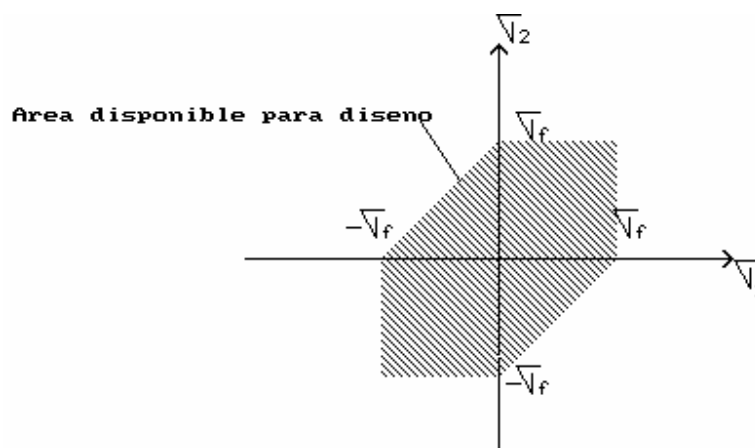


Figura 7.2.- Representación gráfica de la teoría del esfuerzo cortante máximo.

### 7.3. TEORÍA DE LA ENERGÍA MÁXIMA DE DISTORSIÓN.

*Esta teoría fue propuesta por Huber y mejorada posteriormente por Von Mises y Hencky por lo que también se le conoce como criterio de Mises-Hencky. Esta teoría puede expresarse de la manera siguiente:*

*"La falla en un elemento sometido a un estado multiaxial de esfuerzos ocurrirá cuando la energía por distorsión por unidad de volumen alcance o supere la energía de distorsión por unidad de volumen que se tiene al momento de la falla en una prueba de tensión simple"*

*Tal teoría surgió como una explicación al hecho de que los materiales sometidos a cargas hidrostáticas presentaban un límite de fluencia por encima de los obtenidos en una prueba de tensión simple. Así, se puede establecer que la energía de distorsión por unidad de volumen ( $U_d$ ) en un material isotrópico sometido a esfuerzos biaxiales se puede calcular mediante la expresión siguiente:*

$$U_d = \frac{1}{6*G} (\sigma_1^2 - \sigma_1 * \sigma_2 + \sigma_2^2)$$

*Donde:*

*$G = E$  es el módulo de elasticidad al corte*

*Por tanto, la energía de distorsión por unidad de volumen en una prueba de tensión simple se puede evaluar haciendo:*

$$\sigma_2 = 0 \text{ y } \sigma_1 = \sigma_f$$

*así la energía de distorsión por unidad de volumen en el punto de fluencia es igual a:*

$$U_{d_f} = \frac{1}{6*G} (\sigma_f^2)$$

*Igualando ambas expresiones se puede establecer que un elemento será seguro siempre y cuando se cumpla lo siguiente:*

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1 * \sigma_2 + \sigma_2^2) \leq \sigma_f^2$$

La representación gráfica de esta teoría es una elipse como la que se muestra en la figura 7.3.

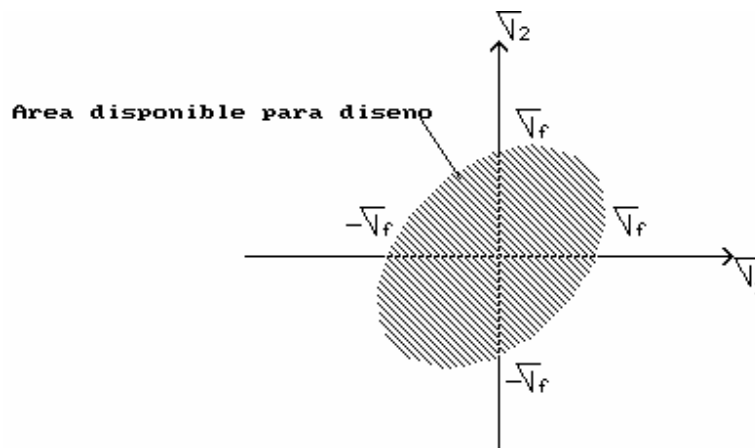


Figura 7.3. Representación gráfica de la teoría de la energía máxima de distorsión

#### 7.4. TEORÍA DE MOHR MODIFICADA

Esta teoría fue sugerida por el ingeniero alemán Otto Mohr y puede utilizarse para predecir el efecto de un estado biaxial de esfuerzos en un material frágil cuando se encuentran disponibles los resultados de varios tipos de ensayos. Supóngase que a un material frágil se le somete a una prueba de tensión y a una prueba de compresión y a partir de ellos se obtienen la resistencia máxima a tensión ( $\sigma_{max}$ ) y la resistencia máxima a compresión ( $\sigma_{maxc}$ ) para dicho material el estado de esfuerzos producido en el punto de esfuerzo máximo se presenta en la figura 7.4. Para poder analizar el caso cuando  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tienen signos opuestos, se realiza una prueba de torsión y a partir de dicho ensayo se determina la resistencia máxima al corte del material ( $\tau_{max}$ ). Dibujando al círculo con centro en el origen del sistema de coordenadas nos representa al estado de esfuerzos correspondiente a la falla en una prueba de torsión .



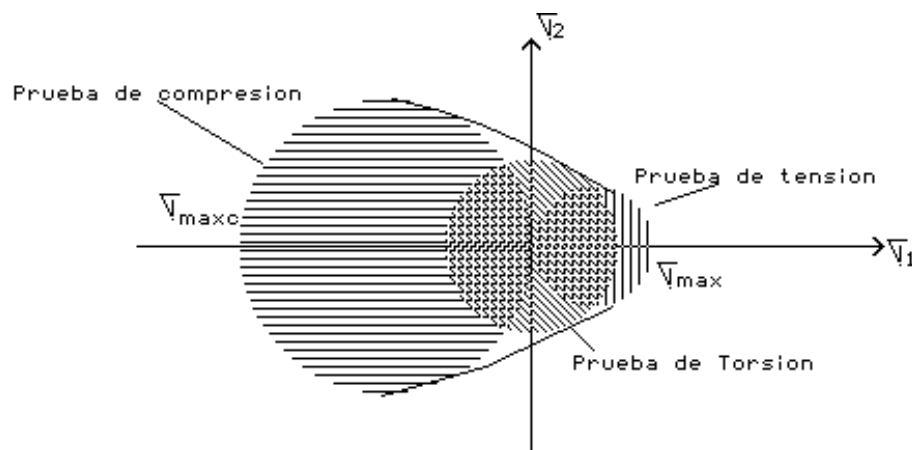


Figura 7.4.- Círculos de Mohr correspondientes a las pruebas de tensión, compresión y torsión

*El criterio de Mohr es lógica extensión de este hecho y de acuerdo con él, un estado de esfuerzos dado es seguro si su representación mediante un círculo éste queda dentro completamente del área limitada por la envolvente de los círculos correspondientes a los datos obtenidos en las distintas pruebas realizadas.*

*A la teoría de Mohr todavía se le puede hacer un pequeño cambio para ponerla de acuerdo con los resultados experimentales, consiste en extender las líneas del primer y tercer cuadrante dentro del segundo y cuarto como se puede apreciar en la figura 7.5. Esta teoría se aplica mejor al diseño en forma gráfica.*

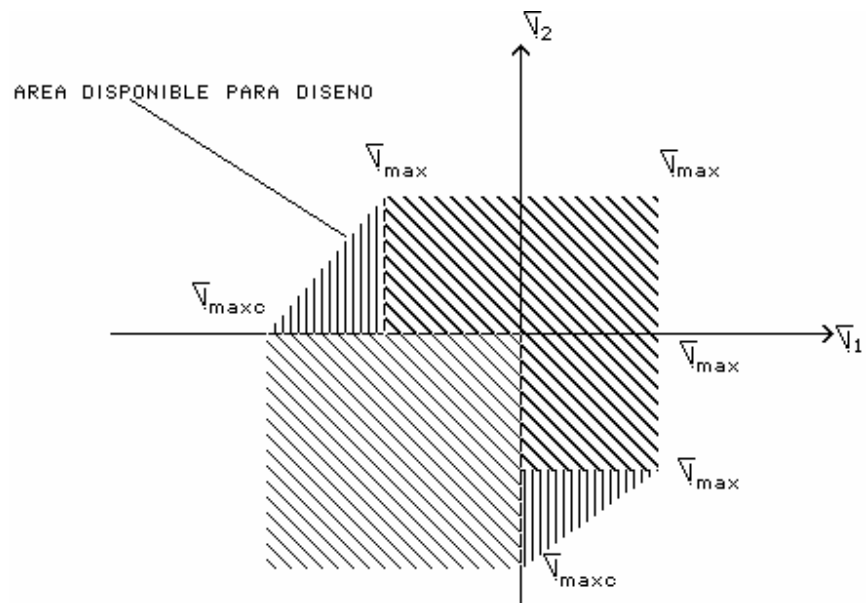


Figura 7.5.- Representación gráfica de la teoría de Mohr Modificada.

## CAPITULO 8

### COLUMNAS

#### 8.1 DEFINICIÓN

*Se define a una columna como un elemento esbelto relativamente largo cargado a compresión. Esta descripción se plantea en términos relativos y no es muy útil para el análisis.*

*Se pueden clasificar de manera general de acuerdo a la forma de falla tal y como se muestra a continuación.*

- Columna corta (falla por aplastamiento)*
- Columna larga (falla por pandeo)*
- Columna intermedia (falla por una combinación de aplastamiento y pandeo)*

#### 8.2 RELACIÓN DE ESBELTEZ

*El cálculo de la relación de esbeltez permite identificar el tipo de columna para poder analizarla de forma adecuada y debe tenerse en cuenta los factores siguientes. La longitud, el perfil de la sección transversal y las dimensiones de la columna, así la manera de sujetar los extremos de la columna en las estructuras que generan las cargas y las reacciones en la columna.*

*A continuación se definen los elementos involucrados en el cálculo de la relación de esbeltez:*

*Longitud real, L. En una columna simple con la carga aplicada en un extremo y la reacción creada en el otro, la longitud real es, obviamente, la longitud entre sus extremos. Pero en componentes de estructuras cargados a compresión que disponen de medios de sujeción laterales que impiden que se pandee, la longitud real*

se considera entre los puntos de restricción. Cada una de las partes, entonces, se considera como una columna aparte.

Factor de fijación de los extremos,  $K$ . El factor de fijación de los extremos mide el grado de limitación contra rotación de cada extremo. Por lo general, se consideran tres tipos clásicos de conexiones de extremos: el extremo de pasador, el extremo fijo y el extremo libre. La figura 8.1 muestra varias combinaciones de tipos de extremos con los valores correspondientes de  $K$ . Obsérvese que se dan dos valores de  $K$ . Uno, es el valor teórico y el otro, es el que por lo general se usa en situaciones prácticas, aunque se debe reconocer que es difícil lograr el extremo verdaderamente fijo, como se verá a continuación.

Los extremos de pasador están imposibilitados contra rotación. Cuando una columna con sus dos extremos de pasador se pandea, adopta la forma de una curva uniforme entre sus extremos, como se muestra en la figura 1.1(a). Éste es el caso básico de pandeo de columna y el valor de  $K=1.0$  se pueden aplicar a columnas con dos extremos de pasador. Un tipo ideal de extremo de pasador es la articulación de rótula que permite el giro de la columna en cualquier dirección con respecto a cualquier eje. Una junta de pasador cilíndrico permite la libre rotación con respecto al eje del pasador, aunque crea algo de restricción en el plano perpendicular a su eje. Por esta razón se debe tener cuidado al aplicar factores de fijación a pasadores cilíndricos. Se supone que el extremo de pasador está guiado de tal modo que la línea de acción de la carga axial no cambia.

En teoría, los extremos fijos impiden perfectamente la rotación de columna en sus extremos. A medida que la columna

tiende a pandearse, la curva de deflexión del eje de la columna debe aproximarse al extremo fijo con una pendiente cero, como se ilustra en a figura 8.1 (b). La figura pandeada se arquea hacia afuera a la mitad pero exhibe dos puntos de inflexión donde se invierte la dirección de la curvatura cerca de los extremos. El valor teórico del factor de fijación de los extremos es  $K = 0.5$ , el cual indica que la columna actúa como si fuera sólo la mitad de larga de lo que realmente es.

Las columnas con extremos fijos son mucho más rígidas que las columnas con extremos de pasador y, por consiguiente, son capaces de soportar cargas mayores antes de pandearse. Se debe entender que es muy difícil fijar los extremos de una columna a la perfección.

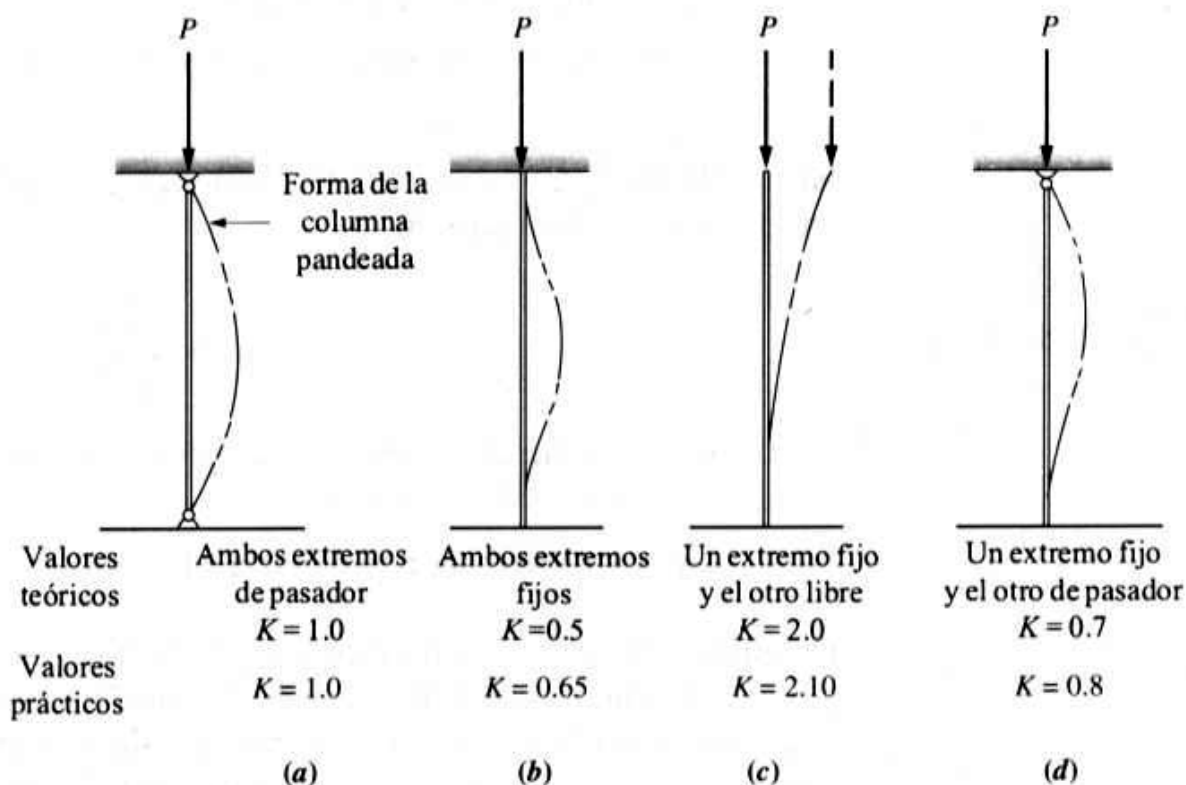


Figura 8.1.- Valores de  $K$  para longitud efectiva,  $L_e = KL$ , para diferentes conexiones de extremos.

Se requiere que la conexión a la columna sea rígida y firme y que la estructura a la que se transfieren las cargas también sea rígida y firme. Por ello, en la práctica se recomienda el valor mayor de  $K = 0.65$ .

El extremo libre de una columna puede girar y también trasladarse. Pero como puede moverse en cualquier dirección, éste es el peor caso de fijación de los extremos de una columna. El único modo práctico de usar una columna con un extremo libre es tener el extremo opuesto fijo, como se ilustra en la figura 8.1(c).

Una columna como ésta en ocasiones se conoce como el caso del astabandera porque el extremo fijo se comporta como un astabandera insertada profundamente en un orificio de ajuste apretado, mientras el otro extremo libre puede moverse en cualquier dirección. Conocida como la condición de extremo libre, el valor teórico de  $K$  es 2.0. Un valor práctico es  $K = 2.10$ .

En la figura 8.1 (d) se muestra la combinación de un extremo fijo y un extremo de pasador. Nótese que la curva de flexión se aproxima al extremo fijo con una pendiente cero mientras que el extremo de pasador gira libremente. El valor teórico de  $K = 0.7$  se aplica a esa condición de fijación mientras que en la práctica se recomienda  $K = 0.80$ .

Longitud efectiva,  $L_e$ . La longitud efectiva combina la longitud real con el factor de fijación de extremos;

$$L_e = KL$$

En suma, para calcular la longitud efectiva se usarán las siguientes relaciones:

1. Columnas con extremos de pasador:

$$L_e = KL = 1.0(L) = L$$

2. Columnas con extremos fijos:

$$L_e = KL = 0.65(L)$$

3. Columnas con extremos libres:

$$L_e = KL = 2.10(L)$$

4. Columnas con pasadores fijos y el otro fijo:

$$L_e = KL = 0.80(L)$$

Radio de giro,  $r$ . La medida de esbeltez de la sección transversal de la columna es su radio de giro,  $r$ , definida como:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \dots\dots (8.1)$$

Donde:

$I$  = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto a uno de los ejes principales.

$A$  = área de la sección transversal.

Como tanto  $I$  como  $A$  son propiedades geométricas de la sección transversal, el radio de giro, también lo es. En el (apéndice A) se dan fórmulas para calcular el radio de giro de varios perfiles comunes. Además, se dan otras propiedades de algunos de los perfiles estándar del apéndice. Para los que no se da  $r$ , con los valores disponibles de  $I$  y  $A$  y la ecuación (8.1) se puede calcular de manera muy simple.

Nótese que el valor del radio de giro,  $r$ , depende del eje con respecto al cual se va a calcular. En la mayoría de los casos, se tiene que determinar el eje con respecto al cual el radio de giro es mínimo, porque ése es el eje con respecto al cual la columna probablemente se pandeará. Considérese, por ejemplo, una columna de sección rectangular cuyo ancho sea mucho mayor que su espesor, como se ilustra en la figura 8.2.

Se puede usar una regla graduada simple para demostrar que cuando se carga a compresión axial con poca o ninguna restricción en los extremos, la columna siempre se pandeará con respecto al eje que pasa por la dimensión mínima.

En el caso de la sección rectangular mostrado en las figuras 8.2 (b) y (c):

$$r_{\min} = r_y = 0.289t$$

En donde  $t$  es el espesor del rectángulo. Nótese que:

$$r_x = 0.289h$$

En donde  $h$  es la altura del rectángulo y que  $h > t$ . Por tanto:

$$r_x > r_y$$

y por tanto  $r_y$  es el radio mínimo de giro en la sección.

Para las vigas de patín ancho y para las vigas American Standard, el valor mínimo de  $r$  es el calculado con respecto al eje Y-Y; es decir:



$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

*Asimismo, para tubería estructural rectangular (apéndice A2), el radio mínimo de giro es el calculado con respecto al eje Y-Y. En la tabla se dan valores de  $r$ .*

*Para ángulos estructurales de acero, llamados perfiles L, ni el eje X-X ni el eje Y-Y proporcionan el radio de giro mínimo. El  $r_{\min}$  es el calculado con respecto al eje Z-Z.*

*Para secciones simétricas, el valor de  $r$  es el mismo con respecto a cualquier eje principal. Tales perfiles son las secciones circulares sólidas o huecas y las secciones cuadradas huecas.*

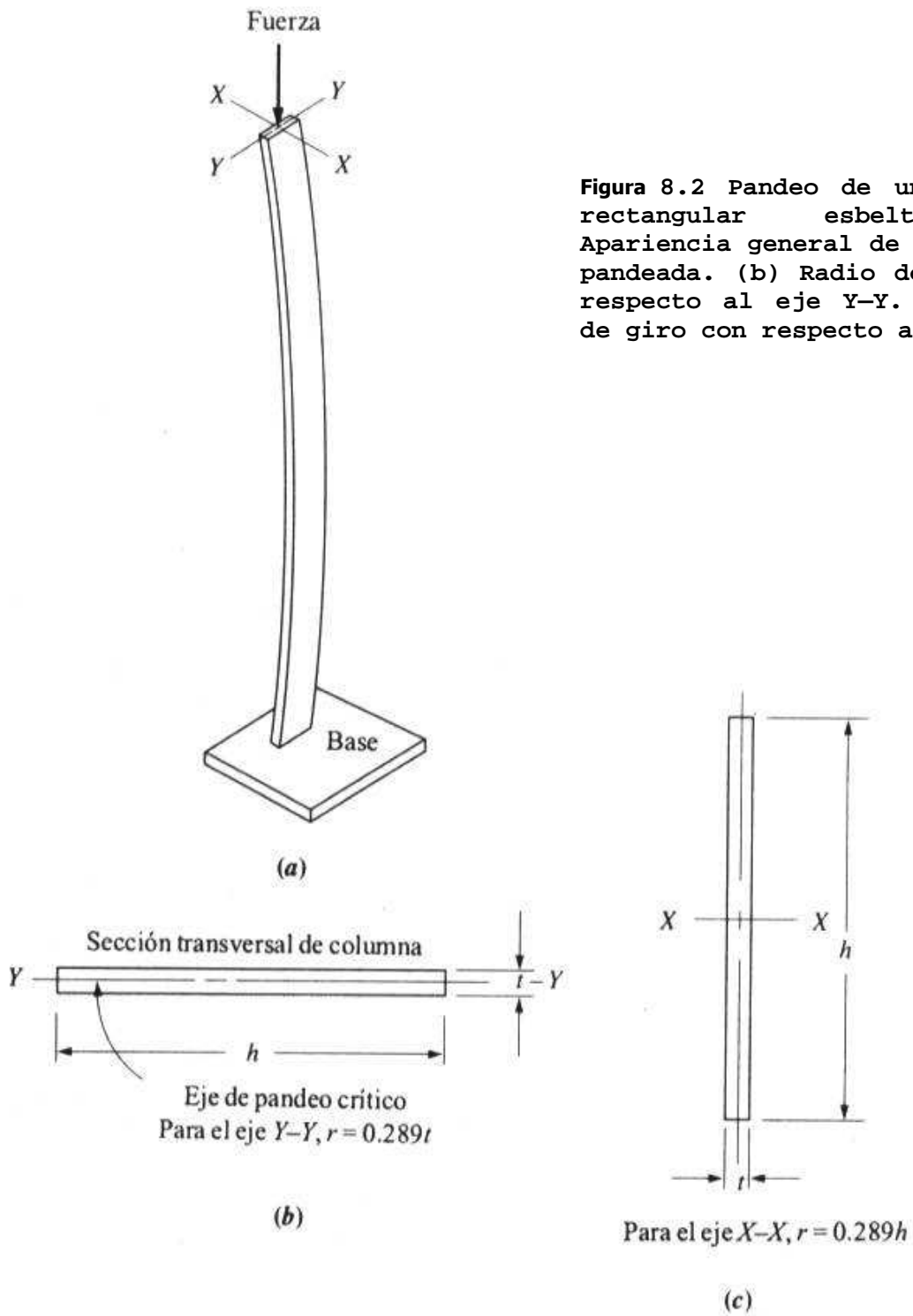


Figura 8.2 Pandeo de una columna rectangular esbelta. (a) Apariencia general de la columna pandeada. (b) Radio de giro con respecto al eje Y-Y. (c) Radio de giro con respecto al eje X-X.

La medida de esbeltez comúnmente utilizada es la relación de esbeltez, la cual se define como:

$$SR = \frac{KL}{r} = \frac{L_e}{r} \dots\dots\dots (8.2)$$

Donde:

$L$  = longitud real de la columna entre los puntos de apoyo o de restricción lateral

$K$  = factor de fijación de los extremos

$L_e$  = longitud efectiva, teniendo en cuenta la manera de fijar los extremos (observe que  $L_e = KL$ )

$r$  = radio de giro mínimo de la sección transversal de la columna

En la tabla 8.1 se presenta resumido el método usado para calcular la relación de esbeltez.

Tabla 8.1 Resumen del método para calcular la relación de esbeltez

1. Determine la longitud real de la columna,  $L$ , entre los puntos extremos o entre los puntos de restricción lateral.
2. Determine el factor de fijación de extremos con base en el tipo de apoyo de los extremos, mostrado en la figura 8.1.
3. Calcule la longitud efectiva,  $L_e = KL$ .
4. Calcule el radio mínimo de giro de la sección transversal de la columna.
5. Calcule la razón de esbeltez por medio de:

$$SR = \frac{L_e}{r_{\min}}$$

### 8.3 RELACIÓN DE ESBELTEZ DE TRANSICIÓN

¿Cuándo se considera larga una columna? La respuesta a esta pregunta requiere la determinación de la relación de esbeltez de transición, o de la constante de columna  $C_c$ .

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \dots\dots\dots (8.3)$$

Donde:

$E$  = Modulo de Elasticidad

$\sigma_y$  = Resistencia a la fluencia o cadencia

Las reglas siguientes tienen que ver con el valor  $C_c$ .

- Si la relación de esbeltez efectiva real,  $\frac{L_e}{r}$  es mayor que  $C_c$ , entonces la columna es larga, y al analizar la columna se debe usar la fórmula de Euler.
- Si la relación real,  $\frac{L_e}{r}$  es menor que  $C_c$  pero mayor que 25 entonces la columna es intermedia. En este caso, se debe usar la fórmula de J.B. Jonson.
- Si la relación  $\frac{L_e}{r}$  es menor que 25 entonces la columna es corta y basta con aplicar la ecuación básica de esfuerzo normal, esto es

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Cuando se va a analizar una columna dada para determinar la carga que soportará, en primer lugar habrá que calcular el valor

de  $C_c$  y la razón real  $\frac{L_e}{r}$  para decidir qué método de análisis se debe usar. Nótese que  $C_c$  depende de la resistencia a la cedencia  $\sigma_f$ , y del módulo de elasticidad  $E$  del material. Cuando se trabaja con acero, por lo general se considera  $E = 207 \text{ GPa}$  ( $30 \times 10^6 \text{ lb/pulg.}^2$ ), para el aluminio,  $E$  es aproximadamente de  $69 \text{ GPa}$  ( $10 \times 10^6 \text{ lb/pulg.}^2$ ).

#### 8.4 FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS LARGAS

Para columnas largas cuya razón de esbeltez es mayor que el valor de transición  $C_c$ , se puede usar la fórmula de Euler para predecir la carga crítica con la que la columna comenzara a pandearse. La fórmula es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(L_e/r)^2} \dots\dots (8.4)$$

Donde:

$A$  = área de la sección transversal de la columna.

Otra forma de expresar esta fórmula sería en función del momento de inercia, puesto que  $r^2 = I/A$ . Entonces, la fórmula se transforma en:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \dots\dots\dots (8.5)$$

**8.5 FÓRMULA DE J. B. JOHNSON PARA COLUMNAS INTERMEDIAS**

Si la razón de esbeltez efectiva real de una columna,  $L_e/r$ , es menor que el valor de transición  $C_c$ , la fórmula de Euler predice una carga crítica exorbitante. Una fórmula recomendada para el diseño de máquinas en el intervalo de  $L_e/r$  menor que  $C_c$  es la fórmula de J. B. Johnson, la cual se presenta a continuación:

$$P_{cr} = A\sigma_f \left[ 1 - \frac{\sigma_f (L_e/r)^2}{4\pi^2 E} \right] \dots (8.6)$$

Donde:

$A$  = área de sección transversal

$\sigma_f$  = resistencia a la cedencia

$L_e$  = longitud efectiva, teniendo en cuenta la manera de fijar los extremos (observe que  $L_e = KL$ )

$r$  = radio de giro mínimo de la sección transversal de la columna

$E$  = módulo de elasticidad

Ésta es una forma de un conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones parabólicas, y que concuerda bien con el comportamiento de columnas de acero para maquinaria.

La fórmula de Johnson da el mismo resultado que la fórmula de Euler de la carga crítica a la razón de esbeltez de transición  $C_c$ . Entonces, en el caso de columnas cortas, la carga crítica se aproxima a la pronosticada por la ecuación del esfuerzo de compresión directo,  $\sigma = P/A$ . Por consiguiente, se puede decir que la fórmula de Johnson se aplica mejor a columnas de longitud intermedia.

### 8.6 FACTORES DE DISEÑO PARA COLUMNAS Y CARGA PERMISIBLE

Debido a que una columna falla por pandeo o cedencia del material, los métodos utilizados para calcular el esfuerzo de diseño no se aplican a columnas.

Así que, la carga permisible se calcula dividiendo la carga de pandeo crítica con la fórmula de Euler [ecuación (8.4)] o la fórmula de Johnson [ecuación (8.6)] por un factor de diseño, *F.S.*. Es decir:

$$P_a = \frac{P_{cr}}{F.S.} \dots\dots (8.7)$$

Donde:

$P_a$  = carga segura permisible

$P_{cr}$  = carga de pandeo crítica

*F.S.* = factor de diseño

La selección del factor de diseño es la responsabilidad del diseñador a menos que el proyecto figure en un reglamento. Los factores a considerar en la selección de un factor de diseño son similares a los utilizados para determinar factores de diseño aplicados a esfuerzos.

Un factor común utilizado en el diseño mecánico es  $N=3.0$ , y la razón por la que se seleccionó este valor es la incertidumbre con respecto a las propiedades del material, la fijación de los extremos, lo recto de la columna o la posibilidad de que la carga se aplique con algo de excentricidad y no a lo largo del eje de la columna. En ocasiones se usan factores mayores en situaciones críticas y para columnas muy largas.

En la construcción de edificios, donde el diseño está regido por las especificaciones del American Institute of Steel Construction, AISC, se recomienda un factor del 1.92 para columnas largas. La Aluminum Association requiere  $N = 1.95$  para columnas largas.

### 8.7 ANÁLISIS DE COLUMNA CORTAS

Para el análisis de columnas cortas únicamente debe aplicarse la ecuación básica para esfuerzo normal.

$$P_{cr} = \sigma \cdot A$$

Donde:

$P_{cr}$  = carga aplicable

$\sigma$  = esfuerzo admisible

$A$  = área de la sección transversal

### Ejemplos

8.1. Se tiene que usar un miembro circular a compresión con ambos extremos de pasador de acero AISI1020 estirado en frío en una máquina. Su diámetro es de 25 mm y su altura de 950 mm. ¿Cuál es la carga máxima que el miembro puede soportar antes de pandearse? También calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de  $N=3$ .

Datos:

- $L = 950$  mm
- Sección transversal circular  $D=25$  mm
- Extremos de pasador.
- Acero AISI 1020 estirado en frío.



8.2 Determine la carga crítica sobre una columna de acero de sección transversal cuadrada de 12mm por lado y 300mm de longitud. La columna tiene que ser de acero AISI 1040 laminado en caliente. Uno de sus extremos se soldará rígidamente a un apoyo firme y el otro se conectará con una junta de pasador. También calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de  $N=3$ .

Datos:

- $L = 300\text{mm}$
- $b = 12\text{mm}$
- Un extremo fijo y otro de pasador
- Acero AISI 1040 laminado en caliente
- $N=3$